SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Andrija Dujaković

FILTRI I ULTRAFILTRI

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc.
Mladen Vuković

Zagreb, srpanj, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj diplomski rad posvećujem svim ljudima koji su mi bila ljubavna podrška tokom mog obrazovanja, a posebno tati Anti i mami Kati.

Sadržaj

Uvod

Glavna motivacija za ovaj rad su bila vrlo zanimljiva predavanja prof. Mladena Vukovića iz kolegija Teorija skupova. Jedna od zanimljivih hipoteza iz tog kolegija je generalizirana hipoteza kontinuuma koja se ne može niti dokazati niti opovrgnuti u Zermelo-Fraenkelovoj teoriji. Jedan od glavnih ciljeva ovog rada je dokazati hipotezu kontinuuma za singularne kardinale uz posebne uvjete. U tu svrhu ćemo detaljno obraditi pojmove fitra i ultrafiltra.

Filtre intuitivno možemo promatrati kao tražilicu. Pretpostavimo da tražimo nešto (točku ili podskup) na nekom skupu (prostoru) S. Nazovimo filter familiju podskupova od S sa elementima koji sadrže ono što tražimo. Hoćemo da filter posjeduje iduću prirodnu strukturu. Prazan skup očito ne sadrži ništa, pa se ne nalazi u filtru. Ako skupovi A i B sadrže ono što tražimo, tada i njihov presjek isto sadrži ono što tražimo. Isto tako, ako skup A sadrži ono što tražimo, tada sadrži i svaki nadskup od A. Ultrafilter je napredni filter u kojemu svaki podskup A sadrži ono što tražimo ili sadrži komplement od A.

Filtre ćemo definirati u poglavlju 1. U istom poglavlju ćemo definirati i pojam ideala, koji je dualan pojmu filtra. Dat ćemo pregled osnovnih svojstava filtra i ideala, te njihove primjere. U poglavlju 2 ćemo definirati pojam ultrafiltra, koji je zapravo proširenje filtra. Pokazuje se da ultrafiltri imaju veliku primjenu. Ultrafiltri se posebno koriste u topologiji, posebno u vezi s kompaktnim Hausdorfovim prostorima, te za konstrukciju ultraprodukata i ultrapotencija. Zanimljivo je da je Gödel ultrafiltre iskoristio u svom ontološkom dokazu o postojanju Boga. Jedna od primjena koju ćemo mi obrađivati je generalizacija limesa realnih brojeva. Druga važna primjena ultrafiltra koju ćemo koristiti je u dokazu Silverovog teorema.

U poglavlju 3 se prvo prisjećamo osnovnih činjenica vezanih za ordinalne brojeve. Definiramo neomeđene zatvorene skupove na ω_1, te također stacionarne skupove. Rezultate vezane za stacionarne skupove ćemo koristiti u poglavlju 4. U tom poglavlju ćemo definirati pojmove singularnih i regulranih kardinalnih brojeva, te pojam kofinalnosti ordinalnog broja. Dokazat ćemo Silverov teorem koji je zapravo generalizirana hipoteza kontinuuma za singularne kardinale, uz jedan poseban uvjet.

Poglavlje 1

Filtri i ideali

U prvom poglavlju definirat ćemo pojmove filtra i ideala. Pojmovi filtra i ideala su dualni. Poglavlje je podjeljeno na četiri točke koje imaju iduće naslove:
Definicije i primjeri filtra, Ideali, Svojstvo konačnih presjeka i Gustoća skupova.

1.1 Definicije i primjeri filtra

Filtri su osnova za proučavanje ultrafiltera koji su glavna tema drugog poglavlja. U ovoj točki prvo dajemo definiciju filtra, a onda navodimo više primjera filtra.

Definicija 1.1.1. *Neka je S neprazan skup. Kažemo da je familija skupova $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{S})$ filter na* S *ako zadovoljava sljedeće uvjete:*
(a) $S \in \mathcal{F}$ i $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
(b) ako vrijedi $X \in \mathcal{F}$ i $Y \in \mathcal{F}$, tada je $X \cap Y \in \mathcal{F}$,
(c) ako vrijedi $X \in \mathcal{F}$ i $X \subseteq Y \subseteq S$, tada je $Y \in \mathcal{F}$.

Primjer 1.1.2. Primjer trivijalnog filtra koji je ujedno i najmanji na nekom nepraznom skupu S je $\mathcal{F} = \{S\}$. Uvjeti definicije 1.1.1 su zadovoljeni trivijalno. Naime, sva tri uvjeta su zadovoljena jer je jedini izbor elementa iz $\mathcal{F}$ samo S.

Primjer 1.1.3. Neka je S neprazan skup i neka je $\emptyset \neq A \subseteq S$. Definiramo familiju skupova $\mathcal{F}$ ovako:

$$\mathcal{F} = \{X \subseteq S \mid A \subseteq X\}. \tag{1.1}$$

Promotrimo redom uvjete iz definicije filtra. Zbog toga što je $A \subseteq S$ tada $S \in \mathcal{F}$. Iz $A \neq \emptyset$ slijedi $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Ako su $X, Y \in \mathcal{F}$, tada je $A \subseteq X, Y$ zbog čega je $A \subseteq X \cap Y$, a onda slijedi da je $X \cap Y \in \mathcal{F}$. Ako je $X \in \mathcal{F}$ i $X \subseteq Y \subseteq S$, tada je $A \subseteq X \subseteq Y \subseteq S$, pa je $Y \in \mathcal{F}$.
Zaključujemo da je $\mathcal{F}$ filter na S.

Definicija 1.1.4. *Filter koji se može zapisati u obliku (1.1) zove se glavni filter. Filter koji nije glavni filter zvat ćemo neglavni filter.*

Primjer 1.1.5. Neka je $a \in S$. Pokazat ćemo da je glavni filter $\mathcal{F} = \{X \subseteq S \mid a \in X\}$ maksimalan tako što ćemo pokazat da ne postoji filter $\mathcal{F}'$ nad S takav da je $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}'$. Pretpostavimo da takav filter $\mathcal{F}'$ postoji. Tada postoji $X \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$. Očito tada $a \notin X$ zbog definicije skupa $\mathcal{F}$. Sada zbog $\{a\} \in \mathcal{F}$ imamo da je $\{a\} \in \mathcal{F}'$ iz čega slijedi da je $\emptyset = X \cap \{a\} \in \mathcal{F}'$ što je kontradikcija. Dakle, filter $\mathcal{F}$ je maksimalan.

U idućem primjeru ćemo pokazati da su svi filtri na konačnom skupu glavni.

Primjer 1.1.6. Neka je S konačan neprazan skup. Neka je $\mathcal{F}$ filter na S i pretpostavimo da $\mathcal{F}$ nije glavni. To znači da za svaki $A \subseteq S$ postoji $X \in \mathcal{F}$ takav da A nije podskup od X. Neka je $k = min\{|F| \mid F \in \mathcal{F}\}$. Takav k je dobro definiran jer je $\mathcal{F}$ konačan skup. Neka je F_0 jedan k-člani skup takav da je $F_0 \in \mathcal{F}$. Sada za taj skup F_0 postoji skup $F \in \mathcal{F}$ takav da vrijedi $F_0 \nsubseteq F$. Sada iz ovoga i definicije filtra imamo da je $F_0 \cap F \in \mathcal{F}$. Iz definicije broja k imamo da je $|F_0 \cap F| \geq k$. S druge strane, budući da je $F_0 \cap F \subseteq F_0$ i $|F_0| = k$, tada je $|F_0 \cap F| \leq k$. Time smo dobili $|F_0 \cap F| = k$, a onda iz toga i $|F_0| = k$ slijedi $F_0 = F$ čime je dobivena kontradikcija. Zaključujemo da su svi filtri na konačnom skupu glavni.

Sada ćemo dati primjer filtra koji nije glavni.

Primjer 1.1.7. Neka je S beskonačan skup i neka je $\mathcal{F} = \{X \subseteq S \mid S \setminus X \text{ je konačan}\}$. Promotrimo uvjete iz definicije filtra.
Budući da je za $X = S$, skup $S \setminus X$ prazan, a onda i konačan, tada je $S \in \mathcal{F}$. Zatim, budući da je za $X = \emptyset$ skup $S \setminus X$ beskonačan, tada $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Ako su $X, Y \in \mathcal{F}$, tada su $S \setminus X$ i $S \setminus Y$ konačni. Slijedi da je $S \setminus (X \cap Y) = (S \setminus X) \cup (S \setminus Y)$ konačan skup, pa je $X \cap Y \in \mathcal{F}$. Ako je $X \in \mathcal{F}$ i $X \subseteq Y \subseteq S$, tada je $S \setminus Y \subseteq S \setminus X$. Iz toga slijedi da je $S \setminus Y$ konačan skup, pa je $Y \in \mathcal{F}$. Stoga je $\mathcal{F}$ filter na S.

Pretpostavimo da je $\mathcal{F}$ glavni filter. Tada postoji skup $A \subseteq S$ takav da za svaki $X \in \mathcal{F}$ vrijedi $A \subseteq X$. Budući da je $A \in \mathcal{F}$, vrijedi da je $S \setminus A$ konačan, pa je A beskonačan. Neka je $a \in A$ proizvoljan. Skup $S \setminus (A \setminus \{a\}) = (S \setminus A) \cup \{a\}$ je konačan, iz čega slijedi da je $A \setminus \{a\} \in \mathcal{F}$. Sada iz $A \nsubseteq A \setminus \{a\}$ dobivamo kontradikciju. Zaključujemo da $\mathcal{F}$ nije glavni filter.

Pokazat ćemo sada da glavni filtri koji su generirani s više od jednog elementa ne mogu biti maksimalni.

Primjer 1.1.8. Neka je S neprazan skup i neka je $A \subseteq S$, takav da vrijedi $|A| > 1$. Neka je $\mathcal{F} = \{X \subseteq S \mid A \subseteq X\}$ filter generiran s A. Neka je $a \in A$ proizvoljan. Neka je $\mathcal{F}' = \{X \subseteq S \mid a \in X\}$ filter generiran s $\{a\}$. Budući da je $\{a\} \subseteq A \subseteq X$, za svaki $X \in \mathcal{F}$, tada imamo $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$. Iz $A \nsubseteq \{a\}$ slijedi da je $\mathcal{F}' \neq \mathcal{F}$. Zbog toga je $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}'$, pa $\mathcal{F}$ nije maksimalan.

Iz primjera 1.1.5 i primjera 1.1.8 zaključujemo iduće:
Ako je S neprazan skup i $\mathcal{F} = \{X \subseteq S \mid A \subseteq X\}$ glavni filter na S, za neki $A \subseteq S$, tada je $\mathcal{F}$ maksimalan filter ako i samo ako je A jednočan skup.
Pitanje je postoji li maksimalni filtri koji nisu glavni. Na to pitanje ćemo dati odgovor u idućem poglavlju.

Za kraj ove točke pokažimo iduću propoziciju.

Propozicija 1.1.9. *Neka je S neprazan skup, te neka je $\mathcal{F}$ neprazna familija filtera na S. Tada je*

$$F' = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$$

filter na S.

Dokaz. Za dokaz propozicije treba pokazati da F' zadovoljava uvjete iz definicije filtra.
Budući da je $\mathcal{F}$ skup filtera na S, zato za svaki $F \in \mathcal{F}$ vrijedi $S \in F$, stoga vrijedi i $S \in F'$.
Za svaki $F \in \mathcal{F}$ vrijedi $\emptyset \notin F$, pa je $\emptyset \notin F'$.
Neka su $X, Y \in F'$. Tada je $X, Y \in F$, za svaki $F \in \mathcal{F}$. Sada je $X \cap Y \in F$, za svaki $F \in \mathcal{F}$, jer je F filter na S, iz čega je $X \cap Y \in F'$.
Neka je $X \in F'$ i $X \subseteq Y$. Iz toga imamo da je $X \in F$, za svaki $F \in \mathcal{F}$ i zato je $Y \in F$, za svaki $F \in \mathcal{F}$. Slijedi da je $Y \in F'$.
Stoga je F' filter na S. □

1.2 Ideali

U ovoj točki prvo definiramo pojam ideala koji je potpuno dualan pojmu filtra. Zatim, dajemo neke primjere ideala, te navodimo osnovna svojstva.

Definicija 1.2.1. *Neka je S neprazan skup. Za familiju skupova $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(S)$ kažemo da je ideal na S ako zadovoljava sljedeće uvjete:*
(a) $\emptyset \in \mathcal{I}$ i $S \notin \mathcal{I}$,
(b) ako su $X, Y \in \mathcal{I}$, onda je $X \cup Y \in \mathcal{I}$,
(c) ako je $Y \in \mathcal{I}$ i $X \subseteq Y$, onda je $X \in \mathcal{I}$.

Primjer 1.2.2. Primijetimo da je $\mathcal{I} = \{\emptyset\}$ ideal. Prvi uvjet iz definicije za ideal vrijedi jer je jedini element od $\mathcal{I}$ samo $\emptyset$. Nadalje je unija praznog skupa sa samim sobom opet prazan, te podskup od praznog skupa opet prazan, pa je opet u $\mathcal{I}$, tj. vrijede preostala dva uvjeta. Ovaj ideal nazivamo trivijalni ideal.

Definicija 1.2.3. *Neka je S proizvoljan neprazan skup i A neki pravi podskup od S. Lako se pokaže da je familija skupova $\{X \mid X \subseteq A\}$ ideal. Svaki ideal takvog oblika nazivamo glavni ideal.*

Ako je $\mathcal{F}$ filter na S, tada je $\mathcal{I} = \{S \setminus X \mid X \in \mathcal{F}\}$ ideal na S. Vrijedi i obratno, tj. ako je $\mathcal{I}$ ideal na S, tada je $\mathcal{F} = \{S \setminus X \mid X \in \mathcal{I}\}$ filter na S. Za ta dva objekta kažemo da su dualni jedan drugome.

Primjer 1.2.4. Neka je S beskonačan skup i $\mathcal{I}$ familija svih konačnih podskupova od S, tj. $\mathcal{I} = \{X \subseteq S \mid X \text{ je konačan}\}$. Prazan skup je konačan, pa se nalazi u $\mathcal{I}$, a S je beskonačan, pa se ne nalazi u $\mathcal{I}$. Ako su $X, Y \in \mathcal{I}$, tada su X i Y konačni. Slijedi da je $X \cup Y$ konačan, pa je $X \cup Y \in \mathcal{I}$. Ako je $Y \in \mathcal{I}$ i $X \subseteq Y$, tada je X konačan skup kao podskup konačnog skupa, pa je $X \in \mathcal{I}$. Dakle, familija $\mathcal{I}$ je ideal.

Ideal $\mathcal{I}$ iz prethodnog primjera i filter $\mathcal{F}$ iz primjera 1.1.7 su dualni jedan drugome.

Dajemo sada dva primjera ideala koja nisu glavni.

Primjer 1.2.5. Neka je S neprebrojiv skup i definiramo $\mathcal{I} = \{X \subset S \mid |X| \leq \aleph_0\}$. Pokažimo da vrijede uvjeti iz definicije ideala. Očito je da $\emptyset \in \mathcal{I}$ i $S \notin \mathcal{I}$, pa vrijedi prvi uvjet. Drugi i treći uvjet vrijede jer jer podskup najviše prebrojivog skupa opet najviše prebrojiv i jer je konačna unija najviše prebrojivih skupova opet najviše prebrojiv skup. Dakle $\mathcal{I}$ je ideal na S.
Pretpostavimo da je $\mathcal{I}$ glavni ideal. Tada postoji skup $A \subseteq S$ takav da za svaki $X \in \mathcal{I}$ vrijedi $X \subseteq A$. Vidimo da je A najviše prebrojiv jer je $A \in \mathcal{I}$. Skup S je neprebrojiv, pa postoji injekcija $f : \mathbb{R} \to S$. Očito je skup $f[\mathbb{R}]$ neprebrojiv.
Neka je $\mathbb{Z}$ skup cijelih brojeva. Za $x \in [0, 1\rangle$ neka je skup $\mathbb{Z}_x = \mathbb{Z} + x = \{z + x \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

Za svaki $x \in [0, 1\rangle$ skup $S_x = f[\mathbb{Z}_x]$ je očito prebrojiv. Stoga je $S_x \in \mathcal{I}$, te je i $S_x \subseteq A$, za svaki $x \in [0, 1\rangle$. Sada imamo

$$f[\mathbb{R}] = f\left[\bigcup_{x\in[0,1\rangle} \mathbb{Z}_x\right] = \bigcup_{x\in[0,1\rangle} f[\mathbb{Z}_x] \subseteq A,$$

što je kontradikcija sa činjenicom da je A najviše prebrojiv. Dakle $\mathcal{I}$ nije glavni ideal.

