Izvor polarizacijski spregnutih parova fotona i testiranje Bellove nejednakosti

Peranić, Matej

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:173015

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Matej Peranić

Izvor polarizacijski spregnutih parova fotona i testiranje Bell-ove nejednakosti

Diplomski rad

Zagreb, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

Matej Peranić

Diplomski rad

Izvor polarizacijski spregnutih parova fotona i testiranje Bell-ove nejednakosti

Voditelj diplomskog rada: dr. sc. Martin Lončarić

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2018.

Hvala mentoru dr. sc. Martinu Lončariću na pomoći i vremenu izdvojenom za izradu ovog diplomskog rada. Također, zahvaljujem obitelji na podršci tijekom školovanja i Karli na strpljenju i ljubavi.

Sažetak

Kvantno sprezanje parova fotona od velikog je značaja u kvantnoj optici te nalazi primjenu u područjima kvantne kriptografije, kvantne teleportacije i razvoju kvantnih računala. S obzirom na brzinu prijenosa informacija i slabu interakciju sa okolinom, fotoni su idealni za brz, efikasan i siguran prijenos informacije te imaju veliku ulogu u razvoju kvantnih komunikacijskih mreža. U ovom diplomskom radu opisan je eksperimentalni postav za dobivanje polarizacijski spregnutih parova fotona valnih duljina 810 nm koji je realiziran u Istraživačkoj jedinici za fotoniku i kvantnu optiku Instituta Ruđer Bošković u Zagrebu. Osim opisa realizacije postava, predstavljeni su eksperimentalni rezultati mjerenja korelacije polarizacijskih stanja spregnutih fotona te je potvrđeno narušenje Bell-ove nejednakosti u CHSH obliku od 114 standardnih devijacija od klasične granice.

Ključne riječi: foton, kvantno sprezanje, Bell-ova nejednakost

The source of polarization entangled pairs of photons and testing Bell's inequality

Abstract

Quantum entanglement of photon pairs is of a great importance in the quantum optics and it is used in the fields of quantum cryptography, quantum teleportation and the development of quantum computors. Photons are perfect for a quick, efficient and secure way to transfer information considering the speed of data transfer and almost non existing interaction with it's environment. Because of that they have a huge role in the development of quantum communication networks. This masters thesis contains a description of an experimental setup for realization of polarization entangled photon pairs of the wavelength of 810 nm. The experiment has been done at the Photonics and quantum optics research unit at the Ruđer Bošković Institute in Zagreb. In addition to the description of the setup, the results of the experimental measurements of correlation of polarized states of the entangled photons have been shown. Also, the experiment confirmed the violation of Bell's inequality in CHSH form of 114 standard deviations from the classical limit.

Keywords: photon, quantum entanglement, Bell's inequality

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Teorija **3**

2.1 Osnove kvantne mehanike 3

2.1.1 Kvantizacija elektromagnetskog polja 4

2.1.2 Qubit 6

2.1.3 Kvantno sprezanje 7

2.1.4 Vrste kvantnog sprezanja 8

2.2 Einstein-Podolski-Rosen paradoks 9

2.3 Bell-ova nejednakost 11

2.4 Proces spontane parametričke konverzije 14

2.5 Kvantna distribucija ključeva 17

3 Eksperiment **19**

3.1 Sagnac-ov interferometar 19

3.1.1 Podešavanje interferometra 19

3.2 Analiza snopa 23

3.3 Filtriranje 26

3.4 Detektori 29

4 Rezultati **32**

4.1 Vidljivost 32

4.2 Intenzitet izvora parova spregnutih fotona 34

4.3 Omjer broja koincidencija i pojedinačnih detekcija 35

4.4 Testiranje Bell-ove nejednakosti 35

5 Zaključak **37**

Literatura **38**

1 Uvod

Sprezanje čestica je kvantnomehanički fenomen koji se pojavljuje kada parovi (ili više) čestica nastanu ili međudjeluju tako da se kvantno stanje pojedinačnih čestica ne može utvrditi neovisno o drugim česticama, već se mora promatrati kvantno stanje sustava kao cjeline, neovisno o udaljenosti između čestica. Iako su začeci kvantne mehanike postavljeni još početkom 20. stoljeća, do pravog razvoja eksperimentalnih metoda se čekalo više od pola stoljeća. Tome je doprinijela i teorijska rasprava u kojoj su najveći doprinos imali Einstein, Podolski i Rosen (EPR) [1] te Schrödinger [2] 1935. godine naglašavajući kako je kvantno sprezanje nemoguće jer narušava teoriju relativnosti. Posljedica toga je i odbacivanje kopenhagenske interpretacije kvantne mehanike koja tvrdi da valna funkcija nudi potpun opis ukupne fizičke stvarnosti. Takav zaključak otvorio je prostor za nove teorije koje su pretpostavile da u kvantnu teoriju moraju biti ugrađeni dodatni elementi stvarnosti (poznati pod nazivom skrivene varijable) kako bi se objasnilo kvantno sprezanje te dobila zatvorena i lokalna interpretacija kvantne mehanike. Tek je Bell [3] 1964. godine došao do teorijskih zaključaka koji bi mogli biti eksperimentalno testirani, a ti testovi bi uključivali kvantno sprezanje. Njihovi rezultati bi dali odgovor na pitanje postoje li skrivene varijable - ukoliko postoje, rezultati bi zadovoljavali Bellove nejednakosti, a s druge strane, njihovo narušenje bi primoralo na odbacivanje takve općenitije teorije čija bi postojeća kvantna teorija bila tek podskup. Potaknuti tim radom, Freedman i Clauser [4] 1972. godine započinju sa prvim eksperimentima mjerenja polarizacije fotona emitiranih u atomskim kaskadama kalcija koji rezultiraju nizom rezultata u eksperimentima Alaina Aspecta [5],[6] 1981. i 1982. godine te potvrđuju narušenje Bellovih nejednakosti. Daljnja istraživanja su išla u smjeru višečestičnih eksperimenata te primjene u kvantnoj kriptografiji [7], [8], kvantnoj teleportaciji [9], [10] te razvoju kvantnih računala [11].

Nakon uvoda, u drugom poglavlju dajemo pregled najvažnijih teorijskih rezultata važnih za ovaj rad - definiramo osnovne pojmove u kvantnoj mehanici, napravljen je izvod hamiltonijana iz Maxwellovih jednadžbi, opisan je fenomen kvantnog sprezanja uz različite tipove sprezanja, napravljeni su izvodi EPR paradoksa te Bell-ove nejednakosti i opisan je proces spontane parametričke konverzije.

U trećem poglavlju opisan je eksperimentalni postav korišten za dobivanje po-

larizacijski spregnutih fotona te provjeru Bell-ove nejednakosti; u potpoglavlju 3.1 detaljno je opisan glavni dio postava - Sagnac-ov interferometar u kojemu dolazi do miješanja fotona što nam omogućuje neraspoznatljivost. U potpoglavlju 3.2 opisan je računalni program pomoću kojega smo promatrali izgled snopa te dobili radijus snopa na mjestu kristala unutar Sagnac-ovog interferometra, u potpoglavlju 3.3 opisano je filtriranje, a u potpoglavlju 3.4 detektori korišteni za brojanje pojedinačnih fotona i efekti koji utječu na njihov rad.

U četvrtom poglavlju prezentirani su rezultati dobiveni izgrađenim postavom - mjerene su veličine koje karakteriziraju kvalitetu izvora - vidljivost, intenzitet izvora parova spregnutih fotona i omjer broja koincidencija i pojedinačnih detekcija. U potpoglavlju 4.4 prikazani su rezultati testiranja Bell-ove nejednakosti u CHSH obliku.

Naposljetku, u zaključku su ukratko ponovljeni glavni rezultati ovoga rada uz navedene daljnje mogućnosti poboljšanja postava te mogućnosti primjene.

2 Teorija

2.1 Osnove kvantne mehanike

Fizikalno stanje možemo definirati kao skup svojstava sustava koji mogu biti istovremeno poznati. U klasičnoj mehanici vrijede određena načela koja za posljedicu imaju da ako je stanje sustava u t_0 u potpunosti poznato te ako su nam poznate sve sile koje djeluju na sustav, tada možemo (u principu) sa sigurnošću odrediti evoluciju sustava. Neka od tih načela su princip savršenog determinizma; sva svojstva (vrijednosti koje se pripisuju fizikalnoj opservabli) fizikalnog sustava S su posve određena u svakom trenutku, princip kontinuiteta; vrijednosti koje neko svojstvo sustava može poprimiti su kontinuirane, i princip separabilnosti; neintereagirajući sustavi S_1 i S_2 ne mogu utjecati jedan na drugi. Stoga, stanje sustava u klasičnoj mehanici možemo opisati točkom u faznom prostoru (sustav ima u potpunosti određen položaj i količinu gibanja u svakom trenutku). Za razliku od klasične, u kvantnoj mehanici situacija je drugačija. Heisenberg-ove relacije neodređenosti [12] nam govore da nekomutirajuće opservable (poput položaja i količine gibanja) ne možemo istovremeno mjeriti sa proizvoljnom preciznošću, a time ni sustav ne možemo opisati točkom u faznom prostoru. U kvantnoj mehanici sva informacija o sustavu je sadržana u vektoru stanja $|\psi\rangle$ koji je definiran u višedimenzionalnom Hilbert-ovom prostoru H:

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |\phi_i\rangle \tag{2.1}$$

Opservable predstavljamo hermitskim operatorima na Hilbert-ovom prostoru te oni djeluju na stanja u pripadnom prostoru tog sustava:

$$O |\phi_j\rangle = o_j |\phi_j\rangle \tag{2.2}$$

Jednadžba (2.2) je svojstvena jednadžba, pri čemu veličine o_j nazivamo svojstvenim vrijednostima te predstavljaju moguće rezultate mjerenja na sustavu, a $|\phi_j\rangle$ nazivamo svojstvenim vektorom. Upravo kako bi svojstvene vrijednosti bile realne (jer opisuju realan sustav), operatori koji predstavljaju opservable moraju biti hermitski. U kontekstu ovoga rada, važno je objasniti kako opisujemo mjerenja u kvantnoj mehanici. Ukoliko izvršimo mjerenje O na sustavu koji se nalazi u stanju $|\psi\rangle$, vjerojatnost dobi-

vanja rezultata o$_j$ je dana očekivanom vrijednošću:

$$P(o_j) =< O >= |\langle \phi_j | \psi \rangle|^2 = |o_j|^2 \tag{2.3}$$

Također, očekivanu vrijednost operatora možemo dobiti pomoću matrice gustoće ρ, što nam je posebno korisno kad se sustav nalazi u miješanom stanju:

$$< O >= tr(O\rho) \tag{2.4}$$

pri čemu vrijedi:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = \sum_{i,j,k} p_i c_{ij} c^*_{jk} |\phi_j\rangle \langle \phi_k| \tag{2.5}$$

te je $\sum_i p_i = 1$.

2.1.1 Kvantizacija elektromagnetskog polja

Kako bismo dobili kvantnu teoriju koja u klasičnoj granici reproducira rezultate klasične elektrodinamike, tj. kvantizirali elektromagnetsko polje (EM) i dobili opis fotona ključan za ovaj rad, krećemo od Maxwell-ovih jednadžbi u vakuumu:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{2.6}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2.7}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2.8}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{2.9}$$

Ako uvedemo vektorski potencijal **A** (u Coulomb-ovom baždarenju: $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) koji zadovoljava:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{2.10}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{2.11}$$

i uvrstimo u izraz (2.9), dobivamo valnu jednadžbu za **A**:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A} = 0 \tag{2.12}$$

Prostorni i vremenski dio vektorskog potencijala možemo separirati, pri čemu su vektorski prostorni modovi definirani kao:

$$\nabla^2 \mathbf{u}_{k,\alpha}(\mathbf{r}) = -k^2 \mathbf{u}_{k,\alpha}(\mathbf{r}) \tag{2.13}$$

pri čemu je k valni broj, a $\alpha = 1, 2$ indeksi koji označavaju polarizaciju. Vektorski potencijal onda možemo pisati kao:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k,\alpha} q_{k,\alpha}(t) \mathbf{u}_{k\alpha}(\mathbf{r}) \tag{2.14}$$

pri čemu su $q_{k\alpha}$ vremenski ovisne amplitude. Ako izraz (2.14) uvrstimo u valnu jednadžbu (2.12), dobivamo:

$$\ddot{q}_{k,\alpha} = -\omega_k^2 q_{k,\alpha} \tag{2.15}$$

Kvantizacija EM polja nas dovodi do rezultata da svaki mod EM polja zapravo možemo promatrati kao harmonički oscilator. Hamiltonijan za pojedini mod tada glasi:

$$H_{k,\alpha} = \frac{1}{2} m\omega^2 q_{k\alpha}^2 + \frac{1}{2m} p_{k,\alpha}^2 \tag{2.16}$$

dok za električno polje možemo pisati:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_{k,\alpha} p_{k,\alpha}(t) \mathbf{u}_{k,\alpha}(\mathbf{r}) \tag{2.17}$$

Da bismo dobili u potpunosti kvantiziranu teoriju, moramo zamijeniti kompeksne brojeve $q_{k,\alpha}$ i $p_{k,\alpha}$ sa operatorima $\hat{q}_{k,\alpha}$ i $\hat{p}_{k,\alpha}$ koji zadovoljavaju komutacijsku relaciju $[\hat{q}_{k,\alpha}, \hat{p}_{k,\alpha}] = i\hbar$. Konačno, možemo zapisati izraz za vektorski potencijal pomoću operatora stvaranja ($\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$) i operatora poništenja ($\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$), iz čega lako dobijemo električno polje ($\hat{\mathbf{E}} = -\partial \hat{\mathbf{A}}/\partial t$):

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k,\alpha} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0}} (\hat{a}_{k,\alpha} \mathbf{u}_{k,\alpha}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} + \hat{a}_{k,\alpha}^\dagger \mathbf{u}_{k,\alpha}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t}) \tag{2.18}$$

