Polinomski sustavi u ekonomiji

Zemunik, Petra

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Petra Zemunik

POLINOMSKI SUSTAVI U EKONOMIJI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Dragutin Svrtan

Zagreb, veljača, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svom mentoru prof.dr.sc. Dragutinu Svrtanu na strpljenju i nesebičnoj pomoći pri izradi diplomskog rada.

Sadržaj

Uvod

Centralni pojam u Teoriji igara je Nashova ravnoteža koju je opisao John Forbes Nash Jr. i za svoj rad dobio 1994. Nobelovu nagradu za ekonomiju. Nashova ravnoteža pomaže nam predvidjeti što će se dogoditi ukoliko nekoliko ljudi ili grupa ljudi sudjeluje u donošenju neke odluke. Na primjer, igračima neke društvene igre pomaže odabrati sljedeći potez, natjecateljskim firmama pomaže uspostaviti cijene itd. Nashove ravnoteže mogu se karakterizirati na nekoliko načina, a mi ćemo se fokusirati na njihovu karakterizaciju kao rješenja određenih polinomskih sustava. Pri tome ćemo koristiti tehnike računalne algebre, algebarske geometrije i kombinatorike.

U prvom poglavlju upoznajemo se s pojmom Gröbnerove baze. Metoda Gröbnerovih baza jedna je od najpraktičnijih metoda za pronalaženje rješenja polinomskog sustava. Kako bismo mogli uopće definirati Gröbnerovu bazu, prvo smo, korištenjem terminologije iz [2] i [3], naveli pojmove i rezultate koji su nam potrebni. U odjeljku 1.1 podsjećamo se definicija monoma i polinoma te algebarskih struktura prstena polinoma i njegovih ideala. Zatim, u odjeljku 1.2 definiramo i oprimjerimo monomijalni uređaj te dajemo algoritam za dijeljenje polinoma više varijabli. Konačno, u odjeljku 1.3 možemo definirati Gröbnerovu bazu. Pokazujemo i algoritam za njen izračun, poznat kao Buchbergerov algoritam. Također, na primjeru pokazujemo izračun Gröbnerove baze uz pomoć software-a SINGULAR.

Drugo poglavlje bavi se politopima i njihovim mješovitim volumenom, čija je definicija neophodna za iskaz glavnog rezultata ovog poglavlja - Bernstein-Kushnirenkovog teorema, koji nam kaže da je ukupan broj nenul kompleksnih nultočaka polinomskog sustava jednak mješovitom volumenu Newtonovih politopa. Kasnije, u trećem poglavlju, vidjet ćemo rezultat McKelveya i McLennana koji su dali kombinatorni opis za mješoviti volumen Newtonovih politopa polinomskog sustava.
U ovom poglavlju prvo uvodimo pojmove konveksnosti i politopa, zatim u odjeljku 2.2 definiramo sumu Minkowskog i mješoviti volumen te konačno u 2.3 dolazimo do Bernstein-Kushnirenkovog rezultata.

Treće poglavlje bazirano je na [4], Sturmfelsovoj knjizi ”Solving Systems of Polynomial Equations” koja na vrlo jednostavan i razumljiv način uvodi osnovne pojmove igre, igrača, čistih i mješovitih strategija, isplata, Nashove ravnoteže itd. Pri tome se fokusiramo na igru s tri igrača. Drugi odjeljak ovog poglavlja daje numeričke primjere naše teorije te Zatvorenikovu dilemu kao najpoznatiji primjer Nashove ravnoteže čija je terminologija preuzeta iz [1]. U odjeljku 3.3 obrađuje se igra s n igrača u kojoj i-ti igrač ima d_i čistih strategija te se daju rezultati za maskimalan broj mješovitih Nashovih ravnoteža takve igre.

Poglavlje 1

Polinomi i Gröbnerove baze

1.1 Polinomi i ideali

Prije definiranja osnovnih pojmova prvog poglavlja prisjetimo se intuitivne definicije polja koja nam govori da je polje skup na kojem su definirane računske operacije zbrajanja i množenja. Skupovi koji su, uz uobičajene operacije zbrajanja i množenja, standardni primjeri polja su: skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ i skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, dok skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ nije polje (broj 2 nema inverz za množenje u skupu $\mathbb{Z}$).

Definicija 1.1.1. ***Monom*** *u varijablama* $x_1, x_2, ..., x_n$ *je produkt*

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \tag{1.1}$$

gdje su eksponenti $\alpha_i, i = 1, 2..., n$ *nenegativni cijeli brojevi.*

(1.1) skraćeno ćemo pisati kao x^α gdje je $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ vektor eksponenata u monomu.
Totalni stupanj monoma x^α je suma eksponenata $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ i obično ga označavamo s $|\alpha|$. Na primjer, $x_1^3 x_2^2 x_3^4$ je monom totalnog stupnja 9 u varijablama x_1, x_2, x_3 budući da je $\alpha = (3, 2, 4)$ i $|\alpha| = 9$.

Neka je K proizvoljno polje. Konačna linearna kombinacija monoma s koeficijentima iz K naziva se *polinom* u varijablama $x_1, ..., x_n$. Dakle, polinom u varijablama $x_1, ..., x_n$ s koeficijentima iz K je oblika

$$f = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$$

gdje je $c_\alpha \in K$, za svaki α.
Koristit ćemo također pojam *član* polinoma koji označava produkt elementa iz K (različitog od nule) i monoma koji se pojavljuje u polinomu.

Totalni stupanj polinoma f, u oznaci $deg(f)$, je maksimalni $|\alpha|$ takav da je koeficijent $c_\alpha \neq 0$. Na primjer, ako je K polje racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$, $p = x^3y + 2x^2z + \frac{1}{3}y^3z^2 + xz^4$ je polinom koji ima 4 člana i totalni stupanj 5.
Za polinom f kažemo da je *homogen* ako svi monomi koji se pojavljuju u njemu uz nenul koeficijente imaju jednaki totalni stupanj. Na primjer, $f = 4x^3 + 5xy^2 - z^3$ je homogen polinom totalnog stupnja 3, dok $g = 4x^3 + 5xy^2 - z^6$ nije homogen polinom.

Zbrajanje i množenje polinoma definiramo na sljedeći način:

$$\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha + \sum_\alpha b_\alpha x^\alpha = \sum_\alpha \left(a_\alpha + b_\alpha\right) x^\alpha$$

$$\Big(\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha\Big) \cdot \Big(\sum_\beta b_\beta x^\beta\Big) = \sum_\gamma \Big(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} a_\alpha b_\beta\Big) x^\gamma$$

Skup polinoma u varijablama $x_1, ..., x_n$ s koeficijentima u K označit ćemo s $K[x_1, ..., x_n]$ i zvati *prsten polinoma*. $K[x_1, ..., x_n]$ s operacijama zbrajanja i množenja ima strukturu komutativnog prstena, ali ne i polja jer samo nenul konstantni polinomi imaju multiplikativni inverz.

Za dane polinome $f_1, ..., f_s \in K[x_1, ..., x_n]$ možemo promatrati polinome koji se dobiju množenjem danih polinoma s proizvoljnim polinomima i njihovim sumiranjem. S $\langle f_1, ..., f_s\rangle$ ćemo označavati skup

$$\langle f_1, ..., f_s\rangle = \Big\{p_1 f_1 + \cdots + p_s f_s : p_i \in K[x_1, ..., x_n] \text{ za } i = 1, ..., s\Big\}$$

Lako se vidi da je $\langle f_1, ..., f_s\rangle$ zatvoren na zbrajanje u $K[x_1, ..., x_n]$. Nadalje, ako uzmemo $f \in \langle f_1, ..., f_s\rangle$ i $p \in K[x_1, ..., x_n]$ proizvoljan, onda je $p \cdot f \in \langle f_1, ..., f_s\rangle$. Ova dva svojstva definiraju ideale u prstenu $K[x_1, ..., x_n]$.

Definicija 1.1.2. *Neka je $I \subset K[x_1, ..., x_n]$ neprazan podskup. Za I kažemo da je* ***ideal*** *ako zadovoljava sljedeća svojstva*

- *$f + g \in I$, za sve $f, g \in I$*
- *$p \cdot f \in I$, za sve $f \in I$ i $p \in K[x_1, ..., x_n]$*

Dakle, $\langle f_1, ..., f_s\rangle$ je ideal i zvat ćemo ga *ideal generiran s* $f_1, ..., f_s$.

Jedan od najvažnijih rezultata o idealima, poznat kao *Hilbertov teorem*, kaže da svaki ideal $I \subset K[x_1, ..., x_n]$ ima konačan generirajući skup. Drugim riječima, za dani ideal I postoji skup polinoma $\{f_1, ..., f_s\} \subset K[x_1, ..., x_n]$ takav da je $I = \langle f_1, ..., f_s\rangle$.

1.2 Monomijalni uređaj

Obzirom da je polinom linearna kombinacija monoma, želimo moći rasporediti članove polinoma u određenom poretku. Da bismo to učinili, moramo znati usporediti svaki par monoma. Uzimajući ovo u obzir, slijedi definicija.

Definicija 1.2.1. ***Monomijalni uređaj*** *na $K[x_1, ..., x_n]$ je relacija $>$ na skupu monoma x^α, $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ (ili ekvivalentno na skupu eksponenata $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$) koja zadovoljava:*

- *$>$ je relacija potpunog uređaja,*
- *ako je $x^\alpha > x^\beta$ i x^γ prozvoljan monom, onda je $x^{\alpha+\gamma} > x^{\beta+\gamma}$,*
- *$>$ je relacija dobrog uređaja tj. svaki neprazan skup monoma ima najmanji element obzirom na $>$.*

Uređaj po stupnjevima

$$... > x^{m+1} > x^m > ... > x^2 > x > 1$$

monoma u $K[x]$ je monomijalni uređaj. Za prstenove polinoma s više varijabli postoji mnogo različitih monomijalnih uređaja. Neki od najvažnijih dani su u sljedećim primjerima.

Primjer 1.2.2 (Leksikografski uređaj). *Neka su x^α i x^β monomi iz $K[x_1, ..., x_n]$. Kažemo da je $x^\alpha >_{lex} x^\beta$ ako je u razlici $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$ prvi nenul element s lijeve strane pozitivan.*

Primjer 1.2.3 (Graduirani leksikografski uređaj). *Neka su x^α i x^β monomi iz $K[x_1, ..., x_n]$. Kažemo da je $x^\alpha >_{grlex} x^\beta$ ako je $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i > \sum_{i=1}^n \beta_i = |\beta|$ ili ako je $|\alpha| = |\beta|$ i $x^\alpha >_{lex} x^\beta$.*

Na primjer, u $K[x, y, z]$ s $x > y > z$ imamo

$$x^3y^2z >_{lex} x^2y^6z^{12}$$

jer je u $(3, 2, 1) - (2, 6, 12) = (1, -4, -11)$ prvi nenul element s lijeve strane pozitivan. Uspoređivanjem leksikografskog i graduiranog leksikografskog uređaja vidimo da rezultati mogu biti različiti. Vrijedi

$$x^2y^6z^{12} >_{grlex} x^3y^2z$$

jer je $20 = 2 + 6 + 12 > 3 + 2 + 1 = 6$.

Za dani polinom $f = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$ i dani monomijalni uređaj $>$ koristit ćemo sljedeću terminologiju.

Definicija 1.2.4. ***Multistupanj*** *polinoma f definirat ćemo kao*

$$md(f) = \max_{>}\{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} : c_\alpha \neq 0\}$$

gdje $\max_>$ *označava maksimizaciju obzirom na monomijalni uređaj* $>$.
Vodeći koeficijent *od f je*

$$LC(f) = c_{md(f)}$$

Vodeći monom *od f je*

$$LM(f) = x^{md(f)}$$

Vodeći član *od f je*

$$LT(f) = LC(f) \cdot LM(f)$$

Da bi smo definirali Gröbnerove baze u sljedećem poglavlju, moramo uvesti dijeljenje polinoma.
Ako su f i g polinomi jedne varijable x, f dijelimo sa g na poznati način tako da je $f = qg + r$ i pritom je ili $r = 0$ ili je stupanj polinoma r strogo manji od stupnja polinoma g. Generaliziramo dijeljenje dva polinoma jedne varijable na polinome s više varijabli.