Primjer 1.2.6. Neka je S beskonačan skup i neka je $Z \subseteq S$ takav da su Z i $S \setminus Z$ beskonačni. Neka je $\mathcal{I} = \{X \subseteq S \mid X \setminus Z \text{ je konačan}\}$. Očito svaki $X \in \mathcal{I}$ sadrži konačno mnogo elemenata

iz $S \setminus Z$.
Očito je $\emptyset \in \mathcal{I}$, te $S \notin \mathcal{I}$. Ako su $A, B \in \mathcal{I}$, tada su $A \setminus Z$ i $B \setminus Z$ konačni. Slijedi da je $(A \cup B) \setminus Z = (A \setminus Z) \cup (B \setminus Z)$ konačan skup, pa je $A \cup B \in \mathcal{I}$. Ako je $A \in \mathcal{I}$ i $B \subseteq A$, tada je $A \setminus Z$ konačan, pa je $B \setminus Z$ konačan. Slijedi da je $B \in \mathcal{I}$. Dakle, $\mathcal{I}$ je ideal na S.
Pretpostavimo da je $\mathcal{I}$ glavni ideal. To znači da postoji $A \subseteq S$ takav da vrijedi $X \subseteq A$, za svaki $X \in \mathcal{I}$. Iz toga odmah imamo da je $A \in \mathcal{I}$, te $A \setminus Z$ je konačan. Za svaki $x \in S \setminus Z$ očito vrijedi $\{x\} \in \mathcal{I}$. Tada je posebno $x \in A$ za svaki $x \in S \setminus Z$, tj. $S \setminus Z \subseteq A$. Time smo dobili kontradikciju sa činjenicom da A sadrži najviše konačno mnogo elemenata iz $S \setminus Z$. Dakle $\mathcal{I}$ nije glavni ideal.

Za kraj ove točke u sljedećoj propoziciji ističemo da je unija ideala opet ideal.

Propozicija 1.2.7. *Neka je S neprazan skup, te neka je $\mathcal{I}$ neprazna familija ideala na S. Tada je*

$$I' = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I$$

ideal na S.

Istaknimo da je prethodna propozicija sasvim analogna propoziciji 1.1.9. Zbog toga izostavljamo dokaz.

1.3 Svojstvo konačnih presjeka

U ovoj točki definiramo svojstvo konačnih presjeka na familiji skupova. Vidjet ćemo da se svaka familija sa tim svojstvom može proširiti do filtra i da svaki podskup nekog filtra ima to isto svojstvo.

Definicija 1.3.1. *Neka je $\mathcal{G}$ neprazna familija skupova. Kažemo da $\mathcal{G}$ ima svojstvo konačnih prjesjeka ako svaka konačna i neprazna podfamilija $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ od $\mathcal{G}$ ima neprazan presjek, tj. vrijedi $X_1 \cap \cdots \cap X_n \neq \emptyset$.*

Iz prethodne definicije i prva dva uvjeta definicije filtra se lako dobije da svaki filter ima svojstvo konačnih presjeka. Zapravo, svojstvo konačnih presjeka vrijedi za bilo koju podfamiliju filtra. Obratno, svaki skup koji ima svojstvo konačnih presjeka je podfamilija nekog filtra. To iskazujemo u sljedećoj lemi.

Lema 1.3.2. *Neka je S neprazan skup i neka je $\mathcal{G}$ neprazna familija skupova na S sa svojstvom konačnih presjeka. Tada postoji filter $\mathcal{F}$ na S takav da je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.*

Dokaz. Definiramo $\mathcal{F}$ kao familiju svih $X \subseteq S$ sa svojstvom da postoji konačan podskup $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ od $\mathcal{G}$ takav da vrijedi $X_1 \cap \cdots \cap X_n \subseteq X$. Pokažimo da je $\mathcal{F}$ filter na S.

Familija $\mathcal{G}$ ima svojstvo konačnog presjeka, pa očito $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Opet iz svojstva konačnih presjeka i toga da je $\mathcal{G}$ neprazna familija skupova na S slijedi da postoji neprazan $X_0 \in \mathcal{G}$ takav da je $X_0 \subseteq S$. Zbog toga je $S \in \mathcal{F}$.
Ako su $X, Y \in \mathcal{F}$ tada postoje konačni podskupi $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ i $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_k\}$ od $\mathcal{G}$ takvi da vrijedi $X_1 \cap \cdots \cap X_n \subseteq X$ i $Y_1 \cap \cdots \cap Y_k \subseteq Y$. Slijedi da je $X_1 \cap \cdots \cap X_n \cap Y_1 \cap \cdots \cap Y_k \subseteq X \cap Y$, pa je $X \cap Y \in \mathcal{F}$.
Neka je $X \in \mathcal{F}$ i Y takav da je $X \subseteq Y$. Budući da je $X \in \mathcal{F}$ postoji konačni podskup $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ od $\mathcal{G}$ takav da vrijedi $X_1 \cap \cdots \cap X_n \subseteq X$. Zbog toga i $X \subseteq Y$ dobijamo da je $X_1 \cap \cdots \cap X_n \subseteq Y$. Stoga je $Y \in \mathcal{F}$. Zaključujemo da je $\mathcal{F}$ filter na S.
Za svaki $X \in \mathcal{G}$ vrijedi $X \subseteq X$, zbog čega je $X \in \mathcal{F}$. Slijedi da je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Zaključujemo da je $\mathcal{F}$ filter koji sadrži $\mathcal{G}$. □

Pokažimo sada da je filter konstruiran u prethodnoj lemi najmanji filter koji sadrži familiju $\mathcal{G}$.

Propozicija 1.3.3. *Neka je S neprazan skup i neka je $\mathcal{G}$ neprazna familija skupova na S sa svojstvom konačnih presjeka.*
Neka je $\mathcal{F} = \{X \subseteq S \mid (\exists n \in \mathbb{N})(\exists X_1, \dots, X_n \in \mathcal{G})\ X_1 \cap \cdots \cap X_n \subseteq X\}$.
Neka je $\mathcal{F}'$ filter na skupu S koji sadrži $\mathcal{G}$. Tada vrijedi $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$.

Dokaz. Neka je $X \in \mathcal{F}$ *proizvoljan*. Tada iz definicije familije $\mathcal{F}$ slijedi da postoje $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{G}$ takvi da $X_1 \cap \cdots \cap X_n \subseteq X$. Budući je po pretpostavci $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}'$ tada imamo $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{F}'$.
No, $\mathcal{F}'$ je filter, pa je zatvoren na konačne presjeke. Posebno, imamo $X_1 \cap \cdots \cap X_n \in \mathcal{F}'$. Sada iz $X_1 \cap \cdots \cap X_n \in \mathcal{F}'$ i $X_1 \cap \cdots \cap X_n \subseteq X \subseteq S$, te činjenice da je $\mathcal{F}'$ filter slijedi $X \in \mathcal{F}'$. □

1.4 Gustoća skupova

U ovoj točki uvodimo pojam gustoće skupova. Gustoća će nam biti bitna za iduće poglavlje u kojem ćemo definirati netrivijalnu mjeru na $\mathbb{N}$. Kasnije ćemo vidjeti primjer ideala definiranog pomoću gustoće.

Definicija 1.4.1. *Neka je A neki podskup skupa prirodnih brojeva. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiramo $A(n) = |A \cap \{0, 1, \dots, n-1\}|$, tj. $A(n)$ označava broj elemenata skupa A koji su manji od n. Za limes $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$, ako postoji, kažemo da se zove gustoća od A, i označavamo ga sa $d(A)$.*

U nastavku dajemo primjer skupova sa gustoćom i njihove gustoće.

Primjer 1.4.2. Neka je $p \geq 1$ prirodan broj. Definiramo skup $A = \{kp \mid k \in \mathbb{N}\}$. Drugim riječima, A je skup svih prirodnih brojeva koji su djeljivi sa p. Pokažimo da postoji gustoća skupa A i da je $d(A) = \frac{1}{p}$.
Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Podijelimo niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{A(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ na blokove veličine p. Neka je $k \in \mathbb{N}$. Tada k-ti blok niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sadrži članove $\frac{k}{kp+l}$, $l = 1, 2, \ldots, p$. Po Arhimedovom aksiomu postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $1 < \varepsilon(k_0 + 1)p$. Neka je $n \geq pk_0$. Tada postoje k i l prirodni brojevi takvi da vrijedi $n = kp + l$, gdje je $0 < l \leq p$ i $k \geq k_0$. Sada vrijedi $|\frac{k}{kp+l} - \frac{1}{p}| \leq \frac{1}{p} - \frac{k}{kp+p} = \frac{1}{p(k+1)} \leq \frac{1}{p(k_0+1)} < \varepsilon$. Zaključujemo da limes postoji i da je jednak $\frac{1}{p}$.

Svaki konačni skup ima gustoću jednaku 0. Postoje i beskonačni skupovi sa gustoćom 0. Dajemo jedan primjer takvog skupa.

Primjer 1.4.3. Definiramo $A = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ definiramo $A_k = \{l \cdot 2^k \mid l \in \mathbb{N}\}$. U prošlom primjeru smo pokazali da skupovi A_k imaju gustoću za svaki $k \in \mathbb{N}$ i da je $d(A_k) = 2^{-k}$. Fiksirajmo $k \in \mathbb{N}$ i stavimo $B_k = \{1, 2, \ldots, 2^{k-1}\}$. Imamo da je $A \setminus B_k \subseteq A_k$, tj. $A \subseteq A_k \cup B_k$. Sada slijedi da je

$$A(n)/n \leq A_k(n)/n + B_k(n)/n.$$

Po prethodnom primjeru niz $(A_k(n)/n)_{n\in\mathbb{N}}$ postoji i iznosi 2^{-k}. Skup B_k je konačan, pa je $\lim\limits_{n\to\infty} B_k(n) = 0$. Stoga je limes $\lim\limits_{n\to\infty} A_k(n)/n + B_k(n)/n = 2^{-k}$. Iz ovoga vidimo da je niz $(A(n)/n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen odozgo sa 2^{-k} pa je i skup gomilišta ograničen odozgo sa 2^{-k}, stoga je $\limsup\limits_{n\to\infty} A(n)/n \leq 2^{-k}$. Sada kada k pustimo u beskonačno slijedi da je $\limsup\limits_{n\to\infty} A(n)/n \leq 0$. Zbog $A(n)/n \geq 0$ slijedi da $\lim\limits_{n\to\infty} A(n)/n$ postoji i da iznosi 0. Dakle, A je beskonačan skup sa fustoćom 0.

Neka su $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Ako je $A \subseteq B$, tada je $A(n) \leq B(n)$. Stoga, ako A i B imaju gustoću, tada je $d(A) \leq d(B)$. Posebno, ako je $d(B) = 0$, tada je $d(A) = 0$.
Također, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $(A \cup B)(n) \leq A(n) + B(n)$ jer je $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \leq |A| + |B|$. Ako su A i B disjunktni, tada vrijedi jednakost. Stoga u slučaju da gustoće postoje vrijedi $d(A \cup B) \leq d(A) + d(B)$. Jednakost opet vrijedi ako su skupovi A i B disjunktni. Ako je $d(A) = d(B) = 0$, tada je $d(A \cup B) = 0$. Iz prethodnog razmatranja dat ćemo primjer ideala na $\mathbb{N}$ koji ima gustoću 0.

Primjer 1.4.4. Definiramo $\mathcal{I}_d = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid d(A) = 0\}$. Prazan skup je gustoće 0 pa je element od $\mathcal{I}_d$, a skup $\mathbb{N}$ ima gustoću 1, pa ne pripada $\mathcal{I}_d$. Neka su $B \in \mathcal{I}_d$ i $A \subseteq B$. Tada po teoremu o sendviču i $0 \leq A(n) \leq B(n)$, te $d(B) = 0$ vrijedi $d(A) = 0$. Stoga je $A \in \mathcal{I}_d$. Ako su $A, B \in \mathcal{I}_d$, tada opet po teoremu o sendviču, $(A \cup B)(n) \leq A(n) + B(n)$, i $d(A) = d(B) = 0$ zaključujemo da je $d(A \cup B) = 0$. Stoga je $A \cup B \in \mathcal{I}_d$. Zaključujemo da je $\mathcal{I}_d$ ideal na $\mathbb{N}$. Ideal $\mathcal{I}_d$ sadrži sve konačne skupove.

Napomenimo da ne mora svaki A podskup od $\mathbb{N}$ imati gustoću. U sljedećem primjeru navodimo primjer takvog skupa.

Primjer 1.4.5. Definiramo skup A ovako: $A = \{2^k - 3 + l \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, l \in \{1, 2, \ldots, 2^{k-1}\}\}$. Radi preglednosti zapišimo A na način da vidimo prvih nekoliko čanova:

$$A = \{0, \cancel{1}, 2, 3, \cancel{4}, \cancel{5}, 6, 7, 8, 9, \cancel{10}, \cancel{11}, \cancel{12}, \cancel{13}, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, \cancel{22}, \ldots\}.$$

Drugim riječima za svaki $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, skup A sadrži brojeve $2^k - 3 + 1, \ldots, 2^k - 3 + 2^{k-1}$ i ne sadrži brojeve $2^k - 3 + 2^{k-1} + 1, \ldots, 2^k - 3 + 2^k$.
Za svaki $k \geq 1$ vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned}|A \cap \{0, \ldots 2^k - 3 + 1\}| &= \sum_{i=1}^{k-1} |\{2^i - 3 + 1, \ldots, 2^i - 3 + 2^{i-1}| + |\{2^k - 3 + 1\}| = \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} 2^{i-1} + 1 = \sum_{i=0}^{k-2} 2^i + 1 = \frac{2^{k-1} - 1}{2 - 1} + 1 = 2^{k-1}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Očito

$$\begin{aligned}|A \cap \{0, \ldots 2^k - 3 + 2\}| &= 2^{k-1} + 1, \\ &\vdots \\ |A \cap \{0, \ldots 2^k - 3 + 2^{k-1}\}| &= 2^{k-1} - 1 + 2^{k-1} = 2^k - 1.\end{aligned}$$

Zatim, za svaki $j \in \{1, \ldots, 2^{k-1}\}$ vrijedi:

$$|A \cap \{0, \ldots 2^k - 3 + 2^{k-1} + j\}| = 2^k - 1.$$

Posebno,

$$|A \cap \{0, \ldots 2^k - 3 + 2^{k-1} + 2^{k-1}\} = 2^k - 1. \tag{1.3}$$

Definiramo niz $(a_n)_{n \geq 1}$ sa: $a_n = \frac{A(n)}{n}$. Da bi pokazali da skup A nema gustoću dovoljno je naći dva različita gomilišta niza $(a_n)_{n \geq 1}$. Uzmimo podniz $(b_k)_{k \geq 1}$ od $(a_n)_{n \geq 1}$ definiran sa: $b_k = a_{1+2^k-3+2^k}$, za $k \geq 1$. Pokažimo da je $b_k = 1/2$, za svaki $k \geq 1$. Zbog (1.3) vrijedi

$$b_k = a_{1+2^k-3+2^k} = \frac{A(1 + 2^k - 3 + 2^k)}{1 + 2^k - 3 + 2^k} = \frac{|A \cap \{0, \ldots, 2^k - 3 + 2^k\}|}{1 + 2^k - 3 + 2^k} = \frac{2^k - 1}{1 + 2^k - 3 + 2^k} = \frac{1}{2}.$$

Dobili smo $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 1/2$, pa je $1/2$ jedno gomilište niza $(a_n)_{n\geq 1}$.
Nadalje, uzmimo podniz $(c_k)_{k\geq 1}$ od $(a_n)_{n\geq 1}$ definiran sa: $c_k = a_{1+2^k-3+2^{k-1}}$, za $k \geq 1$.
Iz (1.2) slijedi

$$c_k = a_{1+2^k-3+2^{k-1}} = \frac{A(1+2^k-3+2^{k-1})}{1+2^k-3+2^{k-1}} = \frac{|A\cap\{0,\dots,2^k-3+2^{k-1}\}|}{1+2^k-3+2^{k-1}} = \frac{2^k-1}{3\cdot 2^{k-1}-2}.$$

Lako se pokaže da je $(c_k)_{k\geq 1}$ konvergentan niz i da je $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = 2/3$. Dobili smo drugo gomilište niza $(a_n)_{n\geq 1}$ koje je različito od prvog, pa zaključujemo da skup A nema gustoću.

