Prošireni modeli teorije skupova

Adlešić, Tin

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Tin Adlešić

PROŠIRENI MODELI TEORIJE SKUPOVA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Vedran Čačić

Zagreb, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

U sjećanje na Krunoslava Klarića

Sadržaj

Uvod

Jedna od najpoznatijih tvrdnji u teoriji skupova zasigurno je hipoteza kontinuuma. Formulirana od strane Cantora 1878. godine, vrlo brzo je stekla slavan status, te je tako završila 1900. godine na prvom mjestu popisa čuvenih Hilbertovih 23 problema. Odmah nakon formalizacije teorije ZF, nastojalo se CH ili njezinu negaciju izvesti iz ostalih aksioma, te time potvrditi ili opovrgnuti njezinu istinitost.

Prvo veliko otkriće na tom polju dogodilo se 1940. godine. Njemački matematičar Kurt Gödel izdaje rad pod nazivom „Konzistentnost aksioma izbora i generalizirane hipoteze kontinuuma s aksiomima teorije skupova” u kojem pokazuje da se generalizirana hipoteza kontinuuma, a posljedično i CH, ne može opovrgnuti unutar teorije ZF. No Gödel je pokazao još nešto, da se ni AC ne može opovrgnuti unutar teorije ZF. Gödel je to postigao tako što je prvo pretpostavio konzistentnost teorije ZF, opisao tzv. konstruktibilnu hijerarhiju L, te pokazao da u L vrijede AC i GCH. Gödelove rezultate nazivamo rezultatima relativne konzistentnosti.

Oko 20 godina kasnije, američki matematičar Paul Cohen razvija posebnu tehniku pod nazivom *forcing*, pomoću koje dokazuje da se unutar teorije ZF ne može dokazati ni AC ni GCH, tj. da su te tvrdnje nezavisne od početne teorije. Time Cohen savršeno komplementira ranije Gödelove radove, što zajedno daje rezultat da se AC i GCH ne mogu ni dokazati, ni opovrgnuti aksiomima teorije ZF. Iako je Cohenov forcing polučio zavidne rezultate u daljnjem proučavanju teorije skupova, ta metoda do današnjih dana nije ušla u kanon „matematike koju treba znati”. Razloge tome je velika količina tehničkih detalja, neintuitivnost i naizgled previše *ad hoc* pretpostavci i definicija.

Kao alternativa Cohenovom forcingu, ali inspirirana njime, pojavljuje se metoda *forcinga* pomoću proširenih modela teorije skupova (eng. *Boolean-valued models*), koja je i tema ovog rada. Takvu vrstu forcinga prvo su uveli američki matematičari Dana Scott i Robert Solovay, a neovisno o njima i češki matematičar Petr Vopenka. Glavna ideja te teorije je pomoću potpune Booleove algebre proširiti pojam istinitosti na više vrijednosti, umjesto samo na dvije: „istina” i „laž”. Istinitosna vrijednost svake formule u toj strukturi je neki element Booleove algebre, tj. Booleova algebra mjeri razinu „istinitosti”. Na taj način proizvoljan model teorije ZFC proširujemo do tzv. proširenog modela sa svojstvom da je svaki aksiom te teorije istinit u „običnom” smislu. Točnije, istinitosna vrijednost svakog aksioma je upravo najveći element potpune Booleove algebre, tj. aksiomi su u proširenim modelima apsolutno istiniti. Izborom prikladnih Booleovih algebri možemo dobiti proširene modele u kojima je željena tvrdnja apsolutno istinita.

Rad je podijeljen na četiri poglavlja. U prvom poglavlju dani su osnovni pojmovi potrebni za razumijevanje daljnjeg teksta. Mnogi pojmovi su spomenuti usputno, a neki su detaljnije opisani radi što je moguće veće ujednačenosti notacije. Drugo poglavlje je glavni dio rada, te su u njemu izloženi osnovni pojmovi teorije proširenih modela. Teorija proširenih modela može se razvijati u nekoliko smjerova, a jedan od njih je u smjeru dokaza nezavisnosti. U trećem poglavlju dokazujemo nezavisnost hipoteze kontinuuma od teorije ZF, ali također činimo malu digresiju i dokazujemo nezavisnost Gödelovog aksioma konstruktibilnosti od teorije ZF. Cijelu priču kompletiramo u četvrtom poglavlju dokazom nezavisnosti aksioma izbora od teorije ZF.

Za vrijeme pisanja ovog teksta, glavna misao vodilja bila je ideja Timothyja Chowa: svako uvođenje novog pojma mora čitatelju biti intuitivno jasno i slijediti iz prijašnjeg teksta. Naravno, zbog naravi namjene ovog rada, takva ideja je daleko od realizacije, ali njezin utjecaj može se primijetiti u velikom dijelu teksta.

Poglavlje 1

Osnovne napomene

1.1 Logika

Za početak definiramo osnovne logičke pojmove. Cilj nam nipošto nije u potpunosti razviti logičku teoriju, već posebno naglasiti neke pojmove koji su nam potrebni u nastavku. Također, zbog velike količine literature na temu logike prvog reda, postoje raznovrsne oznake za iste pojmove, stoga je važno uvesti i koherentnu notaciju. Neke pojmove, poput dokaza, ili nastupa varijable u formuli, nećemo posebno definirati, već očekujemo izvjesnu upoznatost s tim pojmovima.

Definicija 1.1.1. ***Alfabet*** *teorije skupova* $\mathcal{L}$ *sastoji se od skupa individualnih varijabli* $Var = \{x_0, x_1, \ldots\}$*, skupa logičkih simbola* $S_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \exists\}$*, skupa nelogičkih simbola* $S_2 = \{\in, =\}$ *i skupa pomoćnih simbola* $S_3 = \{(,)\}$.

Skup nelogičkih simbola još nazivamo **signatura** i sastoji se u našem slučaju samo od dva relacijska simbola. Ponekad se simbol za jednakost izostavlja s popisa nelogičkih simbola, jer se jednakost shvaća kao logički pojam. Teorije prvog reda u kojima je jednakost shvaćena kao logički pojam nazivaju se još **teorije prvog reda s jednakošću**.

S popisa logičkih simbola su izbačeni uobičajeni simboli za kondicional ($\rightarrow$), bikondicional ($\leftrightarrow$) i univerzalnu kvantifikaciju ($\forall$). Razlog je taj što su ovako izabrani logički simboli pogodniji u kasnijem razvoju teorije, a kao što je poznato, moguće je preostale uobičajene logičke simbole definirati preko njih.

Definicija 1.1.2. *Induktivno definiramo pojam* ***formule*** *na sljedeći način:*

(i) ***Atomarna formula*** *je riječ oblika* $x \in y$ *ili* $x = y$*, gdje su* x, y *varijable. Svaka atomarna formula je formula.*

(ii) Ako je φ *formula, onda je* $\neg\varphi$ *formula.*

(iii) Ako su φ i ψ formule, onda su $(\varphi \wedge \psi)$ i $(\varphi \vee \psi)$ formule.

(iv) Ako je x varijabla i φ formula, onda je $\exists x\, \varphi$ formula.

Nastup varijable u nekoj formuli definira se na standardni način.[1] Pomoću toga se lako definiraju slobodne i vezane varijable. Varijabla je **slobodna** u formuli ako je barem jedan njen nastup u toj formuli slobodan, a inače je **vezana**. Oznakom $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ sugeriramo da je φ formula čiji je skup slobodnih varijabli podskup skupa $\{x_1, \dots, x_n\}$. Formule koje ne sadrže slobodne varijable nazivamo **rečenicama**.

Definicija 1.1.3. *Kolekcija Σ_0* ***formula*** *je najmanja kolekcija formula T za koju vrijedi:*

(i) Svaka atomarna formula je u T.

(ii) Ako je φ u T, onda je $\neg\varphi$ u T.

(iii) Ako su φ i ψ u T, onda su $(\varphi \wedge \psi)$ i $(\varphi \vee \psi)$ u T.

(iv) Ako je φ u T i x, y varijable, onda su $\forall x(x \in y \to \varphi)$ i $\exists x(x \in y \wedge \varphi)$ u T.

Formule oblika $\forall x(x \in y \to \varphi)$ i $\exists x(x \in y \wedge \varphi)$ kraće označavamo redom sa $(\forall x \in y)\, \varphi$ i $(\exists x \in y)\, \varphi$. Σ_0 formule još nazivamo **ograničene** fomule.

Definicija 1.1.4. *Kolekcija Σ_1* ***formula*** *je najmanja kolekcija formula S koja sadrži sve Σ_0 formule i za koju vrijedi:*

(i) Ako su φ i ψ u S, onda su $(\varphi \wedge \psi)$ i $(\varphi \vee \psi)$ u S.

(ii) Ako je φ u S i x, y varijable, onda su $(\forall x \in y)\, \varphi$ i $(\exists x \in y)\, \varphi$ u S.

(iii) Ako je φ u S i x varijabla, onda je $\exists x\, \varphi$ u S.

Kolekcije formula Σ_0 i Σ_1 dio su općenitije hijerarhije formula koja se naziva *Levyjeva hijerarhija* (vidi [7]). Korisnost posebnog izdvajanja dijela Levyjeve hijerarhije bit će jasnija u narednim poglavljima.

Definicija 1.1.5. *$\mathcal{L}$-**struktura** je uređeni par $\mathfrak{M} = (M, R)$, gdje je M neprazan skup (nosač) i $R \subseteq M \times M$.*

Često ćemo $\mathcal{L}$-strukturu nazivati samo **struktura** jer će jezik biti jasan iz konteksta.

[1] Vidi [30].

Definicija 1.1.6. *Neka je $\mathfrak{M} = (M, R)$ struktura i $v : Var \to M$ preslikavanje koje nazivamo* ***valuacija****. Uređeni par $(\mathfrak{M}, v)$ nazivamo* ***interpretacija****. Za danu interpretaciju $(\mathfrak{M}, v)$,* ***istinitost*** *formule φ, u oznaci $\mathfrak{M} \models_v \varphi$, definiramo na sljedeći način:*

(i) $\mathfrak{M} \models_v x \in y$ *ako i samo ako* $(v(x), v(y)) \in R$.

(ii) $\mathfrak{M} \models_v x = y$ *ako i samo ako* $v(x) = v(y)$.

(iii) $\mathfrak{M} \models_v \neg\varphi$ *ako i samo ako ne vrijedi* $\mathfrak{M} \models_v \varphi$.

(iv) $\mathfrak{M} \models_v \varphi \wedge \phi$ *ako i samo ako* $\mathfrak{M} \models_v \varphi$ *i* $\mathfrak{M} \models_v \psi$.

(v) $\mathfrak{M} \models_v \varphi \vee \psi$ *ako i samo ako* $\mathfrak{M} \models_v \varphi$ *ili* $\mathfrak{M} \models_v \psi$.

(vi) $\mathfrak{M} \models_v \exists x\, \varphi$ *ako i samo ako* $\mathfrak{M} \models_{v'} \varphi$ *za neku valuaciju v' koja se podudara s v na svim varijablama različitim od x.*

Ukoliko vrijedi $\mathfrak{M} \models_v \varphi$ za svaku valuaciju v, kažemo da je φ **istinita** na strukturi i pišemo $\mathfrak{M} \models \varphi$.

Općenito je neka teorija prvog reda zadana svojim jezikom, skupom logičkih aksioma, pravilima izvoda i skupom nelogičkih aksioma.

Definicija 1.1.7. *Kažemo da je struktura $\mathfrak{M}$ model neke teorije prvog reda T ako za svaki nelogički aksiom F teorije T vrijedi $\mathfrak{M} \models F$.*

Nelogičke aksiome ponekad kraće nazivamo samo „aksiomi”. Izborom raznih nelogičkih aksioma dobivamo različite teorije prvog reda.

Definicija 1.1.8. *Neka su φ, ψ i ϕ proizvoljne formule. Logički aksiomi logike prvog reda dani su kao:*

(i) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$.

(ii) $(\varphi \to (\psi \to \phi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \phi))$.

(iii) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$.

(iv) $\forall x\, \varphi(x) \to \varphi(y)$, *gdje je y varijabla koja ne leži u dosegu kvantifikatora $\forall x$.*[2]

(v) $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\, \psi)$, *gdje φ ne sadrži slobodni nastup varijable x.*

[2]Dovoljno je promatrati samo varijable jer nemamo funkcijskih simbola. Kasnije ćemo ih uvoditi, ali će oni biti eliminabilni.

Izbor logičkih aksioma nipošto nije jedinstven i drugi autori koriste iste, slične ili potpuno različite sustave aksioma, ali svi su ekvivalentni.

Definicija 1.1.9. *Neka su φ i ψ formule, te x varijabla. Pravila izvoda logike prvog reda dana su kao:*

Modus ponens: iz φ i $\varphi \to \psi$ zaključujemo ψ.

Generalizacija: iz φ zaključujemo $\forall x\, \varphi$.

U pravilima izvoda, formule iz kojih se zaključuje nazivamo **premise**, a ono što se zaključuje iz premisa nazivamo **zaključak**. Za pravilo izvoda kažemo da **čuva istinitost** ako iz istinitih premisa slijedi istinit zaključak.

Kako bismo u potpunosti odredili teoriju prvog reda koju promatramo, potrebno je zadati i nelogičke aksiome. Oni su tema sljedeće točke.

1.2 Teorija skupova

Kao ni u prethodnoj, ni u ovoj točki ne težimo dati potpuni osnovni prikaz teorije skupova, već samo naglasiti neke bitne pojmove. Nadalje, pretpostavljamo predzanje o naivnoj teoriji skupova te nećemo posebno ni definirati ni motivirati uvođenje nekih standardnih pojmova, pa tako ni oznake za njih.[3]

Definicija 1.2.1. *Zermelo-Fraenkelovi aksiomi teorije skupova su:*

(i) Aksiom ekstenzionalnosti: $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$.

(ii) Aksiom praznog skupa: $\exists x \forall y (y \notin x)$.

(iii) Shema aksioma separacije: za svaku formulu $\varphi(z)$ imamo:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow (z \in x \land \varphi(z))).$$

(iv) Shema aksioma zamjene: Za svaku formulu $\varphi(x, y)$ imamo:

$$\forall x \exists! y \varphi(x, y) \to \forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists t (t \in x \land \varphi(t, z))).$$

(v) Aksiom para: $\forall x \forall y \exists u \forall z (z \in u \leftrightarrow (z = x \lor z = y))$.

[3] Za uvod u teoriju skupova vidi [6].

(vi) *Aksiom unije:* $\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow (\exists t \in x)(z \in t))$.

(vii) *Aksiom partitivnog skupa:* $\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \subseteq y)$.

(viii) *Aksiom beskonačnosti:* $\exists x(\emptyset \in x \land \forall y(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$.

(ix) *Aksiom regularnosti:* $\forall x(x \neq \emptyset \rightarrow (\exists y \in x)(y \cap x = \emptyset))$.

(x) *Aksiom izbora (AC):* $\forall x \exists f((f : \mathscr{P}(x) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow x) \land (\forall y \in \mathscr{P}(x) \setminus \{\emptyset\})(f(y) \in y))$.

Funkciju f iz aksioma izbora nazivamo još *funkcijom izbora* za $\mathscr{P}(x) \setminus \{\emptyset\}$. Aksiom izbora može se iskazati u mnogo različitih oblika, tj. postoji mnogo različitih tvrdnji koje su ekvivalentne aksiomu izbora.[4]

Ovime smo u potpunosti definirali teoriju koju nazivamo **Zermelo-Fraenkelovom teorijom** skupova. Tu teoriju kraće označavamo sa ZFC, ili sa ZF ako želimo naglasiti da ne promatramo aksiom izbora. Vrijedi naglasiti kako to nije jedina moguća aksiomatizacija, a možda nije čak ni „najbolja”. Jedna od „boljih” teorija je možda tzv. NGB (von Neumann-Gödel-Bernays) teorija klasa[5], ali mane teorije ZFC koje su nam relevantne su iste kao i za teoriju NGB, pa je u našem slučaju izbor između njih irelevantan.

Iako u ZFC pričamo samo o skupovima, a ne o općenitim klasama, ipak je korisno uvesti i klasnu notaciju. Svaki entitet oblika $\{x \mid \varphi(x)\}$, gdje je $\varphi(x)$ formula s jednom slobodnom varijablom, nazivamo **klasa**. Kažemo da skup y pripada klasi $\{x \mid \varphi(x)\}$, i pišemo $y \in \{x \mid \varphi(x)\}$, ukoliko vrijedi $\varphi(y)$. Primijetimo kako je svaki skup klasa. Naime, za svaki skup z, postoji formula $\varphi(x) = (x \in z)$ takva da je $z = \{x \mid \varphi(x)\}$. Klase koje nisu skupovi nazivamo **prave klase**. Tako klasa svih skupova nije skup, već prava klasa. Na kraju, za neki skup X i formulu $\varphi(x)$, klasu $\{x \mid x \in X \land \varphi(x)\}$ najčešće označavamo s $\{x \in X \mid \varphi(x)\}$. Iz drugog zapisa se vidi da je ta klasa nastala primjenom aksioma separacije s formulom φ na skup X, a iz toga slijedi da je ona skup.

Definicija 1.2.2. *Kažemo da je skup x* ***tranzitivan*** *ako vrijedi* $(\forall y \in x)(\forall z \in y)(z \in x)$. *Kažemo da je skup x* ***ordinalni broj*** *(ordinal) ako je x tranzitivan te je $(x, \in)$ totalno (linearno) uređen skup.*

Prazan skup je ordinal i označavamo ga s 0. **Sljedbenik** nekog ordinalnog broja α definiramo kao $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$.[6] Za ordinal α kažemo da je ordinal **prve vrste** ako je $\alpha = \beta + 1$ za neki ordinal β. Za ordinal koji nije prve vrste i nije jednak 0 kažemo da je **granični ordinal**. Klasu svih ordinala označavamo s On, a činjenicu da je skup x ordinal označavamo s $On(x)$.

[4] Za neke od tih ekvivalencija vidi [19].

[5] Teorija NGB je bolja od teorije ZFC u smislu da je, za razliku od teorije ZFC, konačno aksiomatizabilna. Više o tome u npr. [20].

[6] Lako se vidi da je $\alpha + 1$ ordinal za svaki ordinal α.

Definicija 1.2.3. *Kažemo da je ordinal λ* **kardinalni broj** *(kardinal) ako ni za koji $\alpha \in \lambda$ ne postoji bijekcija između α i λ.*

Činjenicu da je neki skup x kardinalni broj označavamo s $Card(x)$. Kažemo da je kardinal λ **kardinalnost** skupa x, u oznaci $k(x)$, ako postoji bijekcija između x i λ.

Uz Cantorov i Schröder-Bernsteinov teorem[7], vrijedi još posebno naglasiti Tarskijev teorem koji tvrdi da za bilo koji beskonačni kardinal λ vrijedi $\lambda \cdot \lambda = \lambda$.[8] Iz Tarskijevog teorema trivijalno slijedi da za svaka dva beskonačna kardinala λ i μ vrijedi $\lambda \cdot \mu = \min\{\lambda, \mu\}$.[9] Množenje kardinala definira se standardno, preko Kartezijevog produkta.

Teorem 1.2.4. *(Transfinitna indukcija) Neka je K klasa ordinalnih brojeva takva da vrijedi:*

(i) $0 \in K$.

(ii) Ako je $\alpha \in K$, onda je $\alpha + 1 \in K$.

(iii) Za graničan ordinal $\alpha \neq 0$, ako za svaki $\beta \in \alpha$ vrijedi $\beta \in K$, onda je $\alpha \in K$.

Tada je K klasa svih ordinala.

Dokaz. Pretpostavimo da vrijede tvrdnje (i), (ii) te (iii), ali da K nije klasa svih ordinala. Tada je klasa $T = \{\alpha \in On \mid \alpha \notin K\}$ neprazna, pa po svojstvu ordinala postoji najmanji element te klase, označimo ga s α_0. Kako je α_0 najmanji element, za svaki $\beta \in \alpha_0$ vrijedi $\beta \in K$. Primijetimo da je $\alpha_0 \neq 0$ jer $0 \notin T$ po svojstvu (i) Ako je α_0 ordinal prve vrste, onda postoji neki ordinal γ takav da je $\alpha = \gamma + 1$. Kako je $\gamma < \alpha$, imamo $\gamma \in K$, pa po pretpostavci (ii) slijedi da je $\gamma + 1 = \alpha_0 \in K$. S druge strane, ako je α_0 granični ordinal, po pretpostavci (iii) slijedi da je $\alpha_0 \in K$. U oba slučaja imamo kontradikciju, dakle $K = On$. ∎

Skupovna operacija, ili **klasna funkcija**, je prava klasa uređenih parova s funkcijskim svojstvom.[10] Funkcija, ili unutarnja operacija, je funkcija između skupova u uobičajenom smislu. Domenu funkcije f označavamo s $D(f)$, a sliku funkcije s $\mathrm{Im}(f)$. Činjenicu da je f funkcija još označavamo s $func(f)$.

Teorem 1.2.5. *(Transfinitna rekurzija) Neka je x skup i F neka totalna klasna funkcija. Tada postoji jedinstvena klasna funkcija G na On takva da vrijedi*

(i) $G(0) = x$.

(ii) $G(\alpha + 1) = F(G(\alpha))$.

---

[7] Vidi [6].

[8] Vidi [20].

[9] Vidi dokaz u [20].

[10] Klasa F uređenih parova ima funkcijsko svojstvo ako $(x, y) \in F$ i $(x, y') \in F$ povlače da je $y = y'$.

(iii) $G(\alpha) = \bigcup_{\beta\in\alpha} G(\beta)$, *za* α *granični ordinal.*

Dokaz se može pronaći u [28]. Pomoću transfinitne rekurzije moguće je strogo definirati aritmetiku ordinala i kardinala, te opisati kumulativnu hijerarhiju.

Definicija 1.2.6. *Transfinitnom rekurzijom definiramo* ***kumulativnu hijerarhiju****:*

(i) $V_0 := \emptyset$.

(ii) $V_{\alpha+1} := \mathscr{P}(V_\alpha)$.

(iii) $V_\alpha := \bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta$ *za granični ordinal* α.

(iv) $V := \bigcup_{\alpha\in On} V_\alpha$.

Primijetimo kako u opisu kumulativne hijerarhije kao početni skup uzimamo $\emptyset$, a klasna funkcija F iz teorema transfinitne rekurzije je operacija partitivnog skupa.

Pomoću aksioma regularnosti moguće je pokazati kako se svaki skup x nalazi u nekom V_α, gdje je α neki ordinal.[11] Lako se vidi da ordinal razine na kojoj se x prvi puta pojavljuje mora biti prve vrste. Definiramo **rang** elementa $x \in V$ kao najmanji ordinal α takav da je $x \in V_{\alpha+1}$. Također, rang elementa možemo definirati rekurzivno kao $rk(x) = \bigcup\{rk(y) + 1 \mid y \in x\}$.

Za kardinal λ definiramo njegov **sljedbenik** λ^+ kao najmanji kardinalni broj veći od λ.

Definicija 1.2.7. *Transfinitnom rekurzijom definiramo* ***alef*** *funkciju* $\aleph$*:*

(i) $\aleph_0 := 0$.

(ii) $\aleph_{\alpha+1} := \aleph_\alpha^+$.

(iii) $\aleph_\alpha := \bigcup_{\beta\in\alpha} \aleph_\beta$ *za granični ordinal* α.

Pomoću aksioma izbora moguće je pokazati kako je svaki beskonačni kardinal jednak nekom alefu.[12] Iz tog razloga, prethodnu definiciju možemo shvaćati kao definiciju hijerarhije kardinala.

Definicija 1.2.8. ***Hipoteza kontinuuma*** *(kraće CH) glasi:* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$*.* ***Generalizirana hipoteza kontinuuma*** *(kraće GCH) glasi:* $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$*, za svaki ordinal* α*.*

[11] Vidi [20].

[12] Vidi dokaz u [17].

