SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marta Cota

NE-ARBITRAŽNE CIJENE UZ SISTEMSKI RIZIK

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc.Zoran Vondraček

Zagreb, srpanj, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

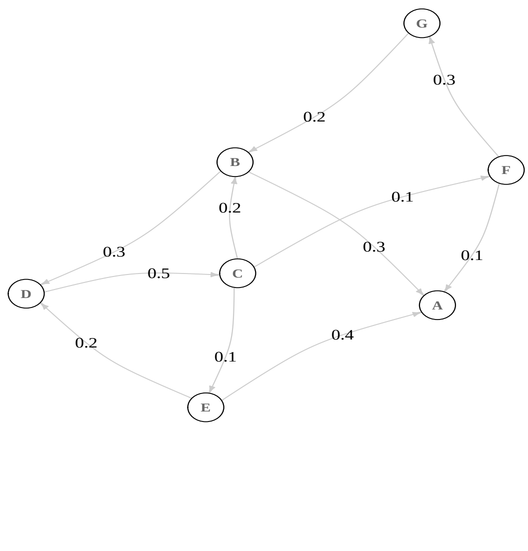
1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mami, tati i Rini. Ali, tati.

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom doprinosimo rješavanju problematike na području određivanja ne-arbitražnih cijena obveza i kapitala poduzeća, u slučaju međuposrednštva. Kako je problematika izračuna usko vezana uz modele kreditnog rizika, ukratko prolazimo kroz njihov povijesni razvoj. Izračun ne-arbitražnih vrijednosti obveza, u sustavu većeg broja poduzeća, uz mogućnost međuposredništva vrlo je aktualan i netrivijalan problem. Naime, odluka o međusobnom posjedovanju vlasničkih udjela unutar iste proizvodne grane omogućava svojevrsnu kontrolu konkurencije. S druge strane, udruživanje na takav način daje mogućnost suradnje u svrhu ubrzanja proizvodnje ili pak smanjenja rizika lošeg poslovanja. Pozitivan utjecaj međuposredništva kod poduzeća predmet je brojnih rasprava i članaka. Egzistencija i/ili jedinstvenost vrijednosti duga i kapitala članova sustava omogućuje procjenu njihovih solventnosti. Vrlo česta pojava u sustavima je *ciklička povezanost*, koju jednostavno prikazujemo grafom.



Slika 0.1: Ciklička povezanost u sustavu

Prethodnom grafu pridružena je *matrica međuposredništva*, koju formalno definiramo u nastavku. Jedan od ciklusa je i $D \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow B \rightarrow D$. Cikličnost u sustavima predstavlja opasnost od *financijske zaraze*. Naime, bankrotom poduzeća B, poduzeće G gubi na vrijednosti imovine, što također uzrokuje pad u C itd. Ovakav primjer iziskuje mjere *sistemskog rizika*, koje bi davale informaciju o stabilnosti sustava međuposredništva. Razvoj modela vrijednosti obveza poduzeća započinjemo primjerom za jedno poduzeće, poznatim kao *Mertonovim modelom korporativnog duga*. Proširenje na sustav je generalizacija Mertonovog modela. Ključni dio rada prezentacija je fundamentalnih rezultata o egzistenciji i jedinstvenosti vrijednosti obveza i dioničkog kapitala za svakog člana grupe od n poduzeća, modeliranog po uzoru na [8].

Poglavlje 1

Financijska međuovisnost poduzeća

1.1 Empirijska istraživanja

Financijsko međuposredništvo danas je prvenstveno prisutno na financijskim tržištima. Pri analizi potencijalnih uzročnika globalne financijske krize, samo modeliranje međuposredništva među financijskim institucijama, osiguravajućim kućama i vodećim poslovnim bankama pokazalo se izuzetno zahtjevnim. Kompleksne financijske izvedenice i pojave ciklusa u grafovima međuposredništva predstavljale su izazov financijskim i ekonomskim analitičarima.

Modeliranje financijske međuovisnosti kod poduzeća znantno je slabije razmatrano. Ipak, empirijski podaci o količini međuposredništva u velikim gospodarstvima upozoravaju na mogućnost *sistemskog rizika*. Ritzberger i Shorish već 2002. godine u [18] upozoravaju na problem modeliranja međuposredništva među poduzećima, i na teoretskoj i empirijskoj razini. McDonald u svom radu ([16]), na temelju empirijskih podataka o međuposredništvu javno izdanih japanskih poduzeća, procjenjuje dvostruko računanje imovine proizašlo iz uzajamnog posredništva čini čak 24% ukupne tržišne kapitalizacije Japana. Problematika dvostrukog računanja uvedena je i u [18], napominjući kako je knjigovodstvena vrijednost poduzeća u opasnosti od precjenjivanja.

Ni u Kini međuposredništvo nije zapostavljeno. U [24], Wang zaključuje kako učinak međuposredništva pokazuje dvojake rezultate vezane uz kompetitivnost na tamošnjem tržištu roba i proizvoda. U Sjedinjenim Američkim Državama mjere konkurentnosti domaćeg tržišta upozoravaju na značajan rast financijske međuovisnosti proizvodnih poduzeća u obliku kupnje vlasničkih udjela u dioničkom kapitalu. He i Huang u [14] ističu kako Sjedinjenje Američke Države bilježe skok u tzv. *institucionalnim posredništvima* nad poduzećima iste gospodarske grane sa 10% 1980. na čak 60% 2014. godine.

Karakterističan primjer gospodarstva u kojem je međusobno posredništvo vrlo razvijeno upravo je Japan. Posljedice valova rasta međuposredništva (japanskog naziva *keiretsu*)

1990-ih i netom prije globalne krize, 2007. godine i potencijalni uzroci istih navedeni su u [19], [1]. Suzuki, na primjeru velikog gospodarstva poput Japana, u [20] upozorava na posljedice tzv. "*Mochiai*" efekta. Upravo Suzukijev model vrijednosti duga i kapitala u slučaju dva poduzeća predstavlja početak razvoja ovakvih modela.

Zemlje zapadne Europe karakterizira međuposredništvo *institucionalnog* oblika. Naime, uobičajeno je da velike vlasničke udjele u poduzećima iste gospodarske grane imaju isti ulagači, kao što je slučaj u njemačkoj automobilskoj industriji. Posredništvo ovakvog oblika ipak ne uključuje međuposredništvo među poduzećima (engl. "*cross-shareholding*").

1.2 Matematičko modeliranje međuposredništva

Razvoj u modeliranju kreditnih rizika i ne-arbitražnih vrijednosti poduzeća u slučaju međuposredništva u zadnjih 20 godina svodi se na svega desetak radova, od kojih ključne navodimo u nastavku.

Začetnikom modeliranja vrijednosti duga poduzeća smatra se Robert C. Merton. Već 1976. postavlja temelje tzv. *strukturnih modela*. U svome poznatome radu [17], određivanjem cijena duga i kapitala kao funkcija vrijednosti poduzeća, prezentira i formulu za izračun vjerojatnosti bankrota. Revolucionarna Mertonova ideja o modeliranju duga i kapitala kao financijskih izvedenica vrijednosti imovine poduzeća potiče razvoj *strukturnih* modela.

Metodologija spomenutih modela zasniva se na povezivanju kreditnog rizika sa vrijednošću poduzeća kao *strukturnom varijablom*. Uvođenjem slučajnog procesa koji modelira kretanje kamatne stope, razmatranjem pojave bankrota i prije trenutka dospijeća obveza i razna druga proširenja sistematično su objašnjena u [3] i [2]. Kritike strukturnih modela su pretpostavka o neprekidnom trgovanju imovinom poduzeća i težina njihove implementacije. Kao što Wang navodi u [25], modeliranje slučajnog procesa vrijednosti imovine, uz javno dostupne informacije o poduzećima može biti poprilično zahtjevno.

Kritike strukturnih modela potiču razvoj modela u reduciranom obliku (engl. *reduced-form models*), u kojima je preostalo vrijeme do bankrota poduzeća modelirano pomoću egzogenog stohastičkog procesa. Cilj reduciranih modela je određivanje vjerojatnosti bankrota, a ne samih likvidacijskih vrijednosti. Detaljnija objašnjenja dostupna su u [3] i [2].

S obzirom da je cilj ovog rada izračun ne-arbitražnih cijena dugova i kapitala svakog poduzeća, *strukturni modeli* predstavljaju bazu za generalizaciju.

Izuzev radova koje navodimo u nastavku, modeliranje sustava većeg broja poduzeća koncentrirano je na *reducirani* pristup. Povratak *strukturnim* modelima omogućava rad Teruyoshi Suzukija, koji u [20] razvija model duga za svako od dva poduzeća u međuposredništvu. Suzuki navodi eksplicitne formule za vrijednosti duga i kapitala, na temelju područja solventnosti jednog, drugog ili oba poduzeća. Spomenuta područja sistematično prikazuje u koordinatnoj ravnini za slučajeve međuposredništva nad dugom i kapitalom zasebno. Za $n \geq 2$ definira vrijednost duga poduzeća kao fiksnu točku preslikavanja, slično kao i u ovome radu.

Eisenberg i Noe u [6] pretpostavljaju posredništvo samo nad dugom. Dokazuju egzistenciju vrijednosti dugova iteracijama tzv. "*fictious sequential default*" algoritma, koji u svakom koraku provodi dinamičku prilagodbu sustava s obzirom na (nove) bankrote poduzeća, računa ne-arbitražne vrijednosti duga nakon prilagodbe. Predloženi algoritam motivira razvoj hibridnog algoritma u [12], kombinacijom prethodne dinamičke prilagodbe i iteracija koje ćemo prezentirati u nastavku.

Elsinger u obzir uzima i prioritet naplate duga vjerovnicima, pozivajući se na *pravilo apsolutnog prioriteta*. Međutim, obveze poduzeća modelira najjednostavnijim financijskim instrumentima - obveznicama bez kuponskih isplata, sa jednokratnom isplatom u vremenu dospijeća, analogno Mertonovom modelu. Detalji su dostupni u [7].

Još jedan primjer modela donose Gouriéroux, Héam i Monfort, u [10], promatrajući sustav poslovnih banaka. Modeliraju vrijednost duga uz izostanak međuposredništva kapitala i pretpostavki vezanih uz prioritet naplate dugova. Izvedenice koje modeliraju obveze banaka ponovno s obveznice bez kuponskih isplata i jednokratnom isplatom po dospijeću. Algoritam koji predlažu rješava problem linearnog programiranja, bazira se na simpleks metodi.

Konačno, Fischer u [8] modelira sustav od većeg broja poduzeća, pretpostavlja veći spektar financijskih izvedenica poput *call* i *put* opcija na dugove ili kapital poduzeća. Međuposredništvo je modelirano matricom, slično kao u [7] i [20].

Poglavlje 2

Oznake i pripremni rezultati

2.1 Matematički pripremni rezultati

U nastavku uvodimo pojmove koje ćemo koristiti kroz preostala poglavlja i navodimo sve potrebne rezultate za dokaz egzistencije i jedinstvenosti vektora ne-arbitražnih vrijednosti obveza i kapitala. Međuposredništvo među poduzećima opisujemo matricom $\mathbf{M}$, koja ima svojstvo tzv. *lijeve substohastičnosti*, koje opisujemo pomoću njezinih stupaca.

Definicija 2.1.1. *Matrica $\mathbf{M} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ je lijevo substohastična, ako vrijedi:*

1. $M_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, n$

2. $\sum_{i=1}^{n} M_{ij} \leq 1, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$

Stupac matrice $\mathbf{M}$ za koji vrijedi stroga nejednakost u 2. nazivamo strogo substohastičkim stupcem.

Matrice kojima svi stupci zadovoljavaju svojstvo stroge substohastičnosti nazivamo *strogo substohastičkim matricama*. Nadalje, vektor egzogeno dane imovine - neovisne o promatramom sistemu poduzeća - uvodimo kao vektor stupac $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^\intercal$. U koracima algoritma, kojim pronalazimo vektor nearbitražnih cijena, koristimo elementarne funkcije, primijenjene na vektore. Funkcije na vektorima ili matricama definiramo po komponentama. Primjerice, pozitivni dio vektora definiramo sa: $(\mathbf{a})^+ := (a_1^+, a_2^+, \dots, a_n^+)$. Analogno, definiramo funkcije minimuma, maksimuma, negativnog dijela, $min(\cdot,\cdot)$, $max(\cdot,\cdot)$, $(\cdot)^-$. Uspoređivanje matrica i vektora također provodimo po njihovim komponentama. Tako za matrice $\mathbf{M}, \mathbf{N} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ vrijedi:

$$\mathbf{M} \geq \mathbf{N} \Leftrightarrow M_{i,j} \geq N_{i,j}, \quad \forall i, j \in 1, 2, \dots, n.$$

Analogne nejednakosti definiramo i za vektore. Također, u daljnjem ćemo vektor samih nula $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$ označavati skraćeno sa $\mathbf{0}$, odnosno vektor jedinica u $\mathbf{R}^n$ sa $\mathbf{1}$. Jedan od ciljeva ovoga rada je uvesti mjere rizika *financijske zaraze* cijelog sistema poduzeća. U tu svrhu, koristit ćemo normu l_1 na $\mathbb{R}^n$:

$$||\mathbf{x}||_1 := \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{x}_i|.$$

$||\cdot||_1$ u $\mathbf{R}^n$ inducira matričnu normu

$$||\mathbf{M}||_1 = \max_{||\mathbf{x}||_1=1} ||\mathbf{M}\cdot\mathbf{x}||_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} M_{i,j}.$$

S obzirom da je matrica međuposredništva $\mathbf{M}$ *lijevo substohastična*, vrijedi: $||\mathbf{M}||_1 \leq 1$. Iz definicije matrične norme u l_1 lako zaključujemo da se ona postiže upravo na stupcu j, najvećem po sumi. Primijetimo, vrijedi i nejednakost: $||\mathbf{M}\cdot\mathbf{x}||_1 \leq ||\mathbf{M}||_1||\mathbf{x}||_1, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Tvrdnju lako dokazujemo uz raspis norme po retcima:

$$||\mathbf{M}\cdot\mathbf{x}||_1 = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n}|x_j|\sum_{i=1}^{n} M_{i,j} \tag{2.1}$$

$$\leq \left(\max_j \sum_{i=1}^{n} M_{i,j}\right)\cdot ||\mathbf{x}||_1 = ||\mathbf{M}||_1||\mathbf{x}||_1 \tag{2.2}$$

Prethodna nejednakost bit će nam potrebna u dokazu za egzistenciju i/ili jedinstvenost ne-abitražnih cijena obveza poduzeća modela, kojeg ćemo, prateći Fischerovu ideju, detaljno opisati u nastavku. Nenegativnost rješenja sustava koji definira ne-arbitražne vrijednosti posljedica je leme za *strogo* lijevo substohastične matrice:

Lema 2.1.2. *Za* $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *strogo lijevo substohastičnu matricu vrijedi: inverz matrice* $(\mathbf{I} - \mathbf{M})$ *postoji i nenegativan je. Štoviše, dijagonalni elementi matrice* $(\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1}$ *su veći ili jednaki od* 1.

Dokaz. Za strogo lijevu substohastičnu matricu $\mathbf{M}$ vrijedi $||\mathbf{M}||_1 < 1$. Korištenjem rezultata koji povezuje spektralni radijus matrice $\mathbf{M}$, $\mathrm{spr}(\mathbf{M}) = \max|\lambda_i(\mathbf{M})|$ za $\lambda_i(\mathbf{M}) \in \sigma(\mathbf{M})$ i norme $||\cdot||_{1,2,\infty}$, slijedi: $\mathrm{spr}(\mathbf{M}) < 1$. Prema tome, Von Neumannov red, red potencija matrice $\mathbf{M}$, $\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{M}^n$ konvergira i vrijedi jednakost:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{M}^n.$$

Nenegativnost inverza i posljednja tvrdnja leme slijede iz $\mathbf{M}^n \geq 0$ i $\mathbf{M}^0 = \mathbf{I}$. $\square$

Također, u dokazu fundamentalnih rezultata ovog rada, koristimo i lemu:

Lema 2.1.3. *Neka su* x_1 *i* $x_2 \in \mathbb{R}$*, pri čemu je* $x_1 \geq x_2$*. Neka su ,*$\forall i = 1, 2, \ldots, m$ *zadani nenegativni realni brojevi* y_1^i, y_2^i*, za koje vrijedi* $y_1^i \geq y_2^i$*,* $i \in 1, 2, \ldots, m$*. Ako vrijedi*

$$x_1 - x_2 \geq \sum_{i=1}^{m} (y_i^1 - y_i^2),$$

tada je zadovoljena nejednakost:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 = |\min\{y^1, x_1\} - \min\{y^2, x_2\}| + \sum_{j=1}^{m-1} \left| \min\left\{ y_1^{j+1}, \left(x_1 - \sum_{i=1}^{j} y_1^i \right)^+ \right\} \right. \\ \left. - \min\left\{ y_2^{j+1}, \left(x_2 - \sum_{i=1}^{j} y_2^i \right)^+ \right\} \right| + \left| \left(x_1 - \sum_{i=1}^{m} y_1^i \right)^+ - \left(x_2 - \sum_{i=1}^{m} y_2^i \right)^+ \right|. \end{aligned}$$

Dokaz tvrdnje dostupan je u [9].

