Fazni prijelazi u diskretnim dinamičkim sustavima

Janković, Barbara

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Barbara Janković

FAZNI PRIJELAZI U DISKRETNIM DINAMIČKIM SUSTAVIMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc.Siniša Slijepčević

Zagreb, studeni, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mami i tati, zbog svega.
Ivanu Ljubičiću, jer mi je dokazao da je bitno sudjelovati.
Jeleni Beštak, jer mi je pokazala da je sve moguće (iako je vjerojatno nadčovjek).
Valentini Šeketi, zbog nesebičnosti i pomoći zadnje dvije godine.
Na kraju, Maši, jer me podsjeća koliko je život lijep.

Sadržaj

Uvod

U ovom radu prvo ćemo uvesti pojmove iz Markovljevih lanaca, od kojih su najbitniji oni stacionarne distribucije i invarijantne mjere. Zatim ćemo proučavati što se događa sa binarnim staničnim automatima kakve ćemo zadati kroz dva koraka:

(1) po određenom pravilu se u prostorno-vremenskom ograničenju neka stanja prelaze iz 1 u 0;

(2) s vjerojatnošću ϵ stanja prelaze iz 0 u 1.

Što se događa s takvim beskonačnim nizom za određene vrijednosti ϵ? Što možemo reći o invarijantnoj distribuciji tog lanca? Je li takav model zaista primjer faznog prijelaza?

Poglavlje 1

Markovljevi lanci

1.1 Definicije, notacija i osnovna svojstva Markovljevih lanaca

Da bismo mogli definirati slučajan proces, prisjetimo se prvo definicije slučajne varijable.

Definicija 1.1.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor i neka je* S *prebrojiv skup.* Slučajna varijabla X sa vrijednostima u S je funkcija $X : \Omega \to S$.

Definicija 1.1.2. *Neka je* S *skup.* Slučajan proces *s diskretnim vremenom i prostorom stanja* S *je familija* $X = (X_n : n \geq 0)$ *slučajnih varijabli (ili elemenata) definiranim na nekom vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *s vrijednostima u* S*. Dakle, za svaki* $n \geq 0$ *je* $X_n : \Omega \to S$ *slučajna varijabla.*

Definicija 1.1.3. *Neka je* S *prebrojiv skup. Slučajni proces* $X = (X_n : n \geq 0)$ *definiran na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *s vrijednostima u* S *je* Markovljev lanac *ako vrijedi*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \tag{1.1}$$

za svaki $n \geq 0$ *i za sve* $i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j \in S$ *za koje su obje uvjetne vjerojatnosti dobro definirane.*

Svojstvo u relaciji (1.1) naziva se *Markovljevim svojstvom.* Ono nam govori da je ponašanje Markovljevog lanca u neposrednoj budućnosti, uvjetno na sadašnjost i prošlost, jednako ponašanju Markovljevog lanca u neposrednoj budućnosti uvjetno samo u odnosu na sadašnjost. Pri tome smatramo da je sadašnjost neki vremenski trenutak n, $n + 1$ neposredna budućnost, a $0, 1, \ldots, n - 1$ prošlost.

Drugi način na koji možemo iskazati Markovljevo svojstvo je: (neposredna) budućnost i prošlost su uvjetno nezavisne uz danu sadašnjost, tj.

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0 \mid X_n = i) \\ &\quad = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)\, \mathbb{P}(X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0 \mid X_n = i)\,. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Htjeli bismo uvesti pojam *homogenih Markovljevih lanaca*, onih za koje desna strana u definiciji (1.2) ne ovisi o vremenu $n \geq 1$. Uvedimo prvo nekoliko definicija.

Definicija 1.1.4. *Niz $\mu = (\mu_i : i \in S)$ naziva se* mjera na prebrojivom skupu S ako je $\mu_i \in [0, \infty)$ za sve $i \in S$.

Definicija 1.1.5. *Mjera μ zove se* distribucijom *ako vrijedi da je ukupna masa $\sum_{i \in S} \mu_i = 1$. Ako postavimo $\mu_i = \mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = i\})$, tada se μ naziva* distribucijom slučajne varijable *X.*

Definicija 1.1.6. *Matrica $P = \left(p_{ij} : i, j \in S\right)$ se naziva* stohastičkom matricom *ako je svaki red $\left(p_{\mathrm{ij}} : j \in S\right)$ distribucija.*

Definicija 1.1.7. *Neka je $\mu = (\mu_i : i \in S)$ vjerojatnosna distribucija na S, te neka je $P = \left(p_{ij} : i, j \in S\right)$ stohastička matrica. Slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s prostorom stanja S je* homogen Markovljev lanac s početnom distribucijom μ i prijelaznom matricom *P ako vrijedi*

(i) *X_0 ima distribuciju μ,*

(ii) *za $n \geq 0$, uvjetno na $X_n = i$, X_{n+1} ima distribuciju $\left(p_{ij} : j \in S\right)$ i nezavisan je od $X_0, \ldots, X_{n-1}$.*

Eksplicitnije, ovi uvjeti kažu da vrijedi

(i) *$P(X_0 = i) = \mu_i$, za sve $i \in S$,*

(ii)
$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = p_{ij} \tag{1.3}$$

za svaki $n \geq 0$ i sve $i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j \in S$.

Od sada na dalje homogene Markovljeve lance nazivat ćemo skraćeno Markovljevim lancima (jer ćemo jedino njih promatrati) ili (μ, P) -Markovljevim lancima.

Dalje će nas zanimati vjerojatnosti s kojima se slučajni proces u danim vremenskim trenucima nalazi u danjim stanjima. Zbog toga dokažimo sljedeći teorem.

Teorem 1.1.8. *Neka je X (μ, P)-Markovljev lanac. Tada za sve $n \geq 0$ i za sva stanja $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i_n$ vrijedi*

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) = \mu_{i_0} p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{n-1} i_n}. \tag{1.4}$$

Obratno, pretpostavimo da je $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajni proces s konačnodimenzionalnim distribucijama danim formulom (1.4)*, gdje je μ neka vjerojatnosna distribucija na S, a P neka stohastička matrica na S. Tada je X (μ, P)-Markovljev lanac.*

Dokaz. Prisjetimo se formule za uvjetnu vjerojatnost $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B|A)$. Direktno poopćenje je formula

$$\mathbb{P}(A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_0)\,\mathbb{P}(A_1|A_0)\,\mathbb{P}(A_2|A_0 \cap A_1) \ldots \mathbb{P}(A_n|A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Iz te formule slijedi

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n) \\
&\quad = \mathbb{P}(A_0)\,\mathbb{P}(A_1|A_0)\,\mathbb{P}(A_2|A_0 \cap A_1) \ldots \mathbb{P}(A_n|A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \\
&\quad = \mu_{i_0} p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{n-1} i_n},
\end{aligned}$$

gdje je zadnji redak posljedica definicije (1.3).

Da bismo dokazali obrat, trebamo dokazati da vrijede (i) i (ii) iz definicije 1.1.7. Uzimanjem $n = 0$ u (1.4) odmah slijedi da je μ početna distribucija. Sada dokazujemo formulu (1.3). Pretpostavimo da je $\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = \mathrm{i}) > 0$ (u suprotnom nemamo što dokazati). Tada je

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) \\
&\quad = \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = \mathrm{j}, X_n = \mathrm{i}, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)}{\mathbb{P}(X_n = \mathrm{i}, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)} \\
&\quad = \frac{\mu_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i} p_{ij}}{\mu_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i}} \\
&\quad = p_{ij},
\end{aligned}$$

gdje zadnji redak slijedi primjenom formule (1.4) dvaput. □

Često je slučaj da je početna distribucija Markovljevog lanca koncentrirana u jednom stanju. Fiksirajmo stanje $i \in S$. Označavamo vektor-redak $\delta^{\mathrm{i}} = \left(\delta^i_j : j \epsilon S\right)$ za *jedinicu mase i, sa*

$$\delta^i_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{ako je } i = j; \\ 0 & \textit{inače}. \end{cases}$$

Ako je μ početna distribucija Markovljevog lanca X takva da je $\mu_i > 0$ (tj., $\mathbb{P}(X_0 = i) > 0$), definiramo *uvjetnu vjerojatnost* $\mathbb{P}_i$ formulom

$$\mathbb{P}_i(A) = \mathbb{P}(A | X_0 = i), \quad A \in \mathcal{F}.$$

Iz formule (1.4) slijedi da je X $\left(\delta^{\mathrm{i}}, P\right)$-Markovljev lanac.
Upotrebom teorema 1.1.8 može se dokazati sljedeća formula koja poopćuje Markovljevo svojstvo iz definicije 1.1.3: za sve $n \geq 0$ i za sve $i_0, \ldots, i_{m+n} \in S$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{m+n} = i_{m+n}, \ldots, X_{m+1} = i_{m+1} | X_m = i_m, X_{m-1} = i_{m-1}, \ldots, X_0 = i_0) \\
&\quad = p_{i_m i_{m+1}} \cdots p_{i_{m+n-1} i_{m+n}} \\
&\quad = \mathbb{P}(X_{m+n} = i_{m+n}, \ldots, X_{m+1} = i_{m+1} | X_m = i_m). \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

Ta formula je prvi korak u dokazivanju sljedećeg rezultata koji podupire ideju da Markovljevi lanci nemaju sjećanja.

Teorem 1.1.9. (Markovljevo svojstvo) *Neka je X (μ, P)-Markovljev lanac sa prostorom stanja S. Tada je uvjetno na $X_m = i$, slučajni proces $(X_{m+n} : n \geq 0)$ $\left(\delta^i, P\right)$-Markovljev lanac nazavisan od slučajnih varijabli $X_0, X_1, \ldots, X_m$.*

Dokaz. Da bismo dokazali teorem, dovoljno je dokazati da za svaki događaj A koji ovisi o $X_0, X_1, \ldots, X_m$ (tj. za $A \in \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_m)$) vrijedi

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{X_{m+n} = i_{m+n}, \ldots, X_{m+1} = i_{m+1}, X_m = i_m\} \cap A | X_m = i) \\
&\quad = \delta^i_{i_m} p_{i_m i_{m+1}} \cdots p_{i_{m+n-1} i_{m+n}} \mathbb{P}(A | X_m = i), \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

za sve $n \geq 0$ i sve $i_m, i_{m+1}, \ldots, i_{m+n} \in S$. Zaista, uzimanjem $A = \Omega$ i korištenjem $\mathbb{P}(\Omega | X_m = i) = 1$, formula (1.6) daje

$$\mathbb{P}(X_{m+n} = i_{m+n}, \ldots, X_{m+1} = i_{m+1}, X_m = i_m | X_m = i) = \delta^i_{i_m} p_{i_m i_{m+1}} \cdots p_{i_{m+n-1} i_{m+n}},$$

što pomoću teorema 1.1.8 pokazuje da je $(X_{m+n} : n \geq 0)$ $\left(\delta^i, P\right)$ - Markovljev lanac.
Korištenjem gornje formule u (1.6), slijedi

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{X_{m+n} = i_{m+n}, \ldots, X_{m+1} = i_{m+1}, X_m = i_m\} \cap A | X_m = i) \\
&\quad = \mathbb{P}(X_{m+n} = i_{m+n}, \ldots, X_{m+1} = i_{m+1}, X_m = i_m | X_m = i) \mathbb{P}(A | X_m = i),
\end{aligned}$$

odnosno $(X_{m+n} : n \geq 0)$ i $X_0, X_1, \ldots, X_m$ su uvjetno nezavisne uz dano $X_m = i$.

Neka je $A = \{X_{m+n} = i_{m+n}, \ldots, X_{m+1} = i_{m+1}, X_m = i_m\}$. Tada se jednakost (1.6) dokazuje pomoću jednakosti (1.5). Proizvoljni događaj A koji ovisi o $X_0, X_1, \ldots, X_m$ može se zapisati kao prebrojiva unija disjunktnih događaja A_k koji su oblika kao gore, tj. $A = \bigcup_k A_k$. Jednakost (1.6) sada slijedi iz σ-aditivnosti vjerojatnosti $\mathbb{P}$. $\square$

Množenje beskonačnih stohastičkih matrica definira se analogno množenju konačnih matrica. Ako su $P = \left(p_{ij} : i, j \in S\right)$ i $Q = \left(q_{ij} : i, j \in S\right)$ matrice (konačne ili beskonačne), definiramo matricu $PQ = \left(r_{ij} : i, j \in S\right)$ sa

$$r_{ij} = \sum_{k \in S} p_{ik} q_{kj}.$$

Specijalno, *n-ta potencija matrice P* dana je s $P^n = \left(p^n_{ij} : i, j \in S\right)$, gdje je

$$p^{(n)}_{ij} = \sum_{i_1 \in S} \cdots \sum_{i_{n-1} \in S} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-2} i_{n-1}} p_{i_{n-1} \mathrm{j}}. \tag{1.7}$$

Konačno definiramo nultu potenciju matrice P kao $P^0 = I = \left(\delta_{ij}\right)$.