Definicija 1.2.5. *Neka je* $>$ *monomijalni uređaj na* $K[x_1, ..., x_n]$ *i* $F = (f_1, ..., f_s)$ *uređena s-torka polinoma iz* $K[x_1, ..., x_n]$. *Tada svaki* $f \in K[x_1, ..., x_n]$ *možemo zapisati kao*

$$f = a_1 f_1 + ... + a_s f_s + r$$

gdje su $a_i, r \in K[x_1, ..., x_n]$ *i pritom je ili* $r = 0$ *ili je r linearna kombinacija monoma od kojih nijedan nije djeljiv s* $LT(f_1), ..., LT(f_s)$. *Nadalje, ako je* $a_i f_i \neq 0$, *onda mora vrijediti* $md(f) \geq md(a_i f_i)$. *Izraz r se zove ostatak od f pri dijeljenju s F.*

Primjer 1.2.6. *Na primjeru ćemo pokazati algoritam kojim dijelimo polinom f sa uređenom s-torkom polinoma* $F = (f_1, ..., f_s)$
Podijelit ćemo $f = x^2y + xy^2 + y^2$ *sa* $f_1 = y^2 - 1$ *i* $f_2 = xy - 1$ *koristeći leksikografski uređaj sa* $x > y$.
Gledamo vodeće članove polinoma f_1 *i* f_2, $LT(f_1) = y^2$ *i* $LT(f_2) = xy$. *Vidimo da samo* $LT(f_2)$ *dijeli* $LT(f) = x^2y$, *stoga dijelimo* x^2y *sa* xy, *što daje* x, *i to je naš* a_2. *Zatim oduzimamo* $x \cdot f_2$ *od* f.

$$a_2 = x$$

$$(x^2y + xy^2 + y^2) - x(xy - 1) = xy^2 + y^2 + x$$

Sada ponovimo isti postupak na novom polinomu. Vodeći članovi $LT(f_1) = y^2$ *i* $LT(f_2) = xy$ *dijele vodeći član* $LT(xy^2 + y^2 + x) = xy^2$. *Prvo uzimamo* f_1 *i rezultat odgovarajućeg dijeljenja je* x, *što je naš* a_1:

$$a_1 = x$$

$$(xy^2 + y^2 + x) - x(y^2 - 1) = y^2 + 2x$$

Sada, $LT(f_1) = y^2$ *i* $LT(f_2) = xy$ *ne dijele* $LT(y^2 + 2x) = 2x$. *Međutim, polinom* $y^2 + 2x$ *ne može biti ostatak dijeljenja jer* $LT(f_1)$ *dijeli njegov monom* y^2. *Zato* $2x$ *premještamo u ostatak da možemo nastaviti dijeliti.*

$$r = 2x$$

$$(y^2 + 2x) - 2x = y^2$$

$LT(f_1) = y^2$ *dijeli* y^2 *i rezultat dijeljenja je* 1 *pa to pridodajemo našem* a_1:

$$a_1 = x + 1$$

$$y^2 - 1(y^2 - 1) = 1$$

Vodeći članovi $LT(f_1) = y^2$ *i* $LT(f_2) = xy$ *ne dijele* 1 *pa* 1 *pridodajemo našem ostatku dijeljenja.*

$$r = 2x + 1$$

Dakle, f *možemo zapisati na sljedeći način:*

$$x^2y + xy^2 + y^2 = (x + 1) \cdot (y^2 - 1) + x \cdot (xy - 1) + (2x + 1)$$

1.3 Gröbnerove baze

Definicija 1.3.1. *Neka je > monomijalni uređaj na* $K[x_1, ..., x_n]$ *i neka je* $I \subset K[x_1, ..., x_n]$ *ideal.* ***Gröbnerova baza*** *za I (obzirom na >) je konačan skup polinoma* $G = \{g_1, ..., g_t\} \subset I$ *sa svojstvom da za svaki nenul polinom* $f \in I$, *postoji neki* $g_i \in G$ *takav da* $LT(g_i)$ *djeli* $LT(f)$.

Postoje različite metode za računanje Gröbnerove baze. Mi ćemo pokazati Bucbergerov algoritam. U tu svrhu definirajmo prvo S-polinom.

Definicija 1.3.2. *Neka su* $f, g \in K[x_1, ..., x_n]$ *polinomi multistupnjeva* $md(f) = \alpha$ *i* $md(g) = \beta$. *Definiramo* γ *s* $\gamma_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$, *i=1,...,n.* ***S-polinom*** *definiramo s*

$$S(f, g) = \frac{\boldsymbol{x}^\gamma}{LT(f)} f - \frac{\boldsymbol{x}^\gamma}{LT(g)} g.$$

Na primjer, neka je $f = x^3y^2 - x^2y^3 + x$ i $g = 3x^4y + y^2$ u $\mathbb{R}[x,y]$ sa *grlex* uređajem. Tada je $\gamma = (4,2)$ i

$$\begin{aligned} S(f,g) &= \frac{x^4y^2}{x^3y^2} \cdot f - \frac{x^4y^2}{3x^4y} \cdot g \\ &= -x^3y^3 + x^2 - \frac{1}{3}y^3 \end{aligned}$$

Buchbergerov algoritam

Ulaz:$F = (f_1, ..., f_s)$
Izlaz: Gröbnerova baza za $I = \langle F \rangle$ koja sadrži F
  $G := F$
  PONAVLJAJ
    $G' := G$
    ZA svaki par $g_i \neq g_j \in G'$ RADI
      r =ostatak od $S(g_i, g_j)$ pri dijeljenju s G'
      AKO $r \neq 0$ ONDA $G = G \cup \{r\}$
  DOK $G = G'$

Primjer 1.3.3. *Koristit ćemo Buchbergerov algoritam da izračunamo Gröbnerovu bazu uz grlex uređaj za ideal $I = \langle f_1, f_2 \rangle \subset K[x,y]$, gdje je $f_1 = x^3 - 2xy$ i $f_2 = x^2y - 2y^2 + x$.*
$S(f_1, f_2) = -x^2$ i njegov ostatak pri dijeljenju s $\{f_1, f_2\}$ je $f_3 = -x^2$, različit od nule, stoga ga trebamo uključiti u Gröbnerovu bazu.
$S(f_1, f_3) = -2xy$ i njegov ostatk pri dijeljenju s $\{f_1, f_2, f_3\}$ je $f_4 = -2xy$, različit od nule, pa i njega trebamo uključiti u bazu.
$S(f_2, f_3) = -2y^2 + x$ i njegov ostatk pri dijeljenju s $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ je $f_5 = -2y^2 + x$, različit od nule, pa i njega trebamo uključiti u bazu.
Sada se može izračunati da je ostatak pri dijeljenju svakog S-polinoma dvaju različitih elemenata baze sa bazom jednak nula pa je skup $\{f_1, ..., f_5\}$ Gröbnerova baza za ideal I.

Definicija 1.3.4. *Neka je $G = \{g_1, ..., g_s\}$ Gröbnerova baza ideala $I \subset K[x_1, ..., x_n]$. Za G kažemo da je **minimalna** Gröbnerova baza ako i samo ako za svaki $i = 1, ..., s$ vrijedi $LC(g_i) = 1$ i $LM(g_i)$ ne dijeli $LM(g_j)$, za $j \neq i$.*

Primjer 1.3.5. *U prethodnom primjeru dobili smo da je Gröbnerova baza za ideal $I = \langle x^3 - 2xy, x^2y - 2y^2 + x \rangle$, $G = \{x^3 - 2xy, x^2y - 2y^2 + x, -x^2, -2xy, -2y^2 + x\}$. Primjetimo da su neki od vodećih koeficijenata različiti od 1, pa ćemo te polinome pomnožiti s odgovarajućim koeficijentima. Nadalje, primjetimo da je*

$$LM(x^3 - 2xy) = x^3 = -x \cdot LM(-x^2),$$

$$LM(x^2y - 2y^2 + x) = x^2y = -\frac{1}{2}x \cdot LM(-2xy).$$

Zbog toga ćemo eliminarati polinome $x^3 - 2xy$ i $x^2y - 2y^2 + x$ iz Gröbnerove baze. Dakle,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_3 &= x^2 \\ \tilde{f}_4 &= xy \\ \tilde{f}_5 &= y^2 - \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

je minimalna Gröbnerova baza za I.

Mnimalne Gröbnerove baze imaju lijepo svojstvo: bilo koje dvije minimalne Gröbnerove baze ideala imaju isti broj elemenata.

Propozicija 1.3.6. *Neka je $I \subset K[x_1, .., x_n]$ ideal i $>$ monomijalni uređaj. Pretpostavimo da su $G = \{g_1, ..., g_s\}$ i $H = \{h_1, ..., h_t\}$ dvije minimalne Gröbnerove baze za I obzirom na $>$. Tada je $s = t$ i $LT(g_i) = LT(h_i)$, za $i = 1, ..., s$.*

Dokaz. Bez gubitka općenitosti pretpostavimo da je $s \geq t$.

$g_1 \in I$ i H je Gröbnerova baza, pa slijedi da postoji $h_i \in H$ takav da $LT(h_i)$ dijeli $LT(g_1)$. Pretpostavimo da $LT(h_1)$ dijeli $LT(g_1)$.

$h_1 \in I$ i G je Gröbnerova baza, pa slijedi da postoji $g_j \in G$ takav da $LT(g_j)$ dijeli $LT(h_1)$. Dakle, i $LT(g_j)$ dijeli $LT(g_1)$, pa minimalnost od G implicira da je $j = 1$. Također, $LT(g_1) = LT(h_1)$.

Nastavljamo dalje s $g_2 \in I$.

Kad bi vrijedilo $s > t$, dolazimo do kontradikcije. Nađemo neki h_i koji ima isti vodeći član kao i g_{t+1}. No, ranije smo već dobili da je $LT(h_i) = LT(g_i)$. Ovo je kontradikcija s minimalnošću od G, obzirom da je $LT(g_{t+1}) = LT(g_i)$. □

Definicija 1.3.7. *Neka je $G = \{g_1, ..., g_s\}$ Gröbnerova baza ideala $I \subset K[x_1, ..., x_n]$. Za G kažemo da je **reducirana** Gröbnerova baza ako i samo ako za svaki $i = 1, ..., s$ vrijedi $LC(g_i) = 1$ i $LM(g_i)$ ne dijeli niti jedan član od g_j, za $j \neq i$.*

Primjer 1.3.8. *U prethodnom primjeru minimalna baza je i reducirana baza. Primjetimo, vodeći monom bilo kojeg polinoma iz baze ne dijeli niti jedan član ostalih polinoma.*

Propozicija 1.3.9. *Neka je $I \subset K[x_1, .., x_n]$ ideal i $>$ monomijalni uređaj. Postoji točno jedna reducirana Gröbnerova baza za I obzirom na $>$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. $\{f_1, ..., f_s\}$ i $\{g_1, ..., g_s\}$ su obje reducirane i takve da je $LT(f_i) = LT(g_i)$, za svaki i.

Promotrimo $f_i - g_i \in I$. Ako je različit od nula, onda njegov vodeći član, $LT(f_i - g_i)$ mora biti član od f_i ili g_i.
Bez gubitka općenitosti, prepostavimo da je iz f_i. Kako je $f_i - g_i$ iz I, po definiciji Gröbnerove baze postoji neki f_j takav da $LT(f_j)$ dijeli $LT(f_i - g_i)$. Pri tome je $j \neq i$, zato što je $LT(f_i) > LT(f_i - g_i)$. Obzirom da je $LT(f_i - g_i)$ član iz f_i, onda f_i ima član koji je djeljiv s $LT(f_j)$, a to je kontradikcija s tim da je $\{f_1, ..., f_s\}$ reducirana. □

Sada ćemo pokazati na primjeru računanje Gröbnerove baze uz pomoć software-a SINGULAR.

Primjer 1.3.10. *Promatramo sustav linearnih jednadžbi.*

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\
2x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \\
-x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -1
\end{aligned}
$$

Za izračun Gröbnerove baze u SINGULAR*u obzirom na leksikografski uređaj gdje je $x_1 > x_2 > x_3$ prvo moramo deklarirati prsten polinoma $R = \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$ s leksikografskim uređajem. Ovu deklaraciju postižemo sljedećom naredbom*

```
ring R= 0,(x(1),x(2),x(3)),lp;
```

Izraz $R = 0$ govori da radimo u polju racionalnih brojeva. Nadalje, $(x(1),\ x(2),\ x(3))$ govori da promatramo polinome s tri varijable,a lp označava leksikografski uređaj. Zatim definiramo ideal koji je generiran originalnim sustavom jednadžbi.

```
ideal I = x(1)+x(2)+x(3)-5, 2x(1)-x(2)+x(3)-8, -x(1)+2x(2)+3x(3)+1;
```

Napokon, računamo Gröbnerovu bazu:

```
groebner(I);
_[1]=3*x(3)-2
_[2] =3*x(2)+7*x(3)-6
_[3]= x(1)-2*x(2)-3*x(3)-1
```

Da bismo dobili reduciranu Gröbnerovu bazu, koristimo sljedeću naredbu

```
option ("redSB");
```

i dobijemo:

```
groebner(I);
_[1]=3*x(3)-2
_[2]=9*x(2)-4
_[3]=9*x(1)-35
```

Poglavlje 2

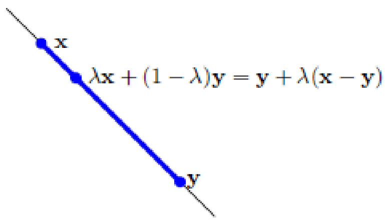
Politopi

2.1 Konveksni skupovi

Za $x, y \in \mathbb{R}^n$ skup

$$[x, y] := \{(1 - \lambda)x + \lambda y : \lambda \in [0, 1]\}$$

nazivamo *segment* s krajevima x i y.



Slika 2.1: Segment s krajevima x i y

Kažemo da je skup $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *konveksan* ako sadrži segment kojemu su krajevi bilo koje dvije točke iz C tj. ako vrijedi

$$(\forall x, y \in C)\ [x, y] \subseteq C.$$

Konveksna kombinacija točaka $x_1, ..., x_m \in \mathbb{R}^n$ je oblika

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$$

gdje su $\lambda_i \geq 0, \ i = 1, ..., m$ realni brojevi takvi da je $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.
Skup svih konveksnih kombinacija točaka iz skupa $S \subseteq \mathbb{R}^n$ naziva se *konveksna ljuska* skupa S i označava sa *conv* S.

$$conv\ S = \{\lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_m s_m : s_i \in S, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\}$$

Lako se pokaže da je $S \subseteq conv\ S$ te da je $conv\ S$ konveksan skup.

Propozicija 2.1.1. *Skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksan ako i samo ako je $S = conv\ S$.*

Dokaz. Ako je $S = conv\ S$, budući da je $conv\ S$ konveksan, onda je S konveksan skup.
Obratno, pretpostavimo da je S konveksan skup i pokažimo da je $S = conv\ S$.
Kako je $S \subseteq conv\ S$, preostaje pokazati da je $conv\ S \subseteq S$. Dokaz provodimo pomoću matematičke indukcije po m, gdje m označava broj točaka koje ulaze u konveksnu kombinaciju. Za $m = 1$ i $m = 2$ tvrdnja proizlazi iz definicije konveksnosti. Pretpostavimo da je tvrdnja dokazana za prirodni broj m i pretpostavimo da je x konveksna kombinacija od $m+1$ točaka iz S. Tada postoje točke $x_1, ..., x_{m+1} \in S$ i realni brojevi $\lambda_i \geq 0, \ i = 1, ..., m+1$, takvi da je $x = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i x_i$ i $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1$.
Ako je $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0$, onda je $x = x_{m+1} \in S$. Ako je $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \neq 0$, zapišimo x kao

$$x = \mu y + \lambda_{m+1} x_{m+1}, \text{ gdje su } \mu = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i, \ y = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\mu} x_i$$

Budući da je y konveksna kombinacija od m točaka iz S, po induktivnoj pretpostavci on leži u skupu S. No tada i x kao konveksna kombinacija od y i x_{m+1} iz S, također pripada skupu S. □

Teorem 2.1.2. *Konveksna ljuska skupa $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je najmanji konveksan skup koji sadrži S, tj. presjek svih konveksnih skupova koji sadrže S.*

Dokaz. Neka je W presjek svih konveksnih skupova iz $\mathbb{R}^n$ koji sadrže skup S. Tvrdimo da je $conv\ S = W$.
Iz $S \subseteq W$ slijedi $conv\ S \subseteq conv\ W$, a zbog konveksnosti skupa W i prethodne propozicije je $conv\ W = W$. Dakle, $conv\ S \subseteq W$.
Nadalje, kako je $S \subseteq conv\ S$, $conv\ S$ konveksan skup te W najmanji konveksan skup koji sadrži S, slijedi $W \subseteq conv\ S$. □

Po definiciji, *politop* u $\mathbb{R}^n$ je konveksna ljuska konačno mnogo točaka iz $\mathbb{R}^n$ koje nazivamo generatorima politopa. Ako je dan konačan skup $A = \{m_1, ..., m_l\} \subset \mathbb{R}^n$, onda se odgovarajući politop može izraziti kao

$$conv\, A = \{\lambda_1 m_1 + \cdots + \lambda_l m_l : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{l} \lambda_i = 1\}$$

Slika 2.2: Politopi u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$

Politop $Q \subset \mathbb{R}^n$ ima n-dimenzionalni volumen koji označavamo sa $Vol(Q)$ i on se može izračunati kao

$$Vol(Q) = \int \cdots \int_Q 1 \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

gdje su $x_1, ..., x_n$ koordinate u $\mathbb{R}^n$. Jednostavni primjer je jedinična kocka u $\mathbb{R}^3$ koja je definirana s $0 \leq x_i \leq 1$, za svaki i te ima volumen 1.
Politopi imaju posebne podskupove koje nazivamo *stranicama*. Na primjer, 3-dimenzionalni politop u $\mathbb{R}^3$ ima:

- stranice, koje su poligoni
- bridove, koji su segmenti i povezuju parove vrhova i
- vrhove, koji su točke

Generalizirano, svi se nazivaju stranice.

Neka je $f \in K[x_1, ..., x_n]$ dan s $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} c_\alpha x^\alpha$. *Newtonov politop* od f u oznaci $NP(f)$ je definiran s

$$NP(f) = conv\left(\left\{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} : c_\alpha \neq 0\right\}\right)$$

Drugim riječima, Newtonov politop nam govori koji se monomi mogu pojaviti uz nenul koeficijent, dok sama vrijednost koeficijenta ne igra ulogu.

Na primjer, bilo koji polinom oblika

$$f = axy + bx^2 + cy^5 + d$$

gdje su $a, b, c, d \neq 0$ ima Newtonov politop oblika

$$Q = Conv(\{(1,1),(2,0),(0,5),(0,0)\})$$

i on je zapravo trokut s vrhovima $(0,0),(2,0)$ i $(0,5)$ jer je (1,1) koveksna kombinacija ostalih triju točaka tj.

$$(1,1) = \frac{3}{10}(0,0) + \frac{1}{2}(2,0) + \frac{1}{5}(0,5).$$

Stoga, polinomi ovog oblika kojima je $a = 0$ imali bi isti Newtonov politop.

2.2 Suma Minkowskog i mješoviti volumen

U ovom poglavlju, upoznat ćemo neke važne konstrukcije iz teorije politopa.

Sljedeće dvije operacije formiraju nove politope od zadanih.

Definicija 2.2.1. *Neka su P, Q politopi u $\mathbb{R}^n$ i $\lambda \geq 0$ realni broj.*

- ***Suma Minkowskog od P i Q*** *u oznaci $P + Q$ definirana je s*

$$P + Q = \{p + q : p \in P \text{ i } q \in Q\}$$

gdje je $p + q$ uobičajena suma vektora iz $\mathbb{R}^n$

- ***Politop λP*** *je definiran s*

$$\lambda P = \{\lambda p : p \in P\}$$

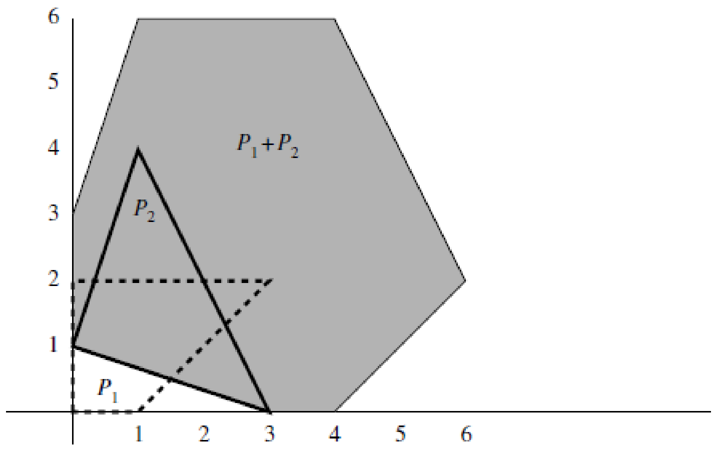
gdje je λp uobičajeno množenje skalara i vektora iz $\mathbb{R}^n$.

Primjer 2.2.2. *Neka su dani polinomi*

$$f_1(x,y) = ax^3y^2 + bx + cy^2 + d$$

$$f_2(x,y) = exy^4 + fx^3 + gy$$

Pretpostavljamo da su svi koeficijenti $a, ..., g$ različiti od 0.
Suma Minkowskog Newtonovih politopa $P_1 = NP(f_1)$ i $P_2 = NP(f_2)$ je konveksni sedmerokut s vrhovima $(0,1),(3,0),(4,0),(6,2),(4,6),(1,6)$ i $(0,3)$.



Slika 2.3: Suma Minkowskog politopa P_1 i P_2

Za konačno mnogo politopa $P_1, ..., P_l \subset R^n$ možemo definirati njihovu sumu Minkowskog $P_1 + \cdots + P_l$ koja je opet politop u $\mathbb{R}^n$.

Da bi smo definirali mješoviti volumen, prvo moramo znati sljedeći teorem Minkowskog.

Teorem 2.2.3 (teorem Minkowskog). *Neka su k i n prirodni brojevi. Fiksiramo politope $P_1, ..., P_k$ u $\mathbb{R}^n$. Tada je funkcija*

$$(t_1, ..., t_k) \mapsto Vol(t_1P_1 + \cdots + t_kP_k), \quad t_i \geq 0$$

homogeni polinom stupnja n.

- Za $k = 0$, teorem je trivijalan.
- Za $k = 1$, teorem kaže da za dani politop $P \subseteq \mathbb{R}^n$, funkcija

  $$t \mapsto Vol(tP), \quad t \geq 0$$

  je homogeni polinom u varijabli t stupnja n. To je istina: polinom $Vol(tP)$ je jednak $Vol(P) \cdot t^n$.
- Za $k = 2$, iskaz kaže da za politope $P, Q \subseteq \mathbb{R}^n$, funkcija

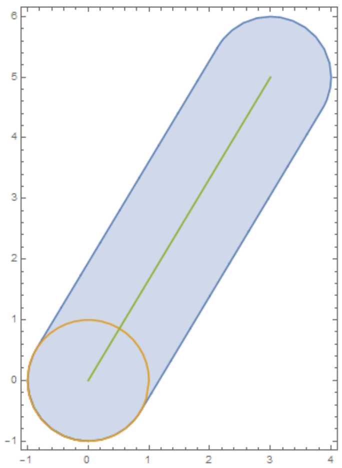
  $$(s, t) \mapsto Vol(sP + tQ)$$

je homogeni polinom stupnja n.
Ako fiksiramo da je $s = 1$, onda nam teorem kaže da je

$$t \mapsto Vol(P + tQ)$$

homogeni polinom stupnja $\leq n$.
Pokažimo to na nekoliko primjera.

- Neka je Q jednotočkovni skup $\{q\}$. Tada je $P + tQ = P + tq$, translacija od P. Dakle,
$$Vol(P + tQ) = Vol(P)$$
jer translacija ne utječe na volumen. Ovo je , svakako, polinom u varijabli t stupnja $\leq n$.
- Neka je $Q = P$. Tada je
$$Vol(P + tQ) = Vol((1 + t)P) = Vol(P) \cdot (1 + t)^n$$
što je očito polinom stupnja $\leq n$.
- Neka je q točka iz $\mathbb{R}^n$ i neka je Q segment $[0, q]$. Tada je
$$Vol(P + tQ) = Vol(P + [0, tq]).$$
Slika 2.4 prikazuje sumu Minkowskog u $\mathbb{R}^2$ kada je P jedinični krug sa središtem u ishodištu, a Q segment $[(0, 0), (3, 5)]$.



Slika 2.4: Suma Minkowskog kruga i segmenta u $\mathbb{R}^2$

Iz ovog vidimo da je

$$Vol(P + tQ) = Vol(P) + ct, \text{ za neku konstantu } c.$$

Ovo je polinom u varijabli t, stupnja $\leq n$.

Definicija 2.2.4. *Neka su dani $P_1, ..., P_n$ politopi u $\mathbb{R}^n$.* ***Mješoviti volumen*** *u oznaci $V(P_1, ..., P_n)$ je koeficijent uz $t_1 t_2 \cdots t_n$ u polinomu $Vol(t_1 P_1 + \cdots + t_n P_n)$ podijeljen s $n!$.*

Mješoviti volumen je jedinstveno karakteriziran sljedećim svojstvima:

- V(P,...P)=Vol(P), za svaki politop P
- (simetričnost) V je simetričan obzirom na permutaciju politopa $P_1, ..., P_n$
- (multiaditivnost) $V(P_1 + P_1', ..., P_n) = V(P_1, ..., P_n) + V(P_1', ..., P_n)$, za sve politope P_i i P_1'

Volumen sume politopa možemo napisati kao

$$Vol(t_1 P_1 + \cdots t_k P_k) = \sum_{i_1, ..., i_n = 1}^{k} V(P_{i_1}, ..., P_{i_n}) t_{i_1} \cdots t_{i_n}$$

Primjer 2.2.5. *Promotrimo primjer sa dva kvadrata $A = [0, a] \times [0, b]$ i $B = [0, c] \times [0, d]$ iz $\mathbb{R}^2$.*
Za $k = n = 2$ općenito imamo

$$Vol(t_1 P_1 + t_2 P_2) = V(P_1, P_1) t_1^2 + 2V(P_1, P_2) t_1 t_2 + V(P_2, P_2) t_2^2$$

U našem slučaju to je

$$\begin{aligned} Vol(t_1 A + t_2 B) &= (t_1 a + t_2 c)(t_1 b + t_2 d) \\ &= t_1^2 ab + t_1 t_2 (ad + bc) + t_2^2 cd \end{aligned}$$

Dakle, $V(A, B) = \frac{1}{2}(ad + bc)$.

Primjer 2.2.6. *Generaliziramo prethodni primjer na veće dimenzije. Neka je n prirodan broj i (a_{ij}) $n \times n$ matrica nenegativnih realnih brojeva, i neka je za $i = 1, ..., n$*

$$A_i = [0, a_{i1}] \times \cdots \times [0, a_{in}] \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Tada je

$$V(A_1, ..., A_n) = \frac{1}{n!} per\, A = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

2.3 D. Bernstein - A. Kushnirenkov teorem

U ovom poglavlju prisjetit ćemo se poznatog teorema matematičara Davida Bernsteina i Anatolia Kushnirenka o broju rješenja generičkog sustava Laurentovih polinoma u $(\mathbb{C}^*)^n$.

Generaliziramo pojmove monoma i polinoma. Obzirom da vrhovi politopa mogu biti negativne točke, uvodimo pojam polinoma čiji članovi mogu imati negativne eksponente.

Definicija 2.3.1. *Neka je $\alpha = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^n$.* ***Laurentov monom*** *u varijablama $x_1, ..., x_n$ definiramo s*

$$x_\alpha = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}.$$

Na primjer, x^2y^{-3} i $x^{-2}y^3$ su Laurentovi monomi s varijablama x i y čiji je produkt jednak 1. Općenito, imamo

$$x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta} \text{ } i \text{ } x^\alpha \cdot x^{-\alpha} = 1$$

za svaki $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$.

Konačna linearna kombinacija Laurentovih monoma se naziva *Laurentov polinom*, a skup Laurentovih polinoma s operacijama zbrajanja i množenja čini komutativni prsten. Prsten Laurentovih polinoma s koeficijentima u polju K označavamo s $K[x_1^{\pm 1}, ..., x_n^{\pm 1}]$.

U slučaju Laurentovog polinoma jednostavno dopuštamo vrhove s negativnim koordinatama. Tako svaki Laurentov polinom $f \in K[x_1^{\pm 1}, ..., x_n^{\pm 1}]$ ima Newtonov politop $NP(f)$. Za konačan skup $A \subset Z^n$, $L(A)$ je vektorski prostor Laurentovih polinoma s eksponentima iz A.

Teorem 2.3.2. *Neka su dani Laurentovi polinomi $f_1, ..., f_n$ i neka su $P_i = NP(f_i)$ Newtonovi politopi od f_i. Za generički izbor koeficijenata iz f_i, broj zajedničkih nultočaka od f_i u $(\mathbb{C}^*)^n$ jednak je mješovitom volumenu $V(P_1, ..., P_n)$.*

Intuitivno, svojstvo polinoma je generičko ako vrijedi za "većinu" polinoma. Na primjer, kvadratna jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ ima dva različita rješenja za generički izbor a, b i c, zato što su slučajevi za koje nema dva različita rješenja oni koji zadovoljavaju $b^2 - 4ac = 0$.

Poglavlje 3

Polinomski sustavi u ekonomiji

Izračun ravnotežnih vrijednosti u ekonomiji vodi rješavanju sustava polinomskih jednadžbi. U ovom poglavlju centralni pojam biti će pojam Nashove ravnoteže. Vidjet ćemo jednadžbe koje zadovoljava Nashova ravnoteža u igri s n igrača. Pri tom pretpostavljamo ne-kooperativnu igru tj. svaki igrač radi poteze nezavisno od ostalih bez komunikacije s ostalima.
U 3.1 potpoglavlju definiramo osnovne koncepte naše teorije i uspostavljamo standardnu terminologiju. U 3.2 pokazat ćemo nekoliko numeričkih primjera, a u 3.3 razraditi igru s n igrača.

3.1 Definicije i terminologija

Igru s n igrača definiramo kao skup od *n igrača* od kojih svaki ima konačan skup *čistih strategija*.
Mješovita strategija (nekad ćemo je skraćeno zvati strategija) igrača i je vjerojatnosna distribucija na skupu čistih strategija igrača i.

Mi ćemo uspostaviti terminologiju kroz igru s tri igrača. U tu svrhu pretpostavimo da imamo tri igrača čija su imena Adam, Bob i Carl. Svaki od njih može izabrati između dvije čiste strategije, recimo "kupovanje dionice #1" i "kupovanje dionice #2" . Također, svaki igrač može kombinirati čiste strategije dodjeljivanjem vjerojatnosti (udjela svog novca) svakoj od njih. S a_1 označimo vjerojatnost koju Adam dodjeljuje strategiji 1, s a_2 vjerojatnost koju Adam dodjeljuje strategiji 2, s b_1 vjerojatnost koju Bob dodjeljuje strategiji 1, itd. Dakle, ukupno imamo šest varijabli $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$. Vektor (a_1, a_2) je Adamova strategija, (b_1, b_2) je Bobova strategija i (c_1, c_2) je Carlova strategija.
Strategije naših igrača zadovoljavaju

$$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \geq 0 \quad \text{i} \quad a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = c_1 + c_2 = 1 \tag{3.1}$$

Podaci kojom je zadana pojedina igra su tri *matrice isplate* $A = (A_{ijk}),\ B = (B_{ijk})\ i\ C = (C_{ijk})$. Ovdje su $i, j, k = 1, 2$ pa je svaka od matrica $A,\ B\ i\ C$ trodimenzionalna oblika $2 \times 2 \times 2$. Tako je naša igra dana s $24 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ racionalna broja $A_{ijk},\ B_{ijk},\ C_{ijk}$. Svi su ovi brojevi poznati svakom od igrača. Za Adama, Boba i Carla igrati znači izabrati svoje strategije. Isplate igrača su:

$$Adamova\ isplata = \sum_{i,j,k=1}^{2} A_{ijk} \cdot a_i \cdot b_j \cdot c_k$$

$$Bobova\ isplata = \sum_{i,j,k=1}^{2} B_{ijk} \cdot a_i \cdot b_j \cdot c_k$$

$$Carlova\ isplata = \sum_{i,j,k=1}^{2} C_{ijk} \cdot a_i \cdot b_j \cdot c_k$$

Vektor $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2)$ koji zadovoljava (3.1) naziva se *Nashova ravnoteža* ako niti jedan igrač nemože mijenjanjem svoje strategije povećati isplatu, dok ostala dva igrača drže svoje strategije fiksnima. Drugim riječima, vrijedi sljedeći uvjet:
Za svaki par (u_1, u_2) takav da je $u_1, u_2 \geq 0$ i $u_1 + u_2 = 1$ imamo:

$$\sum_{i,j,k=1}^{2} A_{ijk} \cdot a_i \cdot b_j \cdot c_k \ \geq \ \sum_{i,j,k=1}^{2} A_{ijk} \cdot u_i \cdot b_j \cdot c_k,$$

$$\sum_{i,j,k=1}^{2} B_{ijk} \cdot a_i \cdot b_j \cdot c_k \ \geq \ \sum_{i,j,k=1}^{2} B_{ijk} \cdot a_i \cdot u_j \cdot c_k,$$

$$\sum_{i,j,k=1}^{2} C_{ijk} \cdot a_i \cdot b_j \cdot c_k \ \geq \ \sum_{i,j,k=1}^{2} C_{ijk} \cdot a_i \cdot b_j \cdot u_k.$$

Zbog linearnosti gornjih funkcija, ekstremne vrijednosti postižu se u vrhovima koji imaju cjelobrojne koordinate te zato umjesto univerzalnog kvantifikatora gore možemo pisati: *" Za* $(u_1, u_2) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$ *imamo"*. Označimo s α, β *i* γ isplate od Adama, Boba i Carla redom. Tada uvjete za Nashove ravnotežu možemo pisati na sljedeći način:

$$\alpha = a_1 \cdot \sum_{j,k=1}^{2} A_{1jk} \cdot b_j \cdot c_k \ + \ a_2 \cdot \sum_{j,k=1}^{2} A_{2jk} \cdot b_j \cdot c_k$$

$$\alpha \geq \sum_{j,k=1}^{2} A_{1jk} \cdot b_j \cdot c_k \quad \text{i} \quad \alpha \geq \sum_{j,k=1}^{2} A_{2jk} \cdot b_j \cdot c_k$$

$$\beta = b_1 \cdot \sum_{i,k=1}^{2} B_{i1k} \cdot a_i \cdot c_k \; + \; b_2 \cdot \sum_{i,k=1}^{2} B_{i2k} \cdot a_i \cdot c_k$$

$$\beta \geq \sum_{i,k=1}^{2} B_{i1k} \cdot a_i \cdot c_k \quad \text{i} \quad \beta \geq \sum_{i,k=1}^{2} B_{i2k} \cdot a_i \cdot c_k$$

$$\gamma = c_1 \cdot \sum_{i,j=1}^{2} C_{ij1} \cdot a_i \cdot b_j \; + \; c_2 \cdot \sum_{i,j=1}^{2} C_{ij2} \cdot a_i \cdot b_j$$

$$\gamma \geq \sum_{i,j=1}^{2} C_{ij1} \cdot a_i \cdot b_j \quad \text{i} \quad \gamma \geq \sum_{i,j=1}^{2} C_{ij2} \cdot a_i \cdot b_j$$

Zapišemo α kao $(a_1 + a_2) \cdot \alpha$ (možemo jer je $a_1 + a_2 = 1$) i prebacimo sve na lijevu stranu jednakosti te izlučimo a_1 i a_2. Sada imamo zbroj dva izraza jedanak nuli u kojem su oba izraza veća ili jednaka od nule, dakle slijedi da su oba jednaka nuli:

$$a_1 \cdot \left(\alpha - \sum_{j,k=1}^{2} A_{1jk} \cdot b_j \cdot c_k\right) \; = \; a_2 \cdot \left(\alpha - \sum_{j,k=1}^{2} A_{2jk} \cdot b_j \cdot c_k\right) \; = \; 0 \tag{3.2}$$

Na isti način izvodimo i sljedeće jednadžbe:

$$b_1 \cdot \left(\beta - \sum_{i,k=1}^{2} B_{i1k} \cdot a_i \cdot c_k\right) \; = \; b_2 \cdot \left(\beta - \sum_{i,k=1}^{2} B_{i2k} \cdot a_i \cdot c_k\right) \; = \; 0 \tag{3.3}$$

$$c_1 \cdot \left(\gamma - \sum_{i,j=1}^{2} C_{ij1} \cdot a_i \cdot b_j\right) \; = \; c_2 \cdot \left(\gamma - \sum_{i,j=1}^{2} C_{ij2} \cdot a_i \cdot b_j\right) \; = \; 0 \tag{3.4}$$

Promatramo (3.2), (3.3), (3.4) kao sustav polinomski jednadžbi s devet nepoznanica $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, \alpha, \beta, \gamma$. Ova diskusija pokazuje sljedeću propoziciju:

Propozicija 3.1.1. *Skup Nashovih ravnoteža igre dane s matricama isplate A, B, C je skup rješenja $(a_1, ..., c_2, \alpha, \beta, \gamma)$ sustava* (3.1)*,* (3.2)*,* (3.3)*, i* (3.4) *i pri tome su izrazi u zagradama jednadžbi nenegativni.*

Iz praktičnih razloga promijenit ćemo imena varijablama na sljedeći način:

$$a_1 = a, \; a_2 = 1 - a, \; b_1 = b, \; b_2 = 1 - b, \; c_1 = c, \; c_2 = 1 - c$$

Korolar 3.1.2. *Skup Nashovih ravnoteža igre dane s matricama isplate A, B, C sastoji se od zajedničkih nultočaka sljedećih šest polinoma i pri tome su svi izrazi u zagradama nenegativni:*

$$
\begin{aligned}
a \cdot (\alpha - A_{111}bc - A_{112}b(1-c) - A_{121}(1-b)c - A_{122}(1-b)(1-c)),\\
(1-a) \cdot (\alpha - A_{211}bc - A_{212}b(1-c) - A_{221}(1-b)c - A_{222}(1-b)(1-c)),\\
b \cdot (\beta - B_{111}ac - B_{112}a(1-c) - B_{211}(1-a)c - B_{212}(1-a)(1-c)),\\
(1-b) \cdot (\beta - B_{121}ac - B_{122}a(1-c) - B_{221}(1-a)c - B_{222}(1-a)(1-c)),\\
c \cdot (\gamma - C_{111}ab - C_{121}a(1-b) - C_{211}(1-a)b - C_{221}(1-a)(1-b)),\\
(1-c) \cdot (\gamma - C_{112}ab - C_{122}a(1-b) - C_{212}(1-a)b - C_{222}(1-a)(1-b)).
\end{aligned}
$$

Za Nashovu ravnotežu kažemo da je *mješovita* ako su svih šest vjerojatnosti $a, 1-a, b, 1-b, c, 1-c$ strogo pozitivne. Ako smo zainteresirani samo za mješovitu ravnotežu, onda možemo ukloniti lijeve faktore iz šest polinoma i eliminirati α, β *i* γ oduzimanjem prvog polinoma od drugog, trećeg od četvrtog i petog od šestog.

Korolar 3.1.3. *Skup mješovitih Nashovih ravnoteža igre dane s matricama isplate A, B, C sastoji se od zajedničkih nula $(a, b, c) \in \langle 0, 1\rangle^3$ triju bilinearnih polinoma:*

$$
\begin{aligned}
(A_{111} - A_{112} - A_{121} + A_{122} - A_{211} + A_{212} + A_{221} - A_{222}) \cdot bc + A_{122} - A_{222}\\
+ (A_{112} - A_{122} - A_{212} + A_{222}) \cdot b + (A_{121} - A_{122} - A_{221} + A_{222}) \cdot c,\\
(B_{111} - B_{112} + B_{122} - B_{121} - B_{211} + B_{212} - B_{222} + B_{221}) \cdot ac + B_{212} - B_{222}\\
+ (B_{211} - B_{212} - B_{221} + B_{222}) \cdot c + (B_{112} - B_{122} - B_{212} + B_{222}) \cdot a,\\
(C_{111} - C_{112} + C_{122} - C_{121} - C_{211} + C_{212} - C_{222} + C_{221}) \cdot ab + C_{221} - C_{222}\\
+ (C_{121} - C_{221} - C_{122} + C_{222}) \cdot a + (C_{222} - C_{221} - C_{212} + C_{211}) \cdot b.
\end{aligned}
$$

3.2 Primjeri Nashove ravnoteže

Primjer 3.2.1. *Promotrimo igru opisanu u prethodnom poglavlju s matricama isplate*

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{cccccccc} 111 & 112 & 121 & 122 & 211 & 212 & 221 & 222 \end{array}\\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{array}{c} = \\ = \\ = \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 6 & 11 & 1 & 6 & 4 & 6 & 8\\ 12 & 7 & 6 & 8 & 10 & 12 & 8 & 1\\ 11 & 11 & 3 & 3 & 0 & 14 & 2 & 7 \end{pmatrix}
\end{array}
\tag{3.5}
$$

Na primjer, $B_{112} = 7$ *i* $C_{212} = 14$. *Jednadžbe u Korolaru 3.1.2 su:*

$$\begin{aligned}
a \cdot (\alpha - 6b(1-c) - 11(1-b)c - (1-b)(1-c)) &= 0,\\
(1-a) \cdot (\alpha - 6bc - 4b(1-c) - 6(1-b)c - 8(1-b)(1-c)) &= 0,\\
b \cdot (\beta - 12ac - 7a(1-c) - 6(1-a)c - 8(1-a)(1-c)) &= 0,\\
(1-b) \cdot (\beta - 10ac - 12a(1-c) - 8(1-a)c - (1-a)(1-c)) &= 0,\\
c \cdot (\gamma - 11ab - 11a(1-b) - 3(1-a)b - 3(1-a)(1-b)) &= 0,\\
(1-c) \cdot (\gamma - 14a(1-b) - 2(1-a)b - 7(1-a)(1-b)) &= 0.
\end{aligned}$$

Sada u SINGULARU *računamo nultočke ovog sustava. Zbog jednostavnosti umjesto* α, β *i* γ *pišemo* d, e *i* f. *Biblioteka* `solve.lib` *nam omogućava korištenje naredbe* `solve` *koja služi za rješavanje polinomskih sustava.*

```
> LIB "solve.lib";
> ring r=0,(a,b,c,d,e,f),lp;
> poly g0=a*(d-6*b*(1-c)-11*(1-b)*c-(1-b)*(1-c));
> poly g1=(1-a)*(d-6*b*c-4*b*(1-c)-6*(1-b)*c-8*(1-b)*(1-c));
> poly g2=b*(e-12*a*c-7*a*(1-c)-6*(1-a)*c-8*(1-a)*(1-c));
> poly g3=(1-b)*(e-10*a*c-12*a*(1-c)-8*(1-a)*c-(1-a)*(1-c));
> poly g4=c*(f-11*a*b-11*a*(1-b)-3*(1-a)*b-3*(1-a)*(1-b));
> poly g5=(1-c)*(f-14*a*(1-b)-2*(1-a)*b-7*(1-a)*(1-b));
> ideal i=g0,g1,g2,g3,g4,g5;
> def T=solve(i);
```

Zadnja naredba ispisuje skup rješenja. Ovaj sustav ima 16 rješenja od kojih su sva realna. Naime, vektor $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$ *je rješenje ako i samo ako leži u skupu*

$$\{(1,1,0,6,7,0), (0,1,0,4,8,2), (-0.1,1,0.25,4.5,7.425,2.2),$$

$$(0.58333333, 0.77777778, 0, 4.88888889, 7.41666667, 3.11111111),$$

$$(0.42335875, 0.40596463, 0.86229596, 6.0517962, 8.40747312, 6.38687)*,$$

$$(0.80580791, 0.26070204, 0.68578096, 6.3007679, 9.69088425, 9.44646331)*, (1,0,0,1,12,14),$$

$$(4, 0, 0.58333333, 6.83333333, 28.08333333, 35), (0,0,0,8,1,7), (0.5, 0.45454545, 1, 6, 9, 7)*,$$

$$(0,1,1,6,6,3), (0, 0.8, 0.77777778, 5.73333333, 6.44444444, 3)*, (0,0,1,6,8,3), (1,0,1,11,10,11),$$

$$(1, 0.21428571, 0.71428571, 6.76530612, 10.57142857, 11)*, (1,1,1,0,12,11)\}$$

No, neka od ovih rješenja nisu Nashove ravnoteže. Na primjer, vektor $(4, 0, 0.58333333,$

$6.83333333, 28.08333333, 35)$ *ima* $a = 4$ *što krši nenegativnost od* $(1 - a)$. *Vektor* $(-0.1, 1, 0.25, 4.5, 7.425, 2.2)$ *krši nenegativnost od* $(\gamma - 11ab - 11a(1 - b) - 3(1 - a)b - 3(1 - a)(1 - b))$, *itd. Ovim procesom eliminiramo 11 od 16 kandidata. Preostalih pet su označeni s zvjezdicom.*
Zaključujemo: igra (3.5) *ima pet Nashovih ravnoteža. Od ovih pet, prva dva su mješovite Nashove ravnoteže.*
Mješovitu Nashovu ravnotežu možemo izračunati i na sljedeći način. Iz šest jednadžbi uklonimo faktore s lijeve strane $a, ..., (1 - c)$ *te izračunamo Gröbnerovu bazu. Dobili smo novi pojednostavljeni sustav šest jednadžbi koje je lako za riješiti, a rješenje su dva vektora koja smo dobili gore.*

```
> LIB "solve.lib";
> ring r=0,(a,b,c,d,e,f),lp;
> poly g0=d-6*b*(1-c)-11*(1-b)*c-(1-b)*(1-c);
> poly g1=d-6*b*c-4*b*(1-c)-6*(1-b)*c-8*(1-b)*(1-c);
> poly g2=e-12*a*c-7*a*(1-c)-6*(1-a)*c-8*(1-a)*(1-c);
> poly g3=e-10*a*c-12*a*(1-c)-8*(1-a)*c-(1-a)*(1-c);
> poly g4=f-11*a*b-11*a*(1-b)-3*(1-a)*b-3*(1-a)*(1-b);
> poly g5=f-14*a*(1-b)-2*(1-a)*b-7*(1-a)*(1-b);
> ideal i=g0,g1,g2,g3,g4,g5;

> option ("redSB");
> groebner(i);
_[1]=6f2-95f+362
_[2]=832e-349f-4766
_[3]=8762d-713f-48472
_[4]=52c+3f-64
_[5]=337b+16f-239
_[6]=8a-f+3

> poly h0=6*f2-95*f+362;
> poly h1=832*e-349*f-4766;
> poly h2=8762*d-713*f-48472;
> poly h3=52*c+3*f-64;
> poly h4=337*b+16*f-239;
> poly h5=8*a-f+3;
> ideal I=h0,h1,h2,h3,h4,h5;
> def T=solve(I);
```

Primjer 3.2.2. *Naš drugi primjer je poker s tri igrača (Three-Man Poker Game) koji je razrađen u Nashovom članku iz 1951. Ovom igrom dobivamo algebarske jednadžbe koje se mogu riješiti izdvajanjem korijena od 321. Ovaj primjer je od povijesne važnosti.*

Ovo je pojednostavljena verzija pokera. Imamo dvije vrste karata, visoke i niske. Svaki od tri igrača, A, B, C ulaže dva žetona za početak. Zatim se svakom igraču dijeli po jedna karta. Pretpostavljamo da je svaka od osam mogućih ruku jednako vjerojatna.
Polazeći od igrača A, svakom igraču se daje šansa da "otvori igru", tj. da uloži u prvom krugu ulaganja (za ulog se uvijek koriste dva žetona). Ako nitko to ne uradi, igrači uzimaju svoje žetone sa stola.
Nakon što jedan od igrača otvori igru, ostalim dvama je opet dana šansa da ulažu (kaže se da prate ulog). Na kraju se karte otkrivaju i oni igrači koji imaju visoke karte, među igračima koji su ulagali, dijele žetone podjednako.

Jednom kad je igra otvorena, igrač bi trebao pratiti ako ima visoku kartu, a ne pratiti (možemo reći izaći) ako ima nisku kartu. Dakle, jedino pitanje je: otvoriti igru ili ne. Igrač C bi trebao otvoriti ako ima visoku kartu. Igrač A ne bi trebao otvarati ako ima nisku kartu. Ove tvrdnje iziskuju dokaze koje čitač može pronaći u članku J. F. Nasha i L. S. Shapleya "A Simple Three-person Poker Game" na koje se referencira [4].

Dakle, igrač A ima dvije čiste strategije: kada ima visoku katu, otvoriti ili ne otvoriti. Označimo s a njegovu vjerojatnost otvaranja u ovom slučaju.
Igrač C također ima dvije čiste strategije: kada ima nisku kartu, otvoriti ili ne otvoriti. Označimo s c njegovu vjerojatnost otvaranja u ovom slučaju.
Igrač B ima četiri čiste strategije: za svaku od mogućih karata, otvoriti ili ne otvoriti. Označimo s d njegovu vjerojatnost otvaranja kada ima visoku kartu te s e njegovu vjerojatnost otvaranja kada ima nisku kartu.

Matrica isplate (gdje pod isplata mislimo na očekivanu vrijednost isplate) sadrži $48 = 3 \times 2 \times 4 \times 2$ *ulaznih vrijednosti.*
Podijelit ćemo matricu u dva bloka, kada je $a = 0$ *i kada je* $a = 1$.

Lijevi $(a = 0)$ *blok:*

$$\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{cccccccc} 0000 & 0001 & 0010 & 0011 & 0100 & 0101 & 0110 & 0111 \end{array} \\
\begin{array}{r} A = \\ B = \\ C = \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}
\end{array}$$

Desni $(a = 1)$ *blok je:*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} 1000 & 1001 & 1010 & 1011 & 1100 & 1101 & 1110 & 1111 \end{array} \\ \begin{array}{c} A = \\ B = \\ C = \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{-3}{8} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{-7}{8} & \frac{1}{8} & \frac{-3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-3}{8} & \frac{5}{8} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{array}$$

Na primjer, B_{1010} *je isplata igrača B kada igrač A ne otvori s visokom kartom* $(a_1 = 1)$*, igrač B otvori s visokom kartom* $(d_0 = 1)$ *i ne otvori s niskom kartom* $(e_1 = 1)$ *i igrač C otvori s niskom kartom* $(c_0 = 1)$*. Općenito,* X_{ijkl} *je isplata igrača X kada je* $a_i = 1, d_j = 1, e_k = 1$ *i* $c_l = 1$.

Jednadžba za isplatu β *igrača B je*

$$\beta = d \cdot e \cdot \sum_{i,k=0}^{1} B_{i00k} \cdot a_i \cdot c_k + d \cdot (1 - e) \cdot \sum_{i,k=0}^{1} B_{i01k} \cdot a_i \cdot c_k$$
$$+(1 - d) \cdot e \cdot \sum_{i,k=0}^{1} B_{i10k} \cdot a_i \cdot c_k + (1 - d) \cdot (1 - e) \cdot \sum_{i,k=0}^{1} B_{i11k} \cdot a_i \cdot c_k$$

U ovom slučaju imamo modificiranu verziju Korolara 6.2 s osam polinoma umjesto šest. Prvi polinom sada je oblika:

$$a \cdot (\alpha - A_{0000}dec - A_{0001}de(1 - c) - A_{0010}d(1 - e)c - A_{0011}d(1 - e)(1 - c)$$
$$-A_{0100}(1 - d)ec - A_{0101}(1 - d)e(1 - c) - A_{0110}(1 - d)(1 - e)c - A_{0111}(1 - d)(1 - e)(1 - c))$$

Drugi, peti i šesti polinom se modificiraju analogno. Treći i četvrti polinom su zamijenjeni s četiri polinoma:

$$d \cdot e \cdot (\beta - B_{0000}ac - B_{0001}a(1 - c) - B_{1000}(1 - a)c - B_{1001}(1 - a)(1 - c)),$$
$$d \cdot (1 - e) \cdot (\beta - B_{0010}ac - B_{0011}a(1 - c) - B_{1010}(1 - a)c - B_{1011}(1 - a)(1 - c)),$$
$$(1 - d) \cdot e \cdot (\beta - B_{0100}ac - B_{0101}a(1 - c) - B_{1100}(1 - a)c - B_{1101}(1 - a)(1 - c)),$$
$$(1 - d) \cdot (1 - e) \cdot (\beta - B_{0110}ac - B_{0111}a(1 - c) - B_{1110}(1 - a)c - B_{1111}(1 - a)(1 - c)).$$

Sada možemo ukloniti lijeve faktore iz svih polinoma i eliminirati α *i* γ *oduzimanjem polinoma. Na taj način dobijemo dva trilinearna polinoma.*
Oduzimanjem prvog polinoma od drugog dobijemo sljedeći polinom:

$$
\begin{gathered}
(A_{0000} - A_{0001} - A_{0010} + A_{0011} - A_{0100} + A_{0101} + A_{0110} - A_{0111} \\
-A_{1000} + A_{1001} + A_{1010} - A_{1011} + A_{1100} - A_{1101} - A_{1110} + A_{1111}) \cdot cde \\
+(A_{0010} - A_{0011} - A_{0110} + A_{0111} - A_{1010} + A_{1011} + A_{1110} - A_{1111}) \cdot cd \\
+(A_{0100} - A_{0101} - A_{0110} + A_{0111} - A_{1100} + A_{1101} + A_{1110} - A_{1111}) \cdot ce \\
+(A_{0001} - A_{0011} - A_{0101} + A_{0111} - A_{1001} + A_{1011} + A_{1101} - A_{1111}) \cdot de \\
+(A_{0110} - A_{0111} - A_{1110} + A_{1111}) \cdot c + (A_{0011} - A_{0111} - A_{1011} + A_{1111}) \cdot d \\
+(A_{0101} - A_{0111} - A_{1101} + A_{1111}) \cdot e + (A_{0111} - A_{1111}).
\end{gathered}
$$

Oduzimanjem petog polinoma od šestog dobijemo sljedeći polinom:

$$
\begin{gathered}
(C_{0000} - C_{0001} - C_{0010} + C_{0011} - C_{0100} + C_{0101} + C_{0110} - C_{0111} \\
-C_{1000} + C_{1001} + C_{1010} - C_{1011} + C_{1100} - C_{1101} - C_{1110} + C_{1111}) \cdot ade \\
+(C_{0010} - C_{0011} - C_{0110} + C_{0111} - C_{1010} + C_{1011} + C_{1110} - C_{1111}) \cdot ad \\
+(C_{0100} - C_{0101} - C_{0110} + C_{0111} - C_{1100} + C_{1101} + C_{1110} - C_{1111}) \cdot ae \\
+(C_{1000} - C_{1001} - C_{1010} + C_{1011} - C_{1100} + C_{1101} + C_{1110} - C_{1111}) \cdot de \\
+(C_{0110} - C_{0111} - C_{1110} + C_{1111}) \cdot a + (C_{1010} - C_{1011} - C_{1110} + C_{1111}) \cdot d \\
+(C_{1100} - C_{1110} - C_{1110} + C_{1111}) \cdot e + (C_{1110} - C_{1111}).
\end{gathered}
$$

Imamo četiri polinoma s varijablom β. Oduzimanjem prvog polinoma od drugog, trećeg i četvrtom dobijemo sljedeća tri bilinearna polinoma redom:

$$
\begin{gathered}
(B_{0000} - B_{0001} - B_{0010} + B_{0011} - B_{1000} + B_{1001} + B_{1010} - B_{1011}) \cdot ac + B_{1001} - B_{1011} \\
+(B_{0001} - B_{0011} - B_{1001} + B_{1011}) \cdot a + (B_{1000} - B_{1001} - B_{1010} + B_{1011}) \cdot c, \\
(B_{0000} - B_{0001} - B_{0100} + B_{0101} - B_{1000} + B_{1001} + B_{1100} - B_{1101}) \cdot ac + B_{1001} - B_{1101} \\
+(B_{0001} - B_{0101} - B_{1001} + B_{1101}) \cdot a + (B_{1000} - B_{1001} - B_{1100} + B_{1101}) \cdot c, \\
(B_{0000} - B_{0001} - B_{0110} + B_{0111} - B_{1000} + B_{1001} + B_{1110} - B_{1111}) \cdot ac + B_{1001} - B_{1111} \\
+(B_{0001} - B_{0111} - B_{1001} + B_{1111}) \cdot a + (B_{1000} - B_{1001} - B_{1110} + B_{1111}) \cdot c.
\end{gathered}
$$

Dakle, skup mješovitih Nashovih ravnoteža sastoji se od zajedničkih nultočaka $(a, d, e, c) \in \langle 0, 1\rangle^4$ ovih pet polinoma.

Supstitucijom naše matrice isplate u zadnji polinom dobijemo:

$$\frac{1}{8} + \frac{5}{8}a - \frac{1}{2}c = 0.$$

Izrazimo c preko a

$$c = \frac{5a + 1}{4}$$

i substitucijom u prethodna dva polinoma dobijemo

$$-\frac{3}{8} + \frac{21}{16}a - \frac{5}{16}a^2 = 0$$
$$\frac{3}{8} - \frac{21}{16}a + \frac{5}{16}a^2 = 0$$

Rješavanjem zadnje (ili predzadnje) jednadžbe uz uvjet $0 < a < 1$ *dobijemo*

$$a = \frac{21 - \sqrt{321}}{10}$$

Supstitucijom u gornja dva trilinearna polinoma dobijemo

$$d = \frac{5 - 2a}{5 + a}, \quad e = \frac{4a - 1}{a + 5}.$$

Primjer 3.2.3 (**Zatvorenikova dilema**). *Jedan od najpoznatijih primjera Nashove ravnoteže je igra poznatija po imenu zatvorenikova dilema. Igru su osmislili tijekom pedesetih godina 20-og stoljeća Merrill M.Flood (1908.-1991.) i Melvin Dresher (1911.-1992.), a Albert W.Tucker (1905.-1995.) formirao je igru, koristeći zatvorske kazne kao isplate, koju danas kao takvu poznajemo.*

Zatvorenikova dilema glasi: Policija privede dva osumnjičenika. Svakog od njih zatvore u zasebnu zatvorsku sobu, bez ikakve mogućnosti međusobne komunikacije. Osumnjičenik ima dvije mogućnosti: šutjeti illi izdati drugog osumnjičenika, i to na sljedeći način:

- *ako prvi osumnjičenik izda drugog, a drugi osumjničenik prešuti, tada je prvi slobodan, a drugi dobiva zatvorsku kaznu u trajanju od sedam godina;*
- *ako oba osumnjičenika izdaju jedan drugog, obojica će dobiti kaznu od tri godine;*
- *ako oba osumnjičenika šute, obojica će dobiti kaznu od jedne godine zatvora.*

Svaki osumnjičenik može izabrati samo jednu opciju i pri tome on ne zna koju će opciju izabrati drugi osumnjičenik. Sada ćemo analizirati bi li on trebao izabrati šutnju ili izdaju.
Kako bi bilo lakše prikazati skup svih mogućih kombinacija strategija, osumnjičenike ćemo zvati Adam i Bob. Dakle, imamo dva igrača: Adam i Bob, strategije koje oba igrača imaju na raspolaganju su šutnja ili izdaja. Isplate su ili oslobađajuća presuda ili zatvorska kazna u trajanju ovisnom o izboru strategije Adama i Boba.

Sljedeća tablica predstavlja isplate u skladu s Adamovim strategijama:

		Bob	
		Šuti	*Izdaje*
Adam	*Šuti*	*-1*	*-7*
	Izdaje	*0*	*-3*

Negativni brojevi predstavljaju broj godina zatvora koje Adam može dobiti, npr. ako Adam izabere šutnju, a Bob izdaju, tada Adam dobija sedam godina zatvora. Ukoliko Adam izabere izdaju, a Bob šutnju, tada je Adam oslobođen.

Po istoj logici Bobova tablica izgleda ovako:

		Bob	
		Šuti	*Izdaje*
Adam	*Šuti*	*-1*	*0*
	Izdaje	*-7*	*-3*

Spajamo ove dvije tablice u jednu, tako da u svaku ćeliju upisujemo dva broja. Prvi broj predstavlja isplatu igrača u odgovarajućem retku (Adam), a drugi broj prestavlja isplatu igrača u odgovarajućem stupcu (Bob). Dobili smo matricu isplata:

		Bob	
		Šuti	*Izdaje*
Adam	*Šuti*	*-1 -1*	*-7 0*
	Izdaje	*0 -7*	*-3 -3*

Uzmimo za primjer ćeliju gdje Adam šuti, a Bob izdaje, stoji $[-7 \quad 0]$. *Prvi broj* -7 *predstavlja Adamovu isplatu (7 godina zatvora), a drugi broj* 0 *predstavlja Bobovu isplatu (slobodan je). U ovom slučaju Bobova brojčana vrijednost je veća od Adamove, pa zaključujemo kako je Bob pobjednik. Postavlja se pitanje kako Adam treba odigrati da ostvari prednost?*
Pretpostavimo da Bob odabere šutnju. Ukoliko Adam također odabere šutnju, svatko od njih će dobiti 1 godinu zatvora (-1). *Ako bi Adam izdao Boba, Bob bi dobio 7 godina*

zatvora (-7)*, a Adam bi bio slobodan* (0)*. Zaključujemo: Adam u ovom slučaju treba odabrati izdaju.*
Pretpostavimo sada da Bob izabere izdaju. Ukoliko Adam odabere šutnju, on će dobiti 7 godina zatvora (-7)*, a Bob će biti slobodan* (0)*. Ako bi Adam također odabrao izdaju, svatko od njih bi dobio 3 godine zatvora* (-3)*. Iz toga je vidljivo da je, kao i u prethodnom slučju, Adamu isplatljivije odabrati izdaju.*
Bez obzira koju strategiju Bob izabere, šutnju ili izdaju, za Adama je najbolji odabir strategije upravo izdaja.
No, sada je Bobova odluka jednostavna: njemu se također više isplati izdati Adama. Time smo došli do jednistvene strategije koju će odigrati oba igrača: obojica se međusobno izdaju.

3.3 Igra s n igrača

Promatramo igru s konačnim brojem n igrača. Označimo igrače s $1, 2, ..., n$.
$i - ti$ igrač može birati između d_i čistih strategija koje označavamo s $1, 2, ..., d_i$. Igru definiramo s n matrica isplate $X^{(1)}, X^{(2)}, ..., X^{(n)}$, po jedna za svakog igrača. Svaka matrica $X^{(i)}$ je n-dimenzionalna matrica oblika $d_1 \times d_2 \times \cdots \times d_n$ čiji su elementi racionalni brojevi. Element $X^{(i)}_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ predstavlja isplatu za i-tog igrača ako igrač 1 izabere čistu strategiju j_1, igrač 2 izabere čistu strategiju j_2, itd.
Svaki igrač odabire svoju mješovitu strategiju, što je vjerojatnosna distribucija na njegovom skupu čistih strategija. Označimo s $p^{(i)}_j$ vjerojatnost koju igrač i dodjeljuje strategiji j. Vektor $p^{(i)} = (p^{(i)}_1, p^{(i)}_2, ..., p^{(i)}_{d_i})$ naziva se strategija igrača i.
Isplata π_i igrača i je

$$\pi_i = \sum_{j_1=1}^{d_1} \sum_{j_2=1}^{d_2} \cdots \sum_{j_n=1}^{d_n} X^{(i)}_{j_1 j_2 \ldots j_n} \cdot p^{(1)}_{j_1} p^{(2)}_{j_2} \cdots p^{(n)}_{j_n}$$

Dakle, podaci za naš problem su matrice isplate $X^{(i)}$, tj. problem je određen s $nd_1 d_2 \cdots d_n$ racionalnih brojeva. U problemu imamo $d_1 + d_2 + \cdots + d_n$ nepoznanica $p^{(i)}_j$. Obzirom da su nepoznanice zapravo vjerojatnosti, onda vrijedi

$$\forall i, j : p^{(i)}_j \geq 0 \quad i \quad \forall i : p^{(i)}_1 + p^{(i)}_2 + \cdots + p^{(i)}_{d_i} = 1 \tag{3.6}$$

Ovi uvjeti nam govore da je $p = (p^{(i)}_j)$ točka iz produkta simpleksa

$$\Delta = \Delta_{d_1-1} \times \Delta_{d_2-1} \times \cdots \times \Delta_{d_n-1} \tag{3.7}$$

Točka $p \in \Delta$ je Nashova ravnoteža ako niti jedan od n igrača ne može povećati svoju isplatu mijenjajući strategiju, dok ostalih $n - 1$ igrača drži svoje strategije fiksnima. Ovo ćemo zapisati kao sustav polinoma s nepoznanicama $p \in \Delta$ i $\pi = (\pi_1, ..., \pi_n) \in \mathbb{R}^n$.

Za svaku od nepoznatih vjerojatnostnosti $p_k^{(i)}$ promatramo sljedeći multilinearni polinom:

$$p_k^{(i)} \cdot \left(\pi_i - \sum_{j_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{j_{i-1}=1}^{d_{i-1}} \sum_{j_{i+1}=1}^{d_{i+1}} \cdots \sum_{j_n=1}^{d_n} X^{(i)}_{j_1 \ldots j_{i-1} k j_{i+1} j_n} \cdot p_{j_1}^{(1)} \cdots p_{j_{i-1}}^{(i-1)} p_{j_{i+1}}^{(i+1)} \cdots p_{j_n}^{(n)} \right) \tag{3.8}$$

Dakle, (3.8) zajedno s (3.6) predstavlja sustav od $n + d_1 + \cdots + d_n$ polinomskih jednadžbi s $n + d_1 + \cdots + d_n$ nepoznanica, gdje je svaki polinom produkt linearnog polinoma i multilinearnog polinoma stupnja $n - 1$.
Iz ove rasprave slijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.3.1. *Vektor $(p, \pi) \in \Delta \times \mathbb{R}^n$ predstavlja Nashovu ravnotežu za igru danu s matricama isplate $X^{(1)}, ..., X^{(n)}$ ako i samo ako je (p, π) nultočka polinoma* (3.8) *i svaki izraz u zagradi* (3.8) *je nenegativan.*

Nash je pokazao da svaka igra ima barem jednu točku ravnoteže (p, π). Njegov dokaz i mnoge druge naknadne dorade koristile su teorem o fiksnoj točki iz topologije. Međutim, ovi teoremi ne daju nikakvu dodatnu informaciju o broju Nashovih ravnoteža i je li je taj broj konačan. Kasnije ćemo vidjeti teorem koji daje procjenu za maksimalan broj mješovitih Nashovih ravnoteža.
Sada pogledajmo na primjeru problem prebrojavanja Nashovih ravnoteža za igru s dva igrača.

Primjer 3.3.2. *Promatramo igru s dva igrača, od kojih svaki ima jednak broj strategija, tj. $n = 2$ i $d_1 = d_2 = d$. Dakle, matrice isplate, $X^{(1)}$ i $X^{(2)}$ su dvodimenzionalne $d \times d$ matrice. Pretpostavimo da oba igrača imaju isplatu 1 ako se njihovi izbori strategija podudaraju, a inače imaju isplatu 0. Drugim riječima, matrice isplate su jedinične dijagonalne matrice.*
Jednadžbe (3.8) *poprimaju oblik:*

$$p_k^{(1)} \cdot \left(\pi_1 - p_k^{(2)} \right) = p_k^{(2)} \cdot \left(\pi_2 - p_k^{(1)} \right) = 0 \quad za\ k = 1, 2, ...d \tag{3.9}$$

Nashove ravnoteže su rješenja sustava (3.9) *uz uvjet da su $p_k^{(i)}$ između 0 i π_i, za svaki $i = 1, 2$ i $k = 1, 2, ..., d$ te vrijedi $p_1^{(1)} + \cdots + p_d^{(1)} = p_1^{(2)} + \cdots + p_d^{(2)} = 1$.*

Na primjer, za $d = 2$ sustav (3.9) *ima pet rješenja koje izračunamo koristeći* SINGULAR. *(Zbog bolje preglednosti koda u programu koristimo oznake: $a := \pi_1, b := \pi_2, p := p_1^{(1)}, q := p_2^{(1)}, r := p_1^{(2)}, s := p_2^{(2)}$).*

```
> ring R=0, (p,q,r,s,a,b),lp;
> poly f1=p*(a-r);
> poly f2=q*(a-s);
> poly f3=r*(b-p);
> poly f4=s*(b-q);
> poly f5=p+q-1;
> poly f6=r+s-1;
> ideal I=f1,f2,f3,f4,f5,f6;
> LIB "solve.lib";
> def T=solve(I);
```

Program nam vraća sljedeći skup rješenja:

$\{(0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5), (0, 1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1, 1, 1)\}$.

Vektori $(0, 1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0, 0)$ *nisu Nashove ravnoteže jer propada nenegativnost izraza u zagradama. Dakle, u ovom slučaju imamo tri Nashove ravnoteže.*

Sada ćemo razmatrati samo mješovite Nashove ravnoteže, tj. dodajemo uvjet da su sve vjerojatnosti $p_j^{(i)}$ strogo pozitivne. Od sada, $p_j^{(i)}$ biti će varijable čije su vrijednosti strogo između 0 i 1. Ovo nam dopušta da uklonimo faktore $p_k^{(i)}$ u jednadžbama (3.8). Dakle, od sada radimo s (n-1)-linearnim jednadžbama. Slično kao i kod igre s tri igrača, oduzimanjem prvog polinoma od svih ostalih redom, te tako za svaki $i = 1, ..., n$, eliminiramo nepoznanice π_i.
Na ovaj način dobivamo sljedeće polinome za $i = 1, 2, ...n$ i $k = 2, 3, ..., d_i$:

$$\sum_{j_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{j_{i-1}=1}^{d_{i-1}} \sum_{j_{i+1}=1}^{d_{i+1}} \cdots \sum_{j_n=1}^{d_n} \left(X^{(i)}_{j_1 \ldots j_{i-1} k j_{i+1} j_n} - X^{(i)}_{j_1 \ldots j_{i-1} 1 j_{i+1} \ldots j_n} \right) \cdot p^{(1)}_{j_1} \cdots p^{(i-1)}_{j_{i-1}} p^{(i+1)}_{j_{i+1}} \cdots p^{(n)}_{j_n} \quad (3.10)$$

Ovo je sustav od $d_1 + \cdots d_n - n$ jednadžbi s $d_1 + \cdots + d_n$ nepoznanica, koje zadovoljavaju sustav n linearnih jednadžbi (3.6). Slijedi teorem koji je generalizacija Korolara 3.1.3.

Teorem 3.3.3. *Neka je igra s n igrača dana s matricama isplate* $X^{(1)}, ..., X^{(n)}$. *Skup mješovitih Nashovih ravnoteža te igre čine zajedničke nultočke od* $d_1 + \cdots + d_n - n$ *polinoma* (3.10) *koje se nalaze u politopu* Δ *iz* (3.7).

U buduće, uvijek ćemo eliminirati n varijabli na način da stavimo:

$$p_{d_i}^{(i)} = 1 - \sum_{j=1}^{d_i-1} p_j^{(i)} \quad za\ i = 1, 2, ..., n$$

Ono što dobivamo je sustav s δ multilinearnih polinoma s δ nepoznanica, gdje je $\delta := d_1 + \cdots + d_n - n$.

Promotrimo $d_i - 1$ polinoma iz (3.10) s fiksnim gornjim ideksom i. Oni dijele isti Newtonov politop

$$\Delta^{(i)} = \Delta_{d_1-1} \times \cdots \times \Delta_{d_{i-1}-1} \times \{0\} \times \Delta_{d_{i+1}-1} \times \cdots \times \Delta_{d_n-1}.$$

Ovdje je Δ_{d_i-1} konveksna ljuska jediničnih vektora iz $\mathbb{R}^{d_i-1}$. Dakle dimenzija od $\Delta^{(i)}$ je jedaka

$$\begin{aligned}\dim \Delta^{(i)} &= (d_1 - 1) + ... + (d_{i-1} - 1) + 0 + (d_{i+1} - 1) + ... + (d_n - 1)\\ &= (d_1 + ... + d_n) - d_i - (n - 1)\\ &= \delta - d_i + 1\end{aligned}$$

Definiramo sljedeću δ-torku politopa

$$\Delta[d_1 - 1, ..., d_n - 1] := \left(\Delta^{(1)}, ..., \Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, ..., \Delta^{(2)}, ..., \Delta^{(n)}, ..., \Delta^{(n)}\right),$$

u kojem se politop $\Delta^{(i)}$ pojavljuje $d_i - 1$ puta.

Korolar 3.3.4. *Mješovite Nashove ravnoteže igre s n igrača u kojem i-ti igrač ima d_i čistih strategija su nultočke polinomskog sustava s podrškom $\Delta[d_1 - 1, ..., d_n - 1]$ i svaki ovakav sustav proizlazi iz neke igre.*

Nalazimo se u situaciji Bernstein-Kushnirenkovog teorema koji nam govori da je broj nultočaka u $(\mathbb{C}^*)^\delta$ sustava s δ polinoma i δ nepoznanica jednak mješovitom volumen Newtonovih politopa. Sljedeći teorem daje nam kombinatorni izračun za mješoviti volumen δ-torke politopa $\Delta[d_1 - 1, ..., d_n - 1]$.

Teorem 3.3.5. *Maksimalni broj izoliranih mješovitih Nashovih ravnoteža za bilo koju igru s n igrača u kojoj i-ti igrač ima d_i čistih strategija jednak je mješovitom volumenu od $\Delta[d_1 - 1, ..., d_n - 1]$. Ovaj mješoviti volumen podudara se s brojem particija skupa $\{p_k^{(i)} : i = 1, ..., n, k = 2, ..., d_i\}$ u n disjunktnih podskupova $B_1, B_2, ..., B_n$ tako da vrijedi*

- *kardinalitet i-tog bloka B_i jednak je $d_i - 1$,*

- *i-ti blok B_i disjunktan je sa skupom $\{p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, ..., p_{d_i}^{(i)}\}$, tj. niti jedna varijabla s gornjim indeksom i ne može se nalaziti u bloku B_i*

Ključna ideja u dokazu ovog teorema je zamijeniti svaku od danih multilinearnih jednadžbi s produktom linearnih jednadžbi. U terminima Newtonovih politopa, to znači da $\Delta^{(i)}$ izrazimo kao sumu Minkowskog $n-1$ simpleksa

$$\{0\} \times \cdots \times \{0\} \times \Delta_{d_j-1} \times \{0\} \times \cdots \times \{0\}$$

Ilustrirat ćemo Teorem 3.3.5 za slučaj $n = 3, d_1 = d_2 = d_3 = 3$. Nova dionica #3 došla je na tržište, i naši poznati igrači Adam, Bob i Carl sada biraju između triju čistih strategija. Vjerojatnosti koje Adam alocira dionicama #1, #2 i #3 su a_1, a_2 i $1 - a_1 - a_2$. Sada imamo šest jedandžbi sa šest nepoznanica $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$. Broj particija skupa $\{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2\}$ opisan u Teoremu 3.3.5 je 10. Deset dopuštenih particija su

$$\begin{array}{ll}
\{b_1, b_2\} \cup \{c_1, c_2\} \cup \{a_1, a_2\} & \{c_1, c_2\} \cup \{a_1, a_2\} \cup \{b_1, b_2\} \\
\{b_1, c_1\} \cup \{a_1, c_2\} \cup \{a_2, b_2\} & \{b_1, c_1\} \cup \{a_2, c_2\} \cup \{a_1, b_2\} \\
\{b_1, c_2\} \cup \{a_1, c_1\} \cup \{a_2, b_2\} & \{b_1, c_2\} \cup \{a_2, c_1\} \cup \{a_1, b_2\} \\
\{b_2, c_1\} \cup \{a_1, c_2\} \cup \{a_2, b_1\} & \{b_2, c_1\} \cup \{a_2, c_2\} \cup \{a_1, b_1\} \\
\{b_2, c_2\} \cup \{a_1, c_1\} \cup \{a_2, b_1\} & \{b_2, c_2\} \cup \{a_2, c_1\} \cup \{a_1, b_1\}
\end{array}$$

Mješoviti volumen sljedeće šestorke 4-dimenzionalnih politopa , od kojih je svaki produkt dva trokuta je također 10:

$$\Delta[2,2,2] = \big(\{0\}\times\Delta_2\times\Delta_2,\ \{0\}\times\Delta_2\times\Delta_2,\ \Delta_2\times\{0\}\times\Delta_2,\ \Delta_2\times\{0\}\times\Delta_2,\ \Delta_2\times\Delta_2\times\{0\},\ \Delta_2\times\Delta_2\times\{0\}\big)$$

Teorem 3.3.5 nam kaže da igra koju igraju Adam, Bob i Carl može imati čak deset mješovitih Nashovih ravntoža.

Jedan slučaj Teorema 3.3.5 posebno ćemo promotriti. Pretpostavimo da imamo n igrača, od kojih svaki ima dvije čiste strategije, tj. $d_1 = d_2 = ... = d_n = 2$. Odgovarajuća n-torka politopa $\Delta[1, 1, ..., 1]$ sastoji se od n različitih stranica n-dimenzionalne kocke. Pri tome se za paralelne parove stranica kocke podrazumijeva da su jednake, zbog čega naša kocka ima n stranica, umjesto $2n$. U ovom posebnom slučaju, particije opisane u Teoremu 3.3.5 podudaraju se s brojem *deranžmana* skupa $\{1, 2, ..., n\}$, što je broj permutacija od $\{1, 2, ..., n\}$ bez fiksnih točaka.

Korolar 3.3.6. *Sljedeća tri broja jednaki su za svaki $n \in \mathbb{N}$:*

- *makismalan broj izoliranih mješovitih Nashovih ravnoteža za igru s n igrača u kojoj svaki igrač ima dvije čiste strategije,*

- *mješoviti volumen n različitih stranica n-dimenzionalne kocke,*
- *broj deranžmana skupa s n elemenata.*

Prebrojavanje deranžmana klasični je problem u kombinatorici. Na primjer, broj deranžmana skupa $\{1,2,3,4,5\}$ jednak je 44. Dakle, igra s 5 igrača, od kojih svaki ima dvije čiste strategije može imati najviše 44 mješovite Nashove ravnoteže. Boj deranžmana raste na sljedeći način: 1, 2, 9, 44, 265, 1854, 14833,...

Bibliografija

[1] M. Čalija Matijević i B. Radišić, *Nashova ravnoteža*, Osječki matematički list (2013).

[2] D. Cox, J. Little i D. O'Shea, *Using Algebraic Geometry*, 2004.

[3] K. L. Judd i K. Schmedders, *Handbook of Computational Economics*, 2013.

[4] B. Sturmfels, *Solving Systems of Polynomial Equations*, 2002.

Sažetak

Glavni cilj ovog rada je proučiti pojam Nashove ravnoteže te pokazati rezultate koji daju maksimalan broj mješovitih Nashovih ravnoteža u igri s n igrača. Nashove ravnoteže karakteriziramo kao rješenja određenih polinomskih sustava. Sustav polinoma možemo riješiti metodom Gröbnerovih baza pa se u prvom poglavlju upoznajemo s njihovom definicijom i svojstvima.

Broj rješenja polinomskog sustava možemo izračunati uz pomoć mješovitog volumena Newtonovih politopa. U drugom poglavlju prvo se prisjećamo konveksnosti, a zatim upoznajemo sa sumom Minkowskog i mješovitim volumenom politopa.

Treće poglavlje konačno definira Nashovu ravnotežu te daje rezultate o broju mješovitih Nashovih ravnoteža koji proizlaze iz Bernstein-Kushnirenkovog teorema.

Summary

The main goal in this master thesis is to study the concept of Nash equilibrium and to show results that give a sharp bound for the number of totally mixed Nash equilibria in a n-person game. Nash equilibria are characterized as the solutions of certain polynomial systems. The polynomial system can be solved by the method of Gröbner bases, so in the first chapter we introduce their definition and properties.

The number of solutions of a polynomial system can be found by computing the mixed volume of Newton polytopes. In the second chapter, we recall the convexity, Minkowski sum and mixed volume of several polytopes.

In the third chapter, Nash equilibrium is finally defined and results on the number of totally mixed Nash equilibria are given by using Bernstein-Kushnirenko theorem.

Životopis

Rođena sam 6. srpnja 1994. godine u Splitu. Pohađala sam Osnovnu školu Plokite, a zatim upisala opću gimnaziju Marka Marulića. Maturirala sam 2012. godine te potom upisala preddiplomski studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Splitu. Preddiplomski studij završila sam 2015. godine, te sam iste godine upisala diplomski studij Financijske i poslovne matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu.