Efikasnost društvenih mehanizama

Juranov, Ivana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Juranov

EFIKASNOST DRUŠTVENIH MEHANIZAMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Lavoslav Čaklović

Zagreb, studeni, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem mentoru doc. dr. sc. Lavoslavu Čakloviću na velikom trudu, pomoći i vodstvu.
Također puno hvala mojoj obitelji i prijateljima na neizmjernoj podršci i potpori kroz ovih pet godina.

Sadržaj

Uvod

Pretpostavimo da želite prodati svoju kuću i da je vaš trgovac nekretninama pronašao nekoliko potencijalnih kupaca koji su voljni platiti traženu cijenu. Možda onda želite provesti aukciju među ovim kupcima kako biste postigli višu cijenu. Postoje mnogi oblici aukcija koje možete koristiti. Na primjer, svakom kupcu se može reći da pošalje jednu ponudu i konačnu ponudu. Alternativno, kupci se mogu natjecati u nekoliko rundi, i u svakoj rundi su svi informirani o najvećoj ponudi protekle runde, te su onda upitani da izmijene svoje ponude. Također, možete koristiti neke kombinacije ovih formata. Kako ćete izabrati među drukčijim formatima aukcija? Ovo je jedno od pitanja na koje teorija društevih mehanizama nastoji odgovoriti.

Sad zamislite da vi i vaše kolege razmišljate o kupnji novog hladnjaka kojeg biste držali na poslu, a u kojeg možete spremiti hranu koju donosite od kuće. Iako svi imaju korist od toga, nije jasno koliko je hladnjak vrijedan različitim ljudima. Kako možete saznati da li zbroj iznosa koji bi svaki pojedinac najviše bio voljan pridonijeti pokriva trošak hladnjaka? Mogli biste pitati svakoga da preda zalog simultano, i onda vidjeti da li suma zaloga pokriva trošak. Alternativno, mogli biste reći svakom kolegi koliko su svi ostali dotad založili. Ili možete podijeliti trošak s brojem uključenih kolega te reći da ćete kupiti hladnjak jedino ako su svi voljni platiti svoj dio. Koja od ovih procedura je najbolja? Ovo je opet jedno od pitanja kojima se bavi teorija društvenih mehanizama.

Svaka od procedura koju biste mogli razmotriti u prijašnja dva primjera stvara stratešku igru u smislu nekooperativne teorije igara među sudionicima. Sudionici u ovim procedurama će shvatiti da ishod ne ovisi samo o njihovim vlastitim izborima, već također i o izborima ostalih, te da stoga njihova optimalna strategija može ovisiti o tuđim strategijama. Drugim riječima, sudionici u ovim procedurama će shvatiti da igraju nekooperativnu igru. Teorija društvenih mehanizama se stoga gradi na teoriji igara. Teorija igara uzima pravila igre kao dana te stvara predviđanja o ponašanju strateških igrača. Teorija društvenih mehanizama se bavi optimalnim izborima za pravila igre.

Češće smo uključeni u dizajn pravila igre nego što to može biti očito na prvi pogled. Kako bi se trebali sprovesti glasovi dioničara? Kako bi se trebale organizirati procedure promocije u kompanijama? Koji je optimalan predbračni ugovor? Sva ova pitanja su o optimalnim pravilima igre. Teorija društvenih mehanizama nastoji proučavati opću strukturu svih ovih primjena te također razmatra nekolicinu posebno istaknutih primjena u detalje.

Poticaji koji nastaju kao rezultat izbora pravila igre nalaze se u središtu pozornosti teorije društvenih mehanizama. Poticaji su također u centru teorije ugovora. Na prvi pogled, razlika između teorije društvenih mehanizama i teorije ugovora je jednostavna: U teoriji ugovora proučavamo optimalan dizajn poticaja za jednog igrača, dok u društvenim mehanizmima to činimo za grupu igrača, kao primjerice za kupce u prvom te kolege u drugom primjeru. Teorija ugovora se stoga, za razliku od teorije društvenih mehanizama, ne treba baviti strateškim interakcijama.

Veza između ove dvije teorije je, pak, više suptilna. Jedan dio teorije društvenih mehanizama je ustvari jednostavno proširenje spoznaja iz teorije ugovora.

Teorija ugovora je tradicionalno podijeljena u dva dijela: teorija skrivenih informacija i teorija skrivenih akcija. Razlika se može jednostavno objasniti unutar konteksta police zdravstvenog osiguranja. Jeste li iskusili ozbiljnu bol u prsima u prošlosti je nešto što vi znate, ali osiguravajuća kuća ne zna. Dakle, to je skrivena informacija. Bilo da vježbate redovito, ili malo manje redovito, jednom kad ste kupili potpuno osiguranje za operaciju srca, je odluka koju donosite, a za koju vaša osiguravajuća kuća ne zna. To je skrivena akcija.

Društveni mehanizmi, tradicionalno shvaćeni, su o skrivenim informacijama, a ne o skrivenim akcijama, s višestrukim igračima. U našem prvom primjeru, skrivena informacija koju prodavatelj kuće želi saznati je prava voljnost kupaca za plaćanjem kuće. U drugom primjeru, skrivena informacija koju želimo otkriti je spremnost kolega za plaćanjem uredskog hladnjaka.

Vratimo se opet na pravila igre. Pretpostavimo da smo razmotrili sva moguća pravila kako bismo mogli nastaviti s prodajom kuće te da smo došli do zaključka da je aukcija sa samo jednom rundom nadmetanja optimalna. Nakon što je najviša ponuda obzanjena, jedan od ponuđača koji je izgubio prilazi vam s novom i boljom ponudom od one najveće na aukciji. Hoćete li prihvatiti? Ovo je očito iskušenje, ali ako prihvatite kasnije ponude, provodite li zaista aukciju s jednom rundom? Mi ovdje pretpostavljamo da dizajner mehanizama ima potpunu obvezujuću moć. Pravila, jednom postavljena, se više ne mogu promijeniti. Stoga će, u našem primjeru, dizajner mehanizama potpuno odbiti daljnja pregovaranja jednom kad su obzanjeni rezultati aukcije.

Poglavlje 1

Teorija probira

Važan dio teorije društvenih mehanizama su proširenja teorije probira na više igrača.

1.1 Određivanje cijene jednog nedjeljivog dobra

Razmotrimo sljedeću situaciju: Prodavatelj nastoji prodati jedno nedjeljivo dobro. On sam ne pridaje nikakvu vrijednost dobru, već je njegov cilj maksimizirati očekivani prihod od prodaje. On je, stoga, neutralan na rizik.

Postoji samo jedan potencijalni kupac. Kupčeva von Neumann-Morgensternova korisnost ako kupi dobro i plati iznos t prodavatelju je: $\theta - t$. Korisnost ako ne kupi dobro jednaka je nuli. Ovdje je $\theta \geq 0$ broj koji možemo interpretirati kao kupčevu procjenu vrijednosti dobra, zato što naše pretpostavke impliciraju da je kupac indiferentan između plaćanja θ i dobivanja dobra, te ne dobivanja dobra.

Dva aspekta pretpostavki o kupčevoj korisnosti zaslužuju isticanje. Prvo, pretpostavili smo da je kupčeva korisnost zbroj korisnosti izvedene iz dobra, ako je kupljeno, i negativne korisnosti koja proizlazi iz plaćanja tog dobra. Općenitija formulacija bi pisala korisnost kao $u(I, t)$, gdje je I indikatorska varijabla koja je 1 u slučaju kupnje dobra,a 0 inače. Naša pretpostavka da u možemo pisati kao zbroj θ i $-t$ je obično opisana kao pretpostavka da je korisnost *aditivno separabilna*. Aditivna separabilnost funkcije korisnosti implicira da je kupčeva korisnost konzumiranja dobra nezavisna od iznosa novca koji plaća za to dobro, te da je kupčeva negativna korisnost od plaćanja nezavisna od toga posjeduje li, ili ne, to dobro.

Drugo, pretpostavili smo da je kupac neutralan na rizik u odnosu na novac, tj. da je njegova korisnost linearna u novcu. Poput aditivne separabilnosti, ovo je vrlo restriktivna pretpostavka, ali većina klasične teorije društvenih mehanizama je zadovoljava. Funkcije korisnosti koje zadovoljavaju aditivnu separabilnost i linearnost u novcu nazivaju se *kvazi linearne* funkcije korisnosti.

Sad predstavljamo presudnu pretpostavku o informacijama, a to je da je vrijednost θ poznata kupcu, ali ne i prodavatelju. Dalje ćemo θ predstavljati kao kupčev *tip*.

Kao što se često radi u ekonomskoj teoriji, pretpostavit ćemo da prodavatelj ima subjektivnu vjerojatnosnu distribuciju o mogućim vrijednostima θ. Ova vjerojatnosna distribucija može biti opisana kumulativnom funkcijom distribucije F. Pretpostavljamo da F ima gustoću f. Štoviše, pretpostavljamo da je nosač od F, odnosno najmanji zatvoreni skup koji ima vjerojatnost 1, interval $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$, gdje je $0 \leq \underline{\theta} < \overline{\theta}$. Zbog tehničke praktičnosti pretpostavljamo da je gustoća stogo pozitivna na nosaču: $f(\theta) > 0, \ \forall\ \theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$. Sada o θ možemo razmišljati kao o slučajnoj varijabli s kumulativnom funkcijom distribucije F, čija je realizacija opažena od strane kupca, ali ne od strane prodavatelja.

Naš interes je u postupcima prodaje dobra koje bi prodavatelj trebao prisvojiti kako bi maksimizirao očekivani profit. Jedan očiti način bio bi izabrati cijenu p i reći kupcu da može imati dobro ako i samo ako je voljan platiti iznos p. Ovo je postupak prodaje kojeg promatramo u elementarnoj mikroekonomiji. Pretpostavimo da prodavatelj odabere ovu proceduru. Koju cijenu p treba odabrati? Vjerojatnost da je kupčeva vrijednost ispod p je dana vrijednošću funkcije distribucije $F(p)$. Vjerojatnost da je kupčeva vrijednost iznad p i da stoga prihvaća ponuđenu cijenu p je $1 - F(p)$. Očekivani prihod je onda $p(1 - F(p))$, a optimalna strategija za prodavatelja je izabrati cijenu p koja maksimizira $p(1 - F(p))$.

U ovom vrlo jednostavnom kontekstu sad se trebamo zapitati: "Je li odabir cijene p stvarno najbolje što prodavatelj može napraviti?" Što on još može napraviti? Mogao bi, na primjer, pregovarati s kupcem. Mogao bi mu ponuditi lutriju u kojoj bi za veće ili manje uplate kupac dobio veću ili manju šansu da dobije objekt. Možemo još smisliti mnogo različitih postupaka koje prodavatelj može usvojiti za prodaju dobra. Je li postavljanje cijene stvarno najbolji postupak?

Kako bismo naše pitanje još više precizirali, moramo biti specifični oko toga na koje se procedure prodavatelj može obvezati. Pretpostavit ćemo da prodavatelj ima neograničene ovlasti obveze.

Prodavatelj će također saznati da je u njegovom interesu, ili barem ne protiv njegova interesa, da se obveže na neku strategiju i tu strategiju najavi kupcu prije nego igra počne. Jednom kad se on obvezao na igru i strategiju, kupac će odabrati vlastitu strategiju. Pretpostavljamo da kupac odabire strategiju, poznavajući vrijednost θ, kako bi maksimizirao očekivanu korisnost. Kupac je suočen s problemom odluke jedne osobe.

Mi ćemo isključiti one mehanizme koji nisu u interesu kupca, odnosno, za svaki tip θ, kupac će morati znati da, kad odabere strategiju koja maksimizira njegovu očekivanu korisnost, ona će biti najmanje nula. Ovo ograničenje ćemo zvati ograničenje *individualne racionalnosti*.

Naš cilj je, stoga, proučiti problem optimizacije u kojem su varijable prodavateljeva izbora ekstenzivna igra i strategija u toj igri te u kojem je prodavateljeva funkcija cilja očekivani prihod. Ograničenje na prodavateljev izbor je ograničenje individualne racionalnosti, a kupac će, unutar prilika koje nudi igra, odabrati strategiju koja maksimizira očekivanu korisnost.

Na prvi pogled, ovo izgleda kao težak problem budući da je skup prodavateljevih izbora jako velik. Postoje mnoge ekstenzivne igre koje bi prodavatelj uzeo u obzir. Međutim, jednostavan, a presudan rezultat omogućava nam da razumijemo ovaj optimizacijski problem. Rezultat kaže da možemo ograničiti našu pažnju, bez smanjenja općenitosti, na mali podskup mehanizama, takozvane *direktne mehanizme*.

Definicija 1.1.1. *Direktni mehanizam se sastoji od funkcija q i t takvih da:*

$$q : [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \to [0, 1]$$

i

$$t : [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \to \mathbb{R}.$$

Interpretacija je ta da je u direktnom mehanizmu kupac upitan da prijavi θ. Prodavatelj se obvezuje na transfer dobra kupcu s vjerojatnošću $q(\theta)$ ako kupac prijavi da je njegov tip θ i kupac mora platiti prodavatelju $t(\theta)$ ako prijavi da je njegov tip θ. Primjetite da je isplata deterministička. Nije uvjetovano na događaj da kupac dobije dobro. Ne bi bilo razlike ni da smo dopustili da isplata bude slučajna. Sva naša analiza dolje bi prošla da smo interpretirali $t(\theta)$ kao kupčevu očekivanu uplatu uvjetno na θ. Svi mehanizmi prodaje koji nisu direktni mehanizmi zovu se *indirektni mehanizmi*.

