

# Elektromehanička nestabilnost u nanoelektromehaničkim sustavima

---

Gomaz, Larisa

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:872155>

Rights / Prava: [In copyright](#)/Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-04-01**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Larisa Gomaz

Elektromehanička nestabilnost u  
nanoelektromehaničkim sustavima

Diplomski rad

Zagreb, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA I INFORMATIKA; SMJER NASTAVNIČKI

**Larisa Gomaz**

Diplomski rad

**Elektromehanička nestabilnost u  
nanoelektromehaničkim sustavima**

Voditelj diplomskog rada: doc. dr. sc. Danko Radić

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2018.

Hvala mojoj obitelji što je vjerovala u mene na svakom koraku ovog studija, posebno mojoj mami koja mi je bila podrška i čvrsti oslonac u svakom trenutku. Veliko hvala mom mentoru na iskazanom povjerenju, razumijevanju i pomoći u izradi ovog rada.

## Sažetak

U ovom radu analiziran je DC - elektronski transport kroz vodljivu karbonsku nanocjevčicu u vanjskom magnetskom polju koja je učvršćena između nemagnetskog i magnetskog mikrokontakta na koje je doveden prednapon. Karbonska nanocjevčica promatrana je kao kvantna točka unutar režima kulonske blokade u kojoj su elektronska stanja Zeemanski rascijepljena i dovoljno razmaknuta obzirom na termalnu "razmazanost" Fermijeve plohe pa je svako Zeemanski rascijepljeno stanje ponaosob smatrano odgovornim za elektronski transport. Magnetomotorno vezanje između električne struje kroz karbonsku nanocjevčicu i njenih mehaničkih vibracija može rezultirati elektromehaničkom nestabilnošću i samoekscitiranim oscilacijama. S obzirom na to, u ovom radu dan je klasični teorijski opis elektromehaničke nestabilnosti u navedenom nanoelektromehaničkom sustavu u području dozvoljenih fizikalnih parametara pri čemu je elektromehanička nestabilnost određena nastankom samoekscitiranih oscilacija mehaničkih i električnih obzervabli koje uočavamo kao gubitak stabilnosti stacionarne fiksne točke i nastanak graničnog kola u faznom prostoru oscilatora.

Ključne riječi: nanoelektromehanički sustav, karbonska nanocjevčica, elektromehanička nestabilnost, samoekscitirane oscilacije

# Electromechanical instability in nanoelectromechanical systems

## Abstract

In this thesis we analyze DC - electronic transport through a carbon nanotube suspended between normal - metal source and spin - polarized drain in external magnetic field symmetrically biased. The carbon nanotube is considered as a quantum dot within Coulomb blockade regime in which electronic states are Zeeman - split and distant enough with respect to the thermal smearing of the Fermi surface so that each of the Zeeman - split states is responsible for electronic transport. Magnetomotive coupling between electric current through the carbon nanotube and its mechanical vibrations may lead to an electromechanical instability and self - excited mechanical vibrations. This thesis contains a classical theoretical description of electromechanical instability in the nanoelectromechanical system in the field of allowed physical parameters. Electromechanical instability is determined by occurrence of the self - excited mechanical vibrations that we notice as loss of stability of stationary fixed point and occurrence of a limit cycle in a phase space of an oscillator.

Keywords: nanoelectromechanical system, carbon nanotube, electromechanical instability, self - excited vibrations

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Karbonske nanocjevčice</b>	<b>2</b>
2.1	Struktura i vrste karbonskih nanocjevčica . . . . .	2
2.2	Svojstva karbonskih nanocjevčica . . . . .	4
2.2.1	Električna vodljivost . . . . .	4
2.2.2	Čvrstoća i elastičnost . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Elektronski transport kroz nanocjevčicu</b>	<b>5</b>
3.1	Analiza nestabilnosti sustava u kvazistacionarnoj granici . . . . .	12
3.2	Analiza stabilnosti sustava . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Metodički dio</b>	<b>19</b>
4.1	Istraživački usmjerena nastava . . . . .	19
4.2	Nastavna priprema: Prigušeno titranje . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Zaključak</b>	<b>28</b>
	<b>Literatura</b>	<b>30</b>



# 1 Uvod

Fizika nanoelektromehaničkih sustava predstavlja važan predmet istraživanja u području nanotehnologija i nanofizike kroz zadnje desetljeće. Nanoelektromehanički sustavi (NEMS) obuhvaćaju mehaničke elemente veličina između 1 i 100 nm koji pretvaraju električnu struju u mehaničko gibanje na nanometarskoj skali te ih se smatra sljedbenicima mikroelektromehaničkih sustava (MEMS) [1]. U odnosu na mikroelektromehaničke uređaje koji rade na mikrometarskoj skali i mogu se također naći u komercijalnoj upotrebi, nanoelektromehanički sustavi zbog manjih veličina i viših vlastitih frekvencija imaju bolje performanse. Smanjivanjem njihove veličine, u nanoelektromehaničkim sustavima dolazi do smanjivanja mase i termalnog kapaciteta, dok s druge strane dolazi do povećanja vlastitih frekvencija i faktora dobrote ( $Q$ ) [2]. U početku su istraživanja nanoelektromehaničkih sustava provedena na uređajima za koje se koristila silicijska tehnologija, no danas karbonske nanocjevčice (CNT) predstavljaju zanimljivu alternativu s obzirom na posebna mehanička svojstva koja imaju [1].

Ključna točka koja definira nanoelektromehaničke sustave je magnetomotorno vezanje između mehaničkih i elektroničkih stupnjeva slobode koje se ostvaruje magnetskim poljem. Magnetomotorno vezanje oslanja se na slobodne elektrone u smislu da struja slobodnih elektrona inducira Lorentzovu silu na vodiču, dok gibanje samog vodiča inducira elektromotornu silu na slobodnim elektronima [4]. S druge strane, elektronski spin je stupanj slobode koji može utjecati na elektronski transport te tako i na elektromehanička svojstva uređaja, a poznato je da Zeemanski rascijep energetskih stanja elektrona utječe na tunelirajuću struju s obzirom da učestalost tuneliranja tada ovisi o spinu. Osim toga, redukcijom dimenzija sustava do nanometarske skale mezoskopske pojave dovode do izražene nelinearne strujno - naponske karakteristike.

U ovom diplomskom radu promatramo nanoelektromehanički sustav koji čini karbonska nanocjevčica u vanjskom magnetskom polju učvršćena između dva mikrokontakta na koja je doveden prednapon. Cilj je dati klasični teorijski opis elektromehaničke nestabilnosti u navedenom nanoelektromehaničkom sustavu u području dozvoljenih fizikalnih parametara. Pritom je elektromehanička nestabilnost određena nastankom samoekscitiranih oscilacija mehaničkih i električnih obzervabli koje uočavamo

kao gubitak stabilnosti stacionarne fiksne točke i nastanak graničnog kola u faznom prostoru oscilatora.

## 2 Karbonske nanocjevčice

Karbonske nanocjevčice (CNT) otkrivene su 1991. te je zbog njihovih posebnih svojstava otkriće istih otvorilo vrata novim istraživanjima na području fizike, kemije i znanosti o materijalima. Kao posljedica njihove strukture te malih dimenzija, karbonske nanocjevčice karakterizira niz jedinstvenih električnih, termalnih i mehaničkih svojstava.

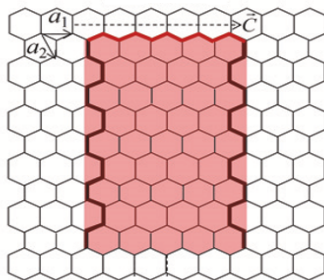
### 2.1 *Struktura i vrste karbonskih nanocjevčica*

Jedan od najpoznatijih karbonskih nanomaterijala je grafen koji je poznat kao 2D monoatomni sloj grafita.  $sp^2$  veze u grafenu snažnije su od  $sp^3$  veza u dijamantu što grafen čini strukturno najsnažnijim materijalom [5]. Strukturu rešetke grafena karakterizira heksagonski raspored ugljikovih atoma. U grafenu su tri atomske orbitale ugljikovog atoma,  $2s$ ,  $2p_x$  i  $2p_y$ , hibridizirane u tri  $sp^2$  orbitale. Te  $sp^2$  orbitale su u istoj ravnini, dok je preostala  $2p_y$  okomita na ostale orbitale.  $sp^2$  hibridizirane orbitale formiraju  $\sigma$  veze između susjednih ugljikovih atoma, a  $2p_y$  orbitale formiraju  $\pi$  veze izvan ravnine grafena. Karbonske nanocjevčice dobivene su rolanjem sloja grafena u cilindar. Kao što im samo ime govori, dijametar nanocjevčica je reda veličine nekoliko nanometara, dok s druge strane mogu biti duljine i do nekoliko cm. Karbonske nanocjevčice su sto puta snažnije od čelika te provode toplinu i struju bolje od bakra. Mehanička i elektronička svojstva nanocjevčica posljedica su njihove kvazi-jednodimenzionalne strukture i rasporeda ugljikovih atoma. Također, imaju metalna ili poluvodička obilježja, ovisno o strukturnim parametrima. Kako bismo razumjeli kristalnu strukturu karbonskih nanocjevčica, potrebno je razumjeti njihovu atomsku strukturu. Kao što smo već rekli, karbonske nanocjevčice možemo promatrati kao strukturu izvedenu iz sloja grafena na način da je njenim rolanjem ostvaren oblik cilindra pri čemu su rubovi iste glatko spojeni. Slika 2.1 prikazuje vektor  $\vec{C}$  koji sugerira

smjer rolanja grafena koji tvori karbonsku nanocjevčicu i definiran je izrazom:

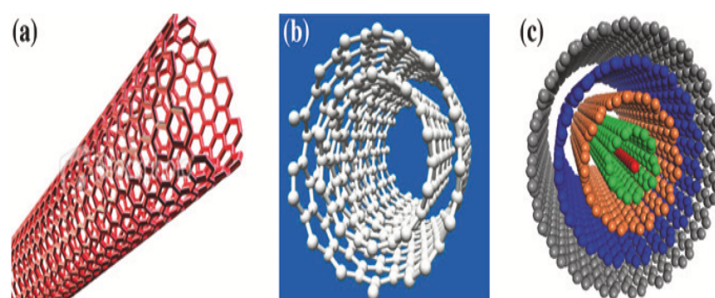
$$\vec{C} = n_1\hat{a}_1 + n_2\hat{a}_2, \quad (2.1)$$

gdje  $\hat{a}_1$  i  $\hat{a}_2$  predstavljaju vektore rešetke, a  $n_1$  i  $n_2$  indekse kiralnosti [5]. Za strukturu prikazanu na slici 2.1 vrijedi da je jedan od indeksa,  $n_1$  ili  $n_2$ , jednak nula. Postoji



