Geometrija izotropne ravnine

Čatipović, Ivona

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivona Čatipović

Geometrija izotropne ravnine

Diplomski rad

Zagreb, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivona Čatipović

Geometrija izotropne ravnine

Diplomski rad

Voditelj rada:
dr. sc. Ema Jurkin

Suvoditelj rada:
dr. sc. Željka Milin-Šipuš

Zagreb, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

U radu će se proučavati elementarna geometrija izotropne ravnine. U prvom se poglavlju definira projektivna ravnina te se daju neke njezine realizacije (modeli). Poseban se naglasak stavlja na realnu projektivnu ravninu. Izotropna ravnina je realna projetkivna ravnina u kojoj je metrika inducirana realnim pravcem f i s njim incidentom realnom točkom F. Nakon što se uvede metrika, odradit će se grupa sličnosti i grupa gibanja izotropne ravnine. Proučavat će se osnovne metričke realacije u trokutu te dati analogije nekih teorema koje vrijede u euklidskoj ravnini. Nakon toga će se obraditi neki teoremi vezani za kružnicu u izotropnoj ravnini te će se oni usporediti s analognim teoremima u euklidskoj ravnini. Klasifikacija krivulja 2. reda u izotropnoj ravnini se radi obzirom na njihov položaj prema apsolutnoj figuru stoga se promatra presjek konike s apsolutnim pravcem.

Poglavlje 2

Projektivna ravnina

2.1 Projektivna ravnina

Neka su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{L}$ neprazni disjunktni skupovi. Elemente od $\mathcal{P}$ nazivat ćemo *točkama* i označavati $A, B, C, ...$, a elemente od $\mathcal{L}$ nazivat ćemo *pravcima* i označavati $a, b, c, ...$ Neka je $\mathrm{I} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ relacija koju ćemo zvati *relacijom incidencije* [4].

Ako je točka T incidentna s pravcem p, $T \ \mathrm{I} \ p$, kažemo da točka T leži na pravcu p, odnosno da pravac p prolazi točkom T. Pravac koji je incidentan s dvije različite točke, zovemo njihovom *spojnicom*, a točku koja je incidentna s dva različita pravca, zovemo njihovim *sjecištem*. Za tri ili više točaka koje leže na istom pravcu kažemo da su *kolinearne*, a za tri ili više pravaca koji prolaze jednom točkom, kažemo da su *konkurentni* ili *kopunktalni*.

Definicija 2.1 *Uređena trojka* $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathrm{I})$ *se naziva projektivna ravnina ako vrijede sljedeći aksiomi:*

(P1) Za svake dvije različite točke postoji jedinstveni pravac incidenatan s njima.

(P2) Za svaka dva različita pravca postoji točka incidenatna s njima.

(P3) Postoje četiri točke od kojih nikoje tri nisu kolinearna.

Projektivna ravnina ima jednak broj točaka i pravaca. Ukoliko je taj broj konačan govorimo o konačnoj projektivnoj ravnini.

Skup svih točaka koje leže na nekom pravcu p zovemo *nizom točaka* s nosiocem p, a skup svih pravaca koji prolaze nekom točkom T zovemo *pramenom pravaca* s vrhom T. U projektivnoj su ravnini svi nizovi točaka i svi pramenovi pravaca ekvipotentni.

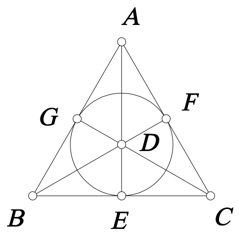
Za dvije izjave u projektivnoj ravnini kažemo da su *dualne* ako se jedna dobiva iz druge zamjenom pojmova 'točka' i 'pravac', i svih drugih odgovarajućih pojmova koji se odnose na relaciju incidencije kao npr. 'leži na', 'prolazi kroz';

'kolinearne točke', 'konkurentni pravci'; 'niz točaka', 'pramen pravaca'. Dualiziranjem svake istinite tvrdnje u projektivnoj ravnini dobiva se opet istinita tvrdnja.

2.2 Neke realizacije projektivne ravnine

U ovom potpoglavlju ćemo prikazati neke realizacije (modele) projektivne ravnine, [4]:

Primjer 2.2 Neka je $\mathcal{P} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$,
$\mathcal{L} = \{\{A, G, B\}, \{B, E, C\}, \{C, F, A\}, \{A, D, E\}, \{B, D, F\}, \{C, D, G\}, \{E, F, G\}\}$,
te neka je $\mathrm{I} = \in$, relacija 'biti element'.
Uređena trojka $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathrm{I})$ je najmanja projektivna ravnina.



Slika 2.1.

Primjer 2.3 Neka je $\mathbb{E}^3$ trodimenzionalni euklidski prostor i O neka točka. Označimo sa $\mathcal{P}$ skup svih pravaca kroz O, a sa $\mathcal{L}$ skup svih ravnina kroz O te neka je I relacija inkluzije. Uređena trojka $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathrm{I})$ je projektivna ravnina.

Primjer 2.4 Neka je dana sfera sa središtem O. Označimo sa $\mathcal{P}$ skup svih parova dijametralno suprotnih točaka, sa $\mathcal{L}$ skup svih glavnih kružnica na sferi te neka je I relacija inkluzije. Uređena trojka $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathrm{I})$ je projektivna ravnina.

Primjer 2.5 Neka je F polje, a V trodimenzionalni vektorski prostor nad F, $(V \cong F^3)$. Označimo sa $\mathcal{P}$ skup svih jednodimenzionalnih potprostora od V, sa $\mathcal{L}$ skup svih dvodimenzionalnih potprostora od V te neka je I relacija inkluzije. Uređena trojka $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathrm{I})$ je projektivna ravnina koju označavamo $\mathrm{PG}(2, F)$.

Primjer 2.6 *Analitički model realne projektivne ravnine* $PG(2, \mathbb{R})$
Točke su klase uređenih trojki realnih brojeva koje se nazivaju *homogenim koordinatama* točke

$$\lambda\,(x_0, x_1, x_2) = (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)\,,$$

gdje λ prolazi poljem realnih brojeva različitih od 0, s tim što je isključena trojka $(0, 0, 0)$, [4].

Pravci realne projektivne ravnine su klase uređenih trojki realnih brojeva koje se nazivaju *homogenim koordinatama* pravca

$$\mu\,[u_0, u_1, u_2] = [\mu u_0, \mu u_1, \mu u_2]\,,$$

gdje μ prolazi poljem realnih brojeva različitih od 0, s tim što je isključena trojka $[0, 0, 0]$.
Točka (x_0, x_1, x_2) i pravac $[u_0, u_1, u_2]$ su incidentni ako vrijedi

$$u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = 0.$$

Primjer 2.7 *Proširena euklidska ravnina*
Neka je $\mathbb{E}^2 = (\mathcal{P}_\mathbb{E}, \mathcal{L}_\mathbb{E}, \mathrm{I}_\mathbb{E})$ euklidska ravnina.
Svakom pramenu paralelnih pravaca $[p] = \{l \in \mathcal{P}_\mathbb{E} : l \parallel p\}$ pridružimo jednu specijalnu *neizmjerno daleku točku* P^∞. Dva se paralelna pravca sijeku u jednoj neizmjerno dalekoj točki. Definiramo *neizmjerno daleki pravac* l_∞ kao skup svih neizmjerno daleki točka. Sada skup $\mathcal{P}_\mathbb{E}$ proširimo neizmjerno dalekim točkama i označimo ga s $\mathcal{P}$, a skup $\mathcal{L}_\mathbb{E}$ proširimo neizmjerno dalekim pravcem i označimo ga s $\mathcal{L}$. Dakle, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\mathbb{E} \cup \{P^\infty : P^\infty \in \mathcal{L}_\mathbb{E}/\parallel\}$ i $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\mathbb{E} \cup \{l_\infty\}$. Definiramo $\mathrm{I} = \mathrm{I}_\mathbb{E} \cup \{(P^\infty, l_\infty) : P^\infty \in \mathcal{L}_\mathbb{E}/\parallel\} \cup \{(P^\infty, l) : l \parallel p\}$. Dobivena uređena trojka $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathrm{I})$ je projektivna ravnina.

Napomena 2.8 Svaka afina ravnina se na način opisan u primjeru može proširiti do projektivne ravnine. Vrijedi i obrat, tj. uklanjanjem nekog pravca iz projektivne ravnine i svih točaka incidentnih s njim, dobiva se afina ravnina.
Aksiomi afine ravnine su:

(A1) Za svake dvije različite točke postoji jedinstveni pravac incidenatan s njima.

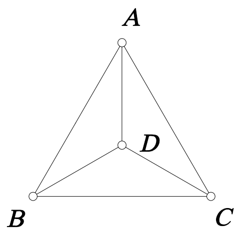
(A2) Za svaku točku T i pravac p postoji jedinstveni pravac l koji prolazi kroz T i ne siječe p.

(A3) Postoje tri nekolinearne točke.

Euklidska ravnina je primjer afine ravnine.
Najmanja afina ravnina je prikazana na slici 2.2. Ona je nastala uklanjanjem pravca $\{E, F, G\}$ iz projektivne ravnine iz primjera 2.2.

Napomena 2.9 Projektivna ravnina dobivena proširivanjem euklidske ravnine $\mathbb{E}^2$ izomorfna je ravnini $\mathrm{PG}(2, \mathbb{R})$.

Svaka točka euklidske ravnine je oblika (x, y), dok su točke projektivne ravnine oblika $\lambda(x_0, x_1, x_2)$.



Slika 2.2.

Krenimo od točke (x_0, x_1, x_2) projektivne ravnine. Ako je $x_0 = 0$, toj je točki pridružena jedna specijalna neizmjerno daleka točka. Ukoliko je $x_0 \neq 0$, toj ćemo točki pridružiti euklidsku točku $(x, y) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$.
Specijalni neizmjerno daleki pravac ima jednadžbu $x_0 = 0$. Projektivne homogene koordinate tog pravca su $\mu\,[1, 0, 0]$.
Ukoliko euklidski pravac ima jednadžbu $y = kx + l$, možemo pisati $\frac{x_2}{x_0} = k\frac{x_1}{x_0} + l$, tj. $lx_0 + kx_1 - x_2 = 0$. Tom je pravcu, dakle, pridružen pravac s projektivnim koordinatama $[l, k, -1]$. Ukoliko euklidski pravac ima jednadžbu $x = c$, možemo pisati $c - x = 0$, tj. $cx_0 - x_1 = 0$. Tom je pravcu pridružen pravac s projektivnim homogenim koordinatama $[c, -1, 0]$.

Neizmjerno daleka točka pravca $y = kx + l$ se dobije uvrštavanjem $x_0 = 0$ u jednadžbu $lx_0 + kx_1 - x_2 = 0$. Dakle, za nju vrijedi $x_2 = kx_1$. Njezine su projektivne homogene koordinate $(0, x_1, kx_1)$, tj. $\lambda(0, 1, k)$. Neizmjerno daleka točka pravca $x = c$ se dobije uvrštavanjem $x_0 = 0$ u izraz $cx_0 - x_1 = 0$. Dakle, $x_1 = 0$. Njezine su projektivne homogene koordinate $\lambda\,[0, 0, 1]$.

2.3 Realna projektivna ravnina

U analitičkom modelu realne projektivne ravnine $\mathrm{PG}(2, \mathbb{R})$ točke su klase uređenih trojki realnih brojeva koje se nazivaju homogenim koordinatama točke

$$\lambda\,(x_0, x_1, x_2) = (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)\,,$$

gdje λ prolazi poljem realnih brojeva različitih od 0, s tim što je isključena trojka $(0, 0, 0)$, [4].
Pravci realne projektivne ravnine su klase uređenih trojki realnih brojeva koje se nazivaju homogenim koordinatama pravca

$$\mu\,[u_0, u_1, u_2] = [\mu u_0, \mu u_1, \mu u_2]\,,$$

gdje μ prolazi poljem realnih brojeva različitih od 0, s tim što je isključena trojka $[0, 0, 0]$.

Točka (x_0, x_1, x_2) i pravac $[u_0, u_1, u_2]$ su incidentni ako vrijedi

$$u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = 0.$$

Preslikavanje ravnine $\mathrm{PG}(2, \mathbb{R})$ koje točki (x_0, x_1, x_2) pridružuje točku $(\overline{x_0}, \overline{x_1}, \overline{x_2})$ definirano s

$$\begin{aligned} \rho\overline{x_0} &= a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 \\ \rho\overline{x_1} &= a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad \det(a_{ij}) \neq 0 \\ \rho\overline{x_2} &= a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

se naziva *projektivna transformacija* (*projektivitet*).

Svi projektiviteti ravnine $\mathrm{PG}(2, \mathbb{R})$ čine grupa koju nazivamo *grupom transformacija projektivne ravnine*. Ta je grupa izomorfna grupi klasa proporcionalnih regularnih linearnih operatora na prostoru $\mathbb{R}^3$, odnosno grupi regularnih matrica reda 3 nad poljem $\mathbb{R}$.

Poglavlje 3

Izotropna ravnina

Izotropna ravnina $\mathcal{I}_2$ je realna projektivna ravnina u kojoj je metrika inducirana realnim pravcem f i s njim incidentnom realnom točkom F, [6]. Uređeni par (f, F) se naziva *apsolutnom figurom* izotropne ravnine.

U afinom modelu izotropne ravnine u kojem je apsolutni pravac dan jednadžbom $x_0 = 0$, a apsolutna točka F koordinatama $(0, 0, 1)$, točka s projektivnim homogenim koordinatama (x_0, x_1, x_2) ima afine nehomogene koordinate (x, y) gdje je

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}.$$

Pravci koji prolaze apsolutnom točkom F se nazivaju *izotropnim pravcima*, a točke koje leže na apsolutnom pravcu *izotropnim točkama.*

Teorem 3.1 *Projektivne transformacije koje apsolutnu figuru izotropne ravnine preslikavaju u nju samu čine 5-parametarsku grupu $\mathcal{G}_5$ i imaju jednadžbe oblika*

$$\overline{x} = a + px, \quad \overline{y} = b + cx + qy. \tag{3.1}$$

Dokaz: Odredimo projektivne transformacije (2.1) koje apsolutnu točku preslikavaju u apsolutnu točku, a izotropne točke u izotropne točke. Iz činjenice da je slika apsolutne točke $(0, 0, 1)$ apsolutna točka $\rho(0, 0, 1)$, slijedi $a_{02} = a_{12} = 0$ i $a_{22} \neq 0$. Iz činjenice da je slika neke izotropne točke $(0, x_1, x_2)$ neka izotropna točka $\rho(0, \overline{x_1}, \overline{x_2})$, slijedi $a_{01} = 0$ i $a_{11} \neq 0$. Budući da mora biti $\det(a_{ij}) \neq 0$, slijedi $a_{00} \neq 0$. Uvođenjem oznaka $a = \frac{a_{10}}{a_{00}}$, $b = \frac{a_{20}}{a_{00}}$, $c = \frac{a_{21}}{a_{00}}$, $p = \frac{a_{11}}{a_{00}}$ i $q = \frac{a_{22}}{a_{00}}$ slijedi da sve projektivne transformacije koje apsolutnu figuru preslikavaju u sebe imaju oblik (3.1).