Poglavlje 2

Ultrafiltri

U ovom poglavlju promatrat ćemo proširenja filtra koja se nazivaju ultrafiltri. Pomoću ultrafiltera ćemo definirati generalizirani limes niza realnih projeva. Rezultati ovog poglavlja će nam biti od značaja prilikom dokaza Silverovog teorema.
Ovo poglavlje je razdijeljeno na tri točke koje imaju sljedeće naslove: Definicije ultrafiltra i primjeri, Mjera i $\mathcal{U}$-limes.

2.1 Definicija ultrafiltra i primjeri

Na početku ove točke definirat ćemo pojam ultrafiltra i primarnog ideala. Zatim ćemo nizom propopzicija i lema istaknuti njihova osnovna svojstva.

Definicija 2.1.1. *Za filter $\mathcal{U}$ na $S \neq \emptyset$ kažemo da je ultrafilter ako za svaki $X \subseteq S$ vrijedi $X \in \mathcal{U}$ ili $S \setminus X \in \mathcal{U}$.*
Za ideal $\mathcal{I}$ na $S \neq \emptyset$ kažemo da je primarni ideal ako za svaki $X \subseteq S$ vrijedi $X \in \mathcal{I}$ ili $S \setminus X \in \mathcal{I}$.

Idućom propozicijom pokazujemo na koji način su ultrafiltri i primarni ideali povezani.

Propozicija 2.1.2. Neka je S neprazan skup i neka je $\mathcal{U}$ ultrafilter na S. Tada je $\mathcal{I} = \mathcal{P}(S) \setminus \mathcal{U}$ primarni ideal.

Dokaz. Budući da je $\mathcal{U}$ filter tada znamo da je $\mathcal{I} = \mathcal{P}(S) \setminus \mathcal{U}$ je ideal.
Svojstvo da za svaki $X \subseteq S$ vrijedi da je ili $X \in \mathcal{I}$ ili $S \setminus X \in \mathcal{I}$ je očito. Slijedi da je $\mathcal{I}$ primarni ideal. □

Kroz iduću lemu stičemo bitnu karaktizaciju ultrafiltra.

Lema 2.1.3. *Filter $\mathcal{F}$ na S je ultrafilter ako i samo ako je $\mathcal{F}$ maksimalan filter na S.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{F}$ ultrafilter i neka je $\mathcal{F}'$ filter na S koji je pravi nadskup od $\mathcal{F}$. Tada postoji $X \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$. Budući da je $\mathcal{F}$ ultrafilter i $X \notin \mathcal{F}$ slijedi da je $S \setminus X \in \mathcal{F}$, pa je i $S \setminus X \in \mathcal{F}'$. Sada iz činjenice da je $\mathcal{F}'$ filter slijedi da je $\emptyset = X \cap (S \setminus X) \in \mathcal{F}'$ što je kontradikcija.

Obratno, neka je $\mathcal{F}$ filter koji nije ultrafilter. To znači da postoji $X \subseteq S$ takav da X i $S \setminus X$ nisu elementi od $\mathcal{F}$. Neka je $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \{X\}$. Tvrdimo da $\mathcal{G}$ ima svojstvo konačnih presjeka.
Neka su $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{F}$. Budući da je $\mathcal{F}$ filter to je $Y = X_1 \cap \cdots \cap X_n \in \mathcal{F}$. Pokažimo da je $Y \cap X \neq \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $Y \cap X = \emptyset$. Slijedi da je $S \setminus X \supseteq Y$. Zbog toga što je $\mathcal{F}$ filter imamo da je $S \setminus X \in \mathcal{F}$, što je kontradikcija zbog pretpostavke da $S \setminus X \notin \mathcal{F}$. Stoga je $X_1 \cap \cdots \cap X_n \cap X \neq \emptyset$, čime smo dokazali tvrdnju.
Sada po lemi 1.3.2 postoji filter $\mathcal{F}'$ na S takav da je $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{G} \supsetneq \mathcal{F}$, iz čega imamo da $\mathcal{F}$ nije maksimalan. □

Sljedeći teorem nam govori da je bilo koji filter moguće nadopuniti do ultrafiltra. Dokaz koristi Zornovu lemu. Želimo istaknuti da se dokaz teorema ne može provesti bez korištenja nekog ekvivalenta aksioma izbora. Dajemo najprije dodatni rezultat kojeg ćemo iskoristiti u dokazu teorema.

Lema 2.1.4. *Neka je C skup filtera na S takav da za svaki $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in C$ vrijedi $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ ili $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$. Tada je $\bigcup C$ također filter na S.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{F} = \bigcup C$. Očito vrijedi $\emptyset \notin \mathcal{F}$ i $S \in \mathcal{F}$. Ako su $A, B \in \mathcal{F}$, tada postoje filtri $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in C$ takvi da $A \in \mathcal{F}_1$ i $B \in \mathcal{F}_2$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$. Slijedi da je $A, B \in \mathcal{F}_2$, pa je $A \cap B \in \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}$. Ako su $A \in \mathcal{F}$ i $B \supseteq A$, tada postoji $\mathcal{F}_1$ takav da $A \in \mathcal{F}_1$. Iz činjenice da je $\mathcal{F}_1$ filter i toga da je $A \subseteq B$ slijedi $B \in \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$. Zaključujemo da je $\mathcal{F}$ filter na S. □

Teorem 2.1.5. *Neka je S neprazan skup. Tada se svaki filter na S može proširiti do ultrafiltra na S.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{F}_0$ filter na S. Pronaći ćemo filter $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}_0$ koji je maksimalan.
Neka je P skup svih filtera $\mathcal{F}$ na S takav da $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}_0$. Promatramo parcijalno uređen skup $(P, \subset)$. Po lemi 2.1.4 svaki lanac C u P ima gornju među (to je $\bigcup C$). Primjenom Zornove leme zaključujemo da $(P, \subset)$ ima maksimalan element $\mathcal{F}$. Iz definicije skupa P jasno je da je $\mathcal{F}$ maksimalan na S i da je $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}_0$. Po lemi 2.1.3 je $\mathcal{F}$ ultrafilter. □

U prethodnom poglavlju smo vidjeli da postoje glavni filtri koji su maksimalni. Drugim riječima, postoje glavni ultrafiltri. Pitanje koje smo postavili u prethodnom poglavlju je, postoje li maksimalni filtri koji nisu glavni, tj. postoje li neglavni ultrafiltri. Na to pitanje odgovaramo u idućoj propoziciji.

Propozicija 2.1.6. *Neka je S beskonačan skup i neka je $\mathcal{F} = \{X \subseteq S \mid S \setminus X$ je konačan$\}$. Tada postoji neglavni ultrafilter koji sadrži $\mathcal{F}$. Obratno, ako je $\mathcal{U}$ neglavni ultrafilter na S, tada on sadrži $\mathcal{F}$.*

Dokaz. Pokazali smo u primjeru 1.1.7 da je $\mathcal{F}$ neglavni filter. Ako je $\mathcal{U}$ ultrafilter koji sadrži $\mathcal{F}$, tada $\mathcal{U}$ ne može biti glavni. Po teoremu 2.1.5 filter $\mathcal{F}$ se može proširiti do ultrafiltra $\mathcal{U}$. Slijedi da je $\mathcal{U}$ neglavni ultrafilter.
Da bi pokazali da neglavni ultrafilter $\mathcal{U}$ sadrži filter $\mathcal{F}$, pokažimo prvo da $\mathcal{U}$ sadrži samo beskonačne skupove.
Neka je $\mathcal{U}$ neglavni ultrafilter na beskonačnom skupu S. Iz leme 2.1.3 slijedi da je $\mathcal{U}$ maksimalan filter i da za svaki skup $A \subseteq S$ postoji $X \in \mathcal{U}$ takav da $A \nsubseteq X$. Ako pretpostavimo da $\mathcal{U}$ ne sadrži samo beskonačne skupove sljedeći postupak iz primjera 1.1.6 dobijamo kontradikciju. Zaključujemo da $\mathcal{U}$ sadrži samo beskonačne skupove.
Pokažimo još da $\mathcal{U}$ sadrži $\mathcal{F}$. Kad to ne bi bila istina postojao bi $X \in \mathcal{F}$ takav da $X \notin \mathcal{U}$. Sada to povlači da je $S \setminus X \in \mathcal{U}$, jer je $\mathcal{U}$ ultrafilter. Iz definicije od $\mathcal{F}$ imamo da je $S \setminus X$ konačan, što je nemoguće. □

Završimo ovu točku s dva primjera.

Primjer 2.1.7. Neka je S neprazan skup i $\mathcal{U}$ ultrafilter na S. Neka je $\mathcal{V}$ familija skupova $X \subseteq S \times S$ definirana sa

$$\mathcal{V} = \{X \subseteq S \times S \mid \{a \in S \mid \{b \in S \mid (a,b) \in X\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}\}.$$

Pokažimo da je $\mathcal{V}$ ultrafilter na $S \times S$.
Za $X = \emptyset$ imamo $\{a \in S \mid \{b \in S \mid (a,b) \in X\} \in \mathcal{U}\} = \{a \in S \mid \emptyset \in \mathcal{U}\} = \emptyset \notin \mathcal{U}$, pa je $\emptyset \notin \mathcal{V}$.
Za $X = S \times S$ imamo $\{a \in S \mid \{b \in S \mid (a,b) \in X\} \in \mathcal{U}\} = \{a \in S \mid S \times S \in \mathcal{U}\} = S \in \mathcal{U}$, pa je $S \times S \in \mathcal{V}$.
Neka su $X_1, X_2 \in \mathcal{V}$. Slijedi da je $\{a \in S \mid \{b \in S \mid (a,b) \in X_1\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$ i $\{a \in S \mid \{b \in S \mid (a,b) \in X_2\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$. Zbog toga je

$$\{a \in S \mid \{b \in S \mid (a,b) \in X_1\} \in \mathcal{U}\} \cap \{a \in S \mid \{b \in S \mid (a,b) \in X_2\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}. \tag{2.1}$$

Lako je vidjeti da vrijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned}
&\{a \in S \mid \{b \in S \mid (a,b) \in X_1\} \in \mathcal{U}\} \cap \{a \in S \mid \{b \in S \mid (a,b) \in X_2\} \in \mathcal{U}\} &&= \\
=&\{a \in S \mid \{b \in S \mid (a,b) \in X_1\} \in \mathcal{U} \wedge \{b \in S \mid (a,b) \in X_2\} \in \mathcal{U}\} &&= \\
=&\{a \in S \mid \{b \in S \mid (a,b) \in X_1\} \cap \{b \in S \mid (a,b) \in X_2\} \in \mathcal{U}\} &&= \\
=&\{a \in S \mid \{b \in S \mid (a,b) \in X_1 \cap X_2\} \in \mathcal{U}\}.
\end{aligned}$$

Sada zbog (2.1) slijedi da je i $\{a \in S \mid \{b \in S \mid (a,b) \in X_1 \cap X_2\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$. Zaključujemo da je $X_1 \cap X_2 \in \mathcal{V}$.
Neka je $X_1 \in \mathcal{V}$ i $X_2 \supseteq X_1$. Neka je $x \in A = \{a \in S \mid \{b \in S \mid (x,b) \in X_1\} \in \mathcal{U}\}$ proizvoljan. Vrijedi $\{b \in S \mid (x,b) \in X_1\} \in \mathcal{U}$. Zbog $X_1 \subseteq X_2$ vrijedi $\{b \in S \mid (x,b) \in X_1\} \subseteq \{b \in S \mid (x,b) \in X_2\}$. Zbog toga je $\{b \in S \mid (x,b) \in X_2\} \in \mathcal{U}$. Slijedi $x \in B = \{a \in S \mid \{b \in S \mid (a,b) \in X_2\} \in \mathcal{U}\}$, pa je $A \subseteq B$. Iz definicije familije $\mathcal{V}$, činjenice da je $A \in \mathcal{U}$, te $A \subseteq B$ slijedi da je $X_2 \in \mathcal{V}$. Dakle, $\mathcal{V}$ je filter na $S \times S$.
Neka je $X \subseteq S \times S$ i pretpostavimo da $X \notin \mathcal{V}$. Zbog toga je $\{a \in S \mid \{b \in S \mid (a,b) \in X\} \in \mathcal{U}\} \notin \mathcal{U}$. Slijedi $S \setminus \{a \in S \mid \{b \in S \mid (a,b) \in X\} \in \mathcal{U}\} = \{a \in S \mid \{b \in S \mid (a,b) \in X\} \notin \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$. Sada je $\{a \in S \mid S \setminus \{b \in S \mid (a,b) \in X\} \in \mathcal{U}\} = \{a \in S \mid \{b \in S \mid (a,b) \notin X\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$. Slijedi $\{a \in S \mid \{b \in S \mid (a,b) \in S \times S \setminus X\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$. Zbog toga je $S \times S \setminus X \in \mathcal{V}$. Zaključujemo da je $\mathcal{V}$ ultrafilter na $S \times S$.

Primjer 2.1.8. Neka su S i T neprazni skupovi, $\mathcal{U}$ ultrafilter na S i $f : S \to T$ neka funkcija. Neka je $\mathcal{V} = \{X \subseteq T \mid f^{-1}[X] \in \mathcal{U}\}$. Pokažimo da je $\mathcal{V}$ ultrafilter na T.
Vrijedi $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset \notin \mathcal{U}$, pa $\emptyset \notin \mathcal{V}$. Također je $f^{-1}[T] = S \in \mathcal{U}$, pa je $T \in \mathcal{V}$.
Ako su $A, B \in \mathcal{V}$, tada su $f^{-1}[A], f^{-1}[B] \in \mathcal{U}$. Iz definicije filtra slijedi $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] \in \mathcal{U}$, pa je $A \cap B \in \mathcal{V}$.
Neka su $A \in \mathcal{V}$ i $B \supseteq A$. Tada je $f^{-1}[A] \in \mathcal{U}$. Iz $B \supseteq A$ je $f^{-1}[B] \supseteq f^{-1}[A]$. Iz definicije fitra slijedi $f^{-1}[B] \in \mathcal{U}$, pa je $B \in \mathcal{V}$. Dakle, $\mathcal{V}$ je filter na T.
Neka je $A \in \mathcal{V}$ i pretpostavimo da $A \notin \mathcal{V}$. Tada $f^{-1}[A] \notin \mathcal{U}$, pa je $S \setminus f^{-1}[A] = f^{-1}[T \setminus A] \in \mathcal{U}$. Slijedi $T \setminus A \in \mathcal{V}$. Zaključujemo da je $\mathcal{V}$ ultrafilter na T.

2.2 Mjera

U ovoj točki uvodimo pojam mjere. Za razliku od kolegija Mjera i integral, gdje je mjera definirana na σ-algebri, nama će biti dovoljno da definiramo na partitivnom skupu koji je puno jednostavniji za proučavati. Dat ćemo neke primjere mjera i definirat ćemo dvovrijednosnu mjeru (poprima dvije vrijednosti: 0 i 1). Pokazat ćemo direktnu poveznaost dvovrijednosne mjere i ultrafiltera.

Definicija 2.2.1. *Neka je S neprazan skup. Mjera je svaka funkcija $m : \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava sljedeće uvjete:*
(a) $m(\emptyset) = 0, m(S) > 0$,
(b) Ako su $A \subseteq B \subseteq S$, tada je $m(A) \leq m(B)$,
(b) Ukoliko je $(E_k)_{k=1}^n$ konačni niz u parovima disjunktnih skupova iz $\mathcal{P}(S)$, tada je

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m(E_k).$$

Napomena 2.2.2. (i) Svojstvo (b) iz prethodne definicije naziva se konačna aditivnost. Iz prethodne definicije odmah slijedi da je $m(A) \geq 0$ i $m(S \setminus A) = m(S) - m(A)$, za svaki $A \subseteq S$.
(ii) Primijetimo da je funkcija gustoće na $\mathbb{P}(\mathbb{N})$ zadovoljava uvjete iz prethodne definicije, ali nije definirana za svaki $A \subseteq \mathbb{N}$.