Slika 2.1: Promatrajući tanak sloj grafena promatramo sloj ugljikovih atoma koji formiraju 2D sačastu rešetku. Kada navedeni sloj grafena savijemo u oblik cilindra, ono što dobivamo nazivamo karbonskom nanocjevčicom. Smjer tog savijanja određen je smjerom vektora  $\vec{C}$ , označenog na slici, koji je definiran izrazom  $\vec{C} = n_1\hat{a}_1 + n_2\hat{a}_2$ . Pritom  $\hat{a}_1$  i  $\hat{a}_2$  predstavljaju jednostavne translacijske vektore koji čine bridove elementarne ćelije čijim ponavljanjem možemo izgraditi kristal, a  $n_1$  i  $n_2$  predstavljaju indekse kiralnosti [5].

mnogo struktura karbonskih nanocjevčica koje se razlikuju u duljini, debljini i broju slojeva, a ovisno o toj strukturi nanocjevčica ima metalna ili poluvodička svojstva. Karbonske nanocjevčice najčešće svrstavamo u dvije skupine, MWNT i SWNT (Slika 2.2). MWNT (eng. multi - walled nanotube) su skupina dviju (eng. double - walled nanotube) ili više ugniježđenih cijevi stalno rastućeg promjera. Razmak 0.342 - 0.375 nm između susjednih cijevi unutar strukture MWNT-a posljedica je djelovanja međuatomskih Van der Waalsovih sila. U usporedbi s grafitom, gdje je razmak između slojeva 0.335 nm, uočavamo jednako slabu interakciju između pojedinih slojeva. S druge strane, SWNT (eng. single-walled nanotube) je poput slamke, ima jedan grafenski sloj koji oblikuje cilindar te ju karakterizira osna simetrija i dijаметar od prosječno 1.2 nm.



Slika 2.2: Ovisno o broju oblikovanih koncentričnih grafenskih cilindara, karbonske nanocjevčice se dijele na: (a) SWNT (eng. single - walled nanotube), (b) DWNT (eng. double - walled nanotube) i (c) MWNT (eng. multi - walled nanotube). SWNT čini samo jedan grafenski cilindar, dok MWNT čine dva ili više koncentričnih grafenskih cilindara. DWNT je poseban slučaj MWNT čiju strukturu karakteriziraju dva koncentrična grafenska cilindra [5].

## 2.2 Svojstva karbonskih nanocjevčica

### 2.2.1 Električna vodljivost

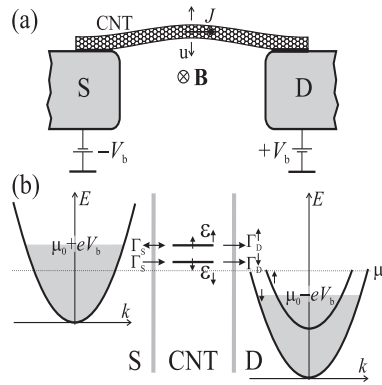
Električna vodljivost je svojstvo karbonskih nanocjevčica koja ovisi o njihovoj strukturi. Ovisno o indeksima kiralnosti,  $n_1$  i  $n_2$  iz izraza (2.1), karbonske nanocjevčice mogu pokazivati metalna i poluvodička svojstva. Električna vodljivost MWNT-a je iznimno kompleksna s obzirom na interakcije između zidova pojedine cijevi koje doprinose neuniformnoj raspodjeli struje u pojedinim cijevima. S druge strane, uniformnu distribuciju struje promatramo na različitim dijelovima metalne SWNT.

### 2.2.2 Čvrstoća i elastičnost

S obzirom da je svaki atom ugljika unutar grafita povezan snažnim kemijskim vezama sa susjedna tri atoma, karbonske nanocjevčice karakterizira velika čvrstoća i visok iznos Youngovog modula elastičnosti ( $\approx 1$  TPa). Modul elastičnosti kod SWNT-a je puno veći od modula elastičnosti čelika. Iako će se nanocjevčica savinuti kada na nju djelujemo silom, zbog spomenutih svojstava će se vratiti u početno stanje ubrzo nakon što je ista ta sila prestala djelovati.

### 3 Elektronski transport kroz nanocjevčicu

Analiziramo DC - elektronski transport kroz vodljivu karbonsku nanocjevčicu koja je učvršćena između nemagnetskog (S) i magnetskog (D) vodljivog mikrokontakta na koje smo doveli prednapon ( $\mp V_b$ ) i koja se nalazi u vanjskom magnetskom polju okomitom na nju. Karbonsku nanocjevčicu pritom promatramo kao kvantnu točku unutar režima kulonske blokade. Elektronska stanja  $\epsilon_0$  su Zeemanski rascijepljena na "spin - up" i "spin - down" stanje te uz pretpostavku da su dovoljno razmaknuta, s obzirom na termalnu "razmazanost" Fermijeve plohe ( $k_B T$ ), kažemo da je svako Zeemanski rascijepljeno stanje ponaosob odgovorno za elektronski transport. Pritom kulonska blokada na karbonsku nanocjevčicu sprječava dvostruko zaposjednuće pojednog stanja (Slika 3.1).



Slika 3.1: (a) Karbonska nanocjevčica duljine  $10^{-6}$  m i mase  $m = 4 \cdot 10^{-21}$  kg učvršćena je između dva mikrokontakta S i D, na koja smo doveli prednapon  $\mp V_b$ , u vanjskom magnetskom polju te vibrira frekvencijom  $\omega \sim 0.1 - 1 GHz$ , pri čemu je  $u$  pomak reda veličine 1 nm. (b) Energetska shema nanoelektromehaničkih sustava predstavlja energiju slobodnih elektrona na mikrokontaktima ( $E_k$ ) s kemijskim potencijalom  $\mu_0$  bez prisutstva prednapona.  $\epsilon_\uparrow$  i  $\epsilon_\downarrow$  predstavljaju Zeemanski rascijepljena stanja "spin - up" ( $\uparrow$ ) i "spin - down" ( $\downarrow$ ). Učestalost tuneliranja između mikrokontakta S i D i nanocjevčice dana je konstantama  $\Gamma_S$  i  $\Gamma_D$ , a strijelice na slici prikazuju smjer procesa tuneliranja za odabir prednapona  $eV_b \approx \epsilon_\uparrow$  [3].

Elektronski transport kroz nanocjevčicu ostvaruje se tuneliranjem elektrona. Kemijski potencijal u mikrokontaktu S postavimo tako da se unutar temperaturnog intervala  $k_B T$  poklapa sa "spin - up" stanjem u karbonskoj nanocjevčici. Time je omogućeno tuneliranje elektrona s mikrokontakta S u stanje "spin - up" odkuda može skočiti dalje na magnetski mikrokontakt D ili natrag na mikrokontakt S. S obzirom da su elektroni u S uvijek na višem potencijalu od onih u D, vrijedi ograničenje da ne može

doći do tuneliranja s mikrokontakta D na karbonsku nanocjevčicu pri dovoljno niskoj temperaturi. S druge strane, elektron koji sa S tunelira u stanje "spin - down" može samo tunelirati dalje na D jer su raspoloživa stanja na S popunjena. Navedeno tuneliranje elektrona određeno je učestalošću tuneliranja sa S, što označavamo s  $\Gamma_S$ , te učestalošću tuneliranja s D, što označavamo s  $\Gamma_D$ . Pritom su konstante učestalosti tuneliranja za S, odnosno D, dane izrazom:

$$\Gamma_{S(D)}^{(\sigma)} = \frac{2\pi}{\hbar} (|\tau_{S(D)}|^2 \nu_{S(D)}^\sigma) \quad (3.1)$$

gdje su  $\tau$  i  $\nu$  odgovarajući matrični element tuneliranja i gustoća stanja za  $\sigma = \uparrow, \downarrow$ . Mehaničke vibracije karbonske nanocjevčice mase  $m$  i duljine  $L$  želimo opisati kao titranje gušenog harmoničkog oscilatora frekvencije  $\omega$  i konstante gušenja  $\chi$  uz restrikciju na osnovni mod titranja. Takav oscilator tjeran je Lorentzovom silom oblika:

$$F_L(V) = \xi BLJ(V) \quad (3.2)$$

gdje numerički faktor  $\xi = 0.83$  opisuje profil osnovnog moda titranja, a  $J(V)$  predstavlja struju kroz karbonsku nanocjevčicu u ovisnosti o naponu  $V$  na njenim krajevima. Jednadžba harmoničkog oscilatora dana je izrazom:

$$m\ddot{u} + \chi\dot{u} + m\omega^2 u = F_L(V). \quad (3.3)$$

Pad napona  $V$  jednak je sumi prednapona  $V_b$  i elektromotorne sile  $\epsilon = -BL\dot{u}$  koja se inducira gibanjem nanocjevčice u magnetskom polju  $B$ , a dan je izrazom:

$$V = V_b - \xi BL\dot{u}. \quad (3.4)$$

Taylorovim razvojem oko  $V_b$  dobivamo izraz za Lorentzovu silu oblika

$$F_L \equiv \xi BLJ(V_b) - (\xi BL)^2 G_d(V_b)\dot{u} \quad (3.5)$$

koji uvrstimo u izraz (3.3) kako bismo dobili jednadžbu harmoničkog oscilatora:

$$m\ddot{u} + [\chi + (\xi BL)^2 G_d(V_b)]\dot{u} + m\omega^2 u = \xi BLJ(V_b). \quad (3.6)$$

Iz izraza (3.6) vidimo da magnetomotorno vezanje, ovisno o predznaku diferencijalne vodljivosti  $G_d(V_b) = \frac{dJ}{dV}|_{V=V_b}$ , može ugušiti sustav ili može upumpati energiju u njega. S obzirom na to razlikujemo dva slučaja:

1. Ako je  $G_d > 0$ , onda magnetomotorno vezanje guši sustav.

1. Ako je  $G_d < 0$ , onda magnetomotorno vezanje upumpava energiju u sustav.

Struja  $J$  određena je učestalošću tuneliranja i vjerojatnošću okupiranja pojedinog elektronskog stanja ( $P_\sigma$ ) u nanocjevčici, gdje je  $\sigma = \uparrow, \downarrow$ , ili vjerojatnošću da je isto stanje prazno ( $P_0$ ).