Kupčeva strategija σ u direktnom mehanizmu je preslikavanje $\sigma : [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \to [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ takvo da za svaki pravi tip θ kupac možda ima tip $\sigma(\theta)$ koji prijavi prodavatelju.

Sljedeći rezultat, vrlo jednostavna verzija slavnog *Principa objave*, pokazuje da bez smanjenja općenitosti možemo ograničiti našu pažnju na direktne mehanizme.

Propozicija 1.1.2 (Princip objave)**.** [1]

Za svaki mehanizam Γ i za svaku optimalnu strategiju kupca σ u Γ postoji direktni mehanizam Γ' i optimalna strategija kupca σ' u Γ' takva da:

(i) *Strategija σ' zadovoljava*

$$\sigma'(\theta) = \theta, \ za \ \forall \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}],$$

tj. σ podrazumijeva govorenje istine.

(ii) *Za svaki $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ vjerojatnost $q(\theta)$ i isplata $t(\theta)$ pod Γ' ekvivalentni su vjerojatnosti kupnje i očekivanoj isplati pod Γ ako kupac odigra svoju optimalnu strategiju σ.*

[1]eng. Revelation Principle

Dokaz. Za svaki $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ definiramo $q(\theta)$ i $t(\theta)$ kao u (ii). Dokazat ćemo rezultat tako što ćemo pokazati da je za ovaj direktni mehanizam strategija $\sigma'(\theta) = \theta$, odnosno iskreno izvještavanje svog tipa, optimalna za kupca. Primjetite da pod ovom strategijom, za svaki θ, kupac s tipom θ dobije u mehanizmu Γ' istu očekivanu korisnost kao u mehanizmu Γ kad odabire strategiju $\sigma(\theta)$. Štoviše, ako bi prijavio da je njegov tip $\theta' \neq \theta$, kupac dobiva istu očekivanu korisnost koju bi dobio da je odigrao optimalnu strategiju tipa θ', koja je $\sigma(\theta')$, u Γ. Optimalnost iskrenog izvještavanja θ u Γ' onda slijedi direktno iz optimalnosti $\sigma(\theta)$ u Γ. □

Princip objave omogućava nam da veoma pojednostavnimo svoju analizu zato što pokazuje da bez smanjenja općenitosti možemo ograničiti našu potragu za optimalnim mehanizmom na direktne mehanizme, odnosno parove funkcija q i t, gje je kupcu uvijek optimalno iskreno izvijestiti svoj tip.

Ako imamo direktni mehanizam, možemo definirati kupčevu očekivanu korisnost $u(\theta)$ uvjetno na njegov tip θ kao: $u(\theta) = \theta q(\theta) - t(\theta)$. Koristeći ovu notaciju, sad možemo formalno definirati uvjet da je kupcu uvijek optimalno iskreno izvijestiti svoj tip.

Definicija 1.1.3. *Direktni mehanizam je poticajno kompatibilan*[2] *ako je govorenje istine optimalno za svaki tip* $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$, *odnosno*

$$u(\theta) \geq \theta q(\theta') - t(\theta'), \ \textit{za sve } \theta, \theta' \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}] .$$

Prije smo spomenuli da također ima smisla zahtijevati da kupčeva očekivana korisnost od mehanizma nije manja od neke donje granice, npr. nula. Ovaj zahtjev je sadržan u sljedećoj definiciji.

Definicija 1.1.4. *Direktni mehanizam je individualno racionalan*[3] *ako je kupac, uvjetno na svoj tip, voljan sudjelovati, odnosno*

$$u(\theta) \geq 0, \ \textit{za sve } \theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}] .$$

Primjetimo da u ovoj definiciji zahtijevamo dobrovoljno sudjelovanje *nakon što je kupac saznao svoj tip*. Slabiji zahtjev bio bi dobrovoljno sudjelovanje *prije nego što je kupac saznao svoj tip*.

Sada ćemo u više detalja razmotriti uvjete pod kojima je direktni mehanizam poticajno kompatibilan.

Lema 1.1.5. *Ako je direktni mehanizam poticajno kompatibilan, onda je q rastuća u θ.*

[2]eng. incentive compatible
[3]eng. individually rational

Dokaz. Uzmimo dva tipa: θ i θ' takve da $\theta > \theta'$. Poticajna kompatibilnost zahtijeva:

$$\theta q(\theta) - t(\theta) \geq \theta q(\theta') - t(\theta')$$

$$\theta' q(\theta) - t(\theta) \leq \theta' q(\theta') - t(\theta')$$

Oduzimajući ove dvije nejednakosti dobijemo:

$$(\theta - \theta')q(\theta) \geq (\theta - \theta')q(\theta') \iff q(\theta) \geq q(\theta')$$

□

Lema 1.1.6. *Ako je direktni mehanizam poticajno kompatibilan, onda je u rastuća. Ona je također konveksna, i stoga diferencijabilna osim u najviše prebrojivo mnogo točaka. Za sve θ za koje je diferencijabilna, zadovoljava:*

$$u'(\theta) = q(\theta).$$

Dokaz. Poticajna kompatibilnost znači da za sve θ:

$$u(\theta) = \max_{\theta' \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]} (\theta q(\theta') - t(\theta'))$$

Za svaku vrijednost od θ', $\theta q(\theta') - t(\theta')$ je rastuća i afina (i stoga konveksna) funkcija od θ. Maksimum rastućih funkcija je rastuć i maksimum konveksih funkcija je konveksan. Stoga je u rastuća i konveksna. Konveksne funkcije nisu diferencijabilne u najviše prebrojivo mnogo točaka. Uzmimo bilo koji θ za koji je u diferencijabilna. Neka je $\delta > 0$. Tada, po poticajnoj kompatibilnosti:

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{u(\theta + \delta) - u(\theta)}{\delta} \geq \lim_{\delta \to 0} \frac{((\theta + \delta)q(\theta) - t(\theta)) - (\theta q(\theta) - t(\theta))}{\delta} = q(\theta)$$

Slično:

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{u(\theta) - u(\theta - \delta)}{\delta} \leq \lim_{\delta \to 0} \frac{(\theta q(\theta) - t(\theta)) - ((\theta - \delta)q(\theta) - t(\theta))}{\delta} = q(\theta)$$

Uzimajući ove dvije nejednakosti zajedno dobijemo $u'(\theta) = q(\theta)$ kad god je u diferencijabilna. □

Sljedeća lema je u suštini implikacija Leme 1.1.6 i osnovnog teorema integralnog računa. U dokazu vodimo računa o mogućem nedostatku diferencijabilnosti od u u nekim točkama.

Lema 1.1.7 (Jednakost isplata)**.** [4]

Promatrajmo poticajno kompatibilan direktni mehanizam. Tada za sve $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ *:*

$$u(\theta) = u(\underline{\theta}) + \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx$$

Dokaz. Činjenica da je u konveksna, po Korolaru 17 Poglavlja 6 u [4], povlači da je apsolutno neprekidna. To onda, po Teoremu 10 Poglavlja 6 u [4], povlači da je integral svoje derivacije. □

Lema 1.1.7 pokazuje da su očekivane korisnosti kupčevih različitih tipova opisane s funkcijom q i s očekivanom korisnošću najnižeg tipa, $u(\underline{\theta})$. Bilo koja dva indirektna mehanizma koja, jednom kad kupac optimizira, uzrokuju isti q i $u(\underline{\theta})$, impliciraju jednaku očekivanu isplatu za sve kupčeve tipove. Dakle, dobili smo jednakost isplata za klase indirektnih mehanizama.

Kratko računanje pretvara Lemu 1.1.7 u rezultat o transfernim isplatama koje kupac plaća prodavatelju. Ovo je pokazano u sljedećoj lemi.

Lema 1.1.8 (Jednakost prihoda)**.** [5]

Promatrajmo poticajno kompatibilan direktni mehanizam. Tada za sve $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ *:*

$$t(\theta) = t(\underline{\theta}) + (\theta q(\theta) - \underline{\theta} q(\underline{\theta})) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx$$

Dokaz. Podsjetimo se da je $u(\theta) = \theta q(\theta) - t(\theta)$. Uvrštavajući ovo u formulu iz Leme 1.1.7 i rješavajući po $t(\theta)$ dobijamo rezultat. □

Lema 1.1.8 pokazuje da su očekivane isplate kupčevih različitih tipova opisane s funkcijom q i s očekivanom isplatom najnižeg tipa, $t(\underline{\theta})$. Za bilo koji q i $t(\underline{\theta})$ postoji jedan i samo jedan poticajno kompatibilan direktni mehanizam. Bilo koja dva indirektna mehanizma koja, jednom kad kupac optimizira, uzrokuju isti q i $t(\underline{\theta})$, impliciraju jednaku očekivanu isplatu za sve kupčeve tipove. Za prodavatelja slijedi da bilo koja dva takva indirektna mehanizma imaju jednak očekivani prihod zato što je očekivani prihod prodavatelja očekivana vrijednost kupčevih očekivanih isplata, gdje prodavatelj uzima očekivane vrijednosti preko kupčevih tipova. Mi smo, stoga, indirektno pokazali jednakost prihoda za klase indirektnih mehanizama.

Leme 1.1.5 i 1.1.8 daju nužne uvjete da direktni mehanizmi budu poticajno kompatibilni. Ispostavlja se da su ovi uvjeti također i dovoljni.

[4] eng. Payoff Equivalence

[5] eng. Revenue Equivalence

Propozicija 1.1.9. *Direktni mehanizam (q, t) je poticajno kompatibilan ako i samo ako:*

(i) q je rastuća

(ii) Za svaki $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$:

$$t(\theta) = t(\underline{\theta}) + (\theta q(\theta) - \underline{\theta} q(\underline{\theta})) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x) dx$$

Dokaz. Kako bismo dokazali dovoljnost moramo pokazati da vrijedi $u(\theta) \geq \theta q(\theta') - t(\theta')$ ako su zadovoljeni uvjeti (i) i (ii).

$$\begin{aligned} u(\theta) \geq \theta q(\theta') - t(\theta') &\Leftrightarrow u(\theta) \geq \theta q(\theta') - \theta' q(\theta') + \theta' q(\theta') - t(\theta') \\ &\Leftrightarrow u(\theta) \geq \theta q(\theta') - \theta' q(\theta') + u(\theta') \\ &\Leftrightarrow u(\theta) - u(\theta') \geq (\theta - \theta') q(\theta') \\ &\Leftrightarrow \int_{\theta'}^{\theta} q(x) dx \geq \int_{\theta'}^{\theta} q(\theta') dx \end{aligned}$$

Promatramo dva integrala u posljednjoj nejednakosti. Pretpostavimo prvo da je $\theta > \theta'$. Ova dva integrala imaju jednake granice integracije i funkcija $q(x)$ je svugdje najmanje toliko velika kao konstanta $q(\theta')$ jer je q rastuća. Stoga je integral na lijevoj strani veći ili jednak integralu na desnoj. Ako je $\theta < \theta'$, argument je analogan. □

Sada smo dobili potpunu karakterizaciju svih poticajno kompatibilnih direktnih mehanizama. U nastavku se osvrćemo na individualnu racionalnost.

Propozicija 1.1.10. *Poticajno kompatibilan direktni mehanizam je individualno racionalan ako i samo ako $u(\underline{\theta}) \geq 0$. (Ili ekvivalentno: $t(\underline{\theta}) \leq \underline{\theta} q(\underline{\theta})$))*

Dokaz. Po Lemi 1.1.6 u je rastuća u θ za sve poticajno kompatibilne mehanizme. Stoga je $u(\theta)$ nenegativna za sve θ ako i samo ako je nenegativna za najmanji θ. □

Sada smo potpuno okarakterizirali skup svih direktnih mehanizama iz kojeg prodavatelj može odabrati. Okrećemo se prodavateljevu problemu izbora mehanizma iz ovog skupa koji maksimizira očekivani prihod. Krećemo s opažanjem da je za prodavatelja optimalno da postavi isplatu najnižeg tipa tako da je očekivana korisnost tog tipa jednaka nuli.