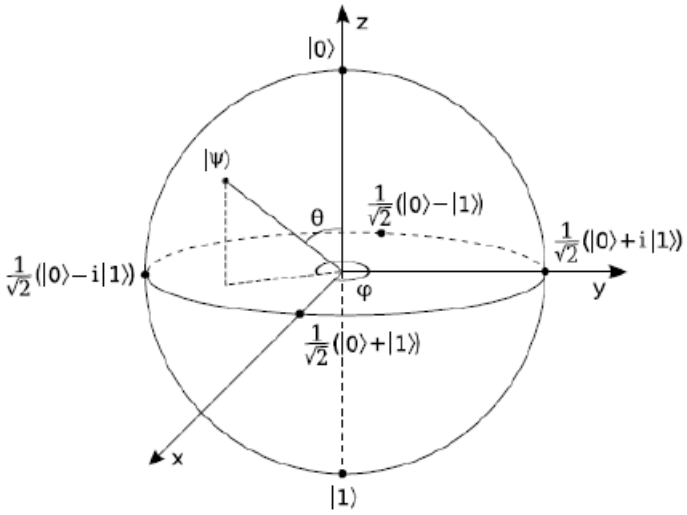
Elektromagnetski hamiltonijan možemo dobiti iz električnog i magnetskog polja, a konačni izraz odgovara hamiltonijanu koji opisuje pojedini mod harmoničkog oscila-

tora:

$$\hat{H}_{EM} = \frac{1}{2}\int d^3r\left(\epsilon_0|\hat{E}|^2+\frac{1}{\mu_0}|\hat{B}|^2\right) = \sum_{k,\alpha}\hbar\omega_k(\hat{a}^\dagger_{k,\alpha}\hat{a}_{k,\alpha}+\frac{1}{2}) \tag{2.19}$$

2.1.2 Qubit

U klasičnoj računalnoj teoriji i teoriji informacije kao jedinica količine informacija se koristi bit koji može imati vrijednost 0 ili 1. Analogno klasičnom bit-u, možemo definirati kvantni sustav sa dva vektora baze koji se pomoću Dirac-ove notacije mogu pisati kao $|0\rangle$ i $|1\rangle$ - qubit. Za razliku od bit-a, qubit može biti u superpoziciji vektora baze (2.1) te ga možemo prikazivati na Bloch-ovoj sferi koja služi kao generalizirani vizualni prikaz kvantnih sustava sa dva nivoa (Slika 1.).



Slika 1. Bloch-ova sfera. Preuzeto iz [25]

Čista stanja qubita se nalazi na površini sfere te se mogu zapisati kao

$$|\psi\rangle = cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

dok se miješana stanja nalaze unutar volumena sfere. Za realizaciju qubita bismo mogli upotrijebiti bilo koji kvantnomehanički sustav sa dva nivoa, primjerice foton i njegovu polarizaciju. Ta stanja su svojstveni vektori Paulijevih matrica:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

sa svojstvenim vrijednostima 1 i -1 (što odgovara logičkim 0 i 1). Stanja polarizacije fotona korištena u ovom radu se također mogu pisati kao stanja na Bloch-ovoj sferi, pri čemu horizontalnoj polarizaciji $|H\rangle$ odgovara stanje $|0\rangle$, vertikalnoj $|V\rangle$ odgovara stanje $|1\rangle$, dijagonalnoj $|D\rangle$ odgovara stanje $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ te antidijagonalnoj $|A\rangle$ odgovara stanje $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$.

2.1.3 Kvantno sprezanje

Kao što smo naveli u poglavlju 2.1, kvantne sustave možemo opisivati u Hilbert-ovom prostoru H. Promotrimo mješovito kvantno stanje n podsustava koje možemo zapisati kao tenzorski produkt njihovih pripadnih potprostora H_i:

$$H = \otimes_{i=1}^{n} H_i$$

Svako stanje podsustava možemo zapisati kao linearnu sumu ortonormiranih vektora baze, tako da ukupno stanje sustava glasi:

$$|\psi_i\rangle = \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_n} c_{j_1,j_2,\ldots,j_n} |k_{j_1}\rangle \otimes |k_{j_1}\rangle \otimes \ldots \otimes |k_{j_n}\rangle$$

Kao primjer možemo promotriti mješovito stanje izgrađeno od dva podsustava, pri čemu ukupno stanje sustava (po navedenom postupku) onda glasi:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} |\phi_i\rangle_A |\phi_j\rangle_B \tag{2.21}$$

Pritom primjetimo da će bilo koji produkt podsustava biti element ukupnog Hilbert-ovog prostora, ali se svaki element ukupnog Hilbert-ovog prostora ne može zapisati kao tenzorski produkt podsustava. Takva stanja koje nije moguće faktorizirati nazivamo spregnutim stanjima. Ukoliko nas zanimaju polarizacijski spregnuti fotoni (označimo ih sa 1 i 2), pripadne valne funkcije još nazivamo i Bell-ovim stanjima [13]:

$$|\psi^{\pm}\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1 |V\rangle_2 \pm |V\rangle_1 |H\rangle_2) \tag{2.22}$$

$$|\phi^{\pm}\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1 |H\rangle_2 \pm |V\rangle_1 |V\rangle_2) \tag{2.23}$$

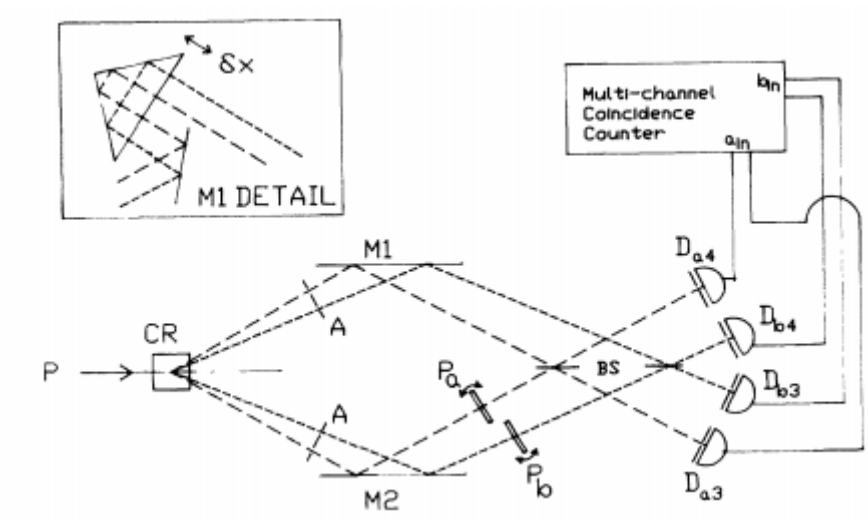
Ukoliko izvršimo mjerenje na bilo kojem od fotona, sa sigurnošću možemo predvidjeti stanje drugoga, dok individualna mjerenja koja ne bi utjecala na drugi foton nisu moguća.

2.1.4 Vrste kvantnog sprezanja

Kvantno sprezanje se može postići na više načina - za fotone možemo obratiti pozornost na njihovu energiju, količinu gibanja i polarizaciju.

Prvo sprezanje količina gibanja ostvarili su Rarity i Tapser [14] 1990. godine u eksperimentu sa dva para prostornih modova izdvojenih iz izvora (Slika 2.). Fotoni su emitirani tako da kada je jedan foton emitiran u jedan od unutarnjih modova, njegov partner će biti u suprotnom vanjskom modu zbog svojstava izvora. Superpozicija dva unutarnja i dva vanjska moda se dobiva pomoću dva djelitelja snopa tako da unutarnji i vanjski modovi postanu neraspoznatljivi. Dobiveno stanje je:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|U\rangle_O |L\rangle_O + e^{i\phi} |U\rangle_I |L\rangle_I)$$

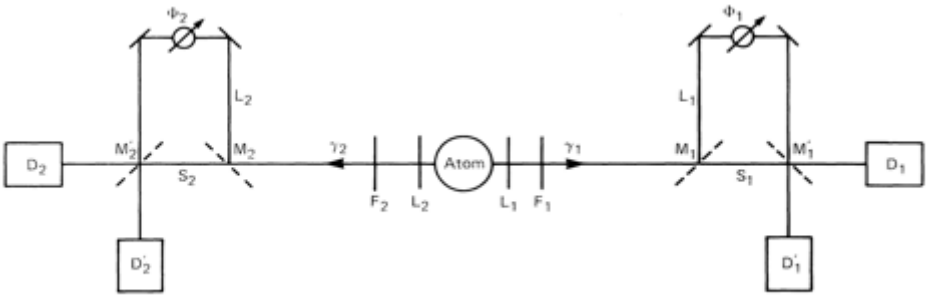


Slika 2. Prikaz postava za mjerenje kvantnog sprezanja količina gibanja fotona. Preuzeto iz [14]

Energetsko-vremensko sprezanje se može postići ukoliko imamo izvor parova fotona koji se proizvode istovremeno u centru Mach-Zender interferometra [15] (Slika 3.). Nastali parovi fotona mogu putovati ili oba kraćim krakom interferometra ili oba dužim krakom. Do sprezanja će doći ukoliko nemamo informaciju o tome kada su fotoni emitirani, što se može postići ako je izvor pobuđeni atom čije je najviše pobuđeno

stanje puno većeg vremena poluživota nego ono međustanja. U tom slučaju nije moguće odrediti iz kojeg atomskog stanja je foton nastao čime se dobiva ukupno stanje:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|s\rangle_1 |s\rangle_2 + e^{i(\phi_1+\phi_2)} |l\rangle_1 |l\rangle_2)$$



Slika 3. Prikaz postava za mjerenje energetsko-vremenskog sprezanja fotona. Preuzeto iz [15]

Najčešće korišten tip sprezanja je upravo onaj korišten u ovome radu - polarizacijsko sprezanje parova fotona koje se može ostvariti putem procesa spontane parametričke konverzije (engl. *spontaneous parametric down-conversion - SPDC*), procesa opisanog u nastavku rada (poglavlje 2.4.).

2.2 Einstein-Podolski-Rosen paradoks

Rad Alberta Einsteina, Borisa Podolskog i Nathana Rosena [1] (poznat kao *EPR*) objavljen je 1935. godine sa zaključkom kako valna funkcija ne opisuje stvarnost u potpunosti te se stoga sama kvantna teorija mora "nadograditi" ili odbaciti kao nepotpuna teorija. U prvom dijelu rada autori rade razliku između stvarnosti i fizikalnih teorija koje bi ju trebali opisivati, naglašavajući kako teorija mora zadovoljavati dva uvjeta: mora biti točna i potpuna. Pod time smatraju da se svaki element stvarnosti, redom, mora moći izmjeriti i mora imati određeni pripadajući element u teoriji. Nadalje, na primjeru čestice sa jednim stupnjem slobode razmatraju njezino stanje i svojstva; ako se čestica nalazi u stanju

$$\psi = e^{(2\pi i/h)p_0 x} \tag{2.24}$$

pri čemu su h Planck-ova konstanta, p_0 neka konstanta te x nezavisna varijabla, možemo promotriti djelovanje operatora količine gibanja $p = (-i\hbar)\partial/\partial x$:

$$p\psi = (-i\hbar)\partial\psi/\partial x = p_0\psi \tag{2.25}$$

Zaključujemo kako za česticu u stanju (2.23) količina gibanja ima vrijednost p_0. Istovremeno, ako promatramo operator položaja čestice q koji na stanje djeluje kao operator množenja, ne možemo sa sigurnošću odrediti položaj čestice, već samo možemo reći da vjerojatnost nalaženja čestice između dvije točke prostora a i b iznosi:

$$P(a,b) = \int_a^b \bar{\psi}\psi dx = \int_a^b dx = b - a \tag{2.26}$$

S obzirom da vjerojatnost ovisi samo o razlici $b-a$, sve vrijednosti položaja su jednako vjerojatne. Točnu vrijednost položaja je moguće dobiti samo mjerenjem koje pak mijenja stanje čestice. Na ovom primjeru autori su pokazali da ako dva operatora A i B ne komutiraju nije moguće istovremeno odrediti pripadne fizikalne veličine. Iz toga slijedi da ili kvantno mehanički opis stvarnosti dan valnom funkcijom nije potpun, ili da kad operatori ne komutiraju pripadne veličine ne mogu imati istovremenu stvarnost.

U drugom dijelu rada autori pretpostavljaju da dva sustava (I i II) intereagiraju između $t = 0$ i $t = T$ nakon čega više nema nikakve interakcije. Pomoću Schrödingerove jednadžbe, poznavajući stanja sustava prije $t = 0$, možemo izračunati stanje sustava I+II u bilo kojem trenutku $t > T$. Međutim, nije moguće dobiti stanja bilo kojeg od sustava I ili II nakon interakcije, već mora doći do "redukcije valnog paketa". Ako izvršimo dva različita mjerenja na sustavu I, kao posljedicu ćemo dobiti dva različita stanja sustava II, dakle, sustavu II moguće je pripisati dvije različite valne funkcije u vremenu $t > T$. Te valne funkcije mogu ujedno biti i svojstvene funkcije dvaju nekomutirajućih operatora. Na taj način autori su pokazali da je moguće sa sigurnošću odrediti fizikalne veličine drugog sustava bez da se izvrše mjerenja na njemu. Krenuvši od pretpostavke da valna funkcije uistinu daje potpun opis stvarnosti, došli smo do zaključka da dvije fizikalne veličine opisane nekomutirajućim operatorima mogu imati istovremeni opis stvarnosti. Taj zaključak je u kontradikciji sa zaključkom prvog dijela rada zbog čega autori zaključuju da kvantno mehanički opis stvarnosti dan valnom funkcijom nije potpun te da ostavlja prostor za sveobuhvatniju teoriju, kasnije

često nazivanu teorijom skrivenih varijabli.