Provjerimo je li skup takvih transformacija zatvoren na kompoziciju i inverz.
Neka su dane projektivne transformacije T_1 i T_2:

$$T_1 \ldots \begin{cases} \overline{x} = a_1 + p_1 x \\ \overline{y} = b_1 + c_1 x + q_1 y, \quad p_1, q_1 \neq 0 \end{cases}$$

$$T_2 \ldots \begin{cases} \bar{\bar{x}} = a_2 + p_2\overline{x} \\ \bar{\bar{y}} = b_2 + c_2\overline{x} + q_2\overline{y}, \quad p_2, q_2 \neq 0 \end{cases}$$

Za $T_2 \circ T_1$ imamo:

$$\bar{\bar{x}} = a_2 + p_2(a_1 + p_1 x) = (a_2 + p_2 a_1) + p_2 p_1 \cdot x$$

$$\bar{\bar{y}} = b_2 + c_2(a_1 + p_1 x) + q_2(b_1 + c_1 x + q_1 y) = (b_2 + c_2 a_1 + q_2 b_1) + (c_2 p_1 + q_2 c_1)x + q_1 q_2 y.$$

Kako je $p_1 p_2 \neq 0$ i $q_1 q_2 \neq 0$, $T_2 \circ T_1$ je projektivitet oblika (3.1). Provjerimo zatvorenost na inverz. Neka je sada T projektivitet dan s

$$T \ldots \begin{cases} \overline{x} = a + px, p \neq 0 \\ \overline{y} = b + cx + qy, \qquad q \neq 0. \end{cases}$$

Projektivitet T^{-1} dan s

$$T^{-1} \ldots \begin{cases} \bar{\bar{x}} = -\frac{a}{p} + \frac{1}{p}\overline{x} \\ \bar{\bar{y}} = \frac{ac}{pq} - \frac{b}{q} - \frac{c}{pq}\overline{x} + \frac{1}{q}\overline{y} \end{cases}$$

je inverz od T jer je:

$$T^{-1} \circ T = \begin{cases} \bar{\bar{x}} = -\frac{a}{p} + \frac{1}{p}(a + px) = -\frac{a}{p} + \frac{a}{p} + x = x \\ \bar{\bar{y}} = \frac{ac}{pq} - \frac{b}{q} - \frac{c}{pq}(a + px) + \frac{1}{q}(b + cx + qy) = \frac{ac}{pq} - \frac{b}{q} - \frac{ca}{pq} - \frac{c}{q}x + \frac{b}{q} + \frac{c}{q}x + y = y. \end{cases}$$

Zaključujemo da je skup projektivnih transformacija oblika (3.1) grupa. □

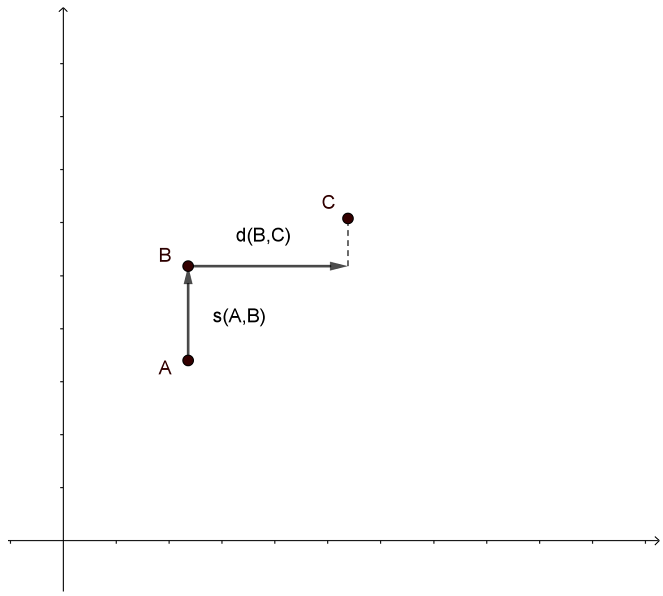
$\mathcal{G}_5$ se naziva *grupom sličnosti* izotropne ravnine, [2], [6].

Dva su pravca *paralelna* ako prolaze istom izotropnom točkom. Dvije su točke *paralelene* ako leže na istom izotropnom pravcu.

Za dvije neparalelne točke $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$ definira se *udaljenost* s $d(A, B) = x_B - x_A$. Za dvije paralelne točke $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$, $x_A = x_B$, definira se *raspon* s $s(A, B) = y_B - y_A$. Na slici 3.1 je prikazana udaljenost za dvije neparalelne točke B i C te raspon za paralelne točke A i B.

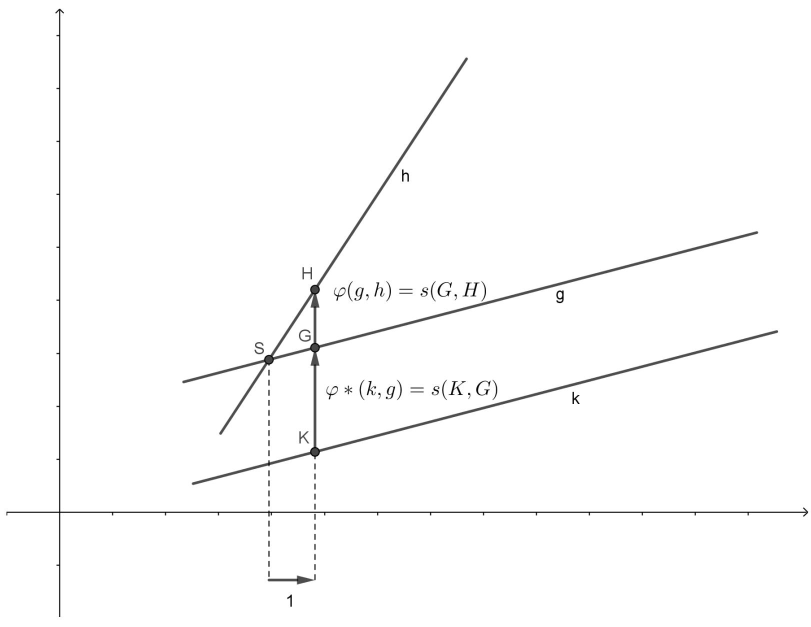
Svaki neizotropni pravac g može biti prikazan jednadžbom oblika $y = k_g x + l_g$, dok svaki izotropni pravac ima jednadžbu $x = c$.
Kut između dva neparalelna pravca g i h dana jednadžbama $y = k_g x + l_g$ i $y = k_h x + l_h$, je definiran s

$$\varphi(g, h) = \measuredangle(g, h) = k_h - k_g. \tag{3.2}$$



Slika 3.1. Udaljenost i raspon točaka

Za paralelne pravce g i h, $k_g = k_h$, definirana je izotropna invarijanta $\varphi^*(g,h) = l_h - l_g$, slika 3.2.
Uočimo da su sve četiri definirane vrijednosti orijentirane, tj. $d(B,A) = -d(A,B)$, $s(B,A) = -s(A,B)$, $\varphi(h,g) = -\varphi(g,h)$, $\varphi^*(h,g) = -\varphi^*(g,h)$.



Slika 3.2. Kut između pravaca

Teorem 3.2 *Projektivne transformacije grupe $\mathcal{G}_5$ koje čuvaju udaljenost čine 4-parametarsku grupu i imaju jednadžbe oblika*

$$\overline{x} = a + x, \quad \overline{y} = b + cx + qy. \tag{3.3}$$

Dokaz: Neka su dane neparalelne točke $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$ i njihove slike $\overline{A}(\overline{x_A}, \overline{y_A})$ i $\overline{B}(\overline{x_B}, \overline{y_B})$ dobivene transformacijom T oblika (3.1). Vrijedi:
$d(A, B) = x_B - x_A$
$d(\overline{A}, \overline{B}) = \overline{x_B} - \overline{x_A} = px_B - px_A = p(x_B - x_A)$. Da bi T čuvala udaljenost, mora vrijediti $d(A, B) = d(\overline{A}, \overline{B})$ pa slijedi $p = 1$.
Provjerimo vrijedi li zatvorenost na kompoziciju i inverz.
Neka su T_1 i T_2:

$$T_1 \ldots \begin{cases} \overline{x} = a_1 + x \\ \overline{y} = b_1 + c_1x + q_1y \quad , q_1 \neq 0 \end{cases}$$

$$T_2 \ldots \begin{cases} \overline{\overline{x}} = a_2 + \overline{x} \\ \overline{\overline{y}} = b_2 + c_2\overline{x} + q_2\overline{y} \quad , q_2 \neq 0 \end{cases}$$

dvije projektivne transformacije oblika (3.3). Za $T_2 \circ T_1$ imamo:

$$\overline{\overline{x}} = a_2 + (a_1 + x) = (a_2 + a_1) + x$$

$$\overline{\overline{y}} = b_2 + c_2(a_1 + x) + q_2(b_1 + c_1x + q_1y) = (b_2 + c_2a_1 + q_2b_1) + (c_2 + q_2c_1)x + q_1q_2y.$$

Kako je $q_1q_2 \neq 0$, $T_2 \circ T_1$ je projektivitet oblika (3.3). Provjerimo zatvorenost na inverz. Neka je sada T projektivitet,

$$T \ldots \begin{cases} \overline{x} = a + x \\ \overline{y} = b + cx + qy, \quad q \neq 0 \end{cases}$$

Tada je projektivitet T^{-1} dan s

$$T^{-1} \ldots \begin{cases} \overline{\overline{x}} = -a + \overline{x} \\ \overline{\overline{y}} = \frac{ac}{q} - \frac{b}{q} - \frac{c\overline{x}}{q} + \frac{\overline{y}}{q} \end{cases}$$

inverz od T jer vrijedi

$$T^{-1} \circ T \ldots \begin{cases} \overline{\overline{x}} = -a + (a + x) = x \\ \overline{\overline{y}} = \frac{ac}{q} - \frac{b}{q} - \frac{c}{q}(a + x) + \frac{1}{q}(b + cx + qy) = \frac{ac}{q} - \frac{b}{q} - \frac{ca}{q} - \frac{c}{q}x + \frac{b}{q} + \frac{c}{q}x + y = y. \end{cases}$$

Zaključujemo kako je skup projektiviteta oblika (3.3) grupa. □

Teorem 3.3 *Projektivne transformacije grupe $\mathcal{G}_5$ koje čuvaju raspon 4-parametarsku grupu i imaju jednadžbe oblika*

$$\overline{x} = a + px, \quad \overline{y} = b + cx + y. \tag{3.4}$$

Dokaz: Neka su dane paralelne točke $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$, $x_A = x_B$, i njihove slike $\overline{A}(\overline{x_A}, \overline{y_A})$ i $\overline{B}(\overline{x_B}, \overline{y_B})$. Vrijedi:
$s(A, B) = y_B - y_A$
$s(\overline{A}, \overline{B}) = \overline{y_B} - \overline{y_A} = cx_B + qy_B - cx_A - qy_A = q(y_B - y_A)$.
Slijedi $q = 1$.
Provjerimo vrijedi li zatvorenost na kompoziciju i inverz. Neka su T_1 i T_2:

$$T_1 \ldots \begin{cases} \overline{x} = a_1 + p_1 x \\ \overline{y} = b_1 + c_1 x + y \end{cases}$$

$$T_2 \ldots \begin{cases} \overline{\overline{x}} = a_2 + p_2 \overline{x} \\ \overline{\overline{y}} = b_2 + c_2 \overline{x} + \overline{y} \end{cases}$$

dvije projektivne transformacije oblika (3.4). Za $T_2 \circ T_1$ imamo:

$$\overline{\overline{x}} = a_2 + p_2(a_1 + p_1 x) = (a_2 + p_2 a_1) + p_1 p_2 x$$

$$\overline{\overline{y}} = b_2 + c_2(a_1 + p_1 x) + b_1 + c_1 x + y = (b_2 + c_2 a_1 + b_1) + (c_2 p_1 + c_1)x + y.$$

$T_2 \circ T_1$ je projektivitet oblika (3.4). Provjerimo zatvorenost na inverz. Neka je sada T projektivitet,

$$T \ldots \begin{cases} \overline{x} = a + px \\ \overline{y} = b + cx + y. \end{cases}$$

Tada je T^{-1} dan s

$$T^{-1} \ldots \begin{cases} \overline{\overline{x}} = \frac{1}{p}\overline{x} - \frac{a}{p} \\ \overline{\overline{y}} = -b - cx + \overline{y} \end{cases}$$

inverz od T jer vrijedi

$$T^{-1} \circ T \ldots \begin{cases} \overline{\overline{x}} = \frac{1}{p}(a + px) - \frac{a}{p} = \frac{a}{p} + x - \frac{a}{p} = x \\ \overline{\overline{y}} = -b - cx + b + cx + y = y. \end{cases}$$

Dokazali smo da je T^{-1} inverz od T pa zaključujemo kako je skup projektiviteta danih s (3.4) grupa. $\square$

Teorem 3.4 *Projektivne transformacije koje čuvaju udaljenost i raspon čine 3-parametarsku grupu $\mathcal{G}_3$ i imaju jednadžbe oblika*

$$\overline{x} = a + x, \quad \overline{y} = b + cx + y. \tag{3.5}$$

Dokaz: Tvrdnja slijedi iz teorema 3.3 i 3.4. $\square$

Podgrupa $\mathcal{G}_3$ grupe $\mathcal{G}_5$ se naziva *grupom gibanja* izotropne ravnine.

Teorem 3.5 *Transformacija sličnosti dana s (3.1) preslikava pravac g s jednadžbom $y = k_g x + l_g$ u pravac $\overline{g}$ s jednadžbom $y = \overline{k_g} x + \overline{l_g}$ gdje je:*

$$\overline{k_g} = \frac{c}{p} + \frac{q}{p} k_g, \quad \overline{l_g} = (b - a\frac{c}{p}) - a\frac{q}{p} k_g + q l_g. \tag{3.6}$$

Dokaz: Slika pravca $y = k_g x + l_g$ je pravac $\overline{y} = \overline{k_g} x + \overline{l_g}$. Iz (3.1) slijedi $b + cx + qy = \overline{k_g}(a + px) + \overline{l_g}$. Dakle, $y = \frac{\overline{k_g} p - c}{q} x + \frac{\overline{l_g} + \overline{k_g} a - b}{q}$. Izjednačavanjem $k_g = \frac{\overline{k_g} p - c}{q}$ i $l_g = \frac{\overline{l_g} + \overline{k_g} a - b}{q}$ dobivamo izraze (3.6). □

Teorem 3.6 *Projektivne transformacije grupe $\mathcal{G}_5$ koje čuvaju kut čine 4-parametarsku grupu i imaju jednadžbe oblika*

$$\overline{x} = a + px, \quad \overline{y} = b + cx + py. \tag{3.7}$$

Dokaz: Neka su dani pravci g i h s jednadžbama $y = k_g x + l_g$ i $y = k_h x + l_h$ te njihove slike $\overline{g}$ i $\overline{h}$ s jednadžbama $y = \overline{k_g} x + \overline{l_g}$ i $y = \overline{k_h} x + \overline{l_h}$. Vrijedi:
$\varphi(g, h) = k_h - k_g$
$\varphi(\overline{g}, \overline{h}) = \overline{k_h} - \overline{k_g} = \frac{c}{p} + \frac{q}{p} k_h - \frac{c}{p} - \frac{q}{p} k_g = \frac{q}{p}(k_h - k_g)$.
Slijedi $p = q$. □

Teorem 3.7 *Projektivne transformacije grupe $\mathcal{G}_5$ koje čuvaju vrijednost φ^* čine 4-parametarsku grupu i imaju jednadžbe oblika*

$$\overline{x} = a + px, \quad \overline{y} = b + cx + y. \tag{3.8}$$

Dokaz: Neka su dani paralelni pravci g i h te njihove slike $\overline{g}$ i $\overline{h}$. Vrijedi:
$\varphi^*(g, h) = l_h - l_g$
$\varphi^*(\overline{g}, \overline{h}) = \overline{l_h} - \overline{l_g} = (b - a\frac{c}{p}) - a\frac{q}{p} k_h + q l_h - (b - a\frac{c}{p}) + a\frac{q}{p} k_g - q l_g = q(l_h - l_g)$.
Slijedi $q = 1$. □

Teorem 3.8 *Projektivne transformacije koje čuvaju kut i vrijednost φ^* čine 3-parametarsku grupu $\mathcal{G}_3$ i imaju jednadžbe oblika*

$$\overline{x} = a + x, \quad \overline{y} = b + cx + y. \tag{3.9}$$

Dokaz: Tvrdnja slijedi iz teorema 3.6 i 3.7. □

Dakle, vrijednosti kao što su udaljenost dviju neparalelnih točaka, raspon dviju paralelnih točaka, kut dvaju neparalelnih pravaca i kut φ^* dvaju paralelnih pravaca su invarijante grupe $\mathcal{G}_3$ pa je ona izabrana za fundamentalnu grupu transformacija izotropne ravnine [2]. Sastoji se od *translacija*, [1]

$$\overline{x} = a + x, \quad \overline{y} = b + y$$

i *rotacija*

$$\overline{x} = x, \quad \overline{y} = cx + y.$$

Uistinu, svaku transformaciju oblika (3.9) moguće je prikazati kao kompoziciju translacije $\overline{x} = a + x$, $\overline{y} = b - ac + y$, i rotacije $\overline{x} = x$, $\overline{y} = cx + y$.