Lema 1.1.11. *Ako poticajno kompatibilan i individualno racionalan direktni mehanizam maksimizira očekivani prihod prodavatelja, onda*

$$t(\underline{\theta}) = \underline{\theta} q(\underline{\theta}).$$

Dokaz. Po Propoziciji 1.1.10 moramo imati: $t(\underline{\theta}) \leq \underline{\theta}q(\underline{\theta})$. Ako $t(\underline{\theta}) < \underline{\theta}q(\underline{\theta})$, onda bi prodavatelj mogao povećati očekivani prihod odabirom direktnog mehanizma s istom q, ali s većim $t(\underline{\theta})$. Po formuli za isplate u Propoziciji 1.1.9, isplate svih tipova bi se povećale. □

Koristeći Lemu 1.1.11, sad možemo dalje pojednostavniti prodavateljev skup izbora. Prodavateljev skup izbora je skup svih rastućih funkcija $q : [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \to [0,1]$. Imajući bilo koju takvu funkciju, prodavatelj će optimalno postaviti $t(\underline{\theta}) = \underline{\theta}q(\underline{\theta})$ tako da najniži tip ima nultu očekivanu korisnost, a isplate svih ostalih tipova budu određene formulom iz Propozicije 1.1.9. Supstituirajući isplatu najnižeg tipa, ova formula postaje:

$$t(\theta) = \theta q(\theta) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx, \tag{1.1}$$

tj. tip θ plaća svoju očekivanu korisnost iz dobra, $\theta q(\theta)$, minus izraz koji reflektira višak koji prodavatelj mora odobriti kupcu kako bi mu pružio poticaje da iskreno otkrije svoj tip. Ovaj izraz se također zove i kupčeva $informacijaska\ renta$.

Za određivanje optimalne funkcije q mogli bismo koristiti jednadžbu (1.1) kako bismo dobili eksplicitnu formulu prodavateljeva očekivanog prihoda za bilo koju danu funkciju q.

Počinjemo detaljnijim razmatranjem skupa funkcija q iz kojeg prodavatelj može izabrati. Ovaj skup je podskup skupa svih ograničenih funkcija $f : [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \to \mathbb{R}$. Taj veći skup označavamo sa $\mathcal{F}$. Dodjeljujemo $\mathcal{F}$ linearnu strukturu:

$$g = \alpha f \iff [g(x) = \alpha f(x),\ \forall\ x \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]\ ],\ za\ sve\ \alpha \in \mathbb{R},\ f, g \in \mathcal{F}$$

$$h = f + g \iff [h(x) = f(x) + g(x),\ \forall\ x \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]\ ],\ za\ sve\ f, g, h \in \mathcal{F}$$

Ovo čini $\mathcal{F}$ vektorskim prostorom. Također dajemo $\mathcal{F}$ i L^1-normu, odnosno norma bilo koje funkcije $f \in \mathcal{F}$ je $\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} |f| d\mu$, gdje je μ Lebesgueova mjera. Tako dajemo $\mathcal{F}$ i metriku induciranu ovom normom.

Označavamo sa $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ skup svih rastućih funkcija u $\mathcal{F}$ takvih da $f(x) \in [0,1]$, $\forall\ x \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$. Ovo je skup iz kojeg prodavatelj bira. Sada imamo jednostavno, a presudno zapažanje o $\mathcal{M}$.

Lema 1.1.12. *$\mathcal{M}$ je kompaktan i konveksan skup.*

Konveksnost je očita jer je konveksna kombinacija dviju rastućih funkcija rastuća. Kompaktnost je implikacija Hellyjevog teorema izbora i teorema ograničene konvergencije Lebesgueove integracije. Izostavljamo detalje.

Nadalje, imamo bolji uvid u prodavateljevu funkciju cilja, koja je očekivana vrijednost desne strane u (1.1). Jednostavno opažanje koje trebamo jest da je ova funkcija cilja neprekidna i linearna u q. Iz (1.1) vidimo da ako pomnožimo q s konstantom α, onda je $t(\theta)$

pomnožen s α za sve θ. Stoga je očekivana vrijednost od $t(\theta)$ također pomnožena s α i očekivani prihod je linearna funkcija od q.

Prema tome, vidimo da prodavatelj maksimizira neprekidnu linearnu funkciju na kompaktnom i konveksnom skupu. Fundamentalan teorem realne analize pruža uvjete pod kojima maksimumi linearne funkcije na konveksnom skupu uključuju *krajnje točke* tog skupa. Prvo nudimo definiciju krajnjih točaka konveksnog skupa.

Definicija 1.1.13. *Ako je C konveksan podskup vektorskog prostora X, onda je $x \in C$ krajnja točka od C ako za svaki $y \in X$, $y \neq 0$ vrijedi: $x + y \notin C$ ili $x - y \notin C$ ili oboje.*

Sada možemo iskazati rezultat koji ćemo koristiti za proučavanje prodavateljeva optimalnog mehanizma. Zove se *Teorem krajnje točke*.

Propozicija 1.1.14. *Neka je X kompaktan, konveksan podskup normiranog vektorskog prostora, i neka je $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidna linearna funkcija. Tada je skup E krajnjih točaka od X neprazan, i postoji $e \in E$ takva da*

$$f(e) \geq f(x), \text{ za sve } x \in X.$$

Ovaj rezultat implicira da funkcija q, koja je krajnja točka od $\mathcal{M}$ i koja maksimizira očekivani prihod među svim krajnjim točkama od $\mathcal{M}$, također maksimizira očekivani prihod među svim funkcijama u $\mathcal{M}$. Onda možemo dalje pojednostavniti prodavateljev problem. Umjesto razmatranja svih funkcija u skupu $\mathcal{M}$, dovoljno je promatrati skup svih krajnjih točaka od $\mathcal{M}$. Sljedeći rezultat karakterizira ekstremne točke od $\mathcal{M}$.

Lema 1.1.15. *Funkcija $q \in \mathcal{M}$ je krajnja točka od $\mathcal{M}$ ako i samo ako $q(\theta) \in \{0, 1\}$ za gotovo sve $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$.*

Dokaz. Uzmimo bilo koju funkciju opisanu u lemi, i pretpostavimo da je $\hat{q}$ neka druga funkcija koja zadovoljava: $\hat{q} \neq 0$ za neki θ. Ako $\hat{q}(\theta) > 0$ i $q(\theta) = 0$, onda $q(\theta) - \hat{q}(\theta) < 0$, i stoga $q - \hat{q} \notin \mathcal{M}$. Ako $\hat{q}(\theta) > 0$ i $q(\theta) = 1$, onda $q(\theta) + \hat{q}(\theta) > 1$, i stoga $q + \hat{q} \notin \mathcal{M}$. Slučaj $\hat{q}(\theta) < 0$ je analogan.

Sada uzmimo bilo koju funkciju q koja nije kao opisane u lemi, tj. postoji neki θ^* takav da $q(\theta^*) \in \langle 0, 1\rangle$. Definirajmo $\hat{q}(\theta) = q(\theta)$ ako $q(\theta) \leq 0.5$, i $\hat{q}(\theta) = 1 - q(\theta)$ ako $q(\theta) > 0.5$. Očito, $\hat{q} \neq 0$. Sada prvo promotrimo funkciju $q + \hat{q}$. Imamo da $q(\theta) + \hat{q}(\theta) = 2q(\theta)$ ako $q(\theta) \leq 0.5$, i $q(\theta) + \hat{q}(\theta) = 1$ ako $q(\theta) > 0.5$. Prema tome, $q \in \mathcal{M}$. Argument za $q - \hat{q}$ je analogan. Zaključujemo da q nije krajnja točka od $\mathcal{M}$. □

Stoga prodavatelj može ograničiti svoju pažnju na nestohastičke mehanizme. Ali, nestohastički mehanizam je monoton ako i samo ako postoji neki $p^* \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ takav da $q(\theta) = 0$ ako $\theta < p^*$ i $q(\theta) = 1$ ako $\theta > p^*$. Ovaj se direktni mehanizam može provesti jednostavnim navođenjem cijene p^* od strane prodavatelja i kupčevim ili prihvaćanjem ili odbijanjem p^*.

Naši rezultati stoga impliciraju da prodavatelj ne može bolje od određivanja cijene p^*. Ova analiza je sažeta u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 1.1.16. *Sljedeći direktni mehanizam maksimizira prodavateljeve očekivane prihode među svim poticajno kompatibilnim i individualno racionalnim direktnim mehanizmima. Pretpostavimo $p^* \in argmax_{p\in[\underline{\theta},\bar{\theta}]}\, p(1 - F(p))$. Onda:*

$$q(\theta) = \begin{cases} 1, & ako\ \theta > p^* \\ 0, & ako\ \theta < p^* \end{cases}$$

i

$$t(\theta) = \begin{cases} p^*, & ako\ \theta > p^* \\ 0, & ako\ \theta < p^*. \end{cases}$$

Dokaz. Kao što smo gore ustvrdili, moramo samo razmotriti funkcije q gdje kupac dobije dobro s vjerojatnošću 1 ako je njegova vrijednost iznad neke cijene p^*, i s vjerojatnošću 0 ako je njegova vrijednost ispod te cijene. Optimalna funkcija q ovog oblika je očito ona naznačena u propoziciji. Formula za t slijedi iz Propozicije 1.1.9. □

Možda se čini da smo otišli preširoko da bismo dobili razočaravajuć rezultat, naime, rezultat koji ne nudi prodavatelju nikakve sofisticiranije mehanizme prodaje nego one s kojima smo upoznati iz elementarne mikroekonomije. Međutim, osim uvođenja nekih tehničkih alata koje ćemo koristiti kasnije u nekim kompliciranijim kontekstima, možete cijeniti da smo otkrili prilično sofisticirano obrazloženje poznatog svakodnevnog fenomena. Ovo je možda analogno prizivanju Newtonovog zakona gravitacije kao obrazloženje za činjenicu da jabuka pada sa stabla. Činjenica je poznata, ali obrazloženje nije očito.

1.2 Nelinearno određivanje cijene

U nastavku proučavamo model u kojem monopolist nudi beskonačno djeljivo dobro, npr. šećer, jednom potencijalnom kupcu. Predstavljamo ovaj model zato što je češće proučavan nego model u prethodnom odjeljku, i zato što njegova analiza uvodi dodatne argumente, povrh onih prezentiranih ranije, koji će se ponovno pojaviti u skoro jednakom obliku u analizi optimalnih mehanizama.

Radi jednostavnosti pretpostavljamo da su troškovi proizvodnje linearni, odnosno da količina proizvodnje $q \geq 0$ košta cq, gdje je $c > 0$ konstanta. Prodavatelj je neutralan na rizik i nastoji maksimizirati svoj očekivani profit. Kupčeva korisnost od kupnje količine $q \geq 0$ i plaćanja iznosa t monopolistu je $\theta v(q) - t$. Pretpostavljamo da je $v(0) = 0$, i da je v dva puta diferencijabilna, strogo rastuća i strogo konkavna funkcija: $v'(q) > 0$, $v''(q) < 0$, za sve $q \geq 0$.

Jer je $v(0) = 0$, kupčeva korisnost od kupnje ničega i plaćanja ničega je nula. Možemo interpretirati $\theta v(q)$ kao kupčevu spremnost da plati za količinu q. Primjetite da smo pretpostavili, kao u prethodnom odjeljku, da je korisnost aditivno separabilna u potrošnji dobra i novcu, i da je kupac neutralan na rizik u odnosu na novac.

Parametar θ reflektira koliko kupac valorizira dobro. Preciznije, što veći θ, to je veća kupčeva apsolutna spremnost da plati $\theta v(q)$ i kupčeva granična spremnost da plati $\theta v'(q)$ za bilo koju količinu q. Parametar θ može biti bilo koja vrijednost između $\underline{\theta}$ i $\overline{\theta}$.

Sada se okrećemo informacijama. Kupac zna θ i $v(q)$. Prodavatelj ne zna θ, ali zna $v(q)$. Očito, poznavanje preciznog oblika $v(q)$ je puno. Pretpostavljajući da je θ jedini parametar kupčeve funkcije korisnosti kojeg prodavatelj ne zna, reducirali smo potencijalnu višedimenzionalnu neizvjesnost prodavatelja na jednodimenzionalnu neizvjesnost. To čini naš problem maksimizacije bitno lakšim nego što bi inače bio. Prodavateljeva uvjerenja o θ su opisana kumulativnom funkcijom distribucije F s gustoćom f na intervalu $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$. Pretpostavljamo da f zadovoljava: $f(\theta) > 0$ za sve $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$.

Pretpostavljamo da $\overline{\theta} v'(0) > c$. Ovo znači da je najveća granična spremnost plaćanja koju bi kupac mogao imati iznad graničnog troška proizvodnje. Ova pretpostavka osigurava da prodavatelj i kupac imaju poticaje za razmjenu barem najvećeg kupčevog tipa. Posljednja pretpostavka je da $\lim_{q\to\infty} \overline{\theta} v'(q) < c$. Ovo znači da čak granična spremnost plaćanja najvećeg tipa pada ispod c kako se q povećava. Ova pretpostavka osigurava da je količina kojom prodavatelj opskrbljuje kupca konačna za sve moguće kupčeve tipove.

Želimo odrediti optimalnu proceduru prodaje za prodavatelja. Kao u prethodnom odjeljku, princip objave vrijedi i možemo ograničiti našu pažnju na direktne mehanizme. U tekućem kontekstu, koristimo sljedeću definiciju direktnih mehanizama.

