Dodatne teme u srednjoškolskoj nastavi matematike - Linearni operatori i matrice

Sinković, Ana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Sinković

DODATNE TEME U SREDNJOŠKOLSKOJ NASTAVI MATEMATIKE - LINEARNI OPERATORI I MATRICE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, ožujak, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Hvala mojim roditeljima koji su mi od samog početka dali bezuvjetnu podršku i omogućili mi da studiram ono što najviše želim i volim. Svaki svoj uspjeh, pa tako i ovaj rad, posvećujem upravo vama.

Sadržaj

Uvod

U vrijeme modernih tehnologija, gdje su učenici svakodnevno obasipani velikom količinom informacija, za nastavnike je postao izazov zadržati pažnju učenika cijeli školski sat. Učenici posebno brzo gube interes ukoliko ne vide svrhu gradiva koje se obrađuje. ”Koncentriranjem na što, izostavljajući zašto, matematika je svedena na praznu ljusku. Umjetnost nije u ”istini” već u objašnjenju i razlozima. Razlog je taj koji daje istinitost sadržaju i određuje što je zaista rečeno i što se mislilo. Matematika je umjetnost obrazlaganja.” [7] Upravo iz tog razloga javila se potreba za promjenom dosadašnjeg načina poučavanja. Frontalnu nastavu postepeno zamjenjuje nastava usmjerena na učenika, tzv. suvremena nastava. Među ostalim, u suvremenoj nastavi naglasak je na istraživačkoj nastavi u kojoj učenici samostalno istražuju, otkrivaju i donose zaključke te na taj način razvijaju sposobnost rješavanja problema i donošenja odluka. Samim time i uloga nastavnika znatno je promjenjena. Zadatak nastavnika je motivirati te poticati samostalnost učenika, kao i voditi učenike prema očekivanim zaključcima te ih prema potrebi usmjeriti na pravi put. Naveden promjene posebno su nužne u nastavi matematike, kao jednoj od predmeta koji večina učenika ili ne voli ili smatra teškim. Kao što je rekao profesor Kurnik: ”Samo usvajanje znanja je niža razina matematičkog obrazovanja. Potrebno je podići kakvoću poučavanja, znanja i sposobnosti, osuvremeniti nastavu matematike.” [5]

Suvremena nastava matematike treba, prije svega, zadovoljiti tri osnovna uvjeta:

- potrebu za uvođenjem novih pojmova i postupaka
- smislenost pojmova i postupaka koje želimo uvesti
- samostalno učeničko otkrivanje novih pojmova i postupaka

Ovaj diplomski rad organiziran je kao niz učeničkih aktivnosti koje zadovoljavaju navedene uvjete. U prvom poglavlju učenici kroz 9 aktivnosti postepeno izgrađuju pojam matrice. Počevši od prirodne organizacije zadanih podataka u tablicu pa sve do množenja matrica, učenici otkrivaju smisao matrica, pojmove i postupke vezane uz njih te mogućnost primjene u drugim dijelovima matematike. Istraživanje mogućnosti primjene matrica nastavlja se i u idućem poglavlju u kojem je naglasak na linearnim operatorima. Učenici nakon upoznavanja s pojmom linearnih operatora otkrivaju njihovu vezu s matricama, vezu između kompozicije linearnih operatora i matričnih prikaza operatora te povezuju grafički i matrični prikaz djelovanja geometrijskih preslikavanja.

Svaka aktivnost, uz nastavni listić za učenike i potrebne materijale za provođenje aktivnosti, sadrži i *Kutak za nastavnike*. U njemu su, osim rješenja nastavnih listića, dane i metodičke smjernice, upute i definicije, navedeni mogući, ali i očekivani, učenički odgovori. U odgovarajućim aktivnostima ističemo potrebu za pronalaženjem primjera, kontraprimjera te primjera koji ne odgovaraju zadanim uvjetima.

U posljednjem poglavlju razrađen je projektni zadatak u kojem je naglasak na samostalnom istraživanju učenika te primjeni naučenog gradiva na novim, konkretnim situacijama iz stvarnog života.

Poglavlje 1

Matrice u srednjoškolskoj nastavi

Matrice su u srednjoj školi dio obveznog sadržaja jedino u programu za prirodoslovno-matematičke gimnazije te se obrađuju u 2. polugodištu 3. razreda. Za navedeni program postoje dva udžbenička kompleta ([1], [2]) te smo prije sastavljanja aktivnosti proučili kako su matrice i prateći sadržaji u njima obrađeni.

U oba udžbenika obrađuje se definicija matrice, primjeri specijalnih matrica, operacije s matricama, inverz matrice drugog i trećeg reda te matrične jednadžbe.

U udžbeniku [1], nakon obrade navedenih pojmova izostaje primjena matrica, odnosno ne obrađuje se rješavanje sustava Gauss-Jordanovom metodom. Tako učenici ostaju zakinuti za jednu od češćih i važnijih primjena matrica i s pravom si mogu postaviti pitanje: "Čemu matrice uopće služe?".

S druge pak strane, u udžbeniku [2], pojam matrice uvodi se i prije same obrade navedenog gradiva, upravo u poglavlju gdje učenici obrađuju različite metode rješavanja sustava, poput metode determinante i Gauss-Jordanove metode. Iako je upravo zapisivanje koeficijenata sustava u pravokutnu tablicu, a kasnije i rješavanje sustava koristeći tu tablicu, prikladan motivacijski zadatak u kojem učenici mogu uvidjeti potrebu i smisao uvođenja matrica, u navedenom udžbeniku nije iskorištena ta mogućnost. Naime, učenicima je direktno prezentirano na koji način koeficijente sustava zapisujemo u tablicu, a da ih se nije potaknulo na samostalno razmišljanje zašto je to tako.

Iz navedenih razloga, redoslijed i gradivo pokriveno aktivnostima u ovom radu razlikuje se od onog predloženog u srednjoškolskim udžbenicima. Učenicima želimo omogućiti da se najprije upoznaju s matricom kao tablicom za organiziranje podataka, a zatim da postepeno otkrivaju njihova svojstva, što sve s matricama mogu raditi te u kojim nam područjima taj način organiziranja podataka može biti od koristi.

Tako će se učenici najprije upoznati s matricama te temeljnim pojmovima vezanim uz njih, a zatim će proučavati osnovne operacije s matricama (zbrajanje, svojstva zbrajanja, množenje matrice skalarom). Nakon toga, učenici će primjenjivati matrice za rješavanje sustava Gauss-Jordanovom metodom te će proučavati rješenja homogenog i nehomogenog sustava. Navedene pojmove i postupke učenici mogu usvojiti intuitivno, uz minimalnu intervenciju nastavnika prilikom izvođenja aktivnosti i detaljno razrađenu diskusiju nakon aktivnosti.

Za razliku od prethodno navedenog, množenje matrica puno je složeniji postupak kojeg će učenici vrlo teško samostalno otkriti. Važno je da učenici sami uoče što ”leži” iza množenja matrica, tj. koje elemente iz matrica ima smisla međusobno množiti. Više o tome, u zadnjoj aktivnosti ovog poglavlja.

1.1 Uvođenje matrica i osnovnih pojmova

Aktivnost 1. *Složi sustav*

Cilj: učenici će podatke organizirati u pravokutnu tablicu (matricu)

Nastavni oblik: individualni rad

Nastavna metoda: problemska nastava

Potrebni materijal: nastavni listić sa zadatkom, kartice s koeficijentima

Tijek aktivnosti:
Svaki učenik dobit će listić sa zadatkom i kartice s koeficijentima. Učenici za rješavanje imaju 10 minuta. Nakon što riješe zadatak, slijedi prezentacija rješenja, diskusija i uvođenje novih pojmova.

Nastavni listić:

Zadatak:
Izviđač Dario prodaje kekse. Mala kutija keksa košta 3 kune, srednja kutija 5 kuna, a velika kutija 7 kuna. Dario je ukupno prodao 15 kutija i zaradio 77 kuna. Prodao je pet kutija više srednjih nego malih i velikih kutija zajedno. Koliko kutija pojedine vrste keksi je Dario prodao?

1) Postavi sustav te ga zapiši u općem obliku.

2) Koristeći dobivene kartice s koeficijentima, složi ih tako da predstavljaju dobiveni sustav.

3) Što predstavlja treća kartica u prvom redu?

4) Što predstavlja druga kartica u četvrtom stupcu?

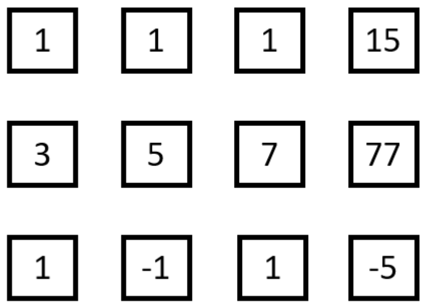
5) Kako biste nazvali tablicu u koju ste organizirali podatke?

Kutak za nastavnika:

Nužno predznanje učenika za ovu aktivnost je postavljanje sustava 3×3 zadanog riječima te poznavanje pojma *opći oblik sustava*. Sam zadatak ne treba biti kompliciran jer nam rješavanje sustava nije u prvom planu.

Rješenje zadatka 1) je: $\begin{cases} x + y + z = 15 \\ 3x + 5y + 7z = 77, \\ x - y + 7 = -5 \end{cases}$ gdje x označava broj malih kutija, y broj srednjih kutija i z broj velikih kutija. Rješenje je jednoznačno do na poredak jednadžbi u sustavu, što ne utječe bitno na ostale odgovore.

Za rješenje zadatka 2) možemo pripremiti kartice s koeficijentima koje sa stražnje strane imaju nalijepljenu magnetnu traku. Na taj način netko od učenika svoje rješenje može lako prikazati na ploči, a to će nam olakšati i daljnju diskusiju. Ako su jednadžbe sustava napisane navedenim redoslijedom, rješenje zadatka 2) možemo vidjeti na slici 1.1.



Slika 1.1: Kartice s koeficijentima sustava

S obzirom na to da je potrebno 12 kartica, najbolje je da ih učenici dobiju točan broj, kako ne bi gubili vrijeme na traženje odgovarajućih kartica. Druga opcija je da zadamo sustav 2×2 pa učenicima možemo podijeliti i "lažne" kartice koje im nisu potrebne.

U pitanjima 3) i 4) provjeravamo razumiju li učenici vezu između sustava i tablice s koeficijentima. Očekivani odgovori su: Treća kartica u prvom retku predstavlja koeficijent uz varijablu z u prvoj jednadžbi, a druga kartica u četvrtom stupcu predstavlja slobodni koeficijent u drugoj jednadžbi. Ova pitanja su predviđena da s učenicima započnemo diskusiju što su retci, a što stupci. Za očekivati je da će učenici imati različite interpretacije stupaca i redaka. Ukoliko odgovori učenika na prethodna pitanja odgovaraju njihovoj interpretaciji stupaca, odnosno redaka, smatramo ih točnima. Nakon kratke diskusije, učenicima je potrebno argumentirati što smo odlučili zvati retcima, a što stupcima, kako bi se kasnije lakše prisjetili. Neki od argumenata mogu biti: "Rasvjetni stupovi su okomiti na površinu Zemlje, pa ćemo zato vertikalne kolone zvati stupcima."; "Svaku jednadžbu pišemo u svoj red pa koeficijenti pojedine jednadžbe čine redak.".

Zadnjim pitanjem provjeravamo jesu li se učenici već susreli s pojmom matrice. Ukoliko netko od učenika odgovori potvrdno, korisno je poslušati gdje se već susreo s navedenim pojmom te što o njemu zna.

Nakon što s učenicima prođemo sva pitanja iz nastavnog listića, dobivenu tablicu s koeficijentima trebamo zapisati, strogo matematički, u matricu. Tako prelazimo na definiciju matrica i osnovnih pojmova vezanih uz njih.

Definicija 1.1.1. ***Matrica*** *je pravokutna tablica realnih brojeva. Njih nazivamo* ***elementima matrice****. Element matrice A koji se nalazi u i-tom retku i j-tom stupcu označavamo s* a_{ij} *i nazivamo* ***opći element*** *matrice. ([2])*

Definicija 1.1.2. *Za matricu sa m redaka i n stupaca kažemo da je* ***tipa*** $m \times n$. *Ako je broj redaka m jednak broju stupaca n, za matricu kažemo da je* ***kvadratna matrica reda*** *n. ([2])*

Definicija 1.1.3. *Dvije matrice A i B su jednake ako su istog tipa i ako imaju jednake odgovarajuće elemente, tj. vrijedi* $a_{ij} = b_{ij}$. *([2])*

Definicija 1.1.4. ***Nulmatrica*** *je matrica kojoj su svi elementi nule. ([2])*

Definicija 1.1.5. ***Dijagonalna matrica*** *definirana je samo za kvadratne matrice. To je matrica kojoj su svi elementi izvan dijagonale jednaki nuli. ([2])*

Definicija 1.1.6. ***Jedinična matrica*** *je dijagonalna matrica kojoj su svi dijagonalni elementi jednaki* 1. *([2])*

Definicija 1.1.7. ***Gornja trokutasta matrica*** *je matrica kojoj su svi elementi ispod dijagonale jednaki* 0.

Definicija 1.1.8. ***Donja trokutasta matrica*** *je matrica kojoj su svi elementi iznad dijagonale jednaki* 0.

Definicija 1.1.9. ***Transponirana matrica*** *matrice A u oznaci* A^{τ} *je matrica koju dobijemo tako da retke matrice A zapišemo u stupce matrice* A^{τ}. *([2])*

Definicija 1.1.10. *Matrica A je* ***simetrična*** *ako vrijedi* $A = A^{\tau}$. *([2])*

Nije potrebno sve navedene definicije pisati na ploči, niti tražiti od učenika da ih zapišu u bilježnice. Korisno je da prije svake definicije s učenicima diskutiramo o pojmu koji želimo definirati te da nakon definicije tražimo od učenika da za navedeni pojam zapišu nekoliko primjera u svoje bilježnice.

Također, nije na odmet spomenuti da matricu iz uvodnog zadatka nazivamo proširenom matricom sustava, a matricu bez stupca slobodnih koeficijenata, matricom sustava. S navedenim pojmovima, učenici će se susresti kasnije, pri uvođenju Gauss-Jordanove metode rješavanja sustava.

1.2 Osnovne operacije s matricama

Pod osnovnim operacijama s matricama smatramo zbrajanje, odnosno oduzimanje te množenje matrice skalarom. Kao što je navedeno ranije, množenje matrica je složeniji postupak te će se kao takav obraditi na kraju ovog poglavlja.

Aktivnost 2. *Zbrajanje matrica*

Cilj: učenici otkrivaju postupak zbrajanja matrica te svojstva zbrajanja matrica

Nastavni oblik: individualni rad, rad u paru

Nastavna metoda: problemska nastava

Potrebni materijal: nastavni listić sa zadatkom

Tijek aktivnosti:
Svaki učenik dobit će listić sa zadatkom. Listić se sastoji od dva dijela. U prvom dijelu učenici otkrivaju postupak zbrajanja matrica. Za rješavanje prvog dijela učenici imaju 15 minuta. Nakon toga slijedi diskusija i precizno definiranje operacije zbrajanja. Učenici zatim nastavljaju rješavati drugi dio nastavnog listića u kojem provjeravaju vrijede li komutativnost i asocijativnost zbrajanja matrica. Za rješavanje drugog dijela učenici također imaju 15 minuta. Nakon što su učenici gotovi, slijedi diskusija.

Nastavni listić:

Zadatak:

I Dio

1. Mama prvi dan pojede 3 jabuke i 2 kruške. Tata pojede 4 jabuke i 1 krušku. Podatke organiziraj u matricu.
a) Što označavaju stupci u tvojoj matrici?
b) Što označavaju retci?
c) Provjeri je li prijatelj iz klupe podatke organizirao na isti način. Ako nije, proučite razliku. Jesu li oba rješenja smislena? Ako ste podatke organizirali na isti način, razmislite postoji li još koji.

2. Mama drugi dan pojede 2 jabuke i 1 krušku, a tata 3 jabuke i 5 krušaka. Podatke organiziraj u matricu (na isti način kao i u 1. zadatku)

3. Odgovori riječima:
a) Koliko je mama ukupno pojela jabuka, a koliko krušaka?
b) Koliko je tata ukupno pojeo jabuka, a koliko krušaka?
c) Podatke iz a) i b) zadatka organiziraj u matricu (na isti način kao i u 1. i 2. zadatku)

4. Možete li nekom računskom operacijom povezati matricu iz zadatka 3.c) s matricama iz 1. i 2. zadatka?

II Dio

Na proizvoljnim matricama tipa 3×3 provjeri vrijede li sljedeće jednakosti:
a) $A + B = B + A$
b) $A + (B + C) = (A + B) + C$

Vrijede li ove jednakosti općenito, za sve matrice A, B i C istog tipa? Iz kojih prethodno poznatih svojstava to proizlazi?

Kutak za nastavnika:

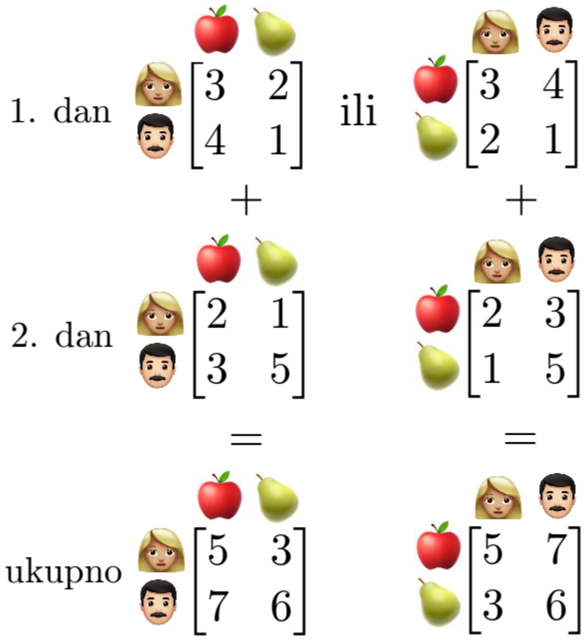
Operaciju zbrajanja matrica uvodimo na primjeru matrica tipa 2×2 kako učenike ne bismo zatrpali hrpom informacija u tekstu zadatka.