Uređeni se par $(\mathcal{I}_2, \mathcal{G}_5)$ naziva *izotropnom geometrijom sličnosti*, a uređeni par $(\mathcal{I}_2, \mathcal{G}_3)$ *izotropnom geometrijom gibanja*, [6].

Neka je dan neizotropni pravac p i točka T. *Normalom* pravca p u točki T nazivamo izotropni pravac n koji prolazi točkom T. *Udaljenost* $d(T,p)$ točke T od pravca p je raspon $s(T,N)$, gdje je N točka pravca p paralelna točki T.

3.1 Elementarna geometrija izotropne ravnine

Pogledajmo sada kako izgledaju neke osnovne metričke relacije u trokutu u izotropnoj ravnini.

Polovište M neparalelnih točaka $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$ je točka pravca AB takva da je $d(A,M) = d(M,B)$. Koordinate točke M su dane s

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Pokažimo to.

Kako mora vrijediti $d(A,M) = d(M,B)$, imamo sljedeće:

$$\begin{aligned} x_M - x_A &= x_B - x_M \\ 2x_M &= x_B + x_A \\ x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} \end{aligned}$$

S time smo dobili x koordinatu za točku M. Kako je točka M točka pravca AB, y koordinatu možemo dobiti tako da x koordinatu uvrstimo u jednadžbu pravca AB. Jednadžba pravca AB je dana s:

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x - \frac{x_A(y_B - y_A)}{x_B - x_A} + y_A.$$

Uvrstimo li x_M u x imamo sljedeće:

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{(y_B - y_A)}{x_B - x_A} \cdot \frac{(x_A + x_B)}{2} - \frac{x_A(y_B - y_A)}{x_B - x_A} + y_A \\
y &= \frac{y_B x_A + y_B x_B - y_A x_A - y_A x_B - 2x_A y_B + 2x_A y_A + 2y_A x_B - 2y_A x_A}{2(x_B - x_A)} \\
y &= \frac{-x_A y_A - x_A y_B + y_B x_B + y_A x_B}{2(x_B - x_A)} \\
y &= \frac{y_A(x_B - x_A) + y_B(x_B - x_A)}{2(x_B - x_A)} \\
y &= \frac{y_A + y_B}{2}
\end{aligned}
$$

Dakle, koordinate točke M su

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

Simetrala s neparalelnih pravca g i h danih jednadžbama $y = k_g x + l_g$ i $y = k_h x + l_h$ je pravac koji prolazi njihovim sjecištem takav da $\varphi(g, s) = \varphi(s, h)$. Jednadžba pravca s je

$$y = k_s x + l_s, \tag{3.10}$$

gdje je $k_s = \frac{k_g + k_h}{2}$, a $l_s = \frac{l_g + l_h}{2}$.
Dokažimo to.
Kako mora vrijediti $\varphi(g, s) = \varphi(s, h)$ imamo sljedeće:

$$
\begin{aligned}
k_s - k_g &= k_h - k_s \\
k_s &= \frac{kg + k_h}{2}
\end{aligned}
$$

Simetrala s prolazi sjecištem S pravca g i h, gdje su koordinate točke S dane s $S = \left(\frac{l_g - l_h}{k_h - k_g}, \frac{k_h l_g - k_g l_h}{k_h - k_g} \right)$ i ima koeficijent smjera $k_s = \frac{kg + k_h}{2}$, stoga možemo izračunati njenu jednadžbu koristeći formulu za jednadžbu pravca s danim koeficijentom smjera i jednom pripadnom točkom.

Uvrštavajući dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned}
y - \frac{k_h l_g - k_g l_h}{k_h - k_g} &= \frac{k_g + k_h}{2}\left(x - \frac{l_g - l_h}{k_h - k_g}\right) \\
y &= \frac{k_g + k_h}{2} \cdot x + \frac{(l_h - l_g)(k_g + k_h)}{2(k_h - k_g)} + \frac{k_h l_g - k_g l_h}{k_h - k_g} \\
y &= \frac{k_g + k_h}{2} \cdot x + \frac{k_h l_h - k_g l_g + k_h l_g - k_g l_h}{2(k_h - k_g)} \\
y &= \frac{k_g + k_h}{2} \cdot x + \frac{k_h(l_h + l_g) - k_g(l_h + l_g)}{2(k_h - k_g)} \\
y &= \frac{k_g + k_h}{2} \cdot x + \frac{l_g + l_g}{2}.
\end{aligned}$$

Ako stavimo oznake $k_s = \frac{k_g + k_h}{2}$ i $l_s = \frac{l_g + l_g}{2}$, dobivamo jednadžbu za s

$$y = k_s x + l_s.$$

3.1.1 Teoremi o trokutu izotropne ravnine

Trokut je figura koja se sastoji od triju točaka A, B, C, koje nazivamo *vrhovima* trokuta, i njihovih spojnica $a = BC$, $b = CA$ i $c = AB$ koje nazivamo *stranicama* trokuta. Kažemo da je trokut *dopustiv* ako niti jedna njegova stranica nije izotropan pravac. Ukoliko su vrhovi trokuta dani koordinatama

$$A(x_A, y_A), \quad B(x_B, y_B), \quad C(x_C, y_C), \tag{3.11}$$

stranice su dane jednadžbama

$$\begin{aligned}
AB \quad ... \quad y &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x + \frac{y_A x_B - y_B x_A}{x_B - x_A} \\
BC \quad ... \quad y &= \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} \cdot x + \frac{y_B x_C - y_C x_B}{x_C - x_B} \\
CA \quad ... \quad y &= \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} \cdot x + \frac{y_C x_A - y_A x_C}{x_A - x_C}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Teorem 3.9 *Neka je dan dopustiv trokut ABC. Tada je zbroj duljina njegovih stranica jednak 0, tj vrijedi*

$$d(A, B) + d(B, C) + d(C, A) = 0.$$

Dokaz: Neka je dan dopustiv trokut ABC s koordinatama vrhova $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$. Kako je $d(A, B) = x_B - x_A$, $d(B, C) = x_C - x_B$ i $d(C, A) = x_A - x_C$, imamo:

$$d(A, B) + d(B, C) + d(C, A) = x_B - x_A + x_C - x_B + x_A - x_C$$

$$d(A, B) + d(B, C) + d(C, A) = 0,$$

a to smo i trebali dokazati. □

Odsada pa nadalje svaki trokut ABC u izotropnoj ravnini smatramo dopustivim.

Teorem 3.10 *Zbroj kutova u trokutu izotropne ravnine je jednak 0.*

Dokaz: Neka je dan dopustiv trokut ABC. Želimo dokazati da je $\measuredangle(AB, BC) + \measuredangle(BC, CA) + \measuredangle(CA, AB) = 0$. Označimo s $c := AB$, $a := BC$, $b := CA$. Ako su jednadžbe stranice a, b i c dane s

$$\begin{aligned} a &\quad \ldots \quad y = k_a x + l_a \\ b &\quad \ldots \quad y = k_b x + l_b \\ c &\quad \ldots \quad y = k_c x + l_c \end{aligned}$$

tada vrijedi:

$$\begin{aligned} \measuredangle(c, a) + \measuredangle(a, b) + \measuredangle(b, c) &= k_a - k_c + k_b - k_a + k_c - k_b \\ \measuredangle(c, a) + \measuredangle(a, b) + \measuredangle(b, c) &= 0, \end{aligned}$$

a to smo i trebali dokazati. □

Neka je dan trokut ABC s vrhovima $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ te neka su točke P_1, P_2 i P_3 polovišta stranica AB, BC i CA redom. Njihove koordinate su: $P_1 = \left(\frac{x_A + x_B}{2}\right), P_2 = \left(\frac{x_B + x_C}{2}\right), P_3 = \left(\frac{x_C + x_A}{2}\right)$. Težišnica trokuta u izotropnoj ravnini je dužina koja spaja polovište stranice trokuta s nasuprotnim vrhom te se one sijeku u jednoj točki koju nazivamo težište trokuta.
Težište T trokuta ABC ima koordinate

$$T = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right),$$

analogno kao i u euklidskoj ravnini.
Dokažimo to.
Odredimo jednadžbe težišnica trokuta ABC:
Neka je t_a težišnica iz vrha A, t_b iz vrha B i t_c iz vrha C. Kako t_a prolazi kroz točku A i kroz P_2, t_b kroz točku B i kroz P_3 a t_c prolazi kroz točku C i kroz P_1 koristeći formulu za jednadžbu pravca kroz dvije točke dobivamo sljedeće

jednadžbe težišnica t_a, t_b i t_c:

$$\begin{aligned}
t_a \quad \ldots \quad y &= \frac{y_B + y_C - 2y_A}{x_B + x_C - 2x_A} \cdot x + \frac{y_A(x_B + x_C) - x_A(y_B + y_C)}{x_B + x_C - 2x_A} \\
t_b \quad \ldots \quad y &= \frac{y_C + y_A - 2y_B}{x_C + x_A - 2x_B} \cdot x + \frac{y_B(x_C + x_A) - x_B(y_C + y_A)}{x_C + x_A - 2x_B} \\
t_c \quad \ldots \quad y &= \frac{y_A + y_B - 2y_C}{x_A + x_B - 2x_C} \cdot x + \frac{y_C(x_A + x_B) - x_C(y_A + y_B)}{x_A + x_B - 2x_C}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Koordinate težišta T možemo izračunati ukoliko izjednačimo jednadžbe težišnica t_a i t_c. Prije toga uvedimo neke oznake radi lakšega računanja.
Neka je $y^* = y_A + y_B + y_C$ i $x^* = x_A + x_B + x_C$. Imamo da su t_a i t_c jednake:

$$\begin{aligned}
t_a \quad \ldots \quad y &= \frac{y^* - 3y_A}{x^* - 3x_A}(x - x_A) + y_A \\
t_c \quad \ldots \quad y &= \frac{y^* - 3y_C}{x^* - 3x_C}(x - x_C) + y_C.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Neka je

$$k_a = \frac{y^* - 3y_A}{x^* - 3x_A} \tag{3.15}$$

i

$$k_c = \frac{y^* - 3y_C}{x^* - 3x_C}. \tag{3.16}$$

Slijedi da su t_a, t_c dane jednadžbama

$$y = k_a(x - x_A) + y_A$$

$$y = k_c(x - x_C) + y_C.$$

Izjednačavajući zadnje dvije jednadžbe dobivamo

$$k_a(x - x_A) + y_A = k_c(x - x_C) + y_C,$$

a iz toga slijedi

$$x(k_a - k_c) = x_A k_a - x_C k_c + y_C - y_A. \tag{3.17}$$

Iz (3.15) i (3.16) imamo da je

$$y^* = k_a(x^* - 3x_A) + 3y_A \tag{3.18}$$

$$y^* = k_c(x^* - 3x_C) + 3y_C. \tag{3.19}$$

Izjednačavajući (3.18) i (3.19) dobivamo:

$$k_a(x^* - 3x_A) + 3y_A = k_c(x^* - 3x_C) + 3y_C. \tag{3.20}$$

Iz toga dobivamo

$$y_C - y_A = \frac{x^*}{3}(k_a - k_c) - x_A k_a + x_C k_c \tag{3.21}$$

Sada, ako u (3.17) uvrstimo (3.21), dobivamo

$$x(k_a - k_c) = x_A k_a - k_c x_C + \frac{x^*}{3}(k_a - k_c) - x_A k_a + k_c x_C. \tag{3.22}$$

Slijedi da je

$$x = \frac{x^*}{3} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}. \tag{3.23}$$

Uvrštavanjem x koordinate točke T u bilo koju jednadžbu težišnica dobivamo

$$y = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \tag{3.24}$$

a to smo i trebali pokazati.

Pogledajmo sada nekoliko jednakosti koje vrijede u izotropnoj ravnini a koje su analogne jednakostima koje vrijede u euklidskoj ravnini.
U euklidskoj ravnini znamo da vrijedi da je umnožak duljine stranice s njenom visinom konstantan, odnosno da vrijedi

$$a \cdot v_a = b \cdot v_b = c \cdot v_c.$$

Sljedeći teorem daje analogan izraz u izotropnoj ravnini:

Teorem 3.11 *Neka je dan trokut ABC s vrhovima $A(x_A, x_B)$, $B(x_B, y_B)$ i $C(x_C, y_C)$ te neka su točke A_H, B_H i C_H presjeci izotropnih pravaca kroz vrhove trokuta A, B i C redom sa stranicama BC, CA i AB. Tada je*

$$d(A, B) \cdot s(C_H, C) = d(B, C) \cdot s(A_H, A) = d(C, A) \cdot s(B_H, B). \tag{3.25}$$

Dokaz: Vrijedi da je $d(A, B) = x_B - x_A$. Izotropni pravac kroz točku C ima jednadžbu $x = x_C$. Da bi izračunali koordinate točke C_H moramo naći presjek izotropnog pravca $x = x_C$ sa stranicom AB. Jednadžba stranice AB je

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x + \frac{y_A x_B - y_B x_A}{x_B - x_A}. \tag{3.26}$$

Uvrštavanjem jednadžbe izotropnog pravca $x = x_C$ u gornju jednadžbu dobivamo

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x_C + \frac{y_A x_B - y_B x_A}{x_B - x_A}.$$

Dakle, dobivamo koordinate točke $C_H(x_C, \frac{y_B x_C - y_A x_C + y_A x_B - y_B x_A}{x_B - x_A})$. Slijedi da je

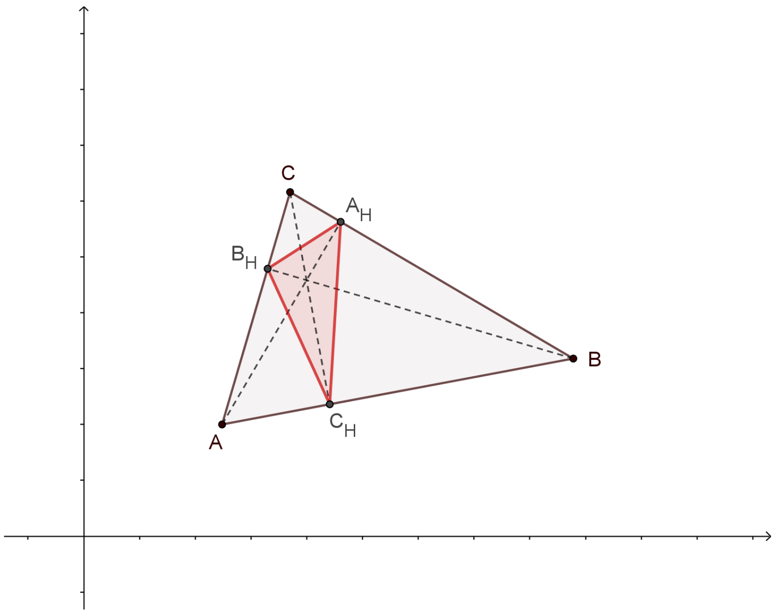
$$\begin{aligned} s(C, C_H) &= \frac{y_B x_C - y_A x_C + y_A x_B - y_B x_A}{x_B - x_A} - y_C \\ s(C, C_H) &= \frac{x_A(y_C - y_B) + x_B(y_A - y_C) + x_C(y_B - y_A)}{x_B - x_A}. \end{aligned}$$