2.2 Teoremi o fiksnoj točki

U dokazima u nastavku rada, po uzoru na [8], upotrijebit ćemo dvije verzije teorema o fiksnoj točki (vektorskog) preslikavanja. Prije svega, definirajmo *strogu kontrakciju*:

Definicija 2.2.1. *Neka je* $(\mathbb{X}, d)$ *metrički prostor. Preslikavanje* $\Psi : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ *nazivamo strogom kontrakcijom, ako postoji konstanta* $0 \leq c < 1$*, takva da vrijedi:*

$$d(\psi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{y})) \leq c \cdot d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X} \tag{2.3}$$

Prvi teorem o fiksnoj točki koji će nam biti potreban naziva se *Brouwer-Schauderov teorem o fiksnoj točki*:

Teorem 2.2.2. *Neka je funkcija* $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *neprekidna, pri čemu je* $\mathbb{K}$ *konveksan i kompaktan podprostor Banachovog prostora. Tada* f *ima fiksnu točku.*

Iskazujemo *Banachov teorem o kontrakciji*, čiji se dokaz može naći u [11]:

Teorem 2.2.3. *Neka je* $\mathbb{X}$ *potpun metrički prostor, i funkcija* $\Psi : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ *stroga kontrakcija. Tada* Ψ *ima jedinstvenu fiksnu točku* $\mathbf{x}^* \in \mathbb{X}$*. Također, za proizvoljni* $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$*, vrijedi:*

$$\lim_{n\to\infty} \Psi^n(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} \Psi \circ \cdots \circ \Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^* \tag{2.4}$$

2.3 Osnovni rezultati iz teorije mjere

U nastavku definiramo izmjerivost funkcije i navodimo osnovne rezultate, potrebne za dokaz fundamentalnih rezultata.

Definicija 2.3.1. *Neka su $(U, \mathcal{U})$, $(V, \mathcal{V})$ izmjerivi prostori. Funkcija $f : U \to V$ je izmjeriva u paru σ-algebri $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$, ako je $f^{-1}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{U}$.*

Lema 2.3.2. *Neka su $(U, \mathcal{U})$ i $(V, \mathcal{V})$ topološki prostori i $f : U \to V$ neprekidna funkcija. Tada je f izmjeriva u paru σ-algebri $(\mathcal{B}(\mathcal{U}), \mathcal{B}(\mathcal{V}))$.*

Lema 2.3.3. *Neka su $(U, \mathcal{U}), (V, \mathcal{V})$ i $(Z, \mathcal{Z})$ izmjerivi prostori. Ako su $f : U \to V$ i $g : V \to Z$ izmjerive, onda je i $(g \circ f) : U \to Z$ $(\mathcal{U}, \mathcal{Z})$ -izmjeriva funkcija.*

Lema 2.3.4. *Neka je $(X, \mathcal{X})$ izmjeriv prostor. Neka je $f_n, n \in \mathbb{N}$ niz $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-izmjerivih funkcija. Tada je i $\lim_n f_n$ $(X, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-izmjeriva funkcija.*

2.4 Teorija stohastičkih procesa

Rješavanje sustava kojeg ćemo definirati u radu, među ostalim, uključuje i osnove u modeliranju kretanja cijena financijskih izvedenica, koje navodimo u nastavku. Promatramo vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, s filtracijom $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T})$. Općenito, vrijeme može biti diskretno ili neprekidno. U nastavku za vremensku komponentu pretpostavljamo: $t \leq \infty$. Osnova Black - Scholes - Mertonovog modela jest modeliranje kretanja cijena financijske imovine geometrijskim Brownovim gibanjem. Uvodimo pojmove Brownovog i geometrijskog Brownovog gibanja:

Definicija 2.4.1. *Slučajni proces $(W(t), t \geq 0)$ je Brownovo gibanje, ako zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. $W(0) = 0$.

2. *trajektorije $t \mapsto W(t)$ su neprekidne funkcije sa $\mathbb{R}_+$ u $\mathbb{R}$, za gotovo sve $\omega \in \Omega$.*

3. *Za sve $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ su prirasti $W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_m) - W(t_{m-1})$ nezavisni.*

4. *Za svaki $0 \leq s < t$ je prirast $W(t) - W(s)$ normalno distribuiran, sa očekivanjem 0 i varijancom $t - s$.*

Definicija 2.4.2. *Neka su $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$ zadane konstante. Geometrijsko Brownovo gibanje je slučajni proces $(S(t), t \geq 0)$ definiran jednadžbom:*

$$S(t) = S(0) \exp\left\{\sigma W(t) + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right\}.$$

Vjerojatnosna mjera do sada bila je $\mathbb{P}$. Girsanovljev teorem objašnjava promjene u dinamici kretanja stohastičkih procesa procedurom *zamjene mjere*. Nova mjera $\mathbb{P}^*$ će biti ekvivalentna početnoj $\mathbb{P}$:

Definicija 2.4.3. *Za vjerojatnost $\mathbb{P}$ kažemo da je ekvivalentna sa $\mathbb{Q}$ i označavamo sa $\mathbb{P} \approx \mathbb{Q}$ ako vrijedi:*

$$\mathbb{P}(A) = 0 \iff \mathbb{Q}(A) = 0, \ \ \forall A \in \mathcal{F}.$$

Za iskaz Girsanovljevog teorema potreban nam je i pojam *filtracije za Brownovo gibanje*:

Definicija 2.4.4. *Neka je $(W(t), t \geq 0)$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Filtracija za Brownovo gibanje je familija σ-podalgebri $\mathbb{F}_W = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$, za koju vrijedi:*

1. *Za sve $0 \leq s < t$ je $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.*
2. *Za svaki $t \geq 0$ je $W(t) \in \mathcal{F}_t$, tj. $W(t)$ je $\mathcal{F}_t$-izmjeriva slučajna varijabla.*
3. *Za sve $0 \leq s < t$ je prirast $W(t) - W(s)$ nezavisan od $\mathcal{F}_s$.*

Posljednje svojstvo filtracije iziskuje nezavisnost budućih prirasta Brownovog gibanja od informacije dostupne u sadašnjosti i prošlosti. Za svaki prirast nakon trenutka s ne možemo ništa reći informacijama dostupnim u $\mathcal{F}_s$. Može se pokazati kako je Brownovo gibanje, s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}_W$, martingal. Više o tome dostupno je u [3].

Konačno, iskazujemo i Girsanovljem teorem, pomoću kojega definiramo mjeru $\mathbb{P}^*$. U nastavku promatramo Brownovo gibanje na segmentu $[0, T]$.

Teorem 2.4.5. *Neka je $W = (W(t), 0 \leq t \leq T)$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i $\mathbb{F}_W$ filtracija za W. Za $\theta = (\theta(t), 0 \geq t \geq T)$, adaptiran slučajni proces, definiramo:*

$$Z(t) = \exp\left\{ -\int_0^t \theta(u) dW(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(t) dt\right\},$$

$$W^*(t) = W(t) + \theta(t).$$

Uz pretpostavku

$$\mathbb{E}\int_0^T \theta^2(u) Z^2(u) du < \infty,$$

stavimo $Z = Z(T)$. *Tada je* $\mathbb{E}[Z] = 1$. *Definirajmo vjerojatnost* $\mathbb{P}^* : \mathcal{F} \mapsto [0, 1]$ *formulom:*

$$\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A Z], \quad A \in \mathcal{F}.$$

Uz vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ *je slučajni proces* $W^* = (W^*(t), 0 \leq t \leq T)$ *Brownovo gibanje.*

Uz ovako definiranu mjeru $\mathbb{P}^*$, u razradi modela tržišta uočit ćemo da se radi o *martingalnoj* mjeri. Iz konstrukcije mjere $\mathbb{P}^*$ slijedi $\mathbb{P}^* \approx \mathbb{P}$. Kretanje cijena financijske imovine modeliramo s obzirom na obje mjere. Mjera $\mathbb{P}$ reprezentira stvarnu mjeru, koja uključuje preferencije investitora što se tiče rizičnosti investicija u financijsku imovinu. S druge strane, $\mathbb{P}^*$ je mjera neutralna na rizik, koja određuje *fer* cijenu financijske imovine i njenih izvedenica.

U okviru ovoga rada, model sustava poduzeća koristi obje mjere za definiciju kvantitativnih mjera *sistemskog* rizika, prije samog trenutka dospijeća T, kao i određivanje cijene imovine u istim trenucima.

U izvodu parcijalne diferencijalne jednadžbe za dug poduzeća koristimo i Itôv račun, preciznije, *Itôvu formulu za Itôv proces*:

Teorem 2.4.6. *Neka je* $(X(t), t \geq 0)$ *Itôv proces dan formulom*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \Delta(u)dW(u) + \int_0^t \theta(u)du,$$

pri čemu je $X(0) \in \mathbb{R}$ *neslučajan, a* $\Delta(u)$ *i* $\theta(u)$ *adaptirani slučajni procesi koji zadovoljavaju:*

$$\mathbb{E}\int_0^t \Delta^2(u)du < \infty, \int_0^t |\theta(u)|du < \infty, \quad \forall t \geq 0.$$

Neka je $f(t, x)$ *funkcija s neprekidnim parcijalnim derivacijama* f_t, f_x, f_{xx}. *Tada,* $\forall T \geq 0$ *vrijedi:*

$$\begin{aligned} f(T, X(T)) =& f(0, X(0)) + \int_0^T f_t(t, X(t))dt + \int_0^T f_x(t, X(t))\Delta(t)dW(t) \\ &+ \int_0^T f_x(t, X(t))\theta(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t, X(t))\Delta^2(t)dt. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Poglavlje 3

Matematički rezultati iz teorije financija

3.1 Ekvivalentna martingalna mjera i cijena europske *call* opcije

Cilj ovog rada je, među ostalim, i pokazati da su obveze poduzeća upravo analogon financijskih izvedenica imovine koju smatramo *egzogenom*. Računanje cijena financijskih izvedenica u trenutku t uključuje i pretpostavku o nemogućnosti ostvarivanja bezrizičnog profita - nemogućnost arbitraže.

Pri određivanju cijena obveza svakog od poduzeća, koncentriramo se na cijene u vremenu dospijeća T. Međutim, upravo zbog temeljnog rezultata modeliranja vrijednosti financijskih izvedenica, korištenjem mjere $\mathbb{P}^*$, možemo vrijednosti odrediti i za vrijeme t prije dospijeća obveza T.

Navodimo jedan od pojednostavljenih oblika *Fundamentalnog teorema određivanja cijene financijske imovine*, u slučaju diskretnog procesa cijena $(S_t)_{t=0}^{t=T}$ i konačnog *skupa stanja svijeta* Ω, čiji je dokaz dostupan u [13].

Teorem 3.1.1. *Neka je $S = (S_t)_{t=0}^{t=T}$ slučajan proces na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, uz filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{t=T}$. Model financijskog tržišta ne dopušta arbitražu ako i samo ako postoji ekvivalentna martingalna mjera $\mathbb{P}^*$ za proces S.*

Upravo će *ekvivalentna martingalna mjera*, definirana pomoću slučajnog procesa cijena *egzogene* imovine modela, $\mathbf{a}_{t\in\mathbb{T}}$, omogućiti određivanje vrijednosti obveza prije vremena dospijeća, pretpostavljeno istog za sve obveze u sustavu, T.

U nastavku izvodimo formulu za cijenu europske *call* opcije, u formi funkcije dvije varijable, vremena $t \in [0, T]$ i cijene odnosne financijske imovine, x. Označimo ju sa $c(t, x)$. Formulu izvodimo uvođenjem ekvivalentne martingalne mjere $\mathbb{P}^*$. Poznati rezultat Blacka, Scholesa i Mertona je tzv. *Black-Scholes-Mertonova parcijalna diferencijalna jednadžba*, koja daje eksplicitnu formulu za određivanje cijene europske *call* opcije.

Merton pri određivanju cijena obveza poduzeća u [17] dobiva istu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu - *Black-Scholes-Mertonovu* PDJ. Sam izvod nalazi se u [5].

3.2 Model financijskog tržišta

U odjeljku uvodimo pretpostavke na financijsko tržište, sukladne onima u Black-Scholes-Mertonovom modelu:

Pretpostavka 1.

1. *Svi agenti na tržištu imaju pristup informacijama.*
2. *Kamatna stopa na tržištu novca je pozitivna konstanta, $r > 0$. Također, jednaka je onoj za ulaganje.*
3. *Dionice ne isplaćuju dividende.*
4. *Tržište je visokolikvidno, sva financijska imovina je beskonačno djeljiva.*
5. *Nema transakcijskih troškova pri kupnji ili prodaji dionice, kao ni posuđivanju u banci.*

Istaknimo još i pretpostavku o nemogućnosti arbitraže, koja će biti ključna za korištenje ekvivalentne mjere $\mathbb{P}^*$. Dakle, na promatranom tržištu nije moguće ostvariti bezrizičan profit. Definicija strategije trovanja, slučajnog procesa vrijednosti strategije, pa i arbitraže može se naći u [21], [23].

Definirajmo $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, uz $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T)$ filtraciju za $(W_t)_{0\leq t\leq T}$. Promatramo tržište sa jednom vrstom financijske imovine - dionicom, čiju cijenu opisujemo stohastičkom diferencijalnom jednadžbom, za $0 \leq t \leq T$:

$$dS(t) = \alpha(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW(t), \tag{3.1}$$

pri čemu su slučajni procesi $(\alpha_t)_{0\leq t\leq T}$ i $(\sigma_t)_{0\leq t\leq T}$, koje interpretiramo kao stopu povrata na dionicu, odnosno volatilnost, adaptirani s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$. Rješenje jednadžbe 3.1 dano je slučajnim procesom

$$S(t) = S(0)\exp\left\{\int_0^t \sigma(s)dW(s) + \int_0^t \Big(\alpha(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\Big)ds\right\}.$$

Cijenu dionice opisali smo generaliziranim Brownovim gibanjem. Uvedimo još jedan, adaptirani slučajan proces, koji modelira kretanje kamatne stope $R(t)_{0\leq t\leq T}$.

Za određivanje vrijednosti obveza poduzeća, pa i *europske call* opcije, prije trenutka dospijeća potreban nam je slučajan proces $D(t)_{0\leq t\leq T}$, pomoću kojeg određujemo sadašnju vrijednost financijske imovine. Naime, proces

$$D(t) = \exp\left\{-\int_0^t R(s)ds\right\} \tag{3.2}$$

preuzima ulogu diskontnog faktora. Slično, kod vektora *egzogene* imovine sustava poduzeća će ulogu diskontnog faktora preuzeti upravo prva komponenta vektorskog slučajnog procesa $\mathbf{a}(t)_{t\in\mathbb{T}}$. Uz (3.2), opisujemo kretanje diskontirane cijene $D(t)S(t)$:

$$D(t)S(t) = S(0)\exp\left\{\int_0^t \sigma(s)dW(s) + \int_0^t \Big(\alpha(s) - R(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\Big)ds\right\}, \tag{3.3}$$

gdje je srednja stopa povrata na imovinu umanjena upravo za kamatnu stopu $R(t)$, za $0 \leq t \leq T$. Diferencijalna jednadžba kretanja diskontirane cijene $D(t)S(t)$ tada je:

$$d(D(t)S(t)) = (\alpha(t) - R(t))D(t)S(t)dt + \sigma(t)D(t)S(t)dW(t) \tag{3.4}$$
$$= \sigma(t)D(t)S(t)[\theta(t)dt + dW(t)], \tag{3.5}$$

gdje identitetom

$$\theta(t) = \frac{\alpha(t) - R(t)}{\sigma(t)} \tag{3.6}$$

definiramo *Sharpeov omjer* (engl. *Sharpe's ratio*) - poznatu mjeru koju investitori koriste u upravljanju portfeljem. Intuitivno, što je omjer veći, to je srednja stopa povrata na imovinu (portfelj) veća, uz istu volatilnost. Napominjemo kako Sharpeov omjer određuje tržište.

Slučajnim proces $\theta(t)_{0\leq t\leq T}$, uz Girsanovljev teorem, definiramo $\mathbb{P}^*$.

Definiramo proces $W^*(t)_{0\leq t\leq T}$, jednadžbom

$$W^*(t) = W(t) + \int_0^t \theta(u)du, \tag{3.7}$$

pomoću kojeg ćemo prefomulirati jednadžbu kretanja diskontiranog procesa cijena dionice u diferencijalnom obliku, (3.2). Novi oblik diferencijalne jednadžbe je sada

$$d(D(t)S(t)) = \sigma(t)D(t)S(t)dW^*(t). \tag{3.8}$$

Napomenimo kako je proces $W^*(t)_{0\leq t\leq T}$ Brownovo gibanje s obzirom na vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}^*$. Koristeći tu činjenicu, pokaže se da je upravo proces diskontiranih cijena financijske imovine martingal s obzirom na mjeru $\mathbb{P}^*$. Ovime opravdavamo i naziv mjere $\mathbb{P}^*$, kao *martingalne*, odnosno *mjere neutralne na rizik*. Naime, da je proces cijena financijske imovine $S(t)_{0\leq t\leq T}$ $\mathbb{P}^*$-martingal znači da je očekivana vrijednost procesa S u trenutku $t+1$, uz informaciju o kretanju do trenutka t jednaka vrijednosti u neposrednoj prošlosti $S(t)$. Više o egzistenciji, interpretaciji i sl. može se pronaći u [3],[21].

Konačno, navodimo i rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe (3.8), kao model kretanja cijena dionica:

$$S(t) = S(0)\exp\left\{\int_0^t \sigma(s)dW^*(s) + \int_0^t \Big(R(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\Big)ds\right\}. \tag{3.9}$$

Podsjećamo, kretanje dionica modeliramo *generaliziranim Brownovim gibanjem.*

Parcijalna diferencijalna jednadžba za koju nudimo sažet izvod u nastavku rada, uz potrebne terminalne i rubne uvjete daje izračun cijene europske *call* opcije na rizični financijski instrument - dionicu S. Podsjećamo na definiciju europske *call* opcije:

Definicija 3.2.1. *Europska call opcija je ugovor koji vlasniku daje pravo, ali ne i obvezu na kupnju financijske imovine po cijeni izvršenja K, na dan dospijeća T.*

Definicija 3.2.2. *Europska put opcija je ugovor koji vlasniku daje pravo, ali ne i obvezu na prodaju financijske imovine po cijeni izvršenja K, na dan dospijeća T.*

Merton u [17] proširuje model iz [5] i promatra analogiju parcijalnih diferencijalnih jednadžbi za određivanje vrijednosti duga poduzeća sa jednadžbom cijene europske call opcije na vrijednost poduzeća. U tu svrhu ćemo, uz detaljniji opis povezanosti dviju jednadžbi u nastavku rada, odrediti i cijenu europske call opcije na promatranu financijsku imovinu.