Očekivano je da neće svi učenici u razredu podatke organizirati na isti način. Iz tog razloga učenike u 1. zadatku potičemo da razmisle što označavaju stupci u njihovim matricama, a što retci. Navedena pitanja mogu ih potaknuti da dobiju ideju zamijeniti podatke u stupcima i podatke u retcima. Naravno, moguća su još dva točna rješenja koja dobijemo ako zamijenimo poredak voća, odnosno roditelja. U nastavku ćemo se usmjeriti na rješenja koja vidimo u prvom i drugom retku na slici 1.2.

Proučavajući navedena rješenja, možemo provjeriti poznavanje prethodno naučenog pojma - transponirane matrice. Učenicima postavljamo pitanja: "U čemu se razlikuju ove dvije matrice? Kako ih zovemo?". Osim ponavljanja pojma transponirane matrice, učenicima skrećemo pozornost na to što su odabrali pisati u retke, a što u stupce, kako bi u zadatcima 2. i 3. podatke organizirali na isti način.

Sliku 1.2 (bez uključenih znakova "+" i "=") možemo prikazati na projektoru prije nego što učenici prezentiraju rješenje 4. zadatka. Na taj način omogućujemo učenicima koji nisu došli do rješenja da vizualiziraju problem te najprije samostalno dođu do očekivanog zaključka. Naravno, rješenje ovog problema potrebno je zapisati i strogo matematički:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \text{ ili } \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

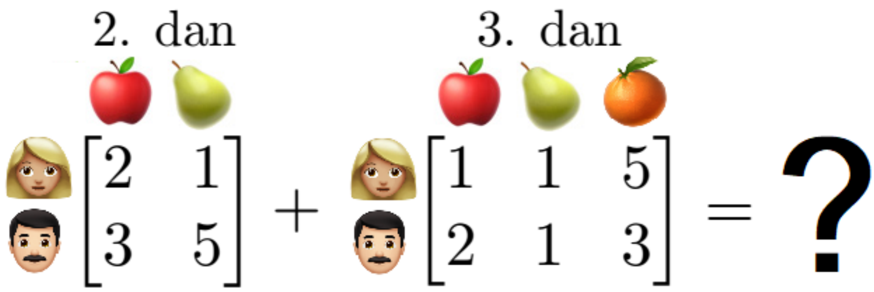


Slika 1.2: Zbrajanje matrica istog tipa

Prije nego što definiramo operaciju zbrajanja matrica, s učenicima trebamo diskutirati o tipovima matrica koje možemo zbrajati. Kako bi učenici lakše uočili da možemo zbrajati samo matrice istog tipa, postavljamo im novi problem, vezan uz prethodni, te ga također prikazati vizualno (slika 1.3). Primjerice, možemo im postaviti sljedeće pitanje:

> Mama i tata su 3. dan kupili mandarine. Mama je taj dan pojela 1 jabuku, 1 krušku i 5 mandarini. Tata je pojeo 2 jabuke, 1 krušku i 3 mandarine. Podatke organiziraj u matricu. Možete li, kao u prethodnom primjeru, odrediti koliko su mama i tata ukupno pojeli voća 2. i 3. dan?

U ovom bi primjeru učenici trebali lako uočiti da ne mogu zbrojiti podatke u matricama jer u prvoj matrici nedostaje stupac, odnosno redak, koji označava mandarine. Možemo očekivati da će netko od učenika uočiti da je prvu matricu moguće nadopuniti sa stupcem u koji ćemo upisati nule i koji će predstavljati broj pojedenih mandarina. Upravo će taj zaključak pridonijeti konačnoj definiciji zbrajanja matrica, odnosno zaključku da možemo zbrajati samo matrice istog tipa. Osim proučavanja tipova matrica koje možemo zbrajati, pozornost učenika treba usmjeriti i na tip matrice koja je rezultat zbrajanja.



Slika 1.3: Zbrajanje matrica različitog tipa

Definicija 1.2.1. *Neka su A i B matrice istog tipa. Rezultat zbrajanja matrica $A + B$ je matrica istog tipa kao A i B. Njezin element na mjestu (i, j) jednak je zbroju elemenata matrica A i B na tom istom mjestu. Dakle, ako je $C = A + B$, onda je $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ za sve i, j. ([2])*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

U drugom dijelu, nakon što učenici provjere da navedene jednakosti vrijede za proizvoljne matrice tipa 3×3, dokazujemo da jednakosti vrijede i općenito:

a) $A + B = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = B + A$

b) $A + (B + C) = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] = (A + B) + C$

Učenici bi trebali samostalno zaključiti da navedena svojstva proizlaze iz komutativnosti, odnosno asocijativnosti, realnih brojeva.

Prirodno, uz zbrajanje matrica, javlja se i pitanje mogućnosti oduzimanja matrica. Za potrebe definiranja oduzimanja, uvodimo pojam suprotne matrice.

Definicija 1.2.2. *Neka je A matrica tipa $m \times n$. Za matricu B tipa $m \times n$ kažemo da je* ***suprotna*** *matrici A ako vrijedi $A + B = 0$, gdje 0 označava nulmatricu tipa $m \times n$.*

Nakon definiranja suprotne matrice, učenike podsjećamo na osnovnu školu kada su na oduzimanje gledali kao na dodavanje suprotnog broja. Iz toga učenici mogu povući paralelu na oduzimanje matrica.

Definicija 1.2.3. *Neka su A i B matrice istog tipa. Razliku matrica $A - B$ računamo kao zbroj matrice A i matrice suprotne matrici B.*

Aktivnost 3. *Množenje matrice skalarom*

Cilj: učenici otkrivaju postupak množenja matrice skalarom

Nastavni oblik: individualni rad

Nastavna metoda: problemska nastava

Potrebni materijal: nastavni listić sa zadatkom

Tijek aktivnosti:
Svaki učenik dobit će listić sa zadatkom. Učenici za rješavanje imaju 10 minuta. Nakon što riješe zadatak, slijedi prezentacija rješenja i diskusija.

Nastavni listić:

Zadatak:
Dana je tablica s podatcima o količini oborina, za određene mjerne postaje u Republici Hrvatskoj, u prvoj polovici 2017. godine. ([4])

	Bjelovar	Osijek	Poreč	Rab	Split	Varaždin	Zagreb
1.mj	32.8	25.2	23.8	52.6	50.0	32.4	34.3
2.mj	33.1	74.4	149.8	90.9	68.9	56.0	41.4
3.mj	26.2	67.6	27.2	62.6	67.6	20.1	19.8
4.mj	28.2	49.7	62.9	70.3	35.5	32.5	44.3
5.mj	76.0	50.6	55.9	72.7	40.9	66.7	35.2
6.mj	54.7	45.4	91.0	42.7	4.4	84.5	107.8

a) U tablici pronađi podatke o količini padalina za Zagreb, Split i Osijek u 1., 3. i 6. mjesecu 2017. godine. Navedene podatke organiziraj u matricu.

b) Koliko je kiše palo u Zagrebu u 3. mjesecu? Na kojem se mjestu u matrici nalazi taj podatak?

c) Koliko je kiše palo u Osijeku u 1. mjesecu? Na kojem se mjestu u matrici nalazi taj podatak?

d) Koliko je kiše palo u Splitu u 6. mjesecu? Na kojem se mjestu u matrici nalazi taj podatak?

e) Meteorolozi predviđaju da će sljedeće godine pasti čak dvostruko više padalina! Kako će izgledati matrica, za izdvojene gradove i mjesece, sljedeće godine?

f) S kojim brojem si pomnožio/la svaki element matrice?

g) Kako množimo matricu skalarom?

Kutak za nastavnika:

U ovom primjeru učenicima smo podatke dali u Excel tablici. Učenici tražene podatke trebaju iščitati iz tablice te ih organizrati u matricu. S učenicima diskutiramo koja je razlika između zapisa podataka u tablici i zapisa podataka u matrici. Želimo da učenici uoče da razlike nema, odnosno da je matrica samo matematički način zapisivanja tj. organiziranja podataka. Navedeni zaključak vidimo na slici 1.4.

	Zagreb	Split	Osijek
1.mj	34.3	50.0	25.2
3.mj	19.8	67.6	67.6
6.mj	107.8	4.4	45.4

$$\begin{bmatrix} 34.3 & 50.0 & 25.2 \\ 19.8 & 67.6 & 67.6 \\ 107.8 & 4.4 & 45.4 \end{bmatrix}$$

Slika 1.4: Usporedba različitih zapisa

Pitanjima b), c) i d) želimo provjeriti jesu li učenici dobro organizirali podatke, kao i znaju li numeraciju mjesta u matrici. Pri provjeri rješenja treba imati na umu da neće svi učenici u jednakom poretku upisivati gradove, pa odgovori na pitanje: "Na kojem se mjestu u matrici nalazi taj podatak?" neće biti isti kod svih učenika.

Rješenje e) zadatka je: $\begin{bmatrix} 68.6 & 100.0 & 50.4 \\ 39.6 & 135.2 & 135.2 \\ 215.6 & 8.8 & 90.8 \end{bmatrix}$.

U f) zadatku, učenici već iz samog teksta prethodnog zadatka mogu zaključiti da svaki element matrice množimo sa 2.

Ukoliko učenici ne povežu rješenja ta dva zadatka s pitanjem u g) zadatku, podsjetimo ih da množenje zapravo predstavlja uzastopno zbrajanje istog elementa. Na taj način potičemo učenike da množenje matrice skalarom zapišu kao zbrajanje te tako uoče da svaki element matrice trebaju pomnožiti skalarom.

Definicija 1.2.4. *Neka je A matrica tipa $m \times n$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ bilo koji skalar. Umnožak matrice $A = [a_{ij}]$ skalarom λ je matrica $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$. Dakle, matrica se množi skalarom tako da se svaki njezim element množi tim skalarom. ([2])*

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Osim što će učenici ovom aktivnošću savladati množenje matrice skalarom, sada se možemo vratiti na oduzimanje matrica te "opravdati" prethodnu definiciju.

Proučimo razliku matrica $A - B$. Minus ispred matrice B označava koeficijent -1 pa prema prethodnoj definiciji svaki element matrice B množimo skalarom -1. Na taj način prethodni račun $A - B$ prelazi u $A + (-B)$ gdje je očito $-B$ matrica suprotna matrici B. Prema tome, prethodno usvojena definicija oduzimanja matrica je u skladu s definicijom množenja matrice skalarom.

Također, osim navedenog, učenici trebaju provjeriti koja svojstva zadovoljava usvojena operacija. Stoga im zadajemo sljedeći zadatak:

Na proizvoljnim matricama tipa 3×3 provjeri vrijede li sljedeće jednakosti:

a) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

b) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

c) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

Vrijede li ove jednakosti općenito, za sve matrice A, B i C istog tipa? Iz kojih prethodno poznatih svojstava to proizlazi?

Kao i u Aktivnosti 2., nakon što učenici provjere da navedene jednakosti vrijede za proizvoljne matrice tipa 3×3, dokazujemo da jednakosti vrijede i općenito:

a) $\alpha(\beta A) = \alpha[\beta a_{ij}] = (\alpha\beta)[a_{ij}] = (\alpha\beta)A$

b) $\alpha(A+B) = \alpha[a_{ij}+b_{ij}] = [\alpha(a_{ij}+b_{ij})] = [\alpha a_{ij}+\alpha b_{ij}] = [\alpha a_{ij}]+[\alpha b_{ij}] = \alpha[a_{ij}]+\alpha[b_{ij}] = \alpha A + \alpha B$

c) $(\alpha+\beta)A = (\alpha+\beta)[a_{ij}] = [(\alpha+\beta)a_{ij}] = [\alpha a_{ij}+\beta a_{ij}] = [\alpha a_{ij}] + [\beta a_{ij}] = \alpha[a_{ij}]+\beta[a_{ij}] = \alpha A + \beta A$

Učenici bi trebali samostalno zaključiti da navedena svojstva proizlaze iz kvazi-asocijativnosti, odnosno distributivnosti množenja prema zbrajanju.

1.3 Rješavanje sustava

Jedna od glavnih upotreba matrica koju možemo provesti u srednjoškolskoj nastavi matematike je upravo rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Kao što je navedeno u uvodu ovog poglavlja, u jednom od udžbenika učenici se susreću s pojmom matrice u svrhu rješavanja sustava prije samog definiranja matrica. Učenici najprije sustave 2×2 i 3×3 rješavaju metodom determinante i upravo je to poglavlje u kojem se prvi puta susreću s pojmom matrice. Nakon toga, učenici sustave rješavaju primjenom Gauss-Jordanove metode s čime ćemo se baviti u sljedećih nekoliko aktivnosti. Učenici će najprije otkriti Gauss-Jordanovu metodu, zatim primijeniti navedenu metodu za rješavanje input-output analize u ekonomiji te će na kraju proučavati rješenja homogenog i nehomogenog sustava. Ove aktivnosti su predviđene da se provode upravo ovim redoslijedom, nakon obrade matrica i osnovnih pojmova te operacija, a prije operacije množenja matrica.

Aktivnost 4. *Uvođenje Gauss-Jordanove metode*

Cilj: učenici otkrivaju Gauss-Jordanovu metodu rješavanja sustava

Nastavni oblik: individualni rad

Nastavna metoda: problemska nastava

Potrebni materijal: nastavni listić sa zadatkom

Tijek aktivnosti:
Svaki učenik dobit će listić sa zadatkom. Učenici za rješavanje imaju 10 minuta. Nakon što učenici riješe zadatak, slijedi diskusija i uvođenje Gauss-Jordanove metode.

Nastavni listić:

Zadatak:

Riješi dani sustav koristeći **isključivo** metodu eliminacije. Paralelno, sve transformacije koje provodiš na sustavu, provedi i na pripadnoj proširenoj matrici sustava.

Sustav	Proširena matrica sustava
$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases}$	

Kutak za nastavnika:

Učenici su ranije sustave 3×3 rješavali metodom eliminacije, a u Aktivnosti 1. (str. 4) upoznali su se sa zapisom sustava u matricu te pojmom proširena matrica sustava. Stoga očekujemo da učenici neće imati problema sa zapisom sustava u matricu niti sa samim rješavanjem sustava u klasičnom zapisu.

Potencijalni problem koji se može pojaviti na početku rješavanja aktivnosti je da učenici ne shvate što znači da transformacije koje rade na sustavu treba provesti i na matrici. U tom slučaju učenike podsjećamo da retci matrice predstavljaju jedandžbe sustava te da operaciju koju rade na određenoj jedandžbi u sustavu trebaju provesti i na odgovarajućem retku u matrici.

Prilikom množenja određene jednadžbe sustava skalarom, velika je mogućnost da će se kod učenika pojaviti konfuzija kada tu operaciju trebaju provesti na matrici. Naime, ako se sjete na koji način smo definirali množenje matrice skalarom, zaključit će da ne smiju pomnožiti samo jedan redak matrice. Iz tog razloga treba naglasiti da nam je u ovom slučaju matrica samo drugačiji zapis sustava. S obzirom na to da u sustavu množimo određenu jednadžbu nekim brojem, u matrici se to manifestira kao množenje retka tim brojem. Jedan od mogućih postupaka rješavanja prikazan je u sljedećoj tablici:

Sustav	Proširena matrica sustava
$\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x-y-z=1 \\ x+3y+4z=6 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right]$
$\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ -5y-7z=-9 \\ y+z=1 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -7 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$
$\begin{cases} x+z=3 \\ -2z=-4 \\ y+z=1 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$
$\begin{cases} x+z=3 \\ z=2 \\ y+z=1 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$
$\begin{cases} x=1 \\ z=2 \\ y=-1 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$

$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$

Nakon što učenici riješe zadatak, na projektoru im prikažemo gornji postupak rješavanja te diskutiramo jesu li svi zadatak riješili na prikazani način. Očekujemo da su učenici zadatak riješili na različite načine, te će nam to poslužiti da se učenici podsjete kako nam kod rješavanja sustava metodom eliminacije nije bitno kojim redoslijedom eliminiramo nepoznanice.

Nadalje, s učenicima diskutiramo zašto smo u prikazanom postupku rješavanja na kraju zamijenili posljednja dva retka u matrici, odnosno posljednje dvije jednadžbe sustava. Učenici znaju da je rješenje sustava uređena trojka (x, y, z) pa bi lako trebali zaključiti da je promjena nužna zbog redoslijeda nepoznanica. Nakon što učenici zaključe u kojem redoslijedu moraju biti jednadžbe sustava na kraju rješavanja, možemo prijeći na proučavanje završne matrice sustava.

Učenici trebaju prepoznati da je posljednja matrica sustava dijagonalna matrica i zaključiti da nam je cilj, prilikom rješavanja sustava koristeći matrice, doći do dijagonalne matrice sustava. Iako znamo da to neće biti moguće u svim slučajevima, ovisno o odabranim sustavima, trenutno ćemo stati na tom zaključku. Učenici će kasnije, u primjerima kada sustav ima beskonačno mnogo rješenja ili kada sustav nema rješenja, započeti s rješavanjem želeći doći do jedinične matrice. U jednom će trenutku uočiti da to ipak nije moguće te ćemo tada s njima diskutirati zašto i koji nam je cilj u tom slučaju.