Definicija 1.2.1. *Direktni mehanizam se sastoji od funkcija q i t takvih da:*

$$q : [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \to \mathbb{R}_+$$

i

$$t : [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \to \mathbb{R}.$$

Interpretacija je ta da je kupac upitan da prijavi θ, te da se prodavatelj obvezuje prodati količinu $q(\theta)$ kupcu i da se kupac obvezuje platiti $t(\theta)$ prodavatelju ako je kupčev izvještaj θ. Primjetimo da koristimo istu notaciju kao u prethodnom odjeljku, ali je u ovom odjeljku $q(\theta)$ količina, dok je u prethodnom bila vjerojatnost. Ovdje ignoriramo stohastičke mehanizme, odnosno, pretpostavljamo da je za svaki tip θ količina koja je prodana kupcu ako je on tipa θ nenegativan broj, a ne vjerojatnosna distribucija nad nenegativnim brojevima. Uvodimo ovu pretpostavku radi jednostavnosti. Ne iskazujemo Princip objave formalno za naš kontekst jer je analogan onome u prethodnom odjeljku.

Kao u prethodnom odjeljku možemo onda proučavati poticajnu kompatibilnost i individualnu racionalnost direktnih mehanizama. Analiza slijedi točno iste linije kao u prethodnom odjeljku, i samo ćemo iskazati rezultat te analize.
Direktni mehanizam (q, t) je poticajno kompatibilan ako i samo ako:

(i) q je rastuća

(ii) Za svaki $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$:

$$t(\theta) = t(\underline{\theta}) + \left(\theta v(q(\theta)) - \underline{\theta} v(q(\underline{\theta}))\right) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x))dx. \tag{1.2}$$

Poticajno kompatibilan direktni mehanizam je individualno racionalan ako i samo ako:

$$t(\underline{\theta}) \leq \underline{\theta} v(q(\underline{\theta})).$$

Prodavateljev problem odluke je odabrati među svim direktnim mehanizmima koji zadovoljavaju ova dva uvjeta onog koji maksimizira očekivani prihod. Očito je da će prodavatelj odabrati $t(\underline{\theta})$ tako da korisnost tipa $\underline{\theta}$ bude nula, odnosno

$$t(\underline{\theta}) = \underline{\theta} v(q(\underline{\theta})).$$

Supstituirajući ovo u jednadžbu (1.2) dobijemo:

$$t(\theta) = \theta v(q(\theta)) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x))\, dx. \tag{1.3}$$

Izbor koji ostaje za proučiti je onaj o funkciji q.

U ovom trenutku odstupamo od linije argumentacije koju smo pratili u prethodnom odjeljku. Razlog je taj što prodavateljeva funkcija cilja nije više linearna u q. Ovo je jasno iz jednadžbe (1.3) u kojoj q ulazi u nelinearnu funkciju v. Jer funkcija cilja nije više linearna u q, argument o krajnjoj točki iz prethodnog odjeljka ne možemo ovdje primjeniti. Trebamo onda koristiti jednadžbu (1.3) za detaljnije razmatranje prodavateljeva očekivanog profita. Ako prodavatelj odabere $q(\cdot)$, onda je njegov očekivani profit:

$$\begin{aligned}&\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left[\theta v(q(\theta)) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x))\, dx - cq(\theta)\right] f(\theta)\, d\theta \\ &\qquad = \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \theta v(q(\theta)) f(\theta)\, d\theta - \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x))\, dx f(\theta)\, d\theta - \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} cq(\theta) f(\theta)\, d\theta \end{aligned} \tag{1.4}$$

Želimo pojednostavniti izraz u (1.4). U početku se fokusiramo na dvostruki integral drugog izraza u (1.4).

$$
\begin{aligned}
\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x))\, dx f(\theta)\, d\theta &= \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x)) f(\theta)\, dx\, d\theta \\
&= \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \int_{x}^{\bar{\theta}} v(q(x)) f(\theta)\, d\theta\, dx \\
&= \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} v(q(x)) \int_{x}^{\bar{\theta}} f(\theta)\, d\theta\, dx \\
&= \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} v(q(x))(1 - F(x))\, dx \\
&= \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} v(q(\theta))(1 - F(\theta))\, d\theta \qquad (1.5)
\end{aligned}
$$

Uvrštavamo (1.5) u (1.4) i dobivamo:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \Big[\theta v(q(\theta)) - cq(\theta)\Big] f(\theta)\, d\theta - \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} v(q(\theta))(1 - F(\theta))\, d\theta \\
&\quad = \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \Big[\theta v(q(\theta)) - cq(\theta)\Big] f(\theta)\, d\theta - \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} v(q(\theta)) \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} f(\theta)\, d\theta \\
&\quad = \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \left[v(q(\theta))\left(\theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)}\right) - cq(\theta)\right] f(\theta)\, d\theta \qquad (1.6)
\end{aligned}
$$

Prodavatelj prema tome odabire q kojim maksimizira očekivanu vrijednost izraza u uglatim zagradama u (1.6). Prodavatelj mora izabrati rastuću funkciju q.

Izraz u uglatim zagradama također se zove i *virtualni višak* generiran prodavateljevom transakcijom s kupcem tipa θ. Stvaran višak kojeg trgovina s kupcem tipa θ generira je: $v(q(\theta))\theta - cq(\theta)$, tj. kupčeva korisnost minus trošak proizvodnje. Ako prodavatelj može promatrati θ, ovaj stvarni višak je ono što prodavatelj i kupac mogu dijeliti. Prodavatelj koji ima obvezujuću moć, kao što smo pretpostavili ovdje, će maksimizirati stvarni višak i onda ga nadoknaditi uključivanjem u cijenu koju naplaćuje kupcu povrh troška proizvodnje. Ali u našem okruženju, gdje θ nije promatran, višak generiran transakcijom s kupcem tipa θ kojeg prodavatelj može nadoknaditi preko kupca je manji nego što bi bio da se θ može promatrati. Ovo možemo vidjeti iz činjenice da u uglatim zagradama oduzimamo pozitivan član od θ. Umanjitelj predstavlja smanjenje viška nadoknađenog od strane prodavatelja koji zbog ograničenja mora ponuditi poticaje za iskreno otkrivanje θ. U literaturi, ovaj umanjitelj se naziva kupčeva *informacijska renta*.

Pretpostavimo da ignoriramo na trenutak ograničenje da q mora biti rastuća. Onda prodavatelj može odabrati $q(\theta)$ za svaki θ posebno kako bi maksimizirao izraz u uglatim zagradama. Ovaj izbor q također maksimizira očekivanu vrijednost tog izraza. Promatramo ovaj pristup da odabiremo q prvo i onda namećemo uvjet kojim osiguravamo da je funkcija q koju smo pronašli uistinu rastuća. Uvjet prvog reda za maksimizaciju izraza u uglatim zagradama za dani θ je:

$$v'(q)\left(\theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)}\right) - c = 0 \iff$$

$$v'(q)\left(\theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)}\right) = c \tag{1.7}$$

Sada istražujemo postojanje rješenja u (1.7). Ako

$$\theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} \leq 0$$

tada očito nema rješenja i optimalan izbor je

$$q(\theta) = 0.$$

Sada razmotrimo

$$\theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} > 0.$$

Podsjetimo da smo pretpostavili da je v' diferencijabilna te stoga neprekidna, i padajuća, te da $\overline{\theta}v'(q)$ u limesu teži ka broju manjem od c. Očito lijeva strana u (1.7) dijeli sva ova svojstva. Ako

$$v'(0)\left(\theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)}\right) \leq c$$

onda je opet očito da je optimalan izbor

$$q(\theta) = 0.$$

Ako

$$v'(0)\left(\theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)}\right) > c$$

onda naše pretpostavke impliciraju da postoji jedinstveno rješenje od (1.7) i da je to rješenje također jedinstven optimalan izbor za $q(\theta)$.

Sad smo za svaki θ odredili izbor $q(\theta)$ koji maksimizira izraz u uglatim zagradama od (1.6). Prodavatelj želi maksimizirati očekivanu vrijednost ovog izraza, i ograničen je izabrati funkciju q koja je rastuća. Ako je funkcija q koju smo gore odredili rastuća, onda ona mora biti optimalan izbor za prodavatelja. Sada predstavljamo sljedeću pretpostavku koja implicira da je q koju smo odredili rastuća.

Pretpostavka 1. *$\theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}$ je rastuća u θ.*

Kako bismo provjerili da Pretpostavka 1 implicira da je q rastuća, primjetimo da ona implicira da je lijeva strana u (1.7) rastuća u θ za svaku q. Optimalna q je presjek tog izraza s c ili 0, što god je veće. Tada je lako vidjeti da je optimalna q rastuća u θ.

Dovoljan uvjet za Pretpostavku 1 jest da je $\frac{f(\theta)}{1-F(\theta)}$ rastuća u θ. Ovaj dovoljan uvjet se često naziva uvjetom *rastuće hazardne stope*. Zamislimo $F(\theta)$ kao vjerojatnost da pojedinac umre prije vremena θ. Tada je $1 - F(\theta)$ vjerojatnost da pojedinac preživi do vremena θ, a $\frac{f(\theta)}{1-F(\theta)}$ se može shvatiti kao uvjetna vjerojatnost umiranja u trenutku θ pojedinca koji je preživio do trenutka θ. Dovoljan uvjet je da je ova uvjetna vjerojatnost umiranja rastuća u θ.

Mnogo uobičajeno promatranih distribucija F zadovoljava Pretpostavku 1. Mi ćemo se na takve distribucije referirati kao na *regularne*. Analiza ovog odjeljka je sumirana u sljedećoj propoziciji:

Propozicija 1.2.2. *Pretpostavimo da je F regularna. Tada je izbor od q koja maksimizira očekivani profit dan s:*

(i) $q(\theta) = 0,$ *ako* $v'(0)\left(\theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}\right) \leq c$

(ii) $v'(q(\theta))\left(\theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}\right) = c,$ *inače*

Odgovarajući t koji maksimizira očekivani profit je dan s:

$$t(\theta) = \theta v(q(\theta)) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x))\,dx$$

Kako bismo razumjeli ekonomsko značenje Propozicije 1.2.2 primjetimo da za najviši tip $\theta = \overline{\theta}$ imamo: $1 - F(\theta) = 0$. Dakle, drugi slučaj iz Propozicije 1.2.2 se primjenjuje na $\overline{\theta}$ i $q(\overline{\theta})$ je određena s:

$$v'(q(\overline{\theta}))\overline{\theta} = c \tag{1.8}$$

Ova jednadžba pokazuje da najviši tip isporučuje količinu pri kojoj je granična voljnost za plaćanjem ovog tipa točno jednaka graničnom trošku proizvodnje. To je količina koja maksimizira višak generiran transakcijom između kupca i prodavatelja. Na ovu količinu se referiramo kao na *prvu najbolju* količinu. Činjenica da je prva najbolja količina ponuđena najvišem kupčevu tipu $\overline{\theta}$ se nekad, od strane ekonomskih teoretičara, izražava kao: *nema distorzije (iskrivljenosti) na vrhu*.

Za niže tipove $\theta < \overline{\theta}$, za koje je isporučena količina određena jednadžbom (1.7), izabrana je količina koja je manja od količine kojom maksimiziramo višak. Ovo je zato što se jednadžba (1.7) razlikuje od prvog najboljeg uvjeta (1.8) (s $\overline{\theta}$ zamijenjenim s θ) u tome da je lijeva strana manja za svaki q. Prema tome, granični troškovi nisu izjednačeni s graničnim koristima nego s količinom manjom od graničnih koristi. Ovo možemo zvati *virtualne granične koristi*, u skladu s ranijim pojmom *virtualnog viška*. Ovo znači da je svim tipovima $\theta < \overline{\theta}$, za koje je isporučena količina određena jednadžbom (1.7), ponuđena količina koja je manja od *prve najbolje* količine. Konačno, tipovima kojima je ponuđena količina nula u direktnom mehanizmu maksimizacije očekivanog profita, je očito ponuđeno slabo manje nego što im je ponuđeno kao prvo najbolje. Tako pronalazimo fenomen poznat iz uvodnih satova ekonomije: monopolist koji maksimizira profit distorzira isporučenu količinu (slabo) prema dolje.

Zaključujemo s numeričkim primjerom:

Primjer 1.2.3. *$c = 1$, $v(q) = \sqrt{q}$, θ je uniformno distribuirana na $[0, 1]$, tj. $F(\theta) = \theta$ i $f(\theta) = 1$, za sve $\theta \in [0, 1]$. Kako bismo potvrdili da je zadovoljena Pretpostavka 1, moramo provjeriti da je sljedeći izraz rastuć u θ:*

$$\theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} = \theta - \frac{1 - \theta}{1} = 2\theta - 1,$$

što je očito slučaj.