Teorem 1.1.10. *Neka je X (μ, P)-Markovljev lanac. Tada, za sve $n, m \geq 0$ vrijedi*

(i) $\mathbb{P}\left(X_n = j\right) = \left(\mu P^n\right)_j$,

(ii) $\mathbb{P}_i\left(X_n = j\right) = \mathbb{P}\left(X_{n+m} = j | X_m = i\right) = p^{(n)}_{ij}$.

Vjerojatnosti $p^{(n)}_{ij}$ zovu se n-konačne prijelazne vjerojatnosti.

Dokaz. (i) Koristeći formulu (1.7) imamo

$$\mathbb{P}\left(X_n = j\right) = \sum_{i_0 \in S} \cdots \sum_{i_{n-1} \in S} \mu_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-2} i_{n-1}} p_{i_{n-1} \mathrm{j}} = \sum_{i_0 \in S} \mu_{i_0} p^{(n)}_{i_0 j} = \left(\mu P^n\right)_j.$$

U zadnjem smo retku sa μP^n označili produkt vektora-retka μ i matrice P, dok $\left(\mu P^n\right)_j$ označava j-ti element rezultirajućeg vektora-retka.
(ii) Po Markovljevom svojstu, uvjetno na $X_m = i$, $(X_{m+n} : n \geq 0)$ je $\left(\delta^i, P\right)$-Markovljev lanac, pa (ii) slijedi direktno iz (i) uz $\mu = \delta_i$. $\square$

Na kraju, spomenimo rezultat poznat kao *Chapman-Kolmogorovljeve jednakosti:* za sve $n, m \geq 0$ i sva stanja $i, j \in S$

$$\mathbb{P}_i\left(X_{m+n} = j\right) = \sum_{k \in S} p^{(n)}_{ik} p^{(m)}_{kj}.$$

Dokaz te formule je trivijalan i slijedi direktno iz očigledne činjenice $P^{n+m} = P^n P^m$.

1.2 Struktura klasa

Nekad je moguće razbiti Markovljev lanac u manje dijelove koje je (ponekad) lakše razumijeti, a koji zajedno olakšavaju razumijevanje cjeline. To ćemo raditi identifikacijom klasa komunikacije lanca.

Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac sa prostorom stanja S i prijelaznom matricom P. Za $B \subset S$ definiramo *prvo vrijeme pogađanja* tog skupa kao

$$T_B = \min\{n \geq 0 : X_n \in B\},$$

uz konvenciju da je $\min\emptyset = +\infty$. U slučaju $B = \{j\}$ za $j \in S$ zbog jednostavnosti pišemo T_j umjesto preciznijeg $T_{\{j\}}$.

Definicija 1.2.1. *Za stanja $i, j \in S$ kažemo da je j* dostižno *iz i, u oznaci $i \to j$, ako vrijedi*

$$\mathbb{P}_i\left(T_j < \infty\right) > 0.$$

Drugačiji zapis skupa $\left\{T_j < \infty\right\}$ može biti $\bigcup_{n=0}^{\infty}(X_n = j) = \{X_n = j \text{ za neko } n \geq 0\}$, što i dokazuje da je to događaj.

Propozicija 1.2.2. (Kriterij dostižnosti) *Sljedeća svojstva su ekvivalentna:*

(i) $i \to j$,

(ii) $p_{ij}^{(n)} > 0$ *za neko* $n \geq 0$,

(iii) $p_{ii_1}p_{i_1i_2}\dots p_{i_{n-2}i_{n-1}}p_{i_{n-1}j} > 0$ *za neka stanja* $i_1, \dots, i_{n-1}$.

Dokaz. Dokažimo prvo ekvivalenciju (i) i (ii). Budući da je $\{X_n = j\} \subset \bigcup_{k=0}^{\infty}\{X_k = j\} = \left\{T_j < \infty\right\}$, slijedi

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_i(X_n = j) \leq \mathbb{P}_i\left(T_j < \infty\right) = \mathbb{P}_i\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}\{X_k = j\}\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}_i(X_k = j) = \sum_{k=0}^{\infty}p_{ij}^{(k)}.$$

Ekvivalencija tvrdnji (ii) i (iii) slijedi iz formule (1.7). □

Neka je sada $p_{ij}^{(n)} > 0$ i $p_{jk}^{(m)} > 0$, pa je zbog Chapman-Kolmogorovljeve jednakosti

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{l \in S} p_{il}^{(n)}p_{lj}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)}p_{jk}^{(m)} > 0,$$

to jest ako $i \to j$ i $j \to k$, tada $i \to k$.

Definicija 1.2.3. *Stanja $i, j \in S$* komuniciraju*, u oznaci $i \leftrightarrow j$, ako vrijedi $i \to j$ i $j \to i$.*

Relacija komuniciranja je relacija ekvivalencije na $S \times S$, te stoga inducira particiju prostora S na klase. Označimo te klase sa $C_1, C_2, \dots$ (konačno ili beskonačno klasa). Dakle, $C_k \cap C_l = \emptyset$ za $k \neq l$, te $\bigcup_l C_l = S$. Sva stanja iz jedne klase međusobno komuniciraju.

Definicija 1.2.4. *Markovljev lanac X je* ireducibilan *ako se prostor stanja S sastoji samo od jedne klase komuniciranja, tj. za sve $i, j \in S$ vrijedi $i \leftrightarrow j$.*

1.3 Apsorbcijske vjerojatnosti

Definicija 1.3.1. *Za podskup $C \subset S$ skupa stanja kažemo da je* zatvoren *ako za svako stanje $i \in C$ vrijedi*

$$\mathbb{P}_i (T_{S \setminus C} = \infty) = 1.$$

Jednostavnije rečeno, skup C je zatvoren ako lanac ne može izaći iz C. No, u zatvoren skup se može ući.

Za stanje $j \in S$ kažemo da je *apsorbirajuće* ako je $\{j\}$ zatvoren skup. U ovom će nas poglavlju zanimati kako se računaju vjerojatnosti da Markovljev lanac bude apsorbiran u nekom stanju ili podskupu skupa stanja, odnosno da prije dođe u jedno od dva zadana stanja. Također nas zanima očekivano vrijeme apsorpcije. Da bismo to proučili dajmo prvo definiciju vjerojatnosti pogađanja nekog skupa.

Definicija 1.3.2. *Neka je $B \subset S$ podskup skupa stanja, te neka je T_B vrijeme pogađanja skupa B. Definiramo* vjerojatnosti pogađanja *(u konačnom vremenu) sa*

$$h_i^B = \mathbb{P}_i (T_B < \infty).$$

Ako je B zatvoren podskup od S, tada su h_i^B apsorpcijske vjerojatnosti.

Sada ćemo vidjeti dva rezultata bez dokaza.

Teorem 1.3.3. *Vektor vjerojatnosti pogađanja $h^B = \left(h_i^B : i \in S\right)$ je minimalno nenegativno rješenje sustava linearnih jednadžbi*

$$\begin{cases} h_i^B = 1 & za\ i \in B, \\ h_i^B = \sum_{j \in S} p_{ij} h_j^B & za\ i \neq B. \end{cases} \tag{1.8}$$

Ovaj sustav općenito ne mora imati jedinstveno rješenje, pa ima smisla govoriti o minimalnosti rješenja. Minimalnost znači da ako je $x = (x_i : i \in S)$ neko drugo nenegativno rješenje sustava (1.8), tada vrijedi $x_i \geq h_i^B$.

Sada dajmo opći rezultat za očekivanje vrijeme pogađanja skupa B. Stavimo $g_i = \mathbb{E}_i (T_B)$, $i \in S$.

Teorem 1.3.4. *Vektor očekivanja vremena pogađanja skupa B $g^B = \left(g_i^B : i \in S\right)$ je minimalno nenegativno rješenje sustava linearnih jednadžbi*

$$\begin{cases} g_i^B = 0 & za\ i \in B, \\ g_i^B = 1 + \sum_{j \in S} p_{ij} g_j^B & za\ i \neq B. \end{cases} \tag{1.9}$$

1.4 Jako Markovljevo svojstvo

U poglavlju 1.1 smo dokazali Markovljevo svojstvo. Ono kaže da je uvjetno na $X_m = i$ buduće ponašanje Markovljevog lanca $(X_{m+n} : n \geq 0)$ jednako (po distribuciji) ponašanju Markovljevog lanca $(X_n : n \geq 0)$ koji kreće iz stanja i, te, uvjetno na $X_m = i$, budućnost $(X_{m+n} : n \geq 0)$ je nezavisna od prošlosti $(X_n : n = 0, \ldots, m-1)$. Riječima, lanac je zaboravio prošlost do vremena m, u kojem je u stanju i. Što možemo reći o procesu nakon vremena m? Vrijedi li ono za neka slučajna vremena?

Definicija 1.4.1. *Slučajna varijabla* $T : \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$ *zove se* vrijeme zaustavljanja *ako za sve* $n \geq 0$

$$\{T \leq n\} \in \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n),$$

t.j. događaj $\{T \leq n\}$ *ovisi samo o* $X_0, X_1, \ldots, X_n$.

Intuitivno, T je vrijeme zaustavljanja ako promatrajući Markovljev lanac do determinističkog vremena $n \geq 0$ možemo reći je li se slučajno vrijeme T dogodilo do trenutka n ili ne. Ako želimo da se lanac zaustavi u T, znamo kada treba stati.

Propozicija 1.4.2. *Slučajno vrijeme T je vrijeme zaustavljanja ako i samo ako za sve* $n \geq 0$ *vrijedi* $\{T = n\} \in \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$.

Dokaz. Jedan smjer slijedi iz jednakosti$\{T = n\} = \{T \leq n\} \setminus \{T \leq n-1\}$, a drugi iz $\{T \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{T = k\}$. □

Primjer 1 (i) Za $B \subset S$, prvo vrijeme pogađanja skupa B kao u jednadžbi (1.8) je vrijeme zaustavljanja. Zaista,

$$\{T_B = n\} = \{X_0 \notin B, X_1 \notin B, \ldots, X_{n-1} \notin B, X_n \in B\} \in \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n).$$

(ii) *Vrijeme zadnjeg izlaska* iz skupa $B \subset S$, definirano sa

$$L_B = \max\{n \geq 0 : X_n \in B\}, \quad \text{uz konvenciju } \max \emptyset = 0,$$

nije vrijeme zaustavljanja. Očigledno je da događaj $\{L_B = n\}$ ovisi o cijeloj budućnosti $(X_{m+n} : m \geq 0)$ Markovljevog lanca X.

Pokazat ćemo da Markovljevo svojstvo vrijedi i za vrijeme zaustavljanja. Prvo, za dano vrijeme zaustavljanja $T : \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$ definiramo slučajnu varijablu X_T formulom

$$X_T(\omega) = X_n(\omega), \text{ ako je } T(\omega) = n.$$

Primijetimo da je X_T definirana samo na skupu $\{T < \infty\}$. Iz jednakosti

$$\{X_T = i\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{X_n = i, T = n\},$$

vidi se da je X_T zaista slučajna varijabla.

Teorem 1.4.3. (Jako Markovljevo svojstvo) *Neka je $(X_n : n \geq 0)$ (μ, P)-Markovljev lanac sa prostorom stanja S, te neka je T vrijeme zaustavljanja. Tada je uvjetno na $X_T = i$, slučajni proces $(X_{T+n} : n \geq 0)$ $\left(\delta^i, P\right)$-Markovljev lanac nezavisan od slučajnih varijabli $X_0, X_1, \ldots, X_T$.*

Dokaz. Neka je A događaj koji ovisi o slučajnim varijablama $X_0, X_1, \ldots, X_T$. Trebamo pokazati da vrijedi

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\{X_{T+n} = j_n, \ldots, X_{T+1} = j_1, X_T = j_0\} A | T < \infty, X_T = i\right) \\ =&\delta^i_{j_0} p_{j_0} j_1 \ldots p_{j_{n-1}} j_n \mathbb{P}\left(A | T < \infty, X_T = i\right), \end{aligned} \tag{1.10}$$

za sve $n \geq 1$ i sve $j_0, j_1, \ldots, j_n \in S$. Budući da A ovisi o $X_0, X_1, \ldots, X_T$, to $A \cap \{T = m\}$ ovisi o $X_0, X_1, \ldots, X_m$. Zbog Markovljevog svojstva u vremenu m vrijedi

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\{X_{T+n} = j_n, \ldots, X_{T+1} = j_1, X_T = j_0\} \cap \mathrm{A} \cap \{T = m\} \cap \{X_T = i\}\right) \\ =&\mathbb{P}\left(\{X_{T+n} = j_n, \ldots, X_{T+1} = j_1, X_T = j_0\} \cap \mathrm{A} \cap \{T = m\} | X_m = i\right) \mathbb{P}\left(X_m = i\right) \\ =&\mathbb{P}\left(\{X_{m+n} = j_n, \ldots, X_{m+1} = j_1, X_m = j_0\} \cap \mathrm{A} \cap \{T = m\} | X_m = i\right) \mathbb{P}\left(X_m = i\right) \\ =&\delta^i_{j_0} p_{j_0} j_1 \ldots p_{j_{n-1}} j_n \mathbb{P}\left(\mathrm{A} \cap \{T = m\} | X_m = i\right) \mathbb{P}\left(X_m = i\right) \\ =&\delta^i_{j_0} p_{j_0} j_1 \ldots p_{j_{n-1}} j_n \mathbb{P}\left(\mathrm{A} \cap \{T = m\} \cap X_T = i\right) \end{aligned}$$

Ovdje smo u trećoj jednakosti iskoristili (1.6) za $\mathrm{A} \cap \{T = m\}$. Sumiramo li gornju jednakost po svim $m \geq 0$, te podijelimo sa $\mathbb{P}(T < \infty, X_T = i)$ dobit ćemo traženu jednakost (1.10). □

Definicija 1.4.4. *Neka je stanje $i \in S$ fiksno. Definiramo*

$$T_i^{(1)} = \min\{n > 0 : X_n = i\},$$

te indukcijom za $m \geq 1$

$$T_i^{(m+1)} = \begin{cases} \min\left\{n > T_i^{(m)} : X_n = i\right\}, & T_i^{(m)} < \infty, \\ \infty, & T_i^{(m)} = \infty. \end{cases}$$

Vrijeme $T_i^{(m)}$ zove se vrijeme m-tog povratka u stanje i.