2.3 Bell-ova nejednakost

Skoro 30 godina nakon *EPR*-a, Bell [3] je pokazao kako bi kvantnomehanička teorija sa dodatnim parametrima morala u sebi sadržavati način na koji bi mjerni uređaj na jednom mjestu mogao utjecati na očitavanja na drugom, udaljenom uređaju (nelokalnost). S obzirom da bi se ta informacija morala prenositi trenutno, takva teorija ne bi bila ni Lorentz invarijantna. Time je usmjerio eksperimentalne pokušaje na dokazivanje da je ono što je Einstein smatrao "misterioznim djelovanjem na daljinu", zapravo fizikalno svojstvo sustava spregnutih čestica. Glavni dio njegovog dokaza se sastoji od toga da pretpostavimo da postoji jedan dodatni kontinuirani parametar λ u sustavu para čestica spina 1/2 u singletnom stanju koje se kreću u suprotnom smjeru. Prema kvantnoj mehanici, ako izmjerimo da komponenta spina $\vec{\sigma}_1 \cdot \mathbf{a}$ iznosi $+1$, tada bi komponenta $\vec{\sigma}_2 \cdot \mathbf{a}$ trebala iznositi -1. Rezultat A mjerenja $\vec{\sigma}_1 \cdot \mathbf{a}$ ovisi o $\mathbf{a}$ i λ, a rezultat B mjerenja $\vec{\sigma}_2 \cdot \mathbf{b}$ ovisi o $\mathbf{b}$ i λ tako da vrijedi:

$$A(\mathbf{a}, \lambda) = \pm 1, B(\mathbf{b}, \lambda) = \pm 1 \tag{2.27}$$

pri čemu su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ jedinični vektori. Pretpostavimo da su A i B međusobno neovisni te da rezultat B čestice 2 ne ovisi o postavkama za mjerenje čestice 1. Ako je $\rho(\lambda)$ distribucija vjerojatnosti od λ, tada je očekivana vrijednost umnoška komponenti $\vec{\sigma_1} \cdot \mathbf{a}$ i $\vec{\sigma_2} \cdot \mathbf{b}$:

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) B(\mathbf{b}, \lambda) \tag{2.28}$$

Izraz (2.28) bi trebao biti ekvivalentan kvantnomehaničkom izrazu za očekivanu vrijednost za singletno stanje:

$$< (\vec{\sigma_1} \cdot \mathbf{a})(\vec{\sigma_2} \cdot \mathbf{b}) >= -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \tag{2.29}$$

S obzirom da je ρ normalizirana distribucija vjerojatnosti te da vrijedi (2.27), zaključujemo kako P ne može biti manji od -1, a tu vrijednost postiže za $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, i to ako vrijedi:

$$A(\mathbf{a}, \lambda) = -B(\mathbf{a}, \lambda) \tag{2.30}$$

Iz toga slijedi da možemo pisati:

$$P(\mathbf{a},\mathbf{b}) = -\int d\lambda\rho(\lambda)A(\mathbf{a},\lambda)A(\mathbf{b},\lambda) \tag{2.31}$$

Ako je **c** također jedinični vektor, možemo pisati:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{a},\mathbf{b}) - P(\mathbf{a},\mathbf{c}) &= -\int d\lambda\rho(\lambda)[A(\mathbf{a},\lambda)A(\mathbf{b},\lambda) - A(\mathbf{a},\lambda)A(\mathbf{c},\lambda)] \\ &= \int d\lambda\rho(\lambda)A(\mathbf{a},\lambda)A(\mathbf{b},\lambda)[A(\mathbf{b}\lambda)A(\mathbf{c}\lambda) - 1] \end{aligned} \tag{2.32}$$

pri čemu vrijedi:

$$|P(\mathbf{a},\mathbf{b}) - P(\mathbf{a},\mathbf{c})| \leq \int d\lambda\rho(\lambda)[1 - A(\mathbf{b},\lambda)A(\mathbf{c},\lambda)] \tag{2.33}$$

Drugi član sa desne strane prepoznamo kao P(**b**, **c**) pa možemo pisati:

$$1 + P(\mathbf{b},\mathbf{c}) \geq |P(\mathbf{a},\mathbf{b}) - P(\mathbf{a},\mathbf{c})| \tag{2.34}$$

Osim ako je P konstanta, desna strana jednadžbe (2.34) je za male iznose $|\mathbf{b} - \mathbf{c}|$ reda $|\mathbf{b} - \mathbf{c}|$. Stoga $P(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ ne može biti stacionaran u točki minimuma (-1 za $\mathbf{b} = \mathbf{c}$) te stoga ne može biti jednak kvantnomehaničkoj vrijednosti (2.29). Isto tako, relacija (2.29) ne može biti proizvoljno blisko aproksimirana relacijom (2.28); ako umjesto relacija (2.28) i (2.29) promatramo funkcije $\bar{P}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ i $(-\overline{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}})$, tj. nezavisno uprosječimo funkcije i pretpostavimo da je razlika tih funkcija za svaki **a** i **b** ograničena sa ϵ za kojeg ćemo pokazati da ne može biti proizvoljno mali:

$$|\bar{P}(\mathbf{a},\mathbf{b}) + \overline{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}| \leq \epsilon \tag{2.35}$$

Pretpostavimo da za svaki a i b vrijedi:

$$|\overline{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leq \delta \tag{2.36}$$

Iz relacije (2.35) slijedi:

$$|\bar{P}(\mathbf{a},\mathbf{b}) + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leq \epsilon + \delta \tag{2.37}$$

Iz (2.28) slijedi:

$$\bar{P}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \int d\lambda\rho(\lambda)\bar{A}(\mathbf{a},\lambda)\bar{B}(\mathbf{b},\lambda) \tag{2.38}$$

pri čemu vrijedi $|\bar{A}(\mathbf{a},\lambda)|\leq 1$ te $|\bar{B}(\mathbf{b},\lambda)|\leq 1$. Za $a=b$ možemo pisati:

$$\int d\lambda\rho(\lambda)[\bar{A}(\mathbf{b},\lambda)\bar{B}(\mathbf{b},\lambda)+1]\leq\epsilon+\lambda \tag{2.39}$$

Koristeći (2.38) možemo izračunati:

$$\begin{aligned}\bar{P}(\mathbf{a},\mathbf{b})-\bar{P}(\mathbf{a},\mathbf{c}) &= \int d\lambda\rho(\lambda)[\bar{A}(\mathbf{a},\lambda)\bar{B}(\mathbf{b},\lambda)-\bar{A}(\mathbf{a},\lambda)\bar{B}(\mathbf{c},\lambda)] \\ &= \int d\lambda\rho(\lambda)\bar{A}(\mathbf{a},\lambda)\bar{B}(\mathbf{b},\lambda)[1+\bar{A}(\mathbf{b},\lambda)\bar{B}(\mathbf{c},\lambda)] \\ &\quad -\int d\lambda\rho(\lambda)\bar{A}(\mathbf{a},\lambda)\bar{B}(\mathbf{c},\lambda)[1+\bar{A}(\mathbf{b},\lambda)\bar{B}(\mathbf{b},\lambda)]\end{aligned} \tag{2.40}$$

Nadalje dobivamo:

$$|\bar{P}(\mathbf{a},\mathbf{b})-\bar{P}(\mathbf{a},\mathbf{c})|\leq\int d\lambda\rho(\lambda)[1+\bar{A}(\mathbf{b},\lambda)\bar{B}(\mathbf{c},\lambda)]+\int d\lambda\rho(\lambda)[1+\bar{A}(\mathbf{b},\lambda)\bar{B}(\mathbf{b},\lambda)] \tag{2.41}$$

Konačno, koristeći relacije (2.37), (2.38) i (2.39) zaključujemo:

$$|\bar{P}(\mathbf{a},\mathbf{b})-\bar{P}(\mathbf{a},\mathbf{c})|\leq 1+\bar{P}(\mathbf{b},\mathbf{c})+\epsilon+\delta \tag{2.42}$$

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|-2(\epsilon+\delta)\leq 1-\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+2(\epsilon+\delta) \tag{2.43}$$

$$4(\epsilon+\delta)\geq|\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}-1 \tag{2.44}$$

Kao primjer možemo promotriti slučaj $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=0$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=1/\sqrt{2}$. Tada slijedi:

$$4(\epsilon+\delta)\geq\sqrt{2}-1 \tag{2.45}$$

Stoga zaključujemo kako za bilo koji konačni δ, ϵ ne može biti proizvoljno malen te se izraz (2.29) ne može prikazati u formi klasičnog izraza (2.28) niti aproksimativno.

2.4 Proces spontane parametričke konverzije

Kao izvor spregnutih parova fotona danas se najčešće koristi nelinearni proces spontane parametričke konverzije (engl. *spontaneous parametric down-conversion - SPDC*). *SPDC* je optički proces u kojemu se foton više energije prolaskom kroz kristal nelinearnog odaziva konvertira u par fotona niže energije, pri čemu vrijede zakoni sačuvanja energije i količine gibanja. Materijal ima nelinearni odaziv kada relacija između gustoće polarizacije *P* i električnog polja *E* sadrži nelinearne doprinose:

$$P = \epsilon_0 \chi E + \epsilon_0 \chi^{(2)} E^2 + O(3) \tag{2.46}$$

pri čemu su ϵ_0 permitivnost vakuuma, χ električna susceptibilnost, a $O(3)$ doprinosi višeg reda. Doprinose iznad kvadratičnog možemo zanemariti u prisustvu jakog električnog polja, a upravo je kvadratični član zaslužan za razdvajanje frekvencije pobude ω_p u dva polja (signal ω_s i pratitelj ω_i) unutar nelinearnog medija. Ukoliko fotoni nastali u tom procesu imaju iste polarizacije kao pobuda, kristal se naziva tipom 0, ako su im polarizacije jednake, ali ortogonalne na polarizaciju pobude, radi se o kristalu tipa I, a ukoliko su polarizacije signala i pratitelja međusobno okomite, radi se o kristalu tipa II (Tablica 1.). Za dobivanje parova fotona koriste se različiti kristali, od kojih izdvajamo BBO (β-BaB_2O_4) koji je optički transparentan u području valnih duljina između 190 nm i 3500 nm, LBO(LiB_3O_5) za područje od 160 nm do 2600 nm, BiBO(BiB_3O_6) za područje od 280 nm do 2500 nm te ppKTP (kalij titanil fosfat sa periodičkom strukturom nelinearnog koeficijenta, $KTiOPO_4$) koji se koristi u području frekvencija između 350 nm i 4400 nm. Od navedenih, ppKTP ima najveću efikasnost konverzije od 58,1%, no LBO ima veću temperaturnu stabilnost [16]. Također, spektralna karakteristika signala i pratitelja se mijenja sa dimenzijama kristala na način da *FWHM* (širina spektralne krivulje mjerena na visini od pola amplitude) ovisi o 1/L, pri čemu je L duljina kristala [17]. U ovome radu za dobivanje polarizacijski spregnutih fotona korišten je ppKTP kristal tipa II dimenzija 10 mm$\times$2 mm$\times$1 mm.

Pump	Signal	Idler	Tip kristala
o	o	o	Tip 0
e	o	o	Tip I
e	o	e	Tip II

Tablica 1. Podjela tipova kristala u ovisnosti o polarizacijama. Svjetlost polarizacije okomite na pobudu označavamo sa "o" (engl. *ordinary*), a svjetlost polarizacije jednake polarizaciji pobude označavamo sa "e" (engl. *extraordinary*).

Početno stanje možemo pisati kao $|\phi_0\rangle = |\alpha\rangle_p |0\rangle_s |0\rangle_i$, pri čemu p, s i i označavaju pobudu, signal i pratitelja. Račun radimo u slici interakcije, a ukupni hamiltonijan glasi:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}' \tag{2.47}$$

pri čemu je $\hat{H}_0 = \sum_k \hbar\omega_k(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + 1/2)$. Nelinearni doprinos ukupnom hamiltonijanu je ujedno i dio koji opisuje proces nastanka signala i pratitelja:

$$H' = -\epsilon_0/3 \int d^3r \chi^{(2)} \hat{E}_s^{(-)} \hat{E}_i^{(-)} \hat{E}_p^{(+)} \tag{2.48}$$

Evoluciju stanja opisujemo kao:

$$|\phi\rangle = e^{\frac{-iH't}{\hbar}} |\phi_0\rangle = |\phi_0\rangle + \frac{i\epsilon_0}{\hbar} \int_0^t dt' \int d^3r \chi^{(2)} \hat{E}_s^{(-)} \hat{E}_i^{(-)} \hat{E}_p^{(+)} |\phi_0\rangle + O(2) \tag{2.49}$$

Zadržimo se samo na članovima prvog reda te napravimo razvoj po modovima:

$$|\phi\rangle \propto \int_0^t dt' \sum_{k_p k_s k_i} \int d^3r \chi^{(2)}(\mathbf{r}) \hat{a}_{k_s}^\dagger \hat{a}_{k_i}^\dagger \hat{a}_{k_p} e^{i(\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i)\cdot\mathbf{r}} e^{-i(\omega_p - \omega_s - \omega_i)t'} |\phi_0\rangle \tag{2.50}$$

Ako pretpostavimo da je kristal pravokutnog oblika dimenzija L_x, L_y, L_z, dobivamo:

$$|\phi\rangle \propto \frac{t\chi^{(2)} L_x L_y L_z}{16} \sum_{k_p k_s k_i} sinc[\Delta\omega t/2] sinc[\Delta k_x L_x/2] sinc[\Delta k_z L_z/2] \hat{a}_{k_s}^\dagger \hat{a}_{k_i}^\dagger \hat{a}_{k_p} \tag{2.51}$$

pri čemu su $\Delta\omega = (\omega_p - \omega_i - \omega_s)$, $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i$ te $sinc(x) = sin(x)/x$. Funkcija sinc(x) sadrži valne vektore pobude, signala i pratitelja unutar kristala te nam je važna jer određuje uvjet za usklađenost faza unutar kristala:

$$\frac{n_p(\omega_p)}{c} \cdot \omega_p - \frac{n_s(\omega_s)}{c} \cdot \omega_s - \frac{n_i(\omega_i)}{c} \cdot \omega_i = 0 \tag{2.52}$$