Sljedeće određujemo za koje vrijednosti od θ je optimalna količina $q(\theta)$ nula:

$$\begin{aligned} v'(0)\left(\theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)}\right) &\leq c \Leftrightarrow \\ \theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} &\leq 0 \Leftrightarrow \\ 2\theta - 1 &\leq 0 \Leftrightarrow \\ \theta &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Prvi i drugi red su ekvivalenti jer je u našem primjeru $v'(0) = +\infty$. Ako je $\theta > \frac{1}{2}$, optimalni

$q(\theta)$ je dan s:

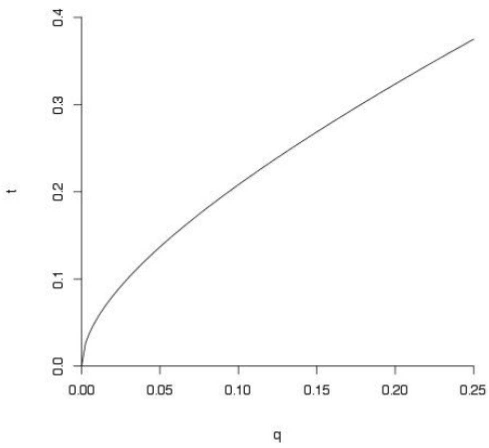
$$
\begin{aligned}
v'(q(\theta))\left(\theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}\right) = c \;\Leftrightarrow \\
\frac{1}{2\sqrt{q}}(2\theta - 1) = 1 \;\Leftrightarrow \\
\sqrt{q} = \theta - \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow \\
q = \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

Odgovarajući transfer $t(\theta)$ je nula ako $\theta \leq \frac{1}{2}$, a ako $\theta > \frac{1}{2}$, onda je dan s:

$$
\begin{aligned}
t(\theta) &= \theta v(q(\theta)) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} v(q(x))\,dx \\
&= \theta\left(\theta - \frac{1}{2}\right) - \int_{0.5}^{\theta}\left(x - \frac{1}{2}\right)dx \\
&= \theta\left(\theta - \frac{1}{2}\right) - \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right]_{0.5}^{\theta} \\
&= \theta\left(\theta - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

Želimo translatirati rješenje u optimalnu nelinearnu cjenovnu shemu. Možemo izraziti transfer t kao funkciju od q. Za ovo, prvo određujemo koji tip θ kupuje bilo koju danu količinu q:

$$
\begin{aligned}
q(\theta) = q \;\Leftrightarrow \\
\left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 = q \;\Leftrightarrow \\
\theta - \frac{1}{2} = \sqrt{q} \;\Leftrightarrow \\
\theta = \sqrt{q} + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$



Slika 1.1: Optimalna nelinearna cjenovna shema

Isplata po tipu θ je:

$$\begin{aligned} t(\theta) &= \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{q} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{q} \end{aligned}$$

U suštini, monopolist tako nudi kupcima dogovor da oni mogu kupiti bilo koju količinu $q \in [0, \frac{1}{4}]$ i za nju platiti $t(q) = \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{q}$. Ova optimalna nelinearna cjenovna shema je prikazana na Slici 1.1. Primjećujemo da postoji količinski popust. Cijena po jedinici:

$$\frac{t}{q} = \frac{\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{q}}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{q}}$$

opada u q.

1.3 Slaganje

Teorija probira može se proširiti u puno različitih smjerova. Na primjer, od velikog je interesa promatrati slučaj u kojem je kupčeva privatna informacija također od značaja prodavateljevoj procjeni moguće prodaje. Primjer su police osiguranja. Kupčeva privatna informacija o njegovoj zdravstvenoj situaciji utječe ne samo na njegovu osobnu procjenu police osiguranja, već i na prodavateljevu procjenu.

Sljedeće važno proširenje je na slučaj u kojem je kupčeva privatna informacija multidimenzionalna. Slučaj multidimenzionalne privatne informacije je također relevantan u teoriji društvenih mehanizama s više agenata. Stoga, ovdje dajemo jednostavan primjer probira kad kupac ima multidimenzionalnu privatnu informaciju.

Pretpostavimo da prodavatelj ima dva različita nedjeljiva dobra, dobro A i dobro B, za prodaju. Jednostavnosti radi, pretpostavimo da prodavatelj valorizira dobra nulom i da je neutralan na rizik, tako da nastoji maksimizirati svoj očekivani prihod. Neka je I_A indikatorska varijabla jednaka 1 ako kupac dobije dobro A, a 0 inače. Analogno definiramo I_B. Označimo sa t monetarni transfer od kupca ka prodavatelju. Tada je kupčeva korisnost:

$$I_A v_A + I_B v_B - t.$$

Primjetimo da je korisnost aditivna u dvama dobrima i u novcu. Pretpostavimo zatim da granična vrijednost svakog dobra ne ovisi o tome je li drugo dobro dobiveno. Na ovaj način dva dobra su potpuno nezavisna. Ona nisu poput tjestenine i umaka od rajčice, nego poput tjestenine i ručnog sata.

Parametri v_A i v_B pokazuju kupčevu spremnost plaćanja dva dobra. Ovi parametri su poznati kupcu, ali ne i prodavatelju. Prodavateljeva uvjerenja o ovim dvama parametrima su dana uniformnom distribucijom F nad jediničnim kvadratom $[0,1]^2$. Primjetimo da ovdje pretpostavljamo da su v_A i v_B stohastički nezavisni. Prema tome, po drugi put pretpostavljamo da ne postoji nikakav odnos između dvaju dobara.

Naše zanimanje je opet u optimalnim prodajnim procedurama za prodavatelja. Kao u prijašnjim odjeljcima, vrijedi princip objave i možemo, bez smanjenja općenitosti, ograničiti našu pažnju na direktne mehanizme. Mi ćemo, umjesto toga, pojednostavniti u drugom smjeru i razmotriti samo vrlo malu klasu indirektnih mehanizama. Premda, treba naglasiti da ne nudimo nikakav razlog da možemo ograničiti pažnju na ovu malu klasu bez smanjenja općenitosti. Ograničavamo pažnju na ovu malu klasu samo kako bismo našu analizu mogli lakše obraditi.

Pretpostavljamo da prodavatelj nudi tri cijene: p_A, p_B i p_{AB}. Interpretacija je da kupac može kupiti dobro A po cijeni p_A, dobro B po cijeni p_B ili oba dobra po cijeni p_{AB}. Pretpostavljamo da prodavatelj ne može spriječiti kupca od kupnje dobara A i B po cijeni $p_A + p_B$, tako da cijena p_{AB}, da bi imala ikakvog efekta, mora zadovoljavati: $p_{AB} \leq p_A + p_B$.

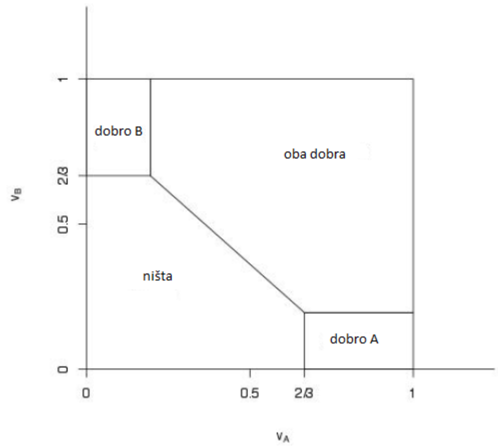
Koji je optimalan izbor p_A, p_B i p_{AB}? Ovim problemom pozabavio se Hemant K. Bhagava u svom članku [1]. Ispada da su optimalne cijene:

$$p_A = p_B = \frac{2}{3}$$

$$p_{AB} = \frac{1}{3}\left(4 - \sqrt{2}\right) \approx 0.862$$

Primjetimo da je optimalna cijena p_{AB} uistinu strogo manja od $p_A + p_B$. Prodavatelj tako nudi kupcu da može kupiti dva dobra odvojeno, ali da mu je bolje ako kupi dva dobra zajedno. Literatura se na kombinaciju dobara A i B referira kao na *slaganje*[6]. Strategija monopolista u ovom primjeru je također opisana kao *mješovito slaganje* jer monopolist nudi slaganje kupcima, ali im također daje opciju da dobra kupe odvojeno.

Kupčevo ponašanje potražnje dano optimalnim cijenama je prikazano na Slici 1.2. Ovisno o vrijednostima v_A i v_B kupac kupuje: samo dobro A, samo dobro B, oba dobra ili nijedno dobro. Efikasnost bi, naravno, zahtijevala da je dobro prebačeno kupcu za sve vrijednosti v_A i v_B osim nule. Tako na Slici 1.2 promatramo neko iskrivljenje efikasnosti.



Slika 1.2: Kupčevo ponašanje s danim optimalnim cijenama

Slika 1.2 ilustrira direktni mehanizam implementiran od strane prodavatelja ako on ponudi tri optimalne cijene. Prezentiramo ovaj primjer poglavito kako bismo ilustrirali da čak i u jednostavnom slučaju probira, multidimenzionalna privatna informacija može uzrokovati iznenađujuće i kontraintuitivne efekte. Vrlo je iznenađujuće da prodavatelj nudi dobra kao slaganje s popustom iako su, iz kupčeva stajališta, dobra potpuno nepovezana.

[6] eng. bundle

Poglavlje 2

Primjeri mehanizama - aukcije

U ovom poglavlju nalazimo se u situaciji gdje imamo prodavatelja (agenta 0) i dva potencijalna kupca (agenti 1 i 2). Prodavatelj želi prodati jedno nedjeljivo dobro. Promatramo dva slučaja i to u okviru direktnih i indirektnih mehanizama.

U prvom slučaju pobjednički kupac je onaj s najvišom ponudom i on plaća prodavatelju taj iznos koji je ponudio. U drugom slučaju također pobjeđuje kupac s najvišom ponudom, međutim on plaća prodavatelju drugu najvišu ponudu. U oba slučaja pretpostavljamo da je, ukoliko dođe do izjednačenja, pobjednik kupac 1.

2.1 Implementacija kroz direktne mehanizme

Pobjednički kupac plaća najvišu ponudu

Pretpostavimo da su θ_1 i θ_2 nezavisni i da dolaze iz uniformne distribucije na $[\,0, 1]$.

Pretpostavimo da kupac 2 najavljuje svoju pravu vrijednost (tip) θ_2. Recimo da je valorizacija kupca 1 θ_1 te da on najavljuje $\hat{\theta}_1$. Ako je $\theta_2 \leq \hat{\theta}_1$, tada je kupac 1 pobjednik i njegova korisnost će biti $\theta_1 - \hat{\theta}_1$. Ako je $\theta_2 > \hat{\theta}_1$, tada je kupac 2 pobjednik, a korisnost kupca 1 je nula. Budući da kupac 1 želi maksimizirati svoju očekivanu korisnost, on rješava problem

$$\max_{\hat{\theta}_1}(\theta_1 - \hat{\theta}_1)P(\{\theta_2 \leq \hat{\theta}_1\})$$

Budući da je θ_2 uniformno distribuirana na $[\,0, 1]$

$$P(\{\theta_2 \leq \hat{\theta}_1\}) = \hat{\theta}_1$$

Stoga kupac 1 želi riješiti problem:

$$\max_{\hat{\theta}_1}(\theta_1 - \hat{\theta}_1)\hat{\theta}_1$$

Ovaj problem ima rješenje $\hat{\theta}_1 = \frac{\theta_1}{2}$. Stoga, ako je kupac 2 iskren, najbolji odgovor za kupca 1 je najaviti $\frac{\theta_1}{2}$.

Slično, ako kupac 1 uvijek najavljuje svoju pravu vrijednost θ_1, tada je najbolji odgovor kupca 2 najaviti $\frac{\theta_2}{2}$ ako je njegov pravi tip θ_2. Stoga, ne postoje poticaji za kupce da najave svoje prave valorizacije. Društveni planer koji želi realizirati gornji direktni mehanizam pronalazi da racionalni igrači neće otkriti svoje prave privatne vrijednosti.

Pobjednički kupac plaća drugu najvišu ponudu

Pretpostavimo da je θ_i prava vrijednost kupca i ($i = 1, 2$).

Recimo da kupac 2 najavljuje svoju valuaciju kao $\hat{\theta}_2$. Postoje dva slučaja:

(1) $\theta_1 \geq \hat{\theta}_2$

(2) $\theta_1 < \hat{\theta}_2$

Slučaj 1: $\theta_1 \geq \hat{\theta}_2$

Neka je $\hat{\theta}_1$ najava kupca 1. Ovdje postoje dva slučaja:

- Ako $\hat{\theta}_1 \geq \hat{\theta}_2$, onda kupac 1 pobjeđuje i njegova korisnost je $\theta_1 - \hat{\theta}_2 \geq 0$.
- Ako $\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2$, onda kupac 1 ne pobjeđuje i njegova korisnost je nula.

Stoga, u ovom slučaju, najveća moguća korisnost je $\theta_1 - \hat{\theta}_2 \geq 0$.

Ako $\hat{\theta}_1 = \theta_1$ (tj. kupac 1 najavljuje svoju pravu vrijednost), tada je korisnost kupca 1 jednaka $\theta_1 - \hat{\theta}_2$, što je maksimalna moguća korisnost kao što je pokazano gore. Tako je najava θ_1 najbolji odgovor za kupca 1 kad god je $\theta_1 \geq \hat{\theta}_2$.

Slučaj 2: $\theta_1 < \hat{\theta}_2$

Ovdje opet imamo dva slučaja: $\hat{\theta}_1 \geq \hat{\theta}_2$ i $\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2$.

- Ako $\hat{\theta}_1 \geq \hat{\theta}_2$, tada kupac 1 pobjeđuje i njegova korisnost je $\theta_1 - \hat{\theta}_2$, što je negativno.
- Ako $\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2$, tada kupac 1 ne pobjeđuje i njegova korisnost je nula.

Stoga, u ovom slučaju, najveća moguća korisnost je nula.

