Američka put opcija u Black-Scholes-Mertonovom modelu

Galenić, Marko

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marko Galenić

AMERIČKA PUT OPCIJA U BLACK-SCHOLES-MERTONOVOM MODELU

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Zoran Vondraček

Zagreb, srpanj, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojem bebaču

Sadržaj

Uvod

Ovaj rad će se fokusirati na model financijskog tržišta gdje su cijene predvođene D dimenzionalnim Brownovim gibanjem koje intuitivno predstavlja D-rizika u svijetu.

U preliminarnom poglavlju uvodimo osnovne pojmove i rezultate stohastičke analize potrebne za proučavanje modela. Posebno je zanimljiva konstrukcija stohastičkog integrala, gdje želimo integrirati u odnosu na put nekog neprekidnog martingala M. Problem se pojavljuje u tome što gotovo sigurno svaki put martingala nema konačnu varijaciju, a iz osnova analize znamo da se ne može integrirati u odnosu na takvu funkciju. Zato se ne može definirati integral "po putevima" nego "u srednjem".

U prvome dijelu ćemo proučiti pojmove portfolia, dobitka, arbitraže i potpunosti tržišta. U drugome dijelu ćemo se osvrnuti na američke slučajne zahtjeve i proučiti ponašanje njihovih vrijednosti u našem modelu, specifično američke put opcije i njezine vrijednosti $p(t, x)$ u vremenu t sa cijenom dionice x. Glavna razlika između europskih i američkih slučajnih zahtjeva je ta da se američki zahtjevi mogu iskoristiti u bilo kojem trenutku dok se europski mogu iskoristiti samo u terminalnom vremenu T. Zbog toga se postavlja prirodno pitanje da li postoji optimalno vrijeme izvršenja američkog slučajnog zahtjeva, u kojem se maksimizira dobit. Tu se pojavljuje fundamentalan pojam Snellovog omotača. Na kraju ćemo dokazati teorem gdje vrijednost američke put opcije zadovoljava određenu paraboličku parcijalnu diferencijalnu jednadžbu.

Poglavlje 1

Osnove stohastičke analize

Svi rezultati u ovom poglavlju se mogu naći u [4] i [3] dodatak D.

1.1 Slučajni procesi, vremena zaustavljanja i martingali

Definicija 1.1.1. *Neka su* $(\Omega, \mathscr{F})$ *i* $(S, \mathscr{S})$ *izmjerivi prostori. Za funkciju* $X : [0, \infty) \times \Omega \to S$ *kažemo da je slučajan proces, ako vrijedi da je* $X(t, \cdot)$ *slučajna varijabla za svaki* $t \geq 0$.

U nastavku ovog poglavlja kod nas će biti $(S, \mathscr{S}) = (\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$. Također, umjesto $X(t, \omega)$ ćemo pisati $X_t(\omega)$. Čak i ako nije implicitno rečeno, podrazumijevat ćemo da je prostor elementarnih događaja uvijek $(\Omega, \mathscr{F})$.

Definicija 1.1.2. *Neka je* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor i* X, Y *slučajni procesi. Kažemo da je* Y *modifikacija od* X *ako za svaki* $t \geq 0$ *vrijedi* $P(X_t = Y_t) = 1$.

Definicija 1.1.3. X *i* Y *su nerazlučivi ako se gotovo svi njihovi putevi podudaraju:*

$$P[X_t = Y_t; \forall 0 \leq t < \infty] = 1.$$

Jasno je da nerazlučivost povlači modifikaciju. Obratno nije istinito.

Definicija 1.1.4. *Za slučajan proces* X *kažemo da je izmjeriv ako, za svaki* $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$*, skup* $\{(t, \omega); X_t(\omega) \in A\}$ *pripada* σ*-algebri* $\mathscr{B}([0, \infty)) \times \mathscr{F}$*, to jest* X *je izmjerivo preslikavanje u paru* σ*-algebri* $(\mathscr{B}([0, \infty)) \times \mathscr{F}, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$.

Definicija 1.1.5. *Filtracija na izmjerivom prostoru* $(\Omega, \mathscr{F})$ *je neopadajuća familija* σ*-podalgebri* $\{\mathscr{F}_t; t \geq 0\}$*, to jest* $\mathscr{F}_s \subseteq \mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F}$ *za svaki* $0 \leq s < t < \infty$.
Definiramo $\mathscr{F}_{t-} := \sigma(\bigcup_{s<t} \mathscr{F}_s)$ *i* $\mathscr{F}_{t+} := \sigma(\bigcap_{\epsilon>0} \mathscr{F}_{t+\epsilon})$*. Po konvenciji stavljamo* $\mathscr{F}_{0-} := \mathscr{F}_0$.
Kažemo da je filtracija $\{\mathscr{F}_t\}$ *neprekidna zdesna (slijeva) ako* $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+}$ $(\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t-})$*, za svaki* $t \geq 0$.