Primijetimo da je $T_i^{(m)}$ vrijeme zaustavljanja jer vrijedi

$$\left\{T_i^{(m)} = n\right\} = \left\{\sum_{k=1}^{n} 1_{\{X_k=i\}} = m, X_n = i\right\}.$$

Pretpostavimo da vrijedi $T_i^{(m)} < \infty$. Tada su, prema jakom Markovljevom svojstvu predproces $X_0, X_1, \ldots, X_{T_i^{(m)}}$ i postproces $\left(X_{T_i^{(m)}+n} : n \geq 0\right)$ nezavisni i postproces je Markovljev lanac sa istom prijelaznom matricom kao i originalni lanac X (možemo primijetiti da zbog $\left\{X_{T_i^{(m)}} = i\right\} = \Omega$ uvjetna nezavisnost postaje nezavisnost).

Dio puta Markovljevog lanca $(X_{T_i^{(m)}}, X_{T_i^{(m)}+1}, \ldots, X_{T_i^{(m+1)}-1})$ između dva posjeta stanju i naziva se *izlet* iz stanja i ili *regenerativni ciklus*. Vrijedi sljedeći rezultat na temelju gornjeg razmatranja.

Teorem 1.4.5. *Neka je X $\left(\delta^i, P\right)$-Markovljev lanac. Stavimo $T_i^{(m)} = 0$ i pretpostavimo da je $T_i^{(m)} < \infty$ za sve $m \geq 1$. Tada su regenerativni ciklusi*

$$\left(X_{T_i^{(m)}}, X_{T_i^{(m)}+1}, \ldots, X_{T_i^{(m+1)}-1}\right), m \geq 0,$$

nezavisini i jednako distribuirani. Specijalno, $(T_i^{(m)} - T_i^{(m-1)} : m \geq 1)$ je niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli.

1.5 Povratnost i prolaznost

Definicija 1.5.1. *Neka je $(X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac sa skupom stanja S i prijelaznom matricom P. Kažemo da je stanje $i \in S$ povratno ili rekurentno ako vrijedi*

$$\mathbb{P}_i (T_i < \infty) = 1,$$

t.j.

$$\mathbb{P}_i (X_n = i \text{ za beskonačno mnogo } n) = 1.$$

Kažemo da je stanje $i \in S$ prolazno ako vrijedi

$$\mathbb{P}_i (T_i < \infty) < 1,$$

t.j.

$$\mathbb{P}_i (X_n = i \text{ za beskonačno mnogo } n) = 0.$$

Riječima, povratno stanje je ono u koje se lanac stalno vraća, a prolazno ono koje će lanac u nekom trenutku zauvijek napustiti. Pokazat ćemo da je svako stanje ili povratno ili prolazno.

Na temelju definicije 1.4.4 i definicije izleta iz prošlog poglavlja dajemo formulu za duljinu m-tog izleta do i sa

$$S_i^{(m)} = \begin{cases} T_i^{(m)} - T_i^{(m-1)}, & \text{ako je } T_i^{(m-1)} < \infty, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Naša analiza prolaznosti i povratnosti počivat će na nalaženju zajedničke distribucije ovih duljina izleta.

Lema 1.5.2. *Za $m \geq 2$, uvjetno na $T_i^{(m-1)} < \infty$, $S_i^{(m)}$ je nezavisan od $\{X_m : m \leq T_i^{(m-1)}\}$ i*

$$\mathbb{P}\left(S_i^{(m)} = n \mid T_i^{(m-1)} < \infty\right) = \mathbb{P}_i (T_i = n) .$$

Dokaz. Primijenjujući jako Markovljevo svojstvo u vremenu zaustavljanja $T = T_i^{(m-1)}$. Jasno je da je $X_T = i$ na $T < \infty$. Prema tome, uvjetno na $T < \infty$, $(X_{T+n} : n \geq 0)$ je $\left(\delta^i, P\right)$-Markovljev lanac nezavisan od slučajnih varijabli $X_0, X_1, \ldots, X_T$. Ali,

$$S_i^{(m)} = \min \{n \geq 1 : X_{T+n} = i\} ,$$

tako da je $S_i^{(m)}$ vrijeme prvog povratka $(X_{T+n} : n \geq 0)$ u stanje i. □

Uvedimo sada *broj posjeta* stanju $i \in S$ sa

$$N_i = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n = i\}}.$$

Očekivani broj posjeta Markovljevog lanca stanju i, uz početno stanje $j \in S$ možemo izračunati na sljedeći način

$$\mathbb{E}_j N_i = \mathbb{E}_j \left(\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n = i\}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_j 1_{\{X_n = i\}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_j (X_n = i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ji}^{(n)}. \tag{1.11}$$

Druga jednakost slijedi iz teorema o monotonoj konvergenciji.
Također, uvedimo $\mathbb{P}_j$-distribuciju od N_i

$$f_{ji} = \mathbb{P}_j (T_i < \infty).$$

Lema 1.5.3. *Za $m \geq 0$ vrijedi $\mathbb{P}_i (N_i > m) = f_{ji}^{(m)}$.*

Dokaz. Primijetimo da ako je $X_0 = i$ onda $\{N_i > m\} = \left\{T_i^{(m)} < \infty\right\}$. Kada je $m = 0$ rezultat vrijedi. Pretpostavimo induktivno da je istinit za sve m, tada

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_i (N_i > m + 1) = \mathbb{P}_i \left(T_i^{(m+1)} < \infty\right) \\
&= \mathbb{P}_i \left(T_i^{(m)} < \infty \ i \ S_i^{(m+1)} < \infty\right) \\
&= \mathbb{P}_j \left(T_i^{(m)} < \infty\right) \mathbb{P} \left(S_i^{(m+1)} < \infty \mid T_i^{(m)} < \infty\right) \\
&= \mathbb{P}_j \left(T_i^{(m)} < \infty\right) \mathbb{P}_i \left(T_i^{(1)} < \infty\right) = f_{ji}^{(m)} f_{ji} = f_{ji}^{(m+1)}
\end{aligned}$$

po lemi 1.5.2, pa indukcijom slijedi da je rezultat točan za sve m. □

Sjetimo se da se očekivanje nenegativne cjelobrojne varijable može računati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(N > m) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(N > m) = \mathbb{E}(N).
\end{aligned}$$

Sljedeći teorem nam pokazuje kako odrediti povratnost danog stanja. Za prolaznost će vrijediti slična tvrdnja.

Teorem 1.5.4. *Sljedeće dihotomija pokazuje:*

1. *ako* $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$, *tada je i povratno i* $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$,
2. *ako* $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1$, *tada je i prolazno i* $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$.

Posebno, svako stanje je ili povratno ili prolazno.

Dokaz. Ako je $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$, tada po lemi 1.5.3

$$\mathbb{P}_i(N_i = \infty) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}_i(N_i > m) = 1,$$

pa je i povratno i

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \mathbb{E}_i N_i = \infty.$$

S druge strane, ako je $f_{ii} = \mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1$, tada po lemi 1.5.3 vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \mathbb{E}_i N_i = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_j(N_i > n) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ji}^n f_{ii} = \frac{f_{ji}}{1 - f_{ii}} < \infty, \tag{1.12}$$

pa $\mathbb{P}_i(N_i = \infty) = 0$ i i je prolazno. □

Napomena 1.5.5. *Usporedimo li jednakosti* (1.11) *i* (1.12), *t.j.* $\mathbb{E}_j N_i = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ji}^{(n)}$ *i* $\mathbb{E}_i N_i = \frac{f_{ji}}{1-f_{ii}}$ *dobivamo*

$$\mathbb{E}_j N_i = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ji}^{(n)} = \frac{f_{ji}}{1 - f_{ii}}.$$

Specijalno, ako je $i \in S$ *prolazno, tada je* $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ji}^{(n)} < \infty$.

Sada ćemo pokazati da su povratnost i prolaznost svojstva klase komuniciranja.

Propozicija 1.5.6. *Neka je* $i \in S$ *povratno stanje, te neka* $i \leftrightarrow j$. *Tada je* $j \in S$ *povratno stanje.*

Napomena 1.5.7. *Iz propozicije neposredno slijedi da ako je* $i \in S$ *prolazno stanje, te* $i \leftrightarrow j$, *tada je* $j \in S$ *prolazno stanje. Zaista, kada bi* j *bilo povratno, onda bi iz propozicije zaključili da je* $i \in S$ *povratno. Dakle, propozicija nam kaže da ako je* C *klasa komuniciranja, tada su ili sva stanja u* C *povratna ili su sva prolazna.*

Dokaz. U dokazu koristimo karakterizaciju iz teorema 1.5.4 te kriterij dostižnosti (ii) iz propozicije 1.2.2. Po tom kriteriju slijedi da postoje $n \geq 1$ i $m \geq 1$ takvi da je $p_{ij}^{(n)} > 0$ i $p_{ji}^{(m)} > 0$. Zato za sve $k \geq 0$,

$$p_{jj}^{(m+k+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(n)},$$

otkud slijedi

$$\sum_{l=0}^{\infty} p_{jj}^{(l)} \geq \sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^{(m+k+n)} \geq \sum_{k=0}^{\infty} p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(n)} = p_{ji}^{(m)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^{(k)} \right) p_{ij}^{(n)} = +\infty.$$

Dakle, $j \in S$ je povratno. □

U svjetlu ovog teorema, ima smisla govoriti o povratnim ili prolaznim klasama komuniciranja.

Propozicija 1.5.8. *Svaka povratna klasa je zatvorena.*

Dokaz. Neka je C neka povratna klasa. Pretpostavimo da C nije zatvorena. To po definiciji znači da postoji $i \in C$ takav da vrijedi $\mathbb{P}_i (T_{S \setminus C} < \infty) > 0$. Slijedi da postoje $j \notin C$ i $m \geq 1$ takvi da je

$$\mathbb{P}_i (\mathrm{X_m} = j) > 0.$$

Nadalje, imamo

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_i (\{\mathrm{X_m} = j\} \cap \{X_n = i \text{ za beskonačno mnogo } n\}) \\ &\quad = \mathbb{P}_i (\mathrm{X_m} = j)\, \mathbb{P}_i (\{X_n = i \text{ za beskonačno mnogo } n\} \,|\mathrm{X_m} = j) \\ &\quad = \mathbb{P}_i (\mathrm{X_m} = j)\, \mathbb{P}_i (\{X_n = i \text{ za beskonačno mnogo } n\}) = 0, \end{aligned}$$

jer je $\mathbb{P}_i (T_i < \infty) = 0$ (u suprotnom bi i i j komunicirali). Budući da je stanje i povratno, vrijedi

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_i (\{\mathrm{X_m} = j\} \cap \{X_n = i \text{ za najviše konačno mnogo } n\}) \\ &\quad \leq \mathbb{P}_i (\{X_n = i \text{ za najviše kona čno mnogo } n\}) = 0. \end{aligned}$$

Zbrajanjem gornjih dviju jednakosti slijedi da je $\mathbb{P}_i (\mathrm{X_m} = j) = 0$, što je u kontradikciji s pretpostavkom $\mathbb{P}_i (\mathrm{X_m} = j) > 0$. □

Napomena 1.5.9. *Dokaz gornje propozicije pokazuje i sljedeću tvrdnju: ako je $i \in S$ povratno stanje, te ako $i \to j$, tada $j \to i$. Zaista, zbog $i \to j$ postoji $m > 0$ takav da je $\mathbb{P}_i (\mathrm{X_m} = j) > 0$. Pretpostavimo li da i i j ne komuniciraju, dokaz propozicije 1.5.8 daje kontradikciju.*

Propozicija 1.5.10. *Pretpostavimo da je S konačan prostor stanja. Tada S sadrži barem jedno povratno stanje.*