Hipoteza kontinuuma jedan je od najpoznatijih problema teorije skupova. Cantor ju nije uspio riješiti, iako se njome bavio godinama. Prvi važniji napredak prema rješenju problema dugujemo Gödelovom otkriću konstruktibilne hijerarhije. U toj hijerarhiji vrijede svi aksiomi teorije ZF, aksiom izbora i hipoteza kontinuuma. Time je Gödel zapravo pokazao da se ni aksiom izbora ni hipoteza kontinuuma ne mogu opovrgnuti unutar teorije ZF, uz pretpostavku da je ZF konzistentna teorija.

Definicija 1.2.9. *Neka je M struktura. Kažemo da je skup X **definabilan** u strukturi M ako postoji formula $\varphi(x)$ takva da je $X = \{a \in M \mid M \models_v \varphi(x)$, gdje je $v(x) = a\}$. S $\mathscr{D}(M)$ označavamo skup svih definabilnih podskupova od M, tj. $\mathscr{D}(M) = \{X \subseteq M \mid X$ je definabilan u $M\}$.[13] Operaciju $\mathscr{D}$ nazivamo operacija **definabilnog partitivnog skupa**.*

Gödelova konstruktibilna hijerarhija gradi se po nivoima poput kumulativne hijerarhije, ali kao prelazak na novi nivo ne koristi se operacija partitivnog skupa, nego operacija definabilnog partitivnog skupa.

Definicija 1.2.10. *Trensfinitnom rekurzijom definiramo **konstruktibilnu hijerarhiju**:*

(i) $L_0 := \emptyset$.

(ii) $L_{\alpha+1} := \mathscr{D}(L_\alpha)$.

(iii) $L_\alpha := \bigcup\limits_{\beta\in\alpha} L_\beta$ *za granični ordinal* α.

(iv) $L := \bigcup\limits_{\alpha\in On} L_\alpha$.

Svaki element konstruktibilne hijerarhije naziva se **konstruktibilni skup**. Hipoteza da je svaki skup konstruktibilan još se naziva **aksiom konstruktibilnosti** i označava se kraće s $V = L$.

Teorem 1.2.11. *(Gödel) Ako je teorija ZF konzistentna, onda su konzistentne i teorije ZFC, $ZF + GCH$ i $ZF + V = L$.*

Gödel je također pokazao da ako je ZF konzistentna teorija, onda je konzistentna i teorija $ZFC + GCH + (V = L)$, a model joj je upravo L. Dokazi Gödelovih rezultata i detaljnija razrada teorije mogu se pronaći u [3].

[13] Rečenicu "X je definabilan" moguće je izraziti formulom prvog reda, pa vidimo da je definabilni partitivni skup nekog skupa zaista skup. Za detalje vidi [3].

1.3 Booleova algebra

Koncept *rešetke* prvi se puta pojavljuje kod promatranja skupa svih podgrupa neke grupe, koje su parcijalno uređene inkluzijom. Rešetke je moguće promatrati same po sebi, ali za nas su one samo jedan korak u proučavanju složenije strukture, *Booleove algebre*.

Definicija 1.3.1. ***Rešetka*** *R je parcijalno uređen skup* $(R, \leq)$ *u kojem svaki dvočlani skup* $\{x, y\}$ *ima infimum* $x \wedge y$ *i supremum* $x \vee y$.[14] *Ako postoji, najveći (najmanji) element rešetke označavamo s* $\mathbf{1}_R$ $(\mathbf{0}_R)$. *Rešetku koja ima najveći i najmanji element nazivamo* ***ograničenom****. Za rešetku kažemo da je* ***potpuna*** *ako svaki podskup rešetke ima supremum i infimum. Rešetka je* ***distributivna*** *ako za sve njezine elemente vrijedi:* $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ *te* $x \wedge (y \wedge z) = (x \vee y) \vee (x \vee z)$.

Kada je rešetka jasna iz konteksta, najveći (najmanji) element rešetke pišemo jednostavno $\mathbf{1}$ $(\mathbf{0})$. U bilo kojoj rešetki vrijedi zakon idempotentnosti, tj. za svaki element rešetke x vrijedi $x \wedge x = x$ i $x \vee x = x$.

Definicija 1.3.2. *Neka je R ograničena rešetka.* ***Komplement*** *od* $x \in R$ *je element* $y \in R$ *za koji vrijedi* $x \wedge y = \mathbf{0}$ *te* $x \vee y = \mathbf{1}$. *Ograničenu distributivnu rešetku u kojoj svaki element ima komplement nazivamo* ***komplementarna rešetka****.*

Pojam rešetke možemo proširiti u dva smjera. Prvi smjer je direktno u Booleovu algebru, a drugi smjer je u tzv. *Heytingovu* algebru te kasnije pojam Heytingove algebre proširiti u Booleovu algebru. Zbog toga što nam rezultati dobiveni Heytingovim algebrama nisu osobito važni, Heytingove algebre nećemo proučavati u nastavku.[15]

Definicija 1.3.3. ***Booleova algebra*** *B je komplementarna distributivna rešetka. Supremum, infimum i komplement nazivamo* ***Booleovim operacijama****.* $C \subseteq B$ *je (Booleova)* ***podalgebra*** *od B ako je C zatvorena na Booleove operacije.*

U kontekstu Booleove algebre supremum još nazivamo **unija**, a infimum **presjek**. Uobičajeno je kod definicije Booleove algebre eksplicitno zahtijevati jedinstvenost komplementa. Premda to u prethodnoj definiciji nismo zahtijevali, to svojstvo ipak vrijedi u komplementarnim distributivnim rešetkama.

Lema 1.3.4. *Neka je B Booleova algebra. Tada za svaki* $x \in B$ *postoji jedinstveni komplement.*

[14] U engleskom jeziku se najčešće koriste nazivi (redom) *join* i *meet*. Budući da ne postoji adekvatan prijevod tih riječi na hrvatski jezik, nećemo uvoditi neke druge riječi.

[15] Više o Heytingovim algebrama i rezultatima dobivenim iz njih u [2].

Dokaz. Uzmimo $x \in B$ proizvoljan. Budući da je B komplementarna rešetka, postoji komplement $y \in B$ od x. Pretpostavimo da on nije jedinstven, tj. da postoji $y' \in B$ takav da je y' komplement od x i $y \neq y'$. Iz činjenice da je B distributivna rešetka, imamo

$$y = y \wedge \mathbf{1} = y \wedge (x \vee y') = (y \wedge x) \vee (y \wedge y') = \mathbf{0} \vee (y \wedge y') = y \wedge y'$$

te

$$y = y \vee \mathbf{0} = y \vee (x \wedge y') = (y \vee x) \wedge (y \vee y') = \mathbf{1} \wedge (y \vee y') = y \vee y'.$$

Iz toga slijedi da je $y \vee y' = y = y \wedge y'$, a kako vrijedi $y = y \wedge y' \leq y' \leq y \vee y' = y$, imamo po antisimetričnosti da je $y = y'$. ■

Budući da za svaki element x u Booleovoj algebri postoji jedinstveni komplement, možemo ga označiti posebnom oznakom $-x$. Nadalje, definiramo Booleovu **implikaciju** kao $(x \Rightarrow y) := -x \vee y$.

Definicija 1.3.5. *Neka su B i B' Booleove algebre. Kažemo da je $h : B \to B'$* ***homomorfizam algebri*** *ako vrijedi:*

(i) $h(\mathbf{0}_B) = \mathbf{0}_{B'}$, $h(\mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_{B'}$.

(ii) $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$, $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$, $\forall x, y \in B$

(iii) $h(-x) = -h(x)$, $\forall x \in B$.

Kao i u standardnoj algebarskoj teoriji, injektivne homomorfizme nazivamo **monomorfizmima**, surjektivne **epimorfizmima**, a bijektivne **izomorfizmima**. Izomorfizam $h : B \to B$ nazivamo **automorfizam**, a grupu izomorfizama s B u B označavamo s $Aut(B)$.

Definicija 1.3.6. *Kažemo da je neprazna familija skupova $\mathscr{B}$* ***algebra skupova****, ako je zatvorena na konačne presjeke, unije i komplementiranje s obzirom na $\bigcup \mathscr{B}$.*

U skupovnim algebrima se kao relacija parcijalnog uređaja uzima inkluzija.

Booleovu algebru B, poput rešetke, nazivamo **potpuna** Booleova algebra ako svaki podskup od B ima supremum i infimum. U daljnjem nastavku su nam potrebne Booleove algebre s još nekim posebnim svojstvima.

Definicija 1.3.7. *Neka je B potpuna Booleova algebra. Kažemo da je podskup $L \subseteq B$* ***lanac*** *ako za sve $x, y \in L$ vrijedi $x \leq y$ ili $y \leq x$. Podskup $A \subseteq B$ nazivamo* ***antilanac*** *ako vrijedi $x \wedge y = 0$ za sve $x, y \in A$. Kažemo da Booleova algebra ima (zadovoljava)* ***Suslinovo svojstvo*** *ako je svaki antilanac u B prebrojiv.*

Vrlo bitan pojam, kako u logici, tako u topologiji, je pojam filtera. Osim korištenja u dokazu Stoneovog teorema, filteri igraju veliku ulogu u dokazivanju nezavisnosti aksioma izbora od teorije ZF.

Definicija 1.3.8. ***Filter*** *na ograničenoj distributivnoj rešetki R je podskup $F \subseteq R$ za koji vrijedi:*

(i) $\mathbf{1} \in F$, $\mathbf{0} \notin F$.

(ii) Ako su $x, y \in F$, onda je $x \wedge y \in F$.

(iii) Ako je $x \in F$ i $x \leq y$, onda je $y \in F$.

Filter koji je maksimalan s obzirom na relaciju $\subseteq$ naziva se ***ultrafilter****. Za filter F kažemo da je* ***prost*** *ako $x \vee y \in F$ povlači $x \in F$ ili $y \in F$.*

Pomoću aksioma izbora može se pokazati da se proizvoljan filter može proširiti do prostog filtera. O tome govori sljedeća lema.

Lema 1.3.9. *Neka je F_0 filter na ograničenoj distributivnoj rešetki R te $b \notin F_0$. Tada postoji maksimalan filter koji sadrži F_0, ali ne sadrži b. Štoviše, takav filter je prost.*

Dokaz. Definiramo familiju $\mathscr{F} = \{F \subseteq R \mid F \text{ filter }, b \notin F_0 \text{ i } F_0 \subseteq F\}$. Neka je $L \subseteq \mathscr{F}$ proizvoljan neprazan lanac i dokažimo da je $\bigcup L$ iz familije $\mathscr{F}$. Pretpostavimo da je $b \in \bigcup L$, tada postoji neki $F \in L$ takav da je $b \in F$, što je kontradikcija jer je $F \in \mathscr{F}$. Budući da je $\mathbf{1} \in F$ za svaki $F \in \mathscr{F}$, specijalno to vrijedi za svaki $F \in L$, tj $\mathbf{1} \in \bigcup L$. Očito je $F_0 \subseteq \bigcup L$. Ako su $x, y \in \bigcup L$, onda postoje $F_1, F_2 \in L$ takvi da je $x \in F_1$ te $y \in F_2$. Budući da je L lanac, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $F_1 \subseteq F_2$, tj. $x, y \in F_2$. Kako je F_2 filter, slijedi da je $x \wedge y \in F_2$ što daje $x \wedge y \in \bigcup L$. Nadalje, neka je $x \in \bigcup L$ i $x \leq y$. Tada postoji $F \in L$ takav da je $x \in F$ i $x \leq y$. Jer je F filter, slijedi da je $y \in F$, tj. $y \in \bigcup L$ i time dobivamo da je $\bigcup L$ filter koji ne sadrži b. Trivijalno je $\bigcup L$ gornja ograda elemenata iz L, stoga po Zornovoj lemi[16] postoji maksimalan element familije $\mathscr{F}$, označimo ga s M.

Očito je M filter koji ne sadrži b, stoga preostaje još dokazati da je M prost. Neka je $c \vee d \in M$. Definirajmo $M_c = \{y \in R \mid (\exists x \in M)(y \geq x \wedge c)\}$ i $M_d = \{y \in R \mid (\exists x \in M)(y \geq x \wedge d)\}$. Ako je $b \in M_c \cap M_d$, onda postoje $x, y \in M$ takvi da vrijedi $b \geq x \wedge c$ i $b \geq y \wedge d$. Tada imamo $b \geq (x \wedge c) \vee (x \wedge d) = (x \vee y) \wedge (x \vee d) \wedge (c \vee y) \wedge (c \vee d) \in M$. Stoga slijedi da je $b \in M$, što je kontradikcija. Dakle vrijedi $b \notin M_c$ ili $b \notin M_d$. Pretpostavimo da vrijedi $b \notin M_c$. Očito je $\mathbf{1} \in M_c$. Ako su $y, z \in M_c$, onda postoje $x_1, x_2 \in M$ takvi da je $y \geq x_1 \wedge c$ i $z \geq x_2 \wedge c$. Sve zajedno dobivamo $y \wedge z \geq (x_1 \wedge x_2) \wedge c$, tj. $y \wedge z \in M_c$. Neka je još $y \in M_c$

[16] Za iskaz i dokaz Zornove leme vidi [20].

i $y \le z$. Tada postoji $x \in M$ takav da je $y \ge x \wedge c$ Budući da je $z \ge y \ge x \wedge c$, imamo da je $z \in M_c$. Sve zajedno imamo da je M_c filter. Nadalje, za $z \in M$ vrijedi $z \ge z \wedge c$, tj. $z \in M_c$. Zbog toga vrijedi $M \subseteq M_c$, a kako M_c ne sadrži b, iz maksimalnosti elementa M dobivamo da vrijedi $M = M_c$, iz čega slijedi $c \in M$. Analogno se dokazuje pretpostavimo li $b \notin M_d$ te tada dobijemo da vrijedi $d \in M$. Na kraju imamo da vrijedi $c \in M$ ili $d \in M$. ■

Jednostavna posljedica prethodne leme je sljedeći korolar.

Korolar 1.3.10. *Neka je R ograničena distributivna rešetka, te $x, y \in R$ takvi da vrijedi $x \nleq y$. Tada postoji prost filter koji sadrži x, ali ne i y.*

Dokaz. Promotrimo skup $S = \{z \mid x \le z\}$. Taj skup je očito filter i $y \notin S$. Tada po lemi 1.3.9 postoji prost filter koji sadrži filter S i ne sadrži y. Kako je $x \in S$, slijedi tvrdnja teorema. ■

Sada smo u mogućnosti dokazati Stoneov teorem.

Teorem 1.3.11. *(Stoneov teorem) Svaka Booleova algebra je izomorfna algebri skupova.*

Dokaz. Neka je B Booleova algebra. Definirajmo skup $P(B) = \{F \subseteq B \mid F \text{ je prost filter}\}$ i preslikavanje $h : B \to \mathscr{P}(P(B))$ s $h(x) = \{F \in P(B) \mid x \in F\}$. $\mathscr{P}(P(B))$ je očito Booleova algebra, stoga preostaje pokazati da je h izomorfizam. Očito je $h(\mathbf{1}) = P(B)$ i $h(\mathbf{0}) = \emptyset$. Neka su $x, y \in B$, tada vrijedi $h(x \wedge y) = \{F \in P(B) \mid x \wedge y \in F\}$. Trebamo dokazati da je $h(x \wedge y) = h(x) \cap h(y)$. Za $G \in h(x \wedge y)$ imamo da je $x \wedge y \in G$ i G je prost filter. Kako po definiciji vrijedi $x \wedge y \le x$ te $x \wedge y \le y$, slijedi po definiciji filtera da vrijedi $x \in G$ i $y \in G$, tj $G \in h(x) \cap h(y)$. Obrnuto, ako je $H \in h(x) \cap h(y)$, tada je G prost filter i vrijedi $x \in G$ te $y \in G$. Po definiciji filtera slijedi da je $x \wedge y \in G$, a kako je G prost, to znači da je $G \in h(x \wedge y)$.

Dokažimo sada $h(x \vee y) = h(x) \cup h(y)$. Za $G \in h(x \vee y)$ slijedi da je G prost filter i $x \vee y \in G$. Kako je G prost, imamo da je $x \in G$ ili $y \in G$, što znači da vrijedi $G \in h(x) \cup h(y)$. S druge strane, za $H \in h(x) \cup h(y)$ imamo da je H prost filter i da vrijedi $x \in H$ ili $y \in H$. Budući da vrijedi $x \le x \vee y$ i $y \le x \vee y$, po definiciji filtera slijedi da je $x \vee y \in H$, a kako je H i prost, slijedi da je $H \in h(x \vee y)$. Neka je $F \in h(-x)$ i pretpostavimo da je $F \notin h(x)^c$. Tada je $F \in h(x)$, tj. $x \in F$. Stoga imamo $x \in F$ i $-x \in F$. Kako je F filter, slijedi da je $x \wedge -x = 0 \in F$, a to je kontradikcija s definicijom filtera. S druge strane, ako je $F \in h(x)^c$, onda je $x \notin F$. Jer je $x \vee (-x) = \mathbf{1} \in F$, a F je prost, vrijedi $x \in F$ ili $-x \in F$. Kako je $x \notin F$, slijedi $-x \in F$.

Preostaje dokazati da vrijedi $h(-x) = h(x)^c$. Neka je $G \in h(-x)$ i pretpostavimo da je $G \notin h(x)^c$. Tada je $G \in h(x)$, tj. $x \in G$. Stoga imamo $x \in G$ i $-x \in G$. Kako je G filter, slijedi da je $x \wedge (-x) = 0 \in G$, a to je kontradikcija s definicijom filtera. S druge strane, ako je $G \in h(x)^c$, onda je $x \notin G$. Budući da je $\mathbf{1} = x \vee (-x) \in G$ i G je prost, slijedi da je $x \in G$ ili $-x \in G$. Iz $x \notin G$, slijedi $-x \in G$.

Iz prethodno dokazanog slijedi da je preslikavanje h homomorfizam, a iz korolara 1.3.10 slijedi da je h monomorfizam. Na kraju imamo da je preslikavanje $h\colon B \to \mathrm{Im}(h)$ epimorfizam, odnosno izomorfizam. ∎

1.4 Topologija

U dokazima nezavisnosti od velike važnosti su nam neki osnovni topološki pojmovi. Potpuniji pregled opće topologije može se pronaći u [24].

Definicija 1.4.1. *Neka je X skup i $\mathcal{T}$ familija podskupova od X. Kažemo da je familja $\mathcal{T}$* ***topologija*** *na skupu X, te da je $(X, \mathcal{T})$* ***topološki prostor*** *ako vrijedi:*

(i) $X \in \mathcal{T}$.

(ii) Ako je I skup, te je $U_i \in \mathcal{T}$ za svaki $i \in I$, tada je $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

(iii) Ako je $n \in \omega$, te su $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$, tada je $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$.

Elemente topologije nazivamo **otvoreni** skupovi, a njihove komplemente nazivamo **zatvoreni** skupovi. **Otvorena okolina** neke točke iz topološkog prostora X je svaki otvoreni skup koji je sadrži. Umjesto „otvorena okolina", najčešće ćemo govoriti samo „okolina". Topološki prostor $(X, \mathscr{P}(X))$ nazivamo **diskretan topološki prostor**, a $\mathscr{P}(X)$ nazivamo **diskretna topologija**.

Definicija 1.4.2. ***Baza*** *topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$ je familija $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ takva da se svaki $U \in \mathcal{T}$ može zapisati kao unija nekih elemenata te familije.*

Lako se dokaže da postoji jedinstvena topologija sa zadanom bazom.[17] Iz definicije nije lako provjeriti da je neka familija baza. Na sreću, postoji jednostavna karakterizacija koja olakšava provjeravanje.

Teorem 1.4.3. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Familija $\mathcal{B}$ je baza topologije $\mathcal{T}$ ako i samo ako za svaki $U \in \mathcal{T}$ i $x \in U$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq U$.*

Dokaz prethodnog teorema može se pronaći u [24].

Definicija 1.4.4. *Neka su $\{(X_i, \mathcal{T}_i) \mid i \in I\}$ topološki prostori.* ***Produktna topologija*** *na $\prod_{i \in I} X_i$ je topologija čija baza je*

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i \in I} U_i \;\middle|\; U_i \in \mathcal{T}_i \text{ za sve } i\text{ , te je } U_i = X_i \text{ za sve osim konačno mnogo } i \right\}.$$

[17] Vidi [24].

Na topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ za skup $A \subseteq X$ definiramo **zatvarač** kao skup $\overline{A}$ svih elemenata $x \in X$ takvih da svaka otvorena okolina od x siječe A, i **unutrašnjost** skupa A, u oznaci $Int(A)$, kao najveći otvoreni skup sadržan u A.

Definicija 1.4.5. *Kažemo da je skup U **regularno otvoren** u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako je ako je $Int(\overline{U}) = U$. Familiju regularno otvorenih skupova prostora X označavamo s $RO(X)$.*

Familiju regularno otvorenih skupova moguće je, s odgovarajućim operacijama, pretvoriti u Booleovu algebru.

Teorem 1.4.6. *Familija $RO(X)$ s operacijama definiranim s $U \vee V := Int(\overline{U \cup V})$, $U \wedge V := U \cap V$ te $-U := \overline{U}^c$ je Booleova algebra, pri čemu je $\emptyset$ najmanji, a X najveći element.*

Dokaz se može pronaći u [12].

Definicija 1.4.7. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Familija $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ je **antilanac** ako su svaka dva njena skupa međusobno disjunktna. Kažemo da topološki prostor ima (zadovoljava) **Suslinovo svojstvo** ako mu je svaki antilanac prebrojiv.*

Suslinovo svojstvo za topološke prostore donekle odgovara Suslinovom svojstvu za Booleove algebre. Razlika je u operaciji pomoću koje se definiranju antilanci. U topološkim prostorima se antilanac definira pomoću običnog skupovnog presjeka, a u Booleovim algebrama pomoću infimuma.

Definicija 1.4.8. *Kažemo da je topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ separabilan ako postoji konačan ili prebrojiv skup $A \subseteq X$ takav da je $A \cap U \neq \emptyset$ za svaki $U \in \mathcal{T}$.*

Separabilnost će nam u nastavku igrati važnu ulogu u određivanju ima li određeni produktni topološki prostor Suslinovo svojstvo. Primijetimo da je svaki konačan ili prebrojiv topološki prostor separabilan. Nadalje, svaki separabilan topološki prostor ima Suslinovo svojstvo.[18]

[18] Za dokaz vidi [10].

Poglavlje 2

Booleova proširenja

2.1 Konstrukcija modela

Za poznavanje nekog skupa x dovoljno je znati, za svaki objekt y, vrijedi li $y \in x$ ili ne. Vođeni time, svaki skup x možemo poistovjetiti s *karakterističnom funkcijom* $\chi_x \colon V \to \{0, 1\} = 2$, takvom da za svaki skup y vrijedi $\chi_x(y) = 1$ ako je $y \in x$, a $\chi_x(y) = 0$ ako vrijedi $y \notin x$. Ukoliko svaki skup poistovjetimo s njegovom karakterističnom funkcijom, kumulativna hijerarhija postaje hijerarhija funkcija. Primijetimo da je 2 potpuna Booleova algebra, stoga je interesantno poopćiti prethodno razmatranje na proizvoljne potpune Booleove algebre.

Definicija 2.1.1. *Neka je B potpuna Booleova algebra. Transfinitnom rekurzijom definiramo **Booleovo proširenje** od V (preciznije: B-**proširenje** od V):*

(i) $V_0^B := \emptyset$.

(ii) $V_{\alpha+1}^B := \{u \mid u \colon V_\alpha^B \to B\}$.

(iii) $V_\alpha^B := \bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta^B$, *ako je α granični ordinal.*

(iv) $V^B := \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha^B$.

Booleovo proširenje kraće nazivamo **proširenje**, a elemente proširenja nazivamo B-**skupovima**. Alfabet $\mathcal{L}$ teorije skupova proširujemo do alfabeta $\mathcal{L}^B$ tako da u $\mathcal{L}$ dodamo po jedan konstantski simbol za svaki element iz proširenja. Formule alfabeta $\mathcal{L}^B$ nazivamo B-**formulama**.