Množenjem $d(A, B) \cdot s(C, C_H)$ dobivamo:

$$\begin{aligned} d(A, B) \cdot s(C, C_H) &= (x_B - x_A) \cdot \frac{x_A(y_C - y_B) + x_B(y_A - y_C) + x_C(y_B - y_A)}{x_B - x_A} \\ d(A, B) \cdot s(C, C_H) &= x_A(y_C - y_B) + x_B(y_A - y_C) + x_C(y_B - y_A). \end{aligned}$$

Sada zaključujemo kako će vrijediti jednakosti (3.25). □

Trokut $A_H B_H C_H$ iz Teorema 3.11 je analogija *ortičkom* trokutu u euklidskoj ravnini. U euklidskoj ravnini *ortički* trokut trokuta ABC je trokut kojemu su vrhovi sjecišta visina s nasuprotnim stranicama. U izotropnoj je ravnini ortički

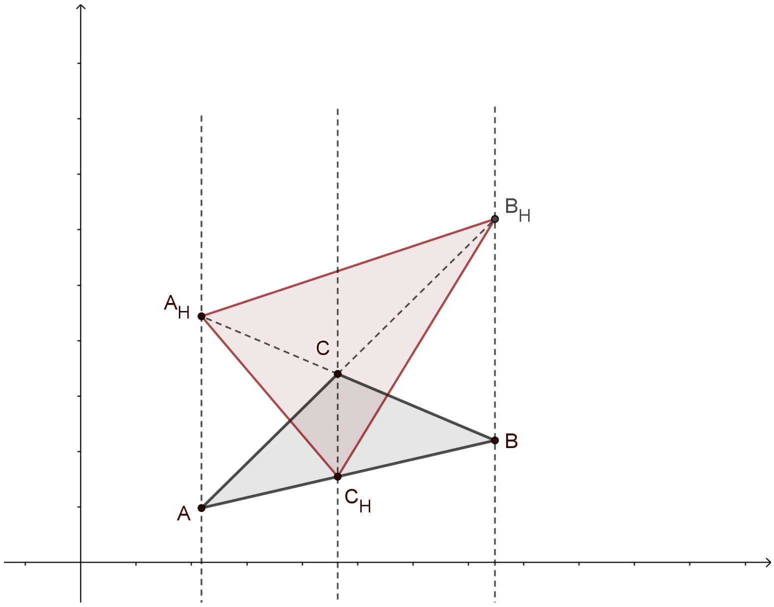


Slika 3.3. Ortički trokut u euklidskoj ravnini

trokut $A_H B_H C_H$ trokuta ABC definiran kao trokut čiji su vrhovi sjecišta izotropnih pravaca kroz vrhove trokuta ABC s njima nasuprotnim stranicama. Na slici 3.4 je prikazan ortički trokut $A_H B_H C_H$ trokuta ABC.

Teorem 3.12 *U trokutu ABC vrijede sljedeće jednakosti:*

$$\frac{d(B, C)}{\measuredangle(CA, AB)} = \frac{d(C, A)}{\measuredangle(AB, BC)} = \frac{d(A, B)}{\measuredangle(BC, CA)} \tag{3.27}$$



Slika 3.4. Ortički trokut u izotropnoj ravnini

Dokaz: Izračunajmo $\frac{d(B,C)}{\measuredangle(CA,AB)}$. Imamo da je $d(B,C) = x_C - x_B$, a prema (3.2) imamo da je $\measuredangle(CA,AB) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} - \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C}$, pa je

$$\begin{aligned}
\frac{d(B,C)}{\measuredangle(CA,AB)} &= \frac{x_C - x_B}{\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} - \frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}} \\
\frac{d(B,C)}{\measuredangle(CA,AB)} &= \frac{x_C - x_B}{\frac{(x_A-x_C)(y_B-y_A)-(x_B-x_A)(y_A-y_C)}{(x_B-x_A)(x_A-x_C)}} \\
\frac{d(B,C)}{\measuredangle(CA,AB)} &= \frac{(x_C - x_B)(x_B - x_A)(x_A - x_C)}{x_A(y_C - y_B) + x_B(y_A - y_C) + x_C(y_B - y_A)} \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

Očito će za bilo koju stranicu i nasuprotni kut vrijediti analogna jednakost (3.28). Stoga zaključujemo da vrijedi (3.27). □

Prema ovom teoremu vidimo da u izotropnoj ravnini imamo analogiju sinusovog poučka, odnosno ono što je u euklidskoj ravnini

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

to je u izotropnoj ravnini jednakost (3.27).

Teorem 3.13 *Neka je dan trokut ABC. Tada vrijedi:*

$$\measuredangle(CA,AB) = \frac{s(C,C_H)}{d(C,A)} \qquad (3.29)$$

$$\measuredangle(AB, BC) = \frac{s(A, A_H)}{d(A, B)} \tag{3.30}$$

$$\measuredangle(BC, CA) = \frac{s(B, B_H)}{d(B, C)}, \tag{3.31}$$

gdje su točke A_H, B_H i C_H sjecišta izotropnih pravaca kroz vrhove trokuta A, B i C redom sa stranicama BC, CA i AB.

Dokaz: Dokažimo da vrijedi (3.29). Iz (3.25) i (3.28) imamo:

$$\frac{d(B, C)}{\measuredangle(CA, AB)} = \frac{(x_C - x_B)(x_B - x_A)(x_A - x_C)}{d(A, B) \cdot s(C, C_H)}$$

pa je

$$\measuredangle(CA, AB) = \frac{s(C, C_H)}{d(C, A)}.$$

Analognim računom dobijemo da vrijedi:

$$\measuredangle(AB, BC) = \frac{s(A, A_H)}{d(A, B)}$$

$$\measuredangle(BC, CA) = \frac{s(B, B_H)}{d(B, C)},$$

što smo i trebali dokazati. □

Jednakosti (3.29)-(3.31) su analogne sljedećim jednakostima u euklidskoj ravnini:

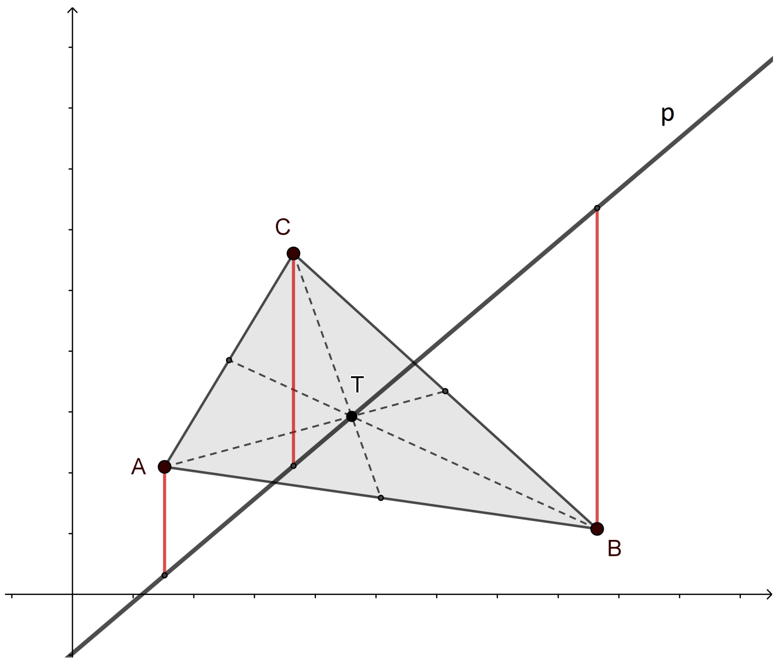
$$\sin\alpha = \frac{v_c}{b}$$

$$\sin\beta = \frac{v_a}{c}$$

$$\sin\gamma = \frac{v_b}{a}.$$

Teorem 3.14 *Zbroj udaljenosti vrhova trokuta ABC od pravca p je 0 ako i samo ako taj pravac prolazi težištem T trokuta ABC.*

Dokaz: Neka je dan trokut ABC s vrhovima $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ i težištem $T(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3})$ i neka je dan pravac p s jednadžbom $y = kx + l$. Želimo dokazati da vrijedi $d(A, p) + d(B, p) + d(C, p) = 0$ ako i samo pravac p prolazi težištem T. Udaljenost neke točke $Q(x_Q, y_Q)$ i pravca p je zapravo raspon



Slika 3.5.

točke Q i neke točke P koja pripada pravcu p a koja ima koordinate $P(x_Q, kx_Q+l)$ pa je $d(Q,p) = kx_Q + l - x_Q$. Tako imamo sljedeće:

$$\begin{aligned} & d(A,p) + d(B,p) + d(C,p) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & k \cdot x_A + l - y_A + k \cdot x_B + l - y_B + k \cdot x_C + l - y_C = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{k(x_A + x_B + x_C)}{3} + l \end{aligned} \tag{3.32}$$

a to upravo znači da pravac p prolazi težištem T što smo i trebali dokazati, slika 3.5. $\square$

Izotropni pravci postavljeni vrhovima trokuta u izotropnoj ravnini su analogni visinama trokuta u euklidskoj ravnini. Kako se oni sijeku u apsolutnoj točki, apsolutnu točku možemo smatrati ortocentrom svakog trokuta u izotropnoj ravnini.
Slično, izotropni pravci koji prolaze polovištima stranica trokuta u izotropnoj ravnini su analogni simetralama stranica u euklidskoj ravnini. Njihovo sjecište je također apsolutna točka F.

Radi jednostavnosti dokaza nekih tvrdnji dobro je trokut u općem položaju izotropnim gibanjem dovesti u neki povoljniji položaj.
Neka je dan trokut ABC s vrhovima $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$. Tražimo

projektivnu transformaciju (gibanje) oblika $\overline{x} = a + x, \overline{y} = d + cx + y$ tako da vrijedi:

$$A(x_A, y_A) \mapsto (0,0)$$
$$B(x_B, y_B) \mapsto (b,0)$$
$$C(x_C, y_C) \mapsto (c_1, c_2).$$

Odnosno, želimo trokut ABC pomaknuti tako da mu jedan njegov vrh (bez smanjenja općenitosti neka je to točka A) bude točka $(0,0)$, a da druga točka bude $(b,0)$. Mora vrijediti:

$$\begin{aligned} a + x_A &= 0 \\ d + cx_A + y_A &= 0 \\ d + cx_B + y_B &= 0. \end{aligned}$$

Dobivamo:

$$\begin{aligned} a &= -x_A \\ c &= \frac{y_B - y_A}{x_A - x_B} \\ d &= \frac{x_B y_A - x_A y_B}{x_A - x_B}. \end{aligned}$$

Kako se svaki trokut može nekim izotropnim gibanjem dovesti u specijalan položaj takav da su mu vrhovi dani koordinatama $(0,0), (b,0), (c_1, c_2)$, dovoljno je tvrdnje u izotropnoj ravnini dokazati samo za trokute u tom specijalnom položaju.

Neka je sada dan trokut ABC s vrhovima $A(0,0), B(b,0)$ i $C(c_1, c_2)$. Jednadžbe stranica tog trokuta su:

$$\begin{aligned} AB &\quad \ldots \quad y = 0 \\ BC &\quad \ldots \quad y = \frac{c_2}{c_1 - b} \cdot x - \frac{bc_2}{c_1 - b} \\ CA &\quad \ldots \quad y = \frac{c_2}{c_1} \cdot x. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Izračunajmo jednadžbe simetrala kutova u trokutu ABC. Prema (3.10) imamo da je jednadžba simetrale $\overline{a}$ kuta pri vrhu A je:

$$\overline{a} \ldots y = \frac{c_2}{2c_1} \cdot x$$

Simetrala $\overline{b}$ kuta pri vrhu B je:

$$\overline{b} \ldots y = \frac{c_2}{2(c_1 - b)} \cdot x - \frac{bc_2}{2(c_1 - b)},$$

i simetrala $\overline{c}$ kuta pri vrhu C je:

$$\overline{c} \ldots y = \frac{2c_1c_2 - bc_2}{2c_1(c_1 - b)} \cdot x - \frac{bc_2}{2(c_1 - b)}.$$

Pogledajmo sada presjeke dobivenih simetrala. Ako presječemo simetralu $\overline{b}$ i $\overline{c}$ imamo točku $\overline{A}$ s koordinatama:

$$\overline{A}\left(0, \frac{-bc_2}{2(c_1 - b)}\right).$$

Točku $\overline{B}$ dobivamo kao presjek simetrala $\overline{c}$ i $\overline{a}$, tj

$$\overline{B}\left(b, \frac{bc_2}{2c_1}\right).$$

I točku $\overline{C}$ kao presjek simetrala $\overline{a}$ i $\overline{b}$,

$$\overline{C} = \left(c_1, \frac{c_2}{2}\right).$$

Promotrimo sada trokut s vrhovima $\overline{A}$, $\overline{B}$ i $\overline{C}$. Jednadžbe njegovih stranica su:

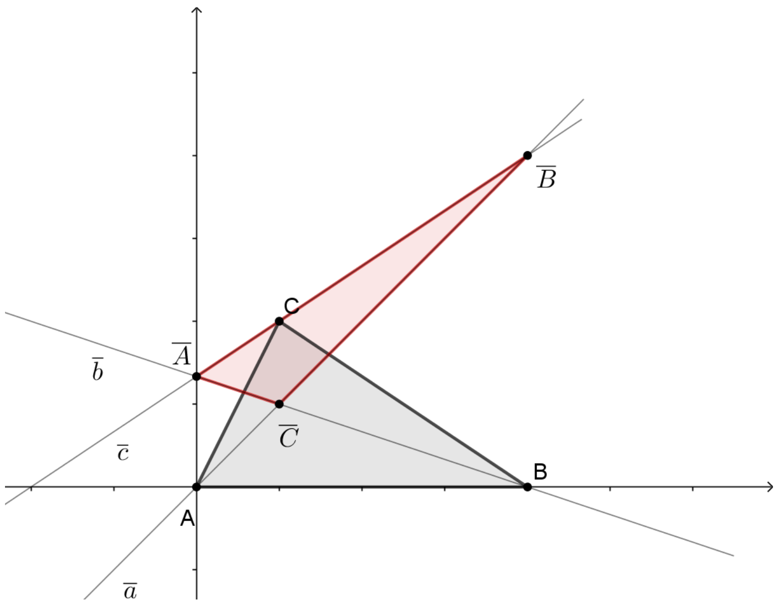
$$\begin{aligned}
\overline{AB} \quad &\ldots \quad y = \frac{c_2(2c_1 - b)}{2c_1(c_1 - b)} \cdot x - \frac{bc_2}{2(c_1 - b)} \\
\overline{BC} \quad &\ldots \quad y = \frac{c_2}{2c_1} \cdot x \\
\overline{CA} \quad &\ldots \quad y = \frac{c_2}{2(c_1 - b)} \cdot x - \frac{bc_1}{2(c_1 - b)}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 3.15 *U trokutu $\overline{ABC}$ vrijedi da su duljine stranica iste te da je omjer kutova isti kao i u trokutu ABC.*

Dokaz: Neka su dani trokuti ABC s vrhovima $A(0,0)$, $B(b,0)$ i $C(c_1,c_2)$ i trokut $\overline{ABC}$ s vrhovima $\overline{A}(0, \frac{-bc_2}{2(c_1-b)})$, $\overline{B}(b, \frac{bc_2}{2c_1})$ i $\overline{C} = (c_1, \frac{c_2}{2})$. Dokažimo da su njihove duljine stranica iste, odnosno da vrijedi $d(A,B) = d(\overline{A},\overline{B})$, $d(B,C) = d(\overline{B},\overline{C})$ i $d(C,A) = d(\overline{C},\overline{A})$. Imamo:

$$\begin{aligned}
d(\overline{A},\overline{B}) &= b = d(A,B), \\
d(\overline{B},\overline{C}) &= c_1 - b = d(B,C) \text{ i} \\
d(\overline{C},\overline{A}) &= c_1 = d(C,A).
\end{aligned}$$



Slika 3.6.