Jednadžba evolucije populacije  $P_\sigma$  u vremenu određena je vjerojatnošću zaposjednuća "spin - up" i "spin - down" stanja te vjerojatnošću da je isto stanje prazno, učestalošću tuneliranja  $s$  i na mikrokontakt te Fermijevom funkcijom  $f_\sigma$ ,  $\sigma = \uparrow, \downarrow$ , koja broji slobodna stanja za tuneliranje elektrona.

Gradimo dinamički model populacije "spin - up" stanja na kvantnoj točki, pri čemu vrijedi da je frekvencija mehaničkih oscilacija puno manja od učestalosti tuneliranja ( $\omega \ll \Gamma_D, \Gamma_S$ )

$$\frac{dP_\uparrow}{dt} = \Gamma_S f_\uparrow^S P_0 - \Gamma_S (1 - f_\uparrow^S) P_\uparrow - \Gamma_D^\uparrow (1 - f_\uparrow^D) P_\uparrow. \quad (3.7)$$

Navedene vjerojatnosti općenito zadovoljavaju uvjet  $P_\uparrow + P_\downarrow + P_0 = 1$ . Jednadžbu (3.7) izrazimo pomoću vjerojatnosti zaposjednuća "spin - up" i "spin - down" stanja:

$$\frac{dP_\uparrow}{dt} = \Gamma_S f_\uparrow^S (1 - P_\uparrow - P_\downarrow) - \Gamma_S (1 - f_\uparrow^S) P_\uparrow - \Gamma_D^\uparrow (1 - f_\uparrow^D) P_\uparrow. \quad (3.8)$$

Dobili smo izraz

$$\frac{dP_\uparrow}{dt} = \Gamma_S f_\uparrow^S (1 - P_\downarrow) - \Gamma_S P_\uparrow - \Gamma_D^\uparrow P_\uparrow (1 - f_\uparrow^D) \quad (3.9)$$

gdje je  $f_\uparrow^{S,D}$  Fermijeva funkcija koja broji slobodna stanja za tuneliranje. Fermijeva funkcija u S i D mikrokontaktima je funkcija napona i dana je izrazom:

$$f_\sigma^{S,D}(V) = \frac{1}{e^{(\epsilon_\sigma \mp eV - \mu_0)/k_B T} + 1}. \quad (3.10)$$

S obzirom na početnu pretpostavku, Fermijeva funkcija  $f_\uparrow^D = 0$ , a  $\Gamma_S = \Gamma \sim 1GHz$  te navedene vrijednosti uvrštavamo u izraz (3.9).

Definiramo pokratu  $f_\sigma^S \equiv f_\sigma$ . Tada sustav glasi:

$$\frac{1}{\Gamma} \dot{P}_\uparrow = f_\uparrow(1 - P_\downarrow) - P_\uparrow - \frac{\Gamma_D^\uparrow}{\Gamma} P_\uparrow. \quad (3.11)$$

$\gamma_\sigma = \frac{\Gamma_D^\sigma}{\Gamma}$  je omjer tuneliranja i za njega vrijedi  $\gamma_\sigma \ll 1$ . Konačno, dinamički model populacije "spin - up" stanja glasi:

$$\frac{1}{\Gamma} \dot{P}_\uparrow = f_\uparrow(1 - P_\downarrow) - (1 - \gamma_\uparrow)P_\uparrow. \quad (3.12)$$

Na isti način gradimo dinamički model "spin - down" stanja počevši od izraza:

$$\frac{dP_\downarrow}{dt} = \Gamma_S f_\downarrow^S P_0 - \Gamma_S(1 - f_\downarrow^S)P_\downarrow - \Gamma_D^\downarrow(1 - f_\downarrow^D)P_\downarrow. \quad (3.13)$$

Dinamički model populacije "spin - down" stanja glasi:

$$\frac{1}{\Gamma} \dot{P}_\downarrow = f_\downarrow(1 - P_\uparrow) - (1 - \gamma_\downarrow)P_\downarrow. \quad (3.14)$$

Na temelju jednadžbi (3.12) i (3.14), opća jednadžba modela za oba stanja je oblika:

$$\frac{1}{\Gamma} \dot{P}_\sigma = -(1 + \gamma_\sigma)P_\sigma + f_\sigma(1 - P_{-\sigma}). \quad (3.15)$$

U stacionarnim uvjetima vrijedi  $\dot{P} = 0$ . Navedeni uvjet primijenimo na jednadžbe dinamičkog modela populacije oba stanja (3.15) kako bismo dobili iste u stacionarnim uvjetima. Za "spin - up" stanje u stacionarnim uvjetima jednadžba dobiva oblik:

$$f_\uparrow(1 - P_\downarrow) - P_\uparrow - \gamma_\uparrow P_\uparrow = 0 \quad (3.16)$$

iz čega slijedi

$$P_\uparrow^{(stac)} = \frac{f_\uparrow(1 - P_\downarrow^{(stac)})}{1 + \gamma_\uparrow}. \quad (3.17)$$

Na isti način dobivamo jednadžbu za "spin - down" stanje u stacionarnim uvjetima

$$f_\downarrow(1 - P_\uparrow) - P_\downarrow - \gamma_\downarrow P_\downarrow = 0 \quad (3.18)$$



$$P_{\downarrow}^{(stac)} = \frac{f_{\downarrow}(1 - P_{\uparrow}^{(stac)})}{1 + \gamma_{\downarrow}}. \quad (3.19)$$

Uvrštavanjem izraza (3.18) u izraz (3.19) dobivamo:

$$P_{\uparrow}^{(stac)} = \frac{f_{\uparrow}(1 + \gamma_{\downarrow}) - f_{\uparrow}f_{\downarrow}}{(1 + \gamma_{\uparrow})(1 + \gamma_{\downarrow}) - f_{\uparrow}f_{\downarrow}} \quad (3.20)$$

i obrnuto, uvrštavanjem izraza (3.19) u izraz (3.18) dobivamo:

$$P_{\downarrow}^{(stac)} = \frac{f_{\downarrow}(1 + \gamma_{\uparrow}) - f_{\uparrow}f_{\downarrow}}{(1 + \gamma_{\uparrow})(1 + \gamma_{\downarrow}) - f_{\uparrow}f_{\downarrow}}. \quad (3.21)$$

Općeniti izraz modela populacije za stacionarni uvjet za oba stanja glasi:

$$P_{\sigma}^{(stac)} = \frac{f_{\sigma}(1 + \gamma_{-\sigma} - f_{-\sigma})}{(1 + \gamma_{\sigma})(1 + \gamma_{-\sigma}) - f_{\sigma}f_{-\sigma}}. \quad (3.22)$$

Ukupna struja zadovoljava opću jednadžbu:

$$J = q\dot{P} \quad (3.23)$$

i čine ju lijeva ( $J_L$ ) i desna struja ( $J_R$ ) čije izraze dobivamo iz (3.15).

Raspisivanjem jednadžbe  $J_L = q\dot{P}_L$  dobivamo izraz:

$$J_L = e[\Gamma f_{\uparrow}^S P_0 - \Gamma(1 - f_{\uparrow}^S)P_{\uparrow} + \Gamma f_{\downarrow}^S P_0 - \Gamma(1 - f_{\downarrow}^S)P_{\downarrow}] \quad (3.24)$$

iz kojeg slijedi:

$$J_L = e\Gamma(f_{\uparrow}^S - f_{\uparrow}^S P_{\downarrow} - P_{\uparrow} + f_{\downarrow}^S - f_{\downarrow}^S P_{\uparrow} - P_{\downarrow}). \quad (3.25)$$

Jednadžba kojom je opisana lijeva struja glasi:

$$J_L = e\Gamma[f_{\uparrow} + f_{\downarrow} - P_{\uparrow}(1 + f_{\downarrow}) - P_{\downarrow}(1 + f_{\uparrow})]. \quad (3.26)$$

Na sličan način, raspisivanjem jednadžbe  $J_R = q\dot{P}_R$  dobivamo izraz

$$J_R = e[\Gamma_D^{\uparrow}(1 - f_{\uparrow}^D)P_{\uparrow} + \Gamma_D^{\downarrow}(1 - f_{\downarrow}^D)P_{\downarrow}] \quad (3.27)$$

iz kojeg slijedi:

$$J_R = e(\Gamma_D^\uparrow P_\uparrow + \Gamma_D^\downarrow P_\downarrow). \quad (3.28)$$

Jednadžba kojom je opisana desna struja glasi:

$$J_R = e\Gamma(\gamma_\uparrow P_\uparrow + \gamma_\downarrow P_\downarrow). \quad (3.29)$$

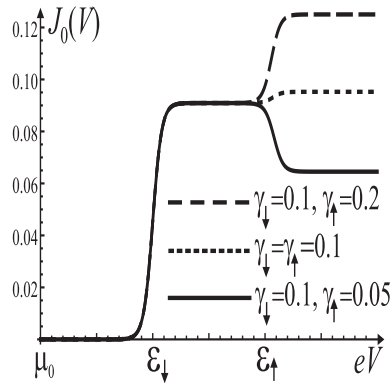
Za lijevu i desnu struju, zbog zakona očuvanja količine naboja, vrijedi jednakost u stacionarnim uvjetima. Konačni izraz za ukupnu struju pišemo kao  $J = \frac{1}{2}J_R + \frac{1}{2}J_L$  te je on oblika:

$$J = \frac{1}{2}e\Gamma[f_\uparrow + f_\downarrow - P_\uparrow(1 - \gamma_\uparrow + f_\downarrow) - P_\downarrow(1 - \gamma_\downarrow + f_\uparrow)]. \quad (3.30)$$

Stacionarni izraz za ukupnu struju dobiven je pomoću izraza (3.20) i (3.21) te uz pretpostavku da je  $f_\downarrow \approx 1$  glasi:

$$J^{(stac)} = e\Gamma\gamma_\downarrow \frac{f_\uparrow(V)(\gamma_\uparrow - 1) + (1 + \gamma_\uparrow)}{(1 + \gamma_\uparrow)(1 + \gamma_\downarrow) - f_\uparrow(V)} \quad (3.31)$$

iz čega vidimo direktnu proporcionalnost stacionarne ukupne struje s  $\gamma_\downarrow$ . Stacionarna strujno - naponska karakteristika, ovisno o odnosu parametara  $\gamma_\uparrow$  i  $\gamma_\downarrow$  prikazana je na slici 3.2.



Slika 3.2: Prikazana je strujno - naponska karakteristika za nekoliko odabira magnet-skog mikrokontakta D, dok je iscrtkano prikazana za normalni metalni mikrokontakt. Pritom je  $J_0$  u  $e\Gamma$  jedinicama, a temperatura je  $k_B T = 0.04|\epsilon_\uparrow - \epsilon_\downarrow|$  [3].