Definiramo preslikavanje $[\![\cdot]\!]^B$ sa klase svih B-formula u Booleovu algebru B, koje nazivamo **Booleovo preslikavanje**, i za B-formulu φ kažemo da je $[\![\varphi]\!]^B$ njezina **Booleova**

istinitosna vrijednost. Primijetimo kako je time poopćen pojam istinitosti formula, te ne samo da su moguće vrijednosti standardne dvovrijednosne logike $\mathbf{1}$ i $\mathbf{0}$, već su moguće bilo koje vrijednosti iz B. Za B-formulu φ kažemo da je **apsolutno istinita**, i pišemo $V^B \models \varphi$, ako vrijedi $[\![\varphi]\!]^B = \mathbf{1}$, a kažemo da je **apsolutno lažna**, te pišemo $V^B \not\models \varphi$, ako vrijedi $[\![\varphi]\!]^B = \mathbf{0}$.

Definicija 2.1.2. *Neka su $u, v \in V^B$ i φ, ψ B-formule. Definiramo preslikavanje $[\![\cdot]\!]^B$ na sljedeći način:*

(i) $[\![u \in v]\!]^B := \bigvee\limits_{x \in D(v)} (v(x) \wedge [\![u = x]\!]^B)$.

(ii) $[\![u = v]\!]^B := \bigwedge\limits_{x \in D(u)} (u(x) \Rightarrow [\![x \in v]\!]^B) \ \wedge \bigwedge\limits_{y \in D(v)} (v(y) \Rightarrow [\![y \in u]\!]^B)$.

(iii) $[\![\neg\varphi]\!]^B := -[\![\varphi]\!]^B$.

(iv) $[\![\varphi \wedge \psi]\!]^B := [\![\varphi]\!]^B \wedge [\![\psi]\!]^B$.

(v) $[\![\varphi \vee \psi]\!]^B := [\![\varphi]\!]^B \vee [\![\psi]\!]^B$.

(vi) $[\![\exists x \varphi(x)]\!]^B := \bigvee\limits_{u \in V^B} [\![\varphi(u)]\!]^B$.

U nastavku ćemo najčešće pisati $[\![\cdot]\!]$ umjesto $[\![\cdot]\!]^B$. Iz definicije Booleovog proširenja je jasno da je svaki element proširenja u nekom nivou proširenja. Slično kao rang skupa, možemo definirati **Booleov rang** elementa $u \in V^B$, u oznaci rk_B, kao najmanji ordinalni broj α za koji je $u \in V^B_{\alpha+1}$. Tada rekurzijom po $(rk_B(u), rk_B(v))$, pretpostavljajući da je na $On \times On$ zadan kanonski dobar uređaj[1], proizlazi da je s (i) i (ii) u prethodnoj definiciji dobro definirana Booleova istinitost atomarnih formula. Detalji se mogu pronaći u [23].

Budući da je klasa $\{[\![\varphi(u)]\!] \mid u \in V^B\} \subseteq B$ skup, definicija (vi) pomoću supremuma po klasi V^B je dobra. Činjenica da se model proširuje koristeći element kojeg sadrži, velika je prednost ovakvog pristupa u odnosu na Cohenov.[2]

Kako se kvantifikator $\forall$ može prikazati preko $\exists$, pomoću De Morganovih pravila za Booleove operacije dobivamo $[\![\forall x \varphi(x)]\!] = [\![\neg\exists x \neg\varphi(x)]\!] = -[\![\exists x \neg\varphi(x)]\!] = -\bigvee\limits_{u \in V^B} [\![\neg\varphi(u)]\!]^B = \bigwedge\limits_{u \in V^B} [\![\neg\neg\varphi(u)]\!]^B = \bigwedge\limits_{u \in V^B} [\![\varphi(u)]\!]^B$.

Teorem 2.1.3. *Svi logički aksiomi su apsolutno istiniti u V^B, i sva pravila izvoda čuvaju istinitost u V^B.*

[1] Vidi [20].

[2] U Cohenovom forcingu se model proširuje koristeći element koji nije sadržan u tom modelu, a osim matematičkih, pojavljuju se i neki filozofski problemi. Interesantna rasprava o tome dana je u [14] i [21].

Dokaz. Dokažimo za ilustraciju da je istinit aksiom $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ za proizvoljne B-formule φ i ψ. $[\![\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)]\!] = ([\![\varphi]\!] \Rightarrow [\![\psi \rightarrow \varphi]\!]) = -[\![\varphi]\!] \vee [\![\psi \rightarrow \varphi]\!] = -[\![\varphi]\!] \vee -[\![\psi]\!] \vee [\![\varphi]\!] = 1 \vee [\![\psi]\!] = 1$.

Dokažimo sada da pravila izvoda čuvaju istinitost, tj. ako su premise istinite, da je istinit i zaključak. Pretpostavimo da vrijedi $[\![\varphi]\!] = 1$ i $[\![\neg\varphi \vee \psi]\!] = 1$. Tada imamo $[\![\forall u\varphi]\!] = \bigwedge_{u \in V^B} [\![\varphi]\!] = 1$. Nadalje, $1 = [\![\neg\varphi \vee \psi]\!] = [\![-\varphi]\!] \vee [\![\psi]\!] = -[\![\varphi]\!] \vee [\![\psi]\!] = -1 \vee [\![\psi]\!] = 0 \vee [\![\psi]\!] = [\![\psi]\!]$. ■

Korisnom se pokazuje sljedeća lema.

Lema 2.1.4. *Neka je T proširenje teorije ZF i neka su φ i ψ formule teorije T. Ako vrijedi $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$, onda je $[\![\varphi]\!] \leq [\![\psi]\!]$.*

Dokaz. Zbog teorema 2.1.3, indukcijom po izgradnji dokaza $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ dobivamo $[\![\varphi \rightarrow \psi]\!] = 1$. Sada imamo $[\![\varphi \rightarrow \psi]\!] = [\![\neg\varphi \vee \psi]\!] = -[\![\varphi]\!] \vee [\![\psi]\!] = 1$. Iz toga slijedi

$$[\![\varphi]\!] = 1 \wedge [\![\varphi]\!] = (-[\![\varphi]\!] \vee [\![\psi]\!]) \wedge [\![\varphi]\!] = (-[\![\varphi]\!] \wedge [\![\varphi]\!]) \vee ([\![\varphi]\!] \wedge [\![\psi]\!]) = [\![\varphi]\!] \wedge [\![\psi]\!].$$

Dakle, $[\![\varphi]\!] \leq [\![\psi]\!]$. ■

Od velike pomoći u nastavku nam je sljedeća važna tvrdnja.

Teorem 2.1.5. *Neka su T i T' proširenja teorije ZF takva da konzistentnost od ZF povlači konzistentnost od T'. Pretpostavimo da u jeziku teorije skupova možemo definirati potpunu Booleovu algebru B takvu da vrijedi:*

(i) $T' \vdash$ *„B je potpuna Booleova algebra”.*

(ii) $T' \vdash [\![F]\!] = 1$ *za svaki aksiom teorije T.*

Tada konzistentnost od ZF povlači konzistentnost od T.

Dokaz. Pretpostavimo da ZF jest konzistentna teorija, a T nije konzistentna teorija. Tada postoji konačan skup aksioma $F_1, \ldots, F_n$ teorije T i proizvoljna rečenica G takva da vrijedi $T \vdash (F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow (G \wedge \neg G)$. Budući da za svaki aksiom F teorije T vrijedi $T' \vdash [\![F]\!] = 1$, tj. $T' \vdash F$, iz toga dobivamo $T' \vdash (F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow (G \wedge \neg G)$ i $T' \vdash [\![F_1 \wedge \ldots \wedge F_n]\!] = 1$. Sada iz leme 2.1.4 slijedi $T' \vdash [\![F_1 \wedge \ldots \wedge F_n]\!] \leq [\![G \wedge \neg G]\!]$, tj. $T' \vdash 1 \leq 0$, što znači da je T' nekonzistentna teorija, a to povlači da je i ZF nekonzistentna, suprotno pretpostavci. ■

U nastavku princip indukcije želimo provoditi ne samo po dobro uređenim relacijama, već i po dobro utemeljenim relacijama.

Definicija 2.1.6. *Neka je K klasa i R relacija na K. Za $x \in K$, klasu $ext_R(x) := \{y \in K \mid y\ R\ x\}$ zovemo* ***ekstenzijom*** *skupa x s obzirom na relaciju R. Ako je $ext_R(x)$ skup za svaki $x \in K$, onda kažemo da je relacija R* ***skupolika*** *na klasi K. Kažemo da je skupolika relacija R* ***dobro utemeljena*** *na klasi K ako svaki neprazan podskup X od K ima R-minimalni element.*

Može se dokazati[3] da ako je R dobro utemeljena relacija na klasi K, onda svaka neprazna potklasa od K ima R-minimalni element. Također, aksiom regularnosti je ekvivalentan s tvrdnjom da je relacija $\in$ dobro utemeljena.[4]

Teorem 2.1.7. *(Princip indukcije) Neka je K klasa, R dobro utemeljena relacija na K, te $\varphi(x)$ neka formula. Pretpostavimo da za svaki $x \in K$ tvrdnja $(\forall z \in ext_R(x))\, \varphi(z)$ povlači $\varphi(x)$. Tada vrijedi $\varphi(x)$ za svaki $x \in K$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da vrijedi tvrdnja teorema, ali da postoji $x \in K$ za koji ne vrijedi $\varphi(x)$. Definirajmo klasu $T = \{z \in K \mid \neg\varphi(z)\}$. Po pretpostavci je T neprazna pa postoji R-minimalan element od T, označimo ga s x_0. Za svaki $z\ R\ x_0$ vrijedi $\varphi(z)$. Pretpostavka tada povlači $\varphi(x_0)$, što je kontradikcija. ■

Pomoću aksioma regularnosti se može pokazati da ne postoji beskonačno padajući niz skupova, tj. ne postoje skupovi x_n, gdje je $n \in \omega$, takvi da vrijedi $\cdots \in x_3 \in x_2 \in x_1 \in x_0$. No vrijedi i općenitiji rezultat.

Teorem 2.1.8. *Neka je R skupolika relacija na klasi K. R je dobro utemeljena relacija na K ako i samo ako ne postoji niz skupova $\{x_n \in K \mid n \in \omega\}$ takav da vrijedi $\cdots R\ x_2\ R\ x_1\ R\ x_0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je R dobro utemeljena relacija na K i pretpostavimo da postoji niz skupova $\{x_n \in K \mid n \in \omega\}$ takvih da vrijedi $\cdots\ R\ x_2\ R\ x_1\ R\ x_0\ R\ y$. Tada skup $X = \{x_n \mid n \in \omega\}$ očito nema R-minimalan element, što je kontradikcija s činjenicom da je R dobro utemeljena.

S druge strane, pretpostavimo da R nije dobro utemeljena, tj. da postoji podskup X klase K koji nema R-minimalan element. Uzmimo proizvoljan $x_0 \in X$. Tada je skup $ext_R(x_0) \cap X$ neprazan po definiciji R-minimalnog elementa, pa uzmimo jedan takav i označimo ga s x_1. Sada imamo $x_1\ R\ x_0$. Slično kao za x_0, i za x_1 postoji $x_2 \in X$ takav da vrijedi $x_2\ R\ x_1\ R\ x_0$. Analogno nastavljamo postupak i dobivamo beskonačni padajući niz $\cdots R\ x_3\ R\ x_2\ R\ x_1\ R\ x_0$ iz K. Primijetimo da smo u dokazu ovog teorema koristili aksiom izbora. ■

Na B-proširenju definiramo relaciju E na sljedeći način: za $x, u \in V^B$ vrijedi $x\ E\ u$ ako je $x \in D(u)$. Kako bismo bili u mogućnosti provoditi indukciju po relaciji E, potrebno je provjeriti da je ona dobro utemeljena na klasi V^B.

---

[3] Vidi [20].

[4] Za detalje vidi [20].

Teorem 2.1.9. *Relacija E je skupolika, i svaki neprazan podskup od V^B ima E-minimalan element.*

Dokaz. Da bismo dokazali da je E skupolika, moramo provjeriti da je $ext_E(u) = \{x \in V^B \mid x\ E\ u\}$ skup za svaki $u \in V^B$. Uzmimo proizvoljan $u \in V^B$. Tada po definiciji relacije imamo $\{x \in V^B \mid x\ E\ u\} = \{x \in V^B \mid x \in D(u)\}$. Budući da se u nalazi na nekom nivou V^B_α, $D(u)$ je neki nivo $V^B_\beta \subseteq V^B_\alpha$, što znači da je $D(u)$ skup. Sada po aksiomu separacije slijedi da je $ext_E(u)$ skup, tj. E je skupolika relacija.

Pretpostavimo da postoji neprazan podskup od V^B koji nema E-minimalan element, tj. pretpostavimo da E nije dobro utemeljena relacija na V^B. Tada po teoremu 2.1.8 postoji beskonačan niz $\{u_n \in V^B \mid n \in \omega\}$ takav da vrijedi $\cdots E\ u_2\ E\ u_1\ E\ u_0$. Po definiciji relacije E, za dva elementa proširenja v, w vrijedi $v\ E\ w$ ako i samo ako $v \in \{v\} \in (v, w(v)) \in w$. Stoga imamo

$$\cdots \in u_2 \in \{u_2\} \in (u_2, u_1(u_2)) \in u_1 \in \{u_1\} \in (u_1, u_0(u_1)) \in u_0.$$

Dakle, postoji beskonačan padajući niz skupova s obzirom na relaciju $\in$. Iz teorema 2.1.8 sada slijedi da $\in$ nije dobro utemeljena relacija, što je kontradikcija s aksiomom regularnosti. ■

Glavna primjena indukcije po relaciji E dana je u dokazu osnovnih svojstava Booleovog preslikavanja.

Teorem 2.1.10. *Za sve $u, v, w \in V^B$, i za svaku B-formulu φ vrijedi:*

(i) $[\![u = u]\!] = 1$.

(ii) $(\forall x\ E\ u)(u(x) \leq [\![x \in u]\!])$.

(iii) $[\![u = v]\!] = [\![v = u]\!]$.

(iv) $[\![u = v]\!] \wedge [\![v = w]\!] \leq [\![u = w]\!]$.

(v) $[\![u = v]\!] \wedge [\![u \in w]\!] \leq [\![v \in w]\!]$.

(vi) $[\![v = w]\!] \wedge [\![u \in v]\!] \leq [\![u \in w]\!]$.

(vii) $[\![u = v]\!] \wedge [\![\varphi(u)]\!] \leq [\![\varphi(v)]\!]$.

Dokaz. (i) i (ii): pretpostavimo da je $[\![y = y]\!] = 1$ za svaki $y\ E\ u$. Tada za $x\ E\ u$, imamo

$$[\![x \in u]\!] = \bigvee_{yEu} (u(y) \wedge [\![x = y]\!]) \geq u(x) \wedge [\![x = x]\!] = u(x).$$

Iz toga slijedi $[\![u = u]\!] = \bigwedge_{xEu} (u(x) \Rightarrow [\![x \in u]\!]) = 1$ te $[\![x \in u]\!] \geq u(x)$ za svaki $x\ E\ u$.

(iii) Trivijalno vrijedi zbog komutativnosti od $\wedge$.

(iv) Neka je $u \in V^B$ fiksan te pretpostavimo da za svake $v, w \in V^B$ i $x\ E\ u$ vrijedi $[\![x = v]\!] \wedge [\![v = w]\!] \leq [\![x = w]\!]$. Za $x\ E\ u, y\ E\ v$ i $z\ E\ w$ imamo

$$[\![x = y]\!] \wedge [\![y = z]\!] \wedge w(z) \leq [\![x = z]\!] \wedge w(z).$$

Uzmemo li supremum po z dobijemo $[\![x = y]\!] \wedge [\![y \in w]\!] \leq [\![x \in w]\!]$. Iz definicije pak dobivamo $[\![v = w]\!] \wedge v(y) \leq [\![y \in w]\!]$ i $[\![v = w]\!] \wedge [\![x = y]\!] \wedge v(y) \leq [\![x \in w]\!]$. Uzmemo li supremum po y dobijemo $[\![x \in v]\!] \wedge [\![v = w]\!] \leq [\![x \in w]\!]$. Po definiciji imamo $[\![u = v]\!] \wedge u(x) \leq [\![x \in v]\!]$ iz čega slijedi $[\![u = v]\!] \wedge [\![v = w]\!] \wedge u(x) \leq [\![x \in w]\!]$, što je drugačije zapisano $[\![u = v]\!] \wedge [\![v = w]\!] \leq (u(x) \Rightarrow [\![x \in w]\!])$. Očito vrijedi

$$[\![u = v]\!] \wedge [\![v = w]\!] \leq \bigwedge_{xEu} (u(x) \Rightarrow [\![x \in w]\!]).$$

Primijenimo li sličnu argumentaciju na $[\![w = v]\!] \wedge [\![v = x]\!] \leq [\![w = x]\!]$, dobijemo

$$[\![w = v]\!] \wedge [\![v = u]\!] \leq \bigwedge_{zEw} (w(z) \Rightarrow [\![z \in u]\!]),$$

što zajedno s prethodnom formulom po definiciji daje tvrdnju.

(v) Neka su $u, v \in V^B$ proizvoljni i pretpostavimo da za sve $z\ E\ w$ vrijedi $[\![u = v]\!] \wedge [\![u \in z]\!] \leq [\![v \in z]\!]$. Tada iz tvrdnje (iv) slijedi

$$[\![u = v]\!] \wedge [\![u = z]\!] \wedge w(z) \leq [\![v = z]\!] \wedge w(z).$$

Uzmemo li supremum po z, dobijemo traženu tvrdnju.

(vi) Neka su $u, w \in V^B$ proizvoljni i pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za svaki $y\ E\ v$. Tada imamo $[\![v = w]\!] \wedge v(y) \leq [\![y \in w]\!]$ za $y\ E\ v$. Koristeći tvrdnju (v) dobijemo

$$[\![v = w]\!] \wedge [\![u = y]\!] \wedge v(y) \leq [\![u \in w]\!].$$

Uzmemo li sada supremum po y, dobijemo tvrdnju.

(vii) Dokazujemo indukcijom po složenosti formule. Ako je $\varphi(x)$ atomarna, tj. oblika $x \in w$, $x = w$ ili $w \in x$ za neki $w \in V^B$, tada se (vii) svodi na tvrdnje (iv), (v), odnosno (vi). Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve glavne potformule od $\varphi(x)$. Tvrdnja je trivijalna za formule oblika $\psi(x) \wedge \phi(x)$ i $\psi(x) \vee \psi(x)$. Ako je $\varphi = \exists y \psi(x, y)$, tada imamo $[\![\exists y \psi(u, y)]\!] = \bigvee_{w \in V^B} [\![\psi(u, w)]\!]$. Iz toga slijedi

$$[\![u = v]\!] \wedge \bigvee_{w\in V^B} [\![\psi(u, w)]\!] = \bigvee_{w\in V^B} ([\![u = v]\!] \wedge [\![\psi(u, w)]\!]) \leq \bigvee_{w\in V^B} [\![\psi(v, w)]\!] = [\![\exists y\, \psi(v, y)]\!],$$

što nam daje tvrdnju. ∎

U nastavku, korištenje svojstava dokazanih prethodnim teoremom nećemo posebno naglašavati.

Korolar 2.1.11. *(Ograničenost) Za svaku B-formulu φ s jednom slobodnom varijablom i $u \in V^B$ vrijedi*

(i) $[\![(\exists x \in u)\, \varphi(x)]\!] = \bigvee_{xEu} (u(x) \wedge [\![\varphi(x)]\!])$.

(ii) $[\![(\forall x \in u)\, \varphi(x)]\!] = \bigvee_{xEu} (u(x) \Rightarrow [\![\varphi(x)]\!])$.

Dokaz. Tvrdnju je dovoljno dokazati samo za egzistencijalni kvantifikator jer se univerzalni kvantifikator smatra samo pokratom.

$$\begin{aligned}
[\![(\exists x \in u)\, \varphi(x)]\!] &= [\![\exists x(x \in u \wedge \varphi(x))]\!] \\
&= \bigvee_{z\in V^B} [\![z \in u \wedge \varphi(u)]\!] \\
&= \bigvee_{z\in V^B} \bigvee_{xEu} ([\![x = z]\!] \wedge u(x) \wedge [\![\varphi(z)]\!]) \\
&= \bigvee_{xEu} (u(x) \wedge \bigvee_{z\in V^B} [\![z = x \wedge \varphi(x)]\!]) \\
&= \bigvee_{xEu} (u(x) \wedge [\![\exists z(z = x \wedge \varphi(z))]\!]) \\
&= \bigvee_{xEu} (u(x) \wedge [\![\varphi(x)]\!]),
\end{aligned}$$

što je upravo (i). ∎

Jasno je kako se svaki element proširenja nalazi u V, no na neki način vrijedi i obrnuto; kumulativnu hijerarhiju moguće je na prirodan način uložiti u njezino Booleovo proširenje. U tom smislu možemo V shvatiti kao „potklasu” od V^B.

Definicija 2.1.12. *Za svaki $x \in V$ induktivno definiramo* ***kanonsko (standardno) ime***

$$\hat{x} := \{\, (\hat{y}, 1) \mid y \in x \,\} \in V^B\,.$$

Kanonska imena su prirodni reprezentanti skupova iz V u Booleovom proširenju, stoga je prirodno očekivati da se većina osnovnih svojstava skupova, barem djelomično, reflektira u pripadnom proširenju.

Teorem 2.1.13. *(i) Za $x \in V$, $u \in V^B$ vrijedi $[\![u \in \hat{x}]\!] = \bigvee_{y \in x} [\![u = \hat{y}]\!]$.*

(ii) Za $x, y \in V$ vrijedi

$$V \models x \in y \textit{ ako i samo ako } V^B \models \hat{x} \in \hat{y}, \textit{ te}$$
$$V \models x = y \textit{ ako i samo ako } V^B \models \hat{x} = \hat{y}\,.$$

Dokaz. (i)

$$\begin{aligned} [\![u \in \hat{x}]\!] &= \bigvee_{z E \hat{x}} (\hat{x}(z) \wedge [\![u = z]\!]) \\ &= \bigvee_{y \in x} (\hat{x}(\hat{y}) \wedge [\![u = \hat{y}]\!]) \\ &= \bigvee_{y \in x} [\![u = \hat{y}]\!], \end{aligned}$$

jer je $\hat{x}(\hat{y}) = 1$ za $y \in x$.

(ii) Tvrdnju dokazujemo indukcijom po $rk(y)$. Pretpostavimo da vrijedi

$$\begin{aligned} &\forall x (x \in z \leftrightarrow [\![\hat{x} \in \hat{z}]\!] = 1), \\ &\forall x (x = z \leftrightarrow [\![\hat{x} = \hat{z}]\!] = 1), \\ &\forall x (z \in x \leftrightarrow [\![\hat{z} \in \hat{x}]\!] = 1), \end{aligned}$$

za svaki $z \in V$ takav da je $rk(z) < rk(y)$.

Iz tvrdnje (i) slijedi $[\![\hat{x} \in \hat{y}]\!] = \bigvee_{t \in y} [\![\hat{x} = \hat{t}]\!]$. Budući da je $rk(t) < rk(y)$ za $t \in y$, vrijedi $[\![\hat{x} \in \hat{y}]\!] = 1$ ako i samo ako je $[\![\hat{t} = \hat{x}]\!] = 1$ za neki $t \in y$. Naime, ako je $[\![\hat{x} \in \hat{y}]\!] = 1$, općenito vrijedi $[\![\hat{t} = \hat{x}]\!] \leq 1$ za neki $t \in y$. Pretpostavimo li da za svaki $t \in y$ vrijedi $[\![\hat{t} = \hat{x}]\!] < 1$, zbog činjenice da je $t \in y$, tj. $rk(t) < rk(y)$, i pretpostavke indukcije, slijedi da za svaki skup x vrijedi $t \neq x$, što je očito kontradikcija.