Dokaz. Pretpostavimo da su sva stanja prolazna. Tada za $j \in S$ i sve $i \in S$ vrijedi $\mathbb{E}_j N_i < \infty$ po napomeni 1.5.5. Zbog pretpostavke da je S konačan slijedi da je i

$$\mathbb{E}_j \sum_{i \in S} N_i = \sum_{i \in S} \mathbb{E}_j N_i < \infty.$$

S druge strane je očigledno $\sum_{i \in S} N_i = +\infty$, te je stoga $\mathbb{E}_j \sum_{i \in S} N_i = +\infty$. Kontradikcija. Znači da S sadrži barem jedno povratno stanje. □

Teorem 1.5.11. *Pretpostavimo da je Markovljev lanac X ireducibilan i povratan. Tada za sve $i \in S$ vrijedi $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$.*

Dokaz. Budući da je $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = \sum_{j \in S} \mathbb{P}(X_0 = j)\mathbb{P}_j(T_i < \infty)$, dovoljno je pokazati da vrijedi $\mathbb{P}_j(T_i < \infty) = 1$ za sve $i, j \in S$. Odaberimo $m \in \mathbb{N}$ takav da je $p_{ij}^{(m)} > 0$. Po teoremu 1.5.4, imamo

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}_i(X_n = i \text{ za beskonačno mnogo } n) = \mathbb{P}_i(X_n = i \text{ za neki } n \geq m+1) \\ &= \sum_{k \in S} \mathbb{P}_i(X_n = i \text{ za neki } n \geq m+1 | X_m = k)\mathbb{P}_i(X_m = k) = \sum_{k \in S} \mathbb{P}_k(T_i < \infty)\, p_{ik}^{(m)}, \end{aligned}$$

gdje zadnji redak slijedi iz Markovljevog svojstva. Kada bi bilo $\mathbb{P}_j(T_i < \infty) < 1$, imali bismo, zbog $p_{ij}^{(m)} > 0$,

$$\sum_{k \in S} \mathbb{P}_k(T_i < \infty)\, p_{ik}^{(m)} < \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} = 1.$$

Kontradikcija! Dakle, $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$. □

1.6 Stacionarna distribucija

Sada želimo uvesti pojam stacionarnosti kod slučajnih procesa. Vrijedi da ako je $X = (X_n : n \geq 0)$ stacionarni slučajni proces, tada je distribucija svih slučajnih elemenata X_n jednaka. Dakle, stacionarnost kod slučajnih procesa znači da se vjerojatnosna svojstva slučajnih procesa ne mijenjaju kroz vrijeme.

Definicija 1.6.1. *Slučajni proces* $X = (X_n : n \geq 0)$ *definiran na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *zove se* stacionaran *ako za sve* $k \geq 0$ *i sve* $n \geq 0$*, slučajni vektori* $(X_0, X_1, \ldots, X_k)$ *i* $(X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+k})$ *imaju istu distribuciju (u odnosu na vjerojatnost* $\mathbb{P}$*).*

Specijalno, ako X poprima vrijednosti u prebrojivom skupu stanja S, tada uzimajući $k = 0$ slijedi $\mathbb{P}(X_n = i) = \mathbb{P}(X_0 = i)$ za sve $i \in S$ i sva vremena $n \geq 1$. Dakle, kao specijalan slučaj dobivamo da se jednodimenzionalne distribucije ne mijenjaju kroz vrijeme.

Definicija 1.6.2. *Neka je* $X = (X_n : n \geq 0)$ *Markovljev lanac s prebrojivim skupom stanja* S *i prijelaznom matricom* P*. Vjerojatnosna distribucija* $\pi = (\pi_i : i \in S)$ *na* S *je* stacionarna distribucija *(ili* invarijantna distribucija*) Markovljevog lanca X (odnosno prijelazne matrice P) ako vrijedi*

$$\pi = \pi P.$$

Odnosno po komponentama

$$\pi_j = \sum_{k \in S} \pi_k p_{k_j}, \quad \text{za sve } j \in S.$$

Teorem 1.6.3. *Neka je* $X = (X_n : n \geq 0)$ (π, P)*-Markovljev lanac gdje je* π *stacionarna distribucija za* P*. Tada je X stacionaran proces. Preciznije, X je stacionaran uz vjerojatnost* $\mathbb{P}_\pi = \sum_{i \in S} \pi_i \mathbb{P}_i$*. Nadalje, za svaki* $m \geq 0$ *je* $(X_{m+n} : n \geq 0)$ *ponovo* (π, P)*-Markovljev lanac.*

Dokaz. Uočimo prvo da iz $\pi = \pi P$ slijedi $\pi = (\pi P) P = \pi P^2$, te indukcijom $\pi = \pi P^n$, za sve $n \geq 1$. Po komponentama,

$$\pi_j = \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj}^{(n)}. \tag{1.13}$$

Neka je sada $k \geq 0$, $n \geq 0$, te neka su $i_0, i_1, \ldots, i_k \in S$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_\pi (X_n = i_0, X_{n+1} = i_1, \ldots, X_{n+k} = i_k) \\ &= \sum_{i \in S} \pi_i \mathbb{P}_i (X_n = i_0, X_{n+1} = i_1, \ldots, X_{n+k} = i_k) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i \in S} \pi_i p_{ii_0}^{(n)} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{k-1} i_k} \\
&= \pi_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{k-1} i_k} = \mathbb{P}\left(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_k = i_k\right),
\end{aligned}
$$

gdje zadnji redak slijedi zbog jednadžbe (1.3).
Nadalje, otprije znamo da je $(X_{m+n} : n \geq 0)$ Markovljev lanac sa prijelaznom matricom P. Početna distribucija tog lanca jednaka je $(\mathbb{P}_\pi (X_m = \imath) : i \in S)$. Budući da je $\mathbb{P}_\pi (X_m = i) = \pi_i$, tvrdnja slijedi. □

Sljedeći rezultat povezuje stacionarnu i graničnu distribuciju za slučaj konačnog skupa stanja.

Propozicija 1.6.4. *Neka je S konačan skup stanja, te pretpostavimo da za neki $i \in S$,*

$$
\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \text{ za sve } j \in S.
$$

Tada je $\pi = \left(\pi_j : j \in S\right)$ stacionarna distribucija.

Dokaz. Vrijedi

$$
\sum_{j \in S} \pi_j = \sum_{j \in S} \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \to \infty} \sum_{j \in S} p_{ij}^{(n)} = 1,
$$

pa je π vjerojatnosna distribucija. Zbog toga što je S konačan, zamjena limesa i sume je opravdana. Nadalje,

$$
\pi_j = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n+1)} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj} = \sum_{k \in S} \lim_{n \to \infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj} = \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj}.
$$

Dakle, π je stacionarna distribucija. □

Poglavlje 2

Stavskaya model i fazni prijelazi

2.1 Definicije i notacija

Prvo recimo nešto o staničnim automatima (eng. cellular automata, ozn. SA). Stanični automati su dinamički sustavi koji su diskretni u prostoru i vremenu, djeluju na uniformnoj, regularnoj rešetci, a odlikuju se „lokalnim" interakcijama. Gledat ćemo SA na beskonačnoj, cjelobrojnoj rešetci $\mathbb{Z}^d$ bilo koje dimenzije $d \in \mathbb{N}^*$, pri čemu označavamo $\mathbb{N}^*{=}\mathbb{N}\setminus\{0\}$. U svakom položaju x od $\mathbb{Z}^d$, postoji *ćelija* koja je u stanju ω_x koje pripada konačnom prostoru stanja S. U ovom radu ćemo proučavati određeni *binarni* SA, gdje svaka ćelija može poprimiti samo jedno od dva različita stanja. Stanja zapisujemo kao 0 i 1, tako da je skup stanja uvijek $S = \{1, 2\}$ od sada nadalje. Neka je $X = S^{\mathbb{Z}^d}$ konfiguracijski prostor za cijeli sistem ćelija. Za neku konfiguraciju $\boldsymbol{\omega} \in X$, sa ω_x ćemo označiti vrijednost od $\boldsymbol{\omega}$ na mjestu x i sa $\boldsymbol{\omega}_A$ ćemo označiti vektor $(\omega_x)_{x\in A}$ za svaki podskup $A \subseteq \mathbb{Z}^d$. Također ćemo koristiti notaciju $(\boldsymbol{\omega}_{\neq x}, a)$ za konfiguraciju dobivenu od $\boldsymbol{\omega}$ zamjenom stanja ω_x na mjestu x sa vrijednošću $a \in S$.

Sistem se razvija u koracima diskretnog vremena prema zakonu determinističke evolucije. U svakom vremenu t u $\mathbb{N}$, stanja svih ćelija se ažuriraju istovremeno. Pravilo evolucije za stanje ćelije na mjestu x rešetke $\mathbb{Z}^d$ uključuje njegove susjede, koji se definiraju kao elementi *susjedstva* $\mathcal{U}(x) = x + \mathcal{U}$ za fiksirani konačni skup stanja $\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_R\} \subset \mathbb{Z}^d$. Neka je $\varphi : S^{\mathcal{U}} \to S$ *funkcija ažuriranja*. Počevši od konfiguracije $\boldsymbol{\omega} \in X$, istovremeno ažuriranje svake ćelije u svakom koraku sastoji se od transformiranja stanja ω_x na mjestu x u vrijednost

$$\varphi_x(\omega) := \varphi\left(\omega_{x+u_1}, \ldots, \omega_{x+u_R}\right).$$

Na taj način definirali smo mapu D koji se preslikava s konfiguracijskog prostora X na sebe samog. Za svaku danu početnu konfiguraciju $\boldsymbol{\omega}^{in}$ u X, iteracije od D tvore *putanju* $\left(D^t\boldsymbol{\omega}^{in}\right)_{t\in\mathbb{N}}$.

U ovom radu bavit ćemo se samo *monotonim* binarnim SA, za koje je φ monoton u smislu da ako je $\omega_u \leq \omega_u{}'$ za sve $u \in \mathcal{U}$, tada je $\varphi(\omega_{\mathcal{U}}) \leq \varphi\left(\omega_{\mathcal{U}}{}'\right)$. Također, odbacujemo trivijalni slučaj gdje je φ konstantna funkcija. Primijetimo da ove dvije pretpostavke impliciraju da je $\varphi(0, \ldots 0) = 0$ i $\varphi(1, \ldots, 1) = 1$. Tada konfiguracije $\boldsymbol{\omega}^{(0)}$ i $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$, definirane sa $\omega_x^{(0)} = 0,\ \forall x \in \mathbb{Z}^d$ i $\omega_x^{(1)} = 1,\ \forall x \in \mathbb{Z}^d$ ostaju nepromijenjene evolucijom determinističkog vremena. One generiraju potpuno homogene putanje.

Nekad je korisno uzeti prostorno-vremensko gledište. Neka $V = \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$ označava prostorno-vremensku rešetku. Proces sa diskretnim vremenskim razvojem u konfiguracijskom prostoru $X = S^{\mathbb{Z}^d}$ proizvodi slijed $(\omega^t)_{t \in \mathbb{N}}$ koju možemo gledati kao prostorno-vremensku konfiguraciju $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ u S^V. Za svaku prostorno-vremensku konfiguraciju $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ u S^V, svaka točka $v = (x, t)$ u V i svaki podskup A od V, neka $\underline{\omega}_v$ u S označava stanje u vremenu t ćelije smještene u mjestu x i neka ω_A u S^A označava slijed stanja $\underline{\omega}_w$ indeksirane točama w od A.

Razmotrimo podskup $V_0 = \left\{(x, 0) | \, x \in \mathbb{Z}^d\right\} \subset V$. U prostorno-vremenskom formalizmu, *početni uvjet* za SA znači izbor vrijednosti prostorno-vremenske konfiguracije $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in S^V$ u svim točkama u V_0, to jest izbor $\underline{\omega}_{V_0}$ u S^{V_0}. Svaka točka $v = (x, t)$ u V takva da je $t > 0$ ima *prostorno-vremensko susjedstvo* definirano kao skup U, oblika $U(v) = \{(x + u_1, t - 1), \ldots, (x + u_R, t - 1)\}$ koji se sastoji od susjeda mjesta x u prethodnom vremenu. To je translacija $U(v) = v + U$ skupa $U(v) = \{(u_1, -1), \ldots, (u_R, -1)\}$. Vremensko-prostorna konfiguracija $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in S^V$ se naziva *putanja* SA ako je inducirana početnim stanjem i uzastopnim ažuriranjima stanja svih ćelija prema funkciji φ primijenjenoj na stanja njegovih susjeda, to jest ako je

$$\omega_v = \varphi(\underline{\boldsymbol{\omega}}_{U(v)}), \qquad \textit{za sve } v \in V \backslash V_0.$$

Posebno, prostorno-vremenska konfiguracija $\boldsymbol{\omega}^{(0)}$ dana sa $\underline{\omega}_v^{(0)}0$ za sve v iz V i prostorno-vremenska konfiguracija $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ dana sa $\underline{\omega}_v^{(1)}$ =1 za sve v iz V su obje putanje.

2.2 Predstavljanje Stavskaya modela i erozija

Stavskaya model je jednodimenzionalni vjerojatnosni stanični automat uveden krajem 1960. kao primjer modela interakcije čestica koji predstavlja neravnotežni fazni prijelaz. U ovom modelu, susjedstvo ishodišta je podskup $\mathcal{U} = \{0, 1\}$ od $\mathbb{Z}$, tako da je susjedstvo svakog mjesta x u $\mathbb{Z}$ $\mathcal{U}(x) = \{x, x + 1\}$ koje se sastoji od te iste točke i njenog susjeda s desne strane. Funkcija ažuriranja $\varphi : \{0, 1\}^{\mathcal{U}} \to \{0, 1\}$ vraća $\varphi(\omega_0, \omega_1) = 1$ ako i samo ako je $\omega_0 = \omega_1 = 1$.

Definicija 2.2.1. (svojstvo erozije) *Za monotoni binarni SA kažemo da ima* svojstvo erozije *ili da je* eroder *ako zadovoljava sljedeće: Za svaki konačan podskup A od* $\mathbb{Z}^d$ *postoji konačno vrijeme* $t \in \mathbb{N}$ *takvo da početna konfiguracija* $\boldsymbol{\omega}^{in}$*, definirana sa*

$$\omega_x^{in} = \begin{cases} 1, & za\ svaki\ \ x \in A \\ 0, & za\ svaki\ \ x \in \mathbb{Z}^d \backslash A \end{cases}$$

zadovoljava $D^t \boldsymbol{\omega}^{in} = \boldsymbol{\omega}^{(0)}$.

Stavskaya SA je binaran i monoton. Već znamo da su točke $\boldsymbol{\omega}^{(0)}$ i $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ fiksirane točke dinamike. Zbog te monotonosti svaki će zadani skup stanja koji uključuje stanje 1 erodirati do fiksne konfiguracije $\boldsymbol{\omega}^{(0)}$ u konačnom broju koraka. Zaista, uzmimo konačan podskup A od $\mathbb{Z}$ i početnu konfiguraciju $\boldsymbol{\omega}^{in}$ kao u definiciji. Konačan skup A je uvijek uključen u nekom konačnom intervalu $x_L, x_{L+1}, \ldots, x_R$ od $\mathbb{Z}$. Zbog monotonosti od φ u vremenu $t \leq x_R - x_L$, set točaka gdje konfiguracija $D^t \boldsymbol{\omega}_x^{in}$ ima stanje 1 zadovoljava

$$\left\{x \in \mathbb{Z} | \left(D^t \boldsymbol{\omega}^{in}\right)_x = 1\right\} \subseteq \{x_L, \ldots, x_R - t\},$$

to jest od vremena $t = x_R - x_L + 1$ nadalje taj je skup prazan.

Toom je dao nužan i dovoljan uvjet da bi monotoni binarni SA bio eroder. Izražen je u terminima *nul-skupova*: podskupova $\mathcal{Z}$ od $\mathbb{R}^d$ takvih da ako je $\omega_u = 0$ za sve $u \in \mathcal{Z} \cap \mathcal{U}$, tada je $\varphi(\omega_{\mathcal{U}}) = 0$. Primijetimo da ako podskup $\widetilde{\mathcal{Z}}$ od $\mathbb{R}^d$ sadržava nul-skup $\mathcal{Z} \cap \mathcal{U}$, tada je i $\widetilde{\mathcal{Z}}$ nul-skup. Zbog translacijske simetrije evolucijskog pravila, ima smisla definirati nul-skupove bilo kojeg mjesta x u $\mathbb{Z}^d$ kao skupove oblika $\mathcal{Z}(x) := x + \mathcal{Z}$, gdje je $\mathcal{Z}$ nul-skup.

Da bi mogli dati kriterij erozije, dajmo oznaku za *konveksnu ljusku*. Za svaku dimenziju d i svaki podskup A od $\mathbb{R}^d$, ili od $\mathbb{Z}^d$ kao potprostora od $\mathbb{R}^d$, neka je

$$conv(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*, \lambda_i \in [0, 1] \quad \forall i, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, x_i \in A \quad \forall i \right\}.$$

Skup $conv(A)$ nazivamo *konveksna ljuska* od A.

Definicija 2.2.2. (kriterij erozije) *Monotoni binarni SA zadovoljava* kriterij erozije *ako* $\bigcap_{j=1}^{J} conv\left(\mathcal{Z}_j\right) = \emptyset$.

Teorem 2.2.3. (Toomov teorem erozije) *Monotoni binarni SA ima svojstvo erozije ako i samo ako zadovoljava kriterij erozije.*

Dakle, Stavskaya model kakav smo predstavili zadovoljava kriterij erozije.

2.3 Vjerojatnosni stanični automati

Da bismo generirali vjerojatnosni stanični automat, koji ćemo označavati sa VSA, trebamo uvesti pojam šuma. Ukratko, sistem slijedi isto pravilo evolucije kao u determinističkom slučaju, ali u svakoj točci rešetke i u svakom koraku u vremenu se može pojaviti greška s vjerojatnošću manjom od ε, za neki ε iz $[0, 1]$, pri čemu ćelija poprima suprotno stanje. Za pojavu greške u nekoj točci često se pretpostavlja da je nezavisna od pojave grešaka u drugim mjestima ili drugim vremenima. Proces koji rezultira slijedom istovremenih ažuriranja svih ćelija postaje stohastički proces.

Da bi mogli dobro definirati taj proces, uvedimo prvo neke pojmove i oznake. Prostor konfiguracija je $X = S^{\mathbb{Z}^d}$. Neka su *skupovi cilindara* podskupovi od X u obliku

$$\{\omega \in X | \omega_{x_1} = a_1, \ldots, \omega_{x_n} = a_n\},$$

za svaki $n \in \mathbb{N}^*$, $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{Z}^d$ i $a_1, \ldots, a_n \in S$. Razmatrat ćemo σ - algebru $\mathcal{F}$ generiranu skupovima cilindara, to jest najmanju σ - algebru koja sadrži sve skupove cilindara. Neka je $\mathcal{M}$ prostor vjerojatnosnih mjera na σ - algebri $\mathcal{F}$.

Da bismo konstruirali jedinstvenu vjerojatnosnu mjeru μ u $\mathcal{M}$ dovoljno je zadati vrijednosti od $\mu(C)$ za sve kupove cilindara C. Za to je dovoljno iskoristiti Daniell-Kolmogorov teorem konzistencije.

Teorem 2.3.1. (Korolar Daniell-Kolmogorova teorema konzistencije) *Za sve* $n \in \mathbb{N}^*$, $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{Z}^d$ *i* $a_1, \ldots, a_n \in S$ *, neka su brojevi* $\mu_n(\{x_1, \ldots, x_n\}; a_1, \ldots, a_n)$ *iz* $[0, 1]$. *Pretpostavimo da ti brojevi zadovoljavaju sljedeći uvjet konzistencije:*

$$\sum_{a_1 \in S} \mu_1(\{x_1\}; a_1) = 1;$$

$$\sum_{a_{n+1} \in S} \mu_{n+1}(\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}; a_1, \ldots, a_{n+1}) = \mu_n(\{x_1, \ldots, x_n\}; a_1, \ldots, a_n).$$

Tada postoji jedinstvena vjerojatnosna mjera μ *u* $\mathcal{M}$ *takva da vrijedi*

$$\begin{aligned} &\mu(\omega_{x_1} = a_1, \ldots, \omega_{x_n} = a_n) \\ &\quad := \mu(\{\omega \in X | \omega_{x_1} = a_1, \ldots, \omega_{x_n} = a_n\}) \\ &\quad = \mu_n(\{x_1, \ldots, x_n\} : a_1, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

Za dokaz ovog teorema pogledati npr. Baudion [1].

Za sve $x \in Z^d$, $\xi_x \in S$ i $\omega \in X$ neka $p_x(\xi_x|\omega)$ označava *lokalne prijelazne vjerojatnosti.* Zbog jednostavnosti, pretpostavimo da $p_x(\xi_x|\omega)$ ovisi o $\omega_{\mathcal{U}(x)}$, a ne o konfiguraciji izvan susjedstva $\mathcal{U}(x)$, kao ni o poziciji mjesta x. To znači da je $p_x(\xi_x|\omega) = p_x(\xi_x|\omega_{\mathcal{U}(x)})$ za neku funkciju $p(\cdot|\cdot) : S x S^u \to [0,1]$ takvu da $p(1|\omega_{\mathcal{U}}) = 1 - p(0|\omega_{\mathcal{U}})$ za sve $\omega_{\mathcal{U}}$ u $S^{\mathcal{U}}$.

Sada možemo definirati *operator prijenosa* $T : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ koji predstavlja stohastički zakon evolucije u VSA. Formalno, on je definiran kao produkt lokalnih prijelaznih vjerojatnosti na prostoru $\mathbb{Z}^d$. Rigoroznije, prema Daniell-Kolmogorovu teoremu konzistencije, za svaki $\mu \in \mathcal{M}$, dovoljno je dati $T\mu(C)$ za sve skupove cilindara C. $T\mu$ je dobro definiran izrazom

$$\begin{aligned}
&T\mu(\xi_{x_1} = a_1, \ldots, \xi_{x_n} = a_n) \\
&:= \sum_{b_y \in S, y \in \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}(x_i)} \left(\prod_{i=1}^n p(a_i|\boldsymbol{b}_{\mathcal{U}(x_i)}) \right) \mu\left(\omega_y = b_y, \forall y \in \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}(x_i) \right)
\end{aligned}$$

za koji se lako provjeri da zadovoljava uvjet konzistencije. Prema tome, Daniell-Kolmogorov teorem vrijedi i $T\mu$ u $\mathcal{M}$ može biti definirana kao jedinstveno dobivena vjerojatnosna mjera. Izbor početne vjerojatnosne mjere μ_{in} u $\mathcal{M}$ i iteracije operatora prijenosa proizvode niz vjerojatnosnih mjera $(T^t\mu_{in})_{t\in N}$.

Želimo proučavati VSA koji odgovara stohastičkim perturbacijama monotonih binarnih SA kakve su uvedene na početku ovog poglavlja i karakterizirane funkcijom ažuriranja φ. Da bi to napravili, lokalne prijelazne vjerojatnosti trebaju ispuniti sljedeću pretpostavku:

Pretpostavka omeđenog šuma: Ako je $\xi_x \neq \varphi_x(\omega)$, tada je $p_x(\xi_x|\omega) \leq \varepsilon$ za neki dani parametar šuma $\varepsilon \in [0,1]$.

Pretpostavka omeđenog šuma je uvjet „niskog“ šuma kada je ε mali: osigurava slijeđenje determinističkog pravila u svakoj točci rešetke s vjerojatnošću barem $1 - \varepsilon$. Primijetimo da nismo dali ograničenja oko moguće sklonosti u korist pogrešaka koje proizvode određena stanja 0 ili 1.

Kad raspravljamo o događajima koji uključuju točke u prostornom-vremenu $V = \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$ sa različitim koordinatama, bit će praktičnije koristiti prostorno-vremenski formalizam, za VSA kao i za SA. Nakon što ga opišemo, pokazat ćemo kako se odnosi na stohastički proces generiran operatorom prijenosa koji smo upravo definirali. Prostorno-vremenske konfiguracije smo uveli u potpoglavlju 2.2, među kojima i putanje od SA. Sada je SA pretvoren u VSA prihvaćanjem prostorno-vremenskih konfiguracija koje nisu putanje pošto sa malom vjerojatnošću ograničenom s ε to pravilo ne mora biti slijeđeno. Za danu prostorno-vremensku konfiguraciju $\underline{\omega} \in S^V$, reći ćemo da se *greške* događaju točci $v \in V \setminus V_0$ ako $\underline{\omega}_v \neq \varphi\left(\underline{\omega}_{U(v)}\right)$.

Vjerojatnosna distribucija mora biti dodijeljena svim ovim prostorno-vremenskim konfiguracijama.Preciznije, sada možemo uzeti u obzir σ -algebru $\mathcal{F}$ generiranu podskupom cilindara od S^V, baš kao što smo napravili za podskupove cilindara od $X = S^{\mathbb{Z}^d}$. Neka je M prostor svih vjerojatnosnih mjera na toj σ -algebri $\mathcal{F}$. Za ε iz $[0, 1]$, neka je M_ε podskup od M koji sadrži sve vjerojatnosne mjere $\underline{\mu}$ na $\mathcal{F}$ koje zadovoljavaju sljedeći uvjet: za svaki konačni podprostor A od $V \setminus V_0$,

$$\underline{\mu}\left(\underline{\omega}_v \neq \varphi\left(\underline{\omega}_{U(v)}\right), \forall v \in A\right) \leq \varepsilon^{|A|}. \tag{2.1}$$

Stohastičkim procesima zovemo vjerojatnosne mjere u M_ε. Uglavnom ćemo se baviti podskupom $M_\varepsilon^{(0)} \setminus M_\varepsilon$, definiran dodatnim uvjetom

$$\underline{\mu}\left(\underline{\omega}_v = 0, \forall v \in V_0\right) = 1. \tag{2.2}$$

$M_\varepsilon^{(1)}$ je definiran na isti način zamjenom stanja 0 sa stanjem 1 u početnom uvjetu (2.2). Drugim riječima, mjere u $M_\varepsilon^{(0)}$ (odnosno $M_\varepsilon^{(1)}$) su slučajni procesi dobiveni od SA kad početni uvjet ima 'nule' (odnosno 'jedinice') svuda i kada, u svakoj prostorno-vremenskoj točci, pravilo ažuriranja može biti zanemareno sa malom vjerojatnošću ograničenom odozgo sa ε.

Skup M_ε sadrži vrlo općenite vjerojatnosne mjere na prostorno-vremenskom konfiguracijskom prostoru $\{0, 1\}^V$. Posebno, sadrži stohastičke procese $\underline{\mu}$ inducirane, prema sljedećoj definiciji, po iteracijama operatora prijenosa T, za inicijalnu mjeru μ_{in} u $\mathcal{M}$. Daniell-Kolmogorov teorem konzistencije kojeg smo iskazali za $\mathcal{M}$, vrijedi također i za M. Prema tome, $\underline{\mu}$ je potpuno definiran svojim vrijednostima na svim podskupovima cilindara S^V. Sada za sve $n \in \mathbb{N}^*$, $\{v_1 = (x_1, t_1), \ldots, v_n = (x_n, t_n)\} \subset V$ i $a_1, \ldots, a_n \in S$, vrijednost od $\underline{\mu}\left(\underline{\omega}_{v_1} = a_1, \ldots, \underline{\omega}_{v_n} = a_n\right)$ je definirana sljedećim receptom. Pošto je n konačan i prostorno-vremensko susjedstvo svih točaka u V je konačno, uvijek je moguće izabrati konačan podskup A od $\mathbb{Z}^d \times \{0, \ldots, T\} \setminus V$, gdje je $T = max_i t_i$, takav da $v_i \in A$ za sve $i = 1, \ldots, n$, i to za sve $v = (x, t) \in A$ uz $t > 0$, $U(v) \subset A$. Tada formule

$$\begin{aligned}
&\underline{\mu}\left(\underline{\omega}_{v_1} = \underline{a}_1, \ldots, \ \underline{\omega}_{v_n} = \underline{a}_n\right) \\
&= \sum_{\underline{b}_v \in S, v \in A \setminus \{v_1, \ldots, v_n\}} \underline{\mu}\left(\underline{\omega}_{v_1} = \underline{a}_1, \ldots, \ \underline{\omega}_{v_n} = \underline{a}_n, \underline{\omega}_v = \underline{b}_v, \forall v \in A \setminus \{v_1, \ldots, v_n\}\right)
\end{aligned}$$

i, za sve $\underline{b}_A$ u S^A,

$$\begin{aligned}
&\underline{\mu}\left(\underline{\omega}_v = \underline{b}_v, \forall v \in A\right) \\
&:= \left(\prod_{v=(x,T) \in A} p\left(\underline{b}_v \mid \underline{b}_{U(v)}\right)\right) \cdots \left(\prod_{v=(x,1) \in A} p\left(\underline{b}_v \mid \underline{b}_{U(v)}\right)\right) \cdot \mu_{in}\left(\omega_v = \underline{b}_v, \forall v = (x, 0) \in A\right)
\end{aligned}$$

daju vrijednosti koje zadovoljavaju uvjet konzistencije tako da $\underline{\mu}$ može biti proširen na σ -algebru $\underline{\mathcal{F}}$ kao vjerojatnosna mjera na M. Za svaki $t \in \mathbb{N}$, njegova granična vjerojatnosna distribucija za vrijednosti prostorno-vremenske konfiguracije u točkama podskupa $\{(x,t)\,|x \in \mathbb{Z}^d\} \subset V$ je $T^t\mu_{in}$. Štoviše, lokalne prijelazne vjerojatnosti potvrđuju Pretpostavku omeđenog šuma, $\underline{\mu}$ pripada $\mathcal{M}_\varepsilon$. Ako je početna vjerojatnosna mjera μ_{in} izabrana da bude Diracova mjera $\delta^{(0)}$ (odnosno $\delta^{(1)}$) koncentrirana na homogenoj konfiguraciji $\underline{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}$ (odnosno $\underline{\boldsymbol{\omega}}^{(1)}$), rezultantna vjerojatnosna mjera $\underline{\mu}$ pripada $M_\varepsilon^{(0)}$ (odnosno $M_\varepsilon^{(1)}$).

2.4 Invarijantne mjere

Definicija 2.4.1. *Niz $\mu = (\mu_i : i \in S)$ naziva se* mjera *ako je $\mu_i \in [0, \infty\rangle$ za sve $i \in S$. Mjera μ je netrivijalna ako postoji $i \in S$ takav da je $\mu_i > 0$. Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac s prijelaznom matricom P. Netrivijalna mjera μ_{inv} na S je* invarijantna mjera *Markovljevog lanca X (odnosno prijelazna matrice P) ako vrijedi*

$$\mu_{inv} = \mu_{inv} P$$

odnosno po komponentama

$$\mu_{inv,i} = \sum_{k \in S} \mu_{inv,i} p_{k_j}, zasve j \in S.$$

Zanimat će nas egzistencija i jedinstvenost invarijantne mjere. Pokazat ćemo da ireducibilan i povratan Markovljev lanac ima esencijalno jedinstvenu invarijantnu mjeru. Dokaz koji ćemo dati je vjerojatnostan, te ima vjerojatnosnu interpretaciju. Uočite da je za slučaj konačnog skupa stanja S pitanje egzistencije invarijantne mjere ekvivalentno pitanju egzistencije svojstvenog vektora transponirane prijelazne matrice P^T za svojstvenu vrijednost 1. Zaista, $\mu_{inv} = \mu_{inv} P$ je isto što i $P^T \mu_{inv}^T = \mu_{inv}^T$. Taj problem se relativno jednostavno može riješti metodama linearne algebre.

Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac sa prijelaznom matricom P. Za sljedeću definiciju trebamo se prisjetiti prvog vremena povratka u stanje $i \in S$: $T_i = min \{n > 0 : X_n = i\}$.

Definicija 2.4.2. *Stanje $i \in S$ je pozitivno povratno ako je $E_i(T_i) < \infty$.*

Uočimo da je pozitivno povratno stanje uvijek povratno jer iz $E_i(T_i) < \infty$ uvijek slijedi $P_i(T_i < \infty) = 1$. Povratno stanje koje nije pozitivno povratno naziva se *nul-povratnim.*

Propozicija 2.4.3. *Neka je $i \in S$ povratno stanje. Za $j \in S$ definiramo*

$$\nu_j = E_i \sum_{n=0}^{T_i - 1} 1_{(X_n = j)}. \tag{2.3}$$

Tada je ν invarijantna mjera. Ako je stanje i pozitivno povratno, tada je

$$\pi_j = \frac{\nu_j}{E_i(T_i)}, j \in S, \tag{2.4}$$

stacionarna distribucija.

Napomena 2.4.4. *(i) Uočimo, zbog pretpostavke o povratnosti stanja i, $P_i(T_i < \infty) = 1$, te uz P_i vrijedi $X_0 = X_{T_i} = i$.*
(ii) ν_j definiran u propoziciji 2.4.3 je očekivani broj posjeta stanju j prije prvog povratka Markovljevog lanca u stanje i (lanac starta iz i). Slično, π_j je očekivani broj posjeta stanju j normiran očekivanom duljinom izleta iz i, $E_i(T_i)$.
(iii) Vrijedi sljedeća ekvivalentna reprezentacija za ν_j :

$$\nu_j = E_i \sum_{n=0}^{T_i-1} 1_{(X_n=j)} = E_i \sum_{n=0}^{\infty} 1_{(X_n=j,n<T_i)} = \sum_{n=0}^{\infty} E_i 1_{(X_n=j,n<T_i)} = \sum_{n=0}^{\infty} P_i(X_n = j, n < T_i). \quad (2.5)$$

Slično,

$$\nu_j = E_i \sum_{n=1}^{T_i} 1_{(X_n=j)} = \sum_{n=1}^{\infty} P_i(X_n = j, n \le T_i). \quad (2.6)$$

Dokaz. Dokažimo prvo da vrijedi $\nu = \nu P$ gdje dopuštamo mogućnost $\nu_j = +\infty$ (u tom slučaju koristimo konvenciju $\infty \cdot 0 = 0$). Prvo, uočimo da je $\nu_i = 1$. Nadalje, za $n \ge 1$ događaj $\{n \le T_i\} = \{T_i < n\}^c$ ovisi samo o $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$, te upotrebom Markovljevog svojstva u trenutku $n-1$ dobivamo

$$P_i(X_{n-1} = k, X_n = j, n \le T_i) = P_i(X_{n-1} = k, n \le T_i)\, p_{kj}, k, j \in S. (3.4.7) \quad (2.7)$$

Slijedi:

$$\begin{aligned} \nu_j &= \sum_{n=1}^{\infty} P_i(X_n = j, n \le T_i) \\ &= \sum_{k \in S} \sum_{n=1}^{\infty} P_i(X_n = j, X_{n-1} =, n \le T_i) \\ &= \sum_{k \in S} p_{kj} \sum_{n=1}^{\infty} P_i(X_{n-1} = k, n \le T_i) \\ &= \sum_{k \in S} p_{kj} \sum_{m=0}^{\infty} P_i(X_m = k, m \le T_i - 1) \\ &= \sum_{k \in S} p_{kj} E_i \sum_{m=0}^{T_i-1} 1_{(X_m=k)} \\ &= \sum_{k \in S} p_{kj} \nu_k. \end{aligned}$$

Jednakost u prvom retku slijedi iz (2.6), u drugom po formuli potpune vjerojatnosti, u trećem zbog (2.7), u četvrtom zamjenom indeksa sumacije, u petom po (2.5) i u šestom po definiciji za ν_k.

Pokažimo sada da je $\nu_j < \infty$ za sve $j \in S$. Ukoliko $i \not\to j$, za svaki $n \geq 0$ vrijedi $0 = P_i(X_n = j) \geq P_i(X_n = j, n \leq T_i)$, pa je stoga $\nu_j = 0$. Ako $i \to j$, tada iz napomene 2.5.9 slijedi $j \to i$, pa postoji $m \in N$ takav da je $p_{ji}^{(m)} > 0$. Iz $\nu = \nu P$ dobivamo da vrijedi i $\nu = \nu P^m$, pa imamo

$$1 = \nu_i = \sum_{k \in S} \nu_k p_{ki}^{(m)} \geq \nu_j p_{ji}^{(m)}.$$

Dakle, $\nu_j < \infty$. Budući da ν nije trivijalna ($\nu_i = 1$), slijedi da je ν invarijantna mjera. Konačno, pretpostavimo da je i pozitivno povratno. Računamo,

$$\begin{aligned}\sum_{j \in S} \nu_j = \sum_{j \in S} E_i \sum_{n=0}^{T_i - 1} 1_{(X_n = j)} = E_i \sum_{n=0}^{T_i - 1} \sum_{j \in S} 1_{(X_n = j)} \\ = E_i \sum_{n=0}^{T_i - 1} 1 = E_i(T_i).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Dakle, za π_j definiran u (2.3) vrijedi

$$\pi_j = \frac{\nu_j}{\sum_{k \in S} \nu_k},$$

što znači da je π vjerojatnosna distribucija i očito je stacionarna. □

Propozicija 2.4.5. *Pretpostavimo da je Markovljev lanac X ireducibilan, te neka je μ_{inv} invarijantna mjera od X takva da je $\mu_{inv,i} = 1$. Tada je $\mu_{inv,j} \geq \nu_j$ za sve $j \in S$.*

Dokaz. Za svaki $j \in S$ vrijedi

$$\begin{aligned}\mu_{inv,j} &= \sum_{i_0 \in S} \mu_{inv,i_0} p_{i_0 j} \\ &= p_{ij} + \sum_{i_0 \neq i} \mu_{inv,i_0} p_{i_0 j} \\ &= p_{ij} + \sum_{i_0 \neq i} \left(\sum_{i_1 \in S} \mu_{inv,i_1} p_{i_1 i_0} \right) p_{i_0 j} \\ &= p_{ij} + \sum_{i_0 \neq i} \left(p_{i i_0} + \sum_{i_1 \neq i} \mu_{inv,i_1} p_{i_1 i_0} \right) p_{i_0 j} \\ &= \left(p_{ij} + \sum_{i_0 \neq i} p_{i i_0} p_{i_0 j} \right) + \sum_{i_0, i_1 \neq i} \mu_{inv,i_1} p_{i_1 i_0} p_{i_0 j} \\ &\vdots\end{aligned}$$

$$= \left(p_{ij} + \sum_{i_0 \neq i} p_{ii_0} p_{i_0 j} + \ldots + \sum_{i_0, \ldots, i_{n-1} \neq i} p_{ii_{n-1}} \cdots p_{i_1 i_0} p_{i_0 j} \right) + \sum_{i_0, \ldots, i_n \neq i} \mu_{inv, i_n} p_{i_n i_{n-1}} \cdots p_{i_0 j}$$
$$\geq P_i (X_1 = j, T_i \geq 1) + P_i (X_2 = j, T_i \geq 2) + \ldots + P_i (X_n = j, T_i \geq n)$$
$$\to \sum_{n=1}^{\infty} P_i (X_n = j, n \leq T_i) = \nu_j, \text{ kada } n \to \infty.$$

□

Teorem 2.4.6. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ ireducibilan i povratan Markovljev lanac. Tada je $\mu_{inv} = \left(\mu_{inv,j} : j \in S\right)$ invarijantna mjera takva da vrijedi $\mu_{inv,j} > 0$ za sve $j \in S$. Ako je $\nu_{inv} = \left(\nu_{inv,j} : j \in S\right)$ neka druga invarijntna mjera za X tada postoji $c > 0$ takav da je $\nu_{inv} = c\mu_{inv}$.*

Dokaz. Zbog jednostavnosti zapisa označit ćemo $\mu = \mu_{inv}$ i $\nu = \nu_{inv}$.

U propoziciji 2.4.3 pokazano je da je μ invarijantna mjera. Zbog ireducibilnosti postoji $m \in N$ takav da je $p_{ij}^{(m)} > 0$. Zbog $\mu = \mu P^m$ vrijedi

$$\mu_j = \sum_{k \in S} \mu_k \rho_{kj}^{(m)} \geq \mu_i p_{ij}^{(m)} = p_{ij}^{(m)} > 0.$$

Neka je ν invarijantna mjera za X. Tada postoji $k \in S$ takav da je $\nu_k > 0$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\nu_i > 0$. Definiramo novu invarijantnu mjeru ν sa $\nu_j = \frac{\nu_j}{\nu_i}$. Tada je $\nu_i = 1$, pa po propoziciji 2.4.5 slijedi $\nu \geq \mu$. Definiramo $\lambda = \nu - \mu$. Tada λ zadovoljava $\lambda = \lambda P$, $\lambda_j > 0$ za sve $j \in S$, te $\lambda_i = 0$. Neka je $p_{ji}^{(m)} > 0$. Slijedi

$$0 = \lambda_i = \sum_{k \in S} \lambda_k p_{ki}^{(m)} \geq \lambda_j p_{ji}^{(m)},$$

otkud $\lambda_j = 0, \forall j \in S$. Dakle, $\nu_j = \mu_j$, odnosno $\nu_j = c\mu_j$ za $c = \nu_i$. □

Napomena 2.4.7. *Uočite da iz teorema slijedi da ako je ν invarijantna mjera ireducibilnog i povratnog lanca X takva da je $\nu_i = 1$, tada je $\nu = \mu$.*

Teorem 2.4.8. *Neka je X ireducibilan Markovljev lanac s prijelaznom matricom P . Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) svako stanje je pozitivno povratno;

(ii) postoji pozitivno povratno stanje $i \in S$;

(iii) X ima stacionarnu distribuciju π .

Nadalje, ako vrijedi (iii), tada je $E_j\left(T_j\right) = \frac{1}{\pi_j}$ *za sve* $j \in S$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) je očito.
Tvrdnju (ii) $\Rightarrow$ (iii) smo dokazali u propoziciji 2.4.3.
Dokažimo (iii) $\Rightarrow$ (i). Prvo pokažimo da je lanac povratan. Pretpostavimo suprotno, to jest da su sva stanja prolazna. Tada za sve $j, k \in S$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} p_{jk}^{(n)} = 0$$

(vidi napomenu (1.5.5)) Za proizvoljan $k \in S$ imamo $\pi_k = \sum_{j\in S} \pi_j p_{jk}^{(n)}$, pa slijedi

$$\pi_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in S} \pi_j p_{jk}^{(n)} = \sum_{j\in S} \pi_j \left(\lim_{n\to\infty} p_{jk}^{(n)}\right) = 0,$$

gdje se zamjena limesa i sume opravdava Lebesgueovim teoremom o dominiranoj konvergenciji ($p_{jk}^{(n)} \leq 1$). Međutim, to je u kontradikciji s činjenicom da je $\sum_{j\in S} \pi_j = 1$. Prema tome, lanac je povratan. Specijalno, možemo definirati invarijantnu mjeru ν formulom (2.3) (za stanje $i \in S$).

Nadalje, budući da je $\sum_{j\in S} \pi_j = 1$, postoji $k \in S$ takav da je $\pi_k > 0$. Zbog ireducibilnosti, postoji $n \in N$ takav da je $p_{ki}^{(n)} > 0$. Zato je $\pi_i = \sum_{j\in S} \pi_j p_{ji}^{(n)} \geq \pi_k p_{ki}^{(n)} > 0$, te možemo definirati $\mu_j = \frac{\pi_j}{\pi_i}$. Tada je $\mu = \left(\mu_j : j \in S\right)$ invarijantna mjera takva da je $\mu_i = 1$. Prema teoremu 2.4.6 prema kojem vrijedi $\mu = \nu$. Zajedno sa jednadžbom (2.8) iz dokaza tog teorema, to daje

$$E_i\left(T_i\right) = \sum_{j\in S} \nu_j = \sum_{j\in S} \mu_j = \sum_{j\in S} \frac{\pi_j}{\pi_i} = \frac{1}{\pi_i} < \infty,$$

što dokazuje da je i pozitivno povratno.

U gornjem dokazu stanje $i \in S$ bilo je upravo ono za koje je definirana invarijantna mjera ν. Budući da je lanac X ireducibilan i povratan, stanje i možemo zamijeniti bilo kojim drugim stanjem j, te definirati novu invarijantnu mjeru ν^j. Ponavljanjem gornjeg dokaza za stanje $j \in S$ slijedi da je j pozitivno povratno, te vrijedi $E_j\left(T_j\right) = \frac{1}{\pi_j}$. □

Nadalje, želimo opisati što je moguće više skup invarijantnih mjera za dani operator prijenosa $T : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ koji smo definirali u poglavlju 3.3. Sljedeći dobro poznati rezultati daju nam prvi uvid u taj skup – pogledati npr. Toom [10], Toom i ostali autori [11]. Oni ne traže da vrijedi pretpostavka omeđenog šuma.

Propozicija 2.4.9. *Svaka konveksna kombinacija invarijantnih mjera je invarijantna mjera.*

Dokaz. Za svaki izbor koeficijenata $\lambda_i \in [0, 1]$, $i = 1, \ldots, n$ takvih da $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, konveksna kombinacija $\sum_i \lambda_i \mu_{inv,i}$ je, naravno, vjerojatnosna mjera ako su $\mu_{inv,i}$ invarijantne vjerojatnosne mjere. Štoviše, iz definicije od T možemo, u pogledu skupova cilindara, provjeriti da je T linearan u smislu da $T \sum_i \lambda_i \mu_{inv,i} = \sum_i \lambda_i T \mu_{inv,i} = \sum_i \lambda_i \mu_{inv,i}$. □

Definicija 2.4.10. *Niz $(\mu_n)_{n \in N}$ u $\mathcal{M}$ slabo konvergira prema $\mu \in \mathcal{M}$ ako konvergira na skupu cilindara, to jest ako $lim_{n \to \infty} \mu_n (C) = \mu (C)$ za sve skupove cilindara C.*
Invarijantne mjere se mogu konstruirati pomoću slabo konvergentnih nizova mjera.

Propozicija 2.4.11. *Svaki niz vjerojatnosnih mjera u $\mathcal{M}$ ima slabo konvergentni podniz.*

Dokaz. Skup C svih podskupova cilindara od X je prebrojiv jer je to prebrojiva unija, po svim konačnim podskupovima $A \subset \mathbb{Z}^d$, svih konačnih skupova

$$\{\{\omega \in X | \omega_x = \boldsymbol{a}_x, \forall x \in A\} | a_A \in S^A\}.$$

Dakle, skup svih funkcija iz C u $[0, 1]$ je kompaktan, po dijagonalnom argumentu. Kao posljedica toga, svaki niz vjerojatnosnih mjera ima podskup koji konvergira na svim skupovima cilindara. □

Propozicija 2.4.11 implicira sljedeći rezultat u vezi skupa invarijantnih mjera operatora prijenosa T.

Propozicija 2.4.12. *Postoji barem jedna invarijantna mjera.*

Dokaz. Za svaku početnu vjerojatnosnu mjeru $\mu_{in} \in \mathcal{M}$, Cesàro aritmetičke sredine niza $(T^t \mu_{in})_{t \in N}$ tvore niz

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k \mu_{in} \right)_{n \in N^*}.$$

Primjenom propozicije 2.4.11 na potonji niz, on dobiva slabo konvergentni podniz. Štoviše, korištenjem definicije od T u pogledu skupova cilindara, može se pokazati da je slabi limes podniza invarijantna vjerojatnosna mjera (vidi npr. Toom [10] (Teorem 7.1). □

Dakle, skup svih vjerojatnosnih mjera koje operator prijenosa T ostavlja invarijantnima je neprazan konveksni skup.

Ponekad, ili paralelno sa pretpostavkom omeđenog šuma ili samo za sebe, napravit ćemo slijedeću obrnutu pretpostavku. Neka je δ parametar iz $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Propozicija 2.4.13. *(Pretpostavka jakog šuma) Za sve $x \in Z^d$, $\omega \in X$ i $\xi_x \in S$, $p_x (\xi_x | \omega) \geq \delta$.*

Propozicija 2.4.14. *Postoji $\delta_c < \frac{1}{2}$, koji ovisi jedino o veličini susjedstva $\mathcal{U}$ koje ulazi u definiciju lokalnih prijelaznih vjerojatnosti, takav da sljedeća tvrdnja vrijedi za sve $\delta > \delta_c$. Ako vrijedi Pretpostavka jakog šuma, onda postoji samo jedva invarijantna mjera μ_{inv} . Štoviše, za svaku početnu vjerojatnosnu mjeru $\mu_{in} \in M$, niz $(T^t\mu_{in})_{t\in N}$ slabo konvergira prema μ_{inv} .*

To je standardni rezultat vezan uz režim slabog sparivanja, koji govori gdje interakcije između susjednih ćelija utječu slabo na njihova stanja. Originalno se priznaje Dobrushinu [2]. Toom [10] daje dokaz u kojem koristi grupiranje između procesa s početkom u dvije različite početne mjere i trećeg koji simulira filtriranje kroz prostorno-vremensku rešetku pogrešaka koje se događaju s vjerojatnošću barem δ i koje vode do progresivnog gubitka informacija o početnoj mjeri. Rezultat je ojačao Lebowitz i ostali [3], gdje je pokazao da μ_{inv} ima eksponencijalni raspad korelacija i da je konvergencija od $(T^t\mu_{in})_{t\in N}$ eksponencijalna.

Napomena 2.4.15. *Ovo svojstvo eksponencijalnog raspadanja korelacija u režimu jakog šuma VSA, tj. kada vrijedi pretpostavka jakog šuma uz $\delta > \delta_c$, to je analogon eksponencijalnom raspadu korelacija za jedinstvenu Gibbsovu mjeru u visoko-temperaturnim režimima modela ravnotežnih statističkih mehanika, kao na primjer model Ising. Općenito, dugoročno ponašanje VSA se često uspoređuje sa, posebno, svojstvima invarijantnih vjerojatnosnih mjera prema kojima procesi konvergiraju, sa Gibbsovom mjerom koja opisuje ravnotežna stanja u statističkoj fizici. U tim sustavima, interakcije između susjednih mjesta su kodirane u Hamiltonijani koja igra ulogu sličnu onoj funkcije ažuriranja SA. U toj usporedbi, intenzitet šuma u perturbaciji SA odgovara temperaturi u ravnotežnoj statističkoj fizici. Analogija pomoću jednog modela pomaže razumijeti drugi, i pretpostaviti ili čak dokazati rezultate o VSA bazirane na dobro razvijenoj teoriji ravnotežne statističke mehanike. Također, ima i neka ograničenja jer invarijantne mjere VSA nisu uvijek Gibbsove mjere. Raspravu o tome može se pronaći u recenziji po Lebowitzu i ostalima* [*3*].

Takav VSA, u režimu šuma gdje svi procesi konvergiraju istoj invarijantnoj mjeri, bez obzira na početno stanje, nema mjesta za ikakvo pamćenje prošlosti kad vrijeme ode u beskonačnost. Moglo bi nas zanimati da pronađemo uvijete za različita ponašanja, sa svojstvom da zauvijek očuvamo barem dio informacija iz prošlosti. To se može postići sistemima u kojima, za početnu mjeru μ_{in} niz $(T^t\mu_{in})_{t\in N}$ ne konvergira slabo jedinstvenoj vjerojatnosnoj mjeri. Također, to se može postići sistemima koji primaju više od jedne invarijantne mjere. Propozicija 2.4.14 ukazuje da bi šum morao biti mali da bi dopustio takvo ponašanje.

2.5 Teorem stabilnosti

Iako se u poglavlju 2.4 rezulati u vezi invarijantnih mjera ne pouzadju u pretpostavku omeđenog šuma, od sada nadalje ta će pretpostavka biti presudna. Zaista, kada vrijedi ima smisla promatrati VSA definiran u poglavlju 2.3 kao perturbaciju odgovarajućeg SA. Možemo se pitati u kojoj mjeri su stohastički procesi VSA povezani s putanjom SA.

Posebno, sljedeći uspješan pristup Andrea Tooma u [9], usporedit ćemo slučajni proces u $M_\varepsilon^{(0)}$ (odnosno $M_\varepsilon^{(1)}$) sa determinističkim procesom sa istim početnim uvjetom, ali gdje se mora slijediti pravilo ažuriranja, to jest sa putanjom $\underline{\omega}^{(0)}$ (to jest $\underline{\omega}^{(1)}$). Za putanju $\underline{\omega}^{(0)}$ sa stanjem 0 u svim točkama u prostoro-vremenu kažemo da je *stabilna* ako

$$lim_{\varepsilon\to 0} sup_{\underline{\mu}\in M_{\varepsilon 0}^{(0)} v\in V} \underline{\mu}\left(\underline{\omega} = 1\right) = 0 \tag{2.9}$$

Za putanju $\underline{\omega}^{(1)}$ definicija je analogna.

Teorem 2.5.1. (Toomov teorem stabilnosti) *Za svaki monotoni binarni SA, sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) *putanja $\underline{\omega}^{(0)}$ je stabilna;*

(ii) *putanja $\underline{\omega}^{(0)}$ je privlačna, tj. SA ima svojstvo erozije;*

(iii) *SA zadovoljava kriterij erozije.*

Ekvivalenciju tvrdnji (ii) i (iii) iskazali smo u teoremu 2.2.3.

Napomena 2.5.2. *Hipoteza o binarnom prostoru stanja S u teoremu 2.5.1 je esencijalna. Zaista, Toom* [*10*] *(problem 5.2) je dao primjer erodera sa $|S| = 3$ takav da $\underline{\omega}^{(0)}$ nije stabilna.*

Vratimo se na operator prijenosa $T : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$. Primijetili smo u poglavlju 2.3 da T zadovoljava pretpostavku omeđenog šuma, inducira stohastički proces koji pripada $M_\varepsilon^{(0)}$ kada se ponaša iterativno na inicijalnoj mjeri $\delta^{(0)}$. Njegova marginalna vjerojatnosna distribucija u fiksiranom vremenu koordinate $t \in N$, $T^t\delta^{(0)} \in \mathcal{M}$, nasljeđuje invarijance od T i $\delta^{(0)}$ pod translacijama u prostornoj rešetci $\mathbb{Z}^d$. Pretpostavimo sada da je monotoni binarni SA uključen u pretpostavku omeđenog šuma, tj. da SA čija stohastička perturbacija omeđenim šumom stvara operator T, zadovoljava kriterij erozije. Teorem 2.5.1 implicira stabilnost homogene putanje $\underline{\omega}^{(0)}$. Prema tome, korištenjem definicije (2.9) dobivamo

$$lim_{\varepsilon\to 0} sup_{t\in\mathbb{N}} T^t\delta^{(0)}\,(\omega_x = 1) = 0, \tag{2.10}$$

gdje je $T^t\delta^{(0)}\,(\omega_x = 1)$ konstantna funkcija parametra $x \in \mathbb{Z}^d$.

Sada, kao u poglavlju 2.4, možemo konstruirati invarijantnu mjeru koristeći Cesàro aritmetičku sredinu niza $\left(T^t\delta^{(0)}\right)_{t\in\mathbb{N}}$. Niz Cesàro aritmetičkih sredina ima barem jedan slabo konvergentni podniz. Izaberimo takav podniz i označimo njegov limes sa $\mu_{inv}^{(0)}$. Eksplicitno je dan sa

$$\mu_{inv}^{(0)}\,(C) = lim_{j\to\infty} \left(\frac{1}{n_j}\sum_{k=0}^{n_j-1} T^t\delta^{(0)}\,(C)\right) \textit{ za sve skupove cilindara } C, \tag{2.11}$$

Za određeni podniz $\left(n_j\right)_{j\in N}$ rastućih pozitivnih cijelih brojeva. Mjera $\mu_{inv}^{(0)}$ je invarijantna vjerojatnosna mjera, to jest $T\mu_{inv}^{(0)} = \mu_{inv}^{(0)}$ i, kao i mjere $T^t\delta^{(0)}$, $t \in \mathbb{N}$, invarijantna je pod translacijama u $\mathbb{Z}^d$. Jednadžba (2.10) implicira da je

$$lim_{\varepsilon\to 0}\mu_{inv}^{(0)}\,(\omega_x = 1) = 0, \tag{2.12}$$

gdje je $\mu_{inv}^{(0)}\,(\omega_x = 1)$ konstantna funkcija parametra $x \in \mathbb{Z}^d$.

Napomena 2.5.3. *Različiti izbori slabo konvergentnog podniza Cesàro aritmetičke sredine niza* $\left(T^t\delta^{(0)}\right)_{t\in N}$ *u definiciji* $\mu_{inv}^{(0)}$ *može rezultirati različitim invarijantnim mjerama. Sve one zadovoljavaju jednadžbu* (2.12)*. Štoviše, rezultati u vezi svojstava* $\mu_{inv}^{(0)}$ *u ovoj tezi vrijede bez obzira na taj izbor.*

2.6 Stavskaya model kao model faznog prijelaza

Uzmimo u obzir VSA dobiven perturbacijom monotonog binarnog SA sa svojstvom erozije. U režimu jakog šuma, tj. pod pretpostavkom jakog šuma sa $\delta > \delta_c$, u poglavlju 2.4 vidjeli smo da VSA prima jedinstvenu invarijantnu mjeru. S druge strane, pod pretpostavkom omeđenog šuma, Toomov teorem stabilnosti nam je pomogao u poglavlju 2.5 konstruirati invarijantnu mjeru $\mu_{inv}^{(0)}$ koja zadovoljava svojstvo (2.12). To svojstvo se bavi samo *režimom niskog šuma*, to jest malim vrijednostima od ε. Sada za mali ε takav da $\varepsilon < \delta_c$, ako vrijedi pretpostavka omeđenog šuma, pretpostavka jakog šuma sa $\delta > \delta_c$ ne može vrijediti u isto vrijeme. Možemo se pitati je li, u režimu niskog šuma VSA, $\mu_{inv}^{(0)}$ jedina invarijantna mjera ili ne.

Stavskaya SA s kojim smo se upoznali u poglavlju 2.2 ima, kao što smo već zaključili svojstvo erozije, pa ekvivalentno tome zadovoljava kriterij erozije. Prema tome, svaki VSA dobiven kao stohastička perturbacija tog SA pod pretpostavkom omeđenog šuma priznaje invarijantnu mjeru $\mu_{inv}^{(0)}$, definiranu u jednadžbi (2.11), koja zadovoljava jednadžbu (2.12).

Lokalne prijelazne vjerojatnosti za Stavskaya VSA se često izabiru tako da šum bude potpuno asimetrične: greške mogu pretvoriti samo stanje 0 u stanje 1, ali ne i stanje 1 u stanje 0. Preciznije, neka Stavskaya model nude VSA definiran lokalnim prijelaznim vjerojatnostima $p(1|1,1) = 1$ i $p(0|0,0) = p(0|0,1) = p(0|1,0) = 1 - \varepsilon$, gdje je $\varepsilon \in [0,1]$. Diracova mjera $\delta^{(1)}$ je tada uvijek invarijantna mjera. Propozicija 2.4.14 implicira da je to jedina invarijantna mjera u režimu jakog šuma. Ona duguje svoju stacionarnost potpunoj asimetričnosti grešaka. Stavskaya model prema tome prolazi *fazni prijelaz* u smislu da kontinuirana varijacija parametra šuma inducira kvalitativnu promjenu ponašanja. Zaista, jednadžba (2.12) nosi egzistenciju $\varepsilon_c > 0$ takvog da, za sve $\varepsilon < \varepsilon_c$ proces pima drugu invarijantnu mjeru $\mu_{inv}^{(0)}$. Zapravo, postoji beskonačan broj invarijantnih vjerojatnosnih mjera , pošto je svaka konveksna kombinacija od $\mu_{inv}^{(0)}$ i $\delta^{(1)}$ opet invarijantna vjerojatnosna mjera.

To je jedan od prvih VSA za koji je postojanje faznog prijelaza bilo rigorozno dokazano, prije generalnog dokaza teorema stabilnosti. Originalni dokaz je dao Shnirman [7]. Toom [8] je pak dao dokaz koristeći metodu kontura. Rezultati koje su dali Vaserstein i Leontovich [12] navode da za sve $\varepsilon < \varepsilon_c$, sve invarijantne vjerojatnosne mjere koje su homogene u prostoru su konveksne kombinacije od $\mu_{inv}^{(0)}$ i $\delta^{(1)}$, i da, za sve $\varepsilon > \varepsilon_c$, svi procesi s početkom u inicijalnoj mjeri konvergiraju prema $\delta^{(1)}$. Za taj model (kao i za neke druge) točna vrijednost od ε_c nije poznata, poznate su jedino gornje i donje granice i procjene dobivene kompjuterskim simulacijama. Toom [10] je dokazao da vrijedi $0.09 < \varepsilon_c < 0.323$ i Mendonça [4] procjenjuje da je $\varepsilon_c = 0.29450\,(5)$.

Bibliografija

[1] F. Baudoi. *Stohastic Calculus lectures: Lecture 5. The Daniell-Kolmogorov existence theorem*. https://fabricebaudoin.wordpress.com/2012/03/25/lecture-5-the-daniell-kolmogorov-existence-theorem/ (studeni 2016.).

[2] R. Dobrushin. *Markov processes with a large number of locally interacting components: existence of a limit process and its ergodicity*. Problems of Information Transmission, 7(1971), 149-164.

[3] J. Lebowitz, C. Maes and E. Speer. *Statistical mechanics of probabilistic cellular automata*. Journal of Statistical Physics, 59(1990), 117-170.

[4] J. Mendonça. *Monte Carlo investigation of the critical behavior of Stavskaya's probabilistic cellular automaton*. Physical Review E, 83(2011), 012102.

[5] J. R. Norris. *Markov chains*. Cambridge university press, Cambridge, 1997.

[6] L. Ponslet. *Phase transitions in probabilistic cellular automata*. Université catholique de Louvain, Faculté des sciences, septembre 2013.

[7] M. Shnirman. *O problemu ergodije Markovljevog lanaca s beskonačnim nizom stanja*. Probl. Kibern., 20(1968), 115-124 (na ruskom).

[8] A. Toom. *A family of uniform nets of formal neurons*. Soviet Mathematics Doklady, 9(1968), 1338-1341.

[9] A. Toom. *Stable and attractive trajectories in multicomponent systems*. Adv. Probab. Relat. Top. (R. Dobrushin, V, Kryukov and A. Toom), Dekker., New York, 1980, 549-575.

[10] A. Toom. *Ergodicity of cellular automata*. Notes for a course delivered at Tartu University, Estonia, 2013.

[11] A. Toom, N. Vasilyev, O. Stavskaya, L. Mityushin, G. Kurdyumov and S. Pirogov. *Discrete local Markov systems*. Stohastic cellular systems: ergodicity, memory, morphogenesis (R. Dobrushin, V. Kryukov and A. Toom), Manchester University Press, Manchester, 1990.

[12] L. Vaserstein and A. Leontovich. *Invariant measures of certain Markov operators describing a homogeneous random medium*. Probl. Inf. Transm., 6(1970), 61-69.

[13] Z. Vondraček. *Skripta s predavanja: Markovljevi lanci*. Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odjel, 2012/2013.

[14] R. Webber et. al.. *Lecture notes: Markov chains*. University of Cambridge, Cambridge, October 2011.

Sažetak

U prvom poglavlju ovog rada uveli smo bitne pojmove iz Markovljevih lanaca.

U drugom poglavlju smo pratili Stavskaya model, jednodimenzionalni vjerojatnosni stanični automat kao primjer modela interakcije čestica koji predstavlja neravnotežni fazni prijelaz. Vidjeli smo da takav model zadovoljava kriterij erozije. Definirali smo σ - algebru pomoću „cilindara". Uveli smo pojam invarijantne mjere i opisali ju. Pokazali smo da Stavskaya model zaista prolazi fazni prijelaz u smislu da kontinuirana varijacija parametra šuma inducira kvalitativnu promjenu ponašanja. Na kraju smo dali procjenu vrijednosti tog šuma.

Summary

In the first chapter of this work we have introduced important concepts of Markov chains.

In the second chapter we followed Stavskaya model, a one-dimensional probabilistic cellular automaton as an example of the model of interaction of particles that represents the non-equilibrium phase transition. We have seen that this model meets the criterion of erosion. We defined σ - algebra using „cylinders". We introduced the concept of invariant measure and described it. We have shown that Stavskaya model really undergoes a phase transition in the sense that the continuous variation of the parameter noise induces qualitative behavior change. Finally, we gave the assessment of the value of that noise parameter.

Životopis

Rođena sam 18. listopada 1991. godine u Čakovcu, no prije prve navršene godine života sam se preselila u Zagreb. Nakon završene osnovne škole, 2006. godine u Zagrebu upisujem X. gimnaziju („Ivan Supek“). Godine 2010. upisujem se na Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek u Zagrebu na smjer Matematika (nastavnički). 2013. godine na istom fakultetu upisujem Diplomski studij Matematička statistika.