Dajemo dva jednostavna primjera mjere. U oba slučaja uvjeti definicije trivijalno vrijede.

Primjer 2.2.3. *Neka je S konačan skup. Definiramo mjeru $m(A) = |A|$, za $A \subseteq S$. Tu mjeru zovemo brojeća mjera.*

Primjer 2.2.4. *Neka je S neprazan skup, i neka je $a \in S$. Definiramo mjeru m na $\mathcal{P}(S)$ ovako:*

$$m(A) = \begin{cases} 1, & ako\ a \in A \\ 0, & ako\ a \notin A. \end{cases}$$

Mjera m se zove Diracova mjera.

Za mjeru ćemo reći da je dvovrijednosna, ako poprima samo vrijednosti 0 i 1. Diracova mjera je primjer dvovrijednosne mjere. Primijetimo da ako je m dvovrijednosna na skupu S i ako je $A \subseteq S$ takav da je $m(A) = 1$, tada je i $m(B) = 1$, za svaki $B \subseteq S, A \subseteq B$. Iz toga je nužno $m(S) = 1$. Postoji prirodna veza između ultrafiltera i dvovrijednosnih mjera koju vidimo u idućem teoremu.

Teorem 2.2.5. *Neka je S neprazan skup. Tada vrijedi:*
(a) ako je m dvovrijednosna mjera na S, tada je $\mathcal{U} = \{A \subseteq S \mid m(A) = 1\}$ ultrafilter na S;
(b) ako je $\mathcal{U}$ ultrafilter na S, tada je funkcija m definirana na $\mathcal{P}(S)$ sa

$$m(A) = \begin{cases} 1, & ako\ A \in \mathcal{U} \\ 0, & ako\ A \notin \mathcal{U}, \end{cases}$$

dvovrijednosna mjera na S.

Dokaz. (a) Pokazujemo da je $\mathcal{U}$ filter. Očito $\emptyset \notin \mathcal{U}$ i $S \in \mathcal{U}$. Neka su $A, B \in \mathcal{U}$. Iz $A, B \in \mathcal{U}$ dobijamo $m(A) = m(B) = m(A \cup B) = 1$, pa je i $m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B) = 1 + 1 - 1 = 1$. Dakle, $A \cap B \in \mathcal{U}$. Ako su $A, B \subseteq S$ takvi da $A \in \mathcal{U}$ i $A \subseteq B$, tada je $1 = m(A) \leq m(B) \leq 1$, pa je $B \in \mathcal{U}$.
Neka je $X \subseteq S$. Iz konačne aditivnosti mjere imamo $1 = m(S) = m(X) + m(S \setminus X)$. Dakle točno jedan od skupova X i $S \setminus X$ je element od $\mathcal{U}$. Dakle, $\mathcal{U}$ je ultrafilter na S.

(b) Neka su $\mathcal{U}$ ultrafilter na skupu S i m funkcija na $\mathcal{P}(S)$ definirana kao u iskazu teorema. Pokažimo da je m mjera.

Budući da $\emptyset \notin \mathcal{U}$ tada je $m(\emptyset) = 0$. Isto tako dobijamo i $m(S) = 1 > 0$, jer je $S \in \mathcal{U}$.
Neka su $A, B \subseteq S$ takvi da $A \subseteq B$. Ako je $A \in \mathcal{U}$, tada je i $B \in \mathcal{U}$, jer je $\mathcal{U}$ ultrafilter. Tada vrijedi $1 = m(A) \leq m(B) = 1$. Ako je $A \notin \mathcal{U}$, tada je $m(A) = 0$, pa je $m(A) \leq m(B)$.
Trebamo pokazati još da je funkcija m konačno aditivna.
Neka su $E_1, \ldots, E_n$ podskupovi od S koji su u parovima disjunktni. Označimo $E = E_1 \cup \cdots \cup E_n$.
Promotrimo prvo slučaj kada postoji $k_0 \in \{E_1, \ldots, E_n\}$ takav da $E_{k_0} \in \mathcal{U}$. Tada je $m(E_{k_0}) = 1$. Ako je $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{k_0\}$ tada $E_k \notin \mathcal{U}$, jer inače $\emptyset = E_k \cap E_{k_0} \in \mathcal{U}$, što nije moguće budući da je $\mathcal{U}$ ultrafilter. To znači da za svaki $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{k_0\}$ imamo $m(E_k) = 0$, a onda je

$$\sum_{k=1}^{n} m(E_k) = m(E_{k_0}) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^{n} m(E_k) = 1 + 0 = 1.$$

U drugu ruku, budući da je $E_{k_0} \subseteq E$ i $E_{k_0} \in \mathcal{U}$, tada $E \in \mathcal{U}$, pa je $m(E) = 1$. Dakle, u ovom slučaju vrijedi

$$m(E) = 1 = \sum_{k=1}^{n} m(E_k).$$

Promotrimo sada slučaj kada za svaki $k \in \{1, \ldots, n\}$ imamo $E_k \notin \mathcal{U}$. Tada je $m(E_k) = 0$, za svaki $k \in \{1, \ldots, n\}$. Primijetimo da $E_1 \notin \mathcal{U}$ i $E_2 \notin \mathcal{U}$ povlače $S \setminus E_1, S \setminus E_2 \in \mathcal{U}$. Budući da je $\mathcal{U}$ ultrafilter tada $(S \setminus E_1) \cap (S \setminus E_2) \in \mathcal{U}$.
No, $(S \setminus E_1) \cap (S \setminus E_2) = S \setminus (E_1 \cup E_2)$, pa je $E_1 \cup E_2 \notin \mathcal{U}$. Indukcijom bismo lako dobili $E_1 \cup \cdots \cup E_n \notin \mathcal{U}$, tj $E \notin \mathcal{U}$. To znači da u ovom slučaju imamo

$$m(E) = 0 = \sum_{k=1}^{n} m(E_k).$$

Dakle, m je dvovrijednosna mjera.

□

2.3 $\mathcal{U}$-limes

U ovoj točki dajemo jednu od mnogih primjena ultrafiltera. Promatramo generalizaciju pojma limesa niza realnih brojeva. Vidjet ćemo da je za konvergenciju takvog limesa dovoljno da niz bude ograničen. Zatim ćemo pokazati egzistenciju netrivijalne mjere na skupu prirodnih brojeva.

Definicija 2.3.1. *Neka je $\mathcal{U}$ ultrafilter na $\mathbb{N}$ i neka je $(a_n)_{n \geq 0}$ omeđen niz realnih brojeva. Za realni broj a kažemo da je $\mathcal{U}$-limes niza $(a_n)_{n \geq 0}$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$. Pišemo $a = \lim_{\mathcal{U}} a_n$.*

Pokažimo da je $\mathcal{U}$-limes jedinstven, ukoliko postoji. Pretpostavimo da su a i b dva $\mathcal{U}$-limes niza $(a_n)_{n\geq 0}$, takvi da je $a < b$. Neka je $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Tada su skupovi $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| < \varepsilon\}$ i $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - b| < \varepsilon\}$ disjunktni. Budući da su $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| < \varepsilon\}$ i $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - b| < \varepsilon\}$ iz $\mathcal{U}$ i budući da je $\mathcal{U}$ filter to je $\emptyset = \{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| < \varepsilon\} \cap \{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - b| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$, što je nemoguće.
Sada dajemo nekoliko primjera sa $\mathcal{U}$-limesom.

Primjer 2.3.2. Neka je $\mathcal{U}$ glavni ultrafilter. To znači da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da je $\mathcal{U} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid n_0 \in A\}$. Neka je $(a_n)_{n\geq 0}$ proizvoljan niz realnih brojeva. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Budući je $n_0 \in \{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a_{n_0}| < \varepsilon\}$, to je $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a_{n_0}| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$. Dakle, vrijedi $a_{n_0} = \lim\limits_{\mathcal{U}} a_n$.

Primjer 2.3.3. Neka je niz $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergentan i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Neka je $\mathcal{U}$ proizvoljan neglavni ultrafilter i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Budući da je niz $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergentan, tada postoji $k \in \mathbb{N}$, takav da za svaki $n \geq k$ vrijedi $|a_n - a| < \varepsilon$. Iz te činjenice slijedi $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| < \varepsilon\} \supseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\}$. Budući da je $\mathcal{U}$ neglavni ultrafilter, po propoziciji 2.1.6, $\mathcal{U}$ sadrži filter $\mathcal{F} = \{X \subseteq S \mid S \setminus X \text{ je konačan}\}$. Iz toga je $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\} \in \mathcal{U}$, pa je i $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$. Slijedi $a = \lim\limits_{\mathcal{U}} a_n$.

Iz primjera 2.3.2 i 2.3.3 zaključujemo da za svaki konvergentan niz realnih brojeva i svaki ultrafilter $\mathcal{U}$ postoji $\mathcal{U}$-limes. Ako je $\mathcal{U} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid n_0 \in A\}$ glavni ultrafilter, tada je a_{n_0} $\mathcal{U}$-limes proizvoljnog niza $(a_n)_{n\geq 0}$, pa onda i konvergentnog. Ako je $\mathcal{U}$ neglavni ultrafilter, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ njegov $\mathcal{U}$-limes. Obratno ne mora vrijediti. Postoji niz realnih brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji je divergentan, te neglavni ultrafilter $\mathcal{U}$ takav da postoji $\lim\limits_{\mathcal{U}} a_n$.

Primjer 2.3.4. Neka je $\mathcal{U}$ neglavni ultrafilter nad $\mathbb{N}$. Označimo $A = 2\mathbb{N}$. Tada je $A \in \mathcal{U}$ ili $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{U}$.
Ako je $A \in \mathcal{U}$ definiramo niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ovako:

$$a_n = \begin{cases} n, & \text{ako } n = 2k+1, \\ 0, & \text{ako } n = 2k. \end{cases}$$

Tada za $a = 0$ i svaki $\varepsilon > 0$ imamo $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| < \varepsilon\} \supseteq 2\mathbb{N} \in \mathcal{U}$, pa je $a = \lim\limits_{\mathcal{U}} a_n$.
Ako $A \notin \mathcal{U}$, tada definiramo

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{ako } n = 2k+1, \\ n, & \text{ako } n = 2k. \end{cases}$$

Tada za $b = 0$ i svaki $\varepsilon > 0$ imamo: $\{n \in \mathbb{N} \mid |b_n - b| < \varepsilon\} \supseteq 2\mathbb{N} + 1 \in \mathcal{U}$, pa je $b = \lim\limits_{\mathcal{U}} b_n$.
U oba slučaja je očito da nizovi divergiraju.

Pokažimo linearnost $\mathcal{U}$-limesa.

Propozicija 2.3.5. *Neka je $\mathcal{U}$ ultrafilter na $\mathbb{N}$ i neka su $(a_n)_{n\geq 0}$ i $(b_n)_{n\geq 0}$ realni nizovi takvi da njihovi $\mathcal{U}$-limesi postoje. Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*
(a) $\lim\limits_{\mathcal{U}}(a_n + b_n) = \lim\limits_{\mathcal{U}} a_n + \lim\limits_{\mathcal{U}} b_n$
(b) $\lim\limits_{\mathcal{U}} \alpha a_n = \alpha \lim\limits_{\mathcal{U}} a_n$

Dokaz. (a) Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi $\lim\limits_{\mathcal{U}} a_n = a$ i $\lim\limits_{\mathcal{U}} b_n = b$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Označimo: $A = \{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| < \varepsilon/2\}$ i $B = \{n \in \mathbb{N} \mid |b_n - b| < \varepsilon/2\}$.
Zbog $\lim\limits_{\mathcal{U}} a_n = a$ i $\lim\limits_{\mathcal{U}} b_n = b$ slijedi $A \in \mathcal{U}$ i $B \in \mathcal{U}$. Slijedi da je $A \cap B \in \mathcal{U}$, jer je $\mathcal{U}$ ultrafilter. Neka je $n_0 \in A \cap B$ proizvoljan. Tada imamo

$$|(a_{n_0} + b_{n_0}) - (a + b)| = |(a_{n_0} - a) + (b_{n_0} - b)| \leq |a_{n_0} - a| + |b_{n_0} - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

To znači da je $n_0 \in \{n \in \mathbb{N} \mid |(a_n+b_n)-(a+b)| < \varepsilon\}$, tj. $A \cap B \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid |(a_n+b_n)-(a+b)| < \varepsilon\}$.
Sada iz $A \cap B \in \mathcal{U}$ slijedi $\{n \in \mathbb{N} \mid |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$.
Dakle, realni broj $a + b$ je $\mathcal{U}$-limes niza $(a_n + b_n)_{n\geq 0}$.

(b) Označimo $a = \lim\limits_{\mathcal{U}} a_n$. Ako je $\alpha = 0$, tada tvrdnja očito vrijedi. Promatramo slučaj kada je $\alpha \neq 0$.
Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Budući da je $a = \lim\limits_{\mathcal{U}} a_n$ tada posebno $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}\} \in \mathcal{U}$.
No, $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid |\alpha||a_n - a| < \varepsilon\} = \{n \in \mathbb{N} \mid |\alpha a_n - \alpha a| < \varepsilon\}$, pa je $\{n \in \mathbb{N} \mid |\alpha a_n - \alpha a| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$, a onda imamo $\lim\limits_{\mathcal{U}} \alpha a_n = \alpha \lim\limits_{\mathcal{U}} a_n$ □

Sada pokazujemo egzistenciju $\mathcal{U}$-limesa za bilo koji omeđeni niz realnih brojeva.

Teorem 2.3.6. *Neka je $\mathcal{U}$ ultrafilter na $\mathbb{N}$ i $(a_n)_{n\geq 0}$ omeđen niz realnih brojeva.*
Tada $\lim\limits_{\mathcal{U}} a_n$ postoji.

Dokaz. Kako je niz $(a_n)_{n\geq 0}$ omeđen, postoje brojevi a i b takvi da $a < a_n < b$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Za svaki $x \in [a, b]$ neka je $A_x = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n < x\}$. Jasno je da je $A_a = \emptyset, A_b = \mathbb{N}$ i $A_x \subseteq A_y$, za sve realne $x \leq y$. Stoga vrijedi $A_a \notin \mathcal{U}$, $A_b \in \mathcal{U}$ i $A_x \in \mathcal{U}$ povlači $A_y \in \mathcal{U}$, za sve $x \leq y$.
Neka je $c = sup\{x \in \mathbb{R} \mid A_x \notin \mathcal{U}\}$ i neka je $\varepsilon > 0$. Budući da je $c = sup\{x \in \mathbb{R} \mid A_x \notin \mathcal{U}\}$, vrijedi $A_{c-\varepsilon} \notin \mathcal{U}$ i $A_{c+\varepsilon} \in \mathcal{U}$. Sada $A_{c+\varepsilon} = A_{c-\varepsilon} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid c - \varepsilon < a_n < c + \varepsilon\}$ povlači $\{n \in \mathbb{N} \mid c - \varepsilon < a_n < c + \varepsilon\} \in \mathcal{U}$. Slijedi $c = \lim\limits_{\mathcal{U}} a_n$. □

Sada smo spremni za konstrukciju netrivijalne mjere na $\mathbb{N}$. Prije toga pokažimo iduću propoziciju koju ćemo koristiti u konstrukciji mjere.

Propozicija 2.3.7. *Neka je $\mathcal{U}$ neglavni ultrafilter, te $(a_n)_{n\geq 0}$ niz realnih brojeva za koji postoji $\lim\limits_{\mathcal{U}} a_n$. Tada je $\lim\limits_{\mathcal{U}} a_n$ jedinstveno gomilište niza $(a_n)_{n\geq 0}$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ neglavni ultrafilter. Neka je $(a_n)_{n\geq 0}$ niz realnih brojeva takav da postoji $\lim\limits_{\mathcal{U}} a_n$. Označimo $a = \lim\limits_{\mathcal{U}} a_n$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$.
Budući da je $\mathcal{U}$ neglavni ultrafilter tada je svaki njegov element beskonačan (Dokaz propozicije 2.1.6). Posebno imamo da je za svaki $\varepsilon > 0$ skup $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| < \varepsilon\}$ beskonačan.
Iz toga slijedi da je broj a gomilište niza $(a_n)_{n\geq 0}$. □

Teorem 2.3.8. *Postoji mjera m na $\mathbb{N}$ takva da je $m(A) = d(A)$, za svaki skup $A \subseteq \mathbb{N}$ koji ima gustoću.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ neki neglavni ultrafilter na $\mathbb{N}$. Za svaki skup $A \subseteq \mathbb{N}$ definiramo:

$$m(A) = \lim_{\mathcal{U}} \frac{A(n)}{n}.$$

Ako skup $A \subseteq \mathbb{N}$ ima gustoću, tj. ako je niz $(\frac{A(n)}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan, tada iz primjera 2.3.3 slijedi $m(A) = d(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$. Dokažimo sada da je funkcija m mjera.
Budući da prazan skup ima gustoću i $d(\emptyset) = 0$, tada je $m(\emptyset) = 0$. Zatim budući da skup $\mathbb{N}$ ima gustoću, te vrijedi $d(\mathbb{N}) = 1$, tada je $m(\mathbb{N}) = 1$
Neka su $A, B \subseteq \mathbb{N}$ takvi da $A \subseteq B$, te takvi da postoje $\lim\limits_{\mathcal{U}} \frac{A(n)}{n}$ i $\lim\limits_{\mathcal{U}} \frac{B(n)}{n}$. Iz propozicije 2.3.7 slijedi da su realni brojevi $\lim\limits_{\mathcal{U}} \frac{A(n)}{n}$ i $\lim\limits_{\mathcal{U}} \frac{B(n)}{n}$ redom gomilišta nizova $(\frac{A(n)}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ i $(\frac{B(n)}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Iz $A \subseteq B$ očito slijedi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\frac{A(n)}{n} \leq \frac{B(n)}{n}$. No, tada vrijedi i $\lim\limits_{\mathcal{U}} \frac{A(n)}{n} \leq \lim\limits_{\mathcal{U}} \frac{B(n)}{n}$, tj. vrijedi $m(A) \leq m(B)$.
Ako je $A \cap B = \emptyset$, tada je $(A \cup B)(n) = A(n) + B(n)$. Sada konačna aditivnost od m slijedi iz propozicije 2.3.5. □

Poglavlje 3

Zatvoreni neomeđeni i stacionarni skupovi

U ovom poglavlju predstavljamo jedan važan filter na regularnom neprebrojivom kardinalu, filter generiran sa zatvorenim neomeđenim skupom. Iako rezultat ovog poglavlja može biti iskazan i dokazan za bilo koji regularni neprebrojivi kardinal, mi ćemo naša razmatranja ograničiti na najmanji neprebrojivi kardinal $\aleph_1$. Ovo poglavlje se sastoji od dvije točke sa naslovima: Zatvoreni neomeđeni skupovi, Stacionarni skupovi.

3.1 Zatvoreni neomeđeni skupovi

U ovoj točki proučavamo zatvorene i neomeđene skupove koji će nam koristiti za drugi dio ovog poglavlja. Prisjetit ćemo se osnovnih definicija i rezultata vezanih za ordinale koji će nam biti važni za ovo i iduće poglavlje.

Za skup parcijalno uređen skup $(X, <)$ kažemo da je dobro uređen ako svaki neprazni podskup od X sadrži najmanji element. Za skup X kažemo da je tranzitivan ako je svaki element od X ujedno i podskup od S. Drugim riječima, tranzitivan skup ima svojstvo da ako su $\alpha \in \beta \in S$ da je tada $\alpha \in S$.
Za skup x kažemo da je ordinal ako je x tranzitivan skup i $(x, \in)$ je dobro uređen.
Najmanji ordinal koji je prebrojiv označavamo sa ω, a najmanji ordinal koji je neprebrojiv označavamo sa ω_1.
Dokazano je da ako je A neki skup ordinalnih brojeva da je tada $\bigcup\limits_{\alpha \in A} \alpha$ ordinalni broj i najmanji je od svih ordinalnih brojeva koji su veći ili jednaki od svih elemenata iz A, tj. $\bigcup\limits_{\alpha \in A} \alpha = \sup A$.
Za svaki ordinalni broj α skup $\alpha \cup \{\alpha\}$ je ordinalni broj, te je to neposredni sljedbenik od

α. Ordinalni broj $\alpha \cup \{\alpha\}$ označavamo sa $\alpha + 1$.
Ako su α i β ordinalni brojevi za koje vrijedi $\alpha < \beta$ tada je $\alpha + 1 \leq \beta$.
Za ordinalni broj α kažemo da je prve vrste ako postoji ordinalni broj β tako da vrijedi $\alpha = \beta + 1$. Ako je ordinalni broj različit od nule, te nije prve vrste, tada kažemo da je druge vrste ili da je granični ordinalni broj.
Sada smo spremni za definiciju zatvorenog i neomeđenog skupa.

Definicija 3.1.1. *Za skup $C \subseteq \omega_1$ kažemo da je neomeđen skup ako vrijedi* $\sup C = \omega_1$.
Za skup $C \subseteq \omega_1$ kažemo da je zatvoren ako svaki rastući niz

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \ldots (n \in \omega)$$

ordinala u C ima supremum i vrijedi $\sup\{\alpha_n \mid n \in \omega\} \in C$.

Napomena 3.1.2. Ordinal ω_1 je skup svih prebrojivih i konačnih ordinala. Iz propozicije 7 slijedi da bilo koji rastući niz prebrojivih ordinala ima supremum koji je opet prebrojiv ordinal. Zbog toga je ω_1 zatvoren skup. Zbog $\sup \omega_1 = \omega_1$ je ω_1 neomeđen skup. Stoga je ω_1 primjer zatvorenog i neomeđenog skupa.

Propozicija 3.1.3. *Skup $C \subseteq \omega_1$ je neomeđen ako i samo ako je C neprebrojiv skup.*

Dokaz. Neka je C neomeđen skup. Ukoliko bi C bio najviše prebrojiv tada bi $\bigcup C$ bio najviše prebrojiv ordinal, tj. vrijedilo bi $\sup C < \omega_1$, što nije moguće jer je C neomeđen. Dakle, C je neprebrojiv.
Obratno, neka je C neprebrojiv skup. Pretpostavimo da C nije omeđen. To znači da je $\sup C = \alpha < \omega_1$. Tada za svaki $\gamma \in C$ vrijedi $\gamma \leq \alpha$ iz čega slijedi $C \subseteq \alpha + 1$. Budući je α najviše prebrojiv, slijedi kontradikcija. □

Sada dajemo nužne i dovoljne uvijete kada je neomeđeni skup ujedno i zatvoren.

Propozicija 3.1.4. *Neomeđeni skup $C \subseteq \omega_1$ je zatvoren ako i samo ako za svaki $A \subset C$, takav da je* $\sup A < \omega_1$ *vrijedi* $\sup A \in C$.

Dokaz. Neka je C zatvoren skup. Neka je $A \subset C$ takav da je $\alpha = \sup A < \omega_1$. Iz toga slijedi da je skup A prebrojiv, pa ga možemo poredati po veličini $A = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots\}$ (A je dobro uređen). Na taj način smo dobili rastući niz ordinala $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ čiji je supremum α. Zbog zatvorenosti od C je $\alpha \in C$.
Dokažimo sada obrat. Pretpostavimo da za svaki $A \subseteq C$ koji ima svojstvo $\sup A < \omega_1$, vrijedi $\sup A \in C$. Obratom po kontrapoziciji imamo da za svaki $A \subseteq C$ za koji $\sup A \notin C$ vrijedi $\sup A = \omega_1$. Neka je $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ rastući niz u C i neka je $\alpha = \sup\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$. Ako $\alpha \notin C$ tada je po pretpostavci $\alpha = \omega_1$. Budući da je niz $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ rastući niz prebrojivih ordinala, to je po napomeni 3.1.2 ordinal α prebrojiv. Time smo dobili da je $\alpha = \omega_1$ i α je prebrojiv ordinal, što je kontradikcija. □

Sada dajemo primjer zatvorenog neomeđenog skupa koji je različit od ω_1.

Primjer 3.1.5. Neka je L skup svih prebrojivih graničnih ordinala. Pokazat ćemo da je L zatvoren i neomeđen.
Pokažimo prvo da je L zatvoren. Neka je $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ neki rastući niz u L. Označimo $\alpha = \sup_{n\in\omega} \alpha_n$. Po napomeni 3.1.2 je α prebrojiv ordinal, pa je različit od ω_1. Ako je α granični ordinal, onda smo gotovi. Pretpostavimo da je α ordinal prve vrste. To znači da postoji ordinal β takav da je $\alpha = \beta + 1$. Budući da je svaki ordinal α_n granični ordinal, tada je $\alpha_n < \alpha$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. To znači da je ordinal β također gornja međa niza (α_n), što je nemoguće. Dakle, ordinal α je nužno granični ordinal. To znači da je skup L zatvoren.
Pokažimo sada da je L neomeđen. Neka je $\alpha = \sup\ L$. Analogno kao u prethodnom dokazu zaključujemo α ne može biti prve vrste. Pretpostavimo da je α prebrojivi granični ordinal, tj. $\alpha \in L$. Posebno je tada α maksimum skupa L. Ali tada je ordinal $\alpha \cdot 2$ prebrojivi granični ordinal veći od α, što je kontradikcija sa činjenicom da je α maksimum skupa L. Zaključujemo da je $\alpha = \omega_1$, tj. L je neomeđen.

Važno svojstvo zatvorenih neograničenih skupova je svojstvo konačnih presjeka. To proizlazi iz iduće leme.

Lema 3.1.6. *Ako su C_1 i C_2 zatvoreni neomeđeni podskupovi od ω_1, tada je $C_1 \cap C_2$ zatvoren neomeđen skup.*

Dokaz. Pokažimo prvo da je skup $C_1 \cap C_2$ zatvoren. Ako je $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ rastući niz ordinala u $C_1 \cap C_2$, tada je on rastući niz u C_1 i C_2. Slijedi $\sup\{\alpha_n \mid n \in \omega\} \in C_1$ i $\sup\{\alpha_n \mid n \in \omega\} \in C_2$, pa je $\sup\{\alpha_n \mid n \in \omega\} \in C_1 \cap C_2$.
Pokažimo sada da je skup $C_1 \cap C_2$ neomeđen, tj. da vrijedi $\sup C_1 \cap C_2 = \omega_1$. U tu svrhu dokazujemo da niti jedan ordinal $\gamma < \omega_1$ nije gornja međa skupa $C_1 \cap C_2$. Preciznije, dokazujemo da za svaki ordinal $\gamma < \omega_1$ postoji ordinal $\alpha \in C_1 \cap C_2$ takav da $\gamma < \alpha$. U tu svrhu definiramo niz ordinala $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ u skupu C_1, te niz ordinala $(\beta_n)_{n\in\omega}$ u skupu C_2.
Neka je $\gamma < \omega_1$ proizvoljan ordinal. Budući da je po pretpostavci skup C_1 neomeđen, tada je $\sup C_1 = \omega_1$. Tada postoji $\alpha_0 \in C_1$ takav da je α_0 najmanji ordinal u C_1 veći γ. Zatim budući da je $\sup C_2 = \omega_1$, tada postoji najmanji ordinal $\beta_0 \in C_2$, takav da $\alpha_0 < \beta_0$. Pretpostavimo da smo za neki $n \in \omega$ definirali ordinale $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ i $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$. Tada definiramo α_{n+1} kao najmanji ordinal iz C_1 koji je veći od β_n (takav postoji jer je $\sup C_1 = \omega_1$, i $\beta_n < \omega_1$), te definiramo ordinal β_{n+1} kao najmanji ordinal u C_2 koji je veći od α_{n+1}. Očitio vrijedi $\alpha_0 < \beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \cdots < \alpha_n < \beta_n < \cdots < \omega_1$.
Neka je α supremum niza $(\alpha_n)_{n\in\omega}$. Tada je α također supremum niza $(\beta_n)_{n\in\omega}$. Ordinal α je u C_1 i u C_2, pa je $\alpha \in C_1 \cap C_2$. Očito vrijedi $\gamma < \alpha$. □

Kao posljedica prethodne leme slijedi da je konačni presjek zatvorenih i neomeđenih skupovo također zatvoren i neomeđen. Iz toga slijedi da familija svih zatvorenih i neomeđenih podskupova od ω_1 ima svojstvo konačnih presjeka. Ta familija po lemi 1.3.2 generira filter na ω_1:

$$\mathcal{F} = \{X \subseteq \omega_1 \mid C \subseteq X, \text{ za neki zatvoreni i neomeđeni skup } C\}. \tag{3.1}$$

Filter $\mathcal{F}$ nazivamo zatvoreni neomeđeni filter na ω_1. Proširenje filtra $\mathcal{F}$ do ultrafiltra $\mathcal{U}$ ćemo koristiti u idućem poglavlju prilikom dokaza Silverovog teorema.

Lema 3.1.7. *Ako je $\{C_n\}_{n\in\omega}$ prebrojiva familija zatvorenih neomeđenih skupova, tada je $\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ zatvoren i neomeđen. Posebno, ako je $\{C_n\}_{n\in\omega}$ prebrojiva familija skupova u zatvorenom i neomeđenom filtru $\mathcal{F}$, tada je $\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n \in \mathcal{F}$.*

Dokaz. Neka je $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$. Skup C je zatvoren kao prebrojivi presjek zatvorenih skupova. Neka je $\gamma < \omega_1$ proizvoljan. Kako bismo pokazali da je C neomeđen naći ćemo $\alpha \in C$ koji je veći od γ.
Neka je za svaki $n \in \omega_1$, $D_n = C_0 \cap \cdots \cap C_n$. Uočimo da su skupovi D_n zatvoreni i neomeđeni, te da tvore padajući niz $D_0 \supseteq D_1 \supseteq D_2 \supseteq \ldots$. Vrijedi $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} D_n$.
Definiramo $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ niz prebrojivih ordinala. Skup D_0 je neomeđen pa postoji $\alpha_0 \in D_0$, takav da je α_0 najmanji ordinal u D_0 koji je veći od γ. Pretpostavimo da smo za neki $n \in \omega$ definirali $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$. Skup D_n je neomeđen pa postoji $\alpha_n \in D_n$, takav da je α_n najmanji ordinal u D_n koji je veći od α_{n-1}. Na taj način smo dobili rastući niz ordinala $(\alpha_n)_{n\in\omega}$.
Neka je α supremum skupa $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$. Budući da je $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ rastući niz, tada je α supremum skupa $\{\alpha_k\}_{k\geq n+1}$. Za svaki $k \geq n+1$ je $\alpha_k \in D_n$ jer $D_n \supseteq D_{n+1} \ldots$.
Zbog toga je $\alpha \in D_n$, za svaki $n \in \omega$, pa je $\alpha \in C$. □

3.2 Stacionarni skupovi

Usko povezani sa neomeđenim skupovima su stacionarni skupovi. Stacionarni skupovi su oni skupovi $S \subseteq \omega_1$ koji ne pripadaju idealu koji je dualan zatvorenom i neomeđenom filtru. Preformulacija toga nas dovodi do iduće definicije.

Definicija 3.2.1. *Skup $S \subseteq \omega_1$ je stacionaran ako ima neprazan presjek sa svakim zatvorenim neomeđenim skupom.*

Kao jednostavnu posljedicu prethodne definicije, dajemo iduću propoziciju.