Sada imamo da vrijedi $V^B \models \hat{x} \in \hat{y}$ ako i samo ako je $[\![t = x]\!] = 1$ za neki $t \in y$, što po pretpostavci indukcije vrijedi ako i samo ako je $x \in y$.

Za jednakost imamo $[\![\hat{x} = \hat{y}]\!] = \bigwedge_{t \in x} [\![\hat{t} \in \hat{y}]\!] \wedge \bigwedge_{s \in y} [\![\hat{s} \in \hat{x}]\!]$, a zbog $s \in y$, vrijedi $rk(s) < rk(y)$. Po pretpostavci indukcije vrijedi $V^B \models \hat{x} = \hat{y}$ ako i samo ako je $t \in y$ za sve $t \in x$ i $s \in x$ za sve $s \in y$. Sada iz aksioma ekstenzionalnosti slijedi da je $x = y$.

Za treću tvrdnju imamo $[\![\hat{y} \in \hat{x}]\!] = \bigvee_{t \in x} [\![\hat{t} = \hat{y}]\!]$. Stoga $V^B \models \hat{y} \in \hat{x}$ ako i samo ako $V^B \models \hat{y} = \hat{t}$ za neki $t \in x$. Iz prethodno dokazanog (slučaj jednakosti) vrijedi $V \models y = t$ za neki $t \in x$, tj. vrijedi $y \in x$. ■

Ukoliko umjesto proizvoljne potpune Booleove algebre promatramo jednostavno 2, dobivamo relativno precizne rezultate o Booleovom proširenju.

Teorem 2.1.14. *(i)* $x \mapsto \hat{x}$ *je injekcija s* V *u* V^2.

(ii) Za svaki $u \in V^2$ *postoji jedinstveni* $x \in V$ *tako da* $V^2 \models u = \hat{x}$.

(iii) Neka je $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ *formula i* $x_1, \dots, x_n \in V$. *Tada vrijedi* $V \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ *ako i samo ako* $V^2 \models \varphi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$.

Dokaz. (*i*) slijedi direktno iz tvrdnje (*ii*) teorema 2.1.13.

(*ii*) dokazujemo indukcijom po relaciji E. Neka je $u \in V^2$ proizvoljan i pretpostavimo da za svaki $z\ E\ u$ postoji $y \in V$ takav da vrijedi $[\![z = \hat{y}]\!] = 1$. Definirajmo

$$x := \{y \in V \mid (\exists z\ E\ u)([\![\hat{y} = z]\!] = 1 \land u(z) = 1)\}.$$

Za $y \in x$ vrijedi $[\![\hat{y} \in u]\!] = \bigvee_{zEu} (u(z) \land [\![z = \hat{y}]\!]) = 1$, a za $z \in S(u)$ imamo $u(z) \leq [\![z \in \hat{x}]\!] = \bigvee_{y \in x} [\![z = \hat{y}]\!]$. Sve zajedno daje

$$[\![u = \hat{x}]\!] = \bigwedge_{zEu} (u(z) \Rightarrow [\![z \in \hat{x}]\!]) \land \bigwedge_{y \in x} [\![\hat{y} \in u]\!] \geq 1\,.$$

(*iii*) dokazujemo indukcijom po složenosti formule. Ako je φ atomarna formula, tada iz (*ii*) slijedi tvrdnja. Neka je $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ proizvoljna formula, $x_1, \dots, x_n \in V$ i pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve glavne potformule od $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. Za konjunkciju i disjunkciju je tvrdnja trivijalna, stoga tvrdnju trebamo dokazati za $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \exists y \psi(y, x_1, \dots, x_n)$.

Pretpostavimo da vrijedi $V \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$. Tada postoji $z \in V$ takav da vrijedi $V \models \psi(z, x_1, \dots, x_n)$, a po pretpostavci indukcije slijedi $V^2 \models \psi(\hat{z}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$, tj.

$$[\![\varphi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)]\!] = \bigvee_{u \in V^2} [\![\psi(u, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)]\!] = 1.$$

Pretpostavimo da vrijedi $V^2 \models \varphi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$. Tada imamo $\bigvee_{u \in V^2} [\![\psi(u, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)]\!] = 1$, tj. $[\![\psi(u, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)]\!] = 1$ za neki $u \in V^2$. Po tvrdnji (*iv*) postoji $x \in V$ takav da je $[\![\hat{x} = u]\!]$. Sada imamo

$$1 = [\![\psi(u, \hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_n)]\!] \wedge [\![\hat{x} = u]\!] \leq [\![\psi(\hat{x}, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)]\!],$$

a po pretpostavci indukcije onda vrijedi $V \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$. ∎

Prethodnim teoremom dokazali smo da su V i V^2 izomorfne hijerarhije i time zapravo opravdali terminologiju „proširenje", jer je V^B proširenje od V^2, pa ga možemo smatrati proširenjem od V.

Koristeći tvrdnju (*iii*) teorema 2.1.14, moguće je generalizirati rezultate te tvdnje na proizvoljne potpune Booleove algebre ako se ograničimo na Σ_0 formule.

Teorem 2.1.15. *Neka je $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ Σ_0 formula i $x_1, \ldots, x_n \in V$. Tada za svaku potpunu Booleovu algebru B vrijedi $V \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ako i samo ako $V^B \models \varphi(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$.*

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po izgradnji Σ_0 formule. Uzmimo proizvoljnu potpunu Booleovu algebru B. Očito je tvrdnja istinita za atomarne formule po teoremu 2.1.13. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za Σ_0 formule $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ i $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, pri čemu su $x_1, \ldots, x_n \in V$. Tada očito tvrdnja vrijedi za negaciju, konjunkciju i disjunkciju tih formula. Nadalje, neka je $\psi(z, z_1, \ldots, z_n)$ Σ_0 formula s $n + 1$ slobodnih varijabli i pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za tu formulu. Dokažimo da tvrdnja vrijedi za formuLu $(\exists z \in y)\, \psi(z, x_1, \ldots, x_n)$, gdje $x_1, \ldots, x_n, y$ valuiramo objektima iz V (dovoljno je tvrdnju dokazati samo za egzistencijalni ograničeni kvantifikator).

Ako vrijedi $V \models (\exists z \in y)\, \psi(z, x_1, \ldots, x_n)$, onda postoji neki $x \in y$ takav da vrijedi $V \models \psi(x, x_1, \ldots, x_n)$. Po pretpostavci sada dobivamo $V^B \models \psi(\hat{x}, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$, tj
$V^B \models (\exists z \in \hat{y})\, \psi(z, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$.

S druge strane, ako vrijedi $V^B \models (\exists z \in \hat{y})\, \psi(\hat{x}, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$, onda imamo

$$1 = [\![(\exists z \in \hat{y})\, \psi(z, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)]\!] = \bigvee_{zE\hat{y}} [\![\psi(\hat{x}, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)]\!] = \bigvee_{x \in y} [\![\psi(\hat{x}, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)]\!].$$

Tvrdimo da postoji $x \in y$ takav da je $1 = [\![\psi(\hat{x}, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)]\!]$. Pretpostavimo suprotno, tj. da za svaki $x \in y$ vrijedi $[\![\psi(\hat{x}, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)]\!] < 1$. Tada po teoremu 2.1.14 (*iii*) imamo $[\![\psi(\hat{x}, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)]\!]^2 < 1$, što daje $[\![\psi(\hat{x}, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)]\!]^2 = 0$. Tada je specijalno $-[\![\psi(\hat{x}, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)]\!] = 1$. Sve skupa sada imamo

$$0 = -\bigvee_{x \in y} [\![\psi(\hat{x}, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)]\!] = \bigwedge_{x \in y} -[\![\psi(\hat{x}, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)]\!] = 1.$$

Dakle, postoji $x \in y$ takav da je $[\![\psi(\hat{x}, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)]\!] = 1$. Iz toga pak slijedi da postoji $x \in y$ takav da vrijedi $V \models \psi(x, x_1, \ldots, x_n)$, tj. $V \models (\exists z \in y)\, \psi(z, x_1, \ldots, x_n)$. ∎

Ukoliko promatramo Σ_1 formule, jedna implikacija iz prethodnog teorema ostaje sačuvana, dok druga ne mora nužno vrijediti.

Teorem 2.1.16. *Neka je $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ Σ_1 formula i $x_1, \dots, x_n \in V$. Tada vrijedi:*

$$\text{ako } V \models \varphi(x_1, \dots, x_n), \text{ onda } V^B \models \varphi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n).$$

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po izgradnji Σ_1 formule. Za atomarne formule tvrdnja očito slijedi iz teorema 2.1.13. Neka je $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ proizvoljna formula i pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve glavne potformule od $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. Za konjunkciju i disjunkciju tvrdnja odmah slijedi iz pretpostavke indukcije, stoga je dovoljno dokazati tvrdnju za slučaj $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \exists x \psi(x, x_1, \dots, x_n)$.

Pretpostavimo da vrijedi $V \models \exists x \psi(x, x_1, \dots, x_n)$. Tada postoji neki $z \in V$ takav da vrijedi $V \models \psi(z, x_1, \dots, x_n)$. Iz pretpostavke indukcije slijedi $V^B \models \psi(\hat{z}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$. Dakle, postoji element $u \in V^B$ takav da je $[\![\psi(\hat{z}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)]\!] = 1$. Stoga imamo

$$[\![\exists x \psi(x, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)]\!] = \bigvee_{u \in V^B} [\![\psi(u, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)]\!] = 1,$$

iz čega slijedi tvrdnja. ∎

Sada smo napokon u mogućnosti dokazati da su u Booleovom proširenju istiniti aksiomi teorije ZF. Dokaz istinitosti aksioma izbora odlažemo do zadnje točke poglavlja.

Lema 2.1.17. *Aksiom ekstenzionalnosti, shema aksioma spearacije i shema aksioma zamjene vrijede u V^B.*

Dokaz. Aksiom ekstenzionalnosti. Uzmimo proizvoljne x, y iz V^B i označimo s A formulu $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y$. Znamo da vrijedi

$$\begin{aligned}\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) &\equiv \forall z(z \in x \to z \in y) \land \forall z(z \in y \to z \in x)\\ &\equiv \forall (z \in x)(z \in y) \land \forall (z \in y)(z \in x).\end{aligned}$$

Stoga imamo

$$\begin{aligned}[\![A]\!] &= ([\![\forall (z \in x)(z \in y)]\!] \wedge [\![\forall (z \in y)(z \in x)]\!]) \Rightarrow [\![x = y]\!]\\ &= \left(\bigwedge_{zEx} (x(z) \Rightarrow [\![z \in y]\!]) \wedge \bigwedge_{zEy} (y(z) \Rightarrow [\![z \in x]\!])\right) \Rightarrow [\![x = y]\!].\end{aligned}$$

Sada iz definicije $[\![x = y]\!]$ slijedi tvrdnja.

Shema aksioma separacije. Neka je $x \in V^B$ proizvoljan i φ proizvoljna B-formula s jednom slobodnom varijablom. Definiramo y tako da vrijedi $D(y) := D(x)$, te $y(z) := x(z) \wedge [\![\varphi(z)]\!]$ za svaki $z \; E \; y$. Tada imamo

$$[\![\forall z(z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z))]\!] = [\![\forall(z \in y)(z \in x \wedge \varphi(z))]\!] \wedge [\![\forall(z \in x)(\varphi(z) \to z \in y)]\!].$$

Za prvi konjunkt imamo

$$\begin{aligned}[\![\forall z \in y\,(z \in x \wedge \varphi(z))]\!] &= \bigwedge_{zEy}(y(z) \to [\![z \in x \wedge \varphi(z)]\!]) \\ &= \bigwedge_{zEy}((x(z) \wedge [\![\varphi(z)]\!]) \Rightarrow (z \in x \wedge [\![\varphi(z)]\!])) \geq 1.\end{aligned}$$

Analogno i za drugi konjunkt dobijemo vrijednost 1, pa slijedi tvrdnja.

Shema aksioma zamjene. Neka je $\varphi(x, y)$ proizvoljna B-formula s dvije slobodne varijable. Pretpostavimo da $\varphi(x, y)$ ima funkcijsko svojstvo, tj. da vrijedi $\forall x \exists! y \varphi(x, y)$. Tada imamo

$$\begin{aligned}\forall x \exists y \forall z((\exists t \in x)\varphi(t, z) \to z \in y) &\equiv \forall x \exists y \forall z((\forall t \in x)\neg\varphi(t, z) \vee z \in y) \\ &\equiv \forall x \exists y(\forall t \in x)\forall z(\varphi(t, z) \to z \in y) \\ &\equiv \forall x \exists y(\forall t \in x)(\exists z \in y)\varphi(t, z) \qquad (2.1)\end{aligned}$$

Zadnja ekvivalencija vrijedi zato što $\varphi(x, y)$ ima funkcijsko svojstvo. Uz tu pretpostavku, dovoljno je dokazati $V^B \models \forall x \exists y \forall z((\exists t \in x)\varphi(t, z) \to z \in y)$, jer se suprotni smjer dobiva primjenom sheme aksioma separacije. Naime, ako znamo da gornja formula vrijedi u proširenju, za svaki x definiramo $y' := \{z \in y \mid (\exists t \in x)\varphi(t, x)\}$. Time smo dokazali $V^B \models \forall x \exists y \forall z(z \in y \to (\exists t \in x)\varphi(t, z))$ jer shema aksioma separacije vrijedi u proširenju.

Preostaje dokazati $V^B \models \forall x \exists y \forall z((\exists t \in x)\varphi(t, z) \to z \in y)$, što je zbog formule (2.1) ekvivaletno $V^B \models \forall x \exists y(\forall t \in x)(\exists z \in y)\varphi(t, z)$, a za prethodnu tvrdnju je pak dovoljno dokazati sljedeću tvrdnju: $V^B \models \forall x((\forall t \in x)\exists z \varphi(t, y)) \to \exists y(\forall t \in x)(\exists z \in y)\varphi(t, z))$.

Neka je $x \in V^B$ proizvoljan i $t\ E\ x$ fiksan. Definirajmo skup $K := \{[\![\varphi(t, z)]\!] \mid z \in V^B\} \subseteq B$. Po shemi aksioma zamjene za skupove postoji ordinal $\alpha(t)$ takav da vrijedi $K := \{[\![\varphi(t, z)]\!] \mid z \in V^B_{\alpha(t)}\}$. Stavimo $\alpha = \sup\{\alpha(t) \mid t\ E\ x\}$ i definirajmo $y = V^B_\alpha \times \{1\}$. Sada imamo

$$\begin{aligned}[\![(\forall t \in x)\exists z\,\varphi(t, z)]\!] &= \bigwedge_{tEx} u(t) \Rightarrow (\bigvee_{z \in V^B} [\![\varphi(x, y)]\!]) \\ &= \bigwedge_{tEx} u(t) \Rightarrow (\bigvee_{z \in V^B_{\alpha(t)}} [\![\varphi(t, z)]\!]) \\ &\leq \bigwedge_{tEx} u(t) \Rightarrow (\bigvee_{z \in V^B_\alpha} [\![\varphi(t, z)]\!]) \\ &= \bigwedge_{tEx} u(t) \Rightarrow [\![(\exists z \in y)\,\varphi(t, z)]\!] = [\![(\forall t \in x)(\exists z \in y)\,\varphi(t, z)]\!].\end{aligned}$$

Budući da $\varphi(x,y)$ ima funkcijsko svojstvo, slijedi

$$[\![(\forall t \in x)\exists z \varphi(t,z)]\!] = [\![(\forall t \in x)(\exists z \in y)\varphi(t,z)]\!] = 1,$$

što daje tvrdnju. ∎

Lema 2.1.18. *Aksiomi unije, partitivnog skupa i beskonačnosti vrijede u V^B.*

Dokaz. Aksiom unije. Neka je $x \in V^B$ proizvoljan. Definirajmo y tako da vrijedi $D(y) := \bigcup_{tEx} D(t)$ i $y(z) := [\![(\exists t \in x)\,(z \in t)]\!]$ za svaki $z\ E\ x$. Trebamo pokazati da vrijedi $[\![y = \bigcup x]\!] = 1$. Za jednu inkluziju imamo

$$[\![y \subseteq \cup x]\!] = [\![(\forall z \in y)(\exists t \in x)(z \in t)]\!] = \bigwedge_{zEy} y(z) \Rightarrow [\![(\exists t \in x)\,(z \in t)]\!] = 1.$$

Nadalje, uzmimo $t\ E\ x$ i $z\ E\ t$ proizvoljne. Tada vrijedi

$$x(t) \wedge t(z) \leq x(t) \wedge [\![z \in t]\!] \leq \bigvee_{tEx} (x(t) \wedge [\![z \in t]\!]) = [\![(\exists t \in x)\,(z \in t)]\!] = y(z) \leq [\![z \in y]\!].$$

Druga inkluzija lako slijedi iz prethodne formule,

$$\begin{aligned}
[\![\cup x \subseteq y]\!] &= [\![(\forall t \in x)(\forall z \in t)\,(z \in y)]\!] \\
&= \bigwedge_{tEx} (x(t) \Rightarrow [\![(\forall z \in t)\,(z \in y)]\!]) \\
&= \bigwedge_{tEx} (x(t) \Rightarrow (\bigwedge_{zEt} (t(z) \Rightarrow [\![z \in y]\!])) \\
&= \bigwedge_{tEx} \bigwedge_{zEt} (x(t) \Rightarrow (t(z) \Rightarrow [\![z \in y]\!])) \\
&= \bigwedge_{tEx} \bigwedge_{zEt} -x(t) \vee -t(z) \vee [\![z \in y]\!] \\
&= \bigwedge_{tEx} \bigwedge_{zEt} -(x(t) \wedge t(z)) \vee [\![z \in y]\!] \\
&\geq \bigwedge_{tEx} \bigwedge_{zEt} -[\![z \in y]\!] \vee [\![z \in y]\!] = 1.
\end{aligned}$$

Aksiom partitivnog skupa. Neka je $x \in V^B$ proizvoljan. Definirajmo y tako da vrijedi $D(y) := B^{D(x)}$ te $y(z) := [\![z \subseteq x]\!]$ za svaki $z\ E\ y$. Lako slijedi jedan smjer,

$$[\![(\forall z \in y)\,(z \subseteq x)]\!] = \bigwedge_{zEy}(y(z) \Rightarrow [\![z \subseteq x]\!]) = \bigwedge_{zEy}(y(z) \Rightarrow y(z)) = 1.$$

Za dokaz drugog smjera, za proizvoljni fiksni $z \in V^B$ definirajmo z' tako da vrijedi $D(z') := D(x)$ i $z'(t) := [\![t \in z]\!]$ za $t\ E\ z'$. Primijetimo da vrijedi $z'\ E\ y$. Dokažimo da vrijedi $[\![z \subseteq x \to z = z']\!] = 1$ i $[\![z \subseteq x \to z' \in y]\!] = 1$.

Uzmimo $w \in V^B$ proizvoljan. Tada imamo

$$[\![w \in z']\!] = \bigvee_{tEx}(z'(t) \wedge [\![t = w]\!]) = \bigvee_{tEx}([\![t \in z]\!] \wedge [\![t = w]\!]) \leq [\![w \in z]\!].$$

Iz toga slijedi

$$[\![z' \subseteq z]\!] = [\![(\forall w \in z')\,(w \in z)]\!] = \bigwedge_{wEz'}(z'(w) \Rightarrow [\![w \in z]\!]) = 1.$$

Nadalje, za proizvoljan $w \in V^B$ imamo

$$\begin{aligned}[\![w \in z \wedge w \in x]\!] &= \bigvee_{tEx}(x(t) \wedge [\![w = t]\!] \wedge [\![w \in x]\!]) \leq \bigvee_{tEx}([\![w = t]\!] \wedge [\![w \in z]\!]) \\ &= \bigvee_{tEx}([\![w = t]\!] \wedge z'(t)) = [\![w \in z']\!],\end{aligned}$$

a to povlači da vrijedi $[\![x \cap z \subseteq z']\!] = 1$. Stoga imamo

$$[\![z \subseteq x]\!] \leq [\![x \cap z \subseteq z' \wedge z' \subseteq z \wedge z \subseteq x]\!] \leq [\![z = z']\!].$$

Iz prethodne formule jednostavno slijedi $[\![z \subseteq x \to z = z']\!] = 1$.

Budući da vrijedi

$$\begin{aligned}[\![z \subseteq x]\!] &= [\![(\forall w \in z)\,(w \in x)]\!] = \bigwedge_{wEz}(z(w) \Rightarrow [\![w \in x]\!]) \\ &\leq \bigwedge_{wEz'}(z'(w) \Rightarrow [\![w \in x]\!]) \\ &= [\![(\forall w \in z')\,(w \in x)]\!] \\ &= [\![z' \subseteq z]\!] = y(z') \leq [\![z' \subseteq y]\!],\end{aligned}$$

odmah iz toga slijedi $[\![z \subseteq x \to z' \in y]\!] = 1$.

Sada se lako dokazuje drugi smjer:

$$\begin{aligned}
[\![\forall z(z \subseteq x \to z \in y)]\!] &= \bigwedge_{z \in V^B} -[\![z \subseteq x]\!] \vee [\![z \in y]\!] \\
&\geq \bigwedge_{z \in V^B} -[\![z \subseteq x]\!] \vee ([\![z = z']\!] \wedge [\![z' \in y]\!]) \\
&= \bigwedge_{z \in V^B} (-[\![z \subseteq x]\!] \vee [\![z = z']\!]) \wedge (-[\![z \subseteq x]\!] \vee [\![z' \in y]\!]) = 1.
\end{aligned}$$

Aksiom beskonačnosti. Formula $\emptyset \in x \wedge (\forall y \in x)\,(y \cup \{y\} \in x))$ je očito Σ_0 formula i istinita je za $x = \omega$. Sada iz teorema 2.1.15 slijedi da je prethodna formula istinita u V^B za $x = \hat{\omega}$, tj. vrijedi aksiom beskonačnosti. ■

Budući da u V^B vrijedi aksiom partitivnog skupa, za svaki $x \in V^B$ možemo definirati njegov **Booleov partitivni skup** $\mathscr{P}^B(x)$ kao element $y \in V^B$ za koji vrijedi $D(y) = B^{D(x)}$ i $y(z) = [\![z \subseteq x]\!]$ za svaki $z \; E \; y$. Posebna oznaka je, kao i u „običnom" V, opravdana činjenicom da u V^B vrijedi aksiom ekstenzionalnosti.

Lema 2.1.19. *Aksiom para i aksiom regularnosti vrijede u V^B.*

Dokaz. Aksiom para. Neka su $x, y \in V^B$ proizvoljni, te definirajmo u tako da vrijedi $D(u) := D(x) \cup D(y)$ i $u(z) := [\![z = x \vee z = y]\!]$ za $z \; E \; u$. Tada imamo

$$[\![u \subseteq \{x, y\}]\!] = [\![(\forall z \in u)\,(z = x \vee z = y)]\!] = \bigwedge_{zEu} (u(z) \Rightarrow [\![z = x \vee z = y]\!]) = 1.$$

Nadalje, $[\![\{x, y\} \subseteq u]\!] = [\![\forall z((z = x \vee z = y) \to z \in u)]\!] = \bigwedge_{z \in V^B} ([\![z = x \vee z = y]\!] \Rightarrow [\![z \in u]\!]) \geq \bigwedge_{z \in V^B} ([\![z = x \vee z = y]\!] \Rightarrow u(z)) = 1.$

Aksiom regularnosti. Uzmimo proizvoljan $x \in V^B$ i pokažimo da vrijedi $a := [\![x \neq \emptyset \wedge (\forall y \in x)\,(y \cap x \neq \emptyset)]\!] = 0$. Pretpostavimo suprotno, tj. da vrijedi $a \neq 0$.