Učinak magnetomotornog vezanja za sustav ovisi o predznaku diferencijalne vodlji-

vosti  $G_d(V_b)$ . Diferencijalna vodljivost općenito je dana izrazom:

$$G_d = \frac{dJ}{dV}, \quad (3.32)$$

a u stacionarnim uvjetima definirana je izrazom:

$$G_d = \frac{dJ^{(stac)}}{dV}. \quad (3.33)$$

Deriviranjem izraza za stacionarnu ukupnu struju (3.31) po naponu  $V$ , dobivamo konačni izraz kojime je opisana diferencijalna vodljivost u stacionarnim uvjetima.

$$G_d = \frac{d}{dV} \left[ e\Gamma \frac{f_{\uparrow}(\gamma_{\uparrow}\gamma_{\downarrow} - \gamma_{\downarrow}) + \gamma_{\downarrow}(1 + \gamma_{\uparrow})}{(1 + \gamma_{\uparrow})(1 + \gamma_{\downarrow}) - f_{\uparrow}} \right], \quad (3.34)$$

$$G_d = e\Gamma \frac{df_{\uparrow}}{dV} \gamma_{\downarrow} \frac{(\gamma_{\uparrow}^2 + \gamma_{\downarrow}\gamma_{\uparrow}^2 - \gamma_{\downarrow} + \gamma_{\uparrow})}{[(1 + \gamma_{\uparrow})(1 + \gamma_{\downarrow}) - f_{\uparrow}]^2}, \quad (3.35)$$

$$G_d = e\Gamma \frac{df_{\uparrow}}{dV} \gamma_{\downarrow} \frac{\gamma_{\uparrow}\gamma_{\downarrow}(1 + \gamma_{\uparrow}) - \gamma_{\downarrow}(1 + \gamma_{\uparrow}) + \gamma_{\uparrow}(1 + \gamma_{\uparrow})}{[(1 + \gamma_{\uparrow})(1 + \gamma_{\downarrow}) - f_{\uparrow}]^2}. \quad (3.36)$$

U izrazu (3.31) vidljivo je da predznak diferencijalne vodljivosti ovisi o izboru parametara  $\gamma_{\uparrow}$  i  $\gamma_{\downarrow}$  kada je dovedeni prednapon postavljen na vrijednost  $eV_b$  unutar  $k_bT$  intervala oko stanja  $\epsilon_{\uparrow}$ . Unutar tog intervala vrijedi da je  $f_{\downarrow} \approx 1$  i  $\frac{df_{\downarrow}}{dV} \approx 0$  pa je diferencijalna vodljivost u stacionarnim uvjetima

$$G_d = e\Gamma \frac{df_{\uparrow}}{dV} \gamma_{\downarrow}(1 + \gamma_{\uparrow}) \frac{\gamma_{\uparrow}\gamma_{\downarrow} - \gamma_{\downarrow} + \gamma_{\uparrow}}{[(1 + \gamma_{\uparrow})(1 + \gamma_{\downarrow}) - f_{\uparrow}]^2} \quad (3.37)$$

negativna kada je zadovoljen uvjet  $\gamma_{\uparrow}\gamma_{\downarrow} - \gamma_{\downarrow} + \gamma_{\uparrow} < 0$ .

Ako je  $J' < 0$  onda govorimo o upumpavanju energije u sustav i možemo očekivati elektromehaničku nestabilnost koja se manifestira u vidu samoekscitiranih oscilacija nanocjevčice, za dovoljno veliki  $Q$  i pozitivan parametar nestabilnosti  $\beta$ :

$$\beta \equiv -\frac{(\xi BL)^2}{m} J'(V_b) - \frac{\omega}{Q} > 0. \quad (3.38)$$

### 3.1 Analiza nestabilnosti sustava u kvazistacionarnoj granici

Promatrani nanoelektromehanički sustav možemo opisati sustavom jednadžbi:

$$\frac{1}{\Gamma}\dot{P} = -(1 + \gamma_\sigma)P_\sigma + f_\sigma(1 - P_{-\sigma}) \quad (3.39)$$

$$\ddot{u} + \frac{\omega}{Q}\dot{u} + \omega^2 u = \frac{\xi BL}{m} J(V) \quad (3.40)$$

$$J = \frac{1}{2}e\Gamma[f_\uparrow + f_\downarrow - P_\uparrow(1 - \gamma_\uparrow + f_\downarrow) - P_\downarrow(1 - \gamma_\downarrow + f_\uparrow)]. \quad (3.41)$$

U jednadžbi (3.40)  $Q$  predstavlja faktor dobrote čija se vrijednost može približno opisati kao broj slobodnih titraja koje izvede oscilator dok sva njegova energija ne prijeđe na okolinu.

Pokazalo se da magnetomotorno vezanje između električne struje kroz karbonsku nanocjevčicu i njenih mehaničkih vibracija može rezultirati elektromehaničkom nestabilnošću i samoekscitiranim oscilacijama. Početak nestabilnosti istražujemo pomoću metode dvije vremenske skale.

Jednadžba gibanja promatranog sustava dana je izrazom (3.40), a njeno pretpostavljeno rješenje je oblika:

$$u(t) = A(t)\cos(\omega t), \quad (3.42)$$

gdje je  $A(t)$  amplituda harmonijskog titranja koja, prema pretpostavci, sporo varira tako da je  $\dot{A} \ll \omega A$ , a  $\omega t$  predstavlja brzu vremensku skalu. Pretpostavljeno rješenje (3.42) uvrstimo u (3.40) i dobijemo

$$-2\dot{A}\omega\sin(\omega t) - A\omega^2\cos(\omega t) - \frac{\omega}{Q}A\omega\sin(\omega t) + \omega^2 A\cos(\omega t) = \frac{\xi BL}{m} J(V_b + \xi BL A\omega\sin(\omega t)) \quad (3.43)$$

$$\dot{A}\omega\sin(\omega t) = -\frac{1}{2}A\omega^2\cos(\omega t) - \frac{\omega^2}{2Q}A\sin(\omega t) + \frac{\omega^2}{2}A\cos(\omega t) - \frac{\xi BL}{2m} J(V_b + \xi BL A\omega\sin(\omega t)). \quad (3.44)$$

Dobivenu jednadžbu pomnožimo sa  $\frac{\sin(\omega t)}{\pi}$

$$\begin{aligned} \dot{A}\frac{\omega}{\pi}\sin^2(\omega t) &= -\frac{A\omega^2}{2\pi}\sin(\omega t)\cos(\omega t) - \frac{A\omega}{2Q\pi}\sin^2(\omega t) + \\ &+ \frac{A\omega^2}{2\pi}\sin(\omega t)\cos(\omega t) - \frac{\xi BL}{m}\frac{1}{2\pi}J(V_b + \xi BL A\omega\sin(\omega t))\sin(\omega t) \end{aligned} \quad (3.45)$$

i usrednjimo po brznoj vremenskoj skali jer nas zanima evolucija graničnog kola. Dobivamo 1D dinamički sustav koji opisuje amplitudu:

$$\dot{A} = -\frac{A\omega}{2Q} - \frac{\xi BL}{m\omega} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} J(V_b + \xi BL\omega A \sin(\phi)) \sin(\phi) d\phi. \quad (3.46)$$

Navedenu jednadžbu za amplitudu možemo zapisati u obliku

$$\dot{A} = -\Phi(A), \quad (3.47)$$

gdje je

$$\Phi(A) = \frac{A\omega}{2Q} + \frac{\xi BL}{m\omega} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J(V_b + \xi BL A \omega \sin(\phi)) \sin(\phi) d\phi. \quad (3.48)$$

Prvi član izraza za  $\Phi(A)$  opisuje gušenje mehaničkih oscilacija, a drugi član pojačavanje koje je generirano električnom strujom. Ako je uvjet (3.38) ispunjen, onda pojačavanje oscilacija dominira nad gušenjem pri malim amplitudama, a u skladu s (3.48) amplituda se s vremenom povećava.

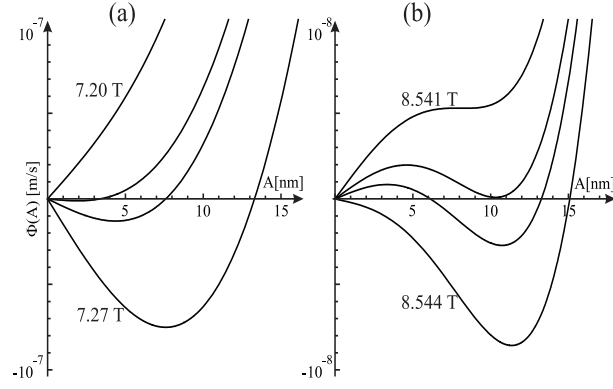
U izrazu za struju

$$J = \frac{e\Gamma_S\Gamma_D^\downarrow}{\Gamma_S + \Gamma_D^\downarrow + \Gamma_S e^{(eV - \tilde{\epsilon}_\uparrow)/k_B T}} \quad (3.49)$$

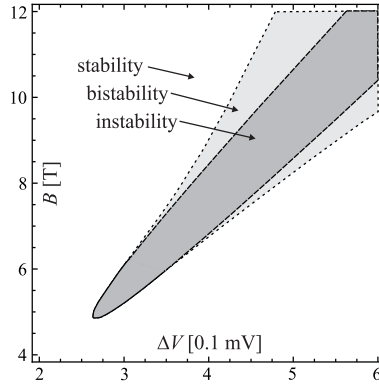
vidimo da za velike amplitude ( $A \gg \frac{k_B T}{eBL\omega}$ ) drugi član izraza (3.48) iščezava na  $(\frac{BL}{m\omega})J_0$ , gdje je  $J_0 \sim e\Gamma_D^\downarrow$  karakteristična struja kroz sustav. U skladu s tim oba člana navedenog izraza za  $\Phi(A)$  se međusobno poništavaju pri konačnoj amplitudi  $A_{st} \sim (\frac{QBL}{m\omega^2})J_0$ .