Definicija 1.1.6. *Slučajni proces X je adaptiran s obzirom na filtraciju* $\{\mathscr{F}_t\}$ *ako za svaki* $t \geq 0$, X_t *je* $\mathscr{F}_t$*-izmjeriva slučajna varijabla.*

Definicija 1.1.7. *Slučajni proces X je progresivno izmjeriv u odnosu na filtraciju* $\{\mathscr{F}_t\}$ *ako je za svaki* $t \geq 0$ *preslikavanje*

$$X(\cdot, \cdot) : [0, t] \times \Omega \to \mathbb{R}^d$$

izmjerivo u paru σ-algebri $(\mathscr{B}([0, t]) \times \mathscr{F}_t, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$.

Progresivna izmjerivost očito povlači izmjerivost i adaptiranost.

Definicija 1.1.8. *Neka je T slučajna varijabla s vrijednostima u* $[0, \infty]$. *Kažemo da je T vrijeme zaustavljanja u odnosu na filtraciju* $\{\mathscr{F}_t\}$ *ako vrijedi* $\{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t$ *za svaki* $t \geq 0$. *Kažemo da je T slabo vrijeme zaustavljanja ako vrijedi* $\{T < t\} \in \mathscr{F}_t$ *za svaki* $t \geq 0$.

Definicija 1.1.9. *Neka je T vrijeme zaustavljanja, S slabo vrijeme zaustavljanja u odnosu na filtraciju* $\{\mathscr{F}_t\}$. *Definiramo skupove* $\mathscr{F}_T$ *i* $\mathscr{F}_{S+}$ *od svih događaja* $A \in \mathscr{F}$ *tako da vrijedi* $A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t$ *i* $A \cap \{S \leq t\} \in \mathscr{F}_{t+}$, *respektivno, za svaki* $t \geq 0$.
Također, definiramo funkciju $X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$ *na skupu* $\{T < \infty\}$. *Ako je* $X_\infty(\omega)$ *definiran za svaki* $\omega \in \Omega$, *možemo definirati* $X_T(\omega) := X_\infty(\omega)$ *na skupu* $\{T < \infty\}$.

Lema 1.1.1. $\mathscr{F}_T$ *i* $\mathscr{F}_{S+}$ *su σ-algebre i T je* $\mathscr{F}_T$*-izmjeriva. Također, ako je X izmjeriv i T je konačno,* X_T *je slučajna varijabla.*

Propozicija 1.1.1. *Neka je X progresivno izmjeriv proces i T vrijeme zaustavljanja u odnosu na filtraciju* $\{\mathscr{F}_t\}$. *Onda je slučajna varijabla* X_T *definirana na skupu* $\{T < \infty\}$ $\mathscr{F}_T$*-izmjeriva i zaustavljeni proces* $\{X_{T\wedge t}, \mathscr{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ *je progresivno izmjeriv.*

Sljedeća definicija će nam biti bitna kod definiranja stohastičkih integrala i kod Doob-Meyerove dekompozicije.

Definicija 1.1.10. *Neka je* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor. Kažemo da filtracija* $\{\mathscr{F}_t\}$ *zadovoljava uobičajene uvjete ako je neprekidna zdesna i* $\mathscr{F}_0$ *sadrži sve P-nul skupove od* $\mathscr{F}$.

Sada ćemo uvesti koncept martingala s neprekidnim vremenom i osnovne rezultate o njima koji će nam biti potrebni za definiranje stohastičkih integrala.

Dalje pretpostavljamo da imamo slučajni proces $X = \{X_t; 0 \leq t < \infty\}$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathscr{F}_t\}$ i tako da vrijedi $E|X_t| < \infty$ za svaki $t \geq 0$.

Definicija 1.1.11. *Proces $\{X_t, \mathscr{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ je submartingal (respektivno, supermartingal) ako, za svaki $0 \leq s < t < \infty$ vrijedi $E(X_t|\mathscr{F}_s) \geq X_s$ (respektivno, $E(X_t|\mathscr{F}_s) \leq X_s$) gotovo sigurno.*
Kažemo da je X martingal ako je i submartingal i supermartingal.

Propozicija 1.1.2. *Neka je $\{X_t, \mathscr{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ martingal (respektivno, submartingal) i $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksna (respektivno, konveksna i neopadajuća) funkcija, tako da vrijedi $E|\varphi(X_t)| < \infty$ za svaki $t \geq 0$. Tada je $\{\varphi(X_t), \mathscr{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ submartingal.*

Vrijede analogni rezultati kao u diskretnom slučaju o broju prelazaka nekog intervala ako prepostavimo zdesna neprekidne puteve.

Neka je X slučajni proces, $\alpha < \beta$ neki realni brojevi i F konačan podskup od $[0, \infty]$. Definiramo broj prelazaka prema gore $U_F(\alpha,\beta; X(\omega))$ na intervalu $[\alpha,\beta]$ na restringiranom putu $\{X_t; t \in F\}$ na ovakav način. Definirajmo slučajna vremena

$$\tau_1(\omega) = \min\{t \in F; X_t(\omega) \leq \alpha\},$$

i za $j = 1, 2, \ldots$ rekurzivno

$$\sigma_j(\omega) = \min\{t \in F; t \geq \tau_j(\omega), X_t(\omega) > \beta\},$$

$$\tau_{j+1}(\omega) = \min\{t \in F; t \geq \sigma_j(\omega), X_t(\omega) < \alpha\}.$$

Konvencija je da je minimum praznog skupa ∞ i stavimo $U_F(\alpha,\beta; X(\omega))$ kao najveći broj j tako da je $\sigma_j(\omega) < \infty$. Ako $I \subset [0, \infty)$ nije konačan, definiramo slično

$$U_I(\alpha,\beta; X(\omega)) = \sup\{U_F(\alpha,\beta; X(\omega)); F \subseteq I, F \text{ konačan}\}.$$

Broj prelazaka prema dolje $D_I(\alpha,\beta; X(\omega))$ definiramo slično pomoću vremena $\tau_j(\cdot)$

Teorem 1.1.1. *Neka je $\{X_t, \mathscr{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ submartingal s zdesna neprekidnim putevima, i neka je $[\sigma, \tau]$ podinterval od $[0, \infty)$, i neka je $\alpha < \beta, \lambda > 0$ realni brojevi. Vrijedi sljedeće:*

1. *Prva submartingalna nejednakost:*

$$\lambda P\Big[\sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t \geq \lambda\Big] \leq E(X_\tau^+)$$

.

2. *Druga sumbartingalna nejednakost:*

$$\lambda P\Big[\inf_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t \leq -\lambda\Big] \leq E(X_\tau^+) - E(X_\sigma)$$

3. *Nejednakost prelazaka prema gore i prema dolje:*

$$EU_{[\sigma,\tau]}(\alpha,\beta;X(\cdot)) \leq \frac{E(X_\tau^+) + |\alpha|}{\beta - \alpha}, \quad ED_{[\sigma,\tau]}(\alpha,\beta;X(\cdot)) \leq \frac{E(X_\tau - \alpha)^+}{\beta - \alpha}.$$

4. *Doobova maksimalna nejednakost:*

$$E\Big(\sup_{\sigma\leq t\leq\tau} X_t\Big)^p \leq \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p E(X_\tau^p), p > 1,$$

pod pretpostavkom da je $X_t \geq 0$ gotovo sigurno za svaki $t \geq 0$ i $E(X_\tau^p) < \infty$.

5. *Regularnost puteva: Gotovo svaki put $\{X_t(\omega); 0 \leq t < \infty\}$ je ograničen na kompaktnim intervalima i nema prekida druge vrste, to jest postoji lijevi limes svuda na $(0,\infty)$.*

Definicija 1.1.12. *Slučajan proces X je RCLL (right-continuous, left limits) proces ako mu je svaki put neprekidan zdesna i ima lijeve limese.*

U prošlom teoremu je ključnu ulogu igrala neprekidnost zdesna po putevima koja će biti bitna i za rezultate konvergencije i Doob-Meyerovu kompoziciju, pa tako i za definiranje stohastičkih integrala. Sljedeći teorem nam govori uvjete pod kojima možemo pretpostaviti da je to istina.

Teorem 1.1.2. *Neka je $\{X_t, \mathscr{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ submartingal i pretpostavimo da $\{\mathscr{F}_t\}$ zadovoljava uobičajene uvjete. Onda proces X ima zdesna neprekidnu modifikaciju ako i samo ako je funkcija $t \to EX_t$ neprekidna zdesna na $[0,\infty)$.*
Ako takva zdesna neprekidna modifikacija postoji, onda se može odabrati tako da je RCLL proces i adaptiran s obzirom na $\{\mathscr{F}_t\}$, pa tako i submartingal u odnosu na $\{\mathscr{F}_t\}$.

U nastavku ćemo se samo baviti sa zdesna neprekidnim (sub)martingalima, ne pretpostavljajući ništa o filtraciji. Kada kažemo "zdesna neprekidan martingal" onda mislimo na puteve, a ne na filtraciju.

Teorem 1.1.3. *(Konvergencija submartingala). Neka je $\{X_t, \mathscr{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ zdesna neprekidan submartingal i pretpostavimo $C := \sup_{t\geq 0} E(X_t^+) < \infty$. Onda $X_\infty(\omega) := \lim_{t\to\