Ako $\hat{\theta}_1 = \theta_1$, korisnost kupca 1 je nula. Najavljujući $\hat{\theta}_1 = \theta_1$, svoju pravu vrijednost, kupac 1 ima nultu korisnost, što je u ovom slučaju najbolji odgovor.

Sada možemo napraviti sljedeća opažanja. Prijavljivanje svoje prave vrijednosti je optimalno za kupca 1 bez obzira na to što kupac 2 prijavi. Slično, najavljivanje svoje prave vrijednosti je optimalno za kupca 2 kakva god bila najava kupca 1.
Formalnije, iskreno prijavljivanje tipa je slabo dominantna strategija za svakog igrača.

2.2 Implementacija kroz indirektne mehanizme

Aukcija prve cijene sa zapečačenim ponudama

Razmotrimo prodavatelja (agenta 0) i dva potencijalna kupca (agenti $1, 2$) kao prije. Prodavatelj igra ulogu aukcionara, a kupci ponuđača na aukciji. Svaki kupac je upitan da priloži zapečačenu ponudu, $b_i \geq 0$ $(i = 1, 2)$. Zapečačene ponude se pregledaju i kupac s najvišom ponudom je proglašen pobjednikom. U slučaju da dođe do izjednačenja, pretpostavimo da je kupac 1 proglašen pobjednikom. Pobjednički kupac plaća prodavatelju iznos jednak njegovoj ponudi. Ponuđač koji je izgubio ne plaća ništa.

Naglašavamo suptilnu razliku između situacija u primjeru 2.1 iz prethodnog odjeljka i trenutnom primjeru. U primjeru 2.1 (direktni mehanizam) svaki kupac je upitan da najavi (direktno) svoj tip (valorizaciju za objekt) dok je u trenutnom primjeru (indrektni mehanizam) svaki kupac upitan da prijavi ponudu za objekt. Svrha je u tome da će podnesena ponuda ovisiti o tipu. Ovisno o tipu, kupac ima strategiju za podnošenje ponuda. Tako to postaje igra i u ravnoteži igre strategije će, nadajmo se, indirektno otkriti tipove igrača.
Uvedimo sljedeće pretpostavke:

(1) θ_1, θ_2 su nezavisni i dolaze iz uniformne distribucije na $[0, 1]$

(2) Zapečačena ponuda kupca i poprima oblik $b_i(\theta_i) = \alpha_i \theta_i$, gdje je $\alpha_i \in (0, 1]$. Da će ponuda biti u gornjem obliku je znano obojici ponuđača. Međutim, vrijednosti α_1, α_2 nisu poznate i ponuđači ih moraju procijeniti kako bi odredili svoje najbolje ponude

Problem kupca 1 je sada licitirati na način da maksimizira svoju isplatu:

$$\max_{b_1 \geq 0} (\theta_1 - b_1) P(\{b_2(\theta_2) \leq b_1\})$$

Budući je ponuda kupca 2 $b_2(\theta_2) = \alpha_2 \theta_2$ i $\theta_2 \in [0, 1]$, maksimalna ponuda kupca 2 je α_2. Kupac 1 zna ovo i stoga $b_1 \in [0, \alpha_2]$.
Također,

$$\begin{aligned} P(\{b_2(\theta_2) \leq b_1\}) &= P(\{\alpha_2 \theta_2 \leq b_1\}) \\ &= P(\{\theta_2 \leq \frac{b_1}{\alpha_2}\}) \\ &= \frac{b_1}{\alpha_2}, \end{aligned}$$

budući je θ_2 uniformno distribuirana na $[0, 1]$.
Problem kupca 1 je:

$$\max_{b_1 \in [0, \alpha_2]} (\theta_1 - b_1) \frac{b_1}{\alpha_2}$$

Rješenje ovog problema je

$$b_1(\theta_1) = \begin{cases} \frac{\theta_1}{2}, \; ako \; \frac{\theta_1}{2} \leq \alpha_2 \\ \alpha_2, \; ako \; \frac{\theta_1}{2} > \alpha_2 \end{cases}$$

Analogno možemo pokazati da:

$$b_2(\theta_2) = \begin{cases} \frac{\theta_2}{2}, \; ako \; \frac{\theta_2}{2} \leq \alpha_1 \\ \alpha_1, \; ako \; \frac{\theta_2}{2} > \alpha_1 \end{cases}$$

Neka je $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$. Tada dobijamo:

$$b_1(\theta_1) = \frac{\theta_1}{2}, \; \forall \, \theta_1 \in \Theta_1 = [\,0, 1]$$

$$b_2(\theta_2) = \frac{\theta_2}{2}, \; \forall \, \theta_2 \in \Theta_2 = [\,0, 1]$$

Primjetimo da ako $b_2(\theta_2) = \frac{\theta_2}{2}$, imamo $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ i $\frac{\theta_1}{2} \leq \alpha_2$ pa je stoga najbolji odgovor kupca 1 $b_1(\theta_1) = \frac{\theta_1}{2}$. Slično, ako $b_1(\theta_1) = \frac{\theta_1}{2}$, imamo $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ i $\frac{\theta_2}{2} \leq \alpha_1$ pa je stoga najbolji odgovor kupca 2 $b_2(\theta_2) = \frac{\theta_2}{2}$. Dakle, profil $(\frac{\theta_1}{2}, \frac{\theta_2}{2})$ je BN ravnoteža osnovne Bayesovske igre. Ovaj ekvilibrij može biti izračunat od strane racionalnih i inteligentnih ponuđača.

Aukcija druge cijene sa zapečaćenim ponudama

U ovom indirektnom mehanizmu svaki kupac je upitan da prijavi zapečaćenu ponudu $b_i \geq 0$. Ponude su ispitane i kupac s najvišom ponudom je proglašen pobjednikom. U slučaju izjednačenja, kupac 1 je proglašen pobjednikom.
Pobjednički kupac će platiti prodavatelju iznos jednak drugoj najvišoj ponudi. Kupac koji je izgubio ne plaća ništa.

U ovom slučaju možemo pokazati da $b_i(\theta_i) = \theta_i$, za $i = 1, 2$ predstavlja slabo dominantnu strategiju za svakog igrača. Argumenti su identični onima u primjeru 2.1 iz prethodnog odjeljka.

Ova aukcija u literaturi je poznata kao Vickrey aukcija, a dobila je ime po kanadskom ekonomistu Williamu Vickreyu koji ju je prvi put opisao 1961.

Poglavlje 3

Neprenosiva korisnost

3.1 Uvod

Dosad smo pretpostavljali da je korisnost svih agenata aditivno separabilna u predviđenoj odluci i novcu, i štoviše, da su svi agenti neutralni na rizik u novcu. Ovo su vrlo restriktivne pretpostavke. Lako je zamisliti situacije u kojima su ove pretpostavke narušene. Najjednostavniji slučaj je da nisu svi agenti neutralni na rizik u novcu. Drugi slučaj u kojem ove pretpostavke mogu biti narušene je ako postoji interakcija između novca i predviđene odluke. Na primjer, zato što vrijednost različitih predviđenih odluka ovisi o tome koliko je novca agentima ostalo nakon plaćanja transfera. Konačno, može biti slučaj u kojem razmatramo situacije, poput glasanja, u kojima monetarne isplate tipično nisu pozvane osigurati poticaje.

Jedna implikacija pretpostavke o aditivnoj separabilnosti korisnosti i neutralnosti na rizik je da su monetarne isplate jednog agenta drugom neutralne u blagostanju dok god dodijelimo istu težinu blagostanja svim agentima. Suprotno, u općenitijem modelu, blagostanje ovisi ne samo o predviđenoj odluci, već i o raspodjeli novca među agentima. Referirat ćemo se na slučaj koji smo dosad razmatrali kao na slučaj *prenosive korisnosti*, a na slučaj razmatran u ovom poglavlju kao na slučaj *neprenosive korisnosti*.

U spektru mogućih pretpostavki, u ovom poglavlju ćemo se pomaknuti na suprotnu krajnost od pretpostavki koje smo dosad napravili. Razmotrit ćemo situacije u kojima postoji neki proizvoljan skup mogućih kolektivnih odluka i, barem u početku, nikakve posebne pretpostavke o agentovim prioritetima nad ovim odlukama nisu napravljene. Svaka kolektivna odluka je interpretirana kao odluka o svim pitanjima relevantnima agentima, uključujući raspodjelu novca.

3.2 Gibbard Satterthwaite teorem

Postavke

Postoji konačan skup agenata, $i \in I = \{1, 2, ..., N\}$. Ovi agenti moraju izabrati jednu alternativu iz konačnog skupa A međusobno isključujućih alternativa. Svaki agent i ima relaciju preferencije R_i nad A. Pretpostavljamo da je R_i relacija linearnog uređaja, tj. da je potpuna i tranzitivna, te indiferentna jedino prema identičnim alternativama. Označavamo strogi red izveden iz R_i sa P_i. aR_ib čitamo kao *a slabo preferiramo nad b*, a aP_ib kao *a strogo preferiramo nad b*. Skup svih linearnih uređaja nad A označavamo kao $\mathcal{R}$. Pišemo R kao listu relacija preferencije svih agenata: $R = (R_1, R_2, ..., R_N)$, a R_{-i} kao listu relacija preferencije svih agenata osim agenta i: $R_{-i} = (R_1, R_2, ..., R_{i-1}, R_{i+1}, ..., R_N)$.

Razmatramo dizajnera mehanizama koji ne zna relacije preferencije agenata, ali koji određuje pravila strateške interakcije među agentima koji biraju alternative iz A. On može konstruirati ekstenzivnu igru s ishodima u A. U ovom odjeljku proučavamo slučaj u kojem dizajner mehanizama nastoji konstruirati igru takvu da svaki igrač, sa svakom dostižnom relacijom preferencije u $\mathcal{R}$, ima dominantnu strategiju. Tada vrijedi princip objave i svoju pažnju možemo ograničiti na direktne mehanizme.

Definicija 3.2.1. *Direktni mehanizam je funkcija $f : \mathcal{R}^N \to A$.*

U literaturi se direktni mehanizmi u smislu gornje definicije ponekad nazivaju *funkcije društvenog izbora*. Da bismo zadržali konzistentnost s ranijim dijelovima rada, govorit ćemo o *direktnim mehanizmima*.

Definicija 3.2.2. *Direktni mehanizam f je poticajno kompatibilna dominantna strategija*[1] *ako za svakog agenta $i \in I$ te sve relacije preferencije R_i, $R_i^{'}$ u $\mathcal{R}$ vrijedi:*

$$f(R_i, R_{-i})\ R_i\ f(R_i^{'}, R_{-i})$$

U literaturi se nekad na poticajno kompatibilne dominantne strategije referira kao na *nemanipulativne*[2]. U ovom odjeljku karakterizirat ćemo direktne mehanizme koji su poticajno kompatibilne dominantne strategije. Prije nego što nastavimo, navodimo dvije napomene o postavkama opisanim ovdje. Prva se tiče uloge randomizacije u ovom odjeljku. Čitatelj će možda primjetiti da nismo uveli vjerojatnosne distribucije nad skupom A. Ali, naravno, elementi skupa A mogu biti ishodi koji nisu deterministički, već stohastički. Ako imamo ovaj slučaj na umu, tada se može činiti prirodnijim imati beskonačan skup A radije nego konačan. Ali nije odmah očito da se u praksi može provesti beskonačan broj vjerojatnosnih distribucija. Fizička nas ograničenja također mogu prisiliti da biramo iz konačnog

[1] eng. dominant strategy incentive compatible
[2] eng. strategy proof

skupa vjerojatnosnih distribucija, i čitatelj može misliti o A kao o skupu svih tih distribucija. Tako, naše postavke ne isključuju randomizaciju.

Druga stvar koju treba naglasiti je da domena našeg direktnog mehanizma sadrži sve linearne uređaje nad A. U praksi možemo imati neka saznanja o agentovim preferencijama nad A, te možemo ograničiti pažnju na mehanizme koji rade kako mi želimo da rade, samo za neke, ali ne za sve profile preferencija. Prirodna ograničenja mogu biti da svi agenti rangiraju ili sve elemente nekog podskupa $\hat{A}$ od A više nego sve elemente komplementa $A \setminus \hat{A}$, ili da imaju suprotni rang. Ovo bi se činilo vjerojatnim da su svi elementi od A kandidati za politički ured, i da kandidati u $\hat{A}$ imaju suprotnu ideologiju od kandidata u $A \setminus \hat{A}$. Još jedno prirodno ograničenje može biti da su preferencije agenata u von Neumann Morgensternovoj formi, što bi se činilo prirodnim da se A sastoji od lutrija. Kasnije u ovom poglavlju ćemo razmotriti implikacije nekih takvih ograničenja domene, ali prvo istražujemo implikacije pretpostavke o neograničenoj domeni.

Iskaz rezultata i shema dokaza

Definicija 3.2.3. *Direktni mehanizam f nazivamo diktatorski ako postoji neki zasebni $i \in I$ takav da za sve $R \in \mathcal{R}^N$ vrijedi:*

$$f(R)\ R_i\ a, \ \ za\ sve\ a \in A.$$

Teorem 3.2.4 (Gibbard Satterthwaite)**.** *Pretpostavimo da A ima najmanje tri elementa i da je slika od f A. Direktni mehanizam f je poticajno kompatibilna dominantna strategija ako i samo ako je diktatorski.*

Ovo je jedan od najslavnijih rezultata u teoriji društvenih mehanizama. Gibbard Satterthwaite teorem je rezultat nemogućnosti. Pokazuje da su zahtjevi o poticajno kompatibilnoj dominantnoj strategiji i neograničenoj domeni zajedno prejaki.