Da bismo dobili točnu vrijednost amplitude stacionarnog titranja, potrebno je riješiti jednadžbu  $\Phi(A_{st} = 0)$ . Numeričkom analizom funkcije  $\Phi(A)$  pokazalo se da, ovisno o prednaponu, amplituda stacionarnog titranja  $A_{st}$  može u rastućem vanjskom magnetskom polju rasti kontinuirano od nule (eng. soft excitation) ili može skočiti na konačnu vrijednost (eng. hard excitation), kao što je prikazano na Slika 3.3. Kako bismo analitički istražili navedenu situaciju, pretpostavimo da vrijedi  $|\beta(V_b, B)| \ll 1$  i razvijemo funkciju  $\Phi(A)$  u Taylorov red. Zadržimo članove sve do trećeg reda pa dobivamo

$$\Phi(A) \approx -\frac{A}{2} \left( \beta - \frac{(\xi BL)^4 \omega^2}{8m} J'''(V_b) A^2 \right), \quad (3.50)$$



Slika 3.3: Prikazano je ponašanje funkcije  $\Phi(A)$ , dane izrazom (3.48), u rastućem magnetskom polju. Ovisno o prednaponu amplituda može rasti kontinuirano od nule ((a) eng. soft excitation) pri  $\Delta V \equiv V_b - (\epsilon_0 - \mu)/e = 0.34$  mV ili može odmah skočiti na konačnu vrijednost ((b) eng. hard excitation) pri  $\Delta V = 0.41$  mV. Vrijednosti ostalih parametara su  $T = 0.2$  K,  $Q = 3 \cdot 10^4$ ,  $\Gamma_D^\downarrow/\Gamma_S = 0.4$ ,  $\omega/\Gamma_S = 0.2$  [4].



Slika 3.4: Fazni dijagram nanoelektromehaničkog sustava za kojeg vrijedi  $\gamma_\uparrow = 0$  u kvazistacionarnom režimu, a koji je određen vanjskim kontrolnim parametrima ( $\Delta V$ ,  $B$ ), gdje je  $\Delta V = V_b - (\epsilon_0 - \mu_0)/e$ . Sastoji se od područja stabilnosti (nanocjevčica miruje), područja nestabilnosti (nanocjevčica spontano titra) i područja bistabilnosti gdje su oba stanja stabilna, ovisno s koje strane pridemo. Ostali parametri su  $T=0.2$ K,  $Q = 3 \cdot 10^4$ ,  $\gamma_\downarrow=0.4$ ,  $\omega/\Gamma = 0.1$  [3].

gdje je  $\beta \equiv -\frac{(\xi BL)^2}{m} J'(V_b) - \frac{\omega}{Q}$ .

Ako promatramo interval  $V_1^* < V_b < V_2^*$ , na kojem je  $J'''(V_b) > 0$ , a  $V_{1,2}^*$  su točke infleksije krivulje negativne diferencijalne otpornosti, iz izraza (3.50) vidimo da je za  $\beta(V_b, B) > 0$  stanje mirovanja nestabilno, a stacionarno titranje amplitudom  $A_{st}^{(1)} \propto \sqrt{\frac{\beta}{J'''}}$  pojavljuje se spontano, glatko povećavajući amplitudu s povećanjem vanjskog magnetskog polja, čime je opisan tzv. *soft excitation*. S druge strane, ako promatramo  $V_b < V_1^*$  i  $V_b > V_2^*$  gdje vrijedi  $J'''(V_b) < 0$ , nestabilnost se razvija na drugačiji način od prethodnog. Ako pogledamo sliku 3.3 možemo uočiti postojanje dviju bifurkacijskih točaka  $B_C^{(1)}(V_b)$  i  $B_C^{(2)}(V_b)$  u kojima krivulja  $\Phi(A, B)$  dotiče A - os odzgo i za koje vrijedi da je  $B_C^{(2)}(V_b) > B_C^{(1)}(V_b)$ , gdje je  $\beta(B_C^{(2)}(V_b)) = 0$ . Sve dok vri-

jedi da je  $B < B_C^{(1)}(V_b)$ , stanje mirovanja nanocjevčice smatra se stabilnim stanjem. No, za slučaj kada je  $B_C^{(1)}(V_b) < B < B_C^{(2)}(V_b)$ , stanje mirovanja jednako kao i stanje titranja nanocjevčice konačnom amplitudom smatra se stabilnim stanjem. To znači da je za navedene uvjete sustav bistabilan, odnosno ima dva stabilna stanja. Postojanje područja na kojem su magnetsko polje i prednapon takvi da je sustav bistabilan, u odnosu na amplitude titranja, dovodi do histereze za srednju struju dane izrazom

$$\bar{J} = \frac{1}{2\pi} \int J(V_b + \xi BL\omega A \sin(\phi)) d\phi \quad (3.51)$$

uz promjenu magnetskog polja i prednapona. Konačno, za uvjet u kojem je  $B > B_C^{(2)}(V_b)$ , stanje mirovanja nanocjevčice je nestabilno, a titranje nanocjevčice stabilno stanje sustava.

### 3.2 Analiza stabilnosti sustava

Promatrani sustav je izvan kvazi - stacionarne granice određen jednadžbama:

$$\ddot{u} + \frac{\omega}{Q}\dot{u} + \omega^2 u + \frac{\xi BLe\Gamma}{2m}(1 - \gamma_{\uparrow} + f_{\downarrow})P_{\uparrow} + \frac{\xi BLe\Gamma}{2m}(1 - \gamma_{\downarrow} + f_{\uparrow})P_{\downarrow} = \frac{\xi BLe\Gamma}{2m}(f_{\uparrow} + f_{\downarrow}) \quad (3.52)$$

$$\frac{1}{\Gamma}\dot{P}_{\uparrow} = -(1 + \gamma_{\uparrow})P_{\uparrow} + f_{\uparrow}(1 - P_{\downarrow}) \quad (3.53)$$

$$\frac{1}{\Gamma}\dot{P}_{\downarrow} = -(1 + \gamma_{\downarrow})P_{\downarrow} + f_{\downarrow}(1 - P_{\uparrow}) \quad (3.54)$$

$$f_{\sigma}(V_b - \xi BL\dot{u}) = f_{\sigma}(V_b) - \xi BL\dot{u}f'_{\sigma} \quad (3.55)$$

Kako bismo analizirali stabilnost promatranog sustava, sustav je potrebno linearizirati u kontekstu malih pomaka  $(u, \dot{u}, p_{\uparrow}, p_{\downarrow})$  s obzirom na stacionarnu točku  $(U_0, \dot{U}_0 = 0, P_{\uparrow 0}, P_{\downarrow 0})$  određenu početkom nestabilnosti sustava. S obzirom na to, izraze  $U = U_0 + u$  i  $P_{\sigma} = P_{\sigma 0} + p_{\sigma}$  uvrstimo u mehaničku jednadžbu (3.52):

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \frac{\omega}{Q}\dot{u} + \omega^2(U_0 + u) + \frac{\xi BLe\Gamma}{2m}(1 - \gamma_{\uparrow} + f_{\downarrow 0} - \xi BL\dot{u}f'_{\downarrow})(P_{\uparrow 0} + p_{\uparrow}) + \\ + \frac{\xi BLe\Gamma}{2m}(1 - \gamma_{\downarrow} + f_{\uparrow 0} - \xi BL\dot{u}f'_{\uparrow}) = \frac{\xi BLe\Gamma}{2m}(f_{\uparrow 0} - \xi BL\dot{u}f'_{\downarrow}) \end{aligned} \quad (3.56)$$

gdje definiramo konstantu  $\kappa = \frac{\xi BL e \Gamma}{2m}$ . Sada je mehanička jednađžba oblika:

$$\ddot{u} + \left[ \frac{\omega}{Q} + \kappa \xi BL (f'_\uparrow (1 - P_{\downarrow 0}) + f'_\downarrow (1 - P_{\uparrow 0})) \right] \dot{u} + \omega^2 u + \kappa (1 - \gamma_\downarrow + f_{\uparrow 0} p_\downarrow) + \kappa (1 - \gamma_\uparrow + f_{\downarrow 0} p_\uparrow) = \kappa \xi BL \dot{u} (f'_\uparrow p_\downarrow + f'_\downarrow p_\uparrow) \quad (3.57)$$

Jednađžbe dinamičkog populacijskog modela za stacionarni slučaj uvrstimo u jednađžbe (3.15) za oba spina u nestacionarnom režimu.

$$\frac{1}{\Gamma} \dot{p}_\uparrow = -(1 + \gamma_\uparrow) (P_{\uparrow 0} + p_\uparrow) + (f_{\uparrow 0} - \xi BL f'_\uparrow \dot{u}) (1 - P_{\downarrow 0} - p_\downarrow) \quad (3.58)$$

$$\frac{1}{\Gamma} \dot{p}_\downarrow = -(1 + \gamma_\downarrow) (P_{\downarrow 0} + p_\downarrow) + (f_{\downarrow 0} - \xi BL f'_\downarrow \dot{u}) (1 - P_{\uparrow 0} - p_\uparrow) \quad (3.59)$$

$$P_{\uparrow 0} = f_{\uparrow 0} \frac{1 - P_{\downarrow 0}}{1 + \gamma_\uparrow} \quad (3.60)$$

$$P_{\downarrow 0} = f_{\downarrow 0} \frac{1 - P_{\uparrow 0}}{1 + \gamma_\downarrow} \quad (3.61)$$

što rezultira sustavom

$$\frac{1}{\Gamma} \dot{p}_\uparrow = -(1 + \gamma_\uparrow) p_\uparrow - (f_{\uparrow 0} - \xi BL f'_\uparrow \dot{u}) p_\downarrow - \xi BL f'_\uparrow \dot{u} (1 - P_{\downarrow 0}) \quad (3.62)$$

$$\frac{1}{\Gamma} \dot{p}_\downarrow = -(1 + \gamma_\downarrow) p_\downarrow - (f_{\downarrow 0} - \xi BL f'_\downarrow \dot{u}) p_\uparrow - \xi BL f'_\downarrow \dot{u} (1 - P_{\uparrow 0}). \quad (3.63)$$

Za područje početka nestabilnosti vrijedi  $eV_b = \epsilon_\uparrow$ ,  $f_0 \equiv f_{\uparrow 0} \equiv f_\uparrow(V_b) = \frac{1}{2}$ ,  $f'_0 = \frac{df_\uparrow}{dV_{|V_b}} = -\frac{e}{4k_B T}$ ,  $f_{\downarrow 0} \equiv f_\downarrow(V_b) \approx 1$ ,  $f'_\downarrow(V_b) \approx 0$ . Uz prethodno navedene pretpostavke, promatrani sustav možemo opisati sljedećim sustavom jednađžbi:

$$\ddot{p}_\downarrow + \Gamma(2 + \gamma_\uparrow + \gamma_\downarrow) \dot{p}_\downarrow + \Gamma^2 \omega_p^2 p_\downarrow = \xi \Gamma^2 BL f'_0 (g - p_\downarrow) \dot{u} \quad (3.64)$$

$$p_\uparrow = -\frac{1}{\Gamma} \dot{p}_\downarrow - (1 + \gamma_\downarrow) p_\downarrow \quad (3.65)$$

$$\ddot{u} + \left( \frac{\omega}{Q} + \xi BL \kappa f'_0 (1 - P_{\downarrow 0}) \right) \dot{u} + \omega^2 u + \kappa (1 - \gamma_\downarrow + f_0) p_\downarrow + \kappa (2 - \gamma_\uparrow) p_\uparrow = \xi BL \kappa f'_0 p_\downarrow \dot{u}, \quad (3.66)$$

gdje je  $\omega_p^2 = (1 + \gamma_\uparrow)(1 + \gamma_\downarrow) - f_0$ .