Očito imamo $a \leq [\![\exists u\,(u \in x)]\!]$, stoga postoji $y \in V^B$ takav da vrijedi $[\![y \in x]\!] \wedge a \neq 0$. Naime, kad bi za svaki $y \in V^B$ vrijedilo $[\![y \in x]\!] \wedge a = 0$, onda bismo imali

$$a = a \wedge \bigvee_{u \in V^B} [\![u \in x]\!] = \bigvee_{u \in V^B} (a \wedge [\![u \in x]\!]) = 0,$$

što je kontradikcija s pretpostavkom. Označimo s y_0 element od x s najmanjim Booleovim rangom, tj. ako vrijedi $[\![y \in x]\!] \wedge a \neq 0$ za neki $y \in V^B$, onda je $rk_B(y_0) \leq rk_B(y)$.

Nadalje, za proizvoljan $y \in V^B$ očito vrijedi

$$[\![y \in x]\!] \wedge a \leq [\![y \cap x \neq \emptyset]\!] = [\![\exists z(z \in x \cap y)]\!] = \bigvee_{zEy}(y(z) \wedge [\![z \in x]\!]).$$

Specijalno, za y_0 imamo $0 \neq [\![z \in x]\!] \wedge [\![y_0 \in x]\!] \wedge a \leq [\![z \in x]\!] \wedge a$, gdje je $z \in D(y_0)$. Iz toga slijedi $rk_B(z) < rk_B(y_0)$, što je kontradikcija s izborom y_0.

Pretpostavka $a \neq 0$ je pogrešna, stoga vrijedi $a = 0$, tj $-a = 1$, što znači da aksiom regularnosti vrijedi u V^B. ∎

Na kraju možemo zaključiti kako je, za svaku potpunu Booleovu algebru, Booleovo proširenje model teorije ZF.

2.2 Ordinalni i kardinalni brojevi u proširenjima

Za element proširenja u kažemo da je **ordinalni broj** u proširenju ako vrijedi $[\![On(u)]\!] = 1$. Ako je α ordinal, tada njegovo standardno ime $\hat{\alpha}$ nazivamo **standardni ordinal**. Taj naziv opravdan je sljedećim teoremom.

Teorem 2.2.1. *Za svaki ordinal $\alpha \in On$ vrijedi $[\![On(\hat{\alpha})]\!] = 1$.*

Dokaz. Budući da imamo

$$On(\alpha) \equiv (\forall x \in \alpha)(\forall y \in x)(y \in \alpha) \wedge (\forall x \in \alpha)(\forall y \in \alpha)(x \in y \vee y \in x \vee x = y),$$

tj. $On(\alpha)$ je Σ_0 formula, po teoremu 2.1.15 slijedi tvrdnja teorema. ∎

Element proširenja je to bliže svojstvu „biti ordinal", što je bliže svojstvu „biti jednak standardnom ordinalu". Drugim riječima, ordinalnost u proširenju se aproksimira standardnim ordinalima.

Teorem 2.2.2. *Neka je $u \in V^B$. Tada vrijedi $[\![On(u)]\!] = \bigvee_{\alpha \in On} [\![u = \hat{\alpha}]\!]$.*

Dokaz. Iz prethodnog teorema slijedi da je $[\![On(\hat{\alpha})]\!] = 1$, stoga imamo $[\![u = \hat{\alpha}]\!] = [\![u = \hat{\alpha}]\!] \wedge [\![On(\hat{\alpha})]\!] \leq [\![On(u)]\!]$, tj. $\bigvee_{\alpha \in On} [\![u = \hat{\alpha}]\!] \leq On(u)$.

Iz teorema 2.1.13 za $\alpha \neq \beta$ dobivamo da vrijedi $[\![\hat{\alpha} = \hat{\beta}]\!] = 0$, što povlači da je za $x\ E\ u$ preslikavanje $\alpha \mapsto [\![x = \hat{\alpha}]\!]$ injekcija sa $D_x = \{\alpha \mid [\![x = \hat{\alpha}]\!] > 0\}$ u B. Naime, pretpostavimo da je $\alpha \neq \beta$ i $[\![x = \hat{\alpha}]\!] = [\![x = \hat{\beta}]\!]$. Tada bismo imali $0 = [\![\hat{\alpha} = \hat{\beta}]\!] \geq [\![\hat{\alpha} = x]\!] \wedge [\![x = \hat{\beta}]\!] = [\![x = \hat{\alpha}]\!] > 0$. Primijetimo da iz upravo dokazane injektivnosti i aksioma zamjene slijedi da je D_x skup, budući da svakom $b \in B$ odgovara najviše jedan ordinal α takav da je $[\![x = \hat{\alpha}]\!] = b$.

Definirajmo skup $D := \bigcup_{xEu} D_x$. Za ordinal α_0 veći od svih ordinala iz D vrijedi $[\![x = \hat{\alpha}_0]\!] = 0$ za svaki $x\ E\ u$. Stoga imamo

$$[\![\hat{\alpha}_0 \in u]\!] = \bigvee_{xEu} (u(x) \wedge [\![\hat{\alpha}_0 = x]\!]) = 0.$$

Iz činjenice da su ordinalni brojevi linearno uređeni relacijom $\in$, slijedi

$$[\![On(u)]\!] \leq [\![u \in \hat{\alpha}_0]\!] \vee [\![u = \hat{\alpha}_0]\!] \vee [\![\hat{\alpha}_0 \in u]\!].$$

Iz prethodnog sada imamo

$$[\![On(u)]\!] \leq [\![u \in \hat{\alpha}_0]\!] \vee [\![u = \hat{\alpha}_0]\!] \leq \bigvee_{\alpha \in On} [\![u = \hat{\alpha}]\!],$$

što daje tvrdnju. ■

Proučavanje kardinala u proširenjima je ponešto kompliciranije, stoga ih nije moguće u potpunosti karakterizirati poput ordinala u dva teorema.

Teorem 2.2.3. *Neka su x i y skupovi. Ako je $k(x) = k(y)$, onda vrijedi $V^B \models k(\hat{x}) = k(\hat{y})$.*

Dokaz. Budući da je $(k(x) = k(y)) = \exists f$„$f$ je bijekcija između x i y”, a formula pod kvantifikatorom je Σ_0, slijedi da je $k(x) = k(y)$ Σ_1 formula, a onda tvrdnja slijedi po teoremu 2.1.16. ■

Možemo zaključiti da jednake kardinalnosti ostaju jednake prelaskom u prošireni model. Kažemo da je ordinal u iz proširenja **kardinal** ako vrijedi $[\![Card(u)]\!] = 1$.

Teorem 2.2.4. *(i) $V^B \models \hat{\aleph}_0 = \aleph_0$.*

(ii) Za svaki ordinal α vrijedi $V^B \models \hat{\aleph}_\alpha \leq \aleph_{\hat{\alpha}}$.

Dokaz. (i) $x = \aleph_0$ je Σ_0 formula koja vrijedi samo valuiramo li x kao $\aleph_0$, stoga iz teorema 2.1.15 slijedi da je $[\![\hat{\aleph}_0 = \aleph_0]\!] = 1$.

(ii) Indukcijom po α. Za $\alpha = 0$ tvrdnja slijedi iz (i). Neka je α proizvoljan ordinal, te pretpostavimo da za svaki $\beta \in \alpha$ vrijedi $V^B \models \hat{\aleph}_\beta \leq \aleph_{\hat{\beta}}$.

Za ordinal λ takav da je $\aleph_0 \leq \lambda < \aleph_\alpha$ vrijedi $k(\lambda) = \aleph_\beta$ za neki $\beta \in \alpha$. Tada iz prethodnog teorema slijedi $V^B \models k(\hat{\lambda}) = k(\hat{\aleph}_\beta)$, a zbog pretpostavke indukcije imamo $V^B \models k(\hat{\lambda}) \leq \aleph_{\hat{\beta}}$, tj. $V^B \models k(\hat{\lambda}) < \aleph_{\hat{\alpha}}$. Na kraju imamo $V^B \models \hat{\lambda} < \aleph_{\hat{\alpha}}$, jer kada bi vrijedilo $V^B \models \hat{\lambda} \geq \aleph_{\hat{\alpha}}$, onda bi bilo $V^B \models k(\hat{\lambda}) \geq \aleph_{\hat{\alpha}}$, što je kontradikcija s $k(\hat{\lambda}) < \hat{\aleph}_\alpha$.

S druge strane, za $\lambda < \aleph_0$ imamo $V^B \models \hat{\lambda} < \hat{\aleph}_0$, tj. $V^B \models \hat{\lambda} < \hat{\aleph}_\alpha$. Sve zajedno, ako je $\lambda < \aleph_\alpha$, onda vrijedi $V^B \models \hat{\lambda} < \aleph_{\hat{\alpha}}$. Dakle, za svaki ordinal μ vrijedi

$$[\![\mu \in \hat{\aleph}_\alpha]\!] = \bigvee_{\lambda \in \aleph_\alpha} [\![\mu = \hat{\lambda}]\!] = \bigvee_{\lambda \in \aleph_\alpha} ([\![\mu = \hat{\lambda}]\!] \wedge [\![\hat{\lambda} < \aleph_{\hat{\alpha}}]\!]) \leq [\![\mu < \aleph_{\hat{\alpha}}]\!].$$

Na kraju imamo $[\![(\forall\lambda \in \hat{\aleph}_\alpha)(\lambda \in \aleph_{\hat{\alpha}})]\!] = 1$, a onda zajedno s prvim dijelom dokaza imamo $V^B \models \hat{\aleph}_\alpha \leq \aleph_{\hat{\alpha}}$. ■

Kod različitih modela teorije skupova, vrlo je bitno istražiti njihove kardinalne brojeve. Prvenstveno se želi pomoću kardinala u jednom modelu zaključiti nešto o kardinalima u drugom.

Teorem 2.2.5. *(i) $V^B \models Card(\hat{\alpha})$ za svaki ordinal $\alpha \leq \omega$.*

(ii) Neka je α ordinal. Ako vrijedi $V^B \models Card(\hat{\alpha})$, onda vrijedi $V \models Card(\alpha)$.

Dokaz. (i) Tvrdnja je dokazana u teoremu 2.2.4 za $\alpha = \omega$. Budući da je formula $(\forall\alpha \in \omega)\,Card(\alpha)$ teorem od ZF, a svi aksiomi teorije ZF vrijede u Booleovskom proširenju, slijedi $V^B \models (\forall\alpha \in \omega)\,Card(\alpha)$. Iz teorema 2.2.4 sada imamo da vrijedi $V^B \models (\forall\alpha \in \hat{\omega})\,Card(\alpha)$. Dakle imamo $\bigwedge_{\alpha\in\omega}[\![Card(\hat{\alpha})]\!] = 1$.

(ii) Za ordinal α vrijedi $\neg Card(\alpha) \equiv (\exists\beta \in \alpha)\,\exists f$ „f je bijekcija između α i β”, što je Σ_1 formula. Sada iz teorema 2.1.16, obratom po kontrapoziciji, slijedi tvrdnja. ■

Već je spomenuto da nam za ljepša svojstva treba nešto jača pretpostavka na Booleovu algebru.

Teorem 2.2.6. *Neka je B Booleova algebra koja zadovoljava Suslinovo svojstvo, $\alpha \in On$ te x, y skupovi. Tada vrijedi:*

(i) $Card(\alpha)$ povlači $V^B \models Card(\hat{\alpha})$.

(ii) $V^B \models \hat{\aleph}_\alpha = \aleph_{\hat{\alpha}}$.

(iii) $k(x) = k(y)$ ako i samo ako $V^{(B)} \models k(\hat{x}) = k(\hat{y})$.

Dokaz. (i) Neka je α kardinal. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\alpha > \omega$ jer tvrdnja za $\alpha \leq \omega$ slijedi iz teorema 2.2.5. Dovoljno je dokazati da za svaki element $f \in V^B$ i za svaki ordinal $\beta \in \alpha$ vrijedi $[\![func(f) \wedge D(f) = \hat{\beta} \wedge \mathrm{Im}(f) = \hat{\alpha}]\!] = 0$. To znači da ne postoji surjekcija s $\hat{\beta}$ na $\hat{\alpha}$, a onda specijalno ne postoji ni bijekcija između njih.

Pretpostavimo suprotno, da postoji $f \in V^B$ i $\beta \in \alpha$ takav da je $a := [\![func(f) \wedge D(f) = \hat{\beta} \wedge \mathrm{Im}(f) = \hat{\alpha}]\!] \neq 0$. Trivijalno vrijedi $0 \neq a \leq \bigwedge_{\lambda\in\alpha}\bigvee_{\mu\in\beta}[\![f(\hat{\mu}) = \hat{\lambda}]\!] \wedge a$. Iz toga slijedi da za svaki $\lambda < \alpha$ postoji $\mu_\lambda \in \beta$. takav da je $[\![f(\hat{\mu}_\lambda) = \hat{\lambda}]\!] \wedge a \neq 0$. Po pretpostavci je α neprebrojiv i $\beta \in \alpha$ pa postoji neki $\gamma \in \beta$ takav da je skup $A := \{\lambda < \alpha \mid \mu_\lambda = \gamma\}$ neprebrojiv. Tada je skup $\{[\![f(\hat{\gamma}) = \hat{\lambda}]\!] \wedge a \mid \lambda \in A\}$ očito neprebrojiv, ali je i antilanac. Zaista, za sve $\lambda_1, \lambda_2 \in A$ takve da je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, vrijedi

$$[\![f(\hat{\gamma}) = \hat{\lambda}_1]\!] \wedge [\![f(\hat{\gamma}) = \hat{\lambda}_2]\!] \leq [\![\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2]\!] = 0.$$

To je kontradikcija s pretpostavkom da Booleova algebra B ima Suslinovo svojstvo.

(ii) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve $\beta \in \alpha$. Zbog teorema 2.2.4 dovoljno je dokazati $[\![\aleph_{\hat{\alpha}} \leq \hat{\aleph}_\alpha]\!] = 1$. Iz tvrdnje ($i$) imamo $[\![Card(\hat{\aleph}_\alpha)]\!] = 1$. Također, za $\beta \in \alpha$ imamo $[\![\hat{\aleph}_\beta < \hat{\aleph}_\alpha]\!] = 1$ što zajedno s pretpostavkom indukcije daje $[\![\aleph_{\hat{\beta}} < \hat{\aleph}_\alpha]\!] = 1$. Na kraju slijedi

$$1 = [\![Card(\hat{\aleph}_\alpha)]\!] \wedge \bigwedge_{\beta\in\alpha} [\![\aleph_{\hat{\beta}} < \hat{\aleph}_\alpha]\!] \leq [\![Card(\hat{\aleph}_\alpha) \wedge (\forall\beta \in \hat{\alpha})(\aleph_\beta < \hat{\aleph}_\alpha)]\!] \leq [\![\aleph_{\hat{\alpha}} \leq \hat{\aleph}_\alpha]\!].$$

(iii) Budući da je svaki kardinalni broj neki $\aleph_\alpha$, tvrdnja slijedi direktno iz (ii). ■

2.3 Aksiom izbora

Kako bismo lakše dokazali aksiom izbora u proširenju, ne dokazujemo njegovu prvotnu inačicu, već tvrdnju $\forall x\exists\alpha\exists f(On(\alpha) \wedge func(f) \wedge D(f) = \alpha \wedge x \subseteq \mathrm{Im}(f))$, iz koje slijedi aksiom izbora. Naime, pretpostavimo da vrijedi prethodna tvrdnja i uzmimo proizvoljan skup x. Definiramo preslikavanje g na sljedeći način: $g(y) := f(\min_\in f^{-1}(y))$, gdje je $\emptyset \neq y \subseteq x$, te $f^{-1}(y) := \{\beta \in \alpha \mid f(\beta) \in y\}$. Tvrdimo da je g izborna funkcija. Za proizvoljan $\emptyset \neq y \subseteq x$ tvrdimo da vrijedi $g(y) \in y$. Kako je to skup ordinala, postoji $\in$-minimalan element $\beta_0 \in f^{-1}(y)$. No sada je $f(\beta_0) \in y$ zbog prethodnog, stoga imamo da vrijedi $g(y) \in y$.

Prije samog dokaza potrebno je još definirati neke pojmove.

Definicija 2.3.1. *Za $u, v \in V^B$ i $\alpha \in On$ definiramo redom **B-singleton, B-neuređeni par**, te **B-uređeni par**.*

(i) $\{u\}^B_\alpha := (V_\alpha \setminus \{u\}) \times \{0\} \cup \{(u, 1)\}$.

(ii) $\{u\}^B := \{u\}^B_{rk_B(u)+1}$.

(iii) $\{u, v\}^B := \{u\}^B_{\max(rk_B(u),rk_B(v))+1} \cup \{v\}^B_{\max(rk_B(u),rk_B(v))+1}$.

(iv) $(u, v)^B := \{\{u\}^B, \{u, v\}^B\}^B$.

Za dokaz aksioma izbora nam je potrebna sljedeća, tehnička lema.

Lema 2.3.2. *Za svaki $u \in V^B$, postoji $f \in V^B$ tako da vrijedi*

$$V^B \models func(f) \wedge D(f) = \widehat{D(u)} \wedge u \subseteq \mathrm{Im}(f).$$

Specijalno je $[\![k(u) \leq k(\widehat{D(u)})]\!] = 1$.

Dokaz. Tvrdimo da je traženi skup $f := \{(\hat{z}, z)^B \mid z \; E \; u\} \times \{1\}$. Imamo

$$\begin{aligned}
[\![func(f)]\!] &= [\![(\forall x \in D(f))(\forall y \in D(f))\,(x = y \to f(x) = f(y))]\!] \\
&= \bigwedge_{x \in D(f)} \bigwedge_{y \in D(f)} [\![x = y \to f(x) = f(y)]\!] \\
&= \bigwedge_{x \in D(f)} \bigwedge_{y \in D(f)} ([\![x = y]\!] \Rightarrow [\![f(x) = f(y)]\!]) \\
&= \bigwedge_{x \in D(f)} \bigwedge_{y \in D(f)} (-[\![x = y]\!] \vee [\![1 = 1]\!]) \\
&= \bigwedge_{x \in D(f)} \bigwedge_{y \in D(f)} (-[\![x = y]\!] \vee 1) = 1,
\end{aligned}$$

zatim,

$$[\![x \in D(f)]\!] = \bigvee_{x \in D(u)} [\![x = \hat{z}]\!] = [\![x \in \widehat{D(u)}]\!],$$

te za svaki y,

$$\begin{aligned}
[\![y \in \mathrm{Im}(f)]\!] &= [\![\exists x((x, y) \in f)]\!] \\
&= \bigvee_{x \in V^B} [\![(x, y) \in f]\!] \\
&= \bigvee_{z \in D(u)} \left(\bigvee_{x \in V^B} [\![x = \hat{z}]\!] \wedge [\![y = z]\!] \right) \\
&= \bigvee_{z \in D(u)} [\![y = z]\!] \\
&\geq \bigvee_{z \in D(u)} (u(z) \wedge [\![y = z]\!]) = [\![y \in u]\!].
\end{aligned}$$

Iz toga slijedi da f zadovoljava sva tri potrebna uvjeta. ∎

Sada lagano pomoću prethodne leme nalazimo potrebnu funkciju pomoću koje definiramo dobar uređaj na svakom elementu proširenja.

Lema 2.3.3. *(Aksiom izbora) Vrijedi*

$$V^B \models \forall x \exists \alpha \exists f (On(\alpha) \wedge func(f) \wedge D(f) = \alpha \wedge x \subseteq \mathrm{Im}(f)).$$

Dokaz. Neka je $u \in V^B$ proizvoljan. Po Zermelovom teoremu[5] u V, postoji ordinal α i bijekcija $h : \alpha \to D(u)$. Tada vrijedi $V^B \models$ „$\hat{h}$ je bijekcija između $\hat{\alpha}$ i $\widehat{D(u)}$", jer je „h je bijekcija između α i $D(u)$" Σ_0 formula.

Sada imamo

$$V^B \models func(f \circ \hat{h}) \wedge D(f \circ \hat{h}) = \hat{\alpha} \wedge u \subseteq \mathrm{Im}(f \circ \hat{h}),$$

gdje je f funkcija iz leme 2.3.2. ■

Iz svih prethodnih lema o aksiomima teorije ZF dobivamo sljedeći važan rezultat:

Korolar 2.3.4. *Neka je B potpuna Booleova algebra. Tada vrijedi $V^B \models F$, gdje je F bilo koji aksiom teorije ZFC.*

[5] Za dokaz Zermelovog teorema vidi [13].

Poglavlje 3

Metoda forcinga i neki rezultati nezavisnosti

3.1 Forcing

U Cohenovom forcingu[1], kao temeljni pojam javlja se parcijalno uređeni skup unutar početnog modela. Pomoću njega, uz ponešto topologije, definira se *generički skup* te se zatim preko generičkog skupa proširuje model. Budući da generički skup ovisi o parcijalno uređenom skupu, potrebno je parcijalni uređaj pažljivo odabrati kako bismo dobili željene modele.

Slična situacija je i u našem slučaju, samo parcijalno uređeni skup ne koristimo za definiranje generičkog skupa, već za definiranje odgovarajuće potpune Booleove algebre.

Definicija 3.1.1. *Neka je $(P, \leq)$ parcijalno uređen skup. Kažemo da p* ***profinjuje*** *q ukoliko je $p \leq q$. Kažemo da su uvjeti $p, q \in P$ su* ***kompatibilni****, i pišemo $Comp(p, q)$, ako postoji $r \in P$ takav da je $r \leq p$ i $r \leq q$. Kažemo da je P* ***profinjen*** *ako za svaka dva uvjeta $p, q \in P$ za koje vrijedi $q \nleq p$, postoji $r \leq q$ takav da r i p nisu kompatibilni.*

Relacija na parcijalno uređenom skupu se često drugačije definira, ovisno o literaturi. Cohen je originalno promatrao $(P, \geq)$, s čime se slažu i razni drugi autori ([22, 20]), no u suštini je svejedno u kojem je smjeru uređaj. U nastavku smatramo da je $(P, \leq)$ proizvoljan, ali fiksan, parcijalno uređen skup.

Od velike važnosti su nam regularno otvoreni skupovi, jer će oni igrati ulogu odgovarajuće potpune Booleove algebre.

Definicija 3.1.2. *Topologija čija je baza $\{O_p \mid p \in P\}$, pri čemu je $O_p = \{q \in P \mid q \leq p\}$ naziva se* ***(lijeva) uređajna topologija*** *na P. S $RO(P)$ označavamo Booleovu algebru*

[1] Vidi [5] ili [13].

regularno otvorenih skupova s obzirom na uređajnu topologiju. Ako je B potpuna Booleova algebra, kažemo da je skup $X \subseteq B$ **gust** *u B ako $0 \notin X$ te za svaki $b \in B$ postoji $x \in X$ takav da je $x \leq b$.*

Korisno je opisati unutrašnjosti zatvarača skupa u uređajnoj topologiji.

Lema 3.1.3. *Neka je dana uređajna topologija na P. Za svaki $X \subseteq P$ vrijedi*

$$Int(\overline{X}) = \{q \in P \mid (\forall p' \leq q)(\exists r \in X)(r \leq p')\}.$$

Dokaz. Ako je $q \in Int(\overline{X})$, tada postoji $O_p \subseteq \overline{X}$ takav da je $q \in O_p$, dakle vrijedi $q \leq p$. Neka je p' takav da vrijedi $p' \leq q \leq p$. Slijedi da je $p' \in O_p$, tj $p' \in \overline{X}$, no $p' \in O_{p'}$, pa postoji $r \in O_{p'} \cap X$, tj. postoji $r \in X$ takav da je $r \leq p'$.

S druge strane, neka je $q \in P$ takav da vrijedi $(\forall p' \leq q)(\exists r \in X)(r \leq p')$. Uzmimo proizvoljan otvoren skup U takav da je $q \in U$. Po definiciji baze postoji neki $p \in P$ za koji vrijedi $q \in O_p$. Iz pretpostavke za $p' = q$ imamo da postoji $r \in X$ takav da je $r \leq q$, tj. $O_r \subseteq O_q$. Kako je $r \in x$, odmah slijedi $O_r \cap X \neq \emptyset$, a iz toga lagano dobivamo da vrijedi $U \cap X \neq \emptyset$, tj. $q \in \overline{X}$.