Konačno, prelazimo na proučavanje samog postupka rješavanja sustava, odnosno transformiranja pripadne matrice sustava, kako bismo došli do definicije Gauss-Jordanove metode. Učenicima postavljamo pitanja: "Koje ste sve transformacije radili u sustavu? S kojim ciljem ste radili navedene transformacije? Što svi sustavi koje ste dobili u postpuku rješavanja imaju zajedničko?". Učeničke odgovore sumiramo u sljedeći zaključke (prema [2]):

Elementarnim transformacijama sustav svodimo na njemu ekvivalentan sustav iz kojeg je lakše odrediti njegova rješenja. Dva sustava nazivamo **ekvivalentnim** ukoliko imaju isti skup rješenja.

Elementarne transformacije koje koristimo pri svođenju sustava na ekvivalentan sustav su:

- zamjena poretka dviju jednadžbi u sustavu
- množenje jedne jednadžbe brojem različitim od nule

- dodavanje nekoj jednadžbi neke druge jednadžbe pomnožene brojem različitm od nule

Analogno, na retcima proširene matrice sustava odgovaraju sljedeće elementarne transformacije:

- zamjena dvaju redaka matrice
- množenje retka brojem različitim od nule
- dodavanje nekom retku nekog drugog retka pomnoženog brojem različitim od nule

Navedeni postupak nazivamo **Gauss-Jordanovom metodom** rješavanja sustava.

Važno je napomenuti da se elementarnim transformacijama na matricama dobivaju matrice koje nazivamo ekvivalentnim matricama te ih označavamo s $\sim$. U ovom trenutku, preciznija definicija ekvivalentnih matrica nam nije potrebna. No ipak, s učenicima je potrebno diskutirati mijenja li se elementarnim transformacijama na matricama, odnosno na jednadžbama sustava, rješenje sustava. Iako znamo da ekvivalentnost matrica dobivenih elementarnim transformacijama proizlazi iz množenja matrice s lijeva s elementarnim matricama, učenicima trebamo pružiti objašnjenje primjereno njihovoj razini znanja i razumijevanja. Zamjenom poretka jednadžbi nismo promijenili jednadžbe sustava pa tako ni njegovo rješenje. Množenjem jedne od jednadžbi brojem različitim od nule samo smo promijenili koeficijente te jednadžbe, a već iz rješavanja linearnih jednadžbi učenici znaju da to ne utječe na rješenje jednadžbe, pa tako ni na rješenje sustava. Posljednja elementarna transformacija je dodavanje nekoj jednadžbi neke druge jednadžbe pomnožene brojem različitim od nule. S tim postupkom su se učenici i ranije susretali, rješavajući sustave metodom eliminacije. Na taj način dobivamo novu jednadžbu koja zadovoljava ”uvjete” obje jednadžbe. Prema tome, ni ta elementarna transformacija ne mijenja rješenje sustava.

Nakon što definiramo Gauss-Jordanovu metodu trebamo još utvrditi najefikasnije korake za provođenje navedene metode. S obzirom na to da su učenici već uočili da nam je cilj doći do dijagonalne matrice, očito je da želimo eliminirati sve elemente iznad i ispod dijagonale. Postupak ćemo objasniti na matrici tipa 3×3, u 3 ključna koraka:

1) Postupak započinjemo s koeficijentom a_{11} te njime eliminiramo sve koeficijente ispod njega, odnosno koeficijente a_{21} i a_{31}. Važno je napomenuti da na prvo mjesto možemo namjestiti jednadžbu koja nam najviše odgovara. To je najčešće jednadžba koja na mjestu a_{11} ima koeficijent 1 ili koeficijent koji je djelitelj koeficijenata na mjestima a_{21} i a_{31}. Ako smo na prvo mjesto stavili jednadžbu čiji koeficijent na mjestu a_{11} nije 1, nakon eliminacije koeficijenata ispod njega, prvi redak dijelimo s tim koeficijentom.

2) Nakon toga, želimo eliminirati sve elemente ispod mjesta a_{22}. Pri tome možemo, ako nam je pogodnije, zamijeniti mjesto drugom i trećem retku. Prvi redak više ne diramo, jer na mjestu a_{11} imamo koeficijent 1 što je nužno kako bi smo na kraju došli do jedinične matrice. Kao i u prvom koraku, ako koeficijent na mjestu a_{22} nije 1, nakon eliminacije koeficijenata ispod njega (ili prije, ovisno o koeficijentu koji trebamo eliminirati), drugi redak dijelimo s tim koeficijentom.

3) Zatim uzimamo posljednji element matrice a_{33}, svedemo ga na jedinicu ukoliko nije 1 te započinjemo postupak kojeg nazivamo *obratni hod*. Elementom a_{33} sada poništavamo sve elemente koji se nalaze iznad njega. Isti postupak radimo i s elementom a_{22}. Kada matricu sustava dovedemo do jedinične matrice, postupak je završen.

Navedeni postupak, učenicima objašnjavamo na konkretnom primjeru. Neophodno je napomenuti da se Gauss-Jordanova metoda ne koristi isključivo na sustavima 3×3 te da postupak vrijedi i općenito za sustave od m linearnih jednadžbi sa n nepoznanica.

Aktivnost 5. *Primjena Gauss-Jordanove metode*

Cilj: učenici primjenjuju Gauss-Jordanovu metodu

Nastavni oblik: individualni rad

Nastavna metoda: problemska nastava

Potrebni materijal: nastavni listić sa zadatkom

Tijek aktivnosti:
Svaki učenik dobit će listić sa zadatkom. Učenici za rješavanje imaju 20 minuta. Nakon što učenici riješe zadatak, slijedi prezentacija rješenja i diskusija.

Nastavni listić:

Zadatak ([6]):

Pretpostavimo da se cijela ekonomija jedne države sastoji od tri gospodarske grane koje međusobno razmjenjuju resurse: drvna indsutrija, elektroprivreda i naftna industrija. Označimo ukupne prihode ovih industrija redom sa *d, e, n*.

a) Drvna industrija za svoju proizvodnju koristi 40% resursa elektroprivrede i 60% resursa naftne industrije. Izrazi ukupne troškove drvne industrije.

b) Elektroprivreda za svoju proizvodnju koristi 60% resursa drvne industrije, 10% vlastitih resursa i 20% resursa naftne industrije. Izrazi ukupne troškove elektroprivrede.

c) Naftna industrija za svoju proizvodnju koristi 40% resursa drvne industrije, 50% resursa elektroprivrede i 20% vlastitih resursa. Izrazi ukupne troškove naftne industrije.

> **d)** Postoje li ukupni prihodi (u oznaci *d, e, n*) takvi da su troškovi svake industrije jednaki njenim prihodima? Sustav riješi Gauss-Jordanovom metodom.
>
> **e)** Koliko ima mogućih rješenja. O čemu ovise rješenja?

Kutak za nastavnika:

U a), b) i c) zadatku učenici navedene podatke trebaju zapisati kao algebarski izraz. Rješenja navedenih zadataka su:

a) $0.4e + 0.6n$

b) $0.6d + 0.1e + 0.2n$

c) $0.4d + 0.5e + 0.2n$

U d) zadatku učenici trebaju postaviti sustav, koristeći prethodno postavljene algebarske izraze. Iznos troška za svaku industriju treba izjednačiti s ukupnim prihodima te industrije. Tako dobivamo sustav:

$$\begin{cases} d = 0.4e + 0.6n \\ e = 0.6d + 0.1e + 0.2n \\ n = 0.4d + 0.5e + 0.2n \end{cases}$$

Učenici sada već znaju da sustav najprije trebaju zapisati u općem obliku, a zatim koeficijente sustava zapisati u proširenu matricu sustava. Prema tome, slijedi:

$$\begin{cases} d - 0.4e - 0.6n = 0 \\ 0.6d - 0.9e + 0.2n = 0 \\ 0.4d + 0.5e - 0.8n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -0.4 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & -0.9 & 0.2 & 0 \\ 0.4 & 0.5 & -0.8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -0.9 & 0 \\ 0 & 1 & -0.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Iz posljednje matrice čitamo konačno rješenje: $d = 0.94n$ i $e = 0.85n$. Navedeno rješenje je zaokruženo na dvije decimale, a učenici, ovisno o načinu rješavanja, mogu rješenje dobiti i u obliku razlomaka ($d = \frac{31}{33}n$ i $e = \frac{28}{33}n$). Iz zapisa rješenja, s kojim su se susretali i ranije, učenici će zaključiti da navedeni sustav ima beskonačno mnogo rješenja, koja u ovom obliku, ovise o ukupnim prihodima naftne industrije. Također, učenici bi prilikom interpretacije rješenja trebali uočiti da n mora biti strogo veći od 0 jer se radi o prihodima. Kako bi provjerili da učenici u potpunosti razumiju, odnosno znaju interpretirati, dobiveno rješenje, možemo tražiti da navedu nekoliko konkretnih vrijednosti koje rezultiraju time da su prihodi svake industrije jednaki troškovima te industrije. Primjerice, ako uzmemo da su ukupni prihodi naftne industrije 10 milijuna kuna, onda su prihodi drvne industrije 9.4 milijuna, a prihodi elektroprivrede 8.5 milijuna kuna.

Nekoliko je stvari s kojima će se učenici prvi puta susresti u matričnom zapisu sustava. Naime, sustav u zadatku je homogeni sustav, te će zadnji stupac u proširenoj matrici sustava sadržavati samo nule. Učenici će tokom rješavanja uočiti da se korištenjem elementarnih transformacija, koeficijenti u zadnjem stupcu neće mijenjati. Iz toga razloga, tokom diskusije je potrebno potaknuti raspravu o tome je li nužno pisati zadnji stupac ili ne, kako bi svi učenici došli do očekivanog zaključka. Ukoliko se odlučimo da od učenika u tom slučaju nećemo zahtijevati da pišu zadnji stupac, važno je još jednom napomenuti da to smijemo napraviti samo kod homogenih sustava te istaknuti zašto je to pogrešno raditi kod sustava koji nisu homogeni.

Osim toga, učenici će se prvi puta susresti s nul-retkom u proširenoj matrici sustava. Učenici su do sada Gauss-Jordanovom metodom rješavali sustav koji je imao jedinstveno rješenje te su na temelju toga donijeli zaključak da matricu sustava trebaju dovesti do jedinične matrice. S obzirom na to, navedeni redak mogao bi uvesti konfuziju kod učenika kada trebaju krenuti s obratnim hodom, odnosno poništavanjem elemenata iznad glavne dijagonale.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -0.4 & -0.6 & 0 \\ 0 & 1 & -0.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

S obzirom na to da je koeficijent na mjestu a_{33}, s kojim započinjemo obratni hod, jednak 0, učenici bi mogli zaključiti da s -0.85 trebaju poništiti koeficijent na mjestu a_{13}. Iako navedenim postupkom neće dobiti pogrešno rješenje, umjesto direktnog iščitavanja rješenja iz matrice, učenici će morati koristi dodatne elementarne transformacije na sustavu. Navedeni razlog navodimo učenicima kao primjer zašto moraju obratiti pozornost s kojim elementima započinju obratni hod te još jednom napominjemo da to moraju biti elementi na dijagonali. U ovome trenutku učenike trebamo podsjetiti na zaključak iz prethodne aktivnosti, u kojoj smo rekli da je cilj prilikom provođenja Gauss-Jordanove metode matricu sustava svesti na jediničnu matricu. Ovo je jedan od slučajeva kada to neće biti moguće pa moramo "unaprijediti" prethodno donešen zaključak. Proučavajući matricu iz koje su iščitali rješenja, očekujemo da će učenici zaključiti kako je cilj matricu sustava svesti na gornje trokutastu matricu.

Također, s učenicima diskutiramo zašto smo dobili nul-redak u proširenoj matrici sustava te koja je veza između nul-retka i odnosa jednadžbi u sustavu. Želimo da učenici stvore poveznicu između linearno zavisnih jednadžbi sustava, sustava s beskonačno mnogo rješenja i nul-retka u proširenoj matrici sustava. Ono što bi učenici već trebali znati iz standardnog rješavanja sustava je da ako imamo sustav n jednadžbi s n nepoznanica te je barem jedna od jednadžbi linearna kombinacija ostalih, sustav će imati beskonačno mnogo rješenja. Dakle, sada još samo trebaju zaključiti da će u tom slučaju proširena matrica sustava sadržavati nul-redak.

Aktivnost 6. *Proučavanje rješenja homogenog sustava*

Cilj: učenici će otkriti strukturu rješenja homogenih sustava

Nastavni oblik: rad u grupi

Nastavna metoda: problemska nastava

Potrebni materijal: nastavni listić s uputom, tablicom i pitanjima, kartice sa zadatcima

Tijek aktivnosti:
Učenike podijelimo u četveročlane skupine. Svaka skupina dobiva jedan listić s tablicom i uputama i 8 kartica sa zadatcima. Učenici najprije rješavaju dobivene sustave te ih zatim trebaju svrstati u odgovarajući stupac tablice. Nakon što rasporede sve sustave učenici zajedno odgovaraju na pitanja. Za rješavanje učenici imaju 25 minuta. Na kraju slijedi prezentacija rješenja i diskusija.

Nastavni listić:

Zadatak:

1. Svaki član grupe neka uzme dvije kartice sa zadatcima. Dobivene sustave riješite u bilježnicu Gauss-Jordanovom metodom. Na karticu sa zadatkom zapišite matricu iz koje ste iščitali rješenje. Nakon toga, karticu smjestite u odgovarajući stupac u sljedećoj tablici:

Sustav nema rješenje	Sustav ima jedinstveno rješenje	Sustav ima beskonačno mnogo rješenja

2. Promotrite skupinu ”Sustav ima jedinstveno rješenje” te matrice iz kojih ste iščitali rješenja sustava te skupine. Što uočavate? Imaju li te matrice nešto zajedničko? Možete li zaključiti kada će homogeni sustav imati jedinstveno rješenje?

3. Promotrite skupinu ”Sustav ima beskonačno mnogo rješenja” te matrice iz kojih ste iščitali rješenja sustava te skupine. Što uočavate? Imaju li te matrice nešto zajedničko? Možete li zaključiti kada će homogeni sustav imati beskonačno mnogo rješenja?

4. Postoji li skupina u koju niste svrstali ni jednu karticu? Ako da, mislite li da općenito postoji neki homogeni sustav koji bi spadao u tu skupinu?

Primjeri riješenih kartica:

$\begin{cases} x+y=0 \\ 3x-5y=0 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{cases} 3x+2y+z=0 \\ 5x+4y+3z=0 \\ 4x+3y+2z=0 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$
$\begin{cases} 3x+5y=0 \\ -12x-20y=0 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{cc\|c} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{cases} x-y-z=0 \\ -x+y+2z=0 \\ 2x-y-2z=0 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$
$\begin{cases} x+5y+4z=0 \\ -x-5y-4z=0 \\ 2x+10y+8z=0 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ 7x+5y-z+5w=0 \\ 3x+y-z+2w=0 \\ 5x+7y+z+4w=0 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{cccc\|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$
$\begin{cases} x+3y+z+w=0 \\ 7x+4y-z+5w=0 \\ 3x+y-z+2w=0 \\ 5x+7y+3z+4w=0 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{cccc\|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{cases} 2x+y+5z=0 \\ 7x+4y-z=0 \\ x+6y-z=0 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

Kutak za nastavnika:

Učenicima zadajemo sustave 2×2, 3×3 i 4×4 kako bi tokom donošenja zaključaka, donijeli općenite zaključke, a ne samo zaključke za matrice pojedinog tipa.

Učenici će proučavajući matrice u skupini "Sustav ima jedinstveno rješenje" brzo uočiti da su sve matrice sustava jedinične. Iz toga direktno slijedi zaključak da će homogeni sustav imati jedinstveno rješenje ako elementarnim transformacijama na matrici sustava dobijemo jediničnu matricu. Također, učenici uočavaju da je to jedinstveno rješenje uvijek identično - nul-rješenje.

U Aktivnosti 5. učenici su se već susreli sa sustavom koji ima beskonačno mnogo rješenja te uočili da matricu tog sustava ne možemo dovesti do jedinične već do gornje trokutaste matrice. Navedeno učenicima može pomoći da uoče kako su sve matrice u skupini "Sustav ima beskonačno mnogo rješenja" gornje trokutaste, odnosno da imaju barem jedan nul-redak. Navedeni zaključak učenici mogu potvrditi ako se sjete poveznice između nul-retka u matrici i odnosa jednadžbi u sustavu (o navedenoj poveznici s učenicima smo diskutirali na kraju Aktivnosti 5.). Naime, učenici znaju da će sustav $n \times n$ (n jednadžbi sa n nepoznanica) imati beskonačno mnogo rješenja ako je barem jedna jednadžba linearna kombinacija ostalih, a u prethodnoj aktivnosti su zaključili da će tada matrica sustava imati barem jedan nul-redak, odnosno da će biti gornje trokutasta. Iz svega navedenog učenici trebaju doći do konačnog zaključka da će homogeni sustav imati beskonačno mnogo rješenja ako elementarnim transformacijama na matrici sustava dobijemo gornje trokutastu matricu.

Iako će učenici nakon rješavanja sustava i svrstavanja kartica u odgovarajuće stupce odmah uočiti da je stupac "Sustav nema rješenje" ostao prazan, ovo pitanje postavljeno je kao zadnje jer njegov odgovor zahtjeva proučavanje matrica sustava u preostalim stupcima. Učenici trebaju uočiti da postoje dvije mogućnosti. Prva mogućnost je da će matrica sustava biti jedinična i tada imamo jednistveno nul-rješenje. Druga mogućnost je da će matrica sustava biti gornje trokutasta i tada imamo parametarsko rješenje, odnosno beskonačno mnogo rješenja. U oba slučaja, homogeni sustav ima rješenje. S obzirom na to da treća mogućnost ne postoji, učenici zaključuju da ne postoji homogeni sustav koji bi spadao u navedeni stupac.