U rezultatu Gibbard Satterthwaite pretpostavka da je slika od f jednaka A radije nego da je strogi podskup od A je nevažna. Ako je slika od f strogi podskup od A, možemo redefinirati skup alternativa da bude slika od f. Alternative koje nisu u slici od f neće nikad biti odabrane te stoga preferencije agenata nad ovim alternativama ne mogu utjecati na ishod. Dakle, možemo analizirati situaciju u kojoj ove alternative ne postoje.

Pretpostavka da A ima najmanje tri elementa je važna. Bez ove pretpostavke rezultat nije točan. Pretpostavimo da A ima samo dva elementa. U tom slučaju mnogi mehanizmi su poticajno kompatibilne dominantne strategije. Na primjer, dajući svakom agentu priliku da glasa za jednu od dvije alternative, i potom birajući alternativu s najvećim brojem glasova, s nekim proizvoljnim pravilom u slučaju izjednačenja, to je poticajno kompatibilna dominantna strategija koja očito nije diktatorska.

Dovoljnost Teorema 3.2.4 je očita. Stoga se fokusiramo na dokaz nužnosti. Nastavljamo u dva koraka. Prvo, pokazujemo da je svaki direktni mehanizam koji je poticajno kompatibilna dominantna strategija monoton. Također izlažemo neke jednostavne implikacije monotonosti. Srž dokaza je onda u sljedećem odjeljku, gdje u drugom koraku pokazujemo da je svaki monotoni direktni mehanizam diktatorski.

Definicija 3.2.5. *Direktni mehanizam f je monoton ako vrijedi: kada je $f(R) = a$, i za svakog agenta i te svaku alternativu b relacija preferencije $R_i^{'}$ rangira a iznad b ako i R_i rangira, onda $f(R^{'}) = a$. Formalno:*

$$f(R) = a \text{ te za sve } i \in I : \ [aR_i^{'}b \text{ za sve } b \in A \text{ takve da } aR_ib]$$

$$\Rightarrow f(R^{'}) = a.$$

Propozicija 3.2.6. *Ako je f poticajno kompatibilna dominantna strategija, onda je ona monotona.*

Dokaz. Prvo pretpostavimo da se profili preferencija R i $R^{'}$ razlikuju samo u i-toj komponenti te da vrijedi $f(R) = a$ i $R^{'}$ takva da $aR_ix \Rightarrow aR_i^{'}x, \ \forall x \in A$. Trebamo pokazati: $f(R^{'}) = a$. Pretpostavimo suprotno, $f(R^{'}) = b \neq a$. Zbog poticajne kompatibilnosti dominantne strategije vrijedi: $f(R^{'})R_i^{'}f(R)$ i $f(R)R_if(R^{'})$, odnosno $bR_i^{'}a$ i aR_ib. Iz aR_ib slijedi $aR_i^{'}b$. Konačno, imamo $bR_i^{'}a$ i $aR_i^{'}b$. Dakle, mora vrijediti $b = a$.
Ako se $R^{'}$ i R razlikuju u više od jedne komponente, onda konstruiramo niz profila preferencija sa svojstvom da počinjemo sa R, a završavamo sa $R^{'}$, i svaki se element niza razlikuje od prethodnog elementa u samo jednoj komponenti i. Onda možemo uzastopno primjeniti gornji argument na svaki element niza, zaključujući u svakom koraku da odabrana alternativa mora biti a, te stoga zadržavamo zaključak $f(R^{'}) = a$. □

Sada uvodimo dvije jednostavne implikacije monotonosti.

Definicija 3.2.7. *Direktni mehanizam f je monoton na skupu ako vrijedi: kad god $f(R) \in B$ za neki $B \subseteq A$, te se za svakog agenta i relacija preferencije $R_i^{'}$ razlikuje od relacije preferencije R_i samo u pogledu rankinga elemenata od B, onda $f(R^{'}) \in B$. Formalno:*

$$f(R) \in B \text{ i } [aR_i^{'}a' \Leftrightarrow aR_ia' \text{ za sve } a, a' \in A \text{ takve da najmanje jedan od } a, a' \text{ nije u } B]$$

$$\Rightarrow f(R^{'}) \in B.$$

Propozicija 3.2.8. *Ako je f monotona, onda je i monotona na skupu.*

Dokaz. Neka je f monotona i neka se $R^{'}$ razlikuje od R samo u pogledu rankinga elemenata od B. Pretpostavimo $f(R^{'}) \notin B$. Tada monotonost implicira $f(R) = f(R^{'})$, što je u kontradikciji s $f(R) \in B$. □

Definicija 3.2.9. *Direktni mehanizam f poštuje jednoglasnost*[3] *ako vrijedi: kad god je alternativa a na vrhu svake individualne relacije preferencije, onda je a odabrana od f:*

$$aR_ib \text{ za sve } i \in I \text{ te sve } b \in A \Rightarrow f(R) = a.$$

Propozicija 3.2.10. *Ako je f monotona i slika od f je A, onda f poštuje jednoglasnost.*

Dokaz. Razmotrimo bilo koji $a \in A$. Uzmimo neki profil preferencija R za kojeg je alternativa a na vrhu svake individualne relacije preferencije. Trebamo pokazati da je $f(R) = a$. Jer je slika od f A, postoji neki R_0 takav da je $f(R_0) = a$. Sada povisimo a na vrh svačijeg rankinga i nazovimo taj profil preferencija R_0'. Po monotonosti, mora vrijediti $f(R_0') = a$. Sada u tom profilu preuredimo alternative ispod a tako da dobijemo profil R. Ponovo, po monotonosti, društveni izbor i dalje mora ostati a, odnosno $f(R) = a$. □

Svaki monotoni direktni mehanizam je diktatorski

Propozicija 3.2.11. *Pretpostavimo da A ima najmanje tri elementa i da je slika od f A. Ako je f monoton, onda je diktatorski.*

Dokaz. Pokazat ćemo da za svaku alternativu $a \in A$, postoji *diktator za a*, tj. postoji agent i takav da kad god je a na vrhu rankinga od i, a je odabran. Ako postoji takav diktator za svaku alternativu a, tada diktator mora biti isti individualni i za svaku alternativu. Inače, ako diktator za a ima a na vrhu svog rankinga, a diktator za $b(\neq a)$ ima b na vrhu svog rankinga, ishod neće biti dobro definiran. Zaključujemo da diktator mora biti isti agent i za svaku alternativu te je stoga taj agent i diktator.

Sada fiksirajmo alternativu $a \in A$. Da bismo pokazali da postoji diktator za a, dovoljno je pronaći jedan profil preferencija gdje je a na vrhu rankinga nekog agenta i, ali na dnu rankinga svih ostalih, i gdje je društveni izbor a. Jedan takav profil je prikazan na Slici 3.1. Na ovoj slici, i na sljedećim slikama, svaki stupac odgovara rankingu alternativa u A jednog agenta, gdje je najviše rangirana alternativa na vrhu. Slika 3.1 pokazuje specifičan ranking, uključujući alternative osim a, ali na trenutak to nije bitno za raspravu. Na Slici 3.1 agent n rangira a na vrhu, dok ga svi ostali rangiraju na dnu. Pronalazak jednog takvog profila u kojemu je društveni izbor a je dovoljan zato što svaki drugi profil u kojem agent n rangira a na vrhu može biti izveden iz onog prikazanog na slici, mijenjajući preferencije bez pomicanja bilo koje druge alternative iznad a i stoga, po monotonosti, društveni izbor za svaki drugi profil u kojem agent n rangira a na vrhu je a.

Dolazimo do zaključka da postoji neki profil preferencija R i neki agent n takav da prema R agent n rangira a najviše dok ga svi ostali agenti rangiraju najniže, kao na Slici 3.1, i $f(R) = a$ kroz niz koraka polazeći od profila prikazanog na Slici 3.2. U profilu na

[3] eng. respects unanimity

$$
\begin{array}{ccccccc}
R_1 & \dots & R_{n-1} & R_n & R_{n+1} & \dots & R_N \\
. & & . & a & . & & . \\
. & & . & c & . & & . \\
. & & . & b & . & & . \\
. & & . & . & . & & . \\
. & & . & . & . & & . \\
. & & . & . & . & & . \\
c & \dots & c & . & c & \dots & c \\
b & \dots & b & . & b & \dots & b \\
a & \dots & a & . & a & \dots & a
\end{array}
$$

Slika 3.1: Društveni izbor je a

$$
\begin{array}{ccccccc}
R_1 & \dots & R_{n-1} & R_n & R_{n+1} & \dots & R_N \\
a & \dots & a & a & a & \dots & a \\
. & & . & . & . & & . \\
. & & . & . & . & & . \\
. & & . & . & . & & . \\
b & \dots & b & b & b & \dots & b
\end{array}
$$

Slika 3.2: Društveni izbor je a

Slici 3.2 društveni izbor mora biti a jer f poštuje jednoglasnost. Sad pretpostavimo da pomaknemo b prema gore u rankingu agenta 1, dok god nije točno ispod a, kao što je prikazano na Slici 3.3. Tada, po monotonosti, društveni izbor mora ostati a.

Sad pretpostavimo da pomaknemo b jedan korak gore, na vrh rankinga agenta 1, kao što je prikazano na Slici 3.4. Tada monotonost na skupu, kao što je definirana iznad (skup $B = \{a, b\}$), povlači da je društveni izbor ili a ili b.

Sada ćemo identificirati agenta n za kojeg ćemo pokazati da je ona ili on diktator za b. Ako je na Slici 3.4 društveni izbor b, onda postavimo $n = 1$. Međutim, ako društveni izbor ostaje a na Slici 3.4, ponavljamo istu proceduru za agenta 2 itd. Prvi agent za kojeg se društveni izbor mijenja iz a u b je agent kojeg identificiramo kao našeg kandidata za diktatora n. Mora postojati takav agent jer, nakon što prođemo sve agente, dođemo do profila gdje svi agenti stavljaju alternativu b na vrh svog rankinga i, kako f poštuje jednoglasnost, društveni izbor je b. Na Slikama 3.5 i 3.6 pokazujemo opću situaciju za agenta n prije i

R_1	$\dots$	R_{n-1}	R_n	R_{n+1}	$\dots$	R_N
a	$\dots$	a	a	a	$\dots$	a
b	$\dots$	.	.	.	$\dots$	.
.		.	.	.		.
.		.	.	.		.
.		.	.	.		.
.		b	b	b	$\dots$	b

Slika 3.3: Društveni izbor je *a*

R_1	$\dots$	R_{n-1}	R_n	R_{n+1}	$\dots$	R_N
b	$\dots$	a	a	a	$\dots$	a
a	$\dots$	.	.	.	$\dots$	.
.		.	.	.		.
.		.	.	.		.
.		.	.	.		.
.		b	b	b	$\dots$	b

Slika 3.4: Društveni izbor je *a* ili *b*

poslije nego što se društveni izbor promijeni iz *a* u *b*.

R_1	$\dots$	R_{n-1}	R_n	R_{n+1}	$\dots$	R_N
b	$\dots$	b	a	a	$\dots$	a
a	$\dots$	a	b	.	$\dots$	.
.		.	.	.		.
.		.	.	.		.
.		.	.	.		.
.		.	.	b	$\dots$	b

Slika 3.5: Društveni izbor je *a*

Slike 3.7 i 3.8 pokazuju iste profile kao i Slike 3.5 i 3.6 osim što smo pomakli alternativu *a* na dno rankinga agenata $i < n$ i pomakli *a* na drugo mjesto od dolje za agente $i > n$.

R_1	$\dots$	R_{n-1}	R_n	R_{n+1}	$\dots$	R_N
b	$\dots$	b	b	a	$\dots$	a
a	$\dots$	a	a	.	$\dots$	.
.		.	.	.		.
.		.	.	.		.
.		.	.	.		.
.		.	.	b	$\dots$	b

Slika 3.6: Društveni izbor je *b*

R_1	$\dots$	R_{n-1}	R_n	R_{n+1}	$\dots$	R_N
b	$\dots$	b	a	.	$\dots$	.
.	$\dots$	.	b	.	$\dots$	.
.		.	.	.		.
.		.	.	.		.
.		.	.	a		a
a		a	.	b	$\dots$	b

Slika 3.7: Društveni izbor je *a*

R_1	$\dots$	R_{n-1}	R_n	R_{n+1}	$\dots$	R_N
b	$\dots$	b	b	.	$\dots$	.
.	$\dots$	.	a	.	$\dots$	.
.		.	.	.		.
.		.	.	.		.
.		.	.	a		a
a		a	.	b	$\dots$	b

Slika 3.8: Društveni izbor je *b*

Sada prosuđujemo da u ovim profilima društveni izbor mora biti isti kao na Slikama 3.5 i 3.6. Za Sliku 3.8 to slijedi iz Slike 3.6 i monotonosti da izbor mora biti *b*. Sada razmotrimo profil na Slici 3.7. Uspoređujući Slike 3.7 i 3.8, iz monotonosti na skupu (s $B = \{a, b\}$), možemo zaključiti da društveni izbor na Slici 3.7 mora biti a ili b. Ali, ako bi odabrana alternativa bila b, tada bi, po monotonosti, na Slici 3.5 također trebala biti b. Stoga, na Slici 3.7 izbor mora biti a.