3.3 Parcijalna diferencijalna jednadžba - Black, Scholes i Merton

Kao što smo i spomenuli, u nastavku ćemo dati izraz za *Black-Scholes-Mertonovu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu* i pripadne rubne i terminalne uvjete. Za ekonomsku interpretaciju i detalje izvoda , kojih se nećemo doticati, upućujemo na [5]. Ukratko opisujemo ideju izvoda:

Pretpostavimo da je financijski instrument koji promatramo upravo dionica, kojoj modeliramo kretanje geometrijskim Brownovim gibanjem (pretpostavljamo konstante σ i α). Drugi financijski instrument je novac, za koji pretpostavljamo da se, ulaganjem u banku, neprekidno ukamaćuje po konstantnoj kamatnoj stopi, r. Dakle, ulog 1 ukamaćivanjem, u vremenu t iznosi e^{rt}. Analogno, diskontiranje na sadašnju vrijednost provodimo množenjem s diskontnim faktorom e^{-rt}. Konstante α i σ modeliraju srednju stopu povrata na dionicu, odnosno volatilnost dionice. Podsjetimo, stohastička diferencijalna jednadžba za dionicu tada je

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma dW(t), \tag{3.10}$$

gdje je $(W(t), 0 \leq t \leq T)$ Brownovo gibanje. Promatramo europsku *call* opciju na dionicu, sa cijenom izvršenja K i vremenom dospijeća T. U trenutku T isplata je $(S(T) - K)^+$. Odredimo vrijednost opcije u proizvoljnom $t \in [0, T\rangle$. Pretpostavimo kako je cijena opcije dana funkcijom $c : [0, T] \times [0, \infty\rangle \to [0, \infty\rangle$. U trenutku t, za cijenu $x = S(t)$, cijena opcije reprezentirana je sa $c(t, x)$. Uočimo, $c(t, S(t)), 0 \leq t \leq T$ je slučajni proces. Korištenjem Itôve formule (2.5), dobivamo diferencijal

$$\begin{aligned} dc(t, S(t)) &= c_t(t, S(t))dt + c_x(t, S(t))dS(t) + \frac{1}{2}c_{xx}(t, S(t))dS(t)dS(t) \\ &= c_t(t, S(t))dt + c_x(t, S(t))(\alpha S(t) + \sigma S(t)dW(t)) + \frac{1}{2}c_{xx}(t, S(t))\sigma^2 S^2(t)dt \\ &= \left[c_t(t, S(t)) + \alpha S(t)c_x(t, S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)c_{xx}(t, S(t))\right]dt + \sigma S(t)c_x(t, S(t))dW(t). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Kako bismo odredili cijenu europske *call* opcije, tražimo replicirajući portfelj $(\Delta(t), 0 \leq t \leq T)$, čiju vrijednost $X(t)$ izjednačavamo sa cijenom opcije $c(t, S(t))$, na cijelom vremenskom inervalu $[0, T]$. Pretpostavljena svojstva financijskog tržišta garantiraju egzistenciju replicirajućeg portfelja. Množenjem vrijednosti $X(t)$ s diskontnim faktorom, dobivamo identitet: $e^{-rt}X(t) = e^{-rt}c(t, S(t))$, $\forall t \in [0, T]$, koji će vrijediti ako i samo ako se vrijednost i cijena podudaraju u početnom trenutku 0, tj. $X(0) = c(0, S(0))$ i vrijedi jednakost diferencijala:

$$d\Big(e^{-rt}c(t, S(t))\Big) = d\Big(e^{-rt}X(t)\Big), \quad \forall t \in [0, T].$$

Replicirajući portfelj modeliramo uz pretpostavku da u trenutku t investitor posjeduje $\Delta(t)$ dionica, pri čemu $\Delta(t)$ mora biti adaptirana slučajna varijabla s obzirom na filtraciju Brownovog gibanja W. Preostali iznos $X(t) - \Delta(t)S(t)$ investitor ulaže u tržište novca, koji se zatim neprekidno ukamaćuje.

Promjena vrijednosti portfelja $dX(t)$, od trenutka t do $t + dt$ tada je dana stohastičkom diferencijalnom jednadžbom

$$dX(t) = rX(t)dt + \Delta(t)(\alpha - r)S(t)dt + \Delta(t)\sigma S(t)dW(t),$$

pri čemu je $\alpha - r$ premija za rizik koju investitor iziskuje pri ulaganju u rizičnu dionicu. Korištenjem Itôve formule za $X(t)$ i funkciju $f(t, x) = e^{-rt}x$, računamo diferencijal diskontirane vrijednosti portfelja:

$$\begin{aligned} d\Big(e^{-rt}X(t)\Big) &= f_t(t, X(t)) + f_x(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X(t))dX(t)dX(t) \\ &= -re^{-rt}\Big(rX(t)dt + \Delta(t)(\alpha - r)S(t)dt + \Delta(t)\sigma S(t)dW(t)\Big) \\ &= \Delta(t)(\alpha - r)e^{-rt}S(t)dt + \Delta(t)\sigma e^{-rt}S(t)dW(t) \\ &= \Delta(t)d\Big(e^{-rt}S(t)\Big). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Odredimo i diferencijal s lijeve strane jednakosti (3.3), ponovnim korištenjem Itôvog računa, za $f(t,x) = e^{-rt}x$:

$$\begin{aligned}
d\Big(e^{-rt}c(t,S(t))\Big) &= df(t,c(t,S(t))) \\
&= f_t(t,c(t,S(t)))dt + f_x(t,c(t,S(t)))dc(t,S(t)) \\
&+ \frac{1}{2}f_{xx}(t,c(t,S(t)))dc(t,S(t))dc(t,S(t)) \\
&= -re^{-rt}c(t,S(t))dt + e^{-rt}dc(t,S(t)) \\
&= e^{-rt}\Big[-rc(t,S(t)) + c_t(t,S(t)) + \alpha S(t)c_x(t,S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2S^2(t)c_{xx}(t,S(t))\Big]dt \\
&+ e^{-rt}\sigma S(t)c_x(t,S(t))dW(t). \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Izjednačavanjem (3.13) i (3.12)

$$\begin{aligned}
&\Delta(t)(\alpha - r)e^{-rt}S(t)dt + \Delta(t)\sigma e^{-rt}S(t)dW(t) \\
&\quad= e^{-rt}\Big[-rc(t,S(t)) + c_t(t,S(t)) + \alpha S(t)c_x(t,S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2S^2(t)c_{xx}(t,S(t))\Big]dt \\
&\quad+ e^{-rt}\sigma S(t)c_x(t,S(t))dW(t),
\end{aligned}$$

tj. izjednačavanjem koeficijenata uz $dW(t)$ dobivamo $\Delta(t) = c_x(t,S(t))$. Uz isti postupak uz dt vrijedi

$$\begin{aligned}
(\alpha - r)\Delta(t)S(t) &= -rc(t,S(t)) + c_t(t,S(t)) + \alpha S(t)c_x(t,S(t)) \\
&+ \frac{1}{2}\sigma^2S^2(t)c_{xx}(t,S(t)).
\end{aligned}$$

Konačno, dobivamo parcijalnu diferencijalnu jednadžbu za funkciju $c(t,S(t))$

$$rc(t,S(t)) = c_t(t,S(t)) + rS(t)c_x(t,S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2S^2(t)c_{xx}(t,S(t)), \quad \forall t \in [0,T\rangle,$$

odnosno, uvrštavanjem $x = S(t)$ *Black-Scholesovu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu*:

$$c_t(t,x) + rxc_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2x^2c_{xx}(t,x) = rc(t,x), \quad \forall t \in [0,T\rangle, x \geq 0, \qquad (3.14)$$

uz terminalni uvjet

$$c(T,x) = (x-K)^+. \qquad (3.15)$$

Iz jednadžbe (3.14) jasno je da je cijena europske *call* opcije u determinističkoj vezi s dionicom na koju je pisana, budući da replicirajući portfelj omogućava investitoru da bude zaštićen u svakom, infinitezimalnom pomaku dt.

Preostaje dodati još dva rubna uvjeta za $x = 0$ i $x = \infty$. Uvrštavanjem $x = 0$ u (3.14) dobivamo običnu diferencijalnu jednadžbu po vremenskoj varijabli t, $c_t(t, 0) = rc(t, 0)$. Rješavanjem iste i dodatkom početnog uvjeta za nju, dobivamo i $c(t, 0) = 0$, za $0 \leq t \leq T$. Kada $x \to \infty$, funkcija $c(t, x) \to \infty$. Navodimo uvjete u čiji je detaljan raspis dostupan u [5]. Drugi rubni uvjet zadan je limesom

$$\lim_{x \to \infty} \Big[c(t, x) - \Big(x - e^{-r(T-t)} K \Big) \Big] = 0, \quad \forall 0 \leq t \leq T. \tag{3.16}$$

Može se pokazati kako je rješenje gornje jednadžbe s pripadnim terminalnim 3.15 i rubnim uvjetima 3.3 i 3.16 upravo:

$$c(t, x) = xN(d_+(\tau, x)) - e^{-r\tau} KN(d_-(\tau, x)), \tag{3.17}$$

gdje je N funkcija distribucije standardne normalne slučajne varijable,

$$N(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{y} e^{\frac{x^2}{2}} dx, \tag{3.18}$$

a

$$d_\pm(\tau, x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{\tau}} \Big[\log \frac{x}{K} + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})\tau \Big]. \tag{3.19}$$

3.4 Mertonov model duga poduzeća

Nudimo kratak pregled Mertonovog rada iz 1974.godine, [17], u kojem Merton dolazi do modela za određivanje cijena duga poduzeća. Merton uvodi hipotezu o tržištu bez trenja, naslijeđene iz Black-Scholes modela za određivanje cijena opcija, [5]. Jedna od pretpostavki koje u nastavku navodimo je i *Modigliani-Millerov teorem*:

Teorem 3.4.1. *U odsutnosti poreza, troškova bankrota i asimetričnih informacija, na efikasnom tržištu, vrijednost poduzeća ne ovisi o načinu financiranja. Vrijednost je neovisna o kapitalnoj strukturi poduzeća.*

Formalan iskaz i propozicije uz slabije pretpostavke dostupne su u [22]. Navedene pretpostavke u nastavku koristimo i u generalizaciji Mertonovog modela, na veći broj poduzeća.

Pretpostavka 2.

1. *Cijena obveznice koja u trenutku* $T = 1$ *isplaćuje* 1 *jednaka je* $P(t) = e^{-r(T-t)}$, *gdje je* r *konstantna kamatna stopa.*

2. *Vrijedi Modigliani-Millerov teorem: vrijednost poduzeća ne ovisi o strukturi kapitala.*

3. *Dinamika kretanja vrijednosti imovine poduzeća opisana je stohastičkom diferencijalnom jednadžbom*

$$dV(t) = (r - \delta)V(t)dt + \sigma V(t)dW(t), \tag{3.20}$$

δ je stopa isplate vjerovnicima, odnosno dioničarima (u jedinici vremena), dok je $W(t)_{t\geq 0}$ Brownovo gibanje, s obzirom na ekvivalentnu martingalnu mjeru, $\mathbb{P}^*$. σ je volatilnost povrata.

Tržišna vrijednost imovine poduzeća, koju ćemo u proširenju modela prikladno označavati sa a_t (engl." *assets*"), modelirana je geometrijskim Brownovim gibanjem. a_t tada shvaćamo kao cijenu po kojoj se sve obveze poduzeća mogu prodati. Dakle, jednaka je zbroju vrijednosti kapitala i duga. a_t u literaturi je poznata pod nazivom *likvidacijska vrijednost*. U ovom odjeljku koristimo oznake analogne kao u [17].

Uz gornje pretpostavke, svakom vrijednosnom papiru koju izdaje poduzeće, cijenu možemo izraziti kao funkciju vrijednosti imovine u trenutku t, $V(t)$:

$$Y = F(V(t), t),$$

gdje je F dovoljno glatka funkcija. F u trenutku t tada modelira vrijednost duga poduzeća. Merton dolazi do paraboličke diferencijalne jednadžbe za F.

Uzmimo jednostavan primjer vrijednosnog papira Y - obveznice, bez kuponskih isplata i jednom isplatom u iznosu B u trenutku dospijeća T. Neka je bankrot poduzeća moguć samo u trenutku T. U slučaju nemogućnosti otplate B, vjerovnici dobivaju likvidacijsku vrijednost $V(T)$, dioničarima se ne isplaćuje dividenda.

Krenimo od vrijednosti kapitala poduzeća, reprezentirajmo ju funkcijom f. V_t, koju promatramo kao likvidacijsku vrijednost zapisujemo kao zbroj vrijednosti duga i kapitala:

$$V = F(V(\tau), \tau) + f(V(\tau), \tau), \quad \tau = T - t.$$

Iz činjenice da obje funkcije poprimaju samo nenegativne vrijednosti, slijedi jednakost

$$F(0, \tau) = f(0, \tau) = 0. \tag{3.21}$$

Inicijalni uvjet za $\tau = 0$ i isplatu dioničarima f proizlazi iz pravila redoslijeda isplate, po kojima su vlasnici kapitala posljednji u isplatnom redu. Dakle, njima ostaje eventualni ostatak nakon namire dugova kod vjerovnika:

$$f(V, 0) = max\{0, V - B\}.$$

Isplata u $t = T$ jednaka je isplati u trenutku dospijeća za europsku *call* opciju na imovinu poduzeća, sa cijenom izvršenja B. Uz slučajni proces V_t modeliran sa (3.20) vrijednost kapitala, reprezentirana sa f, zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 f_{VV} + rVf_V - rf - f_\tau = 0, \tag{3.22}$$

uz (3.21).

Analogno, inicijalne uvjete za $\tau = 0$ i F ponovno zaključujemo iz *pravila apsolutnog prioriteta*: vlasnici dugova prvi su u redu za naplatu. Promatramo dvije mogućnosti u vremenu dospijeća T. Naime, za V_T vrijednost manju od obveze $F(T)$ vjerovnici dobivaju V_T. Ukoliko vrijednost imovine nije pala ispod vrijednosti obveza, vjerovnicima je u potpunosti isplaćen dug B. Dakle, za D_T - isplatu vjerovnicima u trenutku dospijeća, vrijedi:

$$\begin{aligned} V_T \leq F &\Rightarrow D_T < B \\ V_T \geq F &\Rightarrow D_T = B. \end{aligned}$$

Dakle, za preostalo vrijeme do vremena dospijeća $\tau = 0$ vrijedi:

$$F(V, 0) = min\{V, B\}.$$

Merton izvodi parcijalnu diferencijalnu jednadžbu za pripadnu funkciju F:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + rF_V - rF - F_\tau = 0, \tag{3.23}$$

uz $\tau = T - t$ preostalo vrijeme do dospijeća obveza. Dodatno, iz tzv. *uvjeta regularnosti*, $F(V(\tau), \tau) \leq V(\tau)$, proizlazi i rubni uvjet za $0 \leq V \leq \infty$.

Merton koristi prethodnu činjenicu i daje eksplicitne izraze za f i F. Ideja Mertonovog modela je tretiranje kapitala poduzeća kao *call* opcije na vrijednost imovine V_t. S druge strane, vlasnici duga, izloženi riziku od bankrota (engl. "*default* risk") u mogućnosti su potpuno se zaštiti kupnjom *europske put opcije* na V_t, sa cijenom izvršenja B. Black-Scholesove formule za cijene spomenutih opcija koristimo pri određivanju f i F. Uz notaciju kao u poglavljima sa preliminarnim rezultatima, Merton dolazi do formula:

$$f(V, \tau) = V\Phi(x_1) - Be^{-r\tau}\Phi(x_2),$$

gdje su

$$x_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left\{\log\frac{V}{B} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right\}$$

i $x_2 = x_1 - \sigma\sqrt{\tau}$.

S druge strane, jednakost $F = V - f$, uz definiciju parametara $d = \frac{B}{V}e^{-r\tau}$, odnosno $h_{\pm}(d, \sigma^2\tau) = -\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\frac{1}{2}\sigma^2\tau \pm \log(d)\right)$, dobivamo:

$$F(V, \tau) = Be^{-r\tau}\left[\Phi(h_+(d, \sigma^2\tau)) + \frac{1}{d}\Phi(h_-(d, \sigma^2\tau))\right].$$

Na detaljniju razradu modela upućujemo na originalni članak [17].

Sve spomenute rezultate koristimo u proširenju modela, prelaskom iz Mertonovog u model za vrijednost kapitala i obveza na razinu sustava n poduzeća, s mogućnošću financijskog međuposredništva.

Poglavlje 4

Konstrukcija modela za sustav poduzeća

4.1 Sustav dva poduzeća u međuposredništvu

Kako bismo uspostavili vezu između Mertonovog i Fischerovog modela, definiramo vrijednost otplate duga i kapitala, u trenutku dospijeća, T, u sustavu sa $n = 2$ poduzeća. S obzirom da je Fischerov model generalizacija modela iz [5], [22], pretpostavke na razinu prioriteta pri isplati dividendi dioničarima su jednake.

Pretpostavimo kako svako poduzeće ima nepodmiren dug nominalne vrijednosti b_i, $i = 1, 2$. Jednostavnije rečeno, ono izdaje obveznice sa jednom isplatom u trenutku T, u spomenutim iznosima. *Likvidacijsku vrijednost* imovine svakog označavamo sa a_i, $i = 1, 2$. Uz *Modigliani-Millerov teorem*, tržišna vrijednost imovine, a_i, ne ovisi o kapitalnoj strukturi niti jednog od poduzeća. Prema tome, ove vrijednosti smatramo *egzogenima*. Analogno sažetku rezultata Mertonovog rada, za poduzeća bez međuposredništva, uz vrijednost $v_i = r_i + s_i = a_i$, cijene obveza, odnosno dioničkog kapitala duga za poduzeće i dane su izrazima:

$$
\begin{aligned}
r_i &= \min\{b_i, a_i\} \\
s_i &= (a_i - b_i)^+.
\end{aligned}
$$

Vlasnici poduzeća dobivaju preostalu imovinu nakon isplate duga vjerovnicima. Zbog ograničene odgovornosti, oni nisu dužni dodavati vlastiti novac kako bi nadoknadili gubitak kreditora. Fischer cijenu s_i naziva *likvidacijskom* vrijednošću kapitala u trenutku dospijeća obveznica, T, što omogućava i izračun likvidacijske vrijednosti poduzeća. Za poduzeće i je r_i dio duga koje ono može isplatiti, dok je za vjerovnike *stvarno* naplaćen dug. Analogno, zaključujemo kako je r_i likvidacijska vrijednost duga u vrijeme dospijeća T - ona mora biti jednaka cijeni duga u T, uz nemogućnost arbitraže.

U sažetku rezultata modela u [17], uz izračun vrijednosti u trenutku dospijeća, nearbitražne cijene duga i dioničkog kapitala tada se dobivaju iz jednadžbe za vrijednost poduzeća, (3.20) - proces kretanja cijene imovine a_i modeliran je geometrijskim Brownovim gibanjem. Upravo zbog rezultata dobivenih u [5] i [17], dug i kapital u trenutku dospijeća T reprezentirani su kao izvedenice *egzogene* imovine a_i, koju smatramo konstatnom.

Proširenje modela postavlja pitanje o ne-arbitražnim cijenama, jednom kada poduzeće 1 izdaje dug poduzeću 2, ili pak, poduzeće 2 ima vlasnički udio u kapitalu od 1. U trenutku dospijeća svaka od imovina a_i tada ima i *endogenu* komponentu, proizašlu iz sustava međuposredništva. Pitanje egzistencije ne-arbitražnih cijena duga i dioničkog kapitala postaje netrivijalno.

Bilanca poduzeća 1

Imovina (aktiva)	Obveze (pasiva)
$a_1 + M^s_{12} \times s_2$ $+M^r_{12} \times r_2$	s_1 r_1

Bilanca poduzeća 2

Imovina (aktiva)	Obveze (pasiva)
$a_2 + M^s_{21} \times s_1$ $+M^r_{21} \times r_1$	s_2 r_2

Dakle, vrijednosti svakog od poduzeća u trenutku dospijeća sadrže novu, endogenu komponentu i vrijedi:

$$v_i = a_i + M_{ij}^{s_j} + M_{ij}^{r_j},$$

za $i \neq j$. Dajemo jednostavan primjer u sustavu dva poduzeća kako bismo opisali problem pronalaska ne-arbitražnih cijena. Neka su $b_i = 100$ za $i = 1, 2$, te neka poduzeće 1 ima 50%-tni udio u dioničkom kapitalu poduzeća 2, i obratno. Pretpostavimo da ne-arbitražne cijene duga i kapitala postoje. Likvidacijske vrijednosti kapitala određene su jednadžbama:

$$\begin{aligned} s_1 &= (a_1 + 0.5s_2 - b_1)^+ \\ s_2 &= (a_2 + 0.5s_1 - b_2)^+. \end{aligned}$$

Analogno, jednadžbe za cijene duga su

$$\begin{aligned} r_1 &= \min\{b_1, a_1 + 0.5s_2\} \\ r_2 &= \min\{b_2, a_2 + 0.5s_1\}. \end{aligned}$$

Primijetimo, cijene dioničkog kapitala ostaju izvedenice egzogene imovine a_i, $i = 1, 2$. Dobivamo sustav za ne-arbitražne cijene dioničkog kapitala, čijim rješenjem dolazimo i do cijena duga. Egzistencija i jedinstvenost rješenja $(s_1^*, s_2^*) = (s_1^*(a_1, a_2), s_2^*(a_1, a_2))$, uz fiksne b_i dat će implicitno zadana funkcija, čiji su argumenti upravo a_i, $i = 1, 2$. Uz pretpostavku na Lebesgue-izmjerivost spomenute funkcije, modeliranje kretanja cijena imovine geometrijskim Brownovim gibanjem i , konačno, korištenjem ekvivalentne martingalne mjere, mogli bismo odrediti i ne-arbitražne cijene s_i za proizvoljan trenutak $t \leq T$.

Isti problem možemo promatrati i u sustavu međuposredništva koji ne uključuje vlasništvo nad kapitalom, već međusobno posjedovanje duga. Dakle, prvo poduzeće je vlasnik obveznica drugog, i obratno. Pretpostavimo kako 1 posjeduje 50% duga od 2, dok 2 posjeduje isti postotak duga 1. Novi sustav jednadžbi je tada trivijalnog oblika za cijene s_i,

$$s_i = (a_i + 0.5r_j - b_i)^+,$$

za $i, j = 1, 2$, dok za cijene duga, uz pretpostavku da naplata duga ne može biti negativna, imamo:

$$r_i = \min\{b_i, (a_i + 0.5r_j)^+\}.$$

U ovom slučaju rješenje za s_i dobivamo direktno iz rješenja za r_i, $i = 1, 2$. Ostaje pitanje egzistencija rješenja jednadžbi za vrijednosti dugova, (r_1^*, r_2^*). Utvrđujemo razliku u vrijednostima za promatranu slučaj i vrijednosti Mertonovog modela [17] za svako poduzeće zasebno. Vrijednost svakog od poduzeća sadrži i *endogenu* komponentu, proizašlu iz sustava.

Kao što smo već naveli, Merton je vrijednost poduzeća modelirao geometrijskim Brownovim gibanjem, (3.20). Izostanak međuposredništva daje jednakost $a_i = v_i$. Dakle, u trenutku t je $a_i(t)$ log-normalno distribuirana. Međutim, uvođenjem endogene komponente, distribucija vrijednosti $v_i(t)$ transformacija je log-normalnih slučajnih varijabli $a_1(t)$ i $a_2(t)$. Za daljnja razmatranja problema pronalaska distribucije upućujemo na [15].

Dodatna motivacija za promatranje slučaja međuposredništva je svakako i rizik koji proizlazi iz njega. Naime, prije Fischerovog rada su se međuovisnosti modelirale korelacijom između cijena egzogene imovine, a_i, što nije dostatno za prikazivanje rizika proizašlog iz međusobne povezanosti, *endogene* komponente modela.

Promotrimo tri moguća scenarija za poduzeća 1 i 2, uz isti iznos duga $b_1 = b_2 = 100$, i istu vrstu egzogene imovine $a_1 = a_2$: izostanak međuposredništva, 50%-tni udio u dioničkom kapitalu, bez udjela u dugovima te 50%-tno posjedovanje duga. Za tri moguća iznosa $a_i = 150, 100, 50$ računamo (jednake) ne-arbitražne cijene, po retcima:

bez međuposredništva a_1=a_2	50% kapital a_1=a_2	50% dug a_1=a_2	cijene (s, r) $s_1 = s_2$,$r_1 = r_2$
150	125	100	50,100
100	100	50	0,100
50	50	25	0,50

Iz tablice vidimo da za oba scenarija međuposredništva, u prvome retku, pad od 75 u imovini a_i, $i = 1, 2$ rezultira dolaskom u treći redak, vrijednosti kapitala jednakoj 0, a vrijednosti obveznica smanjenoj za 50%. Ukupni gubitak za svako od poduzeća tada iznosi 100. S druge strane, scenarij bez međuposredništva iziskuje mnogo veće smanjenje vrijednosti imovine a_i, od 100 po poduzeću.

Ovaj, vrlo jednostavan, primjer pokazuje kako je za istu početnu razinu duga i dioničkog kapitala, financijska poluga kao endogena komponenta koja proizlazi iz međuposredništva generira veći rizik promjena kretanja cijene egzogene imovine. Kako bismo definirali jednadžbe kojima ćemo odrediti ne-arbitražne cijene obveza svakog od poduzeća sustava, uvodimo pretpostavke na obveze i imovinu svakog, konzistentne sa prethodnim razmatranjima.

4.2 Sustav n poduzeća u međuposredništvu

Financijske obveze različitih prioriteta

U [8], Fischer daje pretpostavke na strukturu financijskih obveza svakog od poduzeća, uključivši mogućnost pojave obveznica različitih prioritetnosti isplate pri eventualnom bankrotu (engl. *liabilities of differing seniority*). Dodatno, ne ograničavamo model samo na obveznice, uključujemo mogućnost financijskih izvedenica, uključujući *plain*, *egzotične* opcije i sl. U nastavku ih sve zajedno nazivamo obvezama poduzeća.

Ostajemo konzistentni sa [8], uvodimo jednake pretpostavke na obveze svakog od poduzeća. Pretpostavljamo kako sve obveze poduzeća dospijevaju simultano u promatranom vremenskom razdoblju. Također, izostavljamo mogućnost kuponskih isplata u slučaju posjedovanja obveznica, odnosno isplata dividendi u slučaju udjela u vlasništvu dioničkog kapitala.

Uz pretpostavku na broj poduzeća $n \in \mathbb{N}$, vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ reprezentira tržišnu vrijednost one imovine svakog od poduzeća i, $i \in 1, 2, \ldots, n$, koja ne ovisi o strukturi kapitala niti jednog od poduzeća sistema. Prirodno je pretpostaviti: $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}$. Analogno primjerima sa 2 poduzeća, takvu imovinu nazivamo *egzogenom*, promatramo ju kao egzogenu danu varijablu modela. Vektor $\mathbf{a}$ tada reprezentira, primjerice, radne strojeve potrebne za proizvodnju, nekretnine, ljudski kapital, intelektualno vlasništvo poduzeća i slično.

Egzogena imovina, međutim, ne isključuje gotovinu, buduće tokove novca, buduće isplate, *future* ugovore (hrv. *unaprijedne ugovore*) sa poduzećima koja nisu unutar promatranog sistema. Smatramo ju visokolikvidnom, trenutačno utrživom po cijeni a_i. Također, prodajom samo jednog dijela egzogeno dane imovine, cijena preostalog ostaje ista.

Naglasimo samo kako dimenzija vektora $\mathbf{a}$ ne mora odgovarati broju poduzeća, ovdje je to samo pretpostavka zbog jednostavnosti. U nastavku rada ćemo dati i primjer za različite dimenzije. Glavni rezultat ovog rada dokazan je za vrijeme dospijeća $t = T$, pa $\mathbf{a}$ smatramo konstantnim. Međutim, vektor $\mathbf{a}$ može biti i stohastički proces cijena $(\mathbf{a}(\mathbf{t}))_{t \in \mathbb{T}}$, pri čemu je $\min \mathbb{T} = 0$ i $\max \mathbb{T} = T$. Možemo, sukladno pretpostavkama u [17] i [8], modelirati kretanje svake od cijena geometrijskim Brownovim gibanjem, pri čemu uračunavamo i korelaciju između gibanja, kao u [20]. Računanje vrijednosti obveza i kapitala prije trenutka dospijeća T, pomoću $\mathbf{a}(t)_{t \in \mathbb{T}}$, detaljnije objašnjavamo u nastavku.

Nadalje, neka vektor $\mathbf{r}^0 \in \mathbb{R}^n$ označava vrijednost kapitala svakog od promatranih n poduzeća, pri čemu pretpostavljamo da svako poduzeće ima barem djelomično vlasništvo nad svojim kapitalom.

U motivacijskom primjeru sa 2 poduzeća, komponente vektora $\mathbf{r}^0$ korespondiraju iznosima s_1, s_2. Dakle, kapital može biti vlasnički udio u drugom poduzeću, financijska izvedenica neke od komponenti a_j i slično. Neka poduzeće i posjeduje udio $0 \leq \mathbf{M}^0_{i,j} \leq 1$ kapitala poduzeća j. Uz definirane cijene, tada je vrijednost udjela poduzeća i upravo $\mathbf{M}^0_{i,j}\mathbf{r}^0_j$. Struktura vlasništva nad kapitalom svakog od poduzeća promatranog sistema opisana *lijevo substohastičnom matricom* $\mathbf{M}^0$. Za dijagonalu pretpostavljamo $M^0_{ii} > 0$. Intuitivno, poduzeće mora imati barem dio vlasništva nad svojim kapitalom. Kako bismo odredili vrijednost udjela poduzeća i u kapitalu svakog od preostalih $j \neq i$, dovoljno je promatrati i-tu komponentu vektora $\mathbf{M}^0\mathbf{r}^0$, pri čemu vrijedi:

$$\mathbf{M}^0\mathbf{r}^0 = \sum_{j=1}^{n} M^0_{ij} r^0_j \tag{4.1}$$

Fischer opisuje i strukturu vlasništva nad bilo kojom obvezom poduzeća, pri čemu postupa analogno kao za strukturu vlasništva nad kapitalom. Pri tome, uzevši u obzir pretpostavku modela o različitim razinama prioriteta isplata obveza, pretpostavlja kako svako od n poduzeća ima m nepodmirenih obveza, plativih u gotovini, sa oznakom prioriteta naplate $k = 1, \ldots, m$. Prema tome, definiramo m vektora, koje ćemo nazivati *vektorima potraživanja*, $\mathbf{r}^k$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Tada j-ota komponenta vektora potraživanja prioriteta k, r^k_j reprezentira vrijednost dugova prioriteta k koje poduzeće j duguje. Za dijagonalne elemente M^k_{ii} vrijedi: $M^k_{ii} = 0$. Poduzeće ne može imati nepodmirene obveze prema samome sebi.

Primijetimo, implicitno pretpostavljamo kako jednoj razini prioriteta odgovara jedna obveza. Dodatno, uz pretpostavku da poduzeće i posjeduje udio $0 \leq M^k_{ij} \leq 1$ u obvezama prioriteta k poduzeća j, dolazimo do vrijednosti vlasništva u iznosu od $M^k_{ij} r^k_j$. Dakle, strukturu vlasništva nad obvezama prioriteta $k = 1, 2, \ldots, m$ u promatranom sistemu poduzeća opisujemo lijevo substohastičkim matricama međuposredništva $\mathbf{M}^k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, za svaku od razina prioriteta.

Sistematičan zapis vlasništva poduzeća i nad kapitalom odnosno potraživanja kod svakog od preostalih članova sustava reprezentirano je i-tom komponentom vektora:

$$\sum_{k=0}^{m} M^k_{ij} r^k_j. \tag{4.2}$$

Definicija obveza pomoću vektorskih funkcija

Kako bismo pobliže opisali Fischerovu definiciju posredništva nad obvezama, napominjemo kako je struktura posredništva iskazana pomoću vektora $\mathbf{r}^k$ pod utjecajem mogućnosti prijenosa obveza s poduzeća na poduzeće (*ciklus* u grafu međuposredništva), u slučaju bankrota jednog od subjekata sustava. Dakle, vrijednosti duga $\mathbf{r}^k$ su *likvidacijske vrijednosti*. Ovime smo u potpunosti opisali vektore nepodmirenih potraživanja poduzeća, no ne i izvedenice koje ih definiraju. Za svaku razinu prioriteta $k = 1, 2, \ldots, m$ definiramo vektorsku funkciju

$$\mathbf{d}^k : \mathbb{R}^{n\times(m+1)} \to (\mathbb{R}_0^+)^n \tag{4.3}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}^m \\ \vdots \\ \mathbf{r}^0 \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{d}^k_{\mathbf{r}^m,\ldots,\mathbf{r}_0} = \begin{pmatrix} d_1^k(\mathbf{r}^m, \ldots, \mathbf{r}^0) \\ \vdots \\ d_n^k(\mathbf{r}^m, \ldots, \mathbf{r}^0) \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

uz pretpostavku da svaka od n komponenti vektorske funkcije $\mathbf{d}^k$ *definira* obveze svakog od poduzeća.

Upravo tada j-ota komponenta $d_j^k(\mathbf{r}^m, \ldots, \mathbf{r}^0)$ definira sve obveze prioriteta k poduzeća j, u ovisnosti o vrijednostima *svih* obveza i vlasničkih udjela u kapitalu unutar promatranog sustava. Dakle, obveze poduzeća j, prioriteta k, $d_j^k(\mathbf{r}^m, \ldots, \mathbf{r}^0)$ u korespondenciji su sa r_j^k. Definicijom funkcija (4.3), uvodimo pretpostavku ovisnosti vrijednosti obveza o vrijednostima ostalih imovina i obveza sustava, različitih prioriteta, uzimajući, primjerice, u obzir pravo na prijenos potraživanja sljedećem poduzeću u ciklusu, što potencijalno završava ovisnošću funkcije $\mathbf{d}^i$ o samoj vrijednosti $\mathbf{r}^i$.

Prema tome, vrijednosti funkcije $\mathbf{d}^k$ predstavljaju *potraživanja koja bi se trebala podmiriti* po dospijeću, dok su r_j^k *vrijednosti koje su zaista isplaćene*, primjerice, parcijalne isplate kreditorima. U slučaju bankrota jednoga od izdavatelja obveznica, stvarna isplata modelirana je $\mathbf{r}^k$, u procesu likvidacije imovine, uz prioritet k. Stvarna isplata može biti samo manja od potraživanja, nakon prijenosa:

$$0 \le \mathbf{r}^k \le \mathbf{d}^k. \tag{4.5}$$

Uz sve navedene pretpostavke modela, uvodimo jaču pretpostavku strukture matrice međuposredništva: *strogu* lijevu substohastičnost, koju smo definirali sa (2.1.1). Nova pretpostavka, u ekonomoskoj interpretaciji, uvodi uvjet na obaveznu egzistenciju vjerovnika izvan sustava poduzeća.

Stroga lijeva substohastičnost nalaže da se među vjerovnicima, za svaku obvezu promatranog sustava, nalazi i *eksterni* vjerovnik, u smislu poduzeća koje nije obvezano sustavom. Ovakva pretpostavka nije veliki bijeg od realnosti: nerijetko u popisu vjerovnika poduzeća nalazimo razne financijske i nefinancijske institucije, poput fondova, poslovnih banaka i osiguravajućih društava. Poteškoće pri određivanju ne-arbitražnih vrijednosti, koje se javljaju uslijed slabijih pretpostavki, prikazujemo primjerom (7.2.1).

Pretpostavka 3. *Neka su $\mathbf{M}^k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ strogo lijevo substohastične matrice, $k = 0, 1, \ldots, m$, koje opisuju međuposredništvo nad obvezama, odnosno udio u vlasništvu svakog od n promatranih poduzeća sustava. Neka je $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_0^+$ vektor cijena imovine, nezavisne o promatranom sustavu.*

Za svaki $k = 1, \dots, m$ *sa (4.4) definirana je funkcija* $\mathbf{d}^k$*, koja definira nominalnu vrijednost obveza svakog od poduzeća, dok vektor* $\mathbf{r}^k$ *odgovara njihovom stvarnom podmirenju.*

Zbog jednostavnosti pretpostavljamo kako svako poduzeće posjeduje samo jednu obvezu prioriteta k. Međutim, jasno definirana podjela isplate u slučaju bankrota druge ugovorne strane daje mogućnost pretpostavke na obvezu prioriteta k kao zbroj više različitih obveza.

Također, poduzeća koja posjeduju i imovinu i/ili obveze ostalih poduzeća i nisu ni u čijem posjedništvu ne uzimamo u model. Njihova imovina i obveze, naime, ne utječu na bilance (engl. *balance sheets*) preostalih poduzeća.

4.3 Funkcije obveza i primjeri

U prethodnom smo odjeljku definirali funkcije kojima opisujemo potraživanja promatranih poduzeća u modelu, $\mathbf{d}^k$, $k = 1, 2, \dots, m$. Jedan od najjednostavnijih primjera za definiciju ovakve funkcije upravo je konstanta:

$$\mathbf{d}^k \equiv \mathbf{b}^k \in (\mathbf{R}_0^+)^n.$$

Tada je obveza svakog od poduzeća upravo zajam (ili obveznica sa isplatom duga i kamata po dospijeću, bez kuponskih isplata). U složenijim primjerima gornje funkcije reprezentiraju financijske izvedenice, koje ovise o stvarnim vrijednostima $\mathbf{r}^k$. Također, bitno je napomenuti kako same funkcije $\mathbf{d}^k$ mogu ovisiti i o vektoru egzogenih cijena $\mathbf{a}$. U okvirima ovog rada cijene *egzogene* imovine smatramo konstantama, u vremenu $t = T$, pa iz istog razloga ovisnost financijskih izvedenica $\mathbf{d}^k$ o vektoru $\mathbf{a}$ ne označavamo formalno. Dakako, nešto složeniji primjeri obveza poput raznih financijskih izvedenica, među ostalima, definiraju $\mathbf{d}^k$ koje ovise o $\mathbf{a}$.

Primjer 4.3.1. *Promotrimo sustav od* $n = 2$ *poduzeća, sa vektorom egzogene imovine* $\mathbf{a} \in (\mathbb{R}_0^+)^3$ *i matricom strukture vlasništva nad imovinom* $\mathbf{a}$*,* $\mathbf{M}_\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$*. Neka su obveze svakog od poduzeća opisane funkcijama* $\mathbf{d}^3$*,* $\mathbf{d}_\mathbf{a}^2$*,* $\mathbf{d}_\mathbf{a}^1$*, respektivno:*

$$\mathbf{d}^3 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_\mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} b_2 \\ \left(0.5a_1 + 0.5a_2 - k_2\right)^- \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_\mathbf{a}^1 = \begin{pmatrix} \left(a_3 - k_1\right)^+ \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Dakle, prvo je poduzeće izdalo dvije obveznice, pri čemu ona u (nominalnom) iznosu b_1 *ima viši prioritet isplate od* b_2*, i europsku call opciju na imovinu* a_3*, sa cijenom izvršenja* k_1*. Drugo poduzeće, pak, izdalo je obveznicu u nominalnoj vrijednosti* b_3*, većeg prioriteta isplate od financijske izvedenice, europske put opcije na kombinaciju egzogenih imovina* a_1 *i* a_2*, sa cijenom izvršenja* k_2*.*

Ovim jednostavnim primjerom zaključujemo kako je moguća bilo kakva kombinacija međuposredništva i razina prioriteta isplate, za navedenih pet tzv. *"underlying liabilities"*. Također, dimenzija vektora egzogene imovine ne mora odgovarati broju poduzeća u sustavu. Veći broj komponenata vektora $\mathbf{a}$ omogućava veći broj izvedenica. Naravno, funkcije obveza $\mathbf{d}^k$ mogu biti definirane i za kompleksnije vrste financijskih izvedenica, poput *egzotičnih opcija*.

Poglavlje 5

Određivanje vrijednosti isplata u slučaju likvidacije poduzeća

U ovom odjeljku uvodimo jednadžbe pomoću kojih ćemo odrediti vrijednost obveza $\mathbf{r}^j$, $j = 0, 1, \ldots, k$ u slučaju likvidacije poduzeća. Ključna pretpostavka modela koju smo spomenuli, prisutna je u zakonodavstvima o likvidaciji poduzeća primjerice u Sjedinjenim Američkim Državama ili Velikoj Britaniji, pod nazivom *"Absolute Priority Rule"*.

U nastavku rada nazivamo ju *"Pravilom apsolutnog prioriteta"*. Pravilo je u skladu sa intuicijom o prvenstvu naplate pri likvidaciji poduzeća. Naime, pravilo nalaže da poduzeće u potpunosti isplati vjerovnike koji imaju potraživanja višeg prioriteta, pa zatim prelazi na one nižeg prvenstva:

Pretpostavka 4. *Poduzeća u potpunosti poštuju prvenstvo naplate vjerovnicima: tek nakon naplate potraživanja višeg prioriteta, poduzeće prelazi na isplate potraživanja nižeg.*

Pravilo apsolutnog prioriteta tada nalaže da se potraživanja vjerovnicima isplaćuju u minimalnom iznosu, nakon što su dugovi višeg prioriteta podmireni.

Prema tome, u vremenu dospijeća T, konačne su isplate definirane kao minimumi vrijednosti potraživanja vjerovnika, onoga što bi poduzeća *trebala* isplatiti, odnosno preostale imovine nakon namirivanja obveza višeg prioriteta. Općenito, u postupcima kapitalizacije, nerijetko poduzeća izdaju tzv. *preferencijalne ili povlaštene* korporativne obveznice koje možemo poistovjetiti sa obvezama višeg ranga. Niže prvenstvo potraživanja općenito dobivaju *redovne* dionice.

Tada za $k = 1, \ldots, m$ prioritete isplate i redoslijed isplata definiran nizom pravila, jednadžbe likvidacijskih vrijednosti obveza i kapitala svakog od poduzeća dane su sustavom:

$$\mathbf{r}^m = \min\left\{\mathbf{d}^m_{r^m,\ldots,r^0}, \mathbf{a} + \sum_{k=0}^{m} \mathbf{M}^k \mathbf{r}^k\right\}, \tag{5.1}$$

$$\mathbf{r}^j = \min\left\{\mathbf{d}^j_{r^m,\dots,r^0}, \left(\mathbf{a} + \sum_{k=0}^{k=m} \mathbf{M}^k\mathbf{r}^k - \sum_{k=j+1}^{m} \mathbf{d}^k_{r^m,\dots,r^0}\right)^+\right\}, \quad j = 1,\dots,m-1, \tag{5.2}$$

$$\mathbf{r}^0 = \left(\mathbf{a} + \sum_{k=0}^{k=m} \mathbf{M}^k\mathbf{r}^k - \sum_{k=1}^{k=m} \mathbf{d}^k_{r^m,\dots,r^0}\right)^+. \tag{5.3}$$

Prethodne jednadžbe definiraju vrijednosti potraživanja u trenutku dospijeća obveza, T. Izvod ovih jednadžbi bio je fundamentalan za određivanje ne-arbitražnih cijena u [8]. Motivacijski primjer sa 2 poduzeća poslužio je kao baza za proširenje. Tada, (5.3) definira vrijednost isplate *rezidualnih* potraživanja, koja možemo poistovjetiti sa potraživanjima samih dioničara, kao zadnjima u isplatnom redu vjerovnika poduzeća.

Implicitno pretpostavljamo da se sva potraživanja na dan dospijeća naplaćuju u gotovini, dobivenoj od likvidacije imovine poduzeća. U likvidacijskim postupcima pretpostavljamo kako vjerovnici sa potraživanjima najvišeg prioriteta primaju, ali i ne isplaćuju nikakve obveze. Sukladno tome, (5.1) možemo zamijeniti izrazom

$$\mathbf{r}^m = \min\left\{\mathbf{d}^m_{r^m,\dots,r^0}, \left(\mathbf{a} + \sum_{k=0}^{m} \mathbf{M}^k\mathbf{r}^k\right)^+\right\}, \tag{5.4}$$

što daje intuitivniji sustav. No, radi jednostavnosti, koristit ćemo se početnim sustavom (5.1)-(5.3). Fischer u [8] dokazuje ekvivalenciju rješenja sustava (5.1)-(5.3) i (5.4)-(5.2)-(5.3). Svako rješenje $(\mathbf{r}^{m*},\dots,\mathbf{r}^{0*})$ je nenegativno, iz čega slijedi ekvivalencija dva sustava. Mi ćemo tu tvrdnju dokazati u okviru dokaza Teorema 3.1.1, kojim su garantirana egzistencija i jedinstvenost cijena obveza i kapitala sustava.

5.1 Računovodstvo i bilanca

U nastavku dajemo osnovne jednadžbe bilance svakog od poduzeća, pod pretpostavkom nemogućnosti arbitraže. Također, uvodimo i mjeru *interne financijske poluge*, kao mjere sistemskog rizika, na razini čitavog sustava. Financijske poluge u slučaju jednog poduzeća u poslovanju služe kao referentna mjera rizičnosti poslovanja. Visoke financijske poluge indiciraju veliku omjer obveza prema imovini. Na razini jednog subjekta, najčešće je definirana kao omjer duga i kapitala.

U pregledu ekonomske i financijske teorije na samome početku rada naglasili smo važnost kontrole ovakvih mjera u svrhu izbjegavanja širenja *financijskih zaraza* (engl. *financial contagion*), primjerice u *ciklusima međuposredništva*.

Sumiranjem desnih strana sustava (5.1)-(5.3) te primjenom jednakosti (9.1) iz Leme 9.0.1 matematičkog dodatka dobivamo klasičnu jednadžbu za ne-arbitražne bilance poduzeća, za sve subjekte sustava:

$$\mathbf{a} + \sum_{k=0}^{m} \mathbf{M}^k \mathbf{r}^k = \sum_{k=0}^{m} \mathbf{r}^k \tag{5.5}$$

imovina + potraživanja = (dionički) kapital + plative obveze

Jednadžba (5.5) definira i osnovno pravilo računa dobiti i gubitka kod poslovanja poduzeća: aktiva je jednaka pasivi. Jednostavno rečeno, aktiva (imovina) mora biti jednaka obvezama. Gornja jednakost vrijedi za svako poduzeće u promatranom sustavu. Zbog nenegativnosti po komponentama, primjenom norme l_1 slijedi

$$||\mathbf{a}||_1 + \sum_{k=0}^{m} ||\mathbf{M}^k \mathbf{r}^k||_1 = ||\mathbf{r}^0||_1 + \sum_{k=1}^{m} ||\mathbf{r}^k||_1, \tag{5.6}$$

ukupna imovina + ukupne isplate =ukupni (dionički) kapital
+ sve plative obveze

Egzogena imovina, zbrojena sa vlasničkim udjelima u (dioničkom) kapitalu i potraživanjima kod drugih poduzeća jednaka je zbroju vrijednosti *svih* potraživanja i obveza, na razini čitave grupe od n poduzeća.

Desna strana posljednje jednadžbe reprezentira sva potraživanja dioničara i vjerovnika za svako od promatranih n poduzeća. S druge stane, lijeva je strana, izuzev norme vektora $\mathbf{a}$ karakteristična za poduzeća koja su u cijelosti prisutna u promatranome sustavu. Premještanjem na drugu stranu jednakosti, dobivamo:

$$\sum_{k=0}^{m} ||\mathbf{r}^k||_1 - \sum_{k=0}^{m} ||\mathbf{M}^k \mathbf{r}^k||_1 = ||\mathbf{a}||_1 \tag{5.7}$$

sva potraživanja - interna potraživanja = egzogena imovina

čime je dan važan ekonomski rezultat.

Naime, (5.7) izjednačava vrijednost svih potraživanja vjerovnika izvan sustava poduzeća s vrijednostima ukupne egzogene imovine poduzeća sustava. Prema tome, zaključujemo kako struktura nad vlasništvom kapitala, odnosno financijska poluga nemaju nikakav utjecaj eksternu imovinu promatranih poduzeća.

Ovo je načelo jedno od odrednica *teorije irelevantnosti kapitalne strukture*, odnosno posljedica *Modigliani-Miller-ovog teorema*, primijenjenog na grupu od n poduzeća. Prisjetimo se, u [17], Merton pretpostavlja da *Modigliani-Millerov teorem* vrijedi. Suzuki u [20] dokazuje da je irelevantnost o kapitalnoj strukturi i dalje prisutna u sustavu dva poduzeća. Promotrivši sustav od n subjekata u cijelosti, generalizacija teorema ponovno zadovoljava 3.4.1.

Dakle, sva vrijednost imovine koja proizlazi iz međuposredništva unutar sustava poduzeća ostaje sadržana u sustavu - nema utjecaja na vanjske vjerovnike čiji kapital ili dugovi nisu u vlasništvu niti jednog od poduzeća $i = 1, 2, \dots, n$.

Mjere financijske poluge

Nadalje, (5.7) potvrđuje pretpostavku o mogućnosti *"napuhavanja" bilanci* poduzeća, za, primjerice, matrice međuposredništva $\mathbf{M}^k$ kojima je suma elemenata po stupcima, za većinu stupaca, vrlo bliska 1. Tada dolazi do velikih iznosa u bilanci poduzeća, uz relativno malu tržišnu vrijednost egzogene imovine koje poduzeće zaista posjeduje, *egzogenu* imovinu sustava $\mathbf{a}$.

Iz tog razloga, uvodimo mjere financijske poluge i kvantitete međuposredništva, kao mjere rizika u ovakvim sustavima. Standardna mjera financijske poluge, definirana kao omjer duga i kapitala poduzeća (engl. *debt-to-equity ratio*), ne daje smislenu procjenu za grupu poduzeća. Primjerice, za sustav od n poduzeća, u kojem razmatramo samo udio u vlasničkom kapitalu, velike količine posjedovanja redovnih dionica daju relativno velike bilance, sa ponovno niskom tržišnom vrijednosti a_i.

Prema tome, definiramo mjeru *interne financijske poluge*, koja će isto promatrati na razini čitavog sustava poduzeća. Uz pretpostavku $||\mathbf{a}||_1 > 0$ definiramo

$$L := \frac{\sum_{k=0}^{m} ||\mathbf{M}^k \mathbf{r}^k||_1}{||\mathbf{a}||_1} \tag{5.8}$$

$$= \frac{\text{potraživanja unutar sustava}}{\text{egzogeno dana imovina}} \tag{5.9}$$

$$= \frac{\text{potraživanja unutar sustava}}{\text{potraživanja vjerovnika izvan sustava}}, \tag{5.10}$$

pri čemu posljednju jednakost u nazivniku dobivamo iz (5.7). Fischer ovu mjeru naziva *internom financijskom polugom*. Iz (5.6) dobivamo još jednu interpretaciju ove mjere:

$$L + 1 = \frac{\sum_{k=0}^{m} ||\mathbf{r}^k||_1}{||\mathbf{a}||_1} \tag{5.11}$$

$$= \frac{\text{sve obveze}}{\text{egzogena imovina}} \tag{5.12}$$

$$= \frac{\text{sveukupna imovina}}{\text{sve eksterne obveze}}, \tag{5.13}$$

gdje su *sve eksterne obveze* upravo obveze prema vjerovnicima izvan sustava poduzeća. Definiramo i mjeru

$$I = \frac{\sum_{k=0}^{m} ||\mathbf{M}^k \mathbf{r}^k||_1}{\sum_{k=0}^{m} ||\mathbf{r}^k||_1} = \frac{L+1}{L}, \tag{5.14}$$

koju nazivamo *stupanj međuposredništva* sustava. Iz (5.7) gornji razlomak interpretiramo kao udio svih potraživanja unutar sustava u ukupnoj vrijednosti potraživanja.

Definirajmo i I^{max} iz definicije matrične norme $|| \,.\, ||_1$, pomoću rezultata (2.2). I^{max} reprezentira gornju ogradu za stupanj međuposredništva u grupi od n poduzeća:

$$I^{max} = \max\{||\mathbf{M}^0||_1, \ldots, ||\mathbf{M}^m||_1\} \tag{5.15}$$

Zaista, iz (2.2), i lijeve substohastičnosti matrice $\mathbf{M}^k$, za svaku razinu prioroteta $k = 0, 1, \ldots, m$, vrijedi: $0 \leq I \leq I^{max} \leq 1$.

Također, iz (5.14), dobivamo jednakost $L = \dfrac{I}{1-I}$. Zaključujemo kako je L monotono rastuća po I. Prema tome, vrijedi

$$L^{max} = \frac{I^{max}}{1 - I^{max}} \tag{5.16}$$

$$0 \leq L \leq L^{max} \leq \infty. \tag{5.17}$$

Iz (5.13) vrijedi i nejednakost:

$$\sum_{k=0}^{m} ||\mathbf{r}^k||_1 = (L+1)||\mathbf{a}||_1 \leq (L^{max}+1)||\mathbf{a}||_1. \tag{5.18}$$

Dakle, vrijednost svih zahtjeva, za sve razine prioriteta, za promatranih n poduzeća, dobiva gornju ogradu. Iz (5.13) $L+1$ interpretiramo kao mjeru vrijednosti svih bilanci poduzeća sustava (strana pasive), izraženu u terminima *egzogene* imovine.

Prema tome, povećanjem financijske poluge, tj. većim kvocijentom L - nižim postotkom egzogene imovine u bilancama, dolazi do rizika od odudaranja vrijednosti obveza i odnosne imovine čitave grupe poduzeća. Prema tome, L i I možemo smatrati mjerama sistemskog rizika, poput rizika nastanka financijske zaraze u sustavu poduzeća (pri čemu pretpostavljamo visoku likvidnost imovine). Takav rizik može se materijalizirati u slučaju naglog pada cijene egzogene imovine, neposredno prije trenutka, ili u trenutku T, uzrokovanog nekim vanjskim faktorom.

Iz izraza za dvije mjere, zaključujemo kako one ovise o vrijednostima vektora egzogene imovine $\mathbf{a}$. Dakle, mjere $L = L(\mathbf{a})$ i $I = I(\mathbf{a})$ izračunate su samo za jednu realizaciju slučajnog procesa $(\mathbf{a})_{t\in\mathbb{T}}$, u trenutku dospijeća T.

Gornje mjere možemo odrediti i promatranjem svih mogućih *stanja svijeta*, te računanjem očekivanja, s obzirom na ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[I] \leq I^{max} \tag{5.19}$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[L] \leq L^{max} \tag{5.20}$$

Naravno, primjenom mjere $\mathbb{P}^*$ i određivanjem cijena $\mathbf{a}(t), t \in \mathbb{T}$ zaključujemo kako će te cijene u sebi već sadržavati informaciju o rizičnosti međuposredništva, s obzirom da je $\mathbb{P}^*$ mjera neutralna na rizik.

U ovom radu prezentiramo rezultate o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja sustava (5.1)-(5.3), u trenutku dospijeća obveza T. Stoga, mjere rizika smo izrazili za fiksan vektor cijena egzogene imovine u trenutku T. Uz prethodno spomenute pretpostavke na vektor vrijednosti egzogene imovine $\mathbf{a}$ kao n-dimenzionalnog slučajnog procesa $\mathbf{a}(t)_{t\in\mathbb{T}}$, $\max \mathbb{T} = T$ i $a_1(.) \geq 0$, kamatnu stopu na bezrizičnu imovinu (*numeráire* na promatranom tržištu), $\mathbf{a}$ i $\mathbf{r}^k$, $k = 0, 1, \ldots, m$ možemo zamijeniti njihovim ne-arbitražnim cijenama. Zamjene po komponentama svakog od vektora, u trenutku $t \in \mathbb{T}$, rezultiraju mjerama rizika u trenutku t prije dospijeća obveza:

$$L = L(\mathbf{a}(t)) \tag{5.21}$$

$$I = I(\mathbf{a}(t)) \tag{5.22}$$

Analognim postupkom definiramo i jednadžbe bilance poduzeća, u proizvoljnom trenutku prije dospijeća, $t \in \mathbb{T}$, zamjenom $\mathbf{a}$, $\mathbf{r}^0$ i $\mathbf{d}^i$ sa njihovim ne-arbitražnim cijenama u odgovarajućem t.

Osim *internih*, prethodno navedenih mjera, Fischer navodi i mjeru *eksterne* financijske poluge, koje definira analogno prethodnim:

$$L_{ex} := \frac{\sum_{k=1}^{m} \|\mathbf{r}^k\|_1 - \sum_{k=1}^{m} \|\mathbf{M}^k \mathbf{r}^k\|_1}{\|\mathbf{r}^0\|_1 - \|\mathbf{M}^0 \mathbf{r}^0\|_1} \tag{5.23}$$

$$= \frac{\text{obveze prema vjerovnicima izvan sustava}}{\text{vlasnički udjeli izvan sustava}} \tag{5.24}$$

Ovako definirana, *eksterna* poluga nema nikakvog utjecaja na posjedovanje egzogene imovine $\|\mathbf{a}\|_1$ financijskih i nefinancijskih subjekata izvana, pa ju prema tome ne smatramo relevantnom za razmatranje.

Kako bismo demonstrirali računanje mjera, vraćamo se na primjer sustava sa dva poduzeća. Za svaku od promatranih kombinacija međuposredništva računamo L, po formuli (5.9):

bez međuposredništva a_1=a_2	50% kapital a_1=a_2—L	50% dug a_1=a_2—L	cijene (s, r) $s_1 = s_2$,$r_1 = r_2$
150	125—0.2	100—0.5	50,100
100	100—0	50—1	0,100
50	50—0	25—1	0,50

Kroz retke tablice primjećujemo kako pad u vrijednosti egzogene imovine uz istodobno povećanje poluge dovodi do istih ne-arbitražnih vrijednosti obveza sustava. Prema tome, sveukupna imovina $v_1 + v_2$ ostala je jednaka, za svaki od tri slučaja međuposredništva. Međuposredništvo ne precjenjuje kapital, ali može precijeniti redovne dionice svakog, ukoliko su njihove bilance velike, iako je vrijednost pripadne *egzogene* imovine relativno malena.

Zaključujemo kako je količina međuposredništva ključna mjera koju treba uzimati u obzir pri procjeni rizika *financijske zaraze*. Neregulirano korištenje financijske poluge dobiva posebnu pozornost u brojnim ekonomskim analizama financijskih i nefinancijskih institucija u SAD-u, nakon krize. Mjera *interne financijske poluge* za grupu poduzeća predstavlja mjeru koja uključuje međuposredništvo na agregatnoj razini, ali opet, relevantna je za subjekte unutar sustava poduzeća. Za vanjske suučesnike na tržištu je irelevantna.

Poglavlje 6

Egzistencija i jedinstvenost rješenja

U narednom poglavlju iznosimo pretpostavke potrebne za egzistenciju, pa i jedinstvenost rješenja sustava (5.1)-(5.3). Prezentirat ćemo Fischerov dokaz teorema koji garantira egzistenciju i jedinstvenost, uz sve potrebne matematičke alate. Također, prokomentirat ćemo eventualno uvođenje slabijih pretpostavki, uz koje želimo osigurati iste rezultate.

6.1 Egzistencija i jedinstvenost

Pretpostavka 5. *Funkcije $\mathbf{d}^k_{r^m,\ldots,r^0}$, definirane sa (4.3) i (4.4) su neprekidne, za svaki $k = 0, 1, \ldots, m$.*

Sljedeća, nešto jača pretpostavka uključuje i poseban oblik vektorskih funkcija $\mathbf{d}^k_{r^m,\ldots,r^0}$. Pretpostavka je ključan je element dokaza Teorema 3.1.1,koji garantira egzistenciju rješenja sustava (5.1)-(5.3):

Pretpostavka 6. *Za svaki $k = 1, \ldots, m$ i $i = 1, 2, \ldots, n$ je komponentna funkcija zadana sa*

$$d_i^k(\mathbf{r}^m) = \psi_i^k\left(\sum_{l=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\mathbf{M}^l_{ij}\mathbf{r}^l_j\right), \tag{6.1}$$

pri čemu su za svaki $k = 1, 2 \ldots, m$, $\psi_i^k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ monotono rastuće funkcije, takve da za $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2 \in \mathbb{R}^n$, takve da je $\mathbf{y}^1 \geq \mathbf{y}^2$, vrijedi:

$$\mathbf{y}^1 - \mathbf{y}^2 \geq \sum_{k=1}^{m}\left(\psi_i^k(y_i^1) - \psi_i^k(y_i^2)\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.2}$$

Uvođenje Pretpostavke 6 na model rezultira raznim ograničenjima na financijske izvedenice (u našem modelu, obveze i imovinu poduzeća) kao funkcije koje zadaju vezu sa ψ_i^k. Primijetimo, svojsto (6.2) jači je uvjet od svojstva Lipschitzovosti funkcije. Pretpostavljamo kako je, uz monotone $\mathbf{d}^k$ suma funckija $\sum_{k=1}^{m} \mathbf{d}^k$ Lipschitzova sa koeficijentom 1, za svako poduzeće. Dakle, za svako povećanje obveza, koje ne uključuje dokapitalizaciju, poduzeće mora biti zaštićeno simultanim, većim povećanjem vrijednosti *endogene imovine*. Međutim, (6.1) ne uspostavlja vezu obveznica za vektorom egzogene imovine, već samo sa endogenom imovinom koju pisac ugovora posjeduje, što Fischer u [8] navodi kao dovoljno slabim uvjetom.

Financijske izvedenice koje zadovoljavaju spomenutu pretpostavku su, među ostalima, jednostavne korporativne obveznice, različitih prioriteta isplate: $\mathbf{d}^k_{r^m,\dots,r^0,\mathbf{a}} \equiv \mathbf{b}^k(\mathbf{a})$.

Konačno, iskazujemo i *Teorem o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja* sustava (5.1)-(5.3), koji reprezentira vrijednosti obveza i kapitala uz utjecaj međuposredništva među poduzećima unutar grupe od n poduzeća.

Teorem 6.1.1. *Uz Pretpostavku 3, vrijede sljedeće četiri tvrdnje:*

1. *Sustav (5.1)-(5.3) može imati samo nenegativna rješenja* $(\mathbf{r}^{m*}, \dots, \mathbf{r}^{0*})$*, po komponentama. Posebno, ako rješenje* $(\mathbf{r}^{m*}, \dots, \mathbf{r}^{0*})$ *postoji, onda je nenegativno.*

2. *Za proizvoljno rješenje sustava vrijedi: suma iznosa svih bilanci poduzeća manja je ili jednaka* $(L^{max} + 1)\|\mathbf{a}\|_1$*, pri čemu je* L^{max} *definiran sa (5.17)*

3. *Uz Pretpostavku 5, sustav ima barem jedno rješenje.*

4. *Uz Pretpostavku 6, rješenje je jedinstveno. Svu financijsku imovinu unutar sustava od n poduzeća čine izvedenice egzogene imovine. Implicitno zadana funkcija* $\mathbf{\Psi}$*,*

$$\mathbf{a} \overset{\mathbf{\Psi}}{\mapsto} \begin{pmatrix} \mathbf{r}^{m*}(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}^{0*}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}, \tag{6.3}$$

   predstavlja izvedenicu.

   Dodatno, ako su vektorske funkcije $\mathbf{d}^k_{r^0,\dots,r^m,\mathbf{a}}$ *neprekidne po* $\mathbf{a}$*,* $\forall k = 1, 2, \dots, m$*, tada vrijedi: preslikavanje* $\mathbf{\Psi}$ *je Lebesgue izmjerivo u odgovarajućem paru* σ *- algebri.*

Dokaz provodimo sistematično, dokazujući svaku od tvrdnji, redom. Primijetimo, prva tvrdnja iskazuje vrlo intuitivan rezultat: rješenja koja dobijemo, vrijednosti obveza i vlasničkih udjela su nenegativne. Prva tvrdnja posljedica je rezultata za lijevo substohastične matrice koje smo naveli u pripremnim rezultatima rada. Druga tvrdnja posljedica je nejednakosti (5.18) u poglavlju 5.1.

Dokaz tvrdnji 1. ***i*** 2. Neka je $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ permutacija elemenata skupa $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Za $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ sa $\mathbf{a}_\pi$ označimo vektor kojem su odgovarajuće komponente $\mathbf{a}_\pi = (a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(n)})$. Analogno, za matricu $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ permutacija nad retcima i stupcima rezultira matricom $\mathbf{M}_{\pi\pi}$, pri čemu je $[\mathbf{M}_{\pi\pi}]_{ij} = \mathbf{M}_{\pi(i),\pi(j)}$, za $i, j \in 1, 2, \dots, n$. Tvrdnja o nenegativnosti za $\mathbf{r}^0, \mathbf{r}^1, \dots, \mathbf{r}^{m-1}$ trivijalno slijedi iz jednadžbi za vrijednosti obveza i kapitala u trenutku dospijeća, (5.2) i (5.3). Dokažimo da isto vrijedi i za $\mathbf{r}^m$.

Jednadžba (5.1) određuje vrijednost obveza najvišeg prioriteta $\mathbf{r}^m$. Pretpostavimo kako je barem jedna komponenta $i \in 1, 2, \dots, n$ vektora $\mathbf{r}^m$ negativna. Permutirajmo stupce, odnosno retke matrice međuposredništva $\mathbf{M}^k$ i elemente vektora $\mathbf{r}^k$, tako da je početnih $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ redaka vektora $\mathbf{r}^m_\pi$ nenegativno. Dobivamo jednadžbu, ekvivalentnu (5.1):

$$\mathbf{r}^m = \min\left\{\mathbf{d}^m_{r^m,\dots,r^0}, \mathbf{a}_\pi + \sum_{k=0}^{m} \mathbf{M}^k_{\pi\pi}\mathbf{r}^k_\pi\right\}. \tag{6.4}$$

Primijetimo, matrica permutiranih redaka i stupaca $\mathbf{M}_{\pi\pi}$ ponovno je lijevo substohastična. Rapisom gornjeg izraza po komponentama, uz $r^m_i < 0$, $i \in \{j + 1, \dots, n\}$ i činjenice da $\mathbf{d}^k$ ne mogu biti negativne, vrijedi:

$$r^m_{\pi i} = a_{\pi i} + \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=1}^{n} [M^k_{\pi\pi}]_{il} r^k_{\pi l}. \tag{6.5}$$

Sumandi su nenegativni za sve niže prioritete isplate, ali i, po početnoj pretpostavci, za prvih j komponenti vektora $\mathbf{r}^m$. Svodimo prethodni izraz na jednostavniji oblik

$$\mathbf{r}^m_\pi = \mathbf{c}_i + \sum_{l=j+1}^{n} [M^m_{\pi\pi}]_{il}\mathbf{r}^m_{\pi l}, \quad \mathbf{c}_i \geq 0, \tag{6.6}$$

pri čemu definiramo:

$$\mathbf{r}' := (r_{\pi j+1}, \dots, r_{\pi n})^\top \in \mathbb{R}^{n-j-1}, \tag{6.7}$$

$$\mathbf{c} := (c_{j+1}, \dots, c_n)^\top \in \mathbb{R}^{n-j-1}, \tag{6.8}$$

$$\mathbf{M}' := [M^m_{\pi\pi}]_{il}, \quad i, l = j + 1, \dots, n. \tag{6.9}$$

Tada je matrični zapis za sustav (6.6), za $i \in j + 1, \dots, n$:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{c} + \mathbf{M}'\mathbf{r}', \quad \mathbf{r}' < 0, \mathbf{c} \geq 0. \tag{6.10}$$

Matrica $\mathbf{M}'$ je lijevo substohastična, kao podmatrica lijevo substohastične matrice $\mathbf{M}$. Lema 2.1.2 iz pripremnih rezultata garantira egzistenciju inverza $(\mathbf{I} - \mathbf{M}')^{-1}$. Dobivamo rješenje matrične jednadžbe

$$\mathbf{r}' = (\mathbf{I} - \mathbf{M}')^{-1}\mathbf{c}. \tag{6.11}$$

Prema Lemi 2.1.2, rješenje (6.11) je nenegativno, što dovodi do kontradikcije s pretpostavkom o negativnosti barem jednog elementa vektora $\mathbf{r}'$.

Tvrdnja 2. slijedi jednostavno iz nejednakosti (5.18) u (5.1). □

U nastavku dokazujemo preostale dvije tvrdnje Teorema 6.1.1, pri čemu u dokazu treće tvrdnje koristimo Tychonoff-ovu verziju *Brouwer-Schauderovog teorema o fiksnoj točki*, Teorema 2.2.2.

Dokaz tvrdnje 3. Svako je rješenje sustava (5.1)-(5.3) fiksna točka preslikavanja:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}^m \\ \mathbf{r}^{m-1} \\ \vdots \\ \mathbf{r}^0 \end{pmatrix} \overset{\mathbf{\Psi}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \min\left\{\mathbf{d}^m_{r^m,\dots,r^0}, \mathbf{a} + \sum_{k=0}^m \mathbf{M}^k\mathbf{r}^k\right\} \\ \min\left\{\mathbf{d}^{m-1}_{r^m,\dots,r^0}, \left(\mathbf{a} + \sum_{k=0}^m \mathbf{M}^k\mathbf{r}^k - \mathbf{d}^m_{r^m,\dots,r^0}\right)^+\right\} \\ \vdots \\ \min\left\{\mathbf{d}^1_{r^m,\dots,r^0}, \left(\mathbf{a} + \sum_{k=0}^m \mathbf{M}^k\mathbf{r}^k - \sum_{k=2}^m \mathbf{d}^k_{r^m,\dots,r^0}\right)^+\right\} \\ \left(\mathbf{a} + \sum_{k=0}^m \mathbf{M}^k\mathbf{r}^k - \sum_{k=1}^m \mathbf{d}^k_{r^m,\dots,r^0}\right)^+ \end{pmatrix}. \tag{6.12}$$

Također, vrijedi i obrat: svaka fiksna točka gornje definiranog preslikavanja je rješenje sustava (5.1)-(5.3). Iz prethodno dokazane tvrdnje 1, dovoljno je promatrati preslikavanja $\mathbf{\Psi}$ definirana na $(\mathbb{R}_0^+)^{n(m+1)}$. Primijetimo, preslikavanje $\mathbf{\Psi}$ ovisi o $\mathbf{a}$, što bismo mogli naglasiti oznakom $\mathbf{\Psi_a}$.

Primjenom l_1-norme na vektor $\mathbf{\Psi}(\mathbf{r})$, korištenjem nejednakosti (2.2), dobivamo

$$\begin{aligned}
\left\| \mathbf{\Psi}\begin{pmatrix} \mathbf{r}^m \\ \mathbf{r}^{m-1} \\ \vdots \\ \mathbf{r}^0 \end{pmatrix} \right\|_1 &= \left\| \mathbf{a} + \sum_{k=0}^{m} \mathbf{M}^k \mathbf{r}^k \right\|_1 && (6.13) \\
&= \|\mathbf{a}\|_1 + \sum_{k=0}^{m} \left\| \mathbf{M}^k \mathbf{r}^k \right\|_1 && (6.14) \\
&\leq \|\mathbf{a}\|_1 + \sum_{k=0}^{m} \left\| \mathbf{M}^k \right\|_1 \left\| \mathbf{r}^k \right\|_1 && (6.15) \\
&\leq \|\mathbf{a}\|_1 + I^{max} \sum_{k=0}^{m} \left\| \mathbf{r}^k \right\|_1 && (6.16) \\
&= \|\mathbf{a}\|_1 + I^{max} \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{r}^m \\ \mathbf{r}^{m-1} \\ \vdots \\ \mathbf{r}^0 \end{pmatrix} \right\|_1, && (6.17)
\end{aligned}$$

pri čemu koristimo nejednakost (2.1) iz pripremnih rezultata rada, i definiciju I^{max}. Pomoću identiteta $L^{max} + 1 = \dfrac{1}{1 - I^{max}}$, dobivamo

$$\mathbf{0} \leq \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{r}^m \\ \mathbf{r}^{m-1} \\ \vdots \\ \mathbf{r}^0 \end{pmatrix} \right\|_1 \leq (L^{max} + 1)\|\mathbf{a}\|_1, \tag{6.18}$$

pa i

$$\mathbf{0} \leq \left\| \mathbf{\Psi}\begin{pmatrix} \mathbf{r}^m \\ \mathbf{r}^{m-1} \\ \vdots \\ \mathbf{r}^0 \end{pmatrix} \right\|_1 \leq (L^{max} + 1)\|\mathbf{a}\|_1. \tag{6.19}$$

Pretpostavka 5 osigurava neprekidnost preslikavanja $\mathbf{\Psi}$. Dodatno, nejednakost (6.18) definira kompaktni podskup skupa $(\mathbb{R}_0^+)^{n(m+1)}$. *Brouwer-Schauderov teorem o fiksnoj točki*, Teorem 2.2.2. daje egzistenciju barem jedne fiksne točke preslikavanja. Dakle, postoji rješenje - vektor ne-arbitražnih vrijednosti $\mathbf{r}^*$, za koje je sveukupna suma svih bilanci poduzeća manja ili jednaka $(L^{max} + 1)\|\mathbf{a}\|_1$. $\square$

Konačno, kako bismo dokazali egzistenciju i jedinstvenost, za tvrdnju 4 iskazanog teorema, koristimo *Banachov teorem o kontrakciji*, Teorem 2.2.3 i tehničku lemu, koju iskazujemo i dokazujemo u Matematičkom dodatku rada.

Lema 6.1.2. *Pod pretpostavkama 3 i 6 preslikavanje* $\mathbf{\Psi}$ *je stroga kontrakcija, s obzirom na metriku induciranu* l_1*-normom na* $\mathbb{R}^{n\times(m+1)}$.

Dokaz. Neka su $\mathbf{r}^{m,1}, \mathbf{r}^{m-1,1}, \ldots, \mathbf{r}^{0,1}$ i $\mathbf{r}^{m,2}, \mathbf{r}^{m-1,2}, \ldots, \mathbf{r}^{0,2}$ vektori u $\mathbb{R}^n$. Tvrdnju dokazujemo po definiciji. Definirajmo matricu $g \in \mathbb{R}^{n\times(m+1)}$:

$$\mathbf{g} = \mathbf{\Psi}\begin{pmatrix} \mathbf{r}^{m,1} \\ \mathbf{r}^{m-1,1} \\ \vdots \\ \mathbf{r}^{0,1} \end{pmatrix} - \mathbf{\Psi}\begin{pmatrix} \mathbf{r}^{m,2} \\ \mathbf{r}^{m-1,2} \\ \vdots \\ \mathbf{r}^{0,2} \end{pmatrix} \tag{6.20}$$

Neka je $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ definiran sa:

$$\mathbf{h} = \sum_{k=0}^{m} \mathbf{M}^k(\mathbf{r}^{k,1} - \mathbf{r}^{k,2}) \tag{6.21}$$

Kako bismo ostali u skladu s notacijom u iskazu tehničke leme potrebne za ostatak dokaza, definiramo: $x = a_i, \quad i \in 1, 2, \ldots, n$ i y^1, odnosno y^2 kao:

$$y^l = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{M}^k_{ij}\mathbf{r}^k_j, \quad l = 1, 2. \tag{6.22}$$

Sada, zapisom izraza (6.21) i (6.22) po komponentama vrijedi $h_i = y^1 - y^2$:

$$g_i = \min\{\Psi^m_i(y^1), x + y^1\} - \min\{\Psi^m_i(y^2), x + y^2\}, \tag{6.23}$$

$$\begin{aligned} g_{i+nj} = \min\{&\Psi^{m-j}_i(y^1), \Big(x + y^1 - \sum_{k=m-j+1}^{m} \Psi^k_i(y^1)\Big)^+\} \\ - \min\{&\Psi^{m-j}_i(y^2), \Big(x + y^2 - \sum_{k=m-j+1}^{m} \Psi^k_i(y^2)\Big)^+\}, \quad 0 < j < m, \end{aligned} \tag{6.24}$$

$$g_{i+nm} = \Big(x + y^1 - \sum_{k=1}^{m} \Psi^k_i(y^1)\Big)^+ - \Big(x + y^2 - \sum_{k=1}^{m} \Psi^k_i(y^2)\Big)^+. \tag{6.25}$$

Primijetimo, preslikavanje Ψ zadovoljava uvjete Leme 9.0.2. Matematičkog dodatka. Zbrajanjem (6.23)-(6.25) i primjenom jednakosti (9.5) slijedi

$$\sum_{j=0}^{m} |g_{i+nj}| = |h_i|, \quad \forall i.$$

Iz definicije l_1-norme, slijedi jednakost: $||\mathbf{g}||_1 = ||\mathbf{h}||_1$. Uz gornju ogradu I^{max} i nejednakosti trokuta spomenute norme, vrijedi niz nejednakosti:

$$||\mathbf{g}||_1 \leq \sum_{k=0}^{m} ||\mathbf{M}^k(\mathbf{r}^{k,1} - \mathbf{r}^{k,2})||_1 \leq \sum_{k=0}^{m} ||\mathbf{M}^k||_1 ||\mathbf{r}^{k,1} - \mathbf{r}^{k,2}||_1 \leq I^{max}\left(\sum_{k=0}^{m} ||\mathbf{r}^{k,1} - \mathbf{r}^{k,2}||_1\right),$$

koji dokazuje lemu. □

Dokaz tvrdnje 4. Primjenom *Banachovog teorema o kontrakciji*, iskazanog u pripremnim rezultatima, za strogu konstrakciju Ψ dobivamo jedinstvenost rješenja sustava (5.1)-(5.3). Štoviše, sam *Banachov teorem o kontrakciji* dovodi do načina nalaženja rješenja nizom tzv. *Picardovih* iteracija, pri čemu je svaka iteracija Ψ definirana pomoću (6.12). Ovako definirane iteracije ovise o vektoru vrijednosti $\mathbf{a}$, što u daljenjem označavamo sa $\Psi_{\mathbf{a}}$. Za broj iteracija m, pri čemu $m \to \infty$ to je

$$\Theta(\mathbf{a}) \equiv \lim_{m\to\infty} \Psi_{\mathbf{a}}^m(\cdot) = \lim_{m\to\infty} \Psi_{\mathbf{a}} \circ \cdots \circ \Psi_{\mathbf{a}}(\cdot). \tag{6.26}$$

Dakle, limes iteracija, vektor ne-arbitražnih vrijednosti, funkcija je vektora vrijednosti *egzogene* imovine $\mathbf{a}$. Ista tvrdnja vrijedi po komponentama. Zaključujemo kako su ne-arbitražne vrijednosti obveza poduzeća k funkcije cijena a_i, $i = 1, \ldots, n$, za svako $k = 1, 2, \ldots, n$, baš kao i Mertonovom modelu duga.

Iz Pretpostavke 5 na neprekidnost funckija $d^i_{\mathbf{r}^0,\ldots,\mathbf{r}^m}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ i definicije preslikavanja (6.3) slijedi neprekidnost od $\Psi_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n(m+1)$, za proizvoljan $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

Naime, fiksiranjem $\mathbf{a}$ u vremenu dospijeća, provodimo *Picardove* iteracije $\Psi_{\mathbf{a}}^m$ - dobivene uzastopnom kompozicijom

$$\Psi_{\mathbf{a}}^m = \Psi_{\mathbf{a}} \circ \cdots \circ \Psi_{\mathbf{a}}(\cdot).$$

Leme o izmjerivosti funckija 2.3.1 i 2.3.2 povlače Lebesgue - izmjerivost preslikavanja $\Psi_{\mathbf{a}}^m$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Konačno, koorištenjem leme 2.3.3 dobivamo izmjerivost limesa po točkama, $\Theta(\mathbf{a})$, definiranog pomoću (6.26).

□

Nakon dokaza rezultata o egzistenciji i rješenju jednadžbi sustava, vrijednostima potraživanja i imovine u trenutku dospijeća T, prokomentirat ćemo i određivanje vrijednosti istih prije trenutka T.

6.2 Računanje vrijednosti prije trenutka dospijeća

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $\mathbb{F}$ filtracija na $\mathcal{F}_T$. Pretpostavimo kako su cijene *egzogene* imovine modelirane slučajnim procesom $(\mathbf{a}_t, t \in \mathbb{T})$, u diskretnom ili neprekidnom vremenu. Prva komponenta procesa, $\mathbf{a}_1(t)$ preuzima ulogu diskontnog faktora.

Pretpostavkom na izostanak mogućnosti ostvarivanja bezrizičnog profita, primjenom jednog od oblika *Fundamentalnog teorema određivanja cijene financijske imovine*, 3.1.1, za diskretno ili neprekidno vrijeme, dolazimo do ekvivalentne martingalne mjere $\mathbb{P}^*$ za proces $\mathbf{a}(t)$. Podsjetimo, tada su komponente procesa $(\mathbf{a}(t), t \in \mathbb{T})$, $\mathbf{a}_i(t), i = 1, \ldots, n$, $\mathbb{P}^*$-martingali. Za financijsku izvedenicu vrijednosti imovine $\mathbf{a}$ sa isplatom $V(T)$ u trenutku dospijeća T, formula

$$V(t) = \mathbf{a}_1(t)\mathbb{E}^*\left[\frac{V(T)}{\mathbf{a}_1(T)}\middle|\mathcal{F}_t\right] \tag{6.27}$$

definira slučajni proces $(V(t), t \in \mathbb{T})$ koji modelira kretanje cijene referentne financijske izvedenice. Ovako definiran slučajan proces vrijednosti $(V(t), t \in \mathbb{T})$ poznat je u literaturi pod nazivom *proces ne-arbitražnih cijena*. S obzirom da smo do sada pozornost skretali na izračun vrijednosti imovine i obveza poduzeća u trenutku dospijeća, detalji izvoda gornje formule izlaze izvan okvira ovog rada, a dostupni su u [3], [21], [23].

Preslikavanje Ψ iz tvrdnje 4 Teorema 6.1.1 je Lebesgue - izmjerivo. U trenutku t, $\mathbf{a}(t)$ je slučajna varijabla, po definiciji izmjeriva u paru σ- algebri $(\mathcal{F}_t, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n_+))$. Kao kompozicija Lebesgue-izmjerivih preslikavanja u odgovarajućim parovima σ-algebri, $\Psi_{\mathbf{a}(t)}$ je Lebesgue - izmjeriva slučajna varijabla. Za implicitno zadano preslikavanje Ψ, definirano formulom (6.3) je svaka komponenta isplata u trenutku dospijeća T, u ovisnosti od $\mathbf{a}(T)$. Formulom

$$\Psi(t) = \mathbf{a}_1(t)\mathbb{E}^*\left[\frac{\Psi(\mathbf{a}(T))}{\mathbf{a}_1(T)}\middle|\mathcal{F}_t\right] \tag{6.28}$$

definirane su ne-arbitražne cijene obveza i imovine svakog od n poduzeća, u proizvoljnom trenutku $t \in \mathbb{T}$.

Bez dodatnih pretpostavki na potpunost financijskog tržišta, egzistencija $\Psi(t)$ nije zagarantirana. Međutim, u modelu potpunog financijskog tržišta egzistencija replicirajućeg portfelja za $\Psi_{\mathbf{a}(T)}$ dat će cijenu u svakom trenutku t. Definicije potpunosti tržišta i replicirajućeg portfelja nismo uvodili do sada. Za razradu i ideju, upućujemo na [3], [21] i [23].

U poglavlju 5.1 definirali smo *internu financijsku polugu* (5.9), odnosno *stupanj financijskog međuposredništva*, (5.14), u proizvoljnom trenutku dospijeća T. Zamjenom vektora koji definiraju vrijednosti potraživanja $\mathbf{d}^k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, odnosno vektora vrijednosti kapitala, $\mathbf{r}^0$, sa njihovim ne-arbitražnim cijenama u $t \in \mathbb{T}$ i umetanjem istih u jednadžbu bilance utvrđujemo da jednakost (5.5) vrijedi i prije vremena dospijeća T.

Poglavlje 7

Slabije pretpostavke modela i rezultati

7.1 Izostanak jedinstvenosti rješenje uz slabiju pretpostavku na funkcije obveza

U Teoremu 6.1.1 iskazali smo egzistenciju, ali ne i jedinstvenost uz pretpostavku 5. Promotrimo primjer sa 2 poduzeća i konstantnim vektorom $\mathbf{a} = (1, 1)^\intercal$, prioritetom isplate $k = m = 1$.

Primjer 7.1.1. *Pretpostavljamo međuposredništvo samo nad obvezama. Tada*

$$\mathbf{M}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 \\ 0.8 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{d}_{r^0,r^1} = \begin{pmatrix} (r_2 - 2)^2 \\ (r_1 - 2)^2 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

definiraju vektore i matricu za sustav jednadžbi ne-arbitražnih cijene po formuli (4.3)

$$\begin{aligned} r_1 &= \min\{(r_2 - 2)^2, 1 + 0.8r_2\} \\ r_2 &= \min\{(r_1 - 2)^2, 1 + 0.8r_1\} \\ s_1 &= (1 + 0.8r_2 - (r_2 - 2)^2)^+ \\ s_2 &= (1 + 0.8r_1 - (r_1 - 2)^2)^+. \end{aligned}$$

Rješavanjem $r_2^2 - 4.8r_2 + 3 = 0$ dobivamo dva moguća rješenja za r_2, $r_2 = 1, 4$. Prema tome,

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

i

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

daju dva različita rješenja. Naime, funkcije ne zadovoljavaju nejednakost (6.2).

Općenito, u takvim slučajevima nije moguće definirati implicitno zadano preslikavanje Ψ, upravo zbog nejedinstvenosti rješenja sustava. Fischer napominje kako tada nije moguće odrediti cijenu na jedinstven način i upućuje na potrebu za regulacijom takvih tržišta.

7.2 Izostanak egzistencije uz lijevu substohastičnost matrice međuposredništva

Pretpostavkom 3 postrožili smo uvjete međuposredništva, zahtijevajući *strogu* lijevu substohastičnost matrica $\mathbf{M}^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$ - pretpostavili smo postojanje vanjskog vjerovnika ili vlasnika kapitala. Kao što smo spomenuli, vanjski investitori mogu biti investicijski fondovi, banke i sl. Uvodeći *samo* lijevu substohastičnost, dolazimo do problema pronalaska rješenja, a i konvergencije metode *Picardovih* iteracija:

Primjer 7.2.1. *Pretpostavimo međuposredništvo nad kapitalom, izostavimo posredništvo dugova. Neka je matrica* $\mathbf{M}^0$ *lijevo stohastična. Dakle,*

$$\sum_{i=1}^{n} M^0_{ij} = 1.$$

Nadalje, neka je vektor egzogene imovine netrivijalan, $||\mathbf{a}||_1 > 0$ *i* $\mathbf{d}^k \equiv \mathbf{0}$*. Pretpostavimo egzistenciju rješenja ne-arbitražnih vrijednosti kapitala,* $\mathbf{s}$.

Vrijedi: $||\mathbf{s}||_1 = ||\mathbf{M}^0\mathbf{s}||_1$*. Naravno, u ovim uvjetima vrijede jednadžbe bilanci za svako od n poduzeća, pa i u normi* l_1*:*

$$||\mathbf{s}||_1 = ||\mathbf{a}||_1 + |\mathbf{M}^0 \cdot \mathbf{s}||_1 = ||\mathbf{a}||_1 + ||\mathbf{s}||_1.$$

Prethodna jednakost povlači $||\mathbf{a}||_1 = 0$*, što dovodi do kontradikcije s pretpostavkom o netrivijalnosti vektora* $\mathbf{a}$.

Dodatno $I^{max} = \max\{||\mathbf{M}^0||_1\} = 1$ *implicira*

$$L^{max} = \frac{I^{max}}{1 - I^{max}} = \infty.$$

7.3 Vektor imovine $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^q$

U motivacijskom primjeru (4.6) vektor imovine $\mathbf{a}$ bio je veće dimenzije od broja poduzeća, čemu pridodajemo pozornost u nastavku. Pretpostavimo $\mathbf{a} \in (\mathbb{R}^+_0)^q$. Kako bismo opisali strukturu vlasništva nad imovinom, uvodimo *matricu vlasništva* $\mathbf{M}^{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^{nq}$. Suma komponenti matrice po stupcima zadovoljava nejednakost $0 \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}^{\mathbf{a}} \leq 1$, $\forall j = 1, 2, \ldots, q$. Naravno, sustav jednadžbi za vrijednosti $\mathbf{r}^0, \ldots, \mathbf{r}^m$ je izmijenjen:

$$\mathbf{r}^m = \min\left\{\mathbf{d}^m_{r^m,\ldots,r^0}, \mathbf{M}^{\mathbf{a}}\mathbf{a} + \sum_{k=0}^{m} \mathbf{M}^k \mathbf{r}^k\right\},$$

$$\mathbf{r}^j = \min\left\{\mathbf{d}^j_{r^m,\ldots,r^0}, \left(\mathbf{M}^{\mathbf{a}}\mathbf{a} + \sum_{k=0}^{k=m} \mathbf{M}^k \mathbf{r}^k - \sum_{k=j+1}^{m} \mathbf{d}^k_{r^m,\ldots,r^0}\right)^+\right\}, \quad j = 1, \ldots, m-1,$$

$$\mathbf{r}^0 = \left(\mathbf{M}^{\mathbf{a}}\mathbf{a} + \sum_{k=0}^{k=m} \mathbf{M}^k \mathbf{r}^k - \sum_{k=1}^{k=m} \mathbf{d}^k_{r^m,\ldots,r^0}\right)^+.$$

Prethodni sustav zadovoljava pretpostavke ključnog teorema rada, Teorema 6.1.1. Prema tome, dobivamo egzistenciju i jedinstvenost vrijednosti obveza $\mathbf{r}^m, \ldots, \mathbf{r}^1$, odnosno kapitala $\mathbf{r}^0$. Primijetimo, upravo iz ovisnosti funkcija obveza $d^k_{\mathbf{r}^0,\ldots,\mathbf{r}^m,\mathbf{a}}$ o $\mathbf{a}$ slijedi: veća dimenzija vektora *egzogene* imovine daje više mogućnosti u definiranju financijskih izvedenica. Referetnu imovinu financijskih izvedenica čine komponente a_i, što smo demonstrirali primjerom (4.6).

Poglavlje 8

Zaključak

Na temelju ključnih rezultata dobivenih u dosadašnjim istraživanjima o utjecaju financijske međuovisnosti među poduzećima, navodimo zaključke i mogućnosti proširenja promatranog modela, ekvivalentima proširenja Mertonovog modela korporativnog duga, opisanog u Poglavlju 2.

Uvođenje mogućnosti različitih prioriteta naplate obveza, kao i raznih oblika financijskih izvedenica koji modeliraju obveze svakog poduzeća veliko su proširenje u odnosu na dotadašnje radove. Međuposredništvo nad obvezama i kapitalom poduzeća, što smo pokazali u odjeljku 5.1, utječe na uvedene kvantitativne mjere rizika na razini čitave grupe, mjeru *interne financijske poluge*, pa time i na *stupanj međuposredništva*. Veliki koeficijenti matrice međuposredništva "napuhuju" bilance poduzeća i stvaraju krivu predodžbu o potencijalno riskantnim poslovanjima.

Zbrajanjem vrijednosti bilanci u trenutku dospijeća T dokazujemo prisutnost načela irelevantnosti kapitalne strukture na razini čitave grupe. Dakle, generalizacija Mertonovog modela zadovoljava *Modigliani-Millerov teorem*, Teorem 3.4.1. Kao što smo i spomenuli, Suzuki u modelu međuposredništva za dva poduzeća dokazao isto, pa je i Fischerov rezultat u skladu sa dosadašnjim razmatranjima.

Jednadžbe kojima definiramo i računamo ne-arbitražne vrijednosti *likvidacijske imovine* poduzeća omogućavaju proširenje analogno onima u Mertonovom modelu. Naime, izračun ne-arbitražnih *likvidacijskih* vrijednosti duga i kapitala potaknuo je daljnji razvoj u smjeru računanja vjerojatnosti bankrota subjekata sustava. Modeliranjem kretanja vrijednosti *egzogene* imovine slučajnim procesom, posebno, višedimenzionalnim Brownovim gibanjem, pretpostavljamo log-normalnu distribuciju komponenti *egzogene* imovine u trenutku dospijeća, $a_i(T)$.

Uz međuposredništvo, likvidacijska vrijednost svakog od poduzeća postaje transformacija log-normalne slučajne varijable, čija su distribucija i zatvorena forma predmeti novijih istraživanja. Naime, financijska ovisnost među poduzećima može podcijeniti ili čak precijeniti vjerojatnost bankrota. Za formalni iskaz i procjenu spomenutih distribucija upućujemo na [15].

Modeli korporativnog duga uz dodatno preciziranje barijere, kojom se omogućuje pojava bankrota poduzeća i prije vremena dospijeća njegovih obveza u literaturi su poznati pod nazivom "*modeli prvog prijelaza*". Jedno od prvih takvih proširenja za model duga jednog poduzeća dostupno je u [4]. Generalizacija "*modela prvog prijelaza*" na sustav od n poduzeća potencijalni je smjer daljnjeg razvoja.

Iako smo, rješavanjem jednadžbi iskazanih u radu, dobili vrijednosti duga i kapitala, kompleksniji sustavi iziskuju velik broj *Picardovih* iteracija. Podsjetimo, dovoljno velikim brojem iteracija dobivamo konvergenciju vrijednosti dugova poduzeća. Međutim, prevelik broj upućuje na potecijalno neefikasan izračun vrijednosti u primjenama, u terminima vremenskog izvršavanja algoritma. Pregled dosadašnjih, ali i razrada bržih, tzv. *hibridnih* algoritama dostupna je u [12]. Zanimljivo je kako su hibridni algoritmi kombinacija predloženih algoritama Elsingerovog ([7]), Suzukijevog ([20]) i Fischerovog ([8]) rada.

Pretpostavka 4 u iskazu fundamentalnog Teorema 6.1.1, garantira jedinstvenost rješenja. Međutim, kao što smo i komentirali, vrlo je jaka. Uvođenje slabijih pretpostavki na definiciju funkcija obveza, odnosno financijskih izvedenica, uz garanciju jedinstvenosti svih vrijednosti osiguralo bi vjernije modeliranje stvarnih sustava.

Modeliranje kamatne stope pomoću slučajnog procesa, uz pretpostavljenu korelaciju kretanja *egzogene* imovine i kamatne stope proširenje je Mertonovog modela za jedno poduzeće - isto je moguće i za Fischerov, što autor i diskutira u [8].

Na temelju razvoja financijske krize u Sjedinjenim Američkim Državama 2008. godine, razrada problematike financijskog međuposredništva doživljava svoj najveći napredak u slučaju financijskih institucija i poslovnih banaka. Međutim, u ovome smo radu koncentraciju preusmjerili na poduzeća.

Mjere *sistemskog* rizika pozivaju na jačanje regulative nad međuposredništvom udruženja poduzeća poput gospodarskih koncerna. U malim gospodarstvima poput Hrvatskog, poremećaj kojim dolazi do naglog pada vrijednosti *egzogene* imovine za poduzeća iste gospodarske grane s visokim *stupnjem međuposredništva* može rezultirati nizom bankrota i uzrokovati pad u gospodarskoj aktivnosti, pa čak i recesiju. Naposljetku, jedan od potencijalnih uzročnika sljedeće krize može biti i prezaduženost poduzeća, uzrokovana razdobljem vrlo niskih kamatnih stopa nakon 2008. godine.

Modeliranje vrijednosti obveza i kapitala, pod pretpostavkom dostupnosti informacija o međuposredništvima, omogućava procjene vjerojatnosti bankrota i predikcije u kretanju vrijednosti poduzeća. Simulacije modela poput Fischerovog mogle bi ukazati na "slabe točke" gospodarstva.

Poglavlje 9

Matematički dodatak

Lema 9.0.1. *Za $x \in \mathbb{R}$, $m \in 1, 2, \ldots$, i $y^1, y^2, \ldots, y^m \in \mathbb{R}_0^+$ vrijedi:*

$$x = \min\{y^1, x\} + \sum_{j=1}^{m} \min\left\{y^{j+1}, \left(x - \sum_{i=1}^{j} y^i\right)^+\right\} + \left(x - \sum_{i=1}^{m} y^i\right)^+ \tag{9.1}$$

Dokaz. Slučaj kada je $x \leq y^1$ je očit. Za $m \geq 2$ i $y^1 < x < \sum_{i=1}^{m} y^i$ postoji i_0 tako da vrijedi nejednakost

$$\sum_{i=1}^{i_0} y^i < x \leq \sum_{i=1}^{i_0+1} y^i \iff 0 < x - \sum_{i=1}^{i_0} y^i \leq \sum_{i=1}^{i_0+1} y^i. \tag{9.2}$$

Iz lijeve nejednakosti u 9.2 slijedi:

$$x - \sum_{i=1}^{j} y^i > \sum_{i=j+1}^{i_0} y^i \geq y^{j+1}, \tag{9.3}$$

za $j \in 0, \ldots, i_0 - 1$. S druge strane, desna nejednakost povlači

$$x - \sum_{i=1}^{i_0} y^i \leq 0. \tag{9.4}$$

Uvrštavanjem (9.2), (9.3) i (9.4) u desnu stranu jednakosti (9.1), dobivamo sumu

$$y^1 + y^2 + \cdots + y_0^i + \left(x - \sum_{i=1}^{i_0} y^i\right) = x.$$

□

U nastavku navodimo lemu pomoću koje dokazujemo da je preslikavanje Ψ kontrakcija, što ćemo dalje koristiti pri primjeni *Banachovog*, odnosno *Brouwer-Schauderovog teorema o fiksnoj točki*. Definicija kontrakcije i iskazi teorema navedeni su u pripremnim rezultatima.

Lema 9.0.2. *Za $x, y^1, y^2 \in \mathbb{R}$ i monotono rastuće funkcije $\Psi^i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $i = 1, \dots, m$ za koje je ispunjena nejednakost*

$$\forall z^1, z^2 \ \ (z^1 \geq z^2) \implies z^1 - z^2 \geq \sum_{i=1}^{m} (\Psi^i(z^1) - \Psi^i(z^2)),$$

vrijedi:

$$\begin{aligned} |y^1 - y^2| = &\ |\min\{\Psi^1(y^1), x + y^1\} - \min\{\Psi^1(y^2), x + y^2\}| \\ &+ \sum_{j=1}^{m-1} \left| \min\left\{\Psi^{j+1}(y^1), \left(x + y^1 - \sum_{i=1}^{j} \Psi^i(y^1)\right)^+\right\} \right. \\ &\left. - \min\left\{\Psi^{j+1}(y^2), \left(x + y^2 - \sum_{i=1}^{j} \Psi^i(y^1)\right)^+\right\}\right| \\ &+ \left|\left(x + y^1 - \sum_{i=1}^{m} \Psi^i(y^1)\right)^+ - \left(x + y^2 - \sum_{i=1}^{m} \Psi^i(y^2)\right)^+\right|. \end{aligned} \tag{9.5}$$

Dokaz tvrdnje dostupan je u [9].

Bibliografija

[1] Christina L Ahmadjian i Ariyoshi Okumura, *11 Corporate governance in Japan*, Handbook on International Corporate Governance: Country Analyses (2011), 247.

[2] Tomasz R Bielecki i Marek Rutkowski, *Credit risk: modeling, valuation and hedging*, Springer Science & Business Media, 2013.

[3] Nicholas H Bingham i Rüdiger Kiesel, *Risk-neutral valuation: Pricing and hedging of financial derivatives*, Springer Science & Business Media, 2013.

[4] Fischer Black i John C Cox, *Valuing corporate securities: Some effects of bond indenture provisions*, The Journal of Finance **31** (1976), br. 2, 351–367.

[5] Fischer Black i Myron Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy **81** (1973), br. 3, 637–654.

[6] Larry Eisenberg i Thomas H Noe, *Systemic risk in financial systems*, Management Science **47** (2001), br. 2, 236–249.

[7] Helmut Elsinger et al., *Financial networks, cross holdings, and limited liability*, Oesterreichische Nationalbank Austria, 2009.

[8] Tom Fischer, *No-Arbitrage Pricing Under Systemic Risk: Accounting for Cross-Ownership*, Mathematical Finance **24** (2014), br. 1, 97–124.

[9] Tom Fischer, *A shorter proof of Lemma A.6 (arXiv:1005.0768)*, (2012).

[10] Christian Gourieroux, J C Héam i Alain Monfort, *Bilateral exposures and systemic solvency risk*, Canadian Journal of Economics/Revue canadienne d'économique **45** (2012), br. 4, 1273–1309.

[11] Andrzej Granas i James Dugundji, *Fixed point theory*, Springer Science & Business Media, 2003.

[12] Johannes Hain i Tom Fischer, *Valuation Algorithms for Structural Models of Financial Interconnectedness*, arXiv preprint arXiv:1501.07402 (2015).

[13] J. Michael Harrison i Stanley R. Pliska, *Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading*, Stochastic Processes and their Applications **11** (1981), br. 3, 215–260.

[14] Jie Jack He i Jiekun Huang, *Product market competition in a world of cross-ownership: Evidence from institutional blockholdings*, The Review of Financial Studies **30** (2017), br. 8, 2674–2718.

[15] Sabine Karl i Tom Fischer, *Cross-ownership as a structural explanation for over-and underestimation of default probability*, Quantitative Finance **14** (2014), br. 6, 1031–1046.

[16] Jack McDonald, *The Mochiai effect: Japanese corpoirate cross–holdings*, The Journal of Portfolio Management **16** (1989), br. 1, 90–94.

[17] Robert C Merton, *On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates*, The Journal of Finance **29** (1974), br. 2, 449–470.

[18] Klaus Ritzberger i Jamsheed Shorish, *Cross-ownership among firms: Some determinants of the separation of ownership from control*, Teh. izv., Reihe Ökonomie/Economics Series, Institut für Höhere Studien (IHS), 2002.

[19] Toshiyuki Sueyoshi, Mika Goto i Yusuke Omi, *Corporate governance and firm performance: Evidence from Japanese manufacturing industries after the lost decade*, European Journal of Operational Research **203** (2010), br. 3, 724–736.

[20] Teruyoshi Suzuki, *Valuing corporate debt: the effect of cross-holdings of stock and debt*, Journal of the Operations Research Society of Japan **45** (2002), br. 2, 123–144.

[21] Zoran Vondraček, *Financijsko modeliranje 1*.

[22] Robert C Merton, *On the pricing of contingent claims and the Modigliani-Miller theorem*, Journal of Financial Economics **5** (1977), br. 2, 241–249.

[23] Zoran Vondraček, *Slučajni procesi*.

[24] Xiaoyan Wang, Jiurong Song i Chris Deeley, *Research on the "Double-Edged Sword Effect" of Cross-Shareholdings in China*.

[25] Yu Wang, *Structural credit risk modeling: Merton and beyond*, Risk Management **16** (2009), br. 2, 30–33.

Sažetak

U diplomskom radu proširujemo temeljni model kreditnog rizika, Mertonov model korporativnog duga. Promatramo model većeg broja poduzeća s mogućnošću međuposredništva nad obvezama i kapitalom. Dodatno, uvodimo i pretpostavku o različitim prioritetima naplate dugova, kao i izostanak troška bankrota poduzeća.

Pretpostavljamo kako sve obveze sustava dospijevaju u isto vrijeme, te, analogno Mertonovom modelu, promatramo vrijednosti duga i kapitala u trenutku dospijeća. Spomenutim proširenjima nastojimo uračunati složenu strukturu nad vlasništvom duga i kapitala, čime model približavamo stvarnosti: sustavima poput koncerna i poduzeća u poslovnoj grupi.

Uzimajući u obzir prioritetnost naplate i strukturu međuposredništva nad obvezama svakog od članova sustava, definiramo sustav jednadžbi. Rješenje sustava čine ne-arbitražne vrijednosti duga i obveza svakog poduzeća, u trenutku dospijeća svih obveza. Uz uvjete na strukturu međuposredništva i oblik financijskih izvedenica koje modeliraju obveze sustava, dokazujemo egzistenciju, odnosno jedinstvenost. Sam dokaz rezultira i razvojem algoritma za pronalazak rješenja, definiranog pomoću *Picardovih* iteracija.

Diskutiramo i povezanost *stvarnih* isplata sa slučajnim zahtjevima, tj. financijskim izvedenicama koje ih modeliraju. Potvrđujemo i načelo irelevatnosti strukture kapitala, poznatije kao *Modigliani-Millerov teorem*. Struktura vlasništva nad obvezama unutar sustava, koliko god kompleksna, ne utječe na vrijednosti potraživanja vanjskih vjerovnika sustava.

Definiramo jednadžbe bilanci poduzeća u trenutku dospijeća, pomoću kojih uvodimo kvantitativne mjere rizika međuposredništva, *internu financijsku polugu* i *stupanj međuposredništva*. Uz pretpostavke modela, analiziramo i vrijednosti prije trenutka dospijeća obveza, korištenjem *Fundamentalnog teorema određivanja cijene financijske imovine*.

Upućujemo na razlike u dobivenim ne-arbitražnim vrijednostima, u usporedbi sa onima dobivenim unutar Mertonovog modela, bez uključivanja međuposrednštva. Diskutiramo i potencijalni izostanak jedinstvenosti rješenja, uz slabije pretpostavke modela, kao i moguća njegova daljnja proširenja.

Summary

In this Master's thesis we discuss and generalize one of the fundamental models in Credit Risk modelling, Merton's Corporate Debt model, considering the possibility of cross-ownership over debt and equity in a multiple-firm system. In addition, we provide an assumption on different levels of debt seniority, along with various forms of financial derivatives on every firm's equity and/or debt.

By expanding Merton's model with these assumptions, we aim to capture the complexity of cross-ownership and cross-shareholding among firms in real world networks. We develop a system of equations for determining non-arbitrage values of debt and equity for every member firm within a system, by assuming simultaneous maturity of all debt and obligations within a system, together with the possibility of different levels of debt seniority. Additional assumptions were made on cross-ownership structure and form of financial derivatives, both of which define claims on debt and equity of every member within and outside the system. These assumptions provide existence and/or uniqueness of a solution of the defined system of equations. The proof itself offers an algorithm for determining non-arbitrage values, by using *Picard's iterations.*

Also, we discuss the connection between *recovery claims* and their corresponding contigent claims, financial derivatives. Capital structure irrelevance theory based on *Modigliani - Miller theorem*, at the level of the whole system, still holds. No matter how complex the structure of cross-ownership is, value of the claims of system outsiders remains unaffected.

We present balance sheet equations at the time of debt maturity for every firm within a system, as well as on the aggregate level. Using them, we define quantitative risk measures for the system, equivalent to financial leverage, *internal financial leverage* and *degree of cross-ownership*. Using all of the assumptions of the model along with *Fundamental theorem for asset pricing*, we derive values of debt and equity before the time of maturity.

Furthermore, we analyse the differences between determined values when accounting for cross-ownership and the values provided by Merton's model. We present the possibility of implementing weaker assumptions in system modelling, at the risk of losing the uniqueness of the solution for a given system of equations. Further developments of the model are proposed.

Životopis

Rođena sam 11. travnja 1994. godine u Zagrebu, gdje 2008. godine upisujem prirodoslovno-matematičku, V. gimnaziju. Nakon završene srednje škole odlučujem se za upis preddiplomskog studija Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, koji završavam sa vrlo dobrim uspjehom.

Godine 2016. upisujem diplomski studij Financijske i poslovne matematike na istom fakultetu. Za ostvareni uspjeh na prvoj godini studija primam stipendiju grada Zagreba za izvrsnost. Početkom druge godine studija odlazim na studentsku praksu u Hrvatsku narodnu banku, gdje se upoznajem s radom u Sektoru istraživanja, u direkciji za Modeliranje.

Na temelju uspjeha na prvoj godini diplomskog studija, 2017. godine dobivam i nagradu Matematičkog odsjeka PMF-a, za najbolje studente.