Pogledajmo kutove u trokutu ABC:

$$\begin{aligned}
\measuredangle(BA, AC) &= \frac{c_2}{c_1} \\
\measuredangle(AB, BC) &= \frac{c_2}{c_1 - b} \\
\measuredangle(BC, CA) &= \frac{c_2}{c_1} - \frac{c_2}{c_1 - b} = \frac{c_1c_2 - bc_2 - c_1c_2}{c_1(c_1 - b)} = \frac{-bc_2}{c_1(c_1 - b)}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Kutovi u trokutu $\overline{ABC}$ su:

$$\begin{aligned}
\measuredangle(\overline{BA}, \overline{AC}) &= -\frac{c_2}{2c_1} \\
\measuredangle(\overline{AB}, \overline{BC}) &= \frac{c_2(2c_1 - b)}{2c_1(c_1 - b)} - \frac{c_2}{2c_1} = \frac{-c_2}{2c_1}\left[\frac{2c_1 - b - c_1 + b}{c_1 - b}\right] = -\frac{c_2}{2(c_1 - b)} \\
\measuredangle(\overline{BC}, \overline{CA}) &= \frac{bc_2}{2c_1(c_1 - b)}.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Sada imamo:

$$\frac{\measuredangle(AB, BC)}{\measuredangle(\overline{AB}, \overline{BC})} = \frac{\measuredangle(BA, AC)}{\measuredangle(\overline{BA}, \overline{AC})} = \frac{\measuredangle(BC, CA)}{\measuredangle(\overline{BC}, \overline{CA})} = -2.$$

Dakle, zaključujemo da su omjeri kutova u trokutima ABC i $\overline{ABC}$ jednaki. □

Teorem 3.16 *Odgovarajuće stranice trokuta ABC i njemu ortičkog trokuta $A_HB_HC_H$ se sijeku u tri točke koje pripadaju istom pravcu.*

Dokaz: Neka je dan trokut ABC sa vrhovima $A(0,0)$, $B(b,0)$, $C(c_1,c_2)$ te njemu ortički trokut $A_HB_HC_H$ s vrhovima $A_H(0,-\frac{c_2b}{c_1-b})$, $B_H(b,\frac{c_2b}{c_1})$, $C_H(c_1,0)$. Jednadžbe stranica trokuta ABC su

$$AB \ \ldots \ y = 0 \tag{3.37}$$

$$BC \ \ldots \ y = \frac{c_2}{c_1-b}\cdot x - \frac{c_2b}{c_1-b} \tag{3.38}$$

$$CA \ \ldots \ y = \frac{c_2}{c_1}\cdot x. \tag{3.39}$$

Dok su jednadžbe stranica ortičkog trokuta $A_HB_HC_H$:

$$A_HB_H \ \ldots \ y = \frac{c_2(2c_1-b)}{c_1(c_1-b)}\cdot x - \frac{c_2b}{c_1-b} \tag{3.40}$$

$$B_HC_H \ \ldots \ y = -\frac{c_2b}{c_1(c_1-b)}\cdot x + \frac{c_2b}{c_1-b} \tag{3.41}$$

$$C_HA_H \ \ldots \ y = \frac{c_2b}{c_1(c_1-b)}\cdot x - \frac{c_2b}{c_1-b}. \tag{3.42}$$

Odredimo presjeke odgovarajućih stranica trokuta ABC i $A_HB_HC_H$. Neka je T_1 presjek stranice AB i A_HB_H. Iz (3.37) i (3.40) dobivamo da je $T_1(\frac{c_1b}{2c_1-b},0)$. Neka je $T_2 = BC \cap B_HC_H$, pa imamo da je $T_2(\frac{2bc_1}{c_1+b},\frac{c_2b}{c_1+b})$, te $T_3 = CA \cap C_HA_H$ pa je $T_3(\frac{bc_1}{2b-c_1},\frac{c_2b}{2b-c_1})$. Da bi dokazali da točke T_1,T_2,T_3 pripadaju istome pravcu, izračunajmo prvo jednadžbu pravca kroz točke T_1 i T_2:

$$T_1T_2 \ldots y = \frac{c_2(2c_1-b)}{3c_1(c_1-b)}\cdot x - \frac{bc_2}{3(c_1-b)}. \tag{3.43}$$

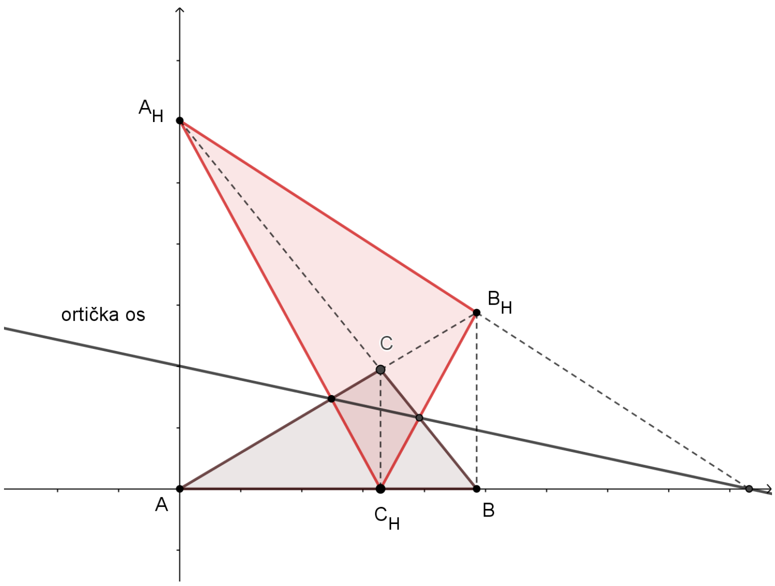
Uvrštavanjem koordinata točke T_3 u jednadžbu (3.43) dobivamo da točka T_3 pripada tome pravcu, odnosno dobili smo da točke T_1,T_2,T_3 pripadaju istome pravcu, što smo i trebali dokazati. □

Pravac kojemu pripadaju točke T_1,T_2,T_3 iz Teorema 3.16 nazivamo *ortička os* trokuta ABC, slika 3.7.

Ako je trokut $A_{H_1}B_{H_1}C_{H_1}$ ortički trokut trokutu $A_HB_HC_H$, tada on ima istu ortičku os kao i trokut $A_HB_HC_H$, te vrijedi da svaki sljedeći ortički trokut ima istu ortičku os. To vrijedi prema sljedećem teoremu:

Teorem 3.17 *Ortički trokut $A_HB_HC_H$ ima istu ortičku os kao trokut ABC te vrijedi*

$$\begin{aligned} s(A,A_H) &= s(A_{H_1},A)\\ s(B,B_H) &= s(B_{H_1},B)\\ s(C,C_H) &= s(C_{H_1},C). \end{aligned}$$



Slika 3.7. Ortička os

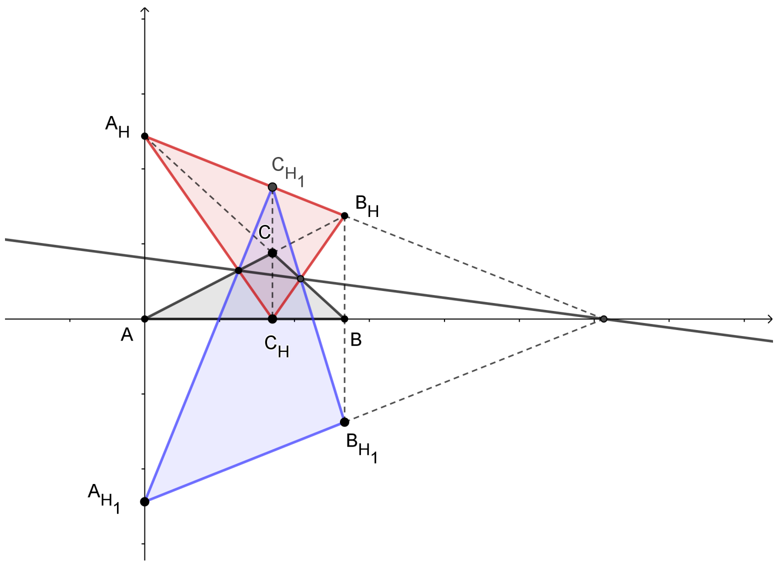
Dokaz: Neka je dan ortički trokut $A_HB_HC_H$ s vrhovima $A_H(0, -\frac{c_2b}{c_1-b})$, $B_H(b, \frac{c_2b}{c_1})$ i $C_H(c_1, 0)$. Njemu ortički trokut $A_{H_1}B_{H_1}C_{H_1}$ tada ima vrhove dane s $A_{H_1}(0, \frac{c_2b}{c_1-b})$, $B_{H_1}(b, -\frac{c_2b}{c_1})$ i $C_{H_1}(c_1, 2c_2)$. Jednadžbe stranica trokuta $A_{H_1}B_{H_1}C_{H_1}$ su dane s

$$
\begin{aligned}
A_{H_1}B_{H_1} \quad \ldots \quad y &= \frac{c_2(b-2c_1)}{c_1(c_1-b)} \cdot x + \frac{c_2b}{c_1-b} \\
B_{H_1}C_{H_1} \quad \ldots \quad y &= \frac{2c_1c_2+c_2b}{c_1(c_1-b)} \cdot x - \frac{3c_2b}{c_1-b} \\
C_{H_1}A_{H_1} \quad \ldots \quad y &= \frac{2c_1c_2-3c_2b}{c_1(c_1-b)} \cdot x + \frac{c_2b}{c_1-b}.
\end{aligned}
$$

Neka su točke M_1, M_2, M_3 presjeci odgovarajućih stranica trokuta $A_{H_1}B_{H_1}C_{H_1}$ i $A_HB_HC_H$. Dobivamo da su $M_1(-\frac{c_1b}{b-2c_1}, 0)$, $M_2(\frac{2c_1b}{c_1+b}, \frac{c_2b}{c_1+b})$ i $M_3(b, -\frac{c_2b}{c_1})$. Vidimo da je $M_1 = T_1$, $M_2 = T_2$ i $M_3 = T_3$ stoga zaključujemo kako trokut $A_HB_HC_H$ ima istu ortičku os kao i trokut ABC.
Vrijedi nadalje:

$$
\begin{aligned}
s(A, A_H) &= -\frac{c_2b}{c_1-b} = s(A_{H_1}, A) \\
s(B, B_H) &= \frac{c_2b}{c_1} = s(B_{H_1}, B) \\
s(C, C_H) &= -c_2 = s(C_{H_1}, C),
\end{aligned}
$$

te je time i dokazana druga tvrdnja teorema. $\square$



Slika 3.8.

3.2 Krivulje 2. reda u izotropnoj ravnini

U ovom poglavlju ćemo promatrati krivulje 2. reda u izotropnoj ravnini. Za početak definirajmo kružnicu te dokažimo nekoliko teorema koje vrijede za kružnicu u izotropnoj ravnini, a koji imaju svoje analogone u euklidskoj ravnini.

3.2.1 Kružnica

Krivulja drugog reda (konika) u projektivnoj ravnini je skup točaka (x_0, x_1, x_2) koje zadovoljavaju jednadžbu

$$a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0. \tag{3.44}$$

U izotropnoj ravnini *kružnica* je krivulja drugog reda koja dodiruje apsolutni pravac f s jednadžbom $x_0 = 0$ u apsolutnoj točki $F(0, 0, 1)$.
Odredimo njenu jednadžbu pomoću tog svojstva. Kako apsolutna točka $F(0, 0, 1)$ pripada kružnici, uvrštavanjem njezinih koordinata u jednadžbu (3.44) imamo da je $a_{22} = 0$.
Promotrimo presjek apsolutnog pravca $x_0 = 0$ s krivuljom (3.44). Dobivamo

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

$$x_1(a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2) = 0.$$

Iz ovoga slijedi da je $x_1 = 0$ ili da je $a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 = 0$. No, želimo da je $x_1 = 0$ jedino rješenje jer kružnica dira apsolutni pravac samo u apsolutnoj točki F. Zbog toga imamo

$$a_{12}x_2 = 0$$

pa mora vrijediti $a_{12} = 0$.
Dakle, svaka kružnica u izotropnoj ravnini ima jednadžbu

$$a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 = 0. \tag{3.45}$$

Dijeljenjem jednadžbe (3.45) s x_0^2 dobivamo

$$a_{00} + 2a_{01}\frac{x_1}{x_0} + 2a_{02}\frac{x_2}{x_0} + a_{11}\frac{x_1^2}{x_0^2} = 0,$$

tj. imamo da je jednadžba kružnice u afinim koordinatama dana s

$$a_{00} + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{11}x^2 = 0. \tag{3.46}$$

Kako $a_{02} \neq 0$, možemo pisati

$$y = -\frac{a_{11}}{2a_{02}}x^2 - \frac{a_{01}}{a_{02}}x - \frac{a_{00}}{2a_{02}}.$$

Uvodimo oznake

$$R := -\frac{a_{11}}{2a_{02}}, \alpha := -\frac{a_{01}}{a_{02}}, \beta := -\frac{a_{00}}{2a_{02}}.$$

Uz gornje oznake, svaka kružnica u izotropnoj ravnini ima jednadžbu oblika

$$y = Rx^2 + \alpha x + \beta. \tag{3.47}$$

Slično kao i u euklidskoj ravnini, gdje najčešće uzimamo da je središte kružnice u ishodištu koordinatnog sustava $O(0,0)$ radi lakšeg računanja, tako ćemo jednadžbu kružnice u izotropnoj ravnini svesti na jednostavniji oblik. Želimo sačuvati udaljenost i raspon stoga ćemo izotropnim gibanjem transformirati jednadžbu kružnice. Gibanjem

$$\overline{x} = \frac{\alpha}{2R} + x, \overline{y} = \frac{\alpha^2}{4R} - \beta + y$$

je svedemo na oblik

$$y = Rx^2. \tag{3.48}$$

Zaista, ako u jednadžbu (3.47) uvrstimo

$$x = \overline{x} - \frac{\alpha}{2R}, y = \overline{y} - \frac{\alpha^2}{4R} + \beta,$$

imamo

$$\begin{aligned}
\overline{y} - \frac{\alpha^2}{4R} + \beta &= R(\overline{x} - \frac{\alpha}{2R})^2 + \alpha(\overline{x} - \frac{\alpha}{2R}) + \beta \\
\overline{y} - \frac{\alpha^2}{4R} + \beta &= R\overline{x}^2 - \alpha\overline{x} + \frac{\alpha^2}{4R} + \alpha\overline{x} - \frac{\alpha^2}{2R} + \beta \\
\overline{y} &= R\overline{x}^2.
\end{aligned}$$

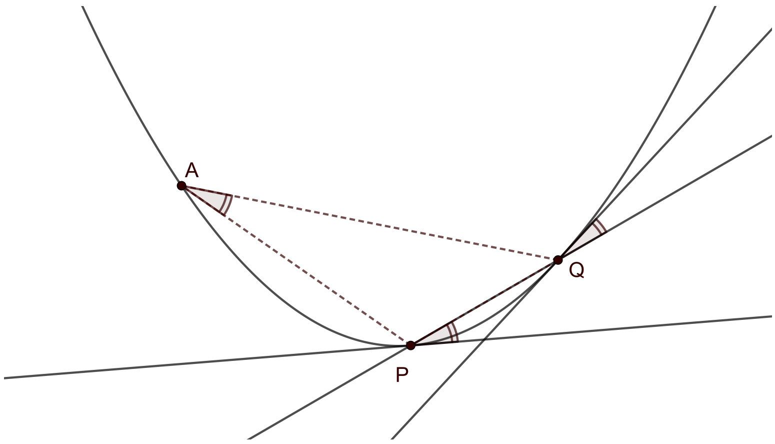
Kako je gibanjem sačuvana udaljenost i raspon, odsada pa nadalje možemo pretpostaviti da kružnica ima jednadžbu oblika (3.48).