Sada je dovoljno još dokazati da je $O_q \subseteq \overline{X}$. Neka je $p' \in O_q$ i uzmimo proizvoljnu okolinu O_p od p'. Iz $p' \leq q$ slijedi da je $O_{p'} \subseteq O_q$, te iz pretpostavke imamo da postoji $r \in X$ takav da je $r \leq p'$. Iz toga dobivamo $O_r \subseteq O_{p'} \subseteq O_p$. Budući da je $O_r \cap X \neq \emptyset$, slijedi da je $O_p \cap X \neq \emptyset$, tj. $p' \in \overline{X}$ po definiciji zatvarača. ■

Kažemo da je bijekcija f između dva parcijalno uređena skupa $(A, \leq)$ i $(B, \leq')$ **sličnost** ako f i f^{-1} čuvaju uređaj.

Teorem 3.1.4. *(i) P je profinjen ako i samo ako je $O_p \in RO(P)$ za svaki $p \in P$.*

(ii) Ako je P profinjen, onda je preslikavanje $p \mapsto O_p$ sličnost sa P na gusti podskup od $RO(P)$.

Dokaz. (i) Zbog leme 3.1.3 možemo pisati $Int(\overline{O_p}) = \{q \in P \mid (\forall p' \leq q)Comp(p, p')\}$.

Pretpostavimo da je P profinjen. Jer je O_p otvoren, slijedi da je $O_p \subseteq Int(\overline{O_p})$. Ako je $q \notin O_p$, tada $q \nleq p$, a budući da je P profinjen, postoji $p' \leq q$ takav da vrijedi $\neg Comp(p, p')$. Stoga slijedi $q \notin Int(\overline{O_p})$.

Obrnuto, ako je $O_p \in RO(P)$, onda vrijedi $O_p = Int(\overline{O_p})$. Imamo da je $q \nleq p$ što povlači $q \notin O_p$, tj. $q \notin Int(\overline{O_p})$. Iz toga slijedi da $(\exists p' \leq q)\, \neg Comp(p, p')$, tj. P je profinjen.

(ii) slijedi jednostavno iz tvrdnje (i) ovog teorema, te definicije uređajne topologije. ■

Iz prethodnog teorema jednostavno slijedi sljedeći korolar.

Korolar 3.1.5. *P je profinjen ako i samo ako je sličan gustom podskupu neke potpune Booleove algebre.*

Dokaz. Ako je P profinjen, tvrdnja slijedi direktno iz teorema 3.1.4 (*ii*).

Pretpostavimo sada da je P sličan nekom gustom podskupu potpune Booleove algebre. Tada možemo poistovjetiti P s tim podskupom. Ako za proizvoljne $p, q \in P$ vrijedi $q \nleq p$, onda u B imamo da je $-(q \Rightarrow p) = q \wedge -p \neq 0$. Budući da je P gust, postoji $p' \in P$ takav da je $p' \leq q \wedge -p$, iz čega slijedi $p' \leq q$. Preostaje dokazati da vrijedi $\neg Comp(p', p)$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $r \in P$ takav da je $r \leq p'$ i $r \leq p$. Budući da je $p' \leq q \wedge -p$, slijedi također da je $p' \leq -p$. Sada imamo $r \leq p$ i $r \leq p'$, tj. $r \leq p \wedge -p = 0 \in P$, što je kontradikcija s činjenicom da je P gust u B. ■

Upotpunjenje parcijalno uređenog skupa definiramo slično kao u funkcionalnoj analizi.

Definicija 3.1.6. *Neka je B potpuna Booleova algebra. Kažemo da je (B, c)* ***Booleovo upotpunjenje*** *od P ako je c sličnost između P i gustog podskupa od B.*

Primijetimo da po prethodnom korolaru slijedi da svaki profinjen parcijalno uređen skup ima upotpunjenje.

Dokaz sljedećeg teorema može se pronaći u [2].

Teorem 3.1.7. *Ako su (B, c) i (B', c') dva Booleova upotpunjenja od P, tada su oni izomorfni. Drugim riječima, dva Booleova upotpunjenja su izomorfna ako postoji izomorfizam f Booleovih algebri B i B' takav da vrijedi $f(c(P)) = c'(P)$.*

Ako je P profinjen i (B, c) neko njegovo upotpunjenje, tada kažemo da je P **baza** ili **skup uvjeta** za B. Često ćemo poistovjećivati $p \in P$ s njegovom slikom $c(p) \in B$, te stoga kažemo da je P gust skup u B.

Definicija 3.1.8. *Neka su x, y skupovi i neka y ima barem dva elementa. Tada s $Fn(x, y)$ označavamo skup svih funkcija s konačnog podskupa od x u y.*

Definiramo relaciju $\leq$ na $Fn(x, y)$ tako da za $p, q \in Fn(x, y)$ vrijedi $p \leq q$ ako i samo ako vrijedi $q \subseteq p$. Lako se vidi da je $Fn(x, y)$ profinjen parcijalno uređen skup s tako definiranim uređajem.

Teorem 3.1.9. *Za $p \in Fn(x, y)$ definiramo skup $N(p) := \{f \in y^x \mid p \subseteq f\}$. Familija skupova $\{N(p) \mid p \in Fn(x, y)\}$ je baza produktne topologije na y^x, pri čemu je na y zadana diskretna topologija. Štoviše, $(RO(y^x), N)$ je upotpunjenje skupa $Fn(x, y)$, gdje je N funkcija takva da $p \mapsto N(p)$.*

Dokaz. Budući da je $p \in Fn(x, y)$, postoji konačan $x' = \{x_1 \ldots, x_n\} \subseteq x$ takav da je $p : x' \to y$. Također vrijedi $\{p(x_i)\} \in \mathscr{P}(y)$ za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Po definiciji Kartezijevog produkta po proizvoljnom skupu imamo $N(p) = \prod_{t \in X} X_t$, pri čemu je $X_t = \{p(x_i)\}$ ako je $t = x_i$ za neko $i \in \{1, \ldots n\}$, a inače je $X_t = y$. To je onda po definiciji baza produktne topologije na skupu y^x.

Očito je $N(p)$ otvoren skup, stoga dokažimo još da je zatvoren. Neka su $\pi_i : y^x \to y$ projekcije na i-tu varijablu, tj. za $f \in y^x$ neka je $\pi_i(f) = f(x_i)$. Tada imamo $N(p) = \pi_1^{-1}(p(x_1)) \cap \ldots \cap \pi_n^{-1}(p(x_n))$. Budući da su projekcije neprekidne[2], i $p(x_i)^c \in \mathscr{P}(y)$, tj. $p(x_i)$ su zatvoreni skupovi za $i \in \{1, \ldots, n\}$ u topologiji $\mathscr{P}(y)$, slijedi da je $N(p)$ presjek konačno mnogo zatvorenih skupova, iz čega slijedi da je $N(p)$ zatvoren skup.

Kako je $N(p)$ otvoren i zatvoren, trivijalno je i regularno otvoren. Iz toga slijedi da je preslikavanje $p \mapsto N(p)$ iz $Fn(x, y)$ u neki gust podskup od $RO(y^x)$. Sve zajedno imamo da je $(RO(y^x), N)$ upotpunjenje od $Fn(x, y)$. ■

Za kraj točke uvodimo jedan koristan pojam.

Definicija 3.1.10. *Neka je B potpuna Booleova algebra i P skup uvjeta za B. Za svaku B-rečenicu φ kažemo da $p \in P$* ***forsira*** *φ, i pišemo $p \Vdash \varphi$, ako vrijedi $p \leq [\![\varphi]\!]$.*

3.2 Nezavisnost aksioma konstruktibilnosti

Za dokaz aksioma konstruktibilnosti potrebno je istražiti još poneka svojstva ordinala u proširenjima. Jedno od bitnijih je da se kvantificiranje po ordinalima iz proširenja V^B može zamijeniti supremumom i infimumom standardnih ordinala u B.

Lema 3.2.1. *Neka je $\varphi(x)$ neka B-formula. Tada vrijedi:*

(i) $[\![\exists x(On(x) \wedge \varphi(x))]\!] = \bigvee_{\alpha \in On} [\![\varphi(\hat{\alpha})]\!]$.

(ii) $[\![\forall x(On(x) \to \varphi(x))]\!] = \bigwedge_{\alpha \in On} [\![\varphi(\hat{\alpha})]\!]$.

Dokaz. Dokažimo samo (i) jer (ii) slijedi iz definicije $\forall$ pomoću $\exists$ i negacije.

[2] Vidi [24].

$$\begin{aligned}
[\![\exists x(On(x) \wedge \varphi(x))]\!] &= \bigvee_{x \in V^B} ([\![On(x)]\!] \wedge [\![\varphi(x)]\!]) \\
&= \bigvee_{x \in V^B} \left(\bigvee_{\alpha \in On} [\![\hat{\alpha} = x]\!] \wedge [\![\varphi(x)]\!] \right) \\
&= \bigvee_{x \in V^B} \bigvee_{\alpha \in On} ([\![\hat{\alpha} = x]\!] \wedge [\![\varphi(x)]\!]) \\
&\leq \bigvee_{x \in V^B} \bigvee_{\alpha \in On} [\![\varphi(\hat{\alpha})]\!] \\
&= \bigvee_{\alpha \in On} [\![\varphi(\hat{\alpha})]\!]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bigvee_{\alpha \in On} [\![\varphi(\hat{\alpha})]\!] &= \bigvee_{\alpha \in On} ([\![\varphi(\hat{\alpha})]\!] \wedge [\![On(\hat{\alpha})]\!]) \\
&\leq \bigvee_{x \in V^B} ([\![\varphi(x)]\!] \wedge [\![On(x)]\!]) \\
&= \bigvee_{x \in V^B} [\![\varphi(x) \wedge On(x)]\!] \\
&= [\![\exists x(On(x) \wedge \varphi(x))]\!]
\end{aligned}$$

Time su dokazane obje nejednakosti, tj. tvrdnja vrijedi. ∎

Za skup $\hat{x}$ kažemo da je **standardni konstruktibilni skup** ako je $x \in L$.[3] Slično kao i ordinalni brojevi, i konstruktibilni skupovi u proširenjima mogu se opisati preko standardnih konstruktibilnih skupova.

Teorem 3.2.2. $[\![u \in L]\!] = \bigvee_{x \in L} [\![u = \hat{x}]\!]$.

Dokaz. Iz leme 3.2.1 dobivamo $[\![u \in L]\!] = [\![\exists \alpha(On(\alpha) \wedge u \in L_\alpha)]\!] = \bigvee_{\alpha \in On} [\![u \in L_{\hat{\alpha}}]\!]$. Budući da je $x = L_\alpha$ Σ_1 formula,[4] iz teorema 2.1.16 slijedi $[\![\widehat{L_\alpha} = L_{\hat{\alpha}}]\!] = 1$. Na kraju imamo

$$[\![u \in L]\!] = \bigvee_{\alpha \in On} [\![u \in \hat{L}_\alpha]\!] = \bigvee_{\alpha \in On} \bigvee_{x \in L_\alpha} [\![u = \hat{x}]\!] = \bigvee_{x \in L} [\![u = \hat{x}]\!].$$

Time je dokazana tvrdnja. ∎

---

[3] L je definiran u 1. poglavlju,

[4] Za dokaz vidi [7].

Za dokaz da ne vrijedi aksiom konstruktibilnosti u nekom proširenju, potrebna je sljedeća lema.

Lema 3.2.3. *Neka je $B = RO(2^\omega)$. Tada vrijedi :*

(i) $V^B \models \widehat{\mathscr{P}(\omega)} \neq \mathscr{P}(\hat{\omega})$.

(ii) $\mathscr{P}(\hat{\omega}) \nsubseteq L$.

Dokaz. (i) Neka je $P = Fn(\omega, 2)$. Tada imamo da je B upotpunjenje od P, te identificiramo $p \in P$ s $N(p) = \{f \in 2^\omega \mid p \subseteq f\}$. Definirajmo $u \in V^B$ sa $D(u) := D(\hat{\omega})$ i $u(\hat{n}) := \{f \in 2^\omega;\ f(n) = 1\} \in B$.

Tvrdnja 1. Za $p \in P$ i $n \in \omega$ vrijedi: $p \Vdash \hat{n} \in u$ ako i samo ako $p(n) = 1$, te
$p \Vdash \hat{n} \notin u$ ako i samo ako $p(n) = 0$.

Dokaz. Ako je $p \Vdash \hat{n} \in u$, onda po definiciji vrijedi $N(p) \leq [\![\hat{n} \in u]\!] = u(\hat{n})$, što je u B ekvivalentno s $N(p) \subseteq u(\hat{n})$.[5] Kako je $p \in N(p)$, tada slijedi $p \in u(\hat{n})$, tj. $p(n) = 1$.

Obrnuto, ako je $p(n) = 1$, onda je $p \in u(\hat{n})$. Sada za svaki $f \in N(p)$ vrijedi $p \subseteq f$, a po definiciji imamo da se podudaraju na zajedničkoj domeni, tj. $f(n) = 1$, što znači da je $f \in u(\hat{n})$. Druga tvrdnja slijedi iz prve obratom po kontrapoziciji, jer je iz $p(n) \neq 1$ nužno slijedi $p(n) = 0$.

Nadalje, vrijedi $[\![u \in \mathscr{P}(\hat{\omega})]\!] = [\![u \subseteq \hat{\omega}]\!] = \bigwedge_{n\in\omega} (u(\hat{n}) \Rightarrow [\![\hat{n} \in \hat{\omega}]\!]) = 1$.

Tvrdnja 2. $[\![u = \hat{x}]\!] = 0$ za svaki $x \in \mathscr{P}(\omega)$.
Dokaz. Tada ni za koji $x \in \mathscr{P}(\omega)$ ne postoji p takav da vrijedi $p \Vdash [\![u = \hat{x}]\!]$, jer kada bi takav p postojao, onda bismo po relaciji forcinga imali $N(p) \subseteq \emptyset$. Definirajmo sada funkciju $f \in 2^\omega$ tako da vrijedi $f(n) = p(n)$, za $n \in D(p)$, a $f(n) = 1$ inače. Sada je očito $f \in N(p) = \emptyset$, što je kontradikcija.

Pretpostavimo sada suprotno, da postoji $p \in P$ i $x \in \mathscr{P}(\omega)$ takav da je $p \Vdash u = \hat{x}$. Uzmimo $n \in \omega$ takav da vrijedi $n \notin D(p)$. Ako vrijedi $n \in x$, definirajmo $p' := p \cup \{(n, 0)\}$, a ako vrijedi $n \notin x$, definirajmo $p' := p \cup \{(n, 1)\}$. Sada u oba slučaja imamo da je $p' \Vdash \hat{n} \notin \hat{x} \wedge \hat{n} \in u$, što znači da vrijedi $p' \models u \neq \hat{x}$. Budući da je $p' \leq p$, slijedi da je $p' \Vdash u = \hat{x}$, što je kontradickija.

Naime, ako vrijedi $q \leq p \wedge p \Vdash [\![\varphi]\!]$, gdje je φ neka B-formula, onda vrijedi $q \Vdash [\![\varphi]\!]$. Pretpostavimo suprotno, da vrijedi $p \Vdash [\![\varphi]\!]$ i $q \leq p$, te da ne vrijedi $q \Vdash [\![\varphi]\!]$. Tada po definiciji relacije forsiranja imamo $q \leq p$ i $p \leq [\![\varphi]\!]$, tj. $q \leq [\![\varphi]\!]$.

Na kraju imamo $[\![u \in \widehat{\mathscr{P}(\omega)}]\!] = \bigvee_{x\in\mathscr{P}(\omega)} [\![u = \hat{x}]\!] = 0$, što daje

[5]Važno je ovdje napomenuti kako razlikujemo $\leq$ na skupu konačnih parcijalnih funkcija i na Booleovoj algebri skupova. U prvom slučaju je to obrnuta inkluzija, a u potonjem je to uobičajena inkluzija.

$$1 = [\![u \in \mathscr{P}(\hat{\omega})]\!] \wedge [\![u \notin \widehat{\mathscr{P}(\omega)}]\!] \leq [\![\mathscr{P}(\hat{\omega}) \neq \widehat{\mathscr{P}(\omega)}]\!].$$

(ii) Neka je $u \in V^B$ definiran kao u (i). Iz teorema 3.2.2 imamo $[\![u \in L]\!] = \bigvee_{x \in L} [\![u = \hat{x}]\!] = \bigvee_{x \in L \cap \mathscr{P}(\omega)} [\![u = \hat{x}]\!] \vee \bigvee_{x \in L \setminus \mathscr{P}(\omega)} [\![u = \hat{x}]\!]$. Budući da znamo da je $[\![u \in \mathscr{P}(\hat{\omega})]\!] = 1$, za $x \notin \mathscr{P}(\omega)$ imamo

$$[\![u = \hat{x}]\!] = [\![u = \hat{x}]\!] \wedge [\![u \in \mathscr{P}(\hat{\omega})]\!] \leq [\![\hat{x} \in \mathscr{P}(\hat{\omega})]\!] = [\![\hat{x} \subseteq \hat{\omega}]\!] = 0,$$

jer ne vrijedi $x \subseteq \omega$.

Na kraju imamo

$$[\![u \in L]\!] = \bigvee_{x \in L \cap \mathscr{P}(\omega)} [\![u = \hat{x}]\!] \leq \bigvee_{\mathscr{P}(\omega)} [\![u = \hat{x}]\!] = [\![u \in \widehat{\mathscr{P}(\omega)}]\!] = 0.$$

Sve zajedno imamo $[\![u \in L]\!] = 0$ i $[\![u \in \mathscr{P}(\hat{\omega})]\!] = 1$, iz čega slijedi tvrdnja. ■

Teorem 3.2.4. *Ako je ZF konzistentna teorija, onda je konzistentna i teorija $ZF + A$, gdje je A tvrdnja „postoji nekonstruktibilan podskup od ω".*

Dokaz. Teorije ZF i $ZF + A$ su proširenja od ZF, i trivijalno konzistentnost od ZF povlači konzistentnost od ZF. U ZF smo definirali potpunu Booleovu algebru i pokazali da vrijedi $ZF \vdash [\![F]\!] = 1$ za svaki aksiom teorije ZF. Nadalje, iz leme 3.2.3 slijedi $ZF \vdash [\![A]\!] = 1$. Sada po teoremu 2.1.5 konzistentnost teorije ZF povlači konzistentnost teorije $ZF + A$. ■

Prethodnim teoremom smo dokazali da je teorija $ZF + \neg(V = L)$ relativno konzistentna s teorijom ZF, tj. da je tvrdnja $V = L$ nezavisna od teorije ZF.

3.3 Nezavisnost hipoteze kontinuuma

Prije glavnog teorema kojeg koristimo za dokaz konzistentnosti negacije GCH s teorijom ZF, potrebne su nam neke tvrdnje o ocjenama kardinalnosti određenih Booleovih algebri.

Lema 3.3.1. *Neka je X topološki prostor, E baza za X i $B = RO(X)$. Tada je $k(B) \leq k(E)^{\aleph_0}$.*

Dokaz. Neka je $U \in B$. Pomoću Zornove leme možemo pronaći maksimalnu disjunktnu potfamiliju F od $E \cap \mathscr{P}(U)$. Stavimo $G := \bigcup F$ i dokažimo da vrijedi $U = Int(\overline{G})$.

Iz $F \subseteq E \cap \mathscr{P}(U) \subseteq \mathscr{P}(U)$, slijedi da je $G = \bigcup F \subseteq \bigcup \mathscr{P}(U) = U$. Budući da je U regularno otvoren skup, imamo $Int(\overline{G}) \subseteq Int(\overline{U}) = U$.

S druge strane, skup $U \setminus \overline{G}$ je otvoren, i kad bi bio neprazan, postojao bi, po definiciji baze topološkog prostora, $E_1 \in E$ takav da je $E_1 \subseteq U \setminus \overline{G}$. Tada bi vrijedilo $E_1 \cap \bigcup F = \emptyset$, što znači da je E_1 disjunktan sa svakim elementom od F. To je kontradikcija s maksimalnošću od F, jer vrijedi $F \subseteq F' := F \cup E_1 \subseteq E \cap \mathscr{P}(U)$.

Svaki element Booleove algebre B je određen nekom disjunktnom familijom iz E. Budući da X ima Suslinovo svojstvo, svaka takva familija je prebrojiva i ima ih najviše $k(E)^{\aleph_0}$, tj. $k(B) \leq k(E)^{\aleph_0}$. ■

U sljedećem koraku želimo omeđiti kardinalnost Booleove algebre $RO(2^X)$, a za to je potrebno dokazati da topološki prostor 2^X ima Suslinovo svojstvo.

Prije toga dokazujemo općenitiji rezultat koji povezuje produktne topološke prostore i Suslinovo svojstvo. Za to nam je potrebna sljedeća lema, čiji dokaz je dan u [13].

Lema 3.3.2. *(Δ-sustav) Neka je C neprebrojiva familija konačnih skupova. Tada postoji neprebrojiva familija $\mathcal{A} \subseteq C$ i konačan skup Δ tako da za proizvoljne $x, y \in \mathcal{A}$ vrijedi $x \neq y \to x \cap y = \Delta$.*

Teorem 3.3.3. *Neka je $\{X_i \mid i \in I\}$ familija takva da topološki prostor $\prod_{i \in J} X_j$ ima Suslinovo svojstvo za svaki konačan $J \subseteq I$. Tada $\prod_{i \in I} X_i$ ima Suslinovo svojstvo.*

Dokaz. Za dokaz da $\prod_{i \in I} X_i$ ima Suslinovo svojstvo, umjesto proizvoljnih otvorenih skupova, dovoljno je promatrati samo elemente baze. Pretpostavimo sada suprotno, tj. da postoji neprebrojiva familija $\mathcal{A}$ međusobno disjunktnih elemenata baze.

Za svaki $Z = \prod_{i \in I} U_i \in \mathcal{A}$, definirajmo skupove $J_Z := \{i \in I \mid U_i \neq X_i\}$, te $C := \{J_Z \mid Z \in \mathcal{A}\}$. Tada po lemi 3.3.2 slijedi da postoji neprebrojiv $\mathcal{D} \subseteq C$ i konačan skup Δ takav da za proizvoljne različite $x, y \in \mathcal{D}$ vrijedi $x \cap y = \Delta$.

Tvrdimo da vrijedi $\Delta \neq \emptyset$. Kada bi Δ bio prazan skup, tada bismo za $J_{Z_1}, J_{Z_2} \in \mathcal{D}$, takve da vrijedi $J_{Z_1} \neq J_{Z_2}$, imali $J_{Z_1} \cap J_{Z_2} = \emptyset$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi $J_{Z_1} = \{i_1, \ldots, i_m\}$ i $J_{Z_2} = \{i_{m+1} \ldots i_n\}$. Tada vrijedi $Z_1 = \prod_{i \in I} U_i$, pri čemu je $U_i \neq X$ za $i \in J_{Z_1}$, a inače je $U_i = X$. Također, $Z_2 = \prod_{i \in I} U_i$, pri čemu je $U_i \neq X$ za $i \in J_{Z_2}$, a inače je $U_i = X$. Budući da su J_{Z_1} i J_{Z_2} disjunktni, slijedi da je $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$, što je kontradikcija s činjenicom da $\mathcal{A}$ sadrži međusobno disjunktne elemente.

Definirajmo sada $\mathcal{A}_1 := \{Z \in \mathcal{A} \mid J_z \in \mathcal{D}\}$. Za svaki $Z = \prod_{i \in I} U_i \in \mathcal{A}_1$ definirajmo $p(Z) := \prod_{i \in \Delta} U_i$, te označimo s $\mathcal{A}_2$ familiju svih takvih $p(Z)$.

Primijetimo da su različiti $J_{Z_1}, J_{Z_2} \in \mathcal{D}$ međusobno disjunktni. Naime, kada bi vrijedilo $i \in J_{Z_1} \setminus \Delta$, te $i \in J_{Z_2} \setminus \Delta$, imali bismo da je $i \in J_{Z_1} \cap J_{Z_2} = \Delta$, no također bi vrijedilo $i \notin \Delta$, što je kontradikcija.