Želimo riješiti mehaničku jednađžbu (3.66) s nelinearnom korekcijom u najnižem redu. Uvrštavamo pretpostavljeno rješenje (3.42) u mehaničku jednađžbu te dobi-



vamo izraz

$$\dot{A} \sin(\omega t) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\omega}{Q} + \xi B L \kappa f'_0 g \right] A \sin(\omega t) + \frac{\kappa}{2\omega} (1 - \gamma_\downarrow + f_0) p_\downarrow + \frac{\kappa}{2\omega} (2 - \gamma_\uparrow) p_\uparrow + \frac{1}{2} \xi B L \kappa f'_0 p_\downarrow A \sin(\omega t) \quad (3.67)$$

gdje je  $g \equiv 1 - P_{\downarrow 0}$ .

Rješavamo jednadžbu za populacije  $p_\sigma$  u linearnoj aproksimaciji

$$\ddot{p}_\downarrow + \Gamma(2 + \gamma_\uparrow + \gamma_\downarrow) \dot{p}_\downarrow + \Gamma^2 \omega_p^2 p_\downarrow = -\xi \Gamma^2 B L f'_0 g A \omega \sin(\omega t). \quad (3.68)$$

Dobivena jednadžba podsjeća na jednadžbu tjeranog harmoničkog oscilatora čije je rješenje oblika:

$$p_\downarrow = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t). \quad (3.69)$$

Nakon što smo pretpostavili rješenje jednadžbe, možemo dobiti izraz za  $p_\uparrow$  (3.65):

$$p_\uparrow = \left( \frac{\omega}{\Gamma} a_1 - (1 + \gamma_\downarrow) a_2 \right) \sin(\omega t) - \left( (1 + \gamma_\downarrow) a_1 + \frac{\omega}{\Gamma} a_2 \right) \cos(\omega t). \quad (3.70)$$

Izraze za koeficijente  $a_1$  i  $a_2$  dobivamo uvrštavanjem pretpostavljenog rješenja (3.69) u (3.68):

$$a_1 = \frac{1}{N} \xi \Gamma^3 B L f'_0 g \omega^2 A (2 + \gamma_\uparrow + \gamma_\downarrow) \quad (3.71)$$

$$a_2 = -\frac{1}{N} \xi \Gamma^2 B L f'_0 g \omega A (\Gamma^2 \omega_p^2 - \omega^2), \quad (3.72)$$

gdje je  $N = (\Gamma^2 \omega_p^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2 (2 + \gamma_\uparrow + \gamma_\downarrow)$ .

Uvrštavanjem pretpostavljenih rješenja (3.42) i (3.69) u mehaničku jednadžbu (3.67) te uvrštavanjem izraza za  $p_\uparrow$  iz (3.70) dobivamo:

$$\begin{aligned} \dot{A} \sin(\omega t) = & -\frac{1}{2} \left[ \frac{\omega}{Q} + \xi B L \kappa f'_0 g \right] A \sin(\omega t) + \frac{\kappa}{2} f'_0 \xi B L A a_1 \sin(\omega t) \cos(\omega t) + \frac{\kappa}{2} f'_0 \xi B L A a_2 \sin^2(\omega t) + \\ & + \frac{\kappa}{2\omega} (1 - \gamma_\downarrow + f_0) a_2 \sin(\omega t) + \frac{\kappa}{2\omega} (1 - \gamma_\downarrow + f_0) a_1 \cos(\omega t) + \frac{\kappa}{2\omega} (2 - \gamma_\uparrow) \left[ \frac{\omega}{\Gamma} a_1 - \right. \\ & \left. - (1 + \gamma_\downarrow) a_2 \right] \sin(\omega t) - \frac{\kappa}{2\omega} (2 - \gamma_\uparrow) \left[ \frac{\omega}{\Gamma} a_2 - (1 + \gamma_\downarrow) a_1 \right] \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Dobiveni izraz pomnožimo s  $\frac{\omega}{\pi} \sin(\omega t)$  i usrednjimo po brzjoj skali, a rezultat toga je izraz za amplitudu oblika  $\dot{A} = c_1 A + O(c_n A^n)$ ,  $n > 1$ .

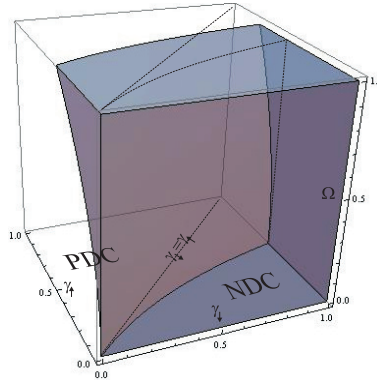
$$\begin{aligned} \dot{A} = & \left[ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\omega}{Q} + \xi B L \kappa f'_0 g \right] + \frac{\kappa}{2} \frac{1}{N} \xi \Gamma^2 B L f'_0 g [\omega^2 (2 - \gamma_{\uparrow}) (2 + \gamma_{\uparrow} + \gamma_{\downarrow}) - \right. \\ & \left. - (f_0 - 1 - 3\gamma_{\downarrow} + \gamma_{\uparrow} + \gamma_{\downarrow} \gamma_{\uparrow}) (\Gamma^2 \omega_p^2 - \omega^2) \right] A. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Koeficijent  $c_1$  je član uz  $A$  koji određuje stabilnost sustava, a dan je izrazom:

$$c_1 = -\frac{\Gamma \omega}{2Q} + \frac{(\xi B L e)^2 \Gamma \gamma_{\downarrow} \theta}{4 m k_B T} [\Omega^2 - 2(\gamma_{\uparrow} - \gamma_{\downarrow} + \gamma_{\downarrow} \gamma_{\uparrow})] \quad (3.75)$$

gdje je  $\Omega \equiv \frac{\omega}{\Gamma}$ , a  $\theta \equiv \frac{1 + \gamma_{\uparrow}}{[1 + 2(\gamma_{\downarrow} + \gamma_{\uparrow} + \gamma_{\downarrow} \gamma_{\uparrow})]^4} \sim 1$ ;  $\gamma_{\downarrow, \uparrow} \ll 1$ . Sustav je nestabilan za  $c_1 > 0$ .

Prvi član izraza (3.75) odnosi se na mehaničko gušenje sustava, dok je uvjet nestabilnosti sustava sadržan u drugom članu istog izraza. Ukoliko vrijedi da je član  $\Omega^2 - 2(\gamma_{\uparrow} - \gamma_{\downarrow} + \gamma_{\downarrow} \gamma_{\uparrow}) > 0$ , onda kažemo da je zadovoljen minimalni uvjet nestabilnosti sustava zato što imamo upumpavanje energije koja još uvijek mora premašiti disipativnu energiju, kao što je prikazano na slici 3.5.



Slika 3.5: Na slici je osjenčan minimalni uvjet nestabilnosti sustava  $\Omega^2 - 2(\gamma_{\uparrow} - \gamma_{\downarrow} + \gamma_{\downarrow} \gamma_{\uparrow}) > 0$ , na domeni parametara  $(\gamma_{\uparrow}, \gamma_{\downarrow}, \Omega)$ , a iscrtkano područje na  $\Omega = 0$  ravnini, odnosi se na područje negativne diferencijalne vodljivosti (NDC). Ako se nalazimo u takvom području, drugi član u izrazu (3.75) je uvijek pozitivan, čak i na granici  $\Omega = 0$ . S druge strane, u području pozitivne diferencijalne vodljivosti (PDC) potrebno je imati konačnu mehaničku frekvenciju  $\Omega$  da bismo mogli govoriti o nestabilnosti. Kao što je prikazano, povećanjem te mehaničke frekvencije moguće nestabilno područje se širi od područja s negativnom diferencijalnom vodljivošću na područje s pozitivnom diferencijalnom vodljivošću. Linija koja označava  $\gamma_{\downarrow} = \gamma_{\uparrow}$  odnosi se na normalni metalni mikrokontakt (D) [3].

## 4 Metodički dio

### 4.1 *Istraživački usmjerena nastava*

U većini škola prevladava tradicionalni oblik nastave koji se zasniva na predavačkoj nastavi koja stavlja nastavnika u središte, a učenike u ulogu pasivnih promatrača. U takvom obliku nastave nastavnik kroz objašnjavanje i pisanje na ploču prenosi informacije, no time ne potiče učenički intelektualni angažman nužan za učenje i razumijevanje fizike. Kako bi se postigao visoki stupanj intelektualne angažiranosti učenika, u nastavu fizike potrebno je uvesti istraživački i interaktivni pristup u obliku istraživački usmjerene nastave.

Istraživački usmjerena nastava je oblik nastave koji razvija razumijevanje fizike kod učenika kombiniranjem znanja i znanstvenog razmišljanja te zaključivanja čime se potiče dublje učenje u odnosu na prazno memoriranje činjenica. Koristeći istraživački pristup u nastavi uvodimo nove koncepte kroz istraživanje i konstrukciju modela fizikalnih pojava te problemski pristupamo primjeni modela u satima primjene gradiva. Pritom uključujemo brojne interaktivne nastavne metode kako bi se na svakom satu fizike potaknuo intelektualni angažman učenika. Neke od navedenih interaktivnih nastavnih metoda su razredna rasprava, konceptualna pitanja s karticama, rješavanje zadataka u malim skupinama, interaktivno izvođenje pokusa te računalne interaktivne metode. Učenici kroz istraživački usmjerenu nastavu odgovaraju na znanstvena pitanja formuliranjem i testiranjem hipoteze, osmišljavanjem i provođenjem pokusa, samostalnim bilježenjem svojih predviđanja, opažanja i zaključaka te argumentiranjem istih pred ostatkom razreda. Time se kod učenika postiže bolje razumijevanje prirode znanosti kao i razumijevanje fizikalnih pojava i zakonitosti.