Teorem 3.18 *Neka su P i Q, $P \neq Q$, dvije točke koje pripadaju kružnici k, A proizvoljna točka na kružnici k i neka su $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ tangente kružnice u točkama P i Q redom. Tada vrijedi*

$$\measuredangle(AP, AQ) = R \cdot d(P, Q), \quad \forall A \in k$$

tj. kut $\measuredangle(AP, AQ)$ ne ovisi o izboru točke A. Također, vrijedi

$$\measuredangle(\mathcal{P}, PQ) = R \cdot d(P, Q) = -\measuredangle(\mathcal{Q}, PQ).$$



Slika 3.9.

Dokaz: Neka je $y = Rx^2$ jednadžba kružnice k, te neka točke $P(p, Rp^2)$, $Q(q, Rq^2)$ i $A(a, Ra^2)$ pripadaju kružnici k. Tada je jednadžba pravca AP dana s

$$y = R(p + a)x - Rpa$$

dok je jednadžba pravca AQ dana s

$$y = R(q + a)x - Raq.$$

Stoga imamo da je

$$\measuredangle(AP, AQ) = R(q + a) - R(p + a) = R(q - p) = R \cdot d(P, Q),$$

odnosno dobili smo da kut između AP i AQ ne ovisi o točki A.
Dokažimo i drugu tvrdnju. Jednadžba tangente $\mathcal{P}$ kružnice k u točki P je dana s

$$y = 2Rpx - Rp^2,$$

pa je

$$\measuredangle(\mathcal{P}, PQ) = R(q + p) - 2Rp = R(q - p) = R \cdot d(P, Q).$$

Jednadžba tangente $\mathcal{Q}$ kružnice k u točki Q je

$$y = 2Rqx - Rq^2,$$

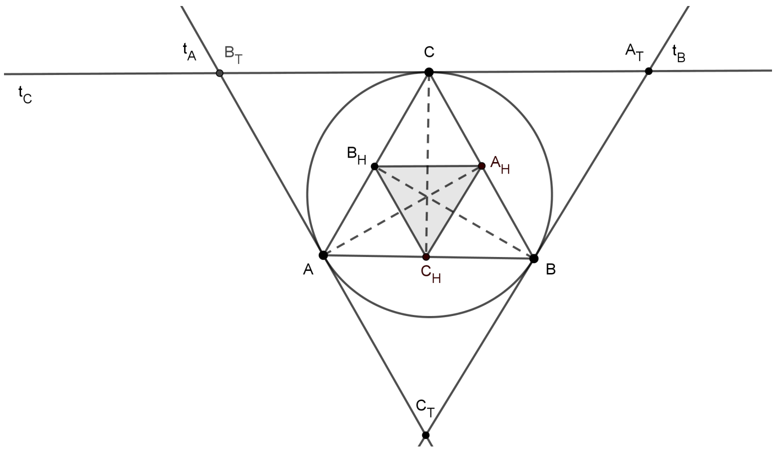
pa je

$$\measuredangle(\mathcal{Q}, PQ) = R(q+p) - 2Rq = R(p-q) = R \cdot d(Q,P) = -R \cdot d(P,Q),$$

a to smo i trebali dokazati. □

Prethodni je teorem analogon sljedeće tvrdnje u euklidskoj ravnini:
Neka je dana kružnica k, dvije točke P i Q kružnice k te neka je točka A točka kružnice k, $A \neq P, Q$. Tada vrijedi da je svaki obodni kut $\measuredangle(PAQ)$ kružnice k nad tetivom PQ jednak kutu između pravca PQ i tangente kružnice k u točkama P ili Q, [3].

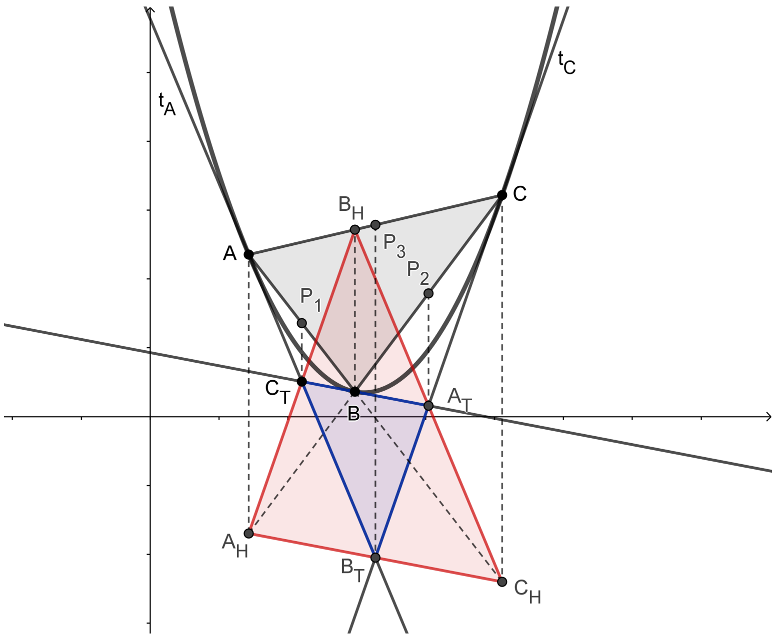
Poznato je da u euklidskoj ravnini vrijedi sljedeća tvrdnja [5]:
Neka su dane točke A, B, C koje pripadaju kružnici k, te neka su t_A, t_B, t_C tangente kružnice k u tim točkama redom, a trokut $A_H B_H C_H$ ortički trokut trokuta ABC. Tada vrijedi da je $t_A \parallel C_H B_H, t_B \parallel C_H A_H$ i $t_C \parallel B_H A_H$, slika 3.10.



Slika 3.10.

U izotropnoj ravnini vrijedi analogna tvrdnja s još nekim dodatnim svojstvima, slika 3.11. Vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 3.19 *Neka su dane točke A, B, C koje pripadaju kružnici k te neka tangente t_A, t_B, t_C kružnice k u točkama A, B, C redom tvore trokut $A_T B_T C_T$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*
1) Vrhovi trokuta $A_T B_T C_T$ su paralelni s polovištima odgovarajućih stranica trokuta ABC i pripadaju odgovarajućim stranicama ortičkog trokuta $A_H B_H C_H$.
2) Stranice trokuta $A_T B_T C_T$ su paralelne sa odgovarajućim stranicama ortičkog trokuta $A_H B_H C_H$.



Slika 3.11.

Dokaz: Neka su dane točke $A(a, Ra^2), B(b, Rb^2), C(c, Rc^2)$ koje pripadaju kružnici k s jednadžbom $y = Rx^2$. Tada su vrhovi njemu ortičkog trokuta $A_HB_HC_H$ $A_H(a, Rac + Rab - Rbc), B_H(b, Rab + Rcb - Rca), C_H(c, Rbc + Rac - Rab)$. Jednadžbe tangenti t_A, t_B, t_C kružnice k u točkama A, B, C redom su dane s

$$\begin{aligned} t_A \quad & \dots \quad y = 2Ra \cdot x - Ra^2 \\ t_B \quad & \dots \quad y = 2Rb \cdot x - Rb^2 \\ t_C \quad & \dots \quad y = 2Rc \cdot x - Rc^2. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Izračunajmo vrhove trokuta $A_TB_TC_T$. Vrh A_T je presjek tangenti t_B i t_C pa imamo da je $A_T(\frac{b+c}{2}, Rbc)$. Iz ovoga vidimo da je točka A_T paralelna s polovištem P_2 stranice BC, jer je polovište $P_2(\frac{b+c}{2}, \frac{Rb^2+Rc^2}{2})$. Analognim računom dobijemo da su i vrhovi B_T i C_T paralelni sa polovištima P_3 i P_1 stranica AC i AB.
Dokažimo da vrhovi trokuta $A_TB_TC_T$ pripadaju odgovarajućim stranicama ortičkog trokuta $A_HB_HC_H$. Tvrdimo da je $B_T \in A_HC_H$. Jednadžbe stranica ortičkog trokuta su:

$$\begin{aligned} A_HB_H \quad & \dots \quad y = 2Rc \cdot x + Rab - Rbc - Rac \\ B_HC_H \quad & \dots \quad y = 2Ra \cdot x + Rbc - Rab - Rac \\ C_HA_H \quad & \dots \quad y = 2Rb \cdot x + Rac - Rbc - Rab. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Uvrstimo li koordinate točke B_T u jednadžbu pravca $A_H C_H$ dobivamo

$$\begin{aligned} Rac &= 2Rb \cdot (\frac{a+c}{2}) + Rac - Rbc - Rab \\ Rac &= Rba + Rbc + Rac - Rbc - Rab \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

odnosno imamo da je $B_T \in A_H C_H$. Analogno, dobijemo da i ostali vrhovi A_T i C_T pripadaju stranicama $C_H B_H$ i $A_H B_H$. Time smo dokazali tvrdnju 1).
Da bi dokazali tvrdnju 2) prvo izračunajmo jednadžbe stranica trokuta $A_T B_T C_T$.

$$\begin{aligned} A_T C_T \quad & \ldots \quad y = 2Rc \cdot x - Rc^2 \\ B_T C_T \quad & \ldots \quad y = 2Ra \cdot x - Ra^2 \\ C_T A_T \quad & \ldots \quad y = 2Rb \cdot x - Rb^2 \end{aligned}$$

Iz danih jednadžbi te iz (3.50) je vidljivo da vrijedi $A_T C_T \parallel A_H C_H$, $B_T C_T \parallel B_H C_H$ i $A_T B_T \parallel A_H B_H$. Time smo dokazali i tvrdnju 2). □

3.2.2 Krivulje 2. reda u projektivnoj ravnini

Jednadžba krivulje 2. reda (konike) k u projektivnoj ravnini je dana s

$$a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0. \tag{3.51}$$

Svakoj konici k može se pridružiti klasa matrica $\rho \cdot M$, gdje je

$$M = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Točka $T\ (x_0, x_1, x_2)$ pripada konici k ako vrijedi da je

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Ako je $\det M \neq 0$, tada je konika k regularna (neraspadnuta, prava), a ako je $\det M = 0$ konika k je raspadnuta, odnosno ona se sastoji od dva pravca koji mogu biti različiti ili se mogu podudarati, [4].

3.2.3 Klasifikacija krivulja 2. reda u izotropnoj ravnini

U euklidskoj se ravnini konike dijele na elipse, hiperbole, parabole i kružnice (specijalan slučaj elipse). U ovom ćemo potpoglavlju obraditi podjelu (klasifikaciju)

konika u izotropnoj ravnini.
Svaka je konika k dana jednadžbom

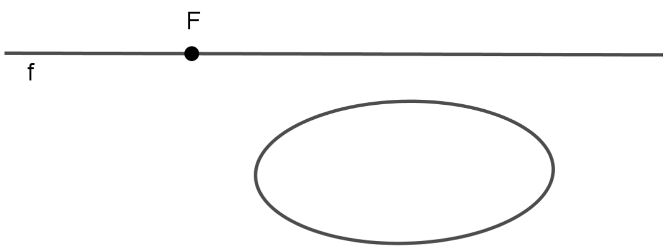
$$a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0.$$

Prelazom na afine nehomogene koordinate, imamo jednadžbu

$$a_{00} + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0. \tag{3.52}$$

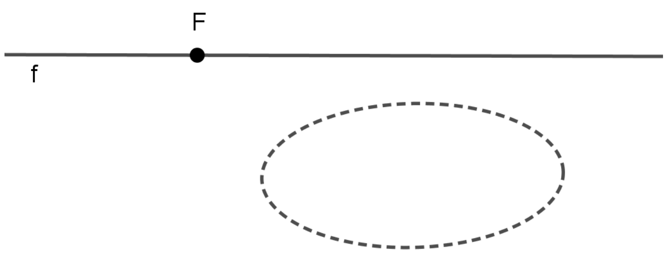
U izotropnoj ravnini konike dane jednadžbom (3.52) ćemo klasificirat s obzirom na njihov položaj prema apsolutnoj figuri tj. gledamo presjek konike i apsolutnog pravca f s jednadžbom $x_0 = 0$. Na slikama 3.12 - 3.27 su prikazani različiti tipovi pravih i raspadnutih konika na projektivnom modelu izotropne ravnine. Presjek konike k i apsolutnog pravca f mogu biti:

- Dvije imaginarne točke
  Tada koniku zovemo *elipsa*, slika 3.12.



Slika 3.12. Elipsa

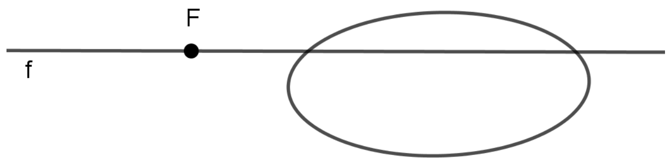
  Ukoliko su sve točke elipse imaginarne, zovemo ju *imaginarna elipsa*, slika 3.13.



Slika 3.13. Imaginarna elipsa

- Dvije različite realne točke
  Koniku zovemo *hiperbola*. Razlikujemo 3 tipa hiperbole:

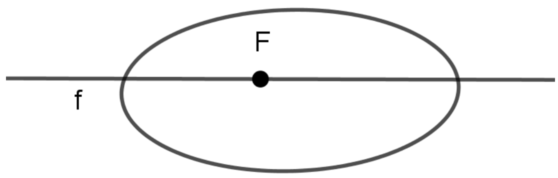
– *Hiperbola 1. vrste.*



Slika 3.14. Hiperbola 1. vrste

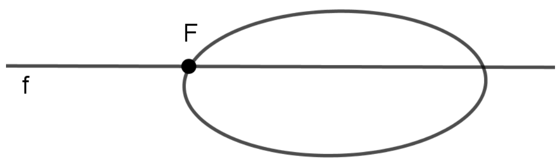
Apsolutna točka F leži izvan konike, tj. tangente povučene iz F na k su realne, slika 3.14.

– *Hiperbola 2. vrste.*
Apsolutna točka F leži unutar k, tj. tangente povučene iz F na k su imaginarni pravci, slika 3.15.



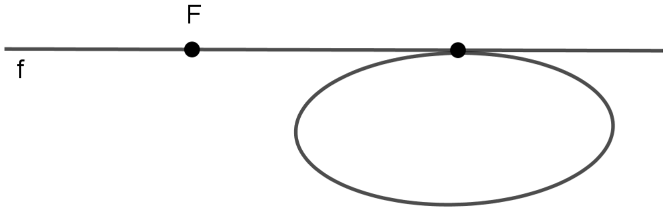
Slika 3.15. Hiperbola 2. vrste

– *Specijalna hiperbola*
Konika k prolazi apsolutnom točkom, slika 3.16.

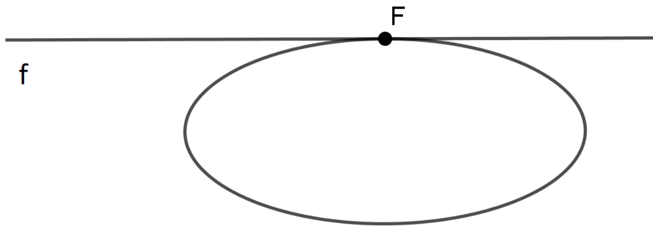


Slika 3.16. Specijalna hiperbola

- Jedna realna točka
  - Ako konika k dodiruje f u točki koja je različita od F, koniku zovemo *parabola*, slika 3.17.
  - Ako konika k dodiruje f u apsolutnoj točki, zovemo ju *kružnica*, slika 3.18.



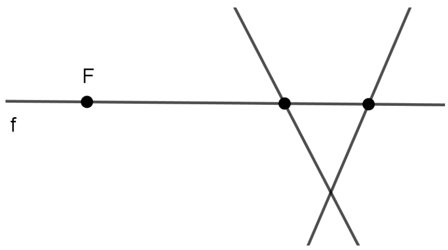
Slika 3.17. Parabola



Slika 3.18. Kružnica

Napomena 3.20 Ukoliko se radi o raspadnutoj koniki odnosno paru pravaca imamo sljedeću klasifikaciju obzirom na presjek konike i apsolutnog pravca f:

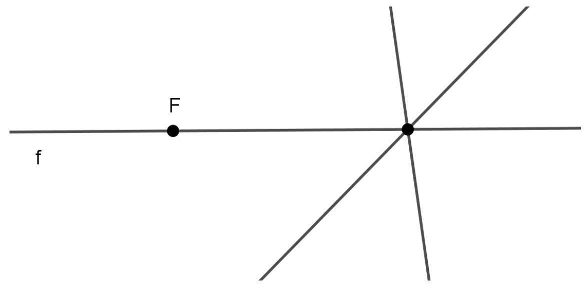
- Par realnih pravaca
  Konika se sastoji od dva pravca koji se sijeku u konačnosti a koji imaju dvije zajedničke realne točke s apsolutnim pravcem f, slika 3.19.



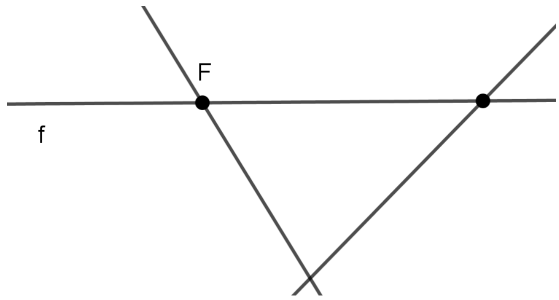
Slika 3.19.

- Par realnih paralelnih pravaca
  Konika se sastoji od dva realna paralelna pravca koji s apsolutnim pravcem imaju jednu zajedničku točku, slika 3.20.

- Par realnih pravaca, od kojih je jedan izotropan pravac
  Konika je par realnih pravaca, od kojih je jedan izotropan. Sijeku se u konačnosti i s apsolutnim pravcem imaju dvije zajedničke realne točke od kojih je jedna F, slika 3.21.

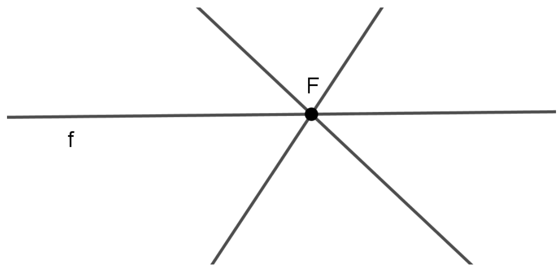


Slika 3.20.



Slika 3.21.

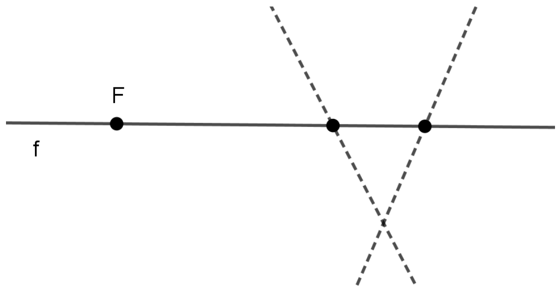
- Par izotropnih pravaca koji se ne podudaraju
  Koniku čine dva različita izotropna pravca, koji imaju jednu zajedničku točku s apsolutnim pravcem, točku F, slika 3.22.



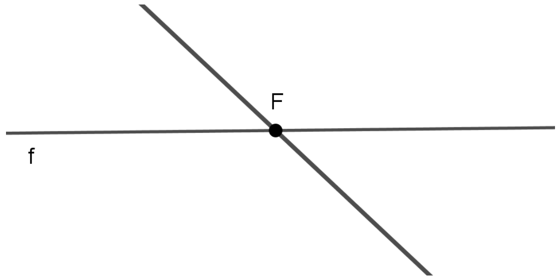
Slika 3.22.

- Par konjugirano imaginarnih pravaca
  Konika se sastoji od para konjugirano imaginarnih pravaca koji se sijeku u konačnosti i koji s apsolutnim pravcem f imaju dvije zajedničke točke, slika 3.23.

- Par izotropnih pravaca koji se podudaraju
  Koniku čine par izotropnih pravaca koji se podudaraju, pa s apsolutnim pravcem imaju jednu zajedničku točku - F, slika 3.24.

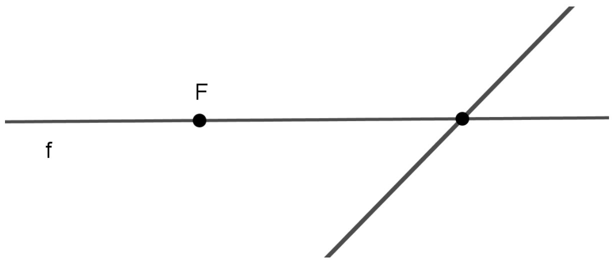


Slika 3.23.



Slika 3.24.

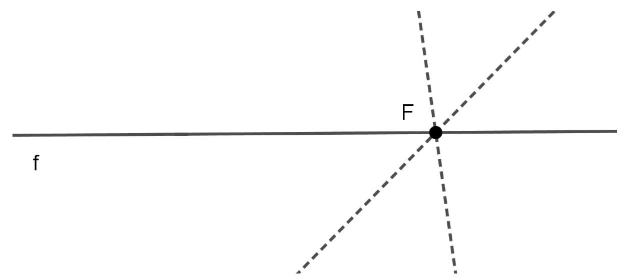
- Par pravaca koji se podudaraju
  Konika je par pravaca koji se podudaraju i s apsolutnim pravcem imaju jednu zajedničku točku, slika 3.25.



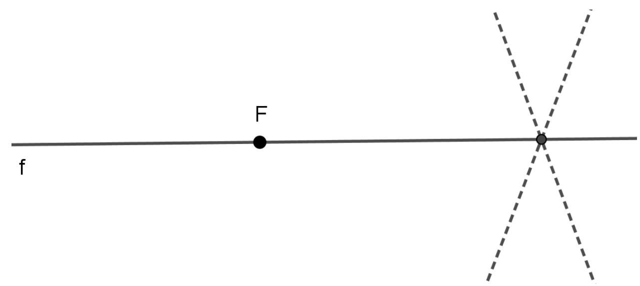
Slika 3.25.

- Par konjugirano imaginarnih izotropnih pravaca
  Konika se sastoji od para konjugirano imaginarnih izotropnih pravaca koji s apsolutnim pravcem imaju jednu zajedničku točku - F, slika 3.26.

- Par konjugirano imaginarnih paralelnih pravaca
  Koniku čine dva konjugirano imaginarna paralelna pravca, koji s apsolutnim pravcem imaju jednu zajedničku točku različitu od apsolutne točke F, slika 3.27.



Slika 3.26.



Slika 3.27.

Za svaki tip konike odredimo jednadžbu. Presjek konike k dane jednadžbom (3.52) i apsolutnog pravca f s jednadžbom $x_0 = 0$ su točke oblika $(0, x_1, x_2)$ takve da je

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0.$$

Iz gornje jednadžbe izrazimo x_2 u ovisnosti o x,

$$x_2 = \frac{-2a_{12}x_1 \pm \sqrt{4a_{12}^2x_1^2 - 4a_{11}a_{22}x_1^2}}{2a_{22}}$$

$$x_2 = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}} \cdot x_1$$

Dakle, točke presjeka su oblika $(0, 1, \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}})$. Sada, iz zadnje jednakosti imamo:

- Ako je $a_{12}^2 > a_{11}a_{22}$, tada je k hiperbola.
- Ako je $a_{12}^2 < a_{11}a_{22}$, k je elipsa.
- Ako je $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$, k je parabola ili kružnica.
  - Ako aposlutna točka F pripada konici k, tada je $a_{22} = 0$. Dakle, konika je kružnica ako vrijedi da je $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$ i $a_{22} = 0$. Slijedi da mora

vrijediti i da je $a_{12} = 0$. Stoga imamo da je jednadžba kružnice dana s

$$a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 = 0,$$

odnosno u afinim nehomogenim koordinatama je

$$a_{00} + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{11}x^2 = 0. \tag{3.53}$$

– Ukoliko je $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$, pri čemu $a_{22} \neq 0$ konika je parabola.

3.2.4 Normalna jednadžba krivulje 2. reda u izotropnoj ravnini

Konike s jednadžbom (3.52) ćemo pomoću izotropnog gibanja transformirati tako da njihove jednadžbe poprime najjednostavniji mogući oblik. Kako bi to uspjeli, prvo ćemo na (3.52) primjeniti rotaciju danu s

$$\begin{aligned} x &= \overline{x} \\ y &= \alpha\overline{x} + \overline{y} \end{aligned} \tag{3.54}$$

Tako se dobije sljedeća jednadžba konike k

$$\overline{a}_{11}\overline{x}^2 + 2\overline{a}_{12}\overline{xy} + \overline{a}_{22}\overline{y}^2 + 2\overline{a}_{01}\overline{x} + 2\overline{a}_{02}\overline{y} + \overline{a}_{00} = 0, \tag{3.55}$$

gdje je

$$\begin{aligned} \overline{a}_{11} &= a_{11} + 2a_{12}\alpha + a_{22}\alpha^2 \\ \overline{a}_{12} &= a_{12} + a_{22}\alpha \\ \overline{a}_{22} &= a_{22} \\ \overline{a}_{01} &= a_{01} + a_{02}\alpha \\ \overline{a}_{02} &= a_{02} \\ \overline{a}_{00} &= a_{00}. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Sada razlikujemo dva glavna slučaja $a_{22} \neq 0$ i $a_{22} = 0$, te ovisno o njima ostale podslučajeve.

A) $a_{22} \neq 0$

U ovom slučaju odaberemo α tako da je $\overline{a}_{12} = 0$, pa je $\alpha = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$. Tada je jednadžba (3.55) dana s

$$\overline{a}_{11}\overline{x}^2 + \overline{a}_{22}\overline{y}^2 + 2\overline{a}_{01}\overline{x} + 2\overline{a}_{02}\overline{y} + \overline{a}_{00} = 0. \tag{3.57}$$

$A_1)$ $\overline{a}_{11} \neq 0$, $\overline{a}_{22} \neq 0$.

U ovom slučaju jednadžbu (3.57) napišemo u obliku

$$\overline{a}_{11}\left(\overline{x}+\frac{\overline{a}_{01}}{\overline{a}_{11}}\right)^2+\overline{a}_{22}\left(\overline{y}+\frac{\overline{a}_{02}}{\overline{a}_{22}}\right)^2+\overline{a}_0-\frac{\overline{a}_{01}^2}{\overline{a}_{11}}-\frac{\overline{a}_{01}^2}{\overline{a}_{22}}=0.$$

Nakon što se primjeni *translacija* dana s

$$\tilde{x}=\overline{x}+\frac{\overline{a}_{01}}{\overline{a}_{11}},$$

$$\tilde{y}=\overline{y}+\frac{\overline{a}_{02}}{\overline{a}_{22}}$$

te ako uvedemo oznaku

$$A_0:=\overline{a}_{00}-\frac{\overline{a}_{01}^2}{\overline{a}_{11}}-\frac{\overline{a}_{02}^2}{\overline{a}_{22}},$$

dobivamo jednadžbu

$$\overline{a}_{11}\tilde{x}^2+\overline{a}_{22}\tilde{y}^2+A_0=0. \tag{3.58}$$

Ako je $A_0 \neq 0$, tada stavimo da je $\lambda := -\frac{A_0}{\overline{a}_{11}}$, $\mu := -\frac{A_0}{\overline{a}_{22}}$ pa jednadžba (3.58) sada ima oblik

$$\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\mu}=1, \tag{3.59}$$

gdje umjesto $\tilde{x}, \tilde{y}$ pišemo x, y.
Ako je $A_0 = 0$, $\lambda := \frac{1}{\overline{a}_{11}}$, $\mu := \frac{1}{\overline{a}_{22}}$ imamo

$$\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\mu}=0. \tag{3.60}$$

Iz jednadžbi (3.59) i (3.60), ovisno o λ i μ imamo sljedeće vrste krivulja 2. reda:

I: ako je $\lambda > 0$, $\mu > 0$: *Elipsa*

Ako uvedemo oznake $\lambda =: a^2$, $\mu =: b^2$, dobivamo normalni oblik jednadžbe elipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{3.61}$$

II: ako je $\lambda < 0$, $\mu < 0$: *Imaginarna elipsa*

Ako uvedemo oznake $-\lambda =: a^2$, $-\mu =: b^2$ imamo normalni oblik jednadžbe imaginarne elipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1. \tag{3.62}$$

III: ako je $\lambda > 0$, $\mu < 0$: *Hiperbola 1. vrste*

Stavimo da je $\lambda =: a^2$, $-\mu =: b^2$, imamo normalni oblik jednadžbe hiperbole 1. vrste:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.63}$$

IV: ako je $\lambda < 0$, $\mu > 0$: *Hiperbola 2. vrste*

Stavimo da je $-\lambda =: a^2$, $\mu =: b^2$, imamo normalni oblik jednadžbe hiperbole 2. vrste:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1. \tag{3.64}$$

V: ovdje promatramo jednadžbu (3.60), ako je $\lambda > 0$, $\mu > 0$: *Konjugirano imaginarni par pravaca*

Ako uvedemo oznake $\lambda =: a^2$, $\mu =: b^2$ dobivamo normalni oblik jednadžbe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0. \tag{3.65}$$

Ova jednadžba predstavlja para pravaca s jednadžbama $\frac{x}{a}+i\cdot\frac{y}{b} = 0$, $\frac{x}{a}-i\cdot\frac{y}{b} = 0$ koji se sijeku u realnoj točki $S(0,0)$.

VI: u jednadžbi (3.60) ako je $\lambda > 0$, $\mu < 0$: *Realni par pravaca koji se sijeku*

Ako stavimo da je $\lambda =: a^2$, $-\mu =: b^2$, dobivamo normalni oblik jednadžbe

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \tag{3.66}$$

tj par pravaca s jednadžbama $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$, $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$.

U slučaj $\lambda < 0$, $\mu > 0$ dobivamo također istu jednadžbu kao i (3.66).

A_2) $\overline{a}_{11} = 0$, $\overline{a}_{22} \neq 0$.