Propozicija 3.2.2. *Svaki stacionarni skup je neprebrojiv.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji prebrojiv stacionaran skup S. Neka je $\alpha = \sup S$. Kako je $S \subsetneq \omega_1$, to je skup α prebrojiva unija prebrojivih skupova, tj. ordinal α je prebrojiv. Definiramo $C = \omega_1 \setminus \{0, 1, \ldots, \alpha\}$. Budući da je α prebrojiv ordinal, tada je očito sup

$C = \omega_1$, pa je skup C neomeđen. Neka je $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ rastući niz u C sa supremumom β. Tada po napomeni 3.1.2 vrijedi $\beta < \omega_1$, te je $\alpha < \beta$ jer je niz $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ rastući i sadržan u C. Stoga je C zatvoren skup. Iz toga je $C \cap S = \emptyset$, što je kontradikcija sa činjenicom da je skup S stacionaran. Dakle, svaki stacionaran skup je neprebrojiv. □

Korolar 3.2.3. *Svaki stacionarni skup je neomeđen.*

Dokaz. Dokaz slijedi iz prethodne propozicije i propozicije 3.1.3 □

Primijetimo da je svaki zatvoren neomeđen skup stacionaran, jer je po lemi 3.1.6 presjek svaka dva zatvorena i neomeđena skupa opet zatvoren i neomeđen, i time neprazan. Budući da stacionaran skup ima neprazne presjek sa svakim zatvorenim i neomeđenim skupom, to onda vrijedi i za svaki nadskup stacionarnog skupa. Zaključujemo da je svaki nadskup stacionarnog skupa opet stacionaran. Kasnije ćemo u ovom poglavlju dati primjer stacionarnog skupa koji nema ni jedan podskup koji je zatvoren i neomeđen.

Definicija 3.2.4. *Neka je $S \subseteq \omega_1$. Za funkciju $f : S \to \omega_1$ kažemo da je regresivna ako vrijedi $f(\alpha) < \alpha$ za svaki $\alpha \neq 0$.*

Lema 3.2.5. *Neka je $\{C_\beta \mid \beta < \omega_1\}$ familija zatvorenih i neomeđenih skupova. Neka je $C = \{\alpha < \omega_1 \mid \alpha \in C_\beta$ za svaki $\beta < \alpha\}$. Tada je skup C, kojeg zovemo dijagonalni presjek od C_β, zatvoren i neomeđen.*

Dokaz. Pokažimo prvo da je skup C zatvoren. Neka je $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ rastući niz u C i neka je α njegov supremum. Pokazat ćemo da $\alpha \in C_\beta$, za svaki $\beta < \alpha$.
Neka je $\beta < \alpha$ prozvoljan. Budući da je α supremum skupa $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$, tada postoji $k \in \omega$ takav da je $\beta < \alpha_k$, i stoga je $\beta < \alpha_n$, za svaki $n \geq k$. Kako je svaki $\alpha_n \in C$, to je $\alpha_n \in C_\beta$, za svaki $\beta < \alpha_n$. Zbog toga je $\alpha_n \in C_\beta$, za $n \geq k$. Budući da je α supremum od $\{\alpha_n\}_{n\geq k}$ i C zatvoren slijedi da je $\alpha \in C_\beta$.
Sada pokazujemo da je skup C neomeđen. Uzmimo $\gamma < \omega_1$ proizvoljan. Neka je $\alpha_0 = \gamma$. Za $n \in \omega$ neka je α_{n+1} najmanji element od $\bigcap_{\beta<\alpha_n} C_\beta$ koji je veći od α_n. Takav α_{n+1} postoji jer je $\bigcap_{\beta<\alpha_n} C_\beta$ zatvoren i neomeđen. Na taj način smo dobili rastući niz ordinala $(\alpha_n)_{n\in\omega}$. Neka je α supremum skupa $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$. Kako bismo pokazali da je $\alpha \in C$, moramo pokazati da je $\alpha \in C_\beta$ za svaki $\beta < \alpha$.
Neka je $\beta < \alpha$ proizvoljan. Tada postoji $k \in \omega$ takav da $\beta < \alpha_k$, i za $n > k$ je $\alpha_{n+1} \in C_\beta$, iz definicije niza $(\alpha_n)_{n\in\omega}$. Budući da je $(\alpha_n)_{n>k}$ niz u C_β čiji je supremum α, tada je $\alpha \in C_\beta$. □

Idući teorem je dobar primjer kako se neprebrojiva kardinalnost poput $\aleph_1$ značajno razlikuje od $\aleph_0$. Na neprebrojivim kardinalima ne postoji analogon funkciji $f : \omega \to \omega$ koja je definirana sa: $f(0) = 0$ i $f(n+1) = n$, za svaki $n \in \omega$. Ta funkcija je regresivna i postiže svaku vrijednost konačno mnogo puta. Neposredna posljedica idućeg teorema je da regresivna funkcija f na ω_1 postiže neke vrijednosti neprebrojivo mnogo puta, osim ako je domena od f dovoljno malan skup, tj. nije stacionaran.

Teorem 3.2.6. *Skup $S \subseteq \omega_1$ je stacionaran ako i samo ako je svaka regresivna funkcija $f : S \to \omega_1$ konstanta na nekom neomeđenom skupu. Štoviše, funkcija f je konstanta na nekom stacionarnom skupu.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je svaka regresivna funkcija $f : S \to \omega_1$ konstanta na nekom neomeđenom podskupu od S. Obratom po kontrapoziciji dokažimo da je S stacionaran. Neka je $S \subseteq \omega_1$ skup koji nije stacionaran. Želimo dokazati da postoji regresivna funkcija $f : S \to \omega_1$ koja nije konstanta niti na jednom neomeđenom skupu.
Budući da S nije stacionaran, postoji zatvoren i neomeđen skup C takav da je $S \cap C = \emptyset$. Neka je $f : S \to \omega_1$ definirana sa $f(\alpha) = \sup(C \cap \alpha)$, za $\alpha \in S$. Iz definicije funkcije f slijedi $f(\alpha) \leq \alpha < \omega_1$ za svaki $\alpha \in \omega_1$. Budući da je C zatvoren i neomeđen, tada po propoziciji 3.1.4 vrijedi $f(\alpha) \in C$. Iz te činjenice i $S \cap C = \emptyset$ slijedi $f(\alpha) \neq \alpha$. Zaključujemo da je $f(\alpha) < \alpha$, tj. funkcija f je regresivna na S. Osim toga, za $\alpha \leq \beta$ vrijedi $C \cap \alpha \subseteq C \cap \beta$, pa je $f(\alpha) \leq f(\beta)$, tj. funkcija f je rastuća.
Neka je A proizvoljan neomeđen podskup od S. Dokažimo da f nije konstanta na A. Neka je $\alpha = \min A$. Neka je c najmanji element iz C koji je veći od α. Za taj $c \in C$ postoji $\beta \in A$ koji je veći od c. Tada je $f(\beta) = \sup(C \cap \beta) \geq \sup(\{c\} \cap \beta) = c$. Zadnja jednakost vrijedi zbog $c < \beta$. Našli smo ordinale $\alpha, \beta \in A$ i $c \in C$ takve da vrijedi $f(\alpha) < \alpha < c < f(\beta)$. Dakle, funkcija f postiže različite vrijednosti za $\alpha, \beta \in A$, što je kontradikcija sa činjenicom da je funkcija f konstanta na neomeđenom skupu A.

Sada pokazujemo drugi smjer. Neka je S stacionaran skup i neka je $f : S \to \omega_1$ regresivna funkcija. Za svaki $\gamma < \omega_1$ neka je $A_\gamma = f^{-1}[\{\gamma\}]$. Pokazat ćemo da je za neki γ skup A_γ stacionaran. Po korolaru 3.2.3 će tada A_γ biti neomeđen, pa će vrijediti $f(\alpha) = \gamma$ za svaki $\alpha \in A_\gamma$.
Pretpostavimo da niti jedan od A_γ nije stacionaran. Tada za svaki $\gamma < \omega_1$ postoji zatvoreni neomeđeni skup C_γ takav da je $A_\gamma \cap C_\gamma = \emptyset$. Neka je $C = \{\alpha < \omega_1 \mid \alpha \in C_\gamma \text{ za svaki } \gamma < \alpha\}$ dijagonalni presjek skupova C_γ. Ako je $\alpha \in C_\gamma$, tada $\alpha \notin A_\gamma$, pa i $f(\alpha) \neq \gamma$ (zbog $A_\gamma \cap C_\gamma = \emptyset$). Iz prethodnog i definicije dijagonalnog presjeka slijedi ako je $\alpha \in C$, tada je $f(\alpha) \neq \gamma$, za svaki $\gamma < \alpha$. Kad bi za $\gamma = f(\alpha)$ vrijedilo $\gamma < \alpha$, tada bi bilo $\gamma = f(\alpha) \neq f(\alpha)$, što nije istina. Stoga je $\alpha \leq f(\alpha)$, za svaki $\alpha \in C$. Po lemi 3.2.5 je skup C zatvoren i neomeđen. Iz toga i stacionarnosti od S slijedi da je $C \cap S$ neprazan, pa postoji $\alpha \in C \cap S$. Našli smo $\alpha \in S$ takav da vrijedi $\alpha \leq f(\alpha)$. □

Jedna jednostavna posljedica prethodnog teorema je egzistencija stacionarnog skupa čiji komplement je također stacionaran skup. To pokazujemo u sljedećem primjeru.

Primjer 3.2.7. Neka je C skup svih prebrojivih graničnih oprdinala. U primjeru 3.1.5 smo vidjeli da je skup C zatvoren i neomeđen. Za svaki $\alpha \in C$ postoji rastući niz ordinala $x_\alpha = (x_n^\alpha)_{n\in\omega}$ sa limesom α. Za svaki $n \in \omega$ neka je $f_n : C \to \omega_1$ funkcija definirana sa $f_n(\alpha) = x_n^\alpha$. Za svaki $n \in \omega$ je funkcija f_n regresivna.

Po teoremu 3.2.6 slijedi da za svaki $n \in \omega$ postoji γ_n takav da je skup $S_n = \{\alpha \in C \mid f_n(\alpha) = \gamma_n\}$ stacionaran.
Tvrdimo da barem jedan od skupova S_n ima komplement koji je stacionaran. U suprotnome bi vrijedilo da svaki S_n sadržava zatvoren neomeđen skup, pa iz leme 3.1.7 slijedi da je i njihov presjek isto sadrži zatvoren i neomeđen skup. Stoga $\bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$ sadrži ordinal α koji je veći od supremuma skupa $\{\gamma_n\}_{n\in\omega}$. Ali u tom slučaju niz $x_\alpha = (x_n^\alpha)_{n\in\omega} = (f_n(\alpha))_{n\in\omega} = (\gamma_n)_{n\in\omega}$ ne konvergira prema α (zbog $\gamma_n \leq \sup\{\gamma_n\}_{n\in\omega} < \alpha$), što je kontradikcija.

Stacionaran skup iz prethodnog primjera ne može imati zatvoren i neomeđen podskup budući mu je komplement također stacionaran.
Druga posljedica teorema 3.2.6 je kombinatorni teorem poznat kao Δ-lema. Iako se Δ-lema može dokazati direktno, idući dokaz pokazuje snagu teorema 3.2.6.

Teorem 3.2.8. *Neka je $\{A_i \mid i \in I\}$ neprebrojiva familija konačnih skupova. Tada postoji neprebrojivi $J \subseteq I$ i skup A takav da za sve različite $i, j \in J$ vrijedi $A_i \cap A_j = A$.*

Dokaz. Skup I je neprebrojiv pa je kardinalitet od I veći ili jednak $\aleph_1$. Ako tvrdnju pokažemo za familiju kardinalnosti $\aleph_1$ tada će vrijediti i za familije veće kardinalnosti. Zato možemo pretpostaviti da je $I = \omega_1$.
Neka je $B = \bigcup\limits_{i\in\omega_1} A_i$. Ako je skup B prebrojiv ili konačan tada očito postoji $J \subseteq \omega_1$ neprebrojiv takav da za sve $i, j \in J$ vrijedi $A_i = A_j$, pa u tom slučaju je jasna egzistenicija traženog skupa A.
Pretpostavimo stoga da je B kardinalnosti $\aleph_1$. Iz $|B| = \aleph_1$ slijedi da postoji bijekcija $f : B \to \omega_1$, pa je za svaki $i \in \omega_1$ skup A_i ekvipotentan sa $f[A_i] \subseteq \omega_1$. Radi jednostavnijeg zapisa, pretpostavit ćemo da je svaki A_i podskup od ω_1.
Kad bi za svaki $n \in \omega$ samo prebrojivo mnogo skupova A_i bilo kardinalnosti n, tada bi familija $\{A_i \mid i \in \omega_1\}$ bila prebrojiva, što nije istina. To znači da postoji $n_0 \in \omega$ takav da su neprebrojivo mnogo A_i kardninalnosti n_0. Nadalje promatramo familiju $\mathcal{A} = \{A_\alpha \mid \alpha < \omega_1, A_\alpha \subseteq \omega_1 \text{ i } |A_\alpha| = n_0\}$. Neka je I_0 neprebrojiv skup ordinala tako da vrijedi $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in I_0\}$.

Neka je $C = \{\alpha \in I_0 \mid \max A_\beta < \alpha, \text{ za svaki } \beta < \alpha\}$. Dokažimo da je skup C zatvoren i neomeđen. Neka $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ rastući niz ordinala u skupu C. To znači da vrijedi $\max A_\beta < \alpha_n$, za svaki $n \in \omega$ i sve $\beta < \alpha_n$. Neka je α supremum skupa $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$. Pretpostavimo da $\alpha \notin C$. Tada postoji $\beta < \alpha$ takav da je $\max A_\beta \geq \alpha$. Budući da je $\alpha = \bigcup\limits_{n\in\omega} \alpha_n$, te vrijedi $\beta \in \alpha$, tada postoji $n \in \omega$ takav da je $\beta \in \alpha_n$, tj. vrijedi $\beta < \alpha_n$. Slijedi $\max A_\beta < \alpha_n$. S druge strane je $\max A_\beta \geq \bigcup\limits_{k\in\omega} \alpha_k \geq \alpha_n$, što je kontradikcija s $\max A_\beta < \alpha_n$. Time smo pokazali da je C zatvoren. Pokažimo da je C neomeđen skup, tj. $\sup C = \omega_1$. Neka je $\gamma < \omega_1$ proizvoljan. Želimo pokazati da postoji $\alpha \in C$ takav da je $\gamma < \alpha$. Pretpostavimo suprotno, tj. da za svaki $\alpha \in C$ vrijedi $\alpha \leq \gamma$. Tada je posebno $\max A_\alpha < \gamma$ za svaki $\alpha \in I_0$. Budući je $\gamma < \omega_1$, tada

je γ prebrojiv ordinal. No, to je nemoguće budući je skup $\bigcup_{\alpha \in I_0} A_\alpha$ neprebrojiv.
Za svaki $k \leq n_0$, neka je $S_k = \{\alpha \in C \mid |A_\alpha \cap \alpha| = k\}$. Pretpostavimo da niti jedan od skupova S_k nije stacionaran. To znači da za svaki $k \leq n_0$ postoji zatvoren i neomeđen skup A_k takav da je $S_k \cap A_k = \emptyset$. Skupovi A_k su zatvoreni i neomeđeni pa je po lemi 3.1.6 i skup $A = \bigcap_{k \leq n_0} A_k$ zatvoren i neomeđen, te vrijedi $S_k \cap A = \emptyset$, za svaki $k \leq n_0$. Slijedi $C \cap A = \bigcup_{k \leq n_0} (S_k \cap A) = \emptyset$, što je kontradikcija sa činjenicom da su C i A zatvoreni i neomeđeni skupovi. Dakle, postoji $k \leq n_0$ takav da je skup S_k stacionaran.

Za svaki $m = 1, \ldots, k$, neka je $f_m(\alpha) = m$-ti element skupa A_α. Ako je $\alpha \in S_k$, tada je $f_k(\alpha)$ k-ti element skupa A_α. Kada bi k-ti element od A_α bio veći ili jednak od α, tada bi vrijedilo $|A_\alpha \cap \alpha| < k$, što je nemoguće. Dakle, vrijedi $f_k(\alpha) < \alpha$. Zbog $f_m(\alpha) < f_k(\alpha)$, za $m < k$ vrijedi $f_m(\alpha) < \alpha$, za svaki $\alpha \in S_k$, tj. funkcije f_m su regresivne. Sada primijenimo k puta teorem 3.2.6 na funkcije f_m, za $m = 1, 2, \ldots, k$.
Za $m = 1$ postoji stacionaran skup $T_1 \subseteq S_k$ i ordinal α_1, takav da je $f_1[T_1] = \alpha_1$.
Za $m = 2$ postoji stacionaran skup $T_2 \subseteq S_1$ i ordinal α_2, takav da je $f_2[T_2] = \alpha_2$.
$\ldots$
Za $m = k$ postoji stacionaran skup $T_k \subseteq S_{k-1}$ i ordinal α_k, takav da je $f_k[T_k] = \alpha_k$. Budući da je $f_i(\alpha) < f_j(\alpha)$ za $i < j$, to su ordinali α_m, $m = 1, 2, \ldots, k$ međusobno različiti. Dobili smo stacionarni skup $T = T_m \subseteq S_k$ i skup $A = \{\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, kardinalnosti k, takav da je $A_\alpha \cap \alpha = A$, za sve $\alpha \in T$.
Neka su $\alpha < \beta \in T$ proizvoljni. Tada vrijedi $A_\alpha \cap \alpha = A_\beta \cap \beta = A$. Ordinal β je iz C, pa zbog $\alpha < \beta$ vrijedi $\max A_\alpha < \beta$. Iz toga je $\max A_\alpha \in \beta$, pa je specijalno i $\gamma \in \beta$, za svaki $\gamma \in A_\alpha$. Slijedi $A_\alpha \subseteq \beta$, pa je $(A_\alpha \setminus \beta) \cap A_\beta = \emptyset$. Tada je $A_\alpha \cap A_\beta = \beta \cap A_\beta = A$. Stoga je $\{A_\alpha \mid \alpha \in T\}$ jedna neprebrojiva podfamilija od $\{A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ koja zadovoljava teorem. $\square$

Poglavlje 4

Silverov teorem

Cantor je postavio hipotezu da je svaki beskonačan skup $S \subseteq \mathbb{R}$ ekvipotentan sa $\mathbb{N}$ ili sa $\mathbb{R}$. Drugim riječima vrijedi $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Ova tvrdnja je poznata kao hipoteza kontinuuma. P. Cohen je 1963. godine dokazao da je Cantorova hipoteza kontinuuma neodlučiva u Zermelo-Fraenkel teoriji. To znači da se u danoj teoriji ne možemo dokazati, a ni opovrgnuti. Opća hipoteza kontinuuma glasi: za svaki ordinalni broj α vrijedi $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. Koristeći tehnike koje smo koristili u prethodna dva poglavlja možemo dokazati generaliziranu hipotezu kontinuuma za singularne kardinale. Singularne i regularne kardinale ćemo definirati u ovom poglavlju.

4.1 Regularni i singularni kardinali

Prvo navodimo osnovne činjenice o kardinalnim brojevima iz kolegija Teorija skupova [2]. Kardinalni broj λ je definiran kao ordinalni broj sa svojstvom da za niti jedan $\alpha < \lambda$ ne postoji bijekcija između α i λ. Kardinalni broj proizvoljnog skupa A je definiran kao najmanji ordinalni broj λ za koji vrijedi $A \sim \lambda$. Oznaka je $k(A)$ ili $|A|$. Definirali smo računske operacije zbrajanja, množenja i eksponenciranja kardinalnih brojeva. Vrijedi Cantorov osnovni teorem koji kaže da za svaki kardinalni broj λ vrijedi $\lambda < 2^\lambda$. Pokazano je da svaki kardinalni broj ima neposrednog sljedbenika, koji označavamo s λ^+.
Sa $\aleph$ označavamo skupovnu operaciju s klase svih ordinalnih brojeva On u klasu svih beskonačnih kardinalnih brojeva koja je pomoću rekurzije definirana ovako:

$$\begin{aligned} \aleph_0 &= \omega, \\ \aleph_{\beta+1} &= \aleph_\beta^+, \\ \aleph_\alpha &= \sup\{\aleph_\beta \mid \beta < \alpha\}, \text{ ako je } \alpha \text{ granični ordinalni broj.} \end{aligned}$$

Definicija 4.1.1. *Neka je $(\alpha_\nu \mid \nu < \vartheta)$ niz ordinala duljine ϑ. Kažemo za niz da je rastući ako $\alpha_\nu < \alpha_\mu$ za $\nu < \mu < \vartheta$. Ako je ϑ granični ordinal i ako je $(\alpha_\nu \mid \nu < \vartheta)$ rastući niz* *ordinala, tada definiramo* $\alpha = \lim_{\nu \to \vartheta} \alpha_\nu = \sup\{\alpha_\nu \mid \nu < \vartheta\}$. *Ordinal* α *zovemo limes rastućeg niza* $(\alpha_\nu \mid \nu < \vartheta)$.

Definicija 4.1.2. *Za beskonačni kardinal* κ *kažemo da je singularan ako postoji rastući niz ordinala* $(\alpha_\nu \mid \nu < \vartheta)$ *takav da je* $\alpha_\nu < \kappa$ *za svaki* $\nu < \vartheta$*, te je* ϑ *ograniceni ordinal manji od* κ *i vrijedi* $\kappa = \lim_{\nu \to \vartheta} \alpha_\nu$. *Za beskonačni kardinal koji nije singularan ćemo reći da je regularan.*

U prethodnom poglavlju smo definirali pojam neomeđenog podskupa od ω_1 (definicija 3.1.1). Sada definiciju proširujemo za svaki podskup od proizvoljnog kardinala κ.

Definicija 4.1.3. *Neka je* κ *ordinal. Za skup* $X \subseteq \kappa$ *ćemo reći da je omeđen ako je* $\sup X < \kappa$. *Ako je* $\sup X = \kappa$ *reći ćemo da je* X *neomeđen.*

Teorem 4.1.4. *Neka je* κ *regularan kardinal.*
(a) Ako je $X \subseteq \kappa$ *takav da* $|X| < \kappa$ *tada je* X *omeđen (ima supremum manji od* κ*). Svaki neomeđeni podskup od* κ *je kardinalnosti* κ*.*
(b) Ako je $\lambda < \kappa$ *i* $f : \lambda \to \kappa$*, tada je* $f[\lambda]$ *omeđen.*

Dokaz. a) Jasno je ako X ima najveći element. Ako X nema najveći element, tada se X može dobro urediti do skupa koji je sličan sa graničnim ordinalom. To znači da postoji rastuća enumeracija od X,tj. $X = \{\alpha_\nu \mid \nu < \vartheta\}$, gdje je ϑ granični ordinal (nema maksimum). Iz $|\vartheta| = |X| < \kappa$ slijedi $\vartheta < \kappa$. Budući je κ regularan slijedi $\sup X = \lim_{\nu \to \vartheta} \alpha_\nu < \kappa$.
(b) Vrijedi $|f[\lambda]| \leq \lambda < \kappa$. Sada tvrdnja slijedi iz (a) dijela. □

Primjer singularnog kardinala je $\aleph_\omega$. Vrijedi $\aleph_\omega = \lim_{n \to \omega} \aleph_n$, gdje je $\omega < \aleph_\omega$ i $\aleph_n < \aleph_\omega$ za svaki $n \in \omega$. Slično se pokaže da su $\aleph_{\omega+\omega}, \aleph_{\omega\cdot\omega}, \aleph_{\omega_1}$ singularni kardinali. S druge strane, $\aleph_0$ je primjer regularnog kardinala.

Lema 4.1.5. *Neka je beskonačni kardinal* κ *singularan. Tada se* κ *može prikazati kao suma:*

$$\kappa = \sum_{i \in I} \kappa_i,$$

gdje je $|I| < \kappa$ *i* $\kappa_i < \kappa$ *za svaki* $i \in I$*.*

Dokaz. Neka je κ singularan. Tada postoji rastući tranfinitan niz takav da je $\kappa = \lim_{\nu \to \vartheta} \alpha_\nu$, gdje je $\vartheta < \kappa$ i $\alpha_\nu < \kappa$, za svaki $\nu < \vartheta$. Ako to drugačije zapišemo, dobijamo iduće:

$$\kappa = \bigcup_{\nu < \vartheta} \alpha_\nu = \bigcup_{\nu \in \vartheta} (\alpha_\nu \setminus \bigcup_{\varepsilon < \nu} \alpha_\varepsilon).$$

Ako stavimo $A_\nu = \alpha_\nu \setminus \bigcup\limits_{\varepsilon<\nu} \alpha_\varepsilon$, tada je $(A_\nu \mid \nu < \vartheta)$ niz sa $\vartheta < \kappa$ članova i kardinalnosti $\kappa_\nu = |A_\nu| = |\alpha_\nu \setminus \bigcup\limits_{\varepsilon<\nu} \alpha_\varepsilon| \leq |\alpha_\nu| \leq \kappa$. Za $\mu < \nu < \vartheta$ vrijedi $A_\nu \cap A_\mu \subseteq (\alpha_\nu \setminus \bigcup\limits_{\varepsilon<\nu} \alpha_\varepsilon) \cap \alpha_\mu = \emptyset$ zbog $\alpha_\mu \subseteq \bigcup\limits_{\varepsilon<\nu} \alpha_\varepsilon$. Slijedi da su skupovi A_ν u parovima disjunktni, pa vrijedi $\kappa = \sum\limits_{\nu<\vartheta} \kappa_\nu$. □

Definicija 4.1.6. *Za $\aleph_\alpha$ kažemo da je granični kardinal ako je α granični ordinal.*

Ako je $\alpha > 0$ tada je $\aleph_\alpha$ limes niza $(\aleph_\beta \mid \beta < \alpha)$.

Teorem 4.1.7. *Za svaki kardinal $\aleph_\alpha$ je njegov sljedbenik $\aleph_{\alpha+1}$ regularan kardinal.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da je $\aleph_{\alpha+1}$ singularan. Tada se po prethodnoj lemi $\aleph_{\alpha+1}$ može zapisati kao $\aleph_{\alpha+1} = \sum\limits_{i\in I} \kappa_i$, gdje je $|I| < \aleph_{\alpha+1}$ i $\kappa_i < \aleph_{\alpha+1}$ za svaki $i \in I$. Tada je $|I| \leq \aleph_\alpha$ i $\kappa_i < \aleph_\alpha$ za svaki $i \in I$. Iz toga slijedi

$$\aleph_{\alpha+1} = \sum_{i\in I} \kappa_i \leq \sum_{i\in I} \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \cdot |I| \leq \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha.$$

Dobili smo kontradikciju, pa zaključujemo da je $\aleph_{\alpha+1}$ regularan. □

Zbog prethodnog teorema je svaki singularan kardinal ujedno i granični kardinal. Idući rezultat nam govori da postoje jako veliki singularni kardinali.

Lema 4.1.8. *Postoje proizvoljno veliki singularni kardinali.*

Dokaz. Neka je $\aleph_\alpha$ proizvoljan beskonačni kardinal. Tada je $(\aleph_{\alpha+n})_{n\in\omega}$ rastući niz ordinala i vrijedi $\lim\limits_{n\to\omega} \aleph_{\alpha+n} = \aleph_{\alpha+\omega}$. Stoga je $\aleph_{\alpha+\omega}$ singularni kardinal veći od $\aleph_\alpha$. □

Svi neprebrojivi granični ordinali koje smo do sada razmatrali su bili singularni. Pitanje je postoje li neprebrojivi regularni granični ordinali. Pretpostavimo da je $\aleph_\alpha$ jedan takav kardinal. Kako je α granični ordinal, tada imamo da je $\aleph_\alpha = \lim\limits_{\beta\to\alpha} \aleph_\beta$, tj. $\aleph_\alpha$ je limes rastućeg niza duljine α. Kako je $\aleph_\alpha$ regularan nužno je $\alpha \geq \aleph_\alpha$ (inače bi po definiciji bio singularan), što zajedno sa $\alpha \leq \aleph_\alpha$ daje $\alpha = \aleph_\alpha$.
Ovo svojstvo već ukazuje na to da bi α morao biti jako velik. Idući rezultat nam pokazuje da to svojstvo vrijedi i za neke singularne kardinale.

Lema 4.1.9. *Postoje proizvoljno veliki singularni kardinali takvi da vrijedi $\aleph_\alpha = \alpha$.*

Dokaz. Neka je $\aleph_\gamma$ proizvoljan kardinal. Definirajmo niz na idući način:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \omega_\gamma,\\
\alpha_1 &= \omega_{\alpha_0} = \omega_{\omega_\gamma},\\
&\dots\\
\alpha_{n+1} &= \omega_{\alpha_n},\\
&\dots
\end{aligned}$$

za sve $n \in \omega$. Neka je $\alpha = \lim\limits_{n\to\omega} \alpha_n$. Iz toga je $\aleph_\alpha = \lim\limits_{n\to\omega} \aleph_{\alpha_n} = \lim\limits_{n\to\omega} \alpha_{n+1} = \alpha$.
Kako je $\aleph_{\alpha_n} < \aleph_\alpha$ za svaki $n \in \omega$ i $\omega < \aleph_\alpha$, slijedi da je $\aleph_\alpha$ singularan. □

Neprebrojivi kardinali koji su granični i regularni zovu se nedostizivi kardinali. Dokazano se da je nemoguće dokazati postojanje nedostizivih kardinala koristeći se samo Zermelo-Fraenkelovom teorijom.

Definicija 4.1.10. *Ako je α granični ordinal, tada definiramo kofinalnost od α, u iznaci cf(α) kao najmanji ordinal ϑ takav da je α limes rastućeg niza ordinala duljine ϑ.*

Napomena 4.1.11. Primijetimo da je $\mathrm{cf}(\alpha)$ granični ordinal i da vrijedi $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \alpha$. Iz toga slijedi da je $\aleph_\alpha$ singularan kardinal ako je $\mathrm{cf}(\omega_\alpha) < \omega_\alpha$, a regularan ako je $\mathrm{cf}(\omega_\alpha) = \omega_\alpha$.

Lema 4.1.12. *Ako granični ordinal α nije kardinal tada je cf(α) $< \alpha$.*

Dokaz. Neka je α granični ordinal koji nije kardinal. Neka je $\kappa = |\alpha|$. Postoji bijekcija između skupova κ i α, tj. postoji niz $(\alpha_\nu \mid \nu < \kappa)$ duljine κ takav da je $\{\alpha_\nu \mid \nu < \kappa\} = \alpha$. Sada možemo pronaći (po transfinitnoj rekurziji) rastući podniz čiji je limes α. Budući da je duljina niza najviše κ, te je $\kappa = |\alpha| < \alpha$ (jer α nije kardinal), slijedi $\mathrm{cf}(\alpha) < \alpha$. □

Korolar 4.1.13. *Neka je α granični ordinal. Tada je cf(α) $= \alpha$ ako i samo ako je α regularan kardinal.*

Lema 4.1.14. *Za svaki granični ordinal α vrijedi cf(cf(α)= cf(α).*

Dokaz. Neka je $\vartheta = \mathrm{cf}(\alpha)$. Tada je ϑ granični ordinal i vrijedi $\gamma = \mathrm{cf}(\vartheta) \leq \vartheta$. Pretpostavimo da je $\gamma < \vartheta$. Tada postoji rastući niz ordinala $(\nu_\varepsilon \mid \varepsilon < \gamma)$ takav da je $\lim\limits_{\varepsilon\to\gamma} \nu_\varepsilon = \vartheta$. Kako je $\vartheta = \mathrm{cf}(\alpha)$, postoji rastući niz ordinala $(\alpha_\nu \mid \nu < \vartheta)$ takav da je $\lim\limits_{\nu\to\vartheta} \alpha_\nu = \alpha$. Tada je niz $(\alpha_{\nu_\varepsilon} \mid \varepsilon < \gamma)$ rastući, duljine γ i za njega vrijedi $\lim\limits_{\varepsilon\to\gamma} \alpha_{\nu_\varepsilon} = \alpha$. Budući je $\gamma < \vartheta$, dobili smo kontradikciju sa činjenicom da je $\vartheta = \mathrm{cf}(\alpha)$. □

Korolar 4.1.15. *Za svaki granični ordinal α je cf(α) regularan kardinal.*

Definicija 4.1.16. *Za beskonačni kardinal $\aleph_\alpha$ kažemo da je jaki granični kardinal ako vrijedi $2^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$ za svaki $\beta < \alpha$.*

Jasno je da je svaki jaki granični kardinal ujedno i granični kardinal. Naime, ako je $\aleph_\alpha = \aleph_{\gamma+1}$, tada je $2^{\aleph_\gamma} \geq \aleph_{\gamma+1} = \aleph_\alpha$. Pokazuje se da ukoliko vrijedi generalizirana hipoteza kontinuma, da je tada svaki granični ordinal ujedno i jako granični ordinal.
Sljedeći rezultat ćemo često koritistii u dokazu Silverovog teorema.

Teorem 4.1.17. *Ako je $\aleph_\alpha$ jaki granični kardinal i ako su κ i λ beskonačni kardinali takvi da je $\kappa < \aleph_\alpha$, i $\lambda < \aleph_\alpha$. Tada vrijedi $\kappa^\lambda < \aleph_\alpha$.*

Dokaz. Vrijedi $\kappa^\lambda \leq (\kappa \cdot \lambda)^{\kappa\cdot\lambda} = 2^{\kappa\cdot\lambda} = 2^{\max\{\kappa,\lambda\}} < \aleph_\alpha$. □

4.2 Silverov teorem

Sada smo spremni za dokaz Silverovog teorema. Dokaz će sljediti iz četiri leme, te prethodno dokazanog iz prošlih poglavlja.

Teorem 4.2.1. *(Silverov teorem) Neka je $\aleph_\lambda$ singularni kardinal takav da je cf(λ) $> \omega$. Ako za svaki $\alpha < \lambda$ vrijedi $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, tada je $2^{\aleph_\lambda} = \aleph_{\lambda+1}$.*

Dokazat ćemo Silverov teorem za specijalni slučaj $\aleph_\lambda = \aleph_{\omega_1}$ koristeći teoriju o stacionarnim podskupovima od ω_1. Općenita tvrdnja se može dokazati na sličan način, koristeći opću teoriju o stacionarnim podskupovima. Stoga u nastavku koristimo pretpostavku:

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} \text{ za svaki } \alpha < \omega_1. \tag{4.1}$$

Neka je $\alpha < \omega_1$ proizvoljan. Iz (4.1) slijedi $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} < \aleph_{\omega_1}$. tj. $\aleph_{\omega_1}$ je jaki granični kardinal. Budući da je $\aleph_1, \aleph_\alpha < \aleph_{\omega_1}$ po teoremu 4.1.17 slijedi $\aleph_\alpha^{\aleph_1} < \aleph_{\omega_1}$. Budući da je $2 \leq \alpha$, tada je

$$2^{\aleph_1} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_1} < \aleph_{\omega_1}. \tag{4.2}$$

Posljedicu (4.2) ćemo često koristiti u ovom poglavlju.

Definicija 4.2.2. *Neka su f i g dvije funkcije na ω_1. Kažemo da su funkcije f i g gotovo disjunktne ako postoji $\alpha < \omega_1$ takav da $f(\beta) \neq g(\beta)$, za svaki $\beta \geq \alpha$.*

Lema 4.2.3. *Neka je $\{A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ familija skupova takva da je $|A_\alpha| \leq \aleph_\alpha$ za svaki $\alpha < \omega_1$, te neka je F familija gotovo disjunktnih funkcija za koju vrijedi*

$$F \subseteq \prod_{\alpha<\omega_1} A_\alpha.$$

Tada je $|F| < \aleph_{\omega_1}$.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $A_\alpha \subseteq \omega_\alpha$, za svaki $\alpha < \omega_1$. Neka je S_0 skup svih graničnih ordinala, manjih od ω_1. Za svaki $f \in F$ i $\alpha \in S_0$ sa $f^*(\alpha)$ označimo najmanji β takav da je $f(\alpha) < \omega_\beta$. Budući da je $f(\alpha) \in A_\alpha \subseteq \omega_\alpha$, te $f(\alpha) < \omega_\beta \leq \omega_\alpha$, slijedi $f^*(\alpha) = \beta < \alpha$. Dakle, funkcija f^* je regresivna na stacionarnom skupu S_0. Po teoremu 3.2.6 postoji stacionaran skup $S \subseteq S_0$ takav da je f^* konstanta na S. Zato je $f_{|S}$ funkcija sa S u ω_β, za neki $\beta < \omega_1$. Označimo tu funkciju $f_{|S}$ sa $\varphi(f)$.
Neka su f i g različite funkcije iz F. Tada postoji $\alpha < \omega_1$ takav da je $f(\beta) \neq g(\beta)$ za svaki $\beta \geq \alpha$. Jasno je da su $\varphi(f)$ i $\varphi(g)$ različite ukoliko su im domene različite. Neka su $\varphi(f)$ i $\varphi(g)$ funkcije koje imaju istu domenu, te neka je skup S domena funkcija $\varphi(f)$ i $\varphi(g)$. Budući da je S neomeđen, slijedi da su funkcije $g_{|S}$ i $f_{|S}$ gotovo disjunktne, pa su $\varphi(f)$ i $\varphi(g)$ različite. Iz toga slijedi da je φ bijekcija s domenom F.
Svaka funkcija $\varphi(f) = f_{|S}$ je definirana na $S \subseteq \omega_1$, te postiže vrijednosti na skupu ω_β, za neki $\beta < \omega_1$. Iz toga slijedi

$$|F| \leq 2^{\aleph_1} \cdot \sum_{\beta<\omega_1} \aleph_\beta^{\aleph_1} \leq \aleph_{\omega_1}.$$

□

Lema 4.2.4. *Neka je $F \subset \prod_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$ familija gotovo disjunktnih funkcija takvih da je skup $T = \{\alpha < \omega_1 \mid |A_\alpha| \leq \aleph_\alpha\}$ stacionaran. Tada vrijedi $|F| \leq \aleph_{\omega_1}$.*

Dokaz. Dokaz ide slično kao u dokazu leme 4.2.3. Definiramo stacionaran skup $S_0 = \{\alpha \in T \mid \alpha \text{ je granični ordinal}\}$. Ostatak dokaza je isti. □

Lema 4.2.5. *Neka je f funkcija na ω_1 takva da je $f(\alpha) < \aleph_{\alpha+1}$ za svaki $\alpha < \omega_1$. Neka je F familija gotovo disjunktnih funkcija na ω_1 i neka je*

$$F_f = \{g \in F \mid \text{za neki stacionaran skup } T \subseteq \omega_1, g(\alpha) < f(\alpha) \text{ za sve } \alpha \in T\}.$$

Tada je $|F_f| \leq \aleph_{\omega_1}$.

Dokaz. Neka je T fiksirani stacionarni skup. Tada po lemi 4.2.4 skup $\{g \in F \mid g(\alpha) < f(\alpha) \text{ za sve } \alpha \in T\}$ ima kardinalnost najviše $\aleph_{\omega_1}$. Zato je sada $|F| \leq 2^{\aleph_1} \cdot \aleph_{\omega_1} = \aleph_{\omega_1}$. □

Iduća lema nam je ključna u dokazu Silverovog teorema. Prije toga navodimo iskaz jednog teorama koji nam je bitan za dokaz iduce leme.

Teorem 4.2.6. *Ako je $(A, <)$ linearan uređaj za koji vrijedi $|\{y \in A \mid y < x\} < \aleph_\gamma$ za svaki $x \in A$. Tada vrijedi $|A| \leq \aleph_\gamma$.*

Dokaz prethodnog teorema možete vidjeti u [1] (to je teorem 1.14 u poglavlju 8).

Lema 4.2.7. *Neka je $\{A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ familija skupova takva da je $|A_\alpha| \leq \aleph_{\alpha+1}$, za svaki $\alpha < \omega_1$, i neka je $F \subset \prod_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$ familija gotovo disjunktnih funkcija. Tada je $|F| \leq \aleph_{\omega_1+1}$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ ultrafilter na ω_1 koji proširuje filter koji je zatvoren i neomeđen. Taj filter je definiran sa (3.1). Tada je svaki $S \in \mathcal{U}$ zatvoren i neomeđen, pa ujedno i stacionaran. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $A_\alpha \subseteq \omega_{\alpha+1}$ za svaki $\alpha < \omega_1$. Definirajmo relaciju < na F na idući način:

$$f < g \text{ ako i samo ako je } \{\alpha < \omega_1 \mid f(\alpha) < g(\alpha)\} \in \mathcal{U}.$$

Pokažimo da je relacija < linearan uređaj na F. Ako je $f < g$ i $g < h$ tada je

$$\{\alpha < \omega_1 \mid f(\alpha) < h(\alpha)\} \supseteq \{\alpha < \omega_1 \mid f(\alpha) < g(\alpha)\} \cap \{\alpha < \omega_1 \mid g(\alpha) < h(\alpha)\} \in \mathcal{U}.$$

Iz toga je $\{\alpha < \omega_1 \mid f(\alpha) < h(\alpha)\} \in \mathcal{U}$, pa je $f < h$.
Neka su $f, g \in F$ različite. Budući su f i g gotovo disjunktne, tada je skup $\{\alpha < \omega_1 \mid f(\alpha) = g(\alpha)\}$ najviše prebrojiv, pa nije element ultrafiltra $\mathcal{U}$. Zbog toga točno jedan od skupova $\{\alpha < \omega_1 \mid f(\alpha) < g(\alpha)\}$, $\{\alpha < \omega_1 \mid g(\alpha) < f(\alpha)\}$ pripada $\mathcal{U}$. Stoga je ili $f < g$ ili $g < f$. Slijedi da je < linearan uređaj na F.
Ako su $f, g \in F$ i $g < f$ tada

$$g \in F_f = \{g \in F \mid \text{za neki stacionaran skup } T \subseteq \omega_1, g(\alpha) < f(\alpha) \text{ za sve } \alpha \in T\}.$$

Po lemi 4.2.5 je $|F_f| \leq \aleph_{\omega_1}$. Zbog toga za svaki $f \in F$ vrijedi $|\{g \in F \mid g < f\} \leq \aleph_{\omega_1} < \aleph_{\omega_1+1}$. Budući da je < linearan uređaj na F, tada po teoremu 4.2.6 vrijedi $|F| \leq \aleph_{\omega_1+1}$. □

Sada konačno dokazujemo Silverov teorem za $\lambda = \omega_1$.

Dokaz Silverovog teorema. Za svaki $\alpha < \omega_1$ neka je $A_\alpha = \mathcal{P}(\omega_\alpha)$. Kako je $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ imamo da je $|A_\alpha| = 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. Za svaki $X \subseteq \omega_{\omega_1}$ neka je $f_X \in \prod_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$ funkcija definirana sa $f_X(\alpha) = X \cap \omega_\alpha$. Neka su $X, Y \subseteq \omega_{\omega_1}$ međusobno različiti. Zbog toga postoji $\alpha < \omega_1$ takav da $X \cap \omega_\beta \neq Y \cap \omega_\beta$ za svaki $\beta \geq \alpha$. Slijedi da su funkcije f_X i f_Y gotovo disjunktne. Stoga je $F = \{f_X \mid X \in \mathcal{P}(\omega_{\omega_1})\}$ familija gotovo disjunktnih funkcija. Po lemi 4.2.7 slijedi $|F| \leq \aleph_{\omega_1+1}$. Stoga je $2^{\aleph_{\omega_1}} = |\mathcal{P}(\omega_{\omega_1})| \leq \aleph_{\omega_1+1}$. Po Cantorovom teoremu slijedi $2^{\aleph_{\omega_1}} > \aleph_{\omega_1}$, tj. $2^{\aleph_{\omega_1}} \geq \aleph_{\omega_1+1}$. Konačno dobijamo $2^{\aleph_{\omega_1}} = \aleph_{\omega_1+1}$. □

Bibliografija

[1] K. Hrbacek i T. Jeh, *Introduction to Set Theory*, Third Edition, Revised and Expanded, Marcel Dekker Inc., 1999.

[2] M. Vuković, *Teorija skupova*, nastavni materijal za istoimeni kolegij na prediplomskom studiju 2014./15., `https://www.math.pmf.unizg.hr/sites/default/files/pictures/ts-skripta-2015.pdf`.

Sažetak

U ovom diplomskom radu smo proučavali filtre i ultrafiltre, te njihovu primjenu. Cilj rada je bio dokazati Silverov teorem, tj. generaliziranu hipotezu kontinuuma za singularne kardinale.

U poglavlju 1 smo promatrali filtre i ideale, te njihove primjere. Definirali smo pojam glavnog filtra, te maksimalnog filtra. Dokazali smo da je presjek filtera opet filter, te da je unija ideala opet ideal. Dokazali smo da filtri imaju svojstvo konačnih presjeka i da se svaka familija sa tim svojstvom može proširiti do filtera. U ovom poglavlju smo definirali i gustoću na skupu prirodnih brojeva.

Nakon filtera, u poglavlju 2 proučavali smo ultrafiltere koji su zapravo maksimalni filtri. Svaki filter se može proširiti do ultrafiltra. Pomoću ultrafiltera smo definirali $\mathcal{U}$-limes, pomoću kojeg smo definirali netrivijalnu mjeru na skupu prirodnih brojeva. Osim toga dokazali smo da je $\mathcal{U}$-limes linearan, te da je za konvergenciju niza dovoljno da niz bude ograničen.

U poglavlju 3 smo prvo definirali zatvorene neomeđene skupove. Dokazali smo da je prebrojivi presjek zatvorenih neomeđenih skupova ponovo zatvoren i neomeđen. Definirali smo i zatvoreni neomeđeni filter čije proširenje do ultrafiltera smo iskoristili prilikom dokaza Silverovog teorema. Nakon zatvorenih neomeđenih skupova smo definirali stacionarne skupove. Najvažniji rezultat u ovom poglavlju je teorem 3.2.6 koji kaže da je skup S stacionaran ako i samo ako je svaka regresivna funkcija na S konstanta na nekom neomeđenom podskupu od S. Svojstva stacionarnih skupova smo također koristili u dokazu Silverovog teorema.

Silverov teorem dokazali smo u poglavlju 4. Prije iskaza teorema smo definirali pojmove regularnih i singularnih kardinalnih brojeva, te pojam kofinalnosti za granični ordinalni broj. Nakon toga smo pomoću niza lema dokazali Silverov teorem.

Summary

In this graduate thesis we have studied filters and ultrafilters, and their application. The goal of this graduate thesis was to prove the Silver theorem, ie. the generalized hypothesis of continuum for singular cardinals.

In chapter 1 we have studied the filters and ideals and their examples. We defined the concept of the principal filter and the maximal filter. We proved that intersection of filters is again filter, and that the union of ideals is ideal again. We proved that filters have a finite intersection property and that any collection with this property can be exdend to some filter. In this chapter we also defined the density on the set of natural numbers.

Next, in the chapter 2 we studied ultrafilters which are actually maximal filters. Each filter can be extended to ultrafilter. By using the ultrafilters we have defined $\mathcal{U}$-limes, by which we have defined the nontrivial measure at the set of natural numbers. In addition, we proved that $\mathcal{U}$-limes is linear, and that for the convergence of sequence is sufficient that the array is limited.

In chapter 3 first we defined closed unbounded sets. We proved that the intersection of countably many closed unbounded sets is closed unbounded. We have also defined a closed unbounded filter whose extension to the ultrafilter was used in proof of Silver's theorem. After closed unbounded sets we defined stationary sets. The most significant result in this chapter is the theorem 3.2.6 which states that the set S is stationary if and only if every regressive function at S is constant on an unbounded subset of S. The properties of stationary sets were also used in the proof of Silver's theorem.

Silver's theorem has been proven in the chapter 4. Before the theorem we have defined the regular and singular cardinal numbers, and the cofinality for the limit ordinal number. Then, by use of several lemmas, we proved Silver's theorem.

Životopis

Rođen sam 1. lipnja 1994. godine u Kelheimu, SR Njemačka. Upisujem osnovnu školu Ivan Goran Kovačić 2001. godine u Gradačcu, Bosna i Hercegovina. Na razini Federacije Bosne i Hercegovine sam u 6. razredu osvojio prvo mjesto iz matematike, a u 8. razredu sam osvojio drugo mjesto iz fizike. Nakon osnovnoškolkog obrazovanja upisujem XV gimnaziju u Zagrebu. Tokom srednje škole sam dva puta sudjelovao na državnom natjecanju u Hrvatskoj. Nakon srednje škole, 2013. godine, upisujem prediplomski studij Matematika na PMF-MO. Nakon završetka prediplomskog studija upisujem diplomski studij Matematička statistika na istom fakultetu. Prosjek studiranja je mi je oko 4.0. Trenutno sam još uvijek student.