Uz pretpostavke da se pump propagira u +z smjeru, da je t dovoljno velik te da je kristal širok ($L_x, L_y \gg L_z$), dobivamo:

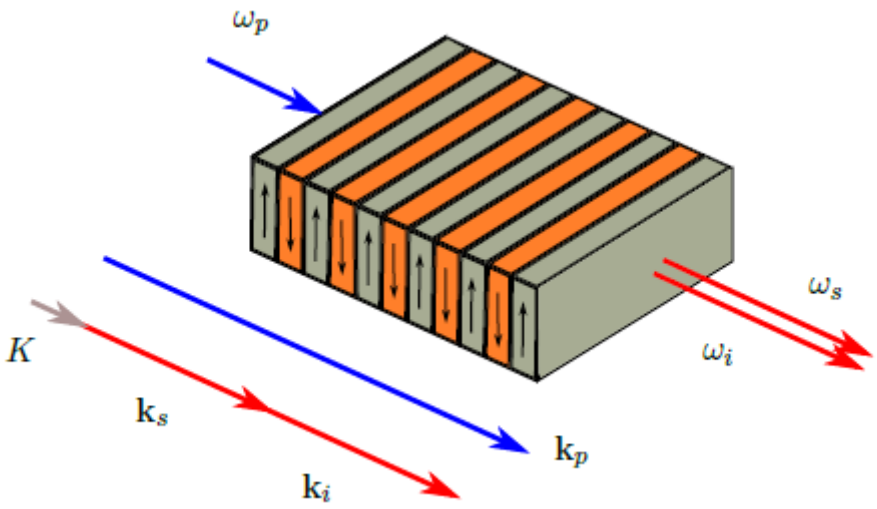
$$|\phi\rangle \propto \sum_{k_s k_i} \delta(\Delta\omega)\delta(\Delta k_x)\delta(\Delta k_y) sinc[\Delta k_z L_z/2]\hat{a}^\dagger_{k_s}\hat{a}^\dagger_{k_i}|\phi_0\rangle \tag{2.53}$$

Dobiveni izraz nam govori da su signal i pratitelj spregnuti, s obzirom da se $sinc[\Delta k_z L_z/2]\hat{a}^\dagger_{k_s}\hat{a}^\dagger_{k_i}$ ne može faktorizirati. Također, signal i pratitelj su korelirani u vremenu, a kako bi bili zadovoljeni zakoni sačuvanja energije i količine gibanja, mora vrijediti:

$$\omega_p - \omega_s - \omega_i = 0 \tag{2.54}$$

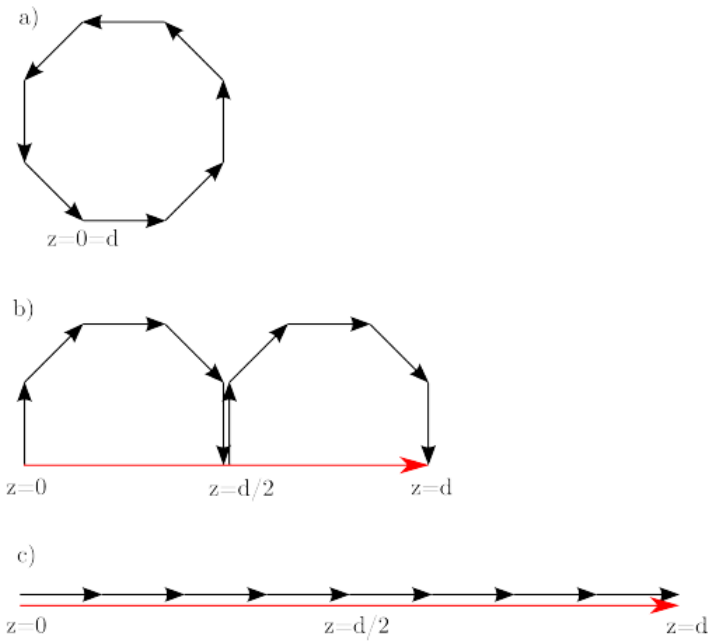
$$\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i = 0 \tag{2.55}$$

pri čemu je $|\mathbf{k}_j| = n_j(w_j)/c; j = p, s, i$, te su $n_j(w_j)$ pripadajući indeksi loma. Kod kristala tipa II, prolaskom pobude kroz kristal trajektorije dobivenih koreliranih parova fotona će biti ograničene na područje ruba dva stošca čije osi su simetrične u odnosu na pobudu, a sprezanje parova fotona će se događati na području sjecišta navedenih stožaca [17]. Da bi postigli kolinearnu emisiju u odnosu na pobudu koristimo kvazi-usklađenost faza, tj. nelinearni kristal se konstruira tako da unutar njega postoje pravilno raspoređene feroelektrične domene (Slika 4.). Takva struktura omogućuje veću efikasnost u generaciji drugih harmonika nego kristali istog materijala bez navedene periodičke strukture.



Slika 4. Prikaz periodički raspoređenih domena unutar kristala te valnih vektora. Preuzeto iz [18]

U jednadžbi (3.8) smo dobili funkciju sinc(x) zbog koje bi dobili destruktivnu interferenciju za tzv. koherencijsku dužinu $L_c = 2\pi/\Delta k$. Mijenjajući predznak nelinearnog koeficijenta duž smjera propagacije za $L = L_c$, možemo postići veliki intenzitet izvora parova spregnutih fotona.



Slika 5. Usporedba amplituda za 3 različita slučaja: a) bez usklađivanja faza, b) kvazi-usklađenost faza, c) idealno usklađivanje faza. Ukoliko nema usklađivanja faza, dolazi do destruktivne interferencije te je za period d ukupna amplituda 0. Pomoću usklađivanja faza sa periodičkim nelinearnim koeficijentom perioda d/2 možemo dobiti ukupnu amplitudu različitu od 0. Idealno usklađivanje faza bi se dobilo kada bi imali kontinuiranu promjenu nelinearnog koeficijenta unutar kristala. Preuzeto iz [17].

2.5 Kvantna distribucija ključeva

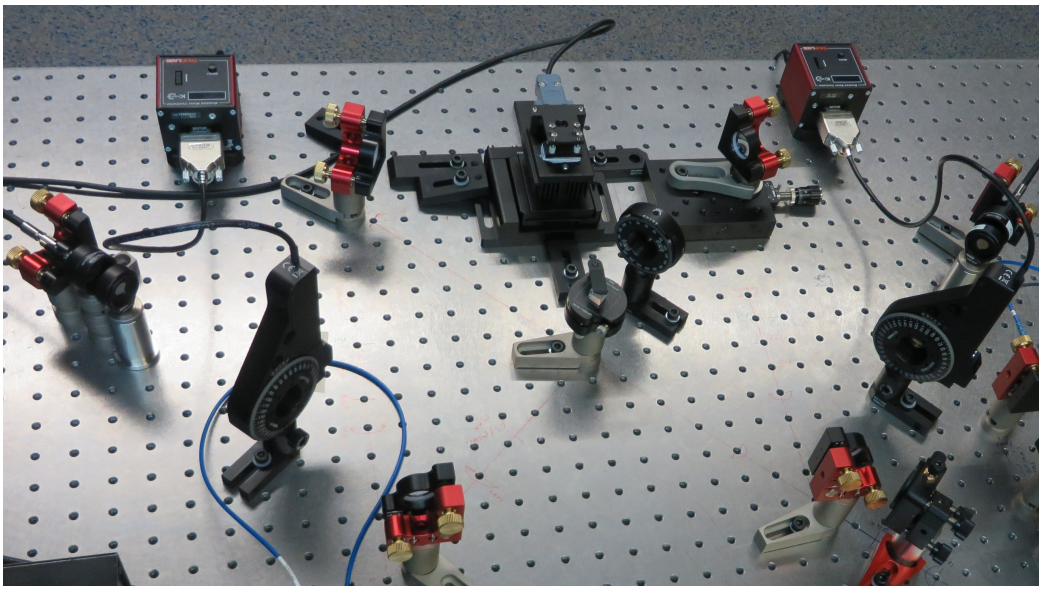
Za razliku od klasične moderne kriptografije koja se temelji na kompleksnim matematičkim algoritmima, kvantno distribuiranje ključeva (engl. *Quantum key distribution - QKD*) se zasniva na temeljnim postavkama kvantne mehanike. Ono nam omogućuje da dvije strane komuniciraju pomoću nasumičnog tajnog ključa sa mogućnošću detektiranja treće strane koja bi pokušala prisluškivati komunikaciju, tj. saznati tajni ključ. Ukoliko netko želi saznati tajni ključ, mora izvršiti mjerenje, a to podrazumijeva utjecaj na sustav koji se može detektirati od strane pošiljatelja i primatelja. QKD

se koristi za proizvodnju i distribuciju ključa koji se potom može iskoristiti za enkripciju (i dekripciju) poruke koja se šalje standardnim komunikacijskim kanalom. Sigurnost komunikacije se u potpunosti oslanja na tajnost ključa kojeg dvije strane moraju izmijeniti sigurnim kanalom. Eksperimentalni postav izgrađen u sklopu ovoga rada može poslužiti kao izvor i osnova komunikacije pomoću QKD-a. Par čestica spina 1/2 u singletnom stanju se razdvaja te se svaka čestica detektira u jednom od dva detektora (Alice i Bob). Ispred detektora se postave polarizatori koji omogućuju mjerenje polarizacije čestica. Alice i Bob nasumično odabiru koju polarizaciju mjere te su mjerenja nazavisna za svaki par čestica. Svako mjerenje može dati dva rezultata, $+1$ ili -1 te se može smatrati jednim bitom informacije. Potom Alice i Bob podijele mjerenja u dvije kategorije; ona mjerenja kada su koristili različite orijentacije polarizatora i ona kada su koristili iste, pri čemu odbacuju sva mjerenja kada ijedan od njih nije uopće detektirao česticu. Nakon toga mogu javno objaviti rezultate mjerenja koje su dobili kada su koristili različite orijentacije, pomoću čega mogu izračunati Bell-ov parametar S, definiran u potpoglavlju 4.4. Na taj način se mogu osigurati da je komunikacija bila neometana te izmjeniti tajni ključ uobičajenim kriptografskim metodama.

3 Eksperiment

3.1 Sagnac-ov interferometar

Dio postava u kojemu dolazi do razdvajanja okomite i horizontalne komponente ulaznog snopa valne duljine 405 nm, prolaska kroz kristal te razdvajanja snopova različitih polarizacija valne duljine 810 nm kako bi ušli u detektor se naziva Sagnac-ovim interferometrom (Slika 6.). Ideja se bazira na uređaju kojeg je 1913. godine konstruirao Georges Sagnac kako bi testirao postojanje etera [19]. Navedeni interferometar možemo prilagoditi za potrebe eksperimenata u kvantnoj optici na način da obični djelitelj snopa zamijenimo polarizacijskim za 405 nm i za 810 nm (engl. *dual-wavelength polarization beam splitter - dPBS*) te dodamo kristal tipa II.



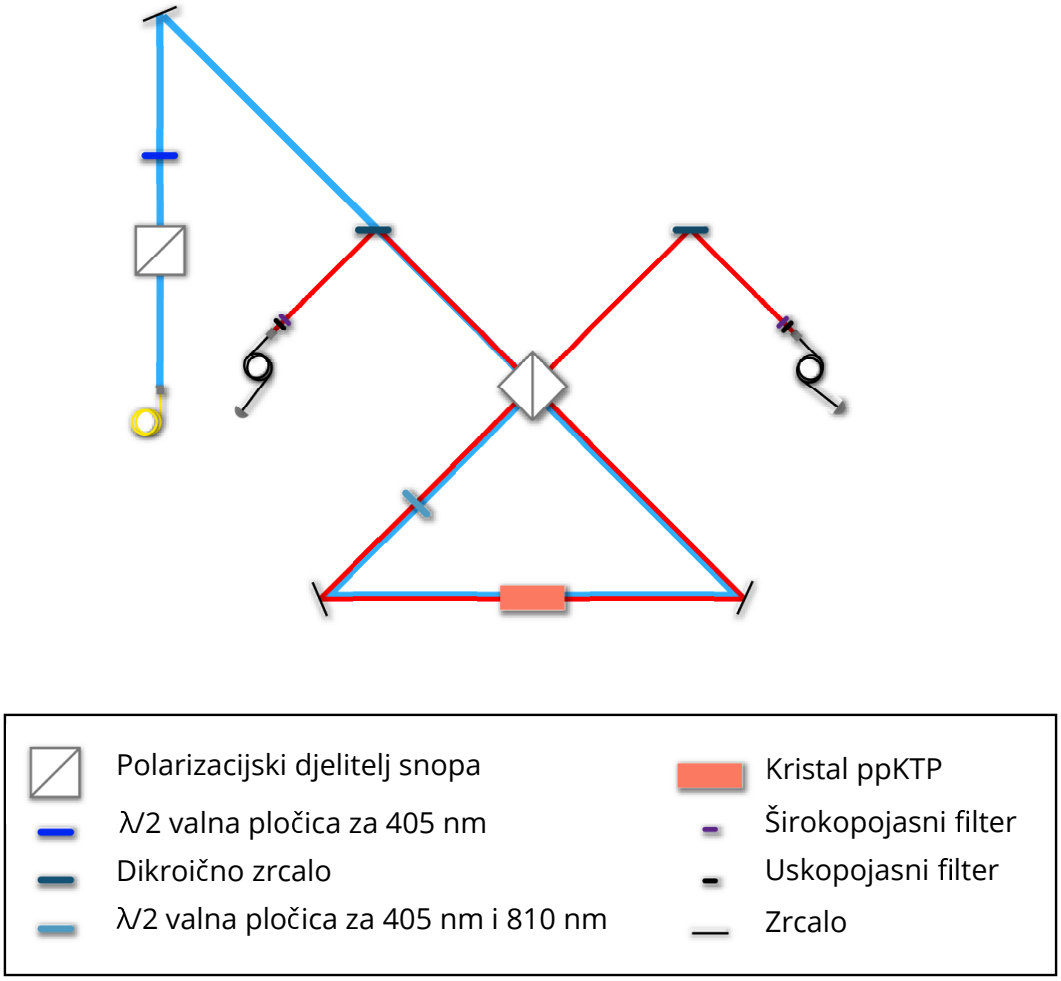
Slika 6. Slika eksperimentalnog postava sa Sagnac-ovim interferometrom iz laboratorija Istraživačke jedinice za fotoniku i kvantnu optiku IRB-a