Učenicima za kraj diskusije postavljamo pitanje može li homogeni sustav imati jedinstveno rješenje koje nije trivijalno (ne nul-rješenje). Proučavajući kartice raspoređene u stupce, učenici zaključuju da to nije moguće. Ako matrica nije jedinična, onda sustav neće imati jedinstveno rješenje već beskonačno mnogo rješenja, a ako je matrica jedinična, onda je jedino moguće rješenje upravo nul-rješenje.

Aktivnost 7. *Proučavanje rješenja nehomogenog sustava*

Cilj: učenici će otkriti strukturu rješenja nehomogenih sustava

Nastavni oblik: rad u grupi

Nastavna metoda: problemska nastava

Potrebni materijal: nastavni listić s uputom, tablicom i pitanjima, kartice sa zadatcima

Tijek aktivnosti:
Učenike podijelimo u četveročlane skupine. Svaka skupina dobiva jedan listić s tablicom i uputama i 8 kartica sa zadatcima. Učenici najprije rješavaju dobivene sustave te ih zatim trebaju svrstati u odgovarajući stupac tablice. Nakon što rasporede sve sustave učenici zajedno odgovaraju na pitanja. Na kraju slijedi prezentacija rješenja i diskusija. Za rješavanje učenici imaju 35 minuta.

Nastavni listić:

Zadatak:

1. Svaki član grupe neka uzme dvije kartice sa zadatcima. Dobivene sustave riješite u bilježnicu Gauss-Jordanovom metodom. Na karticu sa zadatkom zapišite matricu iz koje ste iščitali rješenje. Nakon toga, karticu smjestite u odgovarajući stupac u sljedećoj tablici:

Sustav nema rješenje	Sustav ima jedinstveno rješenje	Sustav ima beskonačno mnogo rješenja

2. Promotrite skupinu "Sustav nema rješenje" te matrice iz kojih ste iščitali rješenja sustava te skupine. Što uočavate? Imaju li te matrice nešto zajedničko? Možete li zaključiti kada nehomogeni sustav neće imati rješenje?

3. Promotrite skupinu "Sustav ima jedinstveno rješenje" te matrice iz kojih ste iščitali rješenja sustava te skupine. Što uočavate? Imaju li te matrice nešto zajedničko? Možete li zaključiti kada će nehomogeni sustav imati jedinstveno rješenje?

4. Promotrite skupinu "Sustav ima beskonačno mnogo rješenja" te matrice iz kojih ste iščitali rješenja sustava te skupine. Što uočavate? Imaju li te matrice nešto zajedničko? Možete li zaključiti kada će nehomogeni sustav imati beskonačno mnogo rješenja?

5. Koja je razlika između mogućih rješenja homogenih i nehomogenih sustava? Iz čega proizlazi navedena razlika?

Primjeri riješenih kartica:

$\begin{cases} x-y+z-w=2 \\ x+2y-2z-w=5 \\ 3x-2y-5z-w=3 \\ 2x-z-w=4 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$	$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+y-z=1 \\ 3x-y+z=4 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$

$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 3 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$	$\begin{cases} 4x + 5y = 7 \\ 16x + 20y = -2 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{cc:c} 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -30 \end{array}\right]$
$\begin{cases} x - y + 2z = 10 \\ 3x - 2y + 6z = -2 \\ -x + y - 2z = 5 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & -22 \\ 0 & 1 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{array}\right]$	$\begin{cases} -5x + 2y = -16 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$
$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + y + z = 2 \\ -2x + y + 2z = -1 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{8}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + 2z = 6 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Kutak za nastavnika:

Ova aktivnost slična je kao i prethodna, s promijenjenim zadatcima na karticama i prilagođenim pitanjima. Aktivnosti su slične jer želimo da učenici pristupe odgovaranju na pitanja s određenim očekivanjima, imajući na umu zaključke koje su donijeli za homogene sustave.

Tako će učenici već pri odgovaranju na drugo pitanje uočiti glavnu razliku između mogućih rješenja homogenog i nehomogenog sustava. Naime, stupac "Sustav nema rješenje" je u prošloj aktivnosti ostao prazan, ali u ovoj aktivnosti sadrži čak tri kartice. Učenici će prilikom iščitavanja rješenja iz matrice doći do jednakosti koje ne vrijede te zaključiti kako pripadni sustav nema rješenja. Učenici trebaju uočiti da sve matrice sustava iz navedenog stupca sadrže nul-redak, no odgovarajući koeficijent tog retka iz posljednjeg stupca proširene matrice sustava, nije nula. Zbog navedenog dolazimo do kontradikcije odnosno zaključka da u tom slučaju sustav neće imati rješenje.

U 3. i 4. pitanju učenici će nakon kratkog proučavanja matrica u svakom od stupaca direktno primijeniti zaključke koje su donijeli i za homogene sustave. Nehomogeni sustav će imati jedinstveno rješenje ako elementarnim transformacijama na matrici sustava dobijemo jediničnu matricu, a beskonačno mnogo rješenja ako elementarnim transformacijama na proširenoj matrici sustava dobijemo matricu koja sadrži nul-redak.

Učenici su već na početku uočili da je razlika između mogućih rješenja homogenih i nehomogenih sustava to što će homogeni sustav uvijek imati rješenje. Dakle, kako bi otkrili iz čega proizlazi navedena razlika, učenici trebaju proučiti matrice u stupcu "Sustav nema rješenje". U drugom pitanju učenici su uočili da nam eventualni problem predstavljaju koeficijenti zadnjeg stupca proširene matrice sustava. Naime, ako neki od tih koeficijenata nije nula, a odgovarajući redak matrice sustava je nul-redak, sustav neće imati rješenje. No kako su u homogenim sustavima svi koeficijenti zadnjeg stupca proširene matrice nula, navedena situacija se u tom slučaju ne može dogoditi.

Za kraj Aktivnosti 6. i 7. sistematiziramo sve dosadašnje zaključke.

Homogeni sustav:

- ima jedinstveno rješenje ako je transformirana matrica sustava jedinična
- ima beskonačno mnogo rješenja ako transformirana matrica sustava sadrži nul-redak

Nehomogeni sustav:

- ima jedinstveno rješenje ako je transformirana matrica sustava jedinična
- ima beskonačno mnogo rješenja ako transformirana proširena matrica sustava sadrži nul-redak
- nema rješenja ako transformirana matrica sustava sadrži nul-redak, a odgovarajući koeficijent tog retka iz posljednjeg stupca proširene matrice sustava, nije nula

Iako su navedeni zaključci dovoljno precizni za učenike srednjih škola, nastavnik mora biti svjestan od kuda su oni proizišli.

Teorem 1.3.1 (Kronecker-Capelli)**.** *Sustav $AX = B$ je rješiv ako i samo ako je rang matrice sustava A jednak rangu proširene matrice sustava A_p.*

Korolar 1.3.2. *Sustav m linearnih jednadžbi s n nepoznanica ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $r(A) = r(A_p) = n$.*

Uočimo da se u navedenom teoremu i korolaru spominje pojam s kojim do sada nismo upoznali učenike. Za učenike koji žele znati više, možemo uvesti pojam ranga te na taj način produbiti prethodne zaključke. S obzirom na to da jedinstvenost rješenja ovisi o regularnosti matrice sustava (jer se radi o sustavima n jednadžbi s n nepoznanica), osim pojma ranga uvodimo i pojam regularne matrice. Definiciju ranga prilagodili smo uzrastu i predznanju učenika.

Definicija 1.3.3. *Rang matrice A, u oznaci $r(A)$, definiramo kao najveći broj linearno nezavisnih redaka matrice.*

Definicija 1.3.4. *Za kvadratnu matricu A tipa $n \times n$ kažemo da je regularna ako je rang matrice A jednak n, tj. ako vrijedi $r(A) = n$.*

Primjenjujući samo ove dvije definicije i proučavajući matrice sustava A i proširene matrice sustava A_p, iz prethodne dvije aktivnosti, učenici dolaze do novih, proširenih zaključaka:

- ako je matrica sustava regularna, sustav ima jedinstveno rješenje (neovisno o tome je li sustav homogen ili nehomogen)
- ako matrica sustava nije regularna, postoje dvije mogućnosti:
  - ako je $r(A) = r(A_p)$, sustav ima beskonačno mnogo rješenja
  - ako je $r(A) \neq r(A_p)$, sustav nema rješenja

Uočimo da se u prvom slučaju radi o Cramerovom sustavu. Naime, imamo sustav od n linearnih jednadžbi sa n nepoznanica te je rang matrice sustava jednak n. Prema 1.3.2 slijedi da sustav ima jedinstveno rješenje. Naravno, znamo da za Cramerov sustav $AX = B$ jedinstveno rješenje računamo kao $X = A^{-1}B$. No s obzirom na to da učenike nismo upoznali s pojmom inverzne matrice, ostajemo samo na zaključku da sustav ima jedinstveno rješenje.

Također, učenicima koji bez poteškoća savladaju prethodno gradivo, možemo kao projektni zadatak zadati da otkriju strukturu rješenja nehomogenih sustava. Rješavajući nekoliko nehomogenih te pripadnih homogenih sustava, želimo da učenici uoče kako skup rješenja nehomogenog sustava možemo zapisati kao $R + H$ gdje je R neko od rješenja nehomogenog sustava (tzv. partikularno rješenje), a H skup rješenja pripadnog homogenog sustava. Navedeni zaključak proizlazi iz sljedećeg teorema:

Teorem 1.3.5. *Neka je R_0 neko rješenje sustava $AX = B$. Skup svih rješenja sustava $AX = B$ je*

$$\mathcal{R} = R_0 + \mathcal{H} = \{R_0 + H : H \in \mathcal{H}\},$$

gdje je $\mathcal{H}$ skup svih rješenja pripadnog homogenog sustava $AX = 0$.

Pri odabiru sustava koje ćemo zadati učenicima važno je odabrati sustave iz kojih će učenici najlakše uočiti navedeni zaključak, a to su sustavi s beskonačno mnogo rješenja.

Aktivnost 8. *Popuni matricu*

Cilj: učenici uvježbavaju određivanje veze između matrice sustava i broja rješenja sustava

Nastavni oblik: rad u paru

Nastavna metoda: problemska nastava

Potrebni materijal: kartice sa zadatcima

Tijek aktivnosti:
Učenike podijelimo u parove. Svaki par dobiva tri kartice sa praznim matricama i uputom kako trebaju popuniti matricu. Učenici rješavaju kartice i odgovaraju na pitanja. Za rješavanje učenici imaju 20 minuta. Kada svi parovi riješe sve tri kartice slijedi diskusija i prezentacija rješenja.

Kartice sa zadatcima:

Zadatak 1.
Ispod zadataka nalazi se prazna matrica koja predstavlja proširenu matricu sustava 3×3. Naizmjeničnim upisivanjem koeficijenata, popunite matricu tako da pripadni sustav nema rješenje.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}\right]$$

Objasnite koja je bila vaša strategija prilikom popunjavanja matrice.

Zadatak 2.
Ispod zadataka nalazi se prazna matrica koja predstavlja proširenu matricu sustava 3×3. Naizmjeničnim upisivanjem koeficijenata, popunite matricu tako da pripadni sustav ima jedinstveno rješenje.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}\right]$$

Objasnite koja je bila vaša strategija prilikom popunjavanja matrice.

Zadatak 3.
Ispod zadataka nalazi se prazna matrica koja predstavlja proširenu matricu sustava 3×3. Naizmjeničnim upisivanjem koeficijenata, popunite matricu tako da pripadni sustav ima beskonačno mnogo rješenja.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \end{array}\right]$$

Objasnite koja je bila vaša strategija prilikom popunjavanja matrice.

Kutak za nastavnika:

Ova aktivnost predviđena je za rješavanje u parovima kako bi se učenici međusobno provjeravali, ispravljali i diskutirali koji koeficijent smiju ili ne smiju zapisati na određeno mjesto u tablici. Na taj način učenici argumentiranim činjenicama moraju opravdati svoje postupke te tako, osim što objašnjavaju i uče jedni druge, razvijaju socijalne vještine i korištenje matematičkog jezika.

Od učenika u različitim zadatcima očekujemo različite taktike popunjavanja. Iako u konačnici svi parovi kroz diskusiju trebaju doći do točnog rezultata, postoji mogućnost da prilikom popunjavanja matrice nisu obratili pozornost na sve bitne čimbenike. Stoga, prilikom prezentacije rješenja prozivamo više parova sve dok učenici ne spomenu sve bitne čimbenike na koje su trebali paziti. Ako za određeni zadatak ne dobijemo sve očekivane odgovore, učenike dodatnim potpitanjima vodimo do čimbenika na koje su zaboravili.

Matricu u prvom zadatku potrebno je ispuniti tako da pripadni sustav nema rješenje. Učenici pri upisivanju koeficijenata moraju imati na umu da homogeni sustav uvijek ima rješenje pa prema tome trebaju paziti da u stupac slobodnih koeficijenata ne upišu sve nule. Kako sustav ne bi imao rješenje, preostaje redak čiji pripadni koeficijent u posljednjem stupcu nije nula, ispuniti nulama. Ostale koeficijente matrice sustava moguće je ispuniti proizvoljno.

U drugom zadatku učenici trebaju ispuniti matricu tako da pripadni sustav ima jedinstveno rješenje. Iako učenici matricu mogu ispunjavati na različite načine te zatim provjeravati ima li taj sustav jedinstveno rješenje ili ne, najefikasniju taktiku učenici će primijeniti ako se sjete da sustav ima jedinstveno rješenje kada je matrica sustava jedinična matrica. Nakon toga, stupac slobodnih koeficijenata učenici mogu ispuniti proizvoljno, ali je važno prokomentirati zašto nam nije bitno jesu li u posljednjem stupcu samo nule ili različiti koeficijenti.

Posljednju matricu učenici trebaju ispuniti tako da pripadni sustav ima beskonačno mnogo rješenja. Učenici se trebaju prisjetiti da će sustav, neovisno o tome je li homogen ili nehomogen, imati beskonačno mnogo rješenja ako proširena matrica sustava sadrži nulredak. Iako je to nužan zahtjev, učenici također trebaju pripaziti prilikom popunjavanja preostala dva retka kako se ne bi dogodilo da ih ispune tako da sustav nema rješenje.

1.4 Množenje matrica

Množenje matrica ostavili smo za kraj ovog poglavlja kako zbog njegove težine i složenosti tako i zbog veze sa sljedećim poglavljem - linearnim operatorima.

Kroz sljedeću aktivnost koja sadrži tri međusobno povezana zadatka, učenici će se postepeno upoznavati s množenjem matrica. Počevši od umnoška matrica tipa 2×1 i 1×2, preko umnoška matrica tipa 2×1 i 2×2 pa do proučavanja umnoška matrica tipa 2×2 i 2×2, pridavat ćemo smisao množenju matrica. Uloga nastavnika u ovoj aktivnosti je velika te je diskusija i postavljanje pitanja ključni način vođenja učenika do konačnog zaključka. Glavni cilj ove aktivnosti nije da učenici samostalno otkriju pravilo množenja matrica već da uoče potrebu za njihovim množenjem te da im zapisana definicija ne bude toliko apstraktna koliko bi bila kada bismo im bez primjera objasnili na koji način se množe matrice.

Aktivnost 9. *Možemo množiti matrice?*

Cilj: učenici će usvojiti množenje matrica

Nastavni oblik: individualni rad

Nastavna metoda: problemska nastava, metoda dijaloga

Potrebni materijal: nastavni listić sa zadatkom

Tijek aktivnosti: Svaki učenik dobiva svoj nastavni listić. Učenici najprije samostalno rješavaju zadatak po zadatak. Nakon svakog zadatka slijedi diskusija i donešenje određenih zaključaka. Predviđeno vrijeme trajanja aktivnosti je jedan školski sat.

Nastavni listić:

Zadatak 1.

Anja je kupila dva kilograma jabuka i kilogram krušaka. Jabuke koštaju 4 kn/kg, a kruške 9 kn/kg.

a) Možete li dane podatke organizirati u matricu/matrice?

b) Koliko je Anja potrošila novaca? Zapišite račun kojim ste izračunali taj iznos.

Zadatak 2.

Anjina prijateljica Karla također je kupila dva kilograma jabuka i kilogram krušaka, no jabuke su koštale 5kn/kg, a kruške 10 kn/kg.

a) Koliko je Karla potrošila novaca? Zapišite račun kojim ste izračunali taj iznos.

b) Možete li ove podatke organizirati kao u prethodnom zadatku?

c) Možete li podatke organizirati koristeći prethodno zapisane matrice?

d) Možete li množenjem matrica iz c) zadatka doći do podataka o tome koliko je novaca potrošila Anja, a koliko Karla?

Zadatak 3.

Tjedan dana nakon i Anja i Karla kupile su 3 kilograma jabuka i 2 kilograma krušaka po istim cijenama kao i tjedan ranije.

a) Koliko je tada svaka od njih potrošila novaca?

b) Možete li ove podatke organizirati koristeći matrice iz prethodnog zadatka?

c) Možete li množenjem matrica iz b) zadatka doći do podataka o tome koliko je novaca svaka od djevojaka potrošila u svakoj kupnji?

Kutak za nastavnika:

Rješenja zadataka, očekivane učeničke zaključke, diskusiju i pitanja razradit ćemo kroz svaki od zadataka.

Zadatak 1.

Učenici su se u drugoj aktivnosti (str. 7) susreli sa sličnim podatcima koje su trebali organizirati u matricu. Upravo taj zadatak mogu povezati s navedenim te zaključiti kako podatke nema smisla organizirati samo u jednu matricu. Iz toga zaključka direktno slijedi da ćemo podatke o kilogramima voća organizirati u jednu matricu, a podatke o cijeni određenog voća u drugu. S obzirom na to da težimo prema množenju matrica, učenike moramo navesti da jedne podatke zapišu u matricu-redak, a druge podatke u matricu-stupac. Ukoliko učenici i jedne i druge podatke svrstaju u matrice istog tipa postavljamo im pitanje kako znaju koji su im podatci u kojoj matrici te postoji li način kako organizirati te podatke a da lakše razlikujemo u kojoj matrici su koji podatci. Učenici trebaju zaključiti da podatke možemo organizirati na dva sljedeća načina:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Neovisno o zapisu podataka u matrice, svi učenici doći će do zaključka da je Anja potrošila 17 kuna te da to dobivamo iz računa: $2 \cdot 4 + 1 \cdot 9$. Od učenika tražimo da zapišu navedeni račun kako bi prilikom daljnje diskusije dobili ideju na koji način množimo prethodno zapisane matrice.