Iz prethodnog sada slijedi da je preslikavanje p bijekcija s $\mathcal{A}_1$ u $\mathcal{A}_2$. Sada imamo da je $\mathcal{A}_2$ neprebrojiva familija otvorenih skupova topologije $\prod_{i \in \Delta} X_i$, koja po pretpostavci teorema ima Suslinovo svojstvo. Stoga postoje $p(Z_1)$ i $p(Z_2)$ takvi da je $p(Z_1) \cap p(Z_2) \neq \emptyset$. Sada možemo pronaći $x \in Z_1 \cap Z_2$, što je kontradikcija s činjenicom da je $\mathcal{A}$ antilanac. ■

Budući da je diskretna topologija na 2 konačan skup, konačan Kartezijev produkt tih topoloških prostora je konačan, pa je separabilan, a onda po teoremu 3.3.3 ima Suslinovo svojstvo.

Lema 3.3.4. *Neka je X skup i 2^X produktna topologija, pri čemu je na 2 zadana diskretna topologija. Ako je $k(X) = \aleph_\alpha$, tada je $\aleph_\alpha \le k(RO(2^X)) \le \aleph_\alpha^{\aleph_0}$.*

Dokaz. Analogno kao u teoremu 3.1.9 se dokaže da je familija skupova oblika

$$\{f \in 2^X \mid f(x_1) = a_1, \dots, f(x_n) = a_n\},$$

pri čemu je $x_1, \dots, x_n \in X$, te $a_1, \dots, a_n \in 2$, baza topologije 2^X, a očito je kardinalnosti $\aleph_\alpha$. Također se kao u teoremu 3.1.9 dokaže da je svaki takav skup i zatvoren. Budući da je svaki takav skup otvoren i zatvoren, iz čega slijedi da je regularno otvoren, imamo da je $\aleph_\alpha \le k(RO(2^X))$. Budući da 2^X ima Suslinovo svojstvo, iz leme 3.3.1 imamo $k(RO(2^X)) \le \aleph_\alpha^{\aleph_0}$. ■

Teorem 3.3.5. *Pretpostavimo da je $\aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$ i stavimo $B = RO(2^{\omega\times\omega_\alpha})$. Tada vrijedi $V^B \models 2^{\aleph_0} = \aleph_{\hat{\alpha}}$.*

Dokaz. Iz leme 3.3.4 slijedi $\aleph_\alpha \le k(RO(2^{\omega\times\omega_\alpha})) \le \aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$, tj $\aleph_\alpha = k(RO(2^{\omega\times\omega_\alpha}))$. Iz definicije Booleovog partitivnog skupa imamo $k(D(\mathscr{P}(\hat{\omega}))) = k(B^{D(\hat{\omega})}) = k(\aleph_\alpha^{\aleph_0}) = \aleph_\alpha$. Iz leme 2.3.2 slijedi $V^B \models k(\mathscr{P}^B(\omega)) \le \hat{\aleph}_\alpha$ iz čega pak slijedi $V^B \models k(\mathscr{P}(\omega)) \le \hat{\aleph}_\alpha$. Budući da B ima Suslinovo svojstvo, slijedi da je $V^B \models k(\mathscr{P}(\omega)) \le \aleph_{\hat{\alpha}}$, tj. $V^B \models 2^{\aleph_0} \le \aleph_{\hat{\alpha}}$.

Preostaje pokazati $V^B \models \aleph_{\hat{\alpha}} \le 2^{\aleph_0}$. Za svaki $\lambda \le \omega_\alpha$ definirajmo $u_\lambda \in V^B$ sa $D(u_\lambda) = D(\hat{\omega})$ i $u_\lambda(\hat{n}) := \{f \in 2^{\omega\times\omega_\alpha} \mid f(n,\lambda) = 1\}$. Imamo $[\![u_\lambda \subseteq \hat{\omega}]\!] = \bigwedge_{n\in\omega} (u_\lambda(\hat{n}) \Rightarrow [\![\hat{n} \in \hat{\omega}]\!]) = 1$. Znamo da je $P = Fn(\omega \times \omega_\alpha, 2)$ skup uvjeta Booleove algebre B.

Tvrdnja 1. Za svaki $p \in P$ vrijedi $p \Vdash \hat{n} \in u_\lambda$ ako i samo ako $p(n,\lambda) = 1$, te $p \Vdash \hat{n} \notin u_\lambda$ ako i samo ako $p(n,\lambda) = 0$.

Dokaz. Ako vrijedi $p \Vdash \hat{n} \in u_\lambda$, po definiciji relacije forcinga slijedi $N(p) \subseteq [\![\hat{n} \in u_\lambda]\!] = u_\lambda(\hat{n})$. Budući da je $p \in N(p)$, po definiciji u_λ slijedi $p(n,\lambda) = 1$.

Obrnuto, ako vrijedi $p(n,\lambda) = 1$, onda imamo $p \in u_\lambda(\hat{n})$. Iz toga slijedi $N(p) \subseteq u_\lambda(\hat{n})$, što definiciji relacije forcinga znači $p \Vdash \hat{n} \in u_\lambda$. Budući da je $A \leftrightarrow B$ ekvivalentno s $\neg A \leftrightarrow \neg B$ za neke formule A i B, tvrdnja 2. slijedi po tome iz tvrdnje 1.

Tvrdnja 2. Ako su $\lambda, \mu \in \omega_\alpha$, onda je $[\![u_\lambda = u_\mu]\!] = 0$.

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi $[\![u_\lambda = u_\mu]\!] \ne 0$. Tada postoje $\lambda, \mu \in \omega_\alpha$ takvi da je $\lambda \ne \mu$, i postoji $p \in P$ takav da vrijedi $p \Vdash u_\lambda = u_\mu$. Uzmimo $n \in \omega$ takav da je $(n,\eta) \notin D(p)$ za svaki $\eta \in \omega_\alpha$ i stavimo $p' = p \cup \{((n,\lambda),1)\} \cup \{((n,\mu),0)\}$. Tada imamo $p' \Vdash \hat{n} \in u_\lambda \wedge \hat{n} \notin u_\mu$, tj. $p' \Vdash u_\lambda \ne u_\mu$. Tada iz $p' \le p$ slijedi kontradikcija.

Definirajmo funkciju $f \in V^B$ s $f = \{(\hat{\lambda}, u_\lambda)^B \mid \lambda < \omega_\alpha\} \times \{1\}$. Tvrdimo da vrijedi $V^B \models f\colon \hat{\omega}_\alpha \to \mathscr{P}(\hat{\omega})$. Činjenica da je f funkcija se dokazuje analogno kao u lemi 2.3.2.

$$[\![x \in D(f)]\!] = \bigvee_{x \in \omega_\alpha} [\![x = \hat{\lambda}]\!] = [\![x \in \hat{\omega}_\alpha]\!],$$

te za svaki y,

$$\begin{aligned}
[\![y \in \mathrm{Im}(f)]\!] &= [\![\exists x((x, y) \in f)]\!] \\
&= \bigvee_{x \in V^B} [\![(x, y) \in f]\!] \\
&= \bigvee_{\lambda \in \omega_\alpha} \Big(\bigvee_{x \in V^B} [\![x = \hat{\lambda}]\!] \wedge [\![y = u_\lambda]\!] \Big) \\
&= \bigvee_{\lambda \in \omega_\alpha} [\![y = u_\lambda]\!] \\
&= \bigvee_{\lambda \in \omega_\alpha} ([\![y = u_\lambda]\!] \wedge [\![u_\lambda \subseteq \hat{\omega}]\!]) \\
&\leq \bigvee_{\lambda \in \omega_\alpha} ([\![y \subseteq \hat{\omega}]\!]) = [\![y \subseteq \hat{\omega}]\!].
\end{aligned}$$

Budući da je $[\![u_\lambda = u_\mu]\!] = 0$ za $\lambda \neq \mu$, analogno kao u dokazu teorema 2.2.2 zaključujemo da vrijedi $V^B \models$ „f je injekcija”. Iz toga slijedi $V^B \models \aleph_{\hat{\alpha}} \leq 2^{\aleph_0}$. ■

Sada smo u stanju dokazati najvažniji teorem ovog poglavlja.

Teorem 3.3.6. *Ako je ZF konzistentna teorija, onda je i ZF +* $(2^{\aleph_0} = \aleph_2)$ *konzistentna.*

Dokaz. $ZFC + GCH$ i $ZFC + (2^{\aleph_0} = \aleph_2)$ su proširenja teorije ZF. Po teoremu 1.2.11 konzistentnost od ZF povlači konzistentnost od $ZF + GCH$. Unutar $ZF + GCH$ vrijedi $\aleph_2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1 \aleph_0} = 2^{\aleph_1} = \aleph_2$. U teoriji $ZFC + GCH$ možemo definirati potpunu Booleovu algebru $B = RO(2^{\omega \times \omega_2})$ za koju vrijedi $ZF + GCH \vdash [\![F]\!] = 1$, za svaki aksiom teorije ZF. Po teoremu 3.3.5 također vrijedi $ZF + GCH \vdash [\![2^{\aleph_0} = \aleph_2]\!] = 1$. Sada konzistentnost od $ZF + (2^{\aleph_0} = \aleph_2)$ slijedi direktno iz teorema 2.1.5. ■

Poglavlje 4

Aksiom izbora

4.1 Nezavisnost aksioma izbora

Budući da smo u 2. poglavlju pokazali da AC nije moguće opovrgnuti u Booleovim proširenjima, pribjegavamo drugačijoj strategiji, za koju je potrebno uvesti odgovarajuće algebarske pojmove.

Definicija 4.1.1. *Neka je G grupa i X skup.* ***Djelovanje*** *grupe G na skup X je preslikavanje $(g, x) \mapsto g \cdot x$ sa skupa $G \times X$ u skup X koje zadovoljava $e \cdot x = x$ i $g \cdot (h \cdot x) = gh \cdot x$, gdje su $x \in X$, $g, h \in G$, i e je neutralni element grupe G.*

Djelovanje nekog elementa $g \in G$ na element skupa $x \in X$, uvijek ćemo označavati s $g \cdot x$, a rezultat binarne operacije dva elementa grupe $g, h \in G$ označavamo jednostavno gh.

Djelovanje grupe G na neki skup X može se shvatiti kao familija bijekcija $\{\pi_g : X \to X \mid g \in G\}$, te preslikavanje $g \mapsto \pi_G$ definira homomorfizam između G i grupe permutacija od X.[1]

U specijalnom slučaju kada je promatrani skup Booleova algebra B, smatramo da grupa na nju djeluje automorfizmima. Točnije, za svaki $g \in G$, $g \cdot x = \pi_g(x)$, pri čemu je $\pi_g \in Aut(B)$. Budući da je $Aut(B)$ grupa funkcija na B, jednostavno definiramo njezino djelovanje na B kao $\pi \cdot x := \pi(x)$, gdje je $\pi \in Aut(B)$ i $x \in B$.

Definicija 4.1.2. *Neka je G grupa koja djeluje na skup X. Definiramo* ***stabilizator*** *elementa $x \in X$ kao $stab_G(x) := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$.*

Lako se pokaže da je $stab_G(x)$ podgrupa od G. Naime, neka su $g, h \in stab_G(x)$. Tada vrijedi $g^{-1}h \cdot x = x$ ako i samo ako vrijedi $h \cdot x = g \cdot x$, a to vrijedi jer je $x = x$, iz čega slijedi da je $g^{-1}h \in stab_G(x)$.

U nastavku smatramo da je B proizvoljna, ali fiksna, potpuna Booleova algebra.

[1] Za detalje vidi [18].

Definicija 4.1.3. *Neka je G grupa koja djeluje na B. Indukcijom po relaciji E definiramo preslikavanje $(g, u) \mapsto g \cdot u : G \times V^B \to V^B$ na sljedeći način:*

$$g \cdot u = \{(g \cdot x, g \cdot u(x)) \mid x \; E \; u\}$$

Dokažimo sada da je preslikavanje u prethodnoj definiciji zaista djelovanje na Booleovom proširenju.

Teorem 4.1.4. *Preslikavanje iz definicije 4.1.3 je djelovanje grupe G na V^B i pritom vrijede sljedeće tvrdnje:*

(i) Za svaki $u \in V^B$ i $g \in G$ vrijedi $D(g \cdot u) = \{g \cdot x \mid x \; E \; u\}$ i za $x \; E \; u$ imamo da vrijedi $(g \cdot u)(g \cdot x) = g \cdot u(x)$.

(ii) Za svaki $v \in V$ vrijedi $g \cdot \hat{v} = \hat{v}$.

Dokaz. Za početak dokazujemo da za svaki fiksan $g \in G$ preslikavanje $x \mapsto g \cdot x$, gdje je $x \in V^B$, preslikava V^B u V^B. Za to je dovoljno dokazati sljedeće:

Tvrdnja. Za svaki $\alpha \in On$, restrikcija od $x \mapsto g \cdot x$ na V^B_α preslikava V^B_α u V^B_α.

Dokaz. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za svaki $\beta \in \alpha$. Za $u \in V^B_\alpha$ postoji $\gamma \in \alpha$ takav da je $D(u) = V^B_\gamma$. Iz definicije slijedi da je $g \cdot u$ preslikavanje s $\{g \cdot x \mid x \; E \; u\} \subseteq V^B_\gamma$ u B, stoga je $g \cdot u \in V^B_{\gamma+1} \subseteq V^B_\alpha$. Dakle, imamo da restrikcija preslikavanja $x \mapsto g \cdot x$ na V_α preslikava V^B_α u V^B_α.

Da je preslikavanje $(g, u) \mapsto g \cdot u$ djelovanje grupe G na V^B dokazujemo induktivno. Neka su $g, h \in G$ i $u \in V^B$ i pretpostavimo da za sve $x \; E \; u$ vrijedi $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$. Sada imamo

$$\begin{aligned} g \cdot (h \cdot u) &= \{(g \cdot (h \cdot x), g \cdot (g \cdot u)(h \cdot x)) \mid x \; E \; u)\} \\ &= \{(g \cdot (h \cdot x), g \cdot (h \cdot u(x)) \mid x \; E \; u\} \\ &= \{(gh \cdot x, gh \cdot u(x)) \mid x \; E \; u\} \\ &= gh \cdot u. \end{aligned}$$

Analogno se dokazuje da vrijedi $1 \cdot u = u$, za svaki $u \in V^B$. Dakle, preslikavanje $(g, u) \mapsto g \cdot u$ je zaista djelovanje grupe G na V^B.

Tvrdnja (*i*) lagano slijedi iz definicije 4.1.3. Za tvrdnju (*ii*), neka je $v \in V$ proizvoljan i pretpostavimo da za svaki $y \; E \; v$ vrijedi $g \cdot \hat{y} = \hat{y}$. Sada imamo

$$\begin{aligned} g \cdot \hat{v} &= \{(g \cdot \hat{y}, g \cdot \hat{v}(\hat{y}) \mid \hat{y} \; E \; \hat{v}\} \\ &= \{(\hat{y}, g \cdot 1) \mid y \in v\} \\ &= \{(\hat{y}, 1) \mid y \in v\} = \hat{v}. \end{aligned}$$

Time smo dokazali tvrdnju (*ii*). ∎

Pokazuje se da vrijedi „zakon distributivnosti" djelovanja grupe i Booleovog preslikavanja, u smislu sljedeće leme.

Lema 4.1.5. *Neka je G grupa koja djeluje na B, i $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ proizvoljna B-formula. Tada za proizvoljne $u_1, \dots, u_n \in V^B$ i $g \in G$ vrijedi $g \cdot [\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!] = [\![\varphi(g \cdot u_1, \dots, g \cdot u_n)]\!]$.*

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po složenosti formule φ. Neka je φ atomarna formula, te $u, v \in V^B$ proizvoljni. Dokažimo da vrijedi $g \cdot [\![u \in v]\!] = [\![g \cdot u \in g \cdot v]\!]$ i $g \cdot [\![u = v]\!] = [\![g \cdot u = g \cdot v]\!]$. Pretpostavimo da za proizvoljne $x\ E\ u$ i $y\ E\ v$ vrijedi

$$\begin{aligned} g \cdot [\![x \in v]\!] &= [\![g \cdot x \in g \cdot v]\!], \\ g \cdot [\![x = v]\!] &= [\![g \cdot x = g \cdot v]\!], \\ g \cdot [\![u \in y]\!] &= [\![g \cdot u \in g \cdot y]\!], \\ g \cdot [\![u = y]\!] &= [\![g \cdot u = g \cdot y]\!]. \end{aligned}$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} g \cdot [\![u \in v]\!] &= g \cdot \bigvee_{y \in D(v)} ([\![y \in v]\!] \wedge [\![u = y]\!]) \\ &= \bigvee_{y \in D(v)} ([\![g \cdot y \in g \cdot v]\!] \wedge [\![g \cdot u = g \cdot y]\!]) \\ &= \bigvee_{y \in D(g \cdot v)} ((g \cdot v)(y) \wedge [\![g \cdot u = g \cdot y]\!]) \end{aligned}$$

Analogno se, po definiciji, dokazuje i $g \cdot [\![u = v]\!] = [\![g \cdot u = g \cdot v]\!]$.

Neka su $u_1, \dots, u_n \in V^B$, neka je $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ proizvoljna B-formula, i pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve glavne potformule od $\varphi(u_1, \dots, u_n)$. Za konjunkciju, disjunkciju i negaciju je tvrdnja trivijalna. Pretpostavimo stoga da je $\varphi(u_1, \dots, u_n) = \exists x \psi(x, u_1, \dots, u_n)$.

Slično kao kod opravdanja definicije 2.1.1, supremum po klasi V^B je zapravo supremum skupa $\{[\![\psi(x, u_1, \dots, u_n)]\!] \mid u \in V^B\} \subseteq B$. Vrijedi

$$g \cdot \bigvee_{u \in V^B} [\![\psi(u, u_1, \dots, u_n)]\!] = \bigvee_{u \in V^B} g \cdot [\![\psi(u, u_1, \dots, u_n)]\!].$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} g \cdot [\![\exists x \psi(x, u_1, \dots, u_n)]\!] &= g \cdot \bigvee_{u \in V^B} [\![\psi(u, u_1, \dots, u_n)]\!] \\ &= \bigvee_{u \in V^B} [\![\psi(g \cdot u, g \cdot u_1, \dots, g \cdot u_n)]\!] \\ &= \bigvee_{v \in V^B} [\![\psi(v, g \cdot u_1, \dots, g \cdot u_n)]\!] = [\![\varphi(g \cdot u_1, \dots, g \cdot u_n)]\!]. \end{aligned}$$

Time smo dokazali tvrdnju. ■

Budući da $Aut(B)$ djeluje na B, po teoremu 4.1.4 imamo da $Aut(B)$ djeluje i na V^B.

Definicija 4.1.6. *Kažemo da je element $x \in B$ ($x \in V^B$) **invarijantan** ako vrijedi $\pi(x) = x$ za svaki $\pi \in Aut(B)$. Kažemo da je Booleova algebra B **homogena** ako su 0 i 1 jedini invarijantni elementi.*

U homogenoj potpunoj Booleovoj algebri, svaka formula s parametrima koji su kanonska imena je ili apsolutno istinita ili apsolutno lažna.

Lema 4.1.7. *Neka je B homogena. Za formulu $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ i bilo koje $z_1, \ldots, z_n \in V$ vrijedi $[\![\varphi(\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n)]\!] \in 2 = \{0, 1\} \subseteq B$.*

Dokaz. Iz leme 4.1.5 i leme 4.1.3 slijedi da je $[\![\varphi(\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n)]\!]$ invarijantan element. Tvrdnja sada slijedi iz homogenosti od B. ■

U 1. poglavlju smo uveli pojam filtera, a u nastavku nam je potreban specijalan slučaj filtera koji se sastoji od podgrupa neke grupe.

Definicija 4.1.8. *Neka je G grupa koja djeluje na B i neka je F filter podgrupa od G.*[2] *Kažemo da je F **normalan filter** ako iz $g \in G$ i $H \in F$ slijedi $gHg^{-1} \in F$.*

Budući da u V^B ne možemo opovrgnuti AC, potrebno je V^B „smanjiti” na neki način tako da dobijemo „manji” model u kojem je AC apsolutno neistinit.

Definicija 4.1.9. *Neka je B potpuna Booleova algebra, G grupa koja djeluje na B, i F filter podgrupa od G. Transfinitnom rekurzijom definiramo **filtersko proširenje**:*

(i) $V_0^F := \emptyset$.

(ii) $V_{\alpha+1}^F := \{u : V_\alpha^F \to B \mid stab_G(u) \in F\}$.

(iii) $V_\alpha := \bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta$, *za granični ordinal α.*

(iv) $V^F := \bigcup_{\alpha\in On} V_\alpha$.

Ovime smo očito definirali potklasu od V^B. Sada definiramo alfabet $\mathcal{L}^F$ tako što iz alfabeta $\mathcal{L}^B$ izbacimo svaki konstantski simbol koji ne denotira neki element iz V^F. Formule alfabeta $\mathcal{L}^F$ nazivamo F**-formule**.

Na isti način kao u 2. poglavlju rekurzivno definiramo preslikavanje $[\![\cdot]\!]^F$ sa klase svih F-formula u Booleovu algebru B. Primijetimo da za $u, v \in V^F$ vrijedi $[\![u \in v]\!]^F = [\![u \in v]\!]^B$ te $[\![u = v]\!]^F = [\![u = v]\!]^B$.

[2] Odnosno, F je neprazan skup podgrupa od G za koji vrijedi da ako su $H, K \in F$, onda je $H \cap K \in F$ i ako vrijedi $H \in F$ i $H \subseteq K$, pri čemu je K podgrupa od G, onda je $K \in F$.

Lema 4.1.10. *Za svaki $x \in V$ vrijedi $\hat{x} \in V^F$.*

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po relaciji $\in$. Za $x \in V$ proizvoljan, pretpostavimo da za svaki $y \in x$ vrijedi $\hat{y} \in V^F$. Iz teorema 4.1.4 imamo da vrijedi $g \cdot \hat{x} = \hat{x}$ za svaki $g \in G$, stoga je $stab_G(\hat{x}) = G \in F$. Nadalje, vrijedi $D(\hat{x}) = \{\hat{y} \mid y \in x\} \subseteq V^F$, što zajedno s prethodnim daje $\hat{x} \in V^F$. ■

U nastavku pretpostavljamo da je F fiksan normalan filter podgrupa grupe G koja djeluje na B. Tada proširenje V^F nazivamo **normalno filtersko proširenje**.

Lema 4.1.11. *Grupa G djeluje na V^F.*

Dokaz. Dokažimo prvo da je za fiksan $g \in G$, $x \mapsto g \cdot x$ preslikavanje s V^F u V^F. Neka je $u \in V^F$ proizvoljan i pretpostavimo da za svaki $x \mathrel{E} u$ vrijedi $g \cdot y \in V^F$. Imamo da vrijedi $D(g \cdot u) = \{g \cdot x \mid x \mathrel{E} u\} \subseteq V^F$. Nadalje, vrijedi $stab_G(g \cdot u) = g stab_G(u) g^{-1}$. Naime, ako je $h \in stab_G(g \cdot u)$, tada je $g \cdot u = h \cdot (g \cdot u) = hg \cdot u$, a iz toga slijedi da je $g^{-1}hg \cdot u = u$, tj. $g^{-1}hg \in stab_G(u)$, pa vrijedi $h \in g stab_G(u) g^{-1}$. S druge strane, ako je $h \in g stab_G(u) g^{-1}$, tada postoji $k \in stab_G(u)$ takav da je $h = gkg^{-1}$. Sada vrijedi $gkg^{-1} \cdot (g \cdot u) = g \cdot u$, tj. $h \in stab_G(g \cdot u)$. Budući da je $stab_G(u) \in F$, a F je normalan filter, slijedi da je i $stab_G(g \cdot u) \in F$. Dakle, vrijedi $g \cdot u \in V^F$.