U ovom slučaju imamo dva podslučaja:

a) ako je $\overline{a}_{01} \neq 0$, u tom slučaju jednadžba (3.57) ima oblik

$$\overline{a}_{22}\overline{y}^2 + 2\overline{a}_{01}\overline{x} + 2\overline{a}_{02}\overline{y} + \overline{a}_{00} = 0$$

i kako je $\overline{a}_{01} \neq 0$ možemo je zapisati u obliku

$$\overline{a}_{22}\left(\overline{y} + \frac{\overline{a}_{02}}{\overline{a}_{22}}\right)^2 + 2\overline{a}_{01}\left[\overline{x} + \frac{1}{2\overline{a}_{01}}\left(\overline{a}_{00} - \frac{\overline{a}_{02}^2}{\overline{a}_{22}}\right)\right] = 0.$$

Sada primjenimo *translaciju* danu s

$$\begin{aligned} x &= \overline{x} + \frac{1}{2\overline{a}_{01}}\left(\overline{a}_{00} - \frac{\overline{a}_{02}^2}{\overline{a}_{22}}\right), \\ y &= \overline{y} + \frac{\overline{a}_{02}}{\overline{a}_{22}}, \end{aligned}$$

te uvedimo oznaku $p := -\frac{\overline{a}_{02}}{\overline{a}_{22}}$, i dobivamo sljedeću jednadžbu

$$y^2 = 2px, p \neq 0. \tag{3.67}$$

VII: Krivulja 2. reda s jednadžbom (3.67) je *parabola* u izotropnoj ravnini.

b) ako je $\overline{a}_{01} = 0$, tada jednadžba (3.57) ima oblik

$$\overline{a}_{22}\overline{y}^2 + 2\overline{a}_{02}\overline{y} + \overline{a}_{00} = 0,$$

a kako je $\overline{a}_{22} \neq 0$ možemo je napisati u obliku

$$\overline{a}_{22}\left(\overline{y} + \frac{\overline{a}_{02}}{\overline{a}_{22}}\right)^2 + \overline{a}_{00} - \frac{\overline{a}_{02}^2}{\overline{a}_{22}} = 0.$$

Nakon što primjenimo translaciju danu s

$$\begin{aligned} x &= \overline{x} \\ y &= \overline{y} + \frac{\overline{a}_{02}}{\overline{a}_{12}} \end{aligned} \tag{3.68}$$

i stavimo da je $c_0 := \frac{1}{\overline{a}_{22}}\left(\frac{\overline{a}_{02}^2}{\overline{a}_{22}} - \overline{a}_{00}\right)$, dobivamo jednadžbu konike u normalnom obliku

$$y^2 = c_0. \tag{3.69}$$

Ovisno o c_0 imamo 3 slučaja za koniku:

VIII: ako je $c_0 > 0$: *Realni par paralelnih pravaca*
Ako uvedemo da je $c_0 =: a^2$, onda imamo da su jednadžbe pravaca dane s $(y + a)(y - a) = 0$.

IX: ako je $c_0 < 0$: *Konjugirano imaginarni par paralelnih pravaca*
Ako uvedemo da je $c_0 =: -a^2$, dobivamo jednadžbe tih pravaca $(y + ia)(y - ia) = 0$.

X: ako je $c_0 = 0$: *Dva pravca koji se podudaraju*

B) $a_{22} = 0$. U ovom slučaju jednadžba (3.52) ima oblik

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0. \tag{3.70}$$

Sada razlikujemo podslučajeve:

$B_1)$ $a_{12} \neq 0$

Ako na jednadžbu (3.70) primjenimo rotaciju danu s

$$\begin{aligned} x &= \overline{x} \\ y &= \alpha\overline{x} + \overline{y}, \end{aligned}$$

iz (3.56) dobivamo da je $\overline{a}_{11} = a_{11} + 2a_{12}\alpha$, tj. može se odabrati takav

$$\overline{a}_{11} = 0$$

pa je $\alpha = -\frac{a_{11}}{2a_{12}}$. Kako je $\overline{a}_{22} = a_{22}$ jednadžba krivulje je dana s

$$2\overline{a}_{12}\overline{xy} + 2\overline{a}_{01}\overline{x} + 2\overline{a}_{02}\overline{y} + \overline{a}_{00} = 0. \tag{3.71}$$

Primjenimo *translaciju* na (3.71) danu s

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \tilde{x} + a \\ \overline{y} &= \tilde{y} + b. \end{aligned}$$

da bi odabrali a i b takve da u transformiranoj jednadžbi x i y iščezavaju. Nakon kratkog računa se dobije da je $\overline{a}_{12}a + \overline{a}_{02} = 0$, $\overline{a}_{12}b + \overline{a}_{01} = 0$, a kako vrijedi da je $\overline{a}_{12} \neq 0$, imamo jedinstveno rješenje za a i b, $a = -\frac{\overline{a}_{02}}{\overline{a}_{12}}, b = -\frac{\overline{a}_{01}}{\overline{a}_{12}}$. Transformirana jednadžba je dana s

$$2\overline{a}_{12}\tilde{x}\tilde{y} = \frac{\overline{a}_{01}\overline{a}_{02}}{\overline{a}_{12}} - \overline{a_{00}}.$$

Stavimo li da je $k := \frac{\overline{a}_{01}\overline{a}_{02}}{\overline{a}_{12}^2} - \frac{a_{00}}{2\overline{a}_{12}}$ i zamijenimo li $\tilde{x}, \tilde{y}$ s x, y dobijemo jednadžbu

$$xy = k. \tag{3.72}$$

Sada, ovisno o k imamo sljedeće vrste krivulja 2. reda:

XI: ako je $k > 0$: *Specijalna hiperbola 1. vrste*

XII: ako je $k > 0$: *Specijalna hiperbola 2. vrste*

XII: ako je $k = 0$: *Par pravaca, od kojih je jedan izotropan*

B_2) $\overline{a}_{12} = 0$, $\overline{a}_{11} \neq 0$, $\overline{a}_{02} \neq 0$.

U ovom slučaju jednadžba (3.55) ima oblik

$$\overline{a}_{11}\overline{x}^2 + 2\overline{a}_{01}\overline{x} + 2\overline{a}_{02}\overline{y} + \overline{a}_{00} = 0,$$

te ju možemo zapisati kao

$$\overline{a}_{11}\left(\overline{x} + \frac{\overline{a}_{01}}{\overline{a}_{11}}\right)^2 + 2\overline{a}_{02}\left[\overline{y} + \frac{1}{2\overline{a}_{02}}\left(\overline{a}_{00} - \frac{\overline{a}_{01}^2}{\overline{a}_{11}}\right)\right] = 0.$$

Ako primjenimo *translaciju* danu s

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \overline{x} + \frac{\overline{a}_{01}}{\overline{a}_{11}},\\ \tilde{y} &= \overline{y} + \frac{1}{2\overline{a}_{02}}\left(\overline{a}_{00} - \frac{\overline{a}_{01}^2}{\overline{a}_{11}}\right)\end{aligned} \tag{3.73}$$

stavimo da je $R := -\frac{\overline{a}_{11}}{2\overline{a}_{02}}$ i ako umjesto $\tilde{x}, \tilde{y}$ pišemo x, y dobivamo jednadžbu

$$y = Rx^2, R \neq 0 \tag{3.74}$$

Jednadžba (3.74) je normalni oblik jednadžbe *kružnice*, te ju označavamo s brojem **XIV**.

B_3) $\overline{a}_{12} = 0, \overline{a}_{11} \neq 0, \overline{a}_{02} = 0$.

Sada jednadžba (3.55) je dana s

$$\overline{a}_{11}\overline{x}^2 + 2\overline{a}_{01}\overline{x} + \overline{a}_{00} = 0,$$

te je možemo zapisati kao $\overline{a}_{11}\left(\overline{x} + \frac{\overline{a}_{01}}{\overline{a}_{11}}\right)^2 + \overline{a}_{00} - \frac{\overline{a}_{01}^2}{\overline{a}_{11}} = 0$. Nakon što primjenimo transformaciju danu s

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \overline{x} + \frac{\overline{a}_{01}}{\overline{a}_{11}}\\ \tilde{y} &= \overline{y},\end{aligned} \tag{3.75}$$

stavimo da je $d_0 = \frac{1}{\overline{a}_{11}}\left(\frac{\overline{a}_{01}^2}{\overline{a}_{11}} - \overline{a}_{00}\right)$ te zamijenimo $\tilde{x}, \tilde{y}$ s x, y, dobivamo jednadžbu

$$x^2 = d_0. \tag{3.76}$$

Ovisno o d_0 imamo sljedeće vrste konika:

XV: $d_0 > 0$: *Par izotropnih pravaca*

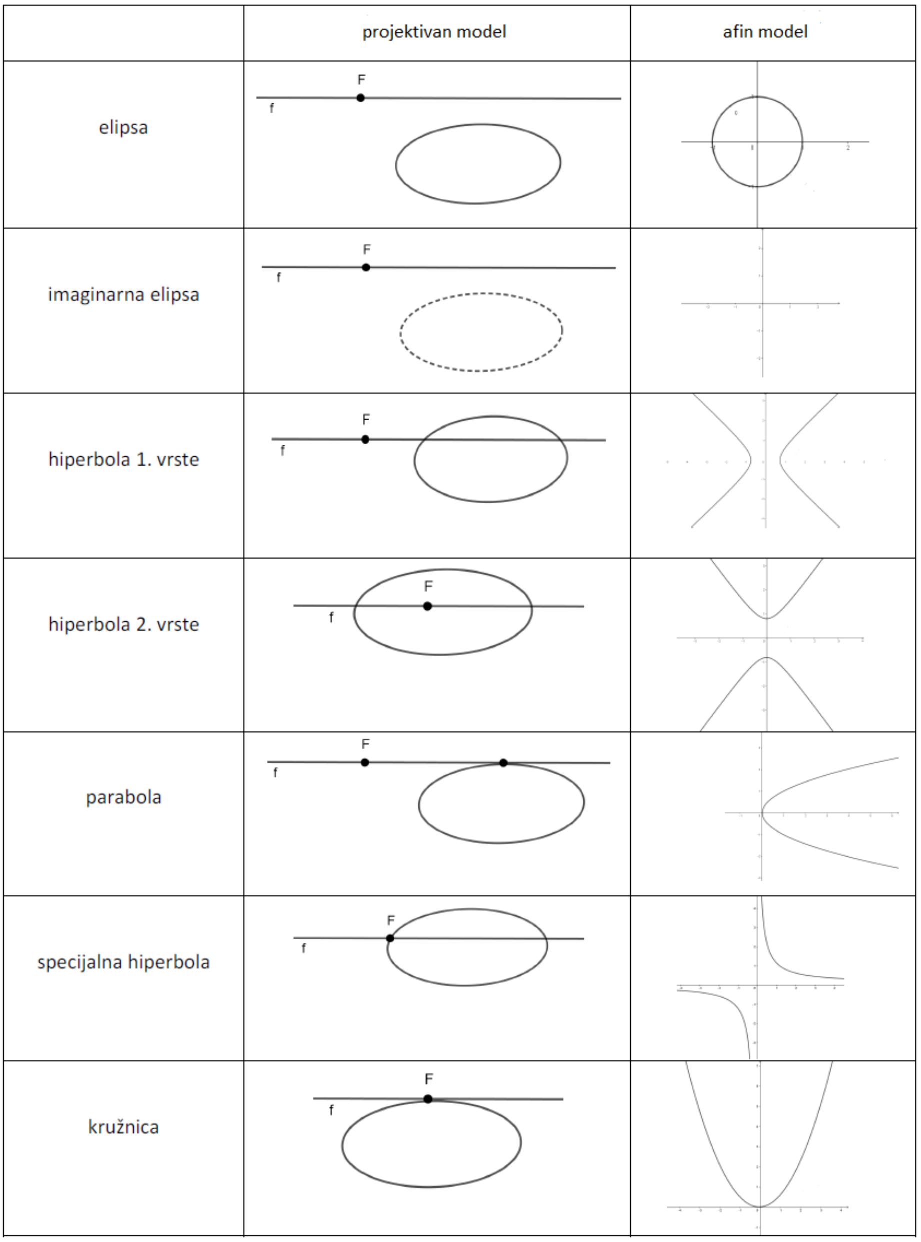
XVI: $d_0 < 0$: *Konjugirano imaginarni par izotropnih pravaca*

XVII: $d_0 = 0$: *Par izotropnih pravaca koji se podudaraju.*

Konačno, imamo sljedeći teorem:

Teorem 3.21 *U izotropnoj ravnini postoje 17 vrste krivulja 2. reda obzirom na grupu gibanja. Krivulje s oznakama I - IV, VII, XI, XII i XIV su neraspadnute konike i zovemo ih redom elipsa, imaginarna elipsa, hiperbola 1. i 2. vrste, parabola, specijalna hiperbola 1. i 2. vrste i kružnica. Ostalih 9 krivulja su raspadnute konike tj. parovi pravaca.*

Na slici 3.28 je dan tablični prikaz konika u projektivnom modelu te u afinom modelu izotropne ravnine.



Slika 3.28. Klasifikacija konika

Poglavlje 4

Sažetak

U radu se definirala izotropna ravnina kao realna projektivna ravnina u kojoj je metrika inducirana realnim pravcem f i s njim incidentnom točkom F. Nakon toga se odredila grupa sličnosti i grupa gibanja izotropne ravnine te su dani teoremi vezani za trokut u izotropnoj ravnini, a koji su analogni teoremima koje vrijede u euklidskoj ravnini. Također su dane analogije nekih pojmova u trokutu kao što su visina, simetrala kuta i težište. U trećem poglavlju se definirala krivulja 2. reda u izotropnoj ravnini te je dana njihova klasifikacija. Klasifikacija konika se napravila gledajući međusobni položaj konike i apsolutne figure. Također dani su teoremi vezani za kružnicu koji vrijede u izotropnoj ravnini, a koji su analogni teoremima u euklidskoj ravnini.

Summary

In this thesis, the isotropic plane was defined as the real projective plane in which the metric was induced by a real line f and a real point F incident with it. Subsequently, a group of similarities and a group of motions were determined. Some theorems related to a triangle in the isotropic plane were proven and they were compared with the analogues theorems in Euclidean plane. We defined analogue concepts of a triangle such as height, angle bisector and triangle centroid. In the third chapter, curve of the 2nd order in the isotropic plane were studied and their classification was given. The classification was made according to the position of the conic with respect to the absolute figure. Therefore, the intersection of the conic and the absolute line was observed. Moreover, the counterparts of some well known theorems related to a circle in the Euclidean plane were proved.

Životopis

Ivona Čatipović rođena je 22. 8. 1992. u Splitu. 2007. godine upisuje Prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Splitu, a 2011. godine upisuje se na Prirodoslovno-matematički fakultet, smjer Matematika. Godine 2014. se prebacuje na Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu te 2016. godine stječe akademski naziv sveučilišnog prvostupnika. Iste godine upisuje diplomski studij Matematike - nastavničkog smjera na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.

Literatura

[1] J. Beban-Brkić, V. Volenec, Butterflies in the Isotropic Plane. *KoG* **8** (2004), 29–35.

[2] R. Kolar-Šuper, Z. Kolar-Begović, V. Volenec, J. Beban-Brkić, Metrical relationships in a standard triangle in an isotropic plane. *Mathematical Communications* **10** (2005), 149–157.

[3] D. Palman, *Planimetrija*, Element, Zagreb, 1999

[4] D. Palman, *Projektivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1984

[5] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 2004

[6] H. Sachs, *Ebene Isotrope Geometrie*, Wieweg, Braunschweig-Wiesbaden, 1987