Sada učenici imaju zapisane podatke u matricama, iznos koji je Anja potrošila te račun kojim su došli do tog iznosa. Učenike tada podsjećamo da smo matrice do sada zbrajali, oduzimali i množili skalarom te im postavljamo pitanje koju bi još operaciju mogli s matricama raditi. Očekujemo da će učenici odgovoriti množenje te ih zatim upućujemo da razmisle ima li smisla množiti zapisane matrice te što bi bio rezultat njihovog umnoška. S obzirom da se u jednoj matrici nalaze podatci o količini kupljenog voća, a u drugoj podatci o cijeni odgovarajućeg voća možemo zaključiti da će nam njihov umnožak dati ukupni iznos koji je Anja potrošila. Pred učenike zatim postavljamo novi problem: Kako bi zapisali taj račun te kako bi opisali postupak množenja matrica. Zaključak do kojeg želimo da učenici dođu je da navedeni iznos dobivamo tako da množimo prvi član prve matrice s prvim članom druge matrice te mu dodajemo umnožak drugog član prve matrice s drugim članom druge matrice (ovdje pod pojmovima "prva" i "druga" matrica ne smatramo njihov poredak kao u uređenom paru). Što se tiče samog zapisa računa, javljaju se sljedeće četiri mogućnosti, ovisno o tome na koji su način učenici podatke organizirali u matrice:

$$\text{1. mogućnost: } \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix} = 17 \qquad \text{2. mogućnost: } \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = 17$$

$$\text{3. mogućnost: } \begin{bmatrix} 4 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 17 \qquad \text{4. mogućnost: } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 9 \end{bmatrix} = 17$$

Ključno pitanje s kojim učenici prelaze na idući zadatak je vrijedi li komutativnost množenja matrica te koji je od predloženih zapisa umnoška točan i zašto. Iako još uvijek od učenika ne očekujemo da uoče kako matrice moraju biti ulančane te na koji način tipovi matrica koje množimo utječu na tip matrice koja je rezultat umnoška, želimo ih potaknuti da uoče vezu između broja stupaca i broja redaka matrica koje množimo. Iz tog razloga, proučavamo zapisane mogućnosti te ih diskutiramo s učenicima.

U prve dvije mogućnosti količina voća zapisana je u redak, odnosno matrica ima dva stupca. Imamo podatke o količini kupljenih jabuka i količini kupljenih krušaka. Kako bi mogli izračunati koliko je Anja potrošila novaca, u drugoj matrici također moramo imati dva podatka: cijenu jabuka i cijenu krušaka. Dakle, ako jedna matrica ima dva stupca druga matrica mora imati dva retka.

U druge dvije mogućnosti, količina voća zapisana je u stupac, odnosno matrica sadrži dva retka. Kako bi u ovim slučajevima izračunali koliko je Anja potrošila novaca, druga matrica mora imati dva stupca.

Osim već navedenog ključnog pitanja s kojim učenici prelaze u idući zadatak, važno je i da prethodna dva zaključka sažmu u jedan, privremeni zaključak, koji će nam biti temelj za daljnje proučavanje umnoška matrica: koliko jedna matrica ima redaka, toliko druga matrica mora imati stupaca (ili obrnuto).

Zadatak 2.

U a) dijelu zadatka učenici dolaze do podatka da je Karla potrošila 20 kuna, a navedeni iznos dobivaju iz računa: $2 \cdot 5 + 1 \cdot 10$.

Nadalje, prema prethodnom zadatku učenici će u b) dijelu nove podatke lako organizirati na analogan način:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 10 \end{bmatrix}$$

Ono što učenici već ovdje mogu uočiti je to da je matrica koja nam govori o količini kupljenog voća jednaka kao i u prethodnom zadatku, a ono što se promijenilo je matrica koja nam govori o cijeni pojedinog voća. Taj zaključak učenici koriste u c) dijelu zadatka. Očito matrica $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$, odnosno $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ostaje ne promijenjena, a podatke o cijeni voća koje je ovaj put kupila Karla možemo uvrstiti u matricu u kojoj se nalaze podatci o cijeni voća koje je kupila Anja. U ovom dijelu učenici se opet mogu prisjetiti Aktivnosti 2. (str. 7) u kojoj su podatke o količini voća koje su pojeli mama i tata svrstavali u istu matricu gdje nam je jedan redak odnosno stupac govorio o količini voća koju je pojela mama, a drugi o količini voća koju je pojeo tata. Ako su učenici podatke o cijeni voća koje je kupila Anja svrstali u matricu tipa 2×1 onda će u drugi stupac dodati podatke o cijeni voća koje je kupila Karla. U suprotnom, podatke o cijeni voća koje je kupila Karla učenici će svrstati u drugi redak. Prema tome, podatke možemo organizirati na dva načina:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

U posljednjem dijelu zadatka dolazimo do ključnog pitanja: Možemo li množiti ovako zapisane matrice te što bi bio rezultat umnoška? Imajući na umu prethodni zadatak prirodno nam se nameće odgovor da možemo te da će rezultat ovoga puta biti iznos novca koji je potrošila Anja i iznos novca koji je potrošila Karla. Iako je u prošlom zadatku rezultat množenja matrica bio skalar, u ovom slučaju kao rezultat dobivamo ne jedan, već dva podatka. Prirodno se nameće da ćemo ta dva podatka zapisati u matricu no iz tog zaključka slijedi novo pitanje: Na koji način zapisati ta dva podatka; u matricu tipa 2×1 ili matricu tipa 1×2? Ogovor nam se krije u jednoj od već zapisanih matrica. Učenicima postavljamo pitanje u kojoj matrici "razlikujemo" Anju i Karlu. To je očito matrica tipa 2×2, jer se u drugoj matrici nalaze podatci o količini kupljenog voća koji se odnose na obje djevojke zajedno. Upućujemo učenike da prouče matricu tipa 2×2 te koji se od podataka u njima odnose na Anju, a koji na Karlu.

U matrici $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$ prvi stupac se odnosi na Anju, a drugi na Karlu. Dakle, ako tu matricu množimo s matricom $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$, u prvom stupcu ćemo zapisati koliko je novaca potrošila Anja, a u drugom stupcu koliko je novaca potrošila Karla. Prema tome, rezultat ćemo zapisati u matricu tipa 1×2: $\begin{bmatrix} 17 & 20 \end{bmatrix}$.

U drugom slučaju, u matrici $\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$ prvi redak se odnosi na Anju, a drugi redak na Karlu. Dakle, ako tu matricu množimo s matricom $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, u prvom retku ćemo zapisati koliko je novaca potrošila Anja, a u drugom retku koliko je novaca potrošila Karla. Prema tome, rezultat ćemo zapisati u matricu tipa 2×1: $\begin{bmatrix} 17 \\ 20 \end{bmatrix}$.

Kao i u prethodnom zadatku, sada dolazimo do pitanja kako zapisati navedeni račun. Ponovno, javljaju se četiri mogućnosti:

1. mogućnost: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 20 \end{bmatrix}$ 2. mogućnost: $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 20 \end{bmatrix}$

3. mogućnost: $\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 20 \end{bmatrix}$ 4. mogućnost: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 20 \end{bmatrix}$

Osim što ćemo proučavati različite mogućnosti umnoška matrica tražimo od učenika da opišu postupak množenja matrica. Također, pozornost učenika usmjeravamo i na tipove matrica kako bi došli do očekivanog zaključka da matrice koje množimo moraju biti ulančane. Navedeno ćemo proučavati na prve dvije mogućnosti te ćemo ostaviti učenicima da donešene zaključke provjere na druge dvije mogućnosti.

U prve dvije mogućnosti, količina pojedinog voća zapisana je u redak, odnosno matrica ima dva stupca. Koeficijente te matrice množimo najprije s koeficijentima u prvom stupcu druge matrice (kao u prvom zadatku), a zatim i s koeficijentima u drugom stupcu druge matrice. Rezultat prvog množenja zapisujemo u prvi stupac, a rezultat drugog množenja u drugi. Dakle, kako bi količinu pojedinog voća mogli pomnožiti s odgovarajućom cijenom, druga matrica mora imati dva retka. Ovdje je bitno da s učenicima diskutiramo o tome koliko druga matrica može imati stupaca. U prvom zadatku imali smo jedan stupac koji nam govoriti o cijeni voća kojeg je kupila Anja. U drugom zadatku smo u matricu dodali stupac koji nam govori o cijeni voća kojeg je kupila Karla. Možemo li na isti način dodati još stupaca? Kako bi tada izgledao rezultat umnoška matrica? Učenici bi trebali zaključiti da možemo na analogan način dodati još proizvoljan broj stupaca iz čega slijedi zaključak da nam broj stupaca druge matrice ne utječe na mogućnost množenja matrica, ali ipak mijenja oblik rješenja. Učenike potičemo da u matricu 2×2 nadodaju još jedan stupac te da zatim zapišu umnožak matrica. Nakon što to učine, usmjeravamo ih da prouče tipove matrica koje su množili u oba primjera te tip matrice koju su dobili kao rezultat umnoška. U prvom primjeru učenici su množili matrice tipa 1×2 i 2×2 te su kao rezultat dobili matricu tipa 1×2. Iz ovog dijela učenici ne mogu još ništa konkretno zaključiti. Jedan od zaključaka koji bi se mogao pojaviti na temelju samo ovog primjera je da je rezultat umnoška istog tipa kao jedna od matrica u umnošku. No, kada učenici prouče drugi primjer, u kojem su množili matrice tipa 1×2 i 2×3 te za rezultat dobili matricu tipa 1×3, očekujemo da će se polako formirati očekivani zaključci. Ukoliko to nije slučaj, učenicima možemo zadati da nadodaju još koji stupac u matricu, izračunaju umnožak te prouče promjene u rezultatima. Radi lakšeg proučavanja, na ploču zapisujemo tipove matrica iz umnoška i tip matrice koja je rezultat umnoška:

$$\begin{aligned} 1 \times 2 \cdot 2 \times 2 &= 1 \times 2 \\ 1 \times 2 \cdot 2 \times 3 &= 1 \times 3 \\ 1 \times 2 \cdot 2 \times 4 &= 1 \times 4 \end{aligned}$$

Iz navedenog želimo da učenici zaključe da na tip matrice u rezultatu ne utječe broj koji "povezuje" matrice iz umnoška. U ovom trenutku učenicima ćemo otkriti da ne vrijedi komutativnost matrica ali i napomenuti da ćemo to još i službeno provjeriti nakon što precizno zapišemo postupak množenja matrica. Prema to, uz gore navedene zapise tipova matrica u umnošku, dopisujemo i njihove "komutativne parove":

$$\begin{aligned} 2 \times 2 \cdot 1 \times 2 &= 1 \times 2 \\ 2 \times 3 \cdot 1 \times 2 &= 1 \times 3 \\ 2 \times 4 \cdot 1 \times 2 &= 1 \times 4 \end{aligned}$$

Očekujemo da će učenici iz navedenih zapisa uočiti kako su prva tri zapisa smislenija jer se brojevi u sredini koji "povezuju" matrice u umnošku izostave te nam ostaje tip matrice koja je rezultat umnoška. Učenicima tada objašnjavamo da je to jedini točan zapis te uvodimo definiciju ulančanih matrica.

Definicija 1.4.1. *Za uređeni par matrica kažemo da su* ***ulančane*** *ako druga matrica ima onoliko redaka koliko prva ima stupaca. ([1])*

Ovdje naglašavamo učenicima da govorimo o **uređenom paru** matrica upravo iz razloga jer ne vrijedi komutativnost množenja.

Definicija 1.4.2. *Općenito će umnožak matrica AB biti definiran samo ako je matrica A tipa $m \times n$, a matrica B tipa $n \times p$. Njihov umnožak bit će matrica tipa $m \times p$. ([1])*

Učenicima zadajemo da prouče i druge dvije mogućnosti u ovome zadatku te provjere jesu li one dobro zapisane. Prema prethodno navedenom pravilu, učenici trebaju zaključiti da 4. mogućnosti, kao i 2., nije točna. Nakon što definiramo precizno množenje matrica, vratit ćemo se na ovaj primjer te zadati učenicima da prouče vezu između 1. i 3. mogućnosti.

Prije prelaska na idući zadatak, učenike trebamo vratiti na prethodni kako bi proučili koje su od četiri zapisane mogućnosti točne. Za razliku od 2. zadatka, u 1. su svi umnošci dobro zapisani. No, umnošci u 2. i 4. mogućnosti za rezultat daju matricu tipa 2×2 pa navedeni zapisi nisu točni.

Zadatak 3.

Kao i u prethodnom zadatku, diskusiju s učenicima provest ćemo samo na jednom primjeru, a drugi primjer im ostavljamo za provjeru donešenih zaključaka.

Anja je ovaj tjedan kupila 3 kilograma jabuka po cijeni 4 kn/kg i 2 kilograma krušaka po cijeni 9 kn/kg. Prema tome, Anja je potrošila $3 \cdot 4 + 2 \cdot 9 = 30$ kn. S druge strane, Karla je kupila 3 kilograma jabuka po cijeni 5 kn/kg i 2 kilograma krušaka po cijeni 10 kn/kg. Prema tome, Karla je potrošila $3 \cdot 5 + 2 \cdot 10 = 35$ kn.

Iz prethodnog zadatka imamo matricu $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$ koja nam govori o količini voća koje su djevojke kupile tjedan dana ranije te matricu $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$ koja nam govori o cijenama pojedinog voća koje svaka od djevojaka kupila. Očito ćemo podatke iz ovog zadatka organizirati u drugi redak prve matrice jer se u njoj nalaze podatci o količini kupljenog voća.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

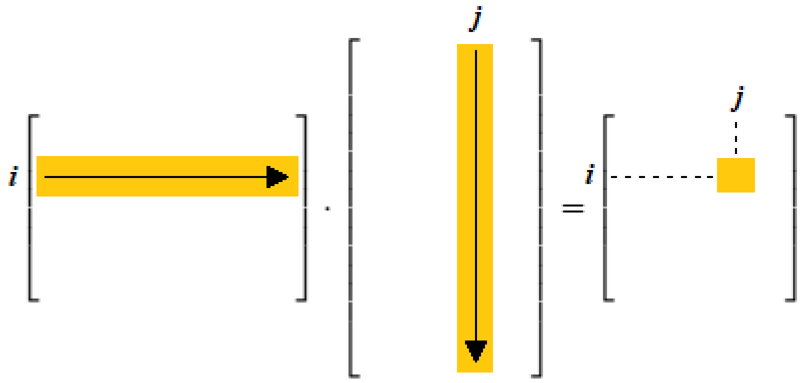
Sada nam prvi redak govori o količini voća kupljenog prvi tjedan, a drugi redak o količini voća kupljenog drugi tjedan te nam preostaje proučiti kako ćemo računati novi umnožak:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$$

U prethodnom zadatku učenici su s retkom $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$ najprije množili prvi a zatim i drugi stupac druge matrice te su dobivene rezultate zapisali u redak nove matrice. Analogno, u ovom zadatku učenici zaključuju da uz prethodni račun sada još i redak $\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$ trebaju množiti najprije s prvim, a zatim i s drugim stupcem druge matrice. S obzirom na to da smo u prvi redak zapisali iznos novca koji su potrošile Anja i Karla prvi tjedan, iznose za drugi tjedan zapisat ćemo u drugi redak. Na temelju opisanog, dobivamo rezultat množenja matrica:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 20 \\ 30 & 35 \end{bmatrix}$$

Kako bi učenici lakše iz navedenog primjera usvojili općenito pravilo množenja matrica, u navedenom primjer započinjemo diskusiju o tome na koji način smo dobili pojedini element iz rezultata. Učenicima postavljamo pitanja: "Na kojem mjestu se nalazi element 17? Koje retke/stupce smo množili da bi dobili taj rezultat?". Analogno i za ostale elemente. Kroz navedenu diskusiju želimo da učenici dođu do zaključka da se na mjestu (i, j) nalazi umnožak i-tog retka prve matrice sa j-tim stupcem druge matrice. Navedeni zaključak prikazujemo i slikovno kao na slici 1.5



Slika 1.5: Množenje matrica

Konačno, precizno matematički zapisujemo pravilo množenja matrica:

Definicija 1.4.3. *Neka je $A = [a_{ij}]$ matrica tipa $m \times n$, $B = [b_{ij}]$ matrica tipa $n \times p$. Opći element umnoška AB dan je formulom*

$$[AB]_{ij} := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Ovaj umnožak prepoznajemo kao umnožak i-tog retka matrice A i j-tog stupca matrice B. Dakle, za matricu $C = AB$, $C = [c_{ij}]$, vrijedi:

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{nj} \end{bmatrix}. \quad ([2])$$

Učenicima sada zadajemo zadatak da svatko od njih odabere dvije proizvoljne matrice te da na njima provjeri vrijedi li komutativnost množenja. S obzirom na to da su matrice koje komutiraju rjeđe od onih koje ne komutiraju, očekujemo da će večina učenika zaključiti da množenje matrica nije komutativna operacija. Ukoliko se učenici nisu ranije susreli s pojmom kontraprimjera, sada ga možemo spomenuti te diskutirati s učenicima je li jedan primjer za koji navedeno svojstvo ne vrijedi dovoljan da općenito možemo reći da to svojstvo ne vrijedi.

Definicija 1.4.4. *Za bilo koje dvije matrice A i B* ***ne vrijedi komutativnost*** *matričnog množenja, pa je općenito*

$$AB \neq BA.$$

Ako za matrice A i B vrijedi $AB = BA$, tada kažemo da one ***komutiraju****. ([2])*

Nakon što učenici provjere navedeno, vraćamo ih na 2. zadatak u kojem su zaključili kako nam dva različita zapisa matrica daju točno rješenje. To su bili zapisi:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 20 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Matrice iz prvog zapisa označimo redom s A, B i C te dobivamo $A \cdot B = C$. Učenicima zatim zadajemo da prouče drugi zapis te da ga pokušaju povezati sa prethodno označenim matricama. Prilikom uvođenja matrica, učenici su se upoznali sa pojmom transponirane matrice pa očekujemo da će u drugom zapisu prepoznati transponirane matrice i zapisati: $B^\tau \cdot A^\tau = C^\tau$. S učenicima je potrebno diskutirati hoće li umnožak matrica $B^\tau \cdot A^\tau$ biti dobro definiran za bilo koje matrice A i B ako znamo da je umnožak $B \cdot A$ dobro definiran. Dovoljno je da učenici znaju definiciju transponiranja matrica kako bi došli do očekivanog zaključka. Naime, neka je A matrica tipa $m \times n$ i B matrica tipa $n \times p$. Tada je matrica A^τ tipa $n \times m$, a matrica B^τ tipa $p \times n$ pa je umnožak $B^\tau \cdot A^\tau$ dobro definiran.

Za kraj ostaje provjeriti koja od poznatih svojstava zadovoljava ovako definirana operacija množenja. Kao i do sada, učenici na proizvoljnim primjerima provjeravaju asocijativnost i distributivnost množenja matrica.

Definicija 1.4.5. *Za sve matrice A, B i C vrijedi* ***asocijativnost*** *matričnog množenja:*

$$(AB)C = A(BC),$$

kad god je umnožak (s bilo koje strane) definiran. ([2])

Definicija 1.4.6. *Za sve matrice A, B i C vrijedi* ***distributivnost*** *množenja prema zbrajanju:*

$$(A + B)C = AC + BC, \quad A(B + C) = AB + AC,$$

kad god je lijeva (ili desna) strana u tim izrazima definirana. ([2])

Poglavlje 2

Linearni operatori u srednjoškolskoj nastavi

Linearni opratori, odnosno linearna preslikavanja, prirodni su nastavak cjeline matrica. Tako se u udžbeniku [2] linearna preslikavanja ravnine nalaze u istom poglavlju kao i matrice te se obrađuju nakon množenja matrica. Nakon što se definiraju linearni operatori, obrađuje se veza linearnih operatora i matrica, zatim se proučavaju matrični prikazi ranije naučenih linearnih preslikavanja te se na kraju obrađuje kompozicija linearnih operatora. U udžbeniku [1] navedeno gradivo se ne obrađuje.

Osim što učenici mogu primijeniti gradivo matrica na jednom potpuno novom području, linearni operatori objedinjuju veliku većinu preslikavanja ravnine koja su učenici proučavali u dosadašnjem školovanju. Primjenjujući matrice, učenici će ta preslikavanja sada proučavati s novog gledišta te će na taj način proširiti i upotpuniti svoje znanje.

Linearni operatori jedan su od pojmova za koji od učenika, osim pronalaženja primjera, možemo tražiti da pronađu primjere koji ne odgovaraju definiciji. Na taj će način učenici kasnije lakše uočiti koja preslikavanja sigurno ne zadovoljavaju uvjete linearnog operatora, a koja bi mogla zadovoljavati.

2.1 Veza linearnih operatora i matrica

Aktivnost 10. *Linearni operator* $\leftrightarrow$ *Matrica*

Cilj: učenici će otkriti vezu između linearnih operatora i matrica

Nastavni oblik: individualni rad

Nastavna metoda: problemska nastava

Potrebni materijal: nastavni listić sa zadatkom

Tijek aktivnosti:
Svaki učenik dobit će listić sa zadatkom koji se sastoji od dva dijela. Učenici za rješavanje svakog dijela imaju 10 minuta. Nakon što riješe prvi dio zadatka slijedi provjera rješenja, diskusija i donošenje zaključaka. Potom učenici prelaze na rješavanje idućeg dijela nakon čega ponovno slijedi provjera rješenja, diskusija te donošenje konačnog zaključka.

Nastavni listić:

Zadatak:

I Dio

Zadan je linearni operator $f : V^2 \to V^2$ i njegovo djelovanje na kanonskoj bazi $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$:

$$f(\vec{i}) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$f(\vec{j}) = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

a) Vektor $\vec{r} \in V^2$ prikaži kao linearnu kombinaciju vektora baze.
b) Vektor $\vec{r}$ prikaži matrično.
c) Koristeći svojstvo da je preslikavanje f linearni operator, raspis vektora $\vec{r}$ iz a) zadatka te djelovanje linearnog operatora f na vektorima baze, zapiši $f(\vec{r})$ kao linearnu kombinaciju vektora baze.
d) Dobiveni izraz zapiši matrično

$$f(\vec{r}) = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

II Dio

Obrnuto, neka je zadana matrica $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ te preslikavanje $f : V^2 \to V^2$ zadano pravilom pridruživanja $f(\vec{r}) = A\vec{r}$. Je li preslikavanje f linearni operator?

Kutak za nastavnika:

Prije same analize aktivnosti i rješenja, osvrnut ćemo se na definiciju linearnih operatora iz udžbenika:

Definicija 2.1.1. *Preslikavanje $f : V^2 \to V^2$ je* ***linearno*** *ako za sve skalare α_1, α_2 i vektore*

$\vec{r_1}, \vec{r_2} \in V^2$ *vrijedi*

$$f\left(\alpha_1\vec{r_1} + \alpha_2\vec{r_2}\right) = \alpha_1 f(\vec{r_1}) + \alpha_2 f(\vec{r_2}). \tag{2.1}$$

Ili, ekvivalentno

$$f\left(\vec{r_1} + \vec{r_2}\right) = f(\vec{r_1}) + f(\vec{r_2}) \tag{2.2}$$

$$f(\alpha\vec{r}) = \alpha f(\vec{r}). \quad ([2]) \tag{2.3}$$

Uočimo da je u definiciji linearni operator definiran kao preslikavanje iz vektorskog prostora V^2 u vektorski prostor V^2. Zanemarivši školsku definiciju, znamo da se linearni operator definira kao preslikavanje $f : U \to V$ gdje su U i V vektorski prostori nad istim poljem. Prema tome, u srednjoj školi linearni operator također možemo definirati kao preslikavanje $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Ova aktivnost, kao i sve ostale, prilagodljive su navedenoj definiciji. Umjesto kanonske baze $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ koristimo kanonsku bazu za $\mathbb{R}^2, \{(1,0),(0,1)\}$, a umjesto proizvoljnog vektora $\vec{r} \in V^2$ odabiremo proizvoljni uređeni par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Odabir definicije prepuštamo nastavnicima koji, poznavajući predznanje svojih učenika, trebaju samostalno procijeniti u kojem vektorskom prostoru će učenicima biti lakše savladati linearne operatore. S obzirom na definiciju iz udžbenika, u nastavku rada fokusirat ćemo se na vektorski prostor V^2.

U a) zadatku učenici primjenjuju stečeno znanje iz gradiva vektora. Vektor $\vec{r}$ trebaju zapisati kao $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ gdje je naravno svejedno koje slova učenici iskoriste za koeficijente uz vektore baze $\vec{i}$ i $\vec{j}$, osim naravno a_1, a_2, b_1 i b_2 koje smo ranije iskoristili.

U b) zadatku može se javiti pitanje treba li koordinate vektora $\vec{r}$ zapisati u vektor-redak ili vektor-stupac, no učenici trebaju uočiti na koji su način prikazani $f(\vec{i})$ i $f(\vec{j})$ te prema tome $\vec{r}$ matrično zapisati kao $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Za rješavanje c) zadatka učenici trebaju znati definiciju linearnog operatora.
Prema definiciji, učenici trebaju provjeriti:

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &= f\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right) = (2.1) = xf(\vec{i}) + yf(\vec{j}) \\ &= x(a_1\vec{i} + a_2\vec{j}) + y(b_1\vec{i} + b_2\vec{j}) \\ &= (a_1x + b_1y)\vec{i} + (a_2x + b_2y)\vec{j}. \end{aligned}$$

Ne očekujemo da će učenici od prve prepoznati o kojem umnošku matrica se radi. No ako su učenici usvojili množenje matrica, metodom pokušaja i pogreške ubrzo bi trebali doći do rezultata:

$$f(\vec{r}) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Sada još preostaje s učenicima diskutirati prethodno navedeni zapis. Iz b) dijela zadatka bi učenici trebali prepoznati da je druga matrica zapravo matrični zapis vektora $\vec{r}$. S obzirom na to da prvu matricu nismo do sada spominjali u ovome zadatku, nju ćemo označiti sa A. Prema tome, navedenu jednakost sada možemo zapisati kao $f(\vec{r}) = A\vec{r}$. Iako se matrica A do sada nije pojavljivala u zadatku, pozornost učenika usmjeravamo na stupce te matrice. Želimo da učenici uoče da je prvi stupac matrični zapis vektora $f(\vec{i})$, a drugi stupac matrični zapis vektora $f(\vec{j})$.

Konačno, zapisujemo zaključak prvog dijela: Za svaki linearni operator $f : V^2 \to V^2$ postoji matrica A tipa 2×2 takva da je $f(\vec{r}) = A\vec{r}$ za $\vec{r} \in V^2$.

U drugom dijelu zadatka učenici se trebaju sjetiti kako provjeravaju je li zadano preslikavanje linearni operator te prilikom provjere trebaju koristiti ranije usvojena svojstva matrica. Da bi zadano preslikavanje f bilo linearni operator treba vrijediti (2.1) ili (2.2) i (2.3). Provjerimo vrijedi li (2.1):

$$\begin{aligned} f(\alpha_1\vec{r_1} + \alpha_2\vec{r_2}) &= A(\alpha_1\vec{r_1} + \alpha_2\vec{r_2}) \\ &= A(\alpha_1\vec{r_1}) + A(\alpha_2\vec{r_2}) \\ &= \alpha_1 A(\vec{r_1}) + \alpha_2 A(\vec{r_2}) \\ &= \alpha_1 f(\vec{r_1}) + \alpha_2 f(\vec{r_2}). \end{aligned}$$

Prema tome, zadano preslikavanje f je linearni operator. Dakle, svaka matrica A tipa 2×2 definira jedno linearno preslikavanje koje vektoru $\vec{r} \in V^2$ pridružuje vektor $\vec{r'} \in V^2$ tako da je $\vec{r'} = A\vec{r}$. ([2])

Time smo dokazali sljedeće:

Teorem 2.1.2. *Svakom linearnom preslikavanju $f : V^2 \to V^2$ odgovara matrica A drugog reda takva da je*

$$f(\vec{r}) = A\vec{r}, \quad \forall \vec{r} \in V^2.$$

Stupci matrice A dobiju se tako da se odredi djelovanje preslikavanja f na vektorima kakonske baze. ([2])

2.2 Kompozicija linearnih operatora

Aktivnost 11. *Kompozicija linearnih operatora*

Cilj: učenici će otkriti vezu između matričnog prikaza kompozicije linearnih operatora i matričnog prikaza svakog od operatora

Nastavni oblik: rad u grupi

Nastavna metoda: problemska nastava

Potrebni materijal: nastavni listić sa zadatkom

Tijek aktivnosti: Učenike podijelimo u tročlane grupe. Svaki učenik u grupi dobiva svoj nastavni listić. Učenici najprije samostalno rješavaju prva dva zadatka. Nakon što svaki od učenika u grupi riješi svoj zadatak, učenici kreću na rješavanje preostala tri zadatka koja rješavaju zajednički. Predviđeno vrijeme trajanja aktivnosti je 30 minuta.

Kartice sa zadatcima:

A

SAMOSTALNO:
Neka je f preslikavanje koje vektoru $\vec{r}$ pridružuje vektor simetričan s obzirom na os apscisa.
a) Je li f linearni operator? Dokaži.
b) Odredi matricu pridruženu tom linearnom operatoru.

U GRUPI:
c) Može li se neko od preslikavanja f, g, h prikazati kao kompozicija ostala dva?
d) Općenito, ako su f i g linearni operatori, je li kompozicija $f \circ g$ linearni operator? Dokažite.
e) Proučite kompoziciju koju ste zapisali u c) zadatku. Možete li operacijama između matričnih prikaza operatora iz kompozicije dobiti matrični prikaz preslikavanja koje je rezultat kompozicije?

B

SAMOSTALNO:
Neka je g preslikavanje koje vektoru $\vec{r}$ pridružuje vektor simetričan s obzirom na os ordinata.
a) Je li g linearni operator? Dokaži.
b) Odredi matricu pridruženu tom linearnom operatoru.

U GRUPI:
c) Može li se neko od preslikavanja f, g, h prikazati kao kompozicija ostala dva?
d) Općenito, ako su f i g linearni operatori, je li kompozicija $f \circ g$ linearni operator? Dokažite.
e) Proučite kompoziciju koju ste zapisali u c) zadatku. Možete li operacijama između matričnih prikaza operatora iz kompozicije dobiti matrični prikaz preslikavanja koje je rezultat kompozicije?

C

SAMOSTALNO:
Neka je h preslikavanje koje vektoru $\vec{r}$ pridružuje vektor simetričan s obzirom na ishodište.
a) Je li h linearni operator? Dokaži.
b) Odredi matricu pridruženu tom linearnom operatoru.

U GRUPI:
c) Može li se neko od preslikavanja f, g, h prikazati kao kompozicija ostala dva?
d) Općenito, ako su f i g linearni operatori, je li kompozicija $f \circ g$ linearni operator? Dokažite.
e) Proučite kompoziciju koju ste zapisali u c) zadatku. Možete li operacijama između matričnih prikaza operatora iz kompozicije dobiti matrični prikaz preslikavanja koje je rezultat kompozicije?

Kutak za nastavnika:

Svaki od učenika najprije samostalno provjerava je li zadano preslikavanje linearni operator. U sva tri primjera prilikom provjere linearnosti preslikavanja, učenici trebaju zapisati vektore kao linearnu kombinaciju vektora kanonske baze. Sličan postupak smo koristili u prethodnoj aktivnosti kada smo vektor $\vec{r}$ zapisali kao $x\vec{i} + y\vec{j}$. Ukoliko učenici zapnu na tom dijelu, podsjećamo ih na navedeni primjer te im dajemo uputu da isto naprave i u ovom zadatku. Također, učenicima možemo napomenuti da posebno provjeravaju aditivnost i homogenost kako bi im bilo lakše. Kao što su naučili u prethodnoj aktivnosti, za određivanje matričnog prikaza pojedinog linearnog operatora dovoljno je odrediti njegovo djelovanje na vektorima kanonske baze te rezultate zapisati u stupce matrice.

Rješenje Učenika A:

Provjeravamo je li preslikavanje f aditivno:

$$\begin{aligned} f(\vec{r_1} + \vec{r_2}) &= f\Big((x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j})\Big) \\ &= f\Big((x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}\Big) \\ &= (x_1 + x_2)\vec{i} - (y_1 + y_2)\vec{j} \\ &= (x_1\vec{i} - y_1\vec{j}) + (x_2\vec{i} - y_2\vec{j}) \\ &= f(\vec{r_1}) + f(\vec{r_2}) \end{aligned}$$

Provjeravamo je li preslikavanje f homogeno:

$$\begin{aligned} f(\alpha\vec{r}) &= f\left(\alpha\left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}\right)\right) \\ &= f\left(\alpha x_1\vec{i} + \alpha y_1\vec{j}\right) \\ &= \alpha x_1\vec{i} - \alpha y_1\vec{j} \\ &= \alpha\left(x_1\vec{i} - y_1\vec{j}\right) \\ &= \alpha f(\vec{r}) \end{aligned}$$

S obzirom na to da preslikavanje f zadovoljava svojstva (2.2) i (2.3) slijedi da je preslikavanje f linearni operator.

Za određivanje matričnog prikaza linearnog operatora f trebamo odrediti njegovo djelovanje na vektorima kanonske baze:

$$f(\vec{i}) = \vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f(\vec{j}) = -\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Prema tome, matrični prikaz linearnog operatora f je $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Rješenje Učenika B:

Provjeravamo je li preslikavanje g aditivno:

$$\begin{aligned} g(\vec{r_1} + \vec{r_2}) &= g\left((x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j})\right) \\ &= g\left((x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}\right) \\ &= -(x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} \\ &= (-x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) + (-x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) \\ &= g(\vec{r_1}) + g(\vec{r_2}) \end{aligned}$$

Provjeravamo je li preslikavanje g homogeno:

$$\begin{aligned} g(\alpha\vec{r}) &= g\left(\alpha\left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}\right)\right) \\ &= g\left(\alpha x_1\vec{i} + \alpha y_1\vec{j}\right) \\ &= -\alpha x_1\vec{i} + \alpha y_1\vec{j} \\ &= \alpha\left(-x_1\vec{i} + y_1\vec{j}\right) \\ &= \alpha g(\vec{r}) \end{aligned}$$

S obzirom na to da preslikavanje g zadovoljava svojstva (2.2) i (2.3) slijedi da je preslikavanje g linearni operator.