Strukturu istraživački usmjerene nastave čine uvodni, središnji i završni dio sata. U uvodnom dijelu sata otvaramo problem sata postavljanjem uvodnog problema u obliku pitanja ili pokusa. Time motiviramo učenike i usmjeravamo njihovu pažnju na pojavu koja nas zanima, njenu važnost te povezujemo fizikalne sadržaje sa svakodnevnim životom i učeničkim prijašnjim znanjima. Tek nakon što smo razvili osnovnu ideju, na kraju uvodnog dijela sata uvodimo naziv nove pojave. U središnjem dijelu sata provodimo vođeno istraživanje koje započinje istraživačkim pitanjem. Istraživačko pitanje nam daje smjernicu o tome što ćemo eksperimentalno istraživati. Uloga nastavnika je da usmjerava i vodi učenike kroz istraživanje, a oni osim što

upoznaju gradivo, u središnjem dijelu sata upoznaju i znanstvene procese te razvijaju brojne sposobnosti kroz osmišljavanje, izvođenje i promatranje istraživačkih pokusa te predviđanje, opažanje i analiziranje rezultata. U ovom dijelu sata se najčešće koristimo interaktivnim nastavnim metodama, a izvođenjem istraživačkog pokusa nakon formiranih hipotezaučenici istražuju međusobnu ovisnost varijabli koje utječu na promatranu pojavu. Konačni rezultat središnjeg dijela sata je konstrukcija modela i matematički opis promatrane fizikalne pojave koji primjenjujemo i evaluiramo kroz konceptualna pitanja, aplikacijske pokuse i jednostavne zadatke u završnom dijelu sata. Izvođenjem aplikacijskih pokusa učenici imaju priliku primijeniti konstruirani koncept kako bi objasnili druge fenomene i riješili eksperimentalne probleme. Na taj je način učeniku omogućeno evaluiranje novog znanja, a nastavnik na temelju toga dobiva povratnu informaciju o postignutom stupnju razumijevanja kod učenika.

## **4.2 Nastavna priprema: Prigušeno titranje**

U ovom poglavlju prikazana je nastavna priprema za jedan nastavni sat interaktivne istraživački usmjerene nastave trećeg razreda prirodoslovno - matematičke gimnazije na temu "Prigušeno titranje". Navedena tema je u nastavnom planu i programu za gimnazije navedena kao izborni sadržaj koji se nastavlja na prvu nastavnu cjelinu "Titranja", ali se u prirodoslovno - matematičkim gimnazijama često uvrštava u redoviti nastavni plan i program. Navedena tema oslanja se na do tada stečeno znanje iz prethodnih nastavnih jedinica pa su učenici već upoznati s pojmom harmonijskog titranja te jednadžbom i grafom elongacije harmonijskog titranja. U dotadašnjem razmatranju titranja uzimali smo da titrajni sustav nema drugih oblika energije osim mehaničke, koja se pri titranju održava stalnom. U stvarnosti je situacija drugačija, energija titrajnog sustava nije očuvana, već se smanjuje prelaskom u druge oblike energije poput toplinske energije opruge i okolnog zraka. Cilj je učenicima približiti koncept prigušenog titranja kako bi ga razumjeli i znali prepoznati na različitim primjerima. U uvodnom dijelu sata želimo prikazati koncept prigušenog titranja kroz svakodnevne životne situacije i pojave kako bi učenici dobili ideju o novoj pojavi koju ćemo promatrati. Pritom koristimo video materijale na temelju kojih prikupljamo učeničke ideje i dobivamo informaciju o njihovim prethodno stečenim znanjima o prigušenom titranju. U središnjem dijelu sata je cilj istražiti na koji način se mijenja amplituda titranja

kod prigušenog titranja te izgled grafičkog prikaza prigušenog titranja u odnosu na do sada promatrano harmonijsko titranje. Istraživanje navedenih pojava provodi se frontalnim izvođenjem istraživačkog pokusa na temelju kojeg učenici iznose svoje pretpostavke, opažanja te na kraju analiziraju rezultate i iznose vlastite zaključke. Na kraju sata korištenjem konceptualnih kartica učenici odgovaraju na konceptualna pitanja višestrukog izbora dižući kartice. Nakon ponuđenih odgovora učenici o njima diskutiraju sa susjedima nakon čega ponovo odgovaraju na isto pitanje. Ukoliko raspodjela nije dobra, potičemo razrednu raspravu s učenicima kako bismo razjasnili nedoumice i pomogli učenicima da razumiju koncepte prigušenog titranja.

### OBRAZOVNI ISHODI (OČEKIVANA UČENIČKA POSTIGNUĆA)

- prepoznati prigušeno titranje
- objasniti uzroke prigušivanja
- grafički prikazati prigušeno titranje
- osmisliti pokus koji prikazuje prigušeno titranje
- odrediti omjer amplituda titranja kod prigušenog titranja
- usporediti jačinu gušenja u različiti sredstvima

### ODGOJNI ISHODI

- poštivanje drugih
- izražavanje vlastitog mišljenja
- uvažavanje tuđeg mišljenja

### **TIJEK NASTAVNOG SATA**

1. **Uvodni dio:** Uvodni dio sata služi za otvaranje problema prigušenog titranja. Postavljanjem uvodnog problema potičem razrednu raspravu, učenici razmjenjuju ideje te se upoznaju s pojavama kojima ćemo se baviti.

**UVODNI PROBLEM:** Mijenja li se titranje utega ovješnog na oprugu s vremenom?

Ovjesimo uteg na elastičnu oprugu koja visi na stalku i pustimo ga titrati.

- **Što uočavate?**

Očekujem da će učenici uočiti da je uteg ovješšen na oprugu nakon nekog vremena prestao titrati.

- **Što se događa s amplitudom titranja?**

Prozivam jednog učenika na ploču da označi kvačicama amplitude titranja tako da ih zakvači na stalak.

**Što uočavate?**

Očekujem da će učenici uočiti da se amplituda titranja smanjuje tijekom vremena.

- **Što mislite zašto dolazi do zaustavljanja utega?**

Prikupljam učeničke ideje kroz razrednu raspravu. Do sada smo govorili kako titrajni sustav nema drugih oblika energije osim mehaničke, koja prilikom titranja ostaje stalna. Međutim, u stvarnosti to nije tako, već se mehanička energija smanjuje i prelazi u druge oblike energije.

**Koji su to oblici energije?**

Povlačim analogiju s konceptima koji su učenicima već poznati. Ako pustimo automobil na navijanje da se giba po klupi, on će se nakon nekog vremena zaustaviti.

**Zašto?**

Razlog zaustavljanja automobila je unutarnje trenje u malim oprugama te trenje između kotača i klupe.

**Obzirom na to, što bi mogao biti uzrok zaustavljanja utega na opruzi?**

Očekujem da će učenici povezati promatrano titranje utega s prethodnim primjerom te da će zaključiti da je razlog trenje.

**Gdje pronalazimo djelovanje sile trenja?**

Sila trenja djeluje unutar opruge i u obliku otpora zraka. To je razlog smanjivanja amplitude titranja utega na opruzi i zaustavljanja utega nakon nekog vremena. S obzirom na to, oblici energije u koje prelazi mehanička energija su toplina u opruzi i okolnom zraku.

- **Kako bismo mogli nazvati takvo titranje?**

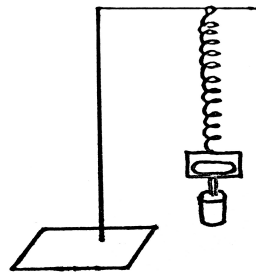
S obzirom da dolazi do prigušivanja gibanja utega, ovakvo gibanje zovemo prigušeno gibanje. Pišem naslov na ploču.

2. **Središnji dio:** U središnjem dijelu sata konstruiramo model prigušenog i prisilnog titranja.

Ovjesimo uteg na elastičnu oprugu.

**ISTRAŽIVAČKO PITANJE: Kako se mijenja amplituda titranja kod prigušenog titranja ?**

Elastičnu oprugu ovjesimo na stalak te na nju pričvrstimo prozirnu vakuumsku vrećicu u koju stavimo mobilni uređaj. Pomoću bakrene žice i metalne spajalice objesimo uteg na vrećicu.



- **Što mislite, kako će izgledati grafički prikaz prigušenog titranja? Što se događa s amplitudom titranja tijekom gibanja?**

S obzirom na smanjivanje amplitude titranja tijekom vremena, učenici razmišljaju o grafičkom prikazu navedenog gibanja. Tražim od učenika da napišu u bilježnice svoje pretpostavke, tj. skiciraju kako misle da izgleda graf prigušenog gibanja.

Na mobilnom uređaju pokrenemo aplikaciju *Phyphox* te u izborniku odaberemo *Acceleration (without g)*. Izvučemo uteg iz ravnotežnog položaja i pustimo ga da titra do zaustavljanja. Netom prije puštanja utega pritisnemo start na aplikaciji te nakon unaprijed određene vremenske odgode započinjemo snimanje titranja. Nakon zaustavljanja utega, na ekranu mobilnog uređaja dobivamo grafički prikaz akceleracije u vremenu. Prikazujem dobiveni graf na ploči.

- **Kakav grafički prikaz dobivamo? Slaže li se to s vašim pretpostavkama?**

Raspravljamo s učenicima kako se na grafu očituje smanjivanje amplitude.

Zapisujem na ploču vrijeme koje je proteklo do zaustavljanja utega. Crtam tablicu na ploču gdje prvi stupac sadrži amplitude pojedinog titraja, drugi stupac vrijednosti amplituda pojedinih titraja očitane s grafa, a treći stupac omjer amplituda dvaju uzastopnih titraja. Prozivam jednog učenika na ploču kako bi očitao vrijednosti amplituda titranja i popuni drugi stupac tablice. Prozivam još jednog učenika na ploču kako bi popunio zadnji stupac tablice s omjerima amplituda uzastopnih titraja.

	$A_i$	$\frac{A_i}{A_{i+1}}$
$A_1$		
$A_2$		
$A_3$		

Tablica 1: Prikaz tablice koju učenici ispunjavaju na temelju očitanih vrijednosti dobivenih mjerenjem amplitude titranja utega u zraku.

- **Što uočavate, što se događa s amplitudama svakog pojedinog titraja? Odgovara li to vašim pretpostavkama?**

Na temelju očitanih vrijednosti zapisanih u tablici, učenici mogu uočiti da dolazi do smanjivanja vrijednosti amplituda titraja.

- **Što se događa s omjerom amplituda uzastopnih titraja?**

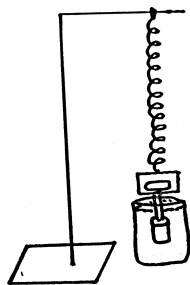
Na temelju očitanih vrijednosti zapisanih u tablici, učenici mogu uočiti da omjer amplituda uzastopnih titraja ostaje stalan. Takav omjer naziva se **omjer prigušenja**.

Ponovimo isti pokus samo sada uteg uronimo uteg u staklenu čašu s vodom. Ponovo pokrenemo snimanje na mobilnoj aplikaciji i pustimo uteg da titra. Nakon zaustavljanja utega, na ekranu mobilnog uređaja dobivamo grafički prikaz akceleracije u vremenu. Prikazujem dobiveni graf na ploči.

- **Kakav grafički prikaz dobivamo? Koliko vremena je bilo potrebno da se uteg zaustavi u usporedbi s prvim slučajem titranja u zraku?**

Učenici na temelju prikazanog grafičkog prikaza mogu uočiti razliku u odnosu na prethodni slučaj. Kod titranja utega u vodi potrebno je manje vremena da se uteg zaustavi što znači da je gušenje veće. To također možemo primijetiti u manjoj razvučenosti grafa u drugom slučaju.





Ponovo crtam istu tablicu na ploču i prozivam dva učenika kako bi ispunili drugi i treći stupac tablice.

	$A_i$	$\frac{A_i}{A_{i+1}}$
$A_1$		
$A_2$		
$A_3$		

Tablica 2: Prikaz tablice koju učenici ispunjavaju na temelju očitanih vrijednosti dobivenih mjerenjem amplitude titranja utega u vodi.

- **Što uočavate, što se događa s amplitudama svakog pojedinog titraja? Odgovara li to vašim pretpostavkama?**

Na temelju očitanih vrijednosti zapisanih u tablici, učenici mogu uočiti da dolazi do smanjivanja vrijednosti amplituda titraja.

- **Što se događa s omjerom amplituda uzastopnih titraja?**

Na temelju očitanih vrijednosti zapisanih u tablici, učenici mogu uočiti da omjer amplituda uzastopnih titraja ostaje stalan.

- **Ovisi li omjer prigušenja o sredstvu u kojem tijelo titra?**

Iz tablice očitanih vrijednosti učenici mogu uočiti da omjer prigušenja ovisi o sredstvu u kojem tijelo titra. Učenici zaključuju da je u vodi jače gušenje nego u zraku.

Na kraju središnjem dijela sata učenici mogu odgovoriti na istraživačko pitanje; svoje odgovore pišu u bilježnice, a kasnije ih zajedno komentiramo. U prigušenim titranjima u prirodi i u tehnici, amplitude titranja se postupno smanjuju, a omjer prigušivanja je približno stalan. Također postoji

i poseban slučaj kod kojeg je gušenje vrlo jako, tzv. **kritično gušenje**, pa se tijelo zaustavi već kada prvi put dođe do ravnotežnog položaja. Takvo gibanje više nije periodično jer tijelo nije napravilo nijedan potpuni titraj pa ga nazivamo **aperiodičnim gibanjem**.

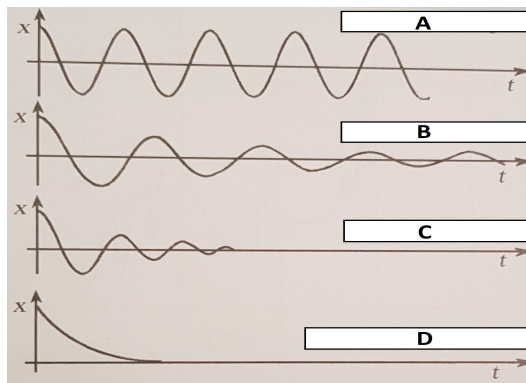
### 3. Završni dio:

U završnom dijelu sata provjeravam učeničko razumijevanje koncepata prigušenog titranja.

#### 1. Koja se od navedenih veličina u prigušenom titranju mijenja?

- A ) period
- B ) amplituda
- C ) frekvencija

S obzirom da smo promatrali promjenu amplitude u središnjem dijelu sata, očekujem da će učenici prepoznati da je amplituda veličina koja se mijenja prilikom prigušenog titranja.



Slika 4.1: Grafički prikazi prigušenog titranja [7].

#### 2. Poredajte po veličini grafove (Slika 4.1) koji prikazuju prigušeno titranje od najvećeg do najmanjeg gušenja:

- A )  $A > B > C > D$
- B )  $D > C > B > A$
- C )  $D > C = B > A$
- D )  $A = B = C = D$

Očekujem da će učenici uočiti kako grafički prikazi prikazuju prigušena titranja čiji su koeficijenti gušenja različiti. Ako promotrimo broj prolazaka kroz ravnotežni položaj prilikom titranja, zaključujemo da manji broj prolazaka kroz ravnotežni položaj znači veće gušenje. S obzirom na to točan odgovor je pod B).

**3. Koji od grafičkih prikaza (Slika 4.1) prikazuje titranje bez gušenja?**

A ) A

B ) B

C ) C

D ) D

S obzirom da smo tijekom sata više puta spomenuli da se amplituda titranja tijekom prigušenog titranja smanjuje, očekujem da će učenici uočiti kako samo u primjeru A) amplituda ostaje stalan pa je to grafički prikaz titranja bez gušenja.

## 5 Zaključak

U ovom radu promatran je elektromehanički sustav kojeg čini karbonska nanocjevčica učvršćena između nemagnetskog (S) i magnetskog vodljivog mikrokontakta (D) na koje je doveden prednapon ( $\mp V_b$ ), pri čemu se nanocjevčica nalazi u magnetskom polju okomitom na nju i promatramo ju kao kvantnu točku unutar režima kulonske blokade. Pokazalo se da magnetomotorno vezanje između električne struje kroz karbonsku nanocjevčicu i njenih mehaničkih vibracija može rezultirati elektromehaničkom nestabilnošću i samoekscitiranim oscilacijama [4]. Cilj ovog diplomskog rada bio je dati klasični teorijski opis elektromehaničke nestabilnosti u navedenom nanoelektromehaničkom sustavu u području dozvoljenih fizikalnih parametara. Pritom je elektromehanička nestabilnost određena nastankom samoekscitiranih oscilacija mehaničkih i električnih obzervabli koje uočavamo kao gubitak stabilnosti stacionarne fiksne točke i nastanak graničnog kola u faznom prostoru oscilatora.

Promatranjem područja nestabilnosti odredili smo amplitudu titranja promatranog sustava, odnosno radijus graničnog kola koje modelira sustave koji zbog svoje konstrukcije padaju u režim spontano ekscitiranih oscilacija. Ponašanje funkcije  $\Phi(A)$ , pomoću koje je određena amplituda, prikazano je na slici 3.3. Numeričkom analizom pokazalo se da stacionarne oscilacije nanocjevčice u rastućem vanjskom magnetskom polju mogu biti određene ili kontinuiranim rastom stacionarne amplitude od nule, ili, s druge strane, skokom na konačnu vrijednost amplitude. S obzirom na to razlikujemo tzv. *soft excitation* i *hard excitation*. U prvom slučaju početak oscilacija nanocjevčice je gladak unutar područja negativne diferencijalne otpornosti, a za zadovoljeni uvjet (3.38) stanje mirovanja nanocjevčice je nestabilno te se s obzirom na to stacionarne oscilacije pojavljuju spontano. S druge strane, u drugom slučaju nestabilnost se očituje na drugačiji način te je također prikazan na slici kroz fazni dijagram promatranog nanoelektromehaničkog sustava. Imamo dvije bifurkacijske točke  $B_C^{(1)}(V_b)$  i  $B_C^{(2)}(V_b)$  u kojima krivulja  $\Phi(A, B)$  dotiče A - os odozgo i za koje vrijedi da je  $B_C^{(2)}(V_b) > B_C^{(1)}(V_b)$ , gdje je  $\beta(B_C^{(2)}(V_b)) = 0$ . Sve dok vrijedi da je  $B < B_C^{(1)}(V_b)$ , stanje mirovanja nanocjevčice smatra se stabilnim stanjem. No, za slučaj kada je  $B_C^{(1)}(V_b) < B < B_C^{(2)}(V_b)$ , stanje mirovanja jednako kao i stanje titranja nanocjevčice konačnom amplitudom smatra se stabilnim stanjem. To znači da je za navedene uvjete sustav bistabilan, odnosno ima dva stabilna stanja. Postoja-

nje područja na kojem su magnetsko polje i prednapon takvi da je sustav bistabilan, u odnosu na amplitudu titranja, dovodi do histereze. Početak nestabilnosti sustava određen je predznakom koeficijenta  $c_1$  u izrazu za amplitudu. Prvi član izraza (3.75) odnosi se na mehaničko gušenje sustava, dok je uvjet nestabilnosti sustava sadržan u drugom članu istog izraza. Ukoliko vrijedi da je član  $\Omega^2 - 2(\gamma_{\uparrow} - \gamma_{\downarrow} + \gamma_{\uparrow}\gamma_{\downarrow}) > 0$ , onda kažemo da je zadovoljen minimalni uvjet nestabilnosti sustava što je osjenčano na slici 3.5. Pokazano je da ako se nalazimo u području negativne diferencijalne vodljivosti, drugi član u izrazu (3.75) je uvijek pozitivan, čak i u granici  $\Omega = 0$ , dok je u području pozitivne diferencijalne vodljivosti potrebna konačna relativna mehanička frekvencija  $\Omega$  da bismo mogli govoriti o nestabilnosti. Tada možemo zaključiti da se povećanjem navedene mehaničke frekvencije moguće nestabilno područje širi od područja s negativnom diferencijalnom vodljivošću i na područje s pozitivnom diferencijalnom vodljivošću.

## Literatura

- [1] Sapmaz, S. ; Blanter, Ya. M. ; Gurevich, L. ; van der Zant, H. S. J. : Carbon Nanotubes as Nanoelectromechanical Systems// Physical Review B, 2003.
- [2] Khanna, V. K. : Integrated Nanoelectronics. Berlin : Springer, 2016.
- [3] Radić, D. : Spin - controlled mechanics in nanoelectromechanical systems// Physica B, 2014.
- [4] Radić, D. ; Nordenfelt, A. ; Kadigrobov, A. M. ; Shekhter, R. I.; Jonson, M. ; Gorelik, L. Y. : Spin-Controlled Nanomechanics Induced by Single-Electron Tunneling // Physical Review Letters, 2011.
- [5] Jorio, A.; Dresselhaus, G.; Dresselhaus, M. S. : Carbon Nanotubes: Advanced Topics in the Synthesis, Structure, Properties and Applications. Berlin : Springer, 2008.
- [6] Labor, Jakov: Fizika 3, udžbenik za 3. razred gimnazije. Zagreb: Alfa, 2014.
- [7] Paar, Vladimir: Fizika 3, udžbenik za 3. razred gimnazije. Zagreb: Školska knjiga, 2009.