3.1.1 Podešavanje interferometra

Nakon što smo zraku iz izvora proveli kroz optičko vlakno koje zadržava polarizaciju snopa (engl. *polarization maintaining fiber*, na slici 7. označen žutom bojom), podesili smo sve elemente u postavu kako bi zraka duž cijeloga puta bila na istoj visini te kako bi imali preklapanje pobude sa signalom i pratiteljem. Najprije smo na željene pozicije postavili samo zrcala (bez *dPBS*-a, valnih pločica i kristala) te namjestili put snopa duž linije na kojoj će se nalaziti kristal. Pritom smo pazili da zraka

duž cijele putanje bude na visini na kojoj će se nalaziti kristal, tj. da ravnina u kojoj zraka putuje bude paralelna ravnini optičkog stola. Potom smo isti postupak ponovili sa pomoćnim laserom valne duljine 810 nm kojeg smo u postav uveli kroz jedan od optičkih vlakana koje smo kasnije spajali na detektore (označeni crnom bojom). Drugi detektor smo spojili na mjerač snage te podešavanjem zrcala proveli snop do tog drugog detektora i maksimizirali iznos snage. U trećem koraku smo istovremeno promatrali i snop od 405 nm i 810 nm te smo pomoću zrcala doveli oba snopa na istu visinu te dobili prostorno preklapanje obaju snopova. U sljedećim koracima smo u postav unosili ostale elemente - najprije *dPBS* i kristal u interferometar, a potom i valne pločice te filtere koji eliminiraju šum. Kako bi uistinu dobili spregnute fotone degeneriranih valnih duljina, kristal se mora zagrijavati na temperaturu za koju je proces *SPDC*-a optimalan. Prije daljnjih koraka smo izvršili mjerenja broja koincidencija u ovisnosti o temperaturi kristala te smo našli iznos optimalne temperature od 80,1°C. Valna duljina lasera (Slika 14.) i spektralna karakteristika uskopojasnog filtra (Slika 16.) osiguravaju da na odgovarajućoj temperaturi dobijemo degenerirani signal i pratitelj po valnoj duljini, tj. energiji. Dodatna podešavanja su napravljena zakretanjem *dPBS*-a u interferometru te prilagođavanjem položaja kristala na nosaču. Kada smo podesili cijeli postav, optička vlakna (označena crnom bojom) smo spojili na detektore te smo počeli mjerenja detekcija.

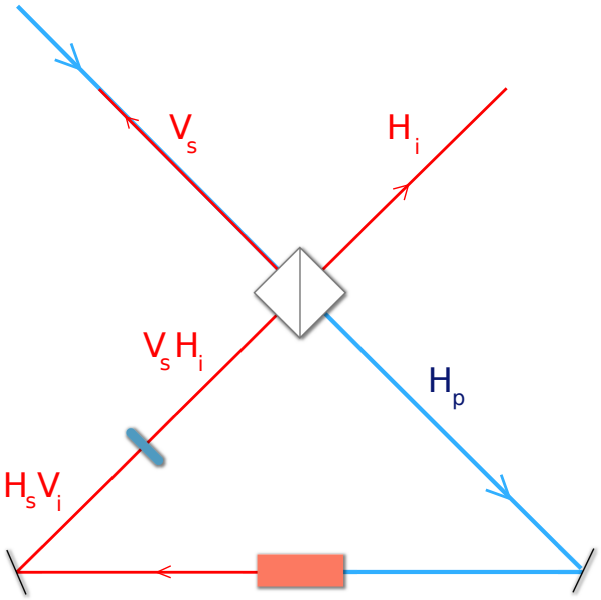
Promotrimo još kako pojedini elementi postava utječu na polarizaciju snopa od izlaska iz optičkog vlakna pa sve do detektora. Nakon izlaska iz vlakna konstantne polarizacije, zraka prolazi kroz prvi *dPBS* te dalje prema Sagnac-ovom interferometru nastavlja samo horizontalna komponenta. Razlog tomu je želja za potpunom kontrolom nad polarizacijom u Sagnac-ovom interferometru. Sljedeća komponenta kroz koju zraka prolazi je $\lambda/2$ pločica za 405 nm kojom možemo kontrolirati promjenu polarizacije što utječe na omjer snage snopa u dvije grane interferometra. Kako bi u obje grane imali jednaku snagu, na *dPBS* u interferometru treba doći dijagonalno polariziran snop, što se postiže zakretanjem $\lambda/2$ pločice na 22.5°. Dikroično zrcalo kroz koje zraka prođe na putu do interferometra ne utječe na snop od 405 nm.



Slika 7. Shema postava za dobivanje polarizacijski spregnutih fotona

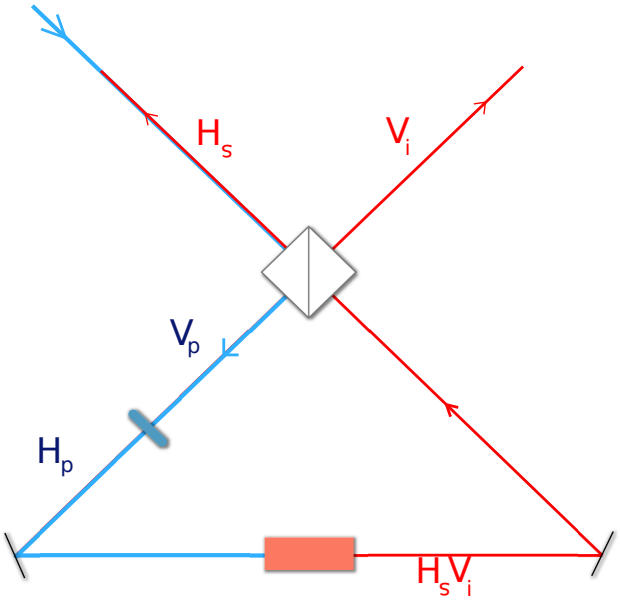
Kako bi lakše pratili put i promjene polarizacije unutar interferometra, promotrimo najprije put snopa u smjeru kazaljke na satu, a potom u suprotnom smjeru (gledano odozgo);

- Prolaskom kroz dikroično zrcalo horizontalna komponenta snopa dolazi do *dPBS*-a te nastavlja put do zrcala. Pritom se snop odbija do ppKTP kristala pri čemu dolazi do konverzije u horizontalno polarizirani signal te vertikalno polarizirani pratitelj. Obje komponente se odbijaju od zrcala te prolaze kroz $\lambda/2$ valnu pločicu za 405 nm i 810 nm (engl. *dual-wavelength half-wave plate - dHWP*) koja je postavljena na 45° pri čemu komponente mijenjaju polarizaciju. Vertikalno polarizirani signal se odbija od *dPBS*-a, dok horizontalno polarizirani pratitelj prolazi te se obje komponente prikupljaju u optička vlakna koja su spojena na detektore (Slika 8.).



Slika 8. Prikaz putanje zraka u smjeru kazaljke na satu

- S druge strane, vertikalna komponenta se dolaskom na *dPBS* reflektira do *dHWP*-a pri čemu se polarizacija mijenja u horizontalnu. Taj dio je nužan kako bi u pp-KTP došao horizontalno polarizirani snop koji se u kristalu također konvertira u horizontalno polarizirani signal i vertikalno polarizirani pratitelj. Dolaskom na *dPBS* pratitelj se reflektira, dok signal prođe nepromijenjen (Slika 9.).

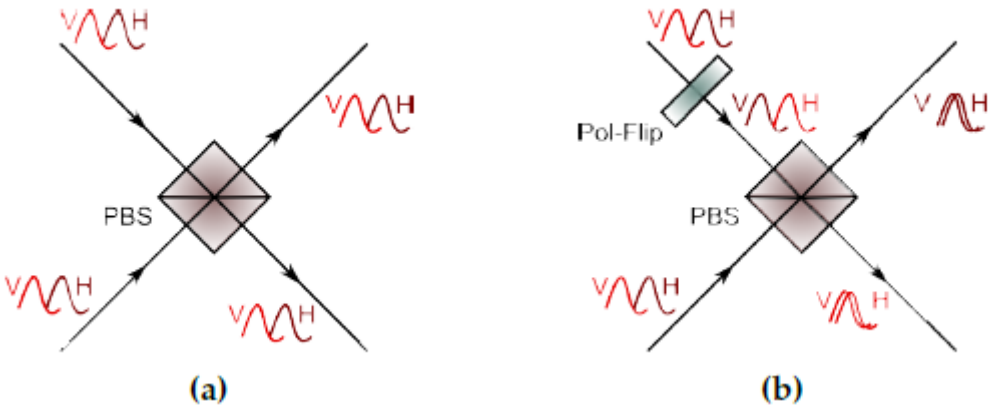


Slika 9. Prikaz putanje zraka u smjeru suprotnom od kazaljke na satu

Superpozicijom snopova dobivamo ukupno stanje:

$$|\psi^-\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1 |V\rangle_2 - |V\rangle_1 |H\rangle_2)$$

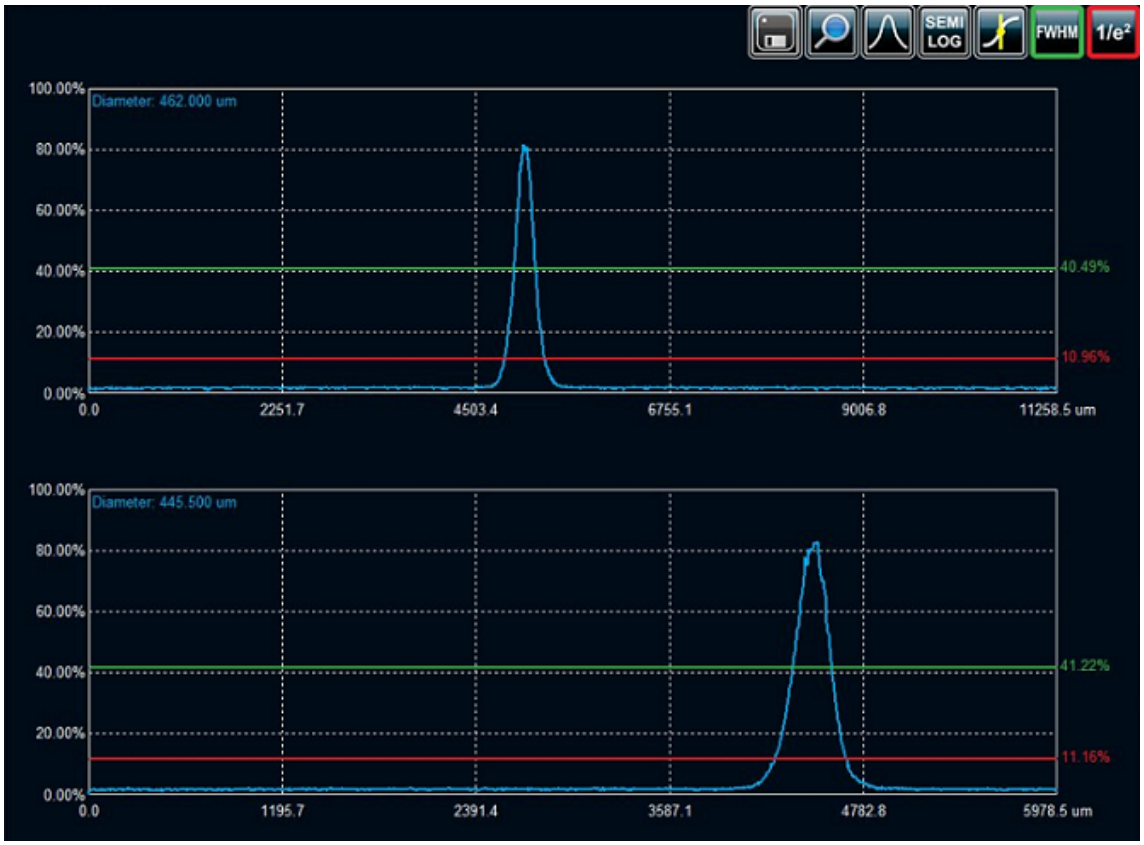
Okomita i vertikalna komponenta polarizacije će se različitim brzinama širiti kroz nelinearni kristal te, kako bi uistinu dobili neraspoznatljivost, potrebno je u postavu imati *dHWP* kako bi se kompenzirala vremenska razlika (Slika 10.).



Slika 10. Prikaz kompenzacije vremenske razlike nastale u kristalu; na slici a) bez *dHWP*-a signal i pratitelj su raspoznatljivi, dok u b) sa *dHWP* dolazi do promjene polarizacije i vremenske kompenzacije između signala i pratitelja. Preuzeto iz [21]

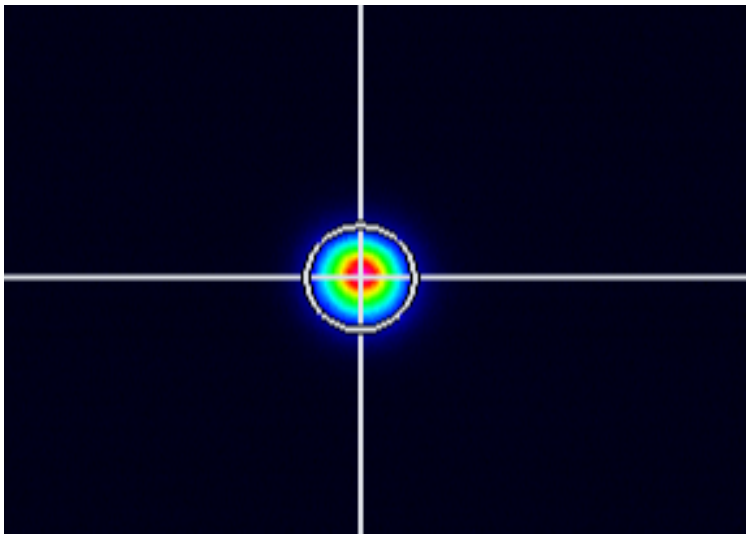
3.2 Analiza snopa

Analiza snopa je rađena pomoću BEAMAGE-3.0 (GENTEC-eo) kamere namijenjene za mjerenje profila laserskog snopa. Pripadajući program ima mogućnosti 3D prikaza, 2D prikaza, XY-prikaz te mogućnost praćenja snopa. 3D prikazom možemo promatrati stvarni izgled snopa, dok 2D prikazom možemo mjeriti radijus snopa. Radijus varira s obzirom na odabranu definiciju: 4-sigma, FWHM, $1/e^2$, itd.. Odabrana definicija korištena za mjerenje radijusa u našem eksperimentu je $1/e^2$, tj. udaljenost između dvije točke koje su za $1/e^2 = 13,5\%$ udaljene od najveće vrijednosti. Nadalje, XY-prikaz predočava presjek duž ravnine, a mogućnost praćenja snopa omogućuje vizualizaciju varijacija središnje pozicije snopa te na taj način možemo pratiti stabilnost snopa tijekom vremena.



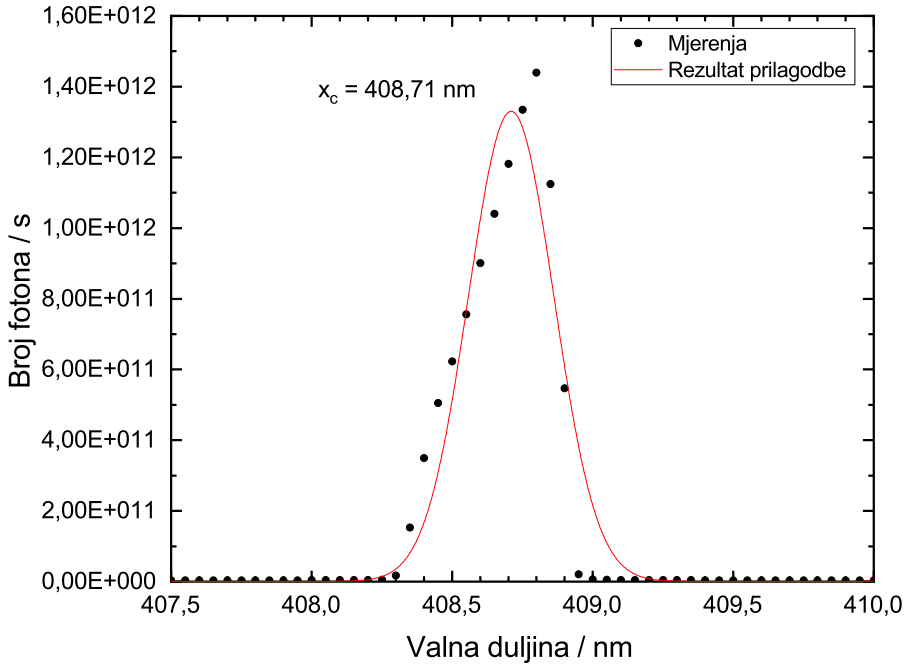
Slika 11. XY-prikaz snopa na mjestu kristala

Kako bismo na mjestu kristala dobili najuži dio snopa (engl. *beam waist*) prije dikroičnog zrcala smo postavili leću fokusa 750 nm. Izmjereni promjer snopa na mjestu kristala za pobudu iznosi $2r_x = 462\mu m$, $2r_y = 445,5\mu m$ (Slika 11.).



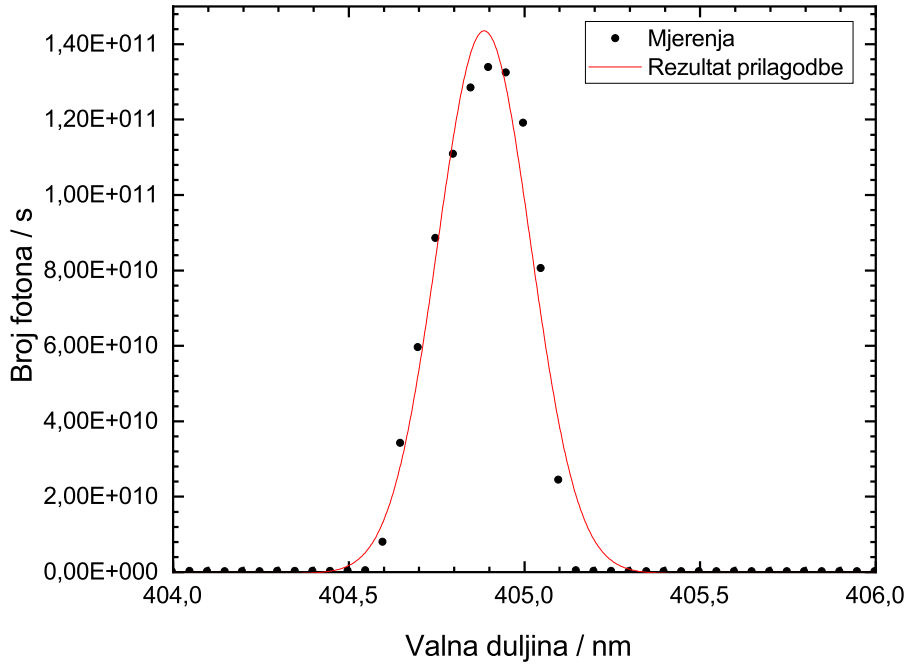
Slika 12. Izgled snopa snimljen BEAMAGE-3.0 kamerom na mjestu kristala

Osim kamerom, snop smo analizirali i Andorovim Kymera 328i spektrografom. Prije analize snopa, spektrograf smo kalibrirali u dijelu spektra pobude Hg-Ne lampom (Slika 13.). Njena karakteristična linija u tom dijelu spektra ima valnu duljinu od 404,6563 nm, a izmjerena valna duljina iznosi 408,71 nm.



Slika 13. Kalibracija Hg-Ne lampom i pripadna prilagodba gaussijanom sa izmjerenom valnom duljinom

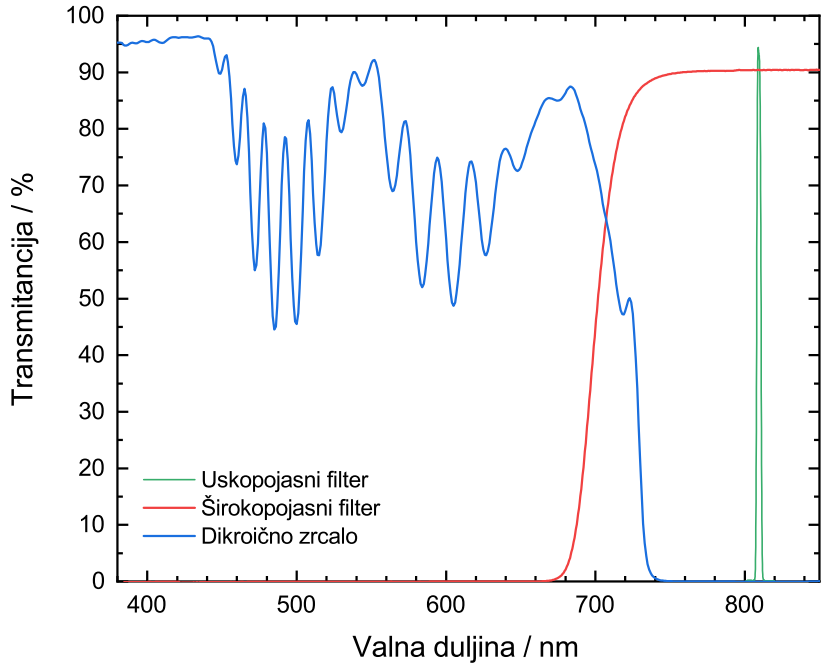
Nakon kalibracije smo pristupili mjerenju spektra pobudnog lasera. Mjenjanjem postavki (temperatura i struja) lasera mogu se dobiti različiti iznosi valnih duljina oko 405 nm. Prilikom mjerenja postavke smo postavili u točku za koju (prema specifikacijama) bi valna duljina trebala biti točno 405 nm, dok smo mjerenjem (Slika 14.) dobili 404,9 nm.



Slika 14. Spektar pobude

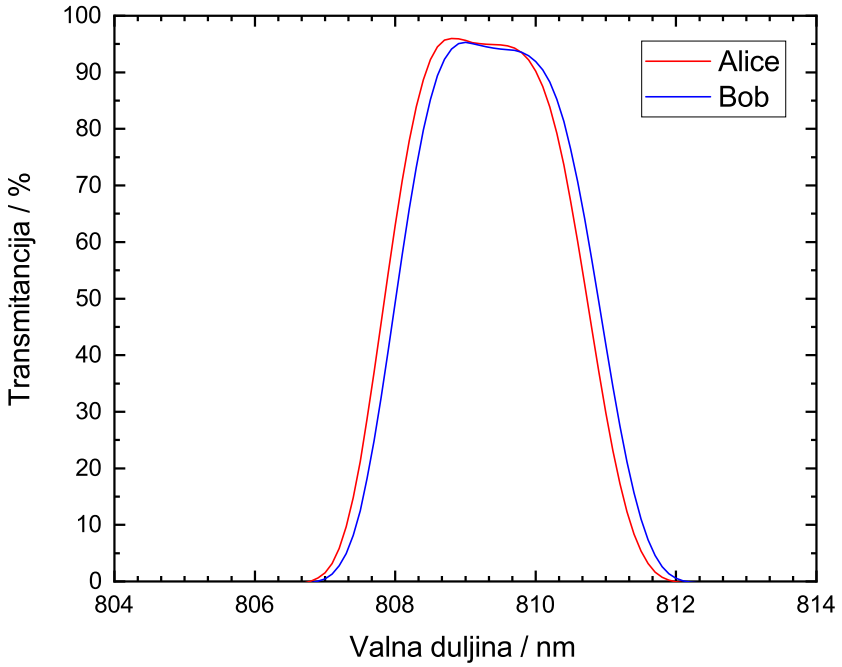
3.3 Filtriranje

U postavu smo koristili više različitih filtera i zrcala za različite namjene. Ispred ulaza u optička vlakna postavili smo dva filtera - širokopojasni i uskopojasni. Širokopojasni filtri se koriste kako dio pobude koji se propagira duž cijelog postava ne bi ušao u optička vlakna koja su spojena na detektore. Izmjerena transmitancija na 810 nm iznosi preko 90%.

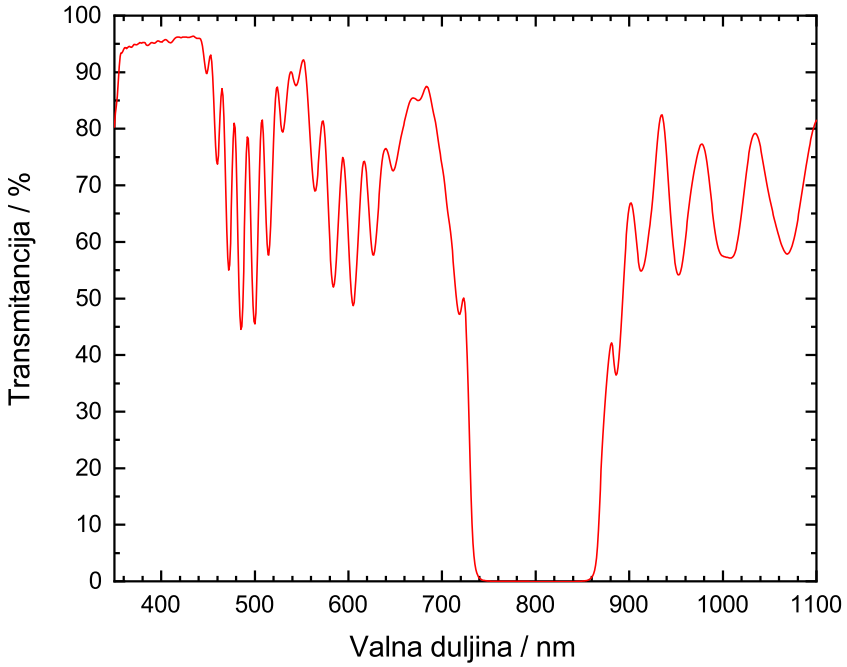


Slika 15. Spektri korištenih filtera i dikroičnog zrcala

S druge strane, uskopojasni filtri dodatno sužavaju iznos valnih duljina koji se propuštaju u optička vlakna. Transmitancija na 810 nm iznosi iznad 90%, dok najveća transmitancija iznosi i preko 95% (Slika 16.). Osim navedenih filtera, koristili smo i dikroično zrcalo koje je u postav postavljeno pod 45° u odnosu na ulaznu zraku te u jednom smjeru propušta snop na 405 nm, dok u drugom reflektira snop na 810 nm (Slika 17.). Sva mjerenja transmitancija su napravljena pomoću spektrofotometra Perkin Elmer Lambda 35 na Zavodu za kemiju materijala IRB-a u Zagrebu.



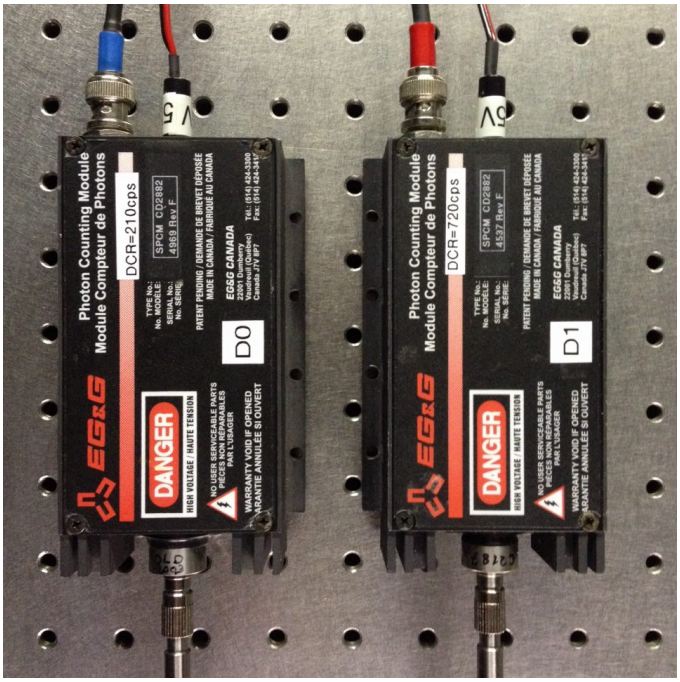
Slika 16. Usporedba spektara uskopojasnih filtera ispred ulaza u optička vlakna



Slika 17. Spektar dikroičnog zrcala. Kut upada svjetlosti je 45°

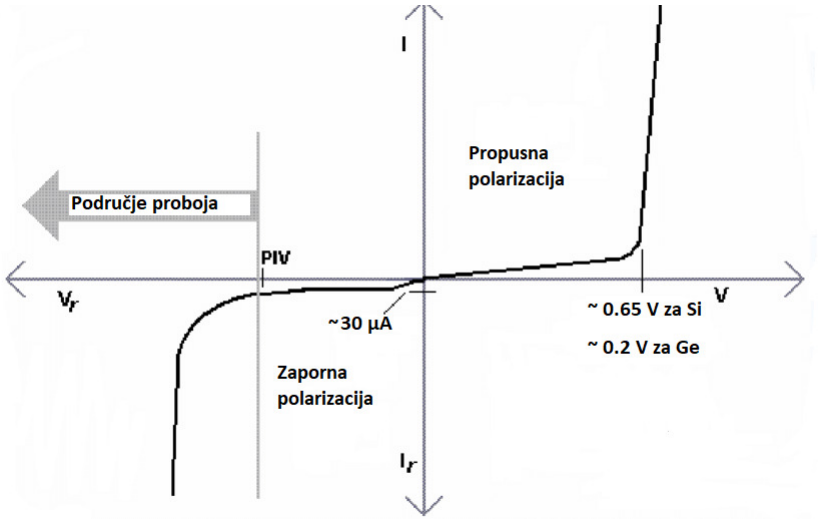
3.4 Detektori

Za brojanje fotona nastalih u procesu *SPDC*-a koristimo posebnu vrstu detektora koji mogu detektirati svaki pojedinačni foton (engl. *single photon detectors - SPD*).



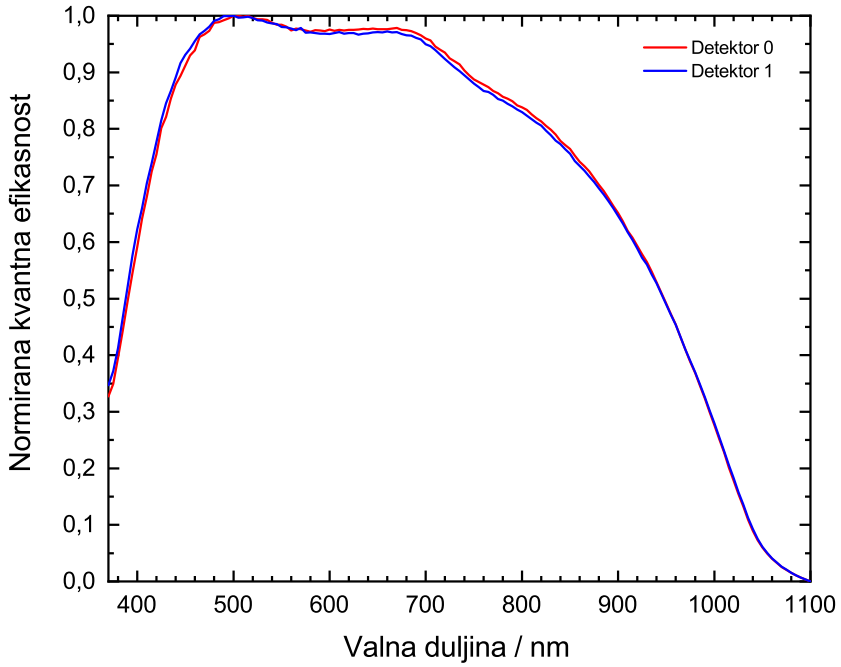
Slika 18. Slika detektora korištenih u eksperimentu. U kućištima komercijalnog proizvođača nalaze se detektori u potpunosti izrađeni u Laboratoriju za FKO IRB-a.

Građeni su od tzv. lavinskih dioda (engl. *single-photon avalanche - SPAD*) koje se u strujni krug spajaju tako da su zaporno polarizirane. Kad je fotodioda neosvjetljena, njome teče vrlo mala struja manjinskih nosilaca naboja koja za silicijske fotodiode iznosi nekoliko nanoampera, a za germanijske nekoliko mikroampera. Kad se fotodioda osvijetli, pod utjecajem svjetlosne energije poraste broj slobodnih nosioca naboja te se reverzna struja poveća oko 20 puta kod germanijskih dioda, tj. 100 - 500 puta kod silicijskih. Rad dioda iznad graničnog napona se naziva Geigerovim načinom djelovanja.



Slika 19. I-V karakteristika

Nakon detekcije jednog fotona i uspostavljanja lavine, da bi došlo do detekcije sljedećeg fotona, potrebno je da se napon poveća iznad graničnog te u tom periodu ne može doći do nove detekcije. Efekti koji mogu utjecati na rad i preciznost *SPD*-ova su termalna pobuđenja koja mogu uzrokovati slabe struje i u fotodiodama koje nisu osvjetljene te njih možemo smatrati izvorom unutarnjeg šuma detektora. Iznos šuma se povećava sa porastom napona V_E (napon iznad graničnog) [22] te sa temperaturom [23]. Također, šum ovisi i o širini područja osiromašenja te očekujemo da *SPAD*-ovi sa širim područjem osiromašenja imaju veći šum [23]. Razmatranje šuma uključuje termalno generirane nositelje kao i udio nositelja koji su tijekom lavine zarobljeni u dubljim nivoima unutar područja osiromašenja te naknadno otpušteni. Oni mogu potaknuti novu lavinu te je taj efekt (engl. *afterpulsing*) proporcionalan naponu V_E. Veličina koja karakterizira kvalitetu detektora se naziva kvantnom efikasnošću. Ona nam govori koliko nosioca naboja nastane u odnosu na upadni foton. Ovisi o valnoj duljini upadnih fotona pa se često još naziva i spektralnim odgovorom detektora (Slika 20.).



Slika 20. Izmjerena normirana kvantna efikasnost korištenih detektora

4 Rezultati

4.1 Vidljivost

Kako bismo odredili kvalitetu sprezanja, koristili smo se izračunom vidljivosti (engl. *visibility*). Polarizator A smo postavili ispred jednog detektora na fiksni kut α, dok smo polarizator ispred drugog detektora rotirali od 0 do 2π (kut β) te mjerili broj koincidencija.

Vidljivost je definirana kao:

$$V = \frac{N_{max} - N_{min}}{N_{max} + N_{min}}$$

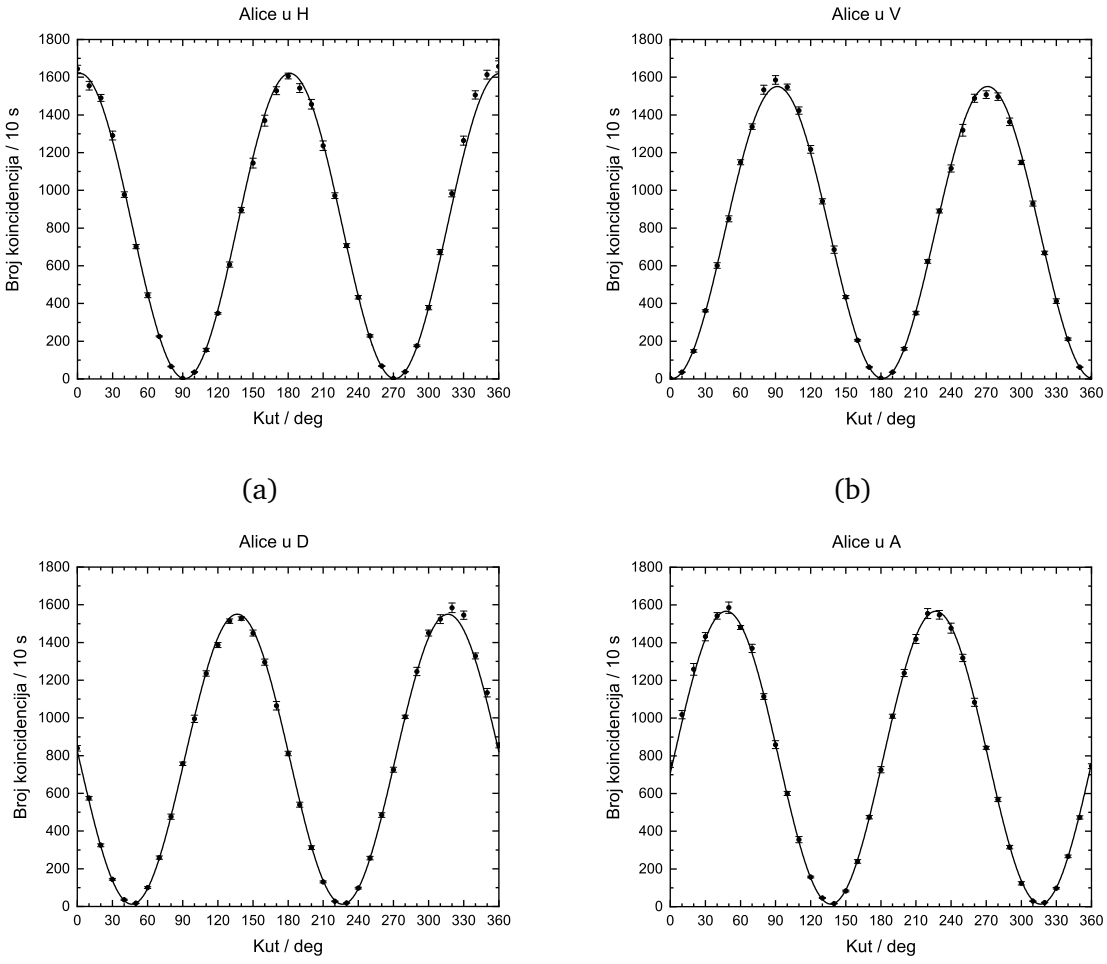
pri čemu je N_{max} maksimalan broj, a N_{min} minimalan broj koincidencija. Mjereći broj koincidencija za različite kutove N(α, β), očekujemo ponašanje oblika N(α, β) = V$\cdot$ $\sin^2(\alpha - \beta)$. S obzirom da je stanje koje dobivamo u našem postavu

$$\psi_{12}^{-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1 |V\rangle_2 - |V\rangle_1 |H\rangle_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|D\rangle_1 |A\rangle_2 - |A\rangle_1 |D\rangle_2)$$

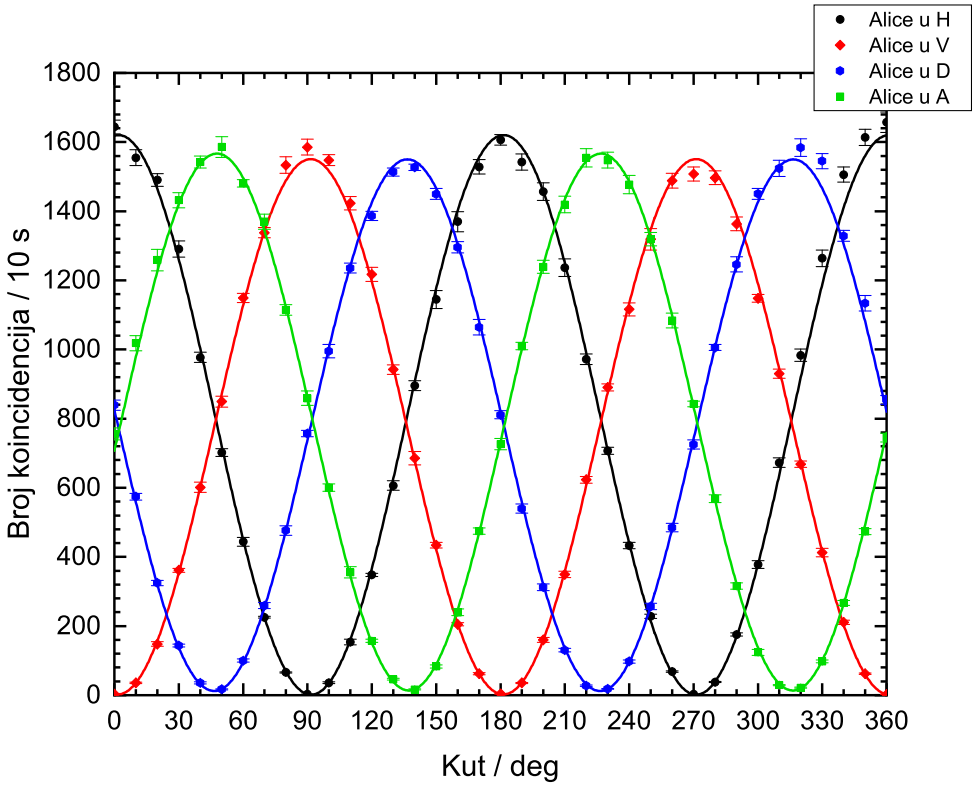
invarijantno na transformaciju baze, očekujemo minimalan broj koincidencija za $\alpha = \beta$ ili za razliku kutova od 180°, a maksimalan za ortogonalne kutove. Rezultati mjerenja i prilagodbe na $\sin^2$ funkciju su prikazani na slikama 17. i 18., a pripadajući iznosi vidljivosti u tablici 2. Za svaku točku izvršeno je 10 mjerenja u trajanju po 10 s kako bi se dobio dovoljan uzorak za analizu, dok je tijekom mjerenja kristal bio zagrijan na 79,7°C.

Kut analizatora kod Alice	Vidljivost
H	(99,8 $\pm$ 0,6)%
D	(98,5 $\pm$ 0,4)%
V	(99,7 $\pm$ 0,4)%
A	(98,3 $\pm$ 0,4)%

Tablica 2. Rezultati vidljivosti za 4 različite baze



Slika 21. Rezultati mjerenja vidljivosti. Na slikama a), b), c) i d) prikazani su rezultati dobiveni na način da je polarizator ispred jednog od ulaza u optičko vlakno držan na konstantnom kutu (Alice), a drugi je rotiran u koracima po 10°. Kutovi na osi apscisi se odnose na kutove u odnosu na os vertikalne polarizacije.



Slika 22. Rezultati mjerenja vidljivosti u 4 različite baze

4.2 Intenzitet izvora parova spregnutih fotona

Intenzitet izvora parova spregnutih fotona (engl. *brightness*) definiramo kao omjer broja koincidencija i snage izvora:

$$B = \frac{N_c}{P_{laser}}$$

pri čemu je N_c broj koincidencija. Iznos intenziteta ovisi o konfiguraciji samoga postava, odabiru kristala u kojemu se odvija *SPDC*, ali i polarizaciji lasera [17]. S obzirom da je omjer refleksije i transmisije *dPBS*-a u Sagnac-u povoljniji za horizontalnu polarizaciju pumpa, pomoću *dPBS*-a na izlazu iz polarizacijski konstantnog optičkog vlakna smo propustili samo tu komponentu zbog čega očekujemo maksimalan intenzitet. Izmjerena snaga lasera je iznosila 10,5 mW, što nam daje rezultat od:

$$B = (914,3 \pm 9,3)(mWs)^{-1}$$

4.3 Omjer broja koincidencija i pojedinačnih detekcija

Za razliku od intenziteta izvora parova spregnutih fotona gdje u obzir uzimamo samo broj koincidencija, možemo definirati vjerojatnost η da jedan od fotona iz spregnutog para bude detektiran u jednom od detektora zajedno sa drugim fotonom u drugom detektoru (engl. *heralding*). Jednostavnije rečeno, to je omjer broja koincidencija i pojedinačnih detekcija; za detektor 1 vrijedi: $\eta_1 = N_C/N_{S_2}$, a za detektor 2: $\eta_2 = N_C/N_{S_1}$, odakle slijedi ukupni: $\eta = \frac{N_C}{\sqrt{N_{S_1} N_{S_2}}}$, pri čemu sa N_{S_1} i N_{S_2} označavamo pojednične detekcije u svakom od detektora. Ovu veličinu moramo razlikovati od efikasnosti generiranja spregnutih parova koja nam govori kolika je vjerojatnost da jedan upadni foton iz pobude uzrokuje konverziju. Dok je veći omjer $N_C : N_{S_i}$ poželjan te bi se mogao probati postići većom snagom lasera, u obzir se mora uzeta i saturacija detektora koja ograničava tu mogućnost. Još jedan efekt koji se mora uzeti u obzir je i broj slučajnih koincidencija, tj. broj detektiranih fotona koje detektori zabilježe, a nisu spregnuti fotoni nastali u procesu *SPDC*-a. Taj efekt je statističke prirode te se može izračunati uz pretpostavku da su pojedinačni fotoni raspodijeljeni jednoliko u vremenu: $R_{acc} = \Delta t R_{S_1} R_{S_2}$, pri čemu je u našem eksperimentu $\Delta t = 5$ ns, što daje broj od $\mathrm{R}_{acc} = 7$. Eksperimentalno dobiveni rezultat za omjer broja koincidencija i pojedinačnih detekcija fotona iznosi

$$\eta = (26,1 \pm 0,3)\%$$

Iznosi intenziteta izvora i omjer broja koincidencija i pojedinačnih detekcija su u skladu sa rezultatima mjerenja istog tipa [16], [26], [27].

4.4 Testiranje Bell-ove nejednakosti

Glavni cilj ovog diplomskog rada je bilo pomoću konstruiranog postava testirati jednu od fundamentalnih karakteristika kvantne mehanike - Bell-ovu nejednakost. U sljedećem potpoglavlju ćemo izvesti Bell-ovu nejednakost u tzv. Clauser-Horne-Shimony-Holt obliku [15]. Možemo se pitati kolika je vjerojatnost da nađemo foton iz originalnog stanja $|\psi^-\rangle$ u nekoj proizvoljnoj mjernoj bazi - vjerojatnost je dana sa:

$$P(\alpha,\beta) = |\langle\alpha|\langle\beta||\psi^-\rangle|^2 = \frac{1}{2}(cos\alpha sin\beta - sin\alpha cos\beta)^2 = \frac{1}{2}sin^2(\alpha-\beta)$$

Možemo definirati očekivanu vrijednost produkta istovremenih mjerenja polarizacija čija vrijednost može varirati između -1 i +1:

$$E(\alpha,\beta) = P(\alpha,\beta) + P(\alpha_\perp,\beta_\perp) - P(\alpha_\perp,\beta) - P(\alpha,\beta_\perp)$$

pri čemu je $\alpha_\perp = \alpha + 90^\circ$ te $\beta_\perp = \beta + 90^\circ$. U CHSH obliku može se pokazati da vrijedi:

$$S \equiv |E(\alpha,\beta) - E(\alpha,\beta') + E(\alpha',\beta') - E(\alpha',\beta)| \leq 2 \tag{4.1}$$

gdje je S Bell-ov parametar S($\alpha,\alpha',\beta,\beta'$). Svaka teorija opisana teorijom skrivenih varijabli mora zadovoljavati nejednadžbu (4.1). S druge strane, moguće je odabrati kutove $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$ tako da nejednadžba (4.1) bude narušena:

$$S(0^\circ, 22.5^\circ, 45^\circ, 67.5^\circ) = |-cos45^\circ + cos135^\circ - cos45^\circ - cos45^\circ| = 2\sqrt{2} \geq 2$$

Dobiveni rezultat je poznat i pod nazivom Cirel'son-ova granica [24]. Ona ujedno predstavlja gornju granicu za kvantnomehaničke korelacije između udaljenih događaja te maksimalan iznos za koji Bell-ova nejednakost može biti narušena. Ako eksperimentalni rezultat pokaže da je Bell-ov parametar S manji od 2, korelacije su klasične i rezultat bi bio inkompatibilan s predviđanjima kvantne mehanike, a ako je njegov iznos između 2 i $2\sqrt{2}$, lokalnost i teorije skrivenih varijabli moraju biti odbačeni. U našem eksperimentu izvršeno je 10 mjerenja za svaki par kutova u trajanju od 10 s te dobiveni rezultat za Bell-ov parametar iznosi:

$$S = (2,803 \pm 0,007)$$

što predstavlja narušenje Bell-ove nejednakosti od 114 standardnih devijacija od klasične granice te potvrdu nelokalnog ponašanja parova spregnutih fotona.

5 Zaključak

U ovom radu proučavali smo fenomen polarizacijskog sprezanja parova fotona nastalih u procesu spontane parametričke konverzije pomoću kristala tipa II. Sagrađen je eksperimentalni postav prilagođen za dobivanje spregnutih parova valnih duljina od 810 nm. Ovaj postav možemo koristiti za sigurnu komunikaciju pomoću QKD-a te testiranje fundamentalnih pretpostavki kvantne mehanike. Mjerenjima veličina koje karakteriziraju kvalitetu izvora možemo zaključiti kako smo dobili parove visokih korelacija polarizacije te smo izračunali narušenje Bell-ove nejednakosti u CHSH obliku u iznosu od 114 standardnih devijacija od klasične granice, što ukazuje na visok stupanj sprezanja. Ovi rezultati ukazuju na nelokalno ponašanje spregnutih parova fotona, tj. mjerenja polarizacije izvršena na jednom fotonu imaju trenutni učinak na rezultat mjerenja polarizacije na drugom. Buduća istraživanja pomoću ovog postava mogu ići u smjeru mjerenja ovisnosti valnih duljina nastalih fotona o temperaturi kristala sa ciljem nalaženja optimalne temperature. Također, postavljanjem dodatnih optičkih komponenti, poput određenih kombinacija leća, mogao bi se postići još manji radijus snopa unutar kristala što bi dovelo do većeg broja koincidencija. Unatoč mogućim poboljšanjima, i ovakav izvor predstavlja kvalitetnu osnovu za daljnja istraživanja u području kvantne kriptografije i razvoj sigurnijih komunikacijskih mreža.

Literatura

[1] Einstein A.; Podolsky B.; Rosen N. : Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? // Phys. Rev. 47, 10(1935.), str. 777–780

[2] E. Schrodinger: Die gegenwrtige Situation in der Quantenmechanik // Naturwissenschaften, Nov, 1935.

[3] Bell, J.S. : On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox // Physics 1(1964.), str. 195–200

[4] J. Clauser; S. Freedman : Experimental test of local hidden-variable theories // Physical Review Letters, 28, 14(1972.), str. 938–941

[5] A. Aspect; P. Grangier; G. Roger : Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem // Phys. Rev. Lett. 47, 7(1981.), str. 460–463

[6] A. Aspect; J. Dalibard; G. Roger : Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers // Phys. Rev. Lett. 49, 25(1982.), str. 1804–1807

[7] A. K. Ekert : Quantum Cryptography Based on Bell's Theorem // Phys. Rev. Lett. 67 (1991.), str. 661-663

[8] N. Gisin; G. Ribordy; W. Tittel; H. Zbinden : Quantum cryptography // Review of Modern Physics, 74, 1 (2002.), str. 145–195

[9] C. H. Bennet; G. Brassard; C. Crepeau; R. Jozsa; A. Peres; W. K. Wootters : Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels // Phys. Rev. Lett., 70(1993.), str. 1895-1899

[10] J. H. Shapiro : Architectures for long-distance quantum teleportation // New J. Phys. 4, 47 (2002.)

[11] K. F. Reim; P. Michelberger; K. C. Lee; J. Nunn; N. K. Langford; I. A. Walmsley : Single-photon-Level quantum memory at room temperature // Phys. Rev. Lett. 107 (2011), 053603

[12] W. Heisenberg: Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik // Zeitschrift für Physik 43, 3–4 (1927.), str. 172–198

[13] Nielsen; Chuang, Quantum Computation and Quantum Information. 10th Anniversary edition: Cambridge University Press, 2010.

[14] J. G. Rarity; P. R. Tapster : Experimental Violation of Bell's Inequality Based on Phase and Momentum // Phys. Rev. Lett. 64(1990.), str. 2495-2498

[15] J. F. Clauser; M. A. Horne; A. Shimony; R. A. Holt : Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories // Physical Review Letters 23, 15 (1969.), str. 880-884

[16] X. Wen; Y. Han; J. Wang : Comparison characterization of efficient frequency doubling at 397.5 nm with PPKTP, LBO and BiBO crystals // Laser physics 26 045401 (2016.)

[17] Neumann S. P. : Development of an efficient narrow-band source of polarization-entangled photon pairs. Diplomski rad. Sveučilište u Beču

[18] Joshi K. S., Entangled photon pairs: Efficient generation and detection, and bit commitment. Doktorski rad. Singapur : National university of Singapore, 2014.

[19] G. Sagnac : L'éther lumineux démontré par l'effet du vent relatif d'éther dans un interféromètre en rotation uniforme // Comptes Rendus, 157 (1913.): str. 708–710

[20] Nazirizadeh Y. : Compact Source for polarization entangled Photon Pairs. Diplomski rad. Munchen: Max-Plank-Institute for Quantum Optics, 2005.

[21] Fleischmann N. : A Polarization Entangled Photon Source with High Heralding Efficiency. Diplomski rad. Graz: Technical university Graz, 2015.

[22] S. Cova; M. Ghioni; A. Lacaita; C. Samori; F. Zappa: Avalanche photodiodes and quenching circuits for single-photon detection // Appl. Opt. 35, (1996.), str. 1956-1976

[23] C. Veerappan; E. Charbon: A Low Dark Count p-i-n Diode Based SPAD in CMOS Technology // IEEE transactions on electron devices, 63, 1 (2016.)

[24] B.S. Cirel'son: Quantum generalizations of Bell's inequality // Lett Math Phys 4 (1980), str. 93.

[25] Maria Tengner : Photonic Qubits for Quantum Communication. Doktorski rad. Stockholm: KTH School of Information and Communication Technology, 2008.

[26] P.G. Kwiat; K. Mattle; H. Weinfurter; A. Zeilinger: New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs// Physical Review Letters 75, 24 (1995.), str. 4337.-4341.

[27] F. Steinlechner; M. Gilaberte; M. Jofre; T. Scheidl; J.P. Torres; V. Pruneri; R. Ursin : New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs // J. Opt. Soc. Am. B, 31, No. 9 (2014.), str. 2068.-2076.