Za određivanje matričnog prikaza linearnog operatora g trebamo odrediti njegovo djelovanje na vektorima kanonske baze:

$$g(\vec{i}) = -\vec{i} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g(\vec{j}) = \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Prema tome, matrični prikaz linearnog operatora g je $G = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje Učenika C:

Provjeravamo je li preslikavanje h aditivno:

$$\begin{aligned} h\left(\vec{r_1} + \vec{r_2}\right) &= h\Big((x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j})\Big) \\ &= h\Big((x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}\Big) \\ &= -(x_1 + x_2)\vec{i} - (y_1 + y_2)\vec{j} \\ &= (-x_1\vec{i} - y_1\vec{j}) + (-x_2\vec{i} - y_2\vec{j}) \\ &= h(\vec{r_1}) + h(\vec{r_2}) \end{aligned}$$

Provjeravamo je li preslikavanje h homogeno:

$$\begin{aligned} h\left(\alpha\vec{r}\right) &= h\Big(\alpha\left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}\right)\Big) \\ &= h\Big(\alpha x_1\vec{i} + \alpha y_1\vec{j}\Big) \\ &= -\alpha x_1\vec{i} - \alpha y_1\vec{j} \\ &= \alpha\Big(-x_1\vec{i} - y_1\vec{j}\Big) \\ &= \alpha h(\vec{r}) \end{aligned}$$

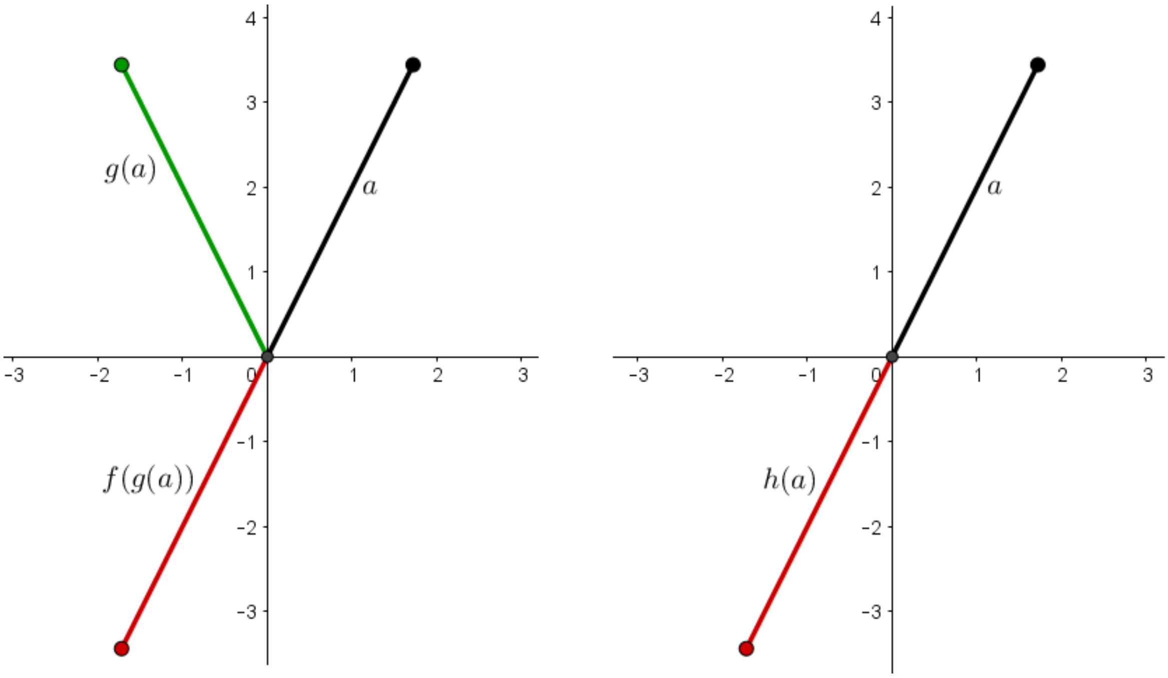
S obzirom na to da preslikavanje h zadovoljava svojstva (2.2) i (2.3) slijedi da je preslikavanje h linearni operator.

Za određivanje matričnog prikaza linearnog operatora h trebamo odrediti njegovo djelovanje na vektorima kanonske baze:

$$h(\vec{i}) = -\vec{i} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h(\vec{j}) = -\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Prema tome, matrični prikaz linearnog operatora h je $H = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Za d) zadatak učenici najprije trebaju proučiti sva tri zadana preslikavanja. Dovoljno je da prepoznaju jednu od 6 mogućih kompozicija: $f \circ g = g \circ f = h, f \circ h = h \circ f = g, g \circ h = h \circ g = f$. Učenici kompozicije mogu otkriti skicirajući zadana preslikavanja na papiru, no preciznije je i poželjnije ako imaju mogućnosti istraživati kompozicije u nekom od programa dinamičke geometrije (npr. kao na slici 2.1).



Slika 2.1: $f \circ g = h$

Prije nego što učenici krenu istraživati matrični zapis kompozicije linearnih operatora, najprije se trebaju uvjeriti da je kompozicija linearnih operatora zaista linearni operator. Sada već standardnim i uhodanim postupkom učenici dokazuju da je za linearne operatore f i g kompozicija $f \circ g$ također linearni operator:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(\vec{r_1} + \vec{r_2}) &= f\left(g\left(\vec{r_1} + \vec{r_2}\right)\right)\\ &= f\left(g(\vec{r_1}) + g(\vec{r_2})\right)\\ &= f(g(\vec{r_1})) + f(g(\vec{r_2}))\\ &= (f \circ g)(\vec{r_1}) + (f \circ g)(\vec{r_2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(\alpha\vec{r}) &= f\left(g(\alpha\vec{r})\right)\\ &= f\left(\alpha g(\vec{r})\right)\\ &= \alpha(f(g(\vec{r})))\\ &= \alpha\left(f \circ g\right)(\vec{r})\end{aligned}$$

Učenicima još preostaje proučiti i povezati matrične zapise linearnih operatora. Pretpostavimo da su učenici u c) zadatku zapisali kompoziciju $f \circ g = h$. Učenici sada proučavaju matrice F, G i H te aritmetičkim operacijama između dviju matrica pokušavaju dobiti treću. Intuitivno je jasno da od matrica F i G trebaju dobiti matricu H s obzirom na to da kompozicijom linearnih operatora f i g dobivamo linearni operatora h. Lako je uočiti da zbrajanjem matrica F i G ne dobivamo matricu H. No umnožak FG daje upravo matricu H. Ali također i umnožak GF za rezultat daje matricu H. Neovisno o tome zapišu li umnožak kao FG ili GF, učenici iz dobivenog mogu zaključiti da je matrični prikaz kompozicije linearnih operatora jednak umnošku matričnih prikaza tih operatora. Preostaje još diskutirati s učenicima je li bitno u kojem poretku množimo matrice. Učenici sada već znaju da kompozicija funkcija nije komutativna operacija, kao ni množenje matrica. Prema tome, učenicima postavljamo pitanje: "Ako općenito kompozicije $f \circ g$ i $g \circ f$ ne predstavljaju isto preslikavanje, koji od umnožaka FG i GF odgovara kojoj kompoziciji?". Očekujemo da će učenici već ovdje ispravno povezati kompozicije i odgovarajuće umnoške, no kako bi im dodatno "opravdali" točno rješenje postavljamo im pitanje s kojom funkcijom najprije djelujemo u kompoziciji $f \circ g$. Učenici već od prije znaju da najprije djelujemo s funkcijom g a zatim s funkcijom f. Također, učenici znaju da kada djelovanje linearnih operatora prikazujemo preko njihovog matričnog prikaza, argument na koji djelujemo linearnim operatorom množimo matričnim prikazom linearnog operatora s lijeve strane. Prema tome, argument prvo množimo matricom G, a zatim matricom F pa komopziciji linearnih operatora $f \circ g$ odgovara matrični prikaz FG.

2.3 Grafički i matrični prikaz djelovanja geometrijskih preslikavanja

Aktivnost 12. *Memory*

Cilj: učenici uvježbavaju vezu između matričnih prikaza linearnih operatora i djelovanja operatora na zadanom objektu

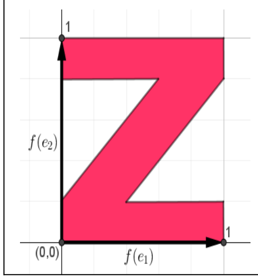
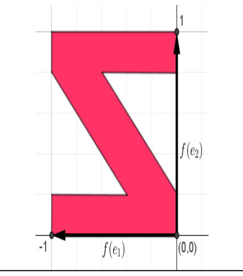
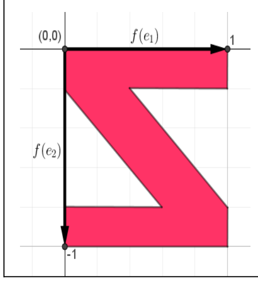
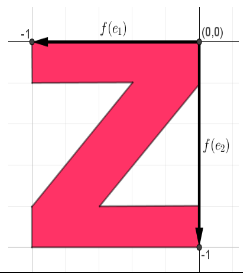
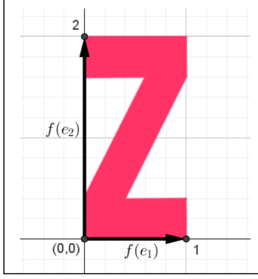
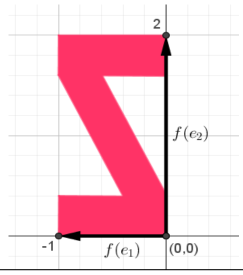
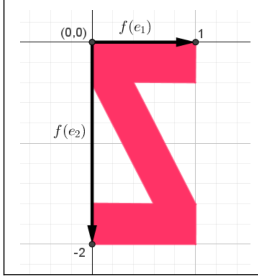
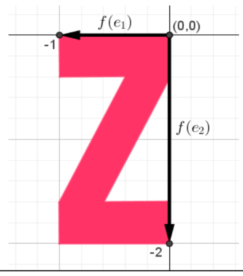
Nastavni oblik: rad u paru

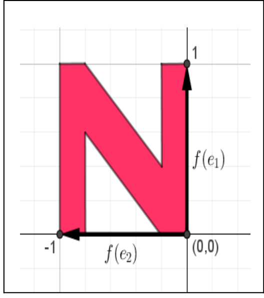
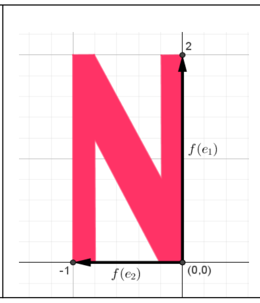
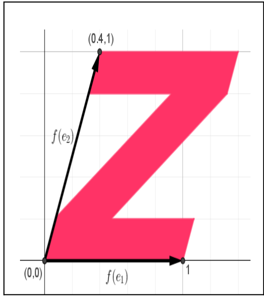
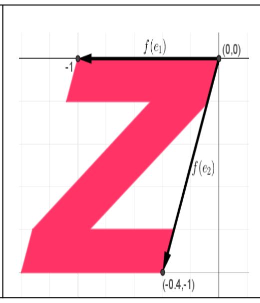
Nastavna metoda: problemska nastava

Potrebni materijal: kartice za memory

Tijek aktivnosti: Učenike podijelimo u parove. Svaki par dobiva skupinu od 24 kartice (12 parova) koje trebaju promiješati i posložiti na klupu, licem prema dolje. Učenici zatim naizmjence otvaraju po dvije kartice. Prilikom svakog otvaranja, učenik koji otvori kartice treba objasniti svome paru zašto te kartice čine, odnosno ne čine par. Parovima koji su gotovi prije ostalih zadajemo da smisle nekoliko vlastitih primjera.

Kartice za memory:

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$</td>
<td>
</td>
<td>$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$</td>
<td>
</td>
<td>$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$</td>
<td>
</td>
<td>$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$</td>
<td>
</td>
<td>$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>$F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$</td>
<td>
</td>
<td>$F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>$F = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$</td>
<td>
</td>
<td>$F = \begin{bmatrix} -1 & -0.4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$</td>
</tr>
</table>

Kutak za nastavnika:

Nakon što svi parovi završe s igrom, na projektoru prikazujemo parove kartica te tražimo od učenika da objasne zašto prikazane kartice čine par te da imenuju pripadno preslikavanje. S karticama smo obuhvatili učenicima poznata preslikavanja: identitetu, simetriju s obzirom na os apscia i os ordinata, simetriju s obzirom na ishodište, hometetiju, zakošenje te kompozicije navedenih preslikavanja.

Poglavlje 3

Projektni zadatak

Projektni zadatak sastoji se od nekoliko dijelova. Svaki dio učenicima zadajemo na kraju pojedinog sata. Na početku idućeg sata provjeravamo što su učenici riješili i zaključili te im prema potrebi dajemo uputu i diskutiramo o idućem dijelu zadatka. Glavni cilj ovog projektnog zadatka je proširiti dosadašnje znanje učenika te primijeniti naučenu teoriju na konkretnom primjeru iz stvarnog života. Zadatak je razrađen na temelju ideje iz prezentacije [3].

3.1 Uvodni dio

Zadatak:

Prouči i odigraj igricu *Asteroids*: http://www.freeasteroids.org/

1. Opiši gibanje svemirskog broda.

2. Možemo li gibanje broda opisati geometrijskim preslikavanjima? Ako da, kojima?

3. Možemo li svemirski brod predočiti geometrijskim likom / tijelom? Ako da, kojim?

4. Na koji način možeš svome prijatelju koji ne vidi tvoj zaslon opisati trenutni položaj broda u igrici?

Kutak za nastavnika:

Uvodnim dijelom ovog projektnog zadatka želimo učenike potaknuti na razmišljanje o mogućnosti matematičkog modeliranja navedene igrice. Cilj nam je da učenici prepoznaju osnovne elemente - translaciju, rotaciju, trokut kao svemirski brod te pravokutni koordinatni sustav kao sredstvo za opisivanje trenutnog položaja broda. Navedene pojmove i njihovu svrhu detaljno ćemo razraditi kroz nekoliko temeljnih etapa zadatka.

Očekujemo da će učenici u 1. zadatku gibanje broda opisivati ”ne matematičkim” pojmovima poput: brod se pomiče gore, dolje, lijevo, desno, u svim smjerovima, brod se okreće. Opisana gibanja učenici u 2. zadatku trebaju pokušati opisati matematičkim pojmovima- gibanje gore, dolje, lijevo, desno, u svim smjerovima kao translaciju, a okretanje broda kao rotaciju.

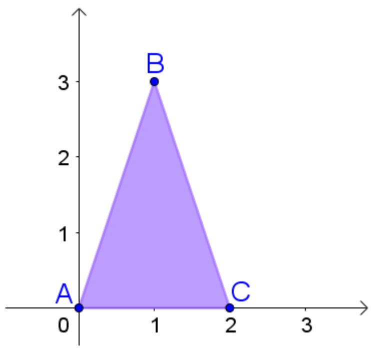
Posljednji zadatak uvodnog dijela učenici će lakše riješiti ukoliko su se ranije susreli s anegdotom o Descartesovoj inspiraciji za uvođenje koordinatne ravnine (priča kaže da je Descartes ležeći u krevetu promatrao muhu na stropu sobe te razmišljao kako bi nekome opisao njen položaj). No, neovisno o navedenoj anegdoti, učenici su u različitim situacijama opisivali položaje matematičkih objekata njihovim pravokutnim koordinatama pa očekujemo da se toga prisjete i u ovom zadatku.

Prvi dio projektnog zadatka započinjemo upravo smještanjem svemirskog broda u pravokutni koordinatni sustav te opisivanjem njegovog položaja koristeći matrice.

3.2 Prvi dio

Zadatak:

5. Smjestimo svemirski brod iz igrice u koordinatni sustav kao na slici 3.1. Svemirski brod prikazan je trokutom ABC.



Slika 3.1: Svemirski brod iz igrice

Opiši položaj broda matricom P tako da koordinate njegovih vrhova A, B, C zapišeš redom u stupce matrice.

6. Brod se pomaknuo za jednu jedinicu u desno i dvije jedinice prema gore. Skiciraj položaj broda. U matricu R upiši nove koordinate broda.

7. Prouči matrice P i R. Opiši promjenu u matricama koja se dogodila pomakom broda te je zapiši matematički.

8. Općenito, ako se brod iz početnog položaja pomakne za r jedinica duž x osi i s jedinica duž osi y, kako će izgledati matrični prikaz položaja broda?

9. Kako nazivamo navedeni pomak? Je li to preslikavanje linearni operator? Dokaži.

Kutak za nastavnika:

Prije podjele prvog dijela zadatka učenike potičemo da za izradu traženih skica koriste neki od programa dinamičke geometrije u kojemu također mogu i provjeriti rezultate dobivene računskim putem.

U 5. zadatku učenici iz prikaza svemirskog broda u koordinatnom sustavu trebaju očitati koordinate vrhova broda te ih prema uputi zadatka organizirati u matricu.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Prilikom zapisivanja koordinata translatiranog broda, učenici mogu koristiti dvije strategije. Koordinate mogu iščitati iz skice (3.2) koju su prethodno nacrtali ili mogu razmisliti kako navedeni pomak utječe na x i y koordinate broda te na temelju toga popuniti matricu R.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Ukoliko su učenici matricu R popunjavali drugom strategijom, u 7. zadatku će lakše zaključiti da su se koeficijenti u prvom retku povećali za 1 (što je rezultat pomicanja broda za jednu jedinicu u desno), a koeficijenti u drugome retku za 2 (što je rezultat pomicanja broda za dvije jedinice prema gore). Opisom navedene promjene, učenici zaključuju da je matrica R dobivena tako da smo matrici P dodali matricu u čijem su prvom retku sve jedinice, a drugom retku sve dvojke.

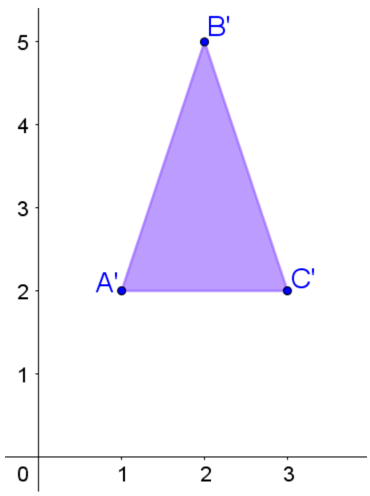
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Primjenjujući generalizaciju prethodnog zadatka, učenici zaključuju da koeficijentima u prvom retku matrice P dodajemo r, a koeficijentima u drugome retku dodajemo s.

$$\begin{bmatrix} r & 2+r & 1+r \\ s & s & 3+s \end{bmatrix}$$

S učenicima trebamo diskutirati o mogućim vrijednostima koeficijenata r i s, ovisno o tome u kojem smjeru se brod kreće. U prethodnom primjeru, brod se kretao prema desno duž osi x te prema gore duž osi y, a koeficijenti r i s su u tom slučaju bili pozitivni. Učenicima zadajemo da istraže kakvi će biti koeficijenti ako se brod miče prema lijevo duž osi x te prema dolje duž osi y. Prilikom pomicanja broda u lijevo duž osi x koeficijent r će biti negativan, isto kao i koeficijent s ako se brod miče duž osi y prema dolje.

Učenici su se već ranije susretali s pojmom translacije pa ne bi trebali imati poteškoća s prepoznavanjem opisanog preslikavanja. Važno je napomenuti da se radi o translaciji za vektor (r, s). Da translacija nije linearni operator, učenici mogu argumentirati na dva načina. Prvi je, naravno, provjerom svojstava koja linearni operator mora zadovoljavati. Drugi način učenici mogu primijeniti ako smo prilikom definiranja linearnih operatora spomenuli svojstvo da za svaki linearni operator f mora vrijediti $f(0) = 0$. Tada učenici mogu odmah zaključiti da translacija ne zadovoljava navedeno svojstvo pa prema tome nije linearni operator.



Slika 3.2: Svemirski brod pomaknuti za jednu jedinicu u desno i dvije jedinice prema gore

Prije podjele drugog dijela zadatka učenicima napominjemo da iako translacija za vektor (r, s) nije linearni operator ipak možemo odrediti njen matrični zapis te da sva svojstva koja su vrijedila za matrični zapis linearnih operatora, vrijede i za matrični zapis translacije. S obzirom na to da ćemo matrični prikaz translacije promatrati u trodimenzionalnom prostoru, matrični zapis položaja broda moramo nadopuniti retkom jedinica. Dodavanje navedenog retka objašnjeno je u prvom zadatku idućeg dijela, ali s obzirom da nije intuitivno jasno zašto to radimo, važno je učenicima skrenuti pažnju na navedenu promjenu prije nego što samostalno pročitaju i krenu rješavati zadatak.

3.3 Drugi dio

Zadatak:

10. Želimo odrediti matrični prikaz translacije za vektor (r, s):

$$T = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Kako bi to bilo moguće, matrični zapis položaja broda proširit ćemo retkom jedinica. (Napomena: u kojem god se položaju brod nalazi, posljednji redak bit će redak jedinica.)

Zapiši matricu početnog položaja broda i matricu broda translatiranog za vektor (r, s).

Translacija djeluje na početni položaj broda, a rezultat je brod translatiran za vektor (r, s). Iz jednakosti matrica, odredi koeficijente matrice translacije.

11. Brod se pomaknuo dvije jedinice prema gore duž osi y. Za koji vektor smo translatirali brod? Izračunaj položaj broda koristeći matrični prikaz translacije. U koordinatnom sustavu skiciraj početni položaj broda (brod 1) i brod dobiven navedenom translacijom (brod 2). Koje su koordinate vrhova broda 2?

Kutak za nastavnika:

Glavni korak u 10. zadatku je ispravno postaviti jednadžbu. Učenici se trebaju prisjetiti kako smo prikazivali djelovanje linearnog operatora ako smo imali njegov matrični prikaz.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 2+r & 1+r \\ s & s & 3+s \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Primjenjujući množenje matrica te svojstvo jednakosti matrica, učenici trebaju doći do rješenja:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Konfuziju kod učenika mogao bi stvoriti veliki broj varijabli. No ukoliko se učenici usredotoče na one varijable koje trebaju odrediti, ne bi trebali imati problema.

U 11. zadatku učenici trebaju prepoznati translaciju za vektor $(r, s) = (0, 2)$, u prethodno određenu matricu uvrstiti vrijednosti $r = 0$ i $s = 2$ te iz dobivenog rezultata iščitati koordinate vrhova broda.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Prilikom provjere rješenja 11. zadataka dobivamo informaciju jesu li učenici shvatili svrhu dodavanja retka jedinica. Ukoliko učenici iz dobivene matrice iščitaju da su koordinate vrhova $(0, 2, 1), (2, 2, 1)$ i $(1, 5, 1)$ potrebno je ponoviti da smo redak jedinica dodali kako bi mogli množiti matrice te da taj redak ne sadrži nikakve informacije o položaju svemirskog broda. Koordinate vrhova translatiranog broda su $(0, 2), (2, 2)$ i $(1, 5)$.

3.4 Treći dio

Zadatak:

12. Prisjetimo se, kako izgleda matrica rotacije oko z osi za kut α u prostoru V^3?

13. Koristeći prethodnu matricu, izračunaj položaje brodova 1 i 2 iz 11. zadatka ako ih rotiramo za 90°. Dobivene rezultate prikaži u koordinatnom sustavu. Oko koje točke smo rotirali brodove? Rotira li se brod iz igrice na taj način?

14. Odredi točku S oko koje treba rotirati brod iz početnog položaja da bi rotacija odgovarala onoj iz igrice. Za određivanje točke možeš koristiti program dinamičke geometrije. Provjeri svoj zaključak rotirajući brod oko dobivene točke.

Kutak za nastavnika:

Za rješavanje 12. zadatka, s učenicima smo prilikom obrade linearnih operatora morali obraditi matrični prikaz rotacije oko ishodišta u prostru V^2 te diskutirati o poopćenju rotacije na prostor V^3. Matrica rotacije oko z osi za kut α u V^3 je:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

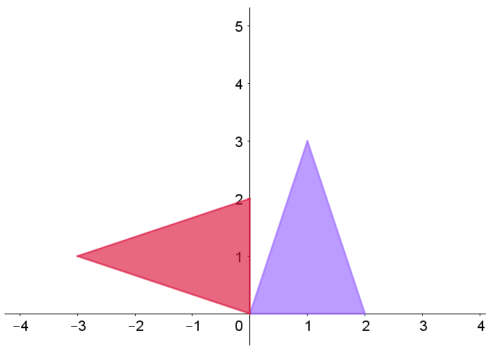
Uvrštavajući kut od 90° u prethodnu matricu te množenjem matrica, učenici dolaze do položaja rotiranih brodova:

$$\text{brod 1:} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

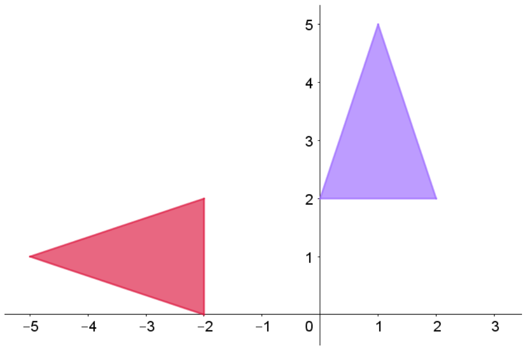
$$\text{brod 2:} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Učenici znaju da navedeni matrični prikaz rotacije u prostoru predstavlja rotaciju oko ishodišta u ravnini xy pa smo ovim postupkom oba broda rotirali oko točke $(0,0)$. Iako iz rotacije broda 1 nije odmah uočljivo da se brod iz igrice ne rotira na taj način, iz prikaza rotacije broda 2 to postaje očito. Naime, ukoliko u igrici samo rotiramo brod primjećujemo da ne dolazi do vertikalnog ni horizontalnog pomaka broda, već se brod okreće oko svog središta. No na slici 3.3 (b) vidljivo je da se osim rotacije broda za 90° dogodio i vertikalni i horizontalni pomak.

Proučavanjem igrice učenici trebaju uočiti da prilikom rotacije vrhovi svemirskog broda opisuju kružnicu trokutu. Dakle, brod trebamo rotirati oko središta kružnice opisane trokutu. Koristeći program dinamičke geometrije, trokutu iz početnog položaja tražimo središte opisane kružnice. Središte kružnice učenici mogu naći na nekoliko načina. Standardnim postupkom, središte trokutu opisane kružnice dobivamo kao sjecište simetrala njegovih stranica. Drugi način je da konstruiramo kružnicu kroz tri točke (vrhovi trokuta) te zatim odredimo središte te kružnice. U oba slučaja, dobivamo da je točka oko koje trebamo rotirati svemirski brod $S(1, 1.33)$.



(a) Svemirski brod 1



(b) Svemirski brod 2

Slika 3.3: Rješenje 10. zadatka

3.5 Četvrti dio

Zadatak:

15. Primjenjujući translaciju i rotaciju oko ishodišta, svemirski brod iz početnog položaja rotiraj za 90° oko njegovog središta $S(1, 1.33)$. Odredi koordinate rotiranog broda. (Hint: rotaciju provedi u tri koraka)

16. Odredi koordinate vrhova broda 2 rotiranog za 180°.

Kutak za nastavnika:

Kao što smo napomenuli učenicima u zadatku, rotaciju ćemo provesti u tri koraka.

1. korak
S obzirom na to da znamo rotirati samo oko ishodišta, a trebamo rotirati oko točke $S(1, 1.33)$, svemirski brod trebamo translatirati tako da točke S bude u ishodištu. Brod translatiramo za vektor $(-1, -1.33)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1.33 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1.33 & -1.33 & 1.67 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. korak
Brod sada možemo rotirati za 90° množeći prethodno dobivenu matricu, matricom rotacije.

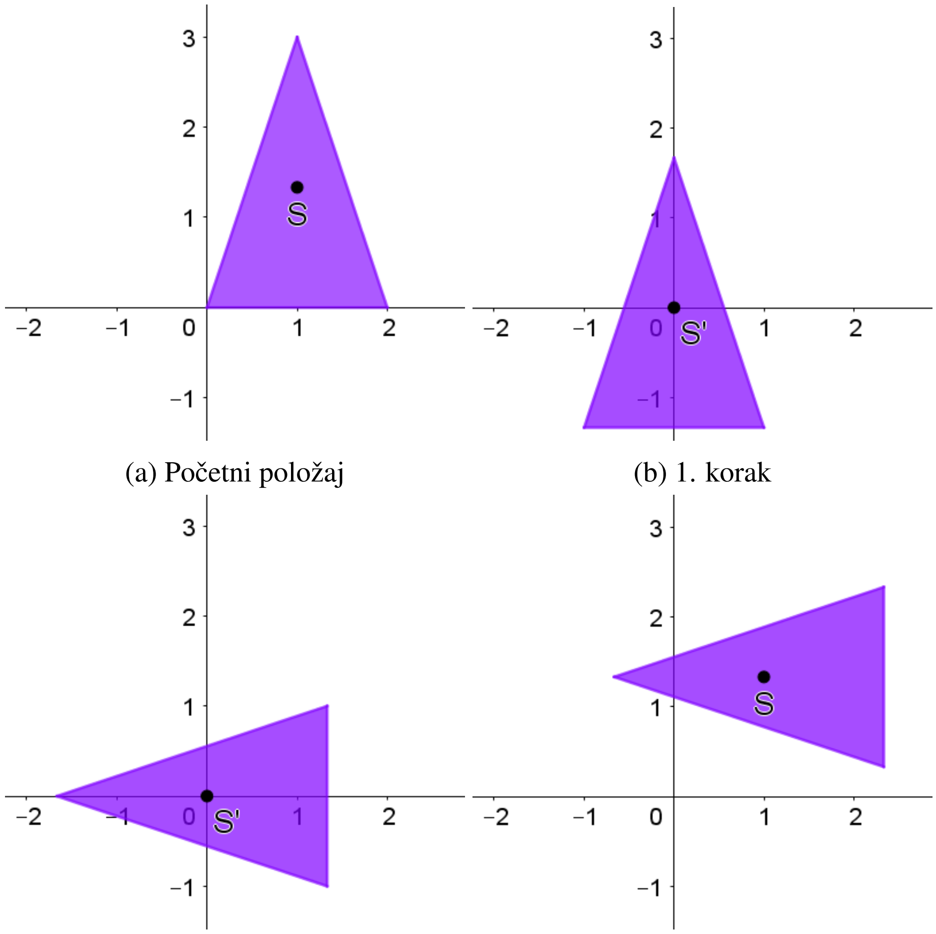
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1.33 & -1.33 & 1.67 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.33 & 1.33 & -1.67 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. korak
Prilikom rotacije broda iz početnog položaja oko točke S, koordinate središta broda se ne mijenjaju. Dakle, preostaje nam translatirati brod iz prethodnog koraka tako da točku S vratimo u početni položaj. Ako smo u 1. koraku brod translatirali za vektor $(-1, -1.33)$, sada brod moramo translatirati za njemu suprotan vektor $(1, 1.33)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1.33 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.33 & 1.33 & -1.67 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.33 & 2.33 & -0.67 \\ 0.33 & 2.33 & 1.33 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Iz posljednje matrice, iščitavamo koordinate rotiranog broda: $(2.33, 0.33)$, $(2.33, 2.33)$ i $(-0.67, 1.33)$.

U 16. zadatku učenici trebaju primijeniti anologni postupak kao i u zadatku prije. No najprije, treba odrediti središte broda 2. Brod 2 smo dobili tako da smo brod iz početnog



(a) Početni položaj (b) 1. korak

(c) 2. korak (d) 3. korak

Slika 3.4: Rješenje 12. zadatka

položaja translatirali za vektor $(0,2)$. Dakle, središte broda 2 je točka $S_2 = (1+0, 1.33+2) = (1, 3.33)$. Prema tome, brod 2 najprije translatiramo za vektor $(-1, -3.33)$, zatim ga rotiramo za 180° te ga konačno translatiramo za vektor $(1, 3.33)$. Koordinate traženog broda dobivamo iz sljedećeg računa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3.33 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3.33 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4.66 & 4.66 & 1.66 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Koordinate vrhova broda 2 rotiranog za 180° su: $(2, 4.66), (0, 4.66), (1, 1.66)$.

Bibliografija

[1] N. Antončić, E. Špalj i V. Volenec, *Matematika 3, II. dio: udžbenik za 3. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije*, Školska knjiga, 2008.

[2] B. Dakić i N. Elezović, *Matematika 3: dodatak za 3. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije*, Element, 2009.

[3] Dartmouth Math Department, *Computer Graphics and Linear Algebra*, dostupno na: `https://math.dartmouth.edu/archive/m22s07/public_html/VectorSlides.pdf`, (26.01.2018.).

[4] Državni hidrometorološki zavod, *Ukupne mjesečne i godišnje količine oborine*, dostupno na: `http://klima.hr/klima.php?id=k2&param=k2_1&elmet=oborina`, (27.10.2017.).

[5] Z. Kurnik, *Istraživačka nastava*, MiŠ (2008/2009), br. 47, 52–59.

[6] D.C. Lay, S.R. Lay i J.J. McDonald, *Linear Algebra and its Applications*, Pearson, 2015.

[7] P. Lockhart, *Matematičareva jadikovka 1. dio*, MiŠ (2008/2009), br. 47, 60–67.

Sažetak

Kroz ovaj diplomski rad opisane su aktivnosti u kojima su obrađeni temeljni pojmovi iz gradiva matrica i linearnih operatora. Aktivnosti se temelje na istraživačkoj nastavi u kojoj je cilj da učenici samostalno istražuju, otkrivaju i zaključuju, a nastavnik ih vodi i usmjerava kroz navedeni proces.
Osim opisanih aktivnosti, rad sadrži i potrebne materijale za njihovu provedbu, kao i metodičke napomene, savjete, moguće i očekivane učeničke odgovore te rješenja zadataka, koja se mogu pronaći u *Kutku za nastavnike* ispod svake od aktivnosti.
Rad je podijeljen u tri glavna poglavlja: Matrice, Linearni operatori te Projektni zadatak u kojem učenici primjenjuju prethodno naučeno gradivo u konkretnoj situaciji.

Summary

In this thesis we described activities for introducing matrices and linear mappings to high school students. Activities are based on inquiry based learning where students learn by observing, discovering and making conclusions on their own, and teacher is there to guide them through the whole process.
In this work, materials that are needed for activities are provided, such as methodical notes, advises, possible and expected answers from students and task solutions. All this can be found in *"Teacher's corner"* (Kutak za nastavnika).
Thesis is divided in three parts: Matrices, Linear mapping and Project assignment in which students will apply what they previously learned by solving real life problem.

Životopis

Rođena sam 23. srpnja 1993. godine u Bjelovaru. U rodnome gradu pohađam IV. osnovnu školu (2000.-2008.) te Ekonomsku i birotehničku školu (2008.-2012.). Tokom srednjoškolskog obrazovanja posebnu pozornost mi privlače matematika te knjigovodstvo s bilanciranjem iz kojeg se 2012. godine plasiram na državno natjecanje. Iste godine, prilikom završetka srednjoškolskog obrazovanja, dobivam nagradu Fonda Boža Tvrtković za najboljeg učenika svoje škole. Obrazovanje nastavljam na nastavničkom smjeru preddiplomskog studija matematike Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Nakon tri godine završavam preddiplomski studij te upisujem diplomski studij istog usmjerenja. U 2017. godini dobivam priznanje za izniman uspjeh tijekom diplomskog studija. Tokom studiranja držim demonstrature iz nekoliko kolegija: Diferencijalnog i integralnog računa 1 i 2, Konstruktivnih metoda u geometriji te iz Kompleksne analize. U ljeto 2016. godine zapošljavam se kao student u tvrtci Photomath gdje i danas radim na kreiranju matematičkog sadržaja za mobilnu aplikaciju istog imena.