R_1	$\dots$	R_{n-1}	R_n	R_{n+1}	$\dots$	R_N
.		.	a	.		.
.		.	c	.		.
.		.	b	.		.
.		.	.	.		.
.		.	.	.		.
.		.	.	.		.
c	$\dots$	c	.	c	$\dots$	c
b	$\dots$	b	.	a	$\dots$	a
a	$\dots$	a	.	b	$\dots$	b

Slika 3.9: Društveni izbor je a

Sada razmotrimo preferencije na Slici 3.9. Pozicija alternative a se nije promijenila u odnosu na druge alternative u usporedbi sa Slikom 3.7, i stoga društveni izbor mora biti a.

Konačno, usporedimo Sliku 3.9 sa Slikom 3.1. Izbor na Slici 3.1 mora biti a ili b, zbog monotonosti na skupu, gdje je $B = \{a, b\}$. Ali, ako bi na Slici 3.1 izbor bio b, onda bismo mogli alternativu c pomaknuti na vrh svačijih preferencija, i po monotonosti bi izbor i dalje morao biti b, što je kontradikcija s činjenicom da f poštuje jednoglasnost. Stoga, izbor na Slici 3.1 mora biti a. □

3.3 Poticajna kompatibilnost dominantnih strategija na ograničenim domenama

Prirodni način opuštanja strogih zahtjeva Teorema 3.2.4 kako bi se dobio pozitivniji rezultat je razmatranje ograničenije domene preferencija. U ovom odjeljku skup preferencija za bilo koji individualni i koji razmatramo nije više potpun skup $\mathcal{R}$, već neki podskup $\hat{\mathcal{R}}$ od $\mathcal{R}$.

Najpoznatije ograničenje na domene preferencija koje omogućava poticajno kompatibilne dominantne strategije koje nisu diktatorske je *jednovršnost*[4]. Pretpostavimo da su alternative u A označene cijelim brojevima $1, 2, ..., K$. Relaciju preferencije R_i agenta i zovemo jednovršnom ako postoji $k(i) \in \{1, 2, ..., K\}$ takav da:

[4] eng. single peakedness

(i) agent i preferira alternativu $k(i)$ nad svim ostalim alternativama

$$k(i)\ R_i\ a,\ za\ sve\ a \in A$$

(ii) preferencije agenta i opadaju monotono prema lijevo i prema desno od $k(i)$

$$ako\ l \geq k(i)\ onda\ l\ R_i\ (l+1)\ i\ ako\ l \leq k(i)\ onda\ l\ R_i\ (l-1).$$

Označimo sa $\hat{\mathcal{R}}$ skup svih jednovršnih preferencija. Definicija ovog skupa ovisi o tome kako su alternative označene s brojevima. U ovom odjeljku zadržavamo ovo označavanje fiksnim i, radi jednostavnosti, ne odražavamo ovisnost skupa $\hat{\mathcal{R}}$ o označavanju u našoj notaciji. Ograničena domena jednovršnih preferencija je onda $\hat{\mathcal{R}}^N$.

Domena jednovršnih preferencija se može pojaviti prirodnom u sljedećoj okolini. Alternative su kandidati za neku političku poziciju. Direktni mehanizmi su metode za odabir jednog kandidata iz skupa kandidata. Kandidati su označeni prema njihovim pozicijama na spektru lijevo-desno, a alternativa $k(i)$ odražava idealnu poziciju glasača i na ovom spektru. Onda se čini vjerojatnim da preferencije opadaju monotono kako se kandidati nalaze dalje od idealne pozicije agenta i.

Propozicija 3.3.1. *Pretpostavimo da A ima najmanje tri elementa i da je slika od f A. Ako su preferencije jednovršne, onda su one direktni mehanizmi koji su poticajno kompatibilne dominantne strategije, ali nisu diktatorske.*

Dokaz. Pretpostavimo da je N neparan. Za svakog agenta i, označimo sa $k(i)$ alternativu koja je najviše rangirana prema R_i. Pravilo f koje odabire alternativu a_m, gdje je m medijan vektora $(k(1), k(2), ..., k(N))$, je poticajno kompatibilna dominantna strategija. Nazvat ćemo ovo pravilo *mehanizam medijanskog glasača*. Razmotrimo bilo kojeg agenta i te uzmimo prijavljene preferencije drugih agenata R_{-i} kao dane i fiksne. Medijan od $(k(1), k(2), ..., k(N))$ će biti između $\frac{N-1}{2}$-te najveće i $\frac{N+1}{2}$-te najveće alternative među najpreferiranijim alternativama $N-1$-og agenta osim i. Označimo ih sa m_- i m_+. Medijan će biti između ova dva broja neovisno o tome što agent i prijavi. Ako je alternativa koju agent i najviše preferira između ova dva broja, tada on, iskreno prijavljujući svoje preferencije, može osigurati da je njegova najpreferiranija alternativa odabrana. Ako je njegova napreferiranija alternativa manja od m_-, onda iskreno prijavljući svoje preferencije, može osigurati da alternativa m_-, njegova najpreferiranija alternativa iz skupa mogućih medijana, bude odabrana. Slično, ako je njegova najpreferiranija alternativa veća od m_+, iskreno prijavljujući svoje preferencije može osigurati da bude odabrana m_+. Stoga, u svim slučajevima, agent i, prijavljujući iskreno svoje preferencije, osigurava da bude odabrana njegova najpreferiranija alternativa iz skupa mogućih medijana. Dakle, pravilo je poticajno kompatibilna dominantna strategija i očito nije diktatorsko.

Sada pretpostavimo da je N paran. Tada možemo koristiti isto pravilo kao u slučaju da je N neparan, sa sljedećom malom modifikacijom. Proizvoljno odaberemo neku alternativu $a \in A$ i pravimo se da postoji $N + 1$-i agent, tako da je ukupan broj agenata opet neparan, i da je taj agent izrazio preferenciju koja stavlja a na vrh. Isti argument kao gore dokazuje da je ovo pravilo poticajno kompatibilna dominantna strategija. □

Bibliografija

[1] Hemant K. Bhargava, *Optimal Solutions for Mixed Bundling of Two Independently-Valued Goods*, (2011), https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1907310.

[2] Tilman Börgers, *An introduction to the theory of mechanism design*, Oxford University Press, 2015.

[3] Y. Narahari, *Game theory and mechanism design*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2014.

[4] H. L. Royden i P. M. Fitzpatrick, *Real Analysis*, 2010, http://math.harvard.edu/~ctm/home/text/books/royden-fitzpatrick/royden-fitzpatrick.pdf.

Sažetak

U ovom radu bavili smo se dizajnom mehanizama i svojstvima funkcija društvenog izbora.

Prvo poglavlje proučava teoriju probira. Prodavatelj nastoji prodati dobro jednom kupcu te traži optimalnu proceduru kako to učiniti. Pretpostavljamo kvazi linearne funkcije korisnosti, tj. one koje su aditivno separabilne i neutralne na rizik u novcu.

Počinjemo davanjem cijene jednom nedjeljivom dobru. Definiramo kupčev tip kao kupčevu procjenu vrijednosti dobra koja nije poznata prodavatelju. Pitamo se je li odabiranje cijene p za dobro optimalna prodajna strategija. Počinjemo definicijom direktnog mehanizma te iskazujemo princip objave koji nam omogućava da se usredotočimo upravo na takve mehanizme. Uvodimo ograničenja poticajne kompatibilnosti i individualne racionalnosti. Dolazimo do zaključka da je fiksiranje cijene stvarno bio najbolji postupak za prodavatelja. Dalje se okrećemo beskonačno djeljivom dobru. Ponovo definiramo direktni mehanizam u takvom okruženju te korištenjem analogona propozicija iz prethodnog odjeljka dobivamo prodajnu proceduru koja maksimizira očekivani profit.

Na kraju ovog poglavlja dotičemo se i slaganja gdje prodavatelj ima dva različita nedjeljiva dobra, dobro A i dobro B. Zaključujemo da prodavatelj nudi kupcu manju cijenu ako kupi dobra zajedno nego da ih je kupio odvojeno. To je iznenađujuće s obzirom da su, iz kupčevog stajališta, dobra potpuno nepovezana.

U sljedećem poglavlju dajemo primjere mehanizama gdje postoji jedan prodavatelj i dva potencijalna kupca. Pobjednički kupac je onaj koji je ponudio najviše, a njegova isplata prodavatelju je ili najviša ponuda ili druga najviša ponuda. Ova dva slučaja implementiramo kroz direktne i indirektne mehanizme. Kod indirektnih mehanizama to su poznate aukcije prve, odnosno druge cijene, sa zapečaćenim ponudama.

Posljednje poglavlje bavi se neprenosivom korisnošću. Napuštamo pretpostavke o aditivnoj separabilnosti i neutralnosti na rizik.

Imamo konačan skup agenata $I = \{1, 2, ..., N\}$ koji moraju izabrati jednu alternativu iz konačnog skupa A međusobno isključujućih alternativa. Svaki agent ima relaciju preferencije R_i nad A. Ponovo definiramo direktni mehanizam koji se u ovom slučaju naziva funkcija društvenog izbora. Također definiramo i poticajno kompatibilnu dominantnu strategiju te diktatorstvo. Iskazujemo teorem Gibbard Satterthwaite, ključni teorem ovog rada. On kaže da ako pretpostavimo da A ima najmanje tri elementa i da je direktni mehanizam

f surjektivan, tada je f poticajno kompatibilna dominantna strategija ako i samo ako je diktatorski. Koristeći se brojnim pomoćnim propozicijama pomno izlažemo dokaz ovog teorema.
Za kraj navodimo moguće opuštanje strogih zahtjeva GS teorema ograničavanjem domene. Uvodimo jednovršne relacije preferencije. U slučaju takvih preferencija i istih pretpostavki kao kod GS teorema, za razliku od prethodnog rezultata, postoje direktni mehanizmi koji su poticajno kompatibilne dominantne strategije, ali nisu diktatorski.

Summary

In this paper we discussed mechanism design and properties of social choice functions.

First chapter studies theory of screening. Seller seeks to sell the good to one buyer and tries to find an optimal selling procedure to do so. We assume quasi linear utility functions ie. these who are additively separable and risk neutral in money.

We start by pricing a single indivisible good. We define buyer's type as buyer's valuation of the good that is not known to the seller. We wonder if picking a price p of the good is optimal selling strategy. We start by defining direct mechanism and state revelation principle which shows us that without loss of generality we can restrict our attention to these mechanisms. We introduce incentive compatibility and individual rationality constraints. We come to a conclusion that fixing a price really is best what seller can do.

Further we turn to infinitely divisible good. Again we define direct mechanism in such environment and by using analogous propositions to the ones in previous section we get selling procedure that maximizes expected profit.

In the end of this chapter we mention bundling where seller has two distinct indivisible goods, good A and good B. We conclude that seller offers the buyer lower price if he buys goods as a bundle than if he had bought them separately. That is surprising considering that, from buyer's point of view, goods are entirely unrelated.

In the next chapter we give examples of mechanisms where there is one seller and two potential buyers. The highest bidder is declared the winner and he pays to the seller either the highest bid or the second highest. We implement these two cases by direct and indirect mechanisms. In implementation by indirect mechanisms we have famous first price and second price auctions with sealed bids.

The last chapter studies non-transferrable utility. We abandon assumptions about additive separability and risk neutrality.

There is a finite set of agents $I = \{1, 2, ..., N\}$ which have to choose one alternative from a finite set A of mutually exclusive alternatives. Each agent has a preference relation R_i over A. Again we define direct mechanism which, in this case, we call social choice function. Also, we define dominant strategy incentive compatibility and dictatorship. We state Gibbard Satterthwaite theorem, essential theorem of this paper. It states that if we assume that A has at least three elements and that direct mechanism f is surjective, then f is a

dominant strategy incentive compatible if and only if it is dictatorial. Using a numerous auxiliary propositions we expose proof of this theorem in detail.

For the end we cite possible relaxation of stringent requirements of GS theorem by restricting the domain. We introduce single peaked preference relations. In case of these preferences and same assumptions as in GS theorem, unlike previous result, there are direct mechanisms which are dominant strategy incentive compatible but not dictatorial.

Životopis

Ja, Ivana Juranov, rođena sam 6. svibnja 1993. godine u Zadru. Školovanje sam započela 1999. godine u Osnovnoj školi Smiljevac te nastavila u matematičkom smjeru Gimnazije Franje Petrića. Tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja sudjelovala sam na brojnim natjecanjima iz matematike, od čega dva puta na državnoj razini. 2011. godine upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. 2014. godine stekla sam titulu sveučilišne prvostupnice matematike te iste godine upisala diplomski studij Financijske i poslovne matematike.