Tvrdnje $1 \cdot u = u$ i $g \cdot (h \cdot u) = gh \cdot u$ se dokazuju analogno kao u teoremu 4.1.4, iz čega zajedno s prethodnim dobivamo da G djeluje na V^F. ■

Za V^F vrijedi „zakon distributivnosti”, slično kao u lemi 4.1.5.

Lema 4.1.12. *Neka je $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ proizvoljna F-formula. Tada za proizvoljne $u_1, \dots, u_n \in V^F$ i $g \in G$ vrijedi $g \cdot [\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!] = [\![\varphi(g \cdot u_1, \dots, g \cdot u_n)]\!]$.*

Dokaz. Neka su $u, v \in V^F$ i $g \in G$. Primijetimo da iz leme 4.1.11 slijedi $g \cdot u, g \cdot v \in V^F$, stoga imamo

$$g \cdot [\![u \in v]\!]^F = g \cdot [\![u \in v]\!]^B = [\![g \cdot u \in g \cdot v]\!]^B = [\![g \cdot u \in g \cdot v]\!]^F.$$

Analogno se dokazuje tvrdnja za slučaj $u = v$. Nastavak tvrdnje dokazuje se jednako kao i u lemi 4.1.5. ■

Slično kao u 3. poglavlju, možemo definirati relaciju forsiranja.

Definicija 4.1.13. *Neka je P skup uvjeta potpune Booleove algebre B, $p \in P$, te φ F-rečenica. Kažemo da $p \in P$ **F-forsira** φ, i pišemo $p \Vdash_F \varphi$, ako vrijedi $p \leq [\![\varphi]\!]^F$.*

Iz leme 4.1.12 jednostavno slijedi da za proizvoljnu F-formulu $\varphi(x_1, \ldots, x_n), u_1, \ldots, u_n \in V^F$, $p \in P$ i $g \in G$ takve da je $g \cdot p \in P$, vrijedi da $p \Vdash_F \varphi(u_1, \ldots, u_n)$ povlači $g \cdot p \Vdash_F \varphi(g \cdot u_1, \ldots, g \cdot u_n)$.

Analogna tvrdnja teoremu 2.1.13 vrijedi u slučaju kada B zamijenimo s F. Dokaz je potpuno isti.

Teorem 4.1.14. *Svaki aksiom teorije ZF je apsolutno istinit u V^F.*

Dokaz da aksiomi vrijede u V^F analogan je onima iz 2. poglavlja, s jednom razlikom što sada moramo provjeriti da je stabilizator pripadnih skupova u F. Za detalje vidi [2].

Sada odabiremo odgovarajuću Booleovu algebru, grupu i normalan filter F za kojeg vrijedi $V^F \models \neg AC$.

Neka je $X = 2^{\omega \times \omega}$, $B = RO(2^{\omega \times \omega})$ i neka je G grupa permutacija od ω. Svaki $g \in G$ inducira homeomorfizam[3] $h_g : X \to X$ definiran s $h_g(f(m,n)) = f(m, g \cdot n)$, gdje je $f \in X$ i $m, n \in \omega$. Pomoću tog homeomorfizma definiramo djelovanje grupe G na B s $g \cdot b = h_g^{-1}(b) = \{f \in X \mid h_g(f) \in b\}$.

Provjerimo da je to zaista djelovanje. Uzmimo proizvoljne $g, k \in G$ i $b \in B$. Sada imamo $g \cdot (k \cdot b) = \{f \in X \mid h_g(f) \in k \cdot b\} = \{f \in X \mid h_g(f) \in X \text{ i } h_k(h_g(f)) \in b\} = \{f \in X \mid h_k(h_g(f)) \in b\}$. No za $m, n \in \omega$ imamo da vrijedi $h_k(h_g(f))(m,n) = h_g(f)(m, k \cdot n) = f(m, g \cdot (k \cdot n)) = f(m, (gk) \cdot n) = h_{gk}(f)(m,n)$. Iz toga sada slijedi da je $g \cdot (k \cdot b) = (gk) \cdot b$. Također, $id \cdot b = \{f \in X \mid h_{id}(f) \in b\} = \{f \in X \mid f \in b\} = b$, pri čemu je id identiteta na ω.

Za svaki $n \in \omega$ označimo pripadni stabilizator elementa n s $G_n := \{g \in G \mid g \cdot n = n\}$. Očito je G_n podgrupa od G. Neka je F filter podgrupa generiranih s familijom $\{G_n \mid n \in \omega\}$, tj. F je skup svih podgrupa H od G takvih da vrijedi $G_I \subseteq H$ za neki konačan I, gdje je $I \subseteq \omega$ i $G_I = \bigcap_{n \in I} G_n$.

Dokažimo da je takav filter normalan. Neka je $g \in G$ i $H \in F$. Tada vrijedi $G_I \subseteq H$ i očito je gHg^{-1} podgrupa od G. Preostaje stoga dokazati da vrijedi $G_J \subseteq gHg^{-1}$ za neki konačan skup $J \subseteq \omega$. Iz pretpostavke slijedi da je $gG_Ig^{-1} \subseteq gHg^{-1}$, a budući da vrijedi $g\Big(\bigcap_{n \in I} G_n\Big)g^{-1} = \bigcap_{n \in I}(gG_ng^{-1}) = \bigcap_{n \in I} G'_n$, slijedi da je

$$G_I = \bigcap_{n \in I} G'_n = gG_Ig^{-1} \subseteq gHg^{-1}.$$

Dokažimo sada jednu korisnu tehničku lemu.

Lema 4.1.15. *Neka je $P = Fn(\omega \times \omega, 2)$ skup uvjeta za B, $p \in P$, $I \subseteq \omega$ konačan i $n \notin I$. Tada postoji $g \in G_I$ takav da vrijedi $p \wedge g \cdot p \neq 0$ i $g \cdot n \neq n$.*

[3] Vidi [15].

Dokaz. Uzmimo $n' \in \omega$ takav da vrijedi $n' \notin I \cup \{n\}$ i $(m, n') \notin D(p)$ za svaki $m \in \omega$. Neka je $g \in G$ zadana s $g \cdot n := n'$, $g \cdot n' := n$ i $g \cdot x := x$ za sve x različite od n i n'. Očito je $g \in G_I$ te vrijedi $g \cdot n \neq n$.

Imamo $g \cdot N(p) = g \cdot \{f \in X \mid p \subseteq f\} = \{f \in X \mid p \subseteq h_g(f)\}$. Naime, ako je $k \in g \cdot N(p)$, onda vrijedi $k = h_g^{-1}(f)$, pri čemu je $f \in N(p)$. No iz toga slijedi da je $h_g(k) = f \supseteq p$. S druge strane, ako je $f \in X$ takav da je $p \subseteq h_g(f)$, tada imamo da vrijedi $f = h_g^{-1}(h_g(f)) \in g \cdot N(p)$.

Očito vrijedi $\{f \in X \mid p \subseteq h_g(f)\} = \{f \in X \mid (i, j) \in D(p) \to f(i, g \cdot j) = p(i, j)\}$.

Neka je $L = \{l_1, \ldots, l_k\}$ konačan skup indeksa takav da vrijedi $(l, n) \in D(p)$ za svaki $l \in L$. Sada imamo, uzevši u obzir identifikaciju $N(p)$ s p, da je

$$p \wedge g \cdot p = N(p) \cap g \cdot N(p) = \{f \in X \mid p \subseteq f \text{ i } (\forall l \in L)(f(l, n') = p(l, n))\},$$

što je neprazno jer vrijedi $(l, n') \notin D(p)$ za svaki $l \in L$. ■

Za skup X kažemo da je **Dedekind-beskonačan** ako postoji pravi podskup Y od X, za koji postoji bijekcija između X i Y. Inače kažemo da je skup X **Dedekind-konačan**. U teoriji ZF se općenito konačnost i Dedekind-konačnost ne podudaraju: za to nam je potreban aksiom izbora. Točnije, ako vrijedi aksiom izbora, onda je Dedekind-konačnost ekvivalentna konačnosti.[4] Stoga, ukoliko pronađemo model teorije ZF u kojem postoji Dedekind-konačan skup koji je beskonačan, to znači da u tom modelu ne vrijedi aksiom izbora, tj. u tom modelu vrijedi $\neg AC$.

Teorem 4.1.16. *Neka je $B = RO(2^{\omega\times\omega})$, G grupa permutacija od ω koja djeluje na B, i F filter podgrupa generiran s $\{G_n \mid n \in \omega\}$. Tada u V^F postoji Dedekind-konačan skup koji je beskonačan podskup od $\mathscr{P}(\hat{\omega})$.*

Dokaz. Za svaki $n \in \omega$ definiramo $u_n \in B^{D(\hat{\omega})}$ sa $u_n(\hat{m}) := \{f \in 2^{\omega\times\omega} \mid f(m, n) = 1\}$. Lagano imamo $[\![u_n \subseteq \hat{\omega}]\!] = \bigwedge_{m\in\omega} (u_n(\hat{m}) \Rightarrow [\![\hat{m} \subseteq \hat{\omega}]\!]) = 1$.

Budući da je $u_n \in V^B$, po teoremu 4.1.4 se djelovanje grupe G može proširiti do djelovanja na V^B.

Tvrdnja 1. Za svaki $g \in G$ i za svaki $n \in \omega$ vrijedi $g \cdot u_n = u_{g\cdot n}$.

Dokaz. Postoji barem jedno djelovanje grupe G na $B^{\hat{\omega}}$; fiksirajmo jedno takvo. Po definiciji djelovanja je $g \cdot u_n \in B^{D(\hat{\omega})}$, stoga je $D(g \cdot u_n) = D(\hat{\omega})$. Očito je $D(u_{g\cdot n}) = D(\hat{\omega})$, tj. vrijedi

[4] Za detalje vidi [16].

$D(g \cdot u_n) = D(g_{g \cdot n})$. Iz teorema 4.1.4 slijedi da je $g \cdot \hat{\omega} = \hat{\omega}$. Tada

$$\begin{aligned}(g \cdot u_n)(\hat{m}) = (g \cdot u_n)(g \cdot \hat{m}) = (g \cdot u_n(\hat{m})) &= \\ &= h_g^{-1}(\{f \in 2^{\omega\times\omega} \mid f(m,n) = 1\}) \\ &= \{f \in 2^{\omega\times\omega} \mid h_g(f(m,n)) = 1\} \\ &= \{f \in 2^{\omega\times\omega} \mid f(m, g \cdot n) = 1\} = u_{g \cdot n}(\hat{m}),\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. ■

Uzmimo $g \in G_n$. Tada imamo $g \cdot u_n = u_{g \cdot n} = u_n$, tj. $g \in stab_G(u_n)$. Dakle, $G_n \subseteq stab_G(u_n)$. Budući da je $G_n \in F$ i F je filter, slijedi da je $stab_G(u_n) \in F$. Iz toga pak slijedi da je $u_n \in F$.

Tvrdnja 2. $V^F \models u_n \neq u_{n'}$ za $n \neq n'$.

Dokaz. Znamo da je $P = Fn(\omega \times \omega, 2)$ skup uvjeta za B. Sada je dokaz analogan dokazu tvrdnje 2. teorema 3.3.5. ■

Definirajmo $s := \{u_n \mid n \in \omega\} \times \{1\}$. Budući da je $s \in V^B$, po teoremu 4.1.4 imamo

$$\begin{aligned}g \cdot s &= \{(g \cdot x, g \cdot 1) \mid x \in \{u_n \mid n \in \omega\}\} \\ &= \{(g \cdot u_n, 1) \mid n \in \omega\} \\ &= \{(u_{g \cdot n}, 1) \mid n \in \omega\} \\ &= \{(u_{n'}, 1) \mid n' \in \omega\} = s.\end{aligned}$$

Kako to vrijedi za svako $g \in G$, slijedi da je $stab_G(s) = G \in F$, tj. $s \in V^F$.
Nadalje,

$$[\![s \subseteq \mathscr{P}(\hat{\omega})]\!] = \bigwedge_{x \in D(s)} (s(x) \Rightarrow [\![x \in \mathscr{P}(\hat{\omega})]\!]) = \bigwedge_{n \in \omega} (1 \Rightarrow [\![u_n \subseteq \hat{\omega}]\!]) = 1.$$

Iz tvrdnje 2. slijedi tvdnja $V^F \models$ „s je beskonačan”.

Tvrdnja 3. Vrijedi $p \Vdash_F (x \in s)$ ako i samo ako $(\forall q \leq p)(\exists r \leq q)(\exists n \in \omega)(r \Vdash_F (x = u_n))$.

Dokaz. Vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$\begin{aligned}
p \Vdash_F (x \in s) &\equiv p \leq [\![x \in s]\!] \\
&\equiv p \leq \bigvee_{n\in\omega} [\![x = u_n]\!] \\
&\equiv (p \wedge \bigwedge_{n\in\omega} [\![x \neq u_n]\!]) = 0 \\
&\equiv (\forall q \leq p)(q \nleq \bigwedge_{n\in\omega} [\![x \neq u_n]\!]) \\
&\equiv (\forall q \leq p)(\exists n \in \omega)(q \nleq [\![x \neq u_n]\!]) \\
&\equiv (\forall q \leq p)(\exists n \in \omega)\neg(q \Vdash_F x \neq u_n) \\
&\equiv (\forall q \leq p)(\exists n \in \omega)(\exists r \leq q)(r \Vdash_F x = u_n),
\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. ■

Tvrdimo da vrijedi $V^F \models$ „s je Dedekind-konačan". Za to je dovoljno pokazati da postoji $f \in V^F$ takav da vrijedi

$$[\![func(f) \wedge D(f) = \hat{\omega} \wedge \mathrm{Im}(f) \subseteq s \wedge „f \text{ je injekcija"}]\!] = 0.$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da je istinitosna vrijednost gornje formule različita od 0. Tada postoji $p_0 \in Fn(\omega \times \omega, 2)$ takav da vrijedi

$$p_o \Vdash_F func(f) \wedge D(f) = \hat{\omega} \wedge \mathrm{Im}(f) \subseteq s \wedge „f \text{ je injekcija"}.$$

Budući da je $f \in V^F$, vrijedi $stab_G(f) \in F$, pa postoji konačan skup $I = \{n_1, \ldots, n_k\}$ takav da je $G_I \subseteq stab_G(f)$. Međutim, vrijedi $p_0 \Vdash_F func(f) \wedge$ „f je injekcija", iz čega slijedi $p_0 \Vdash_F (\exists x \in \hat{\omega})(f(x) \neq u_{n_1} \wedge \ldots \wedge f(x) \neq u_{n_k})$. Iz toga pak sijedi da postoje $p \leq p_0$ i $m \in \hat{m}$ takvi da vrijedi $p \Vdash_F f(\hat{m}) \neq u_{n_1} \wedge \ldots \wedge f(\hat{m}) \neq u_{n_k}$.

Iz $p_0 \Vdash_F f(\hat{m}) \in s$ slijedi da vrijedi $p \vdash_F f(\hat{m}) \in s$. Sada po tvrdnji 3. postoje $r \leq p$ i $n \in \omega$ takvi da vrijedi $r \Vdash_F f(\hat{m}) \in u_n$. No tada imamo da vrijedi $r \Vdash_F f(\hat{m}) \neq u_{n_1} \wedge \ldots \wedge f(\hat{m}) \neq u_{n_k}$, što zajedno s prethodnim daje da imamo $n \neq n_1, \ldots, n_k$, tj. $n \notin I$.

Po lemi 4.1.15 slijedi da postoji $g \in G_I$ takav da vrijedi $p \wedge g \cdot p \neq 0$ i $g \cdot n \neq n$. Po prethodnom sada imamo da vrijedi $g \cdot r \Vdash_F (g \cdot f)(\hat{m}) = g \cdot u_n$. Sada iz teorema 4.1.4, tvrdnje 1. i činjenice da je $g \in G_I \subseteq stab_G(f)$, slijedi da je $g \cdot r \Vdash_F f(\hat{m}) = u_n$. Nadalje, budući da je $r \wedge g \cdot r \neq 0$, postoji $q \in P$ takav da vrijedi $q \leq r$ i $q \leq g \cdot r$. Tada je $p \leq p_0$ i vrijedi $q \Vdash_F f(\hat{m}) = u_n \wedge f(\hat{m}) = u_{g \cdot n}$. Budući da je $g \cdot n \neq n$, pomoću tvrdnje 2. dobivamo $[\![u_{g \cdot n} \neq u_n]\!] = 1$, stoga vrijedi $q \Vdash_F u_{g \cdot n} \neq u_n$. Na kraju imamo $q \Vdash_F \neg func(f)$, što je kontradikcija s pretpostavkom, tj. vrijedi $V^F \models$ „s je Dedekind-konačan". ■

Iz prethodnog teorema slijedi sljedeći vrlo važan teorem.

Teorem 4.1.17. *Ako je teorija ZF konzistentna, tada je konzistentna i teorija $ZF + \neg AC$.*

Ovime je dokazana nezavisnost aksioma izbora od teorije ZF.

Bibliografija

[1] Jon Barwise, *Handbook of mathematical logic*, sv. 90, Elsevier, 1982.

[2] John Bell, *Set theory: Boolean-valued models and independence proofs*, sv. 47, Oxford University Press, 2011.

[3] Vedran Čačić, *Nezavisnost i relativna konzistentnost aksioma izbora i hipoteze kontinuuma*, Disertacija, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2007.

[4] Timothy Chow, *A beginner's guide to forcing*, Communicating mathematics **479** (2009), 25–40.

[5] Paul Cohen, *Set theory and the continuum hypothesis*, Courier Corporation, 2008.

[6] Keith Devlin, *The joy of sets: fundamentals of contemporary set theory*, Springer Science & Business Media, 2012.

[7] ______, *Constructibility*, sv. 6, Cambridge University Press, 2017.

[8] Frank Robert Drake i Thomas Jech, *Set theory: An introduction to large cardinals*, (1976).

[9] Frank Robert Drake i Dasharath Singh, *Intermediate set theory*, (1999).

[10] Ryszard Engelking, *General topology, Sigma series in pure mathematics, vol. 6*, 1989.

[11] Marcus Giaquinto, *The search for certainty: A philosophical account of foundations of mathematics: A philosophical account of foundations of mathematics*, Clarendon Press, 2002.

[12] Steven Givant i Paul Halmos, *Introduction to Boolean algebras*, Springer Science & Business Media, 2008.

[13] Lorenz Halbeisen, *Combinatorial set theory*, Springer, 2012.

[14] Joel David Hamkins, *The set-theoretic multiverse*, The Review of Symbolic Logic **5** (2012), br. 3, 416–449.

[15] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, 2002.

[16] Horst Herrlich, *Axiom of choice*, Springer, 2006.

[17] Karel Hrbacek i Thomas Jech, *Introduction to set theory, revised and expanded*, Crc Press, 1999.

[18] Thomas W Hungerford, *Abstract algebra: an introduction*, Cengage Learning, 2012.

[19] Thomas Jech, *The axiom of choice*, Courier Corporation, 2008.

[20] ______, *Set theory*, Springer Science & Business Media, 2013.

[21] Peter Koellner, *Hamkins on the multiverse*, Unpublished, May (2013).

[22] Kenneth Kunen, *Set theory an introduction to independence proofs*, sv. 102, Elsevier, 2014.

[23] Anatoly Kusraev i Semen Samsonovich Kutateladze, *Boolean valued analysis*, sv. 494, Springer Science & Business Media, 2012.

[24] Sibe Mardešić i Krešimir Delinić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru*, Školska knjiga, 1989.

[25] Dana Scott, *A Proof of the Independence of the Continuum Hypothesis*, Theory of Computing Systems **1** (1967), br. 2, 89–111.

[26] Saharon Shelah, *The future of set theory*, arXiv preprint math/0211397 (2002).

[27] ______, *Logical dreams*, arXiv preprint math/0211398 (2002).

[28] Patrick Suppes, *Axiomatic set theory*, Courier Corporation, 1960.

[29] Mladen Vuković, *Teorija skupova*, PMF, Zagreb (2006).

[30] ______, *Matematička logika*, Element, 2009.

Sažetak

Glavni je cilj rada dokazati nezavisnost aksioma kontruktibilnosti, hipoteze kontinuuma i aksioma izbora od teorije ZF. Za dokaze tih tvrdnji ne koristimo poznatu Cohenovu metodu *forcinga*, već nešto intuitivniju teoriju proširenih modela.

U prvom poglavlju uvodimo osnovne pojmove matematičke logike, teorije skupova, teorije Booleovih algebri te topologije. Relativna opsežnost prvog poglavlja je uvjetovana potrebama u daljnjem tekstu, a smatramo da je bolje neke stvari naglasiti odmah na početku, pa se u nastavku na njih samo pozivati. Ipak, to poglavlje sadrži neke same po sebi interesantne rezultate (primjerice Stoneov teorem).

Drugo poglavlje, u kojem se uvodi pojam proširenog modela, glavni je dio teksta. Zatim dokazujemo neka osnovna svojstva takve strukture, da bismo na kraju dokazali da u takvim modelima vrijede svi aksiomi teorije ZFC.

Treće poglavlje sadrži prve dokaze nezavisnosti. Nakon kratkog uvođenja nekih pojmova *forcinga*, u nastavku dokazujemo nezavisnost aksioma konstruktibilnosti od teorije ZF, a kao krunu poglavlja dokazujemo nezavisnost hipoteze kontinuuma od teorije ZF. Kako bismo to dokazali, izabiremo posebnu Booleovu algebru pomoću koje dobivamo prošireni model u kojem vrijedi negacija hipoteze kontinuuma.

U zadnjem, četvrtom poglavlju, dokazujemo nezavisnost aksioma izbora od teorije ZF i time završavamo dokaze nezavisnosti. Interesantno je da u dokazu nezavisnosti aksioma izbora koristimo metodu sličnu onoj koju su razvili Fraenkel i Mostowski desetljećima prije *forcinga*.

Summary

The main goal of this thesis is to prove the independence of the axiom of constructibility, continuum hypothesis and the axiom of choice from ZF theory.

In the first chapter, we introduce basic notions of mathematical logic, set theory, theory of Boolean algebras, and topology. Relatively long first chapter is due to the needs in later parts of the text, and we think that it is better to emphasize certain things at the beginning, in order to refer to them later. Nevertheless, this chapter is not without interesting results (Stone's theorem, for example).

The second chapter is the main part of the text, in which we introduce Boolean-valued models. We then prove some basic properties of such structures, and at the end, we prove that every axiom of ZF theory is true in every Boolean-valued model.

Main topic of the third chapter are the independence results. After a short introduction of the forcing notion, we prove the independence of axiom of constructibility from ZF theory, and then we prove the most important result of this chapter: independence of continuum hypothesis from ZF theory. In order to prove that, we choose a concrete Boolean algebra, and then construct Boolean-valued model with it, in which continuum hypothesis fails.

In the last, fourth chapter, we prove independence of axiom of choice from ZF theory, thus concluding our work on independence proofs. It is interesting to note that in this chapter we use somewhat similar technique to the one which was discovered and ramified by Fraenkel and Mostowski, decades before the invention of the method of forcing.

Životopis

Rođen sam 24.8.1994. u Karlovcu. U istom gradu sam pohađao te završio osnovnu i srednju školu, a preddiplomski studij upisujem 2013. godine. Tri godine kasnije upisujem diplomski studij teorijske matematike, kojeg ću vjerojatno završiti u 2018. godini. Tokom većeg dijela studiranja intenzivno proučavam matematičku logiku, najviše teoriju skupova, a također i povijest te filozofiju. Zagriženi sam protivnik pošasti pod nazivom „intuicionizam”, jer ga smatram filozofski neutemeljenim i matematički štetnim. U slobodno vrijeme igram šah, sviram bas gitaru i nastojim što više proširiti znanje o književnosti i glazbi, premda ne razumijem poeziju. Veliki sam obožavatelj i štovatelj lika i djela Richarda Wagnera, čija djela smatram vrhuncem umjetničkog stvaralaštva. Član sam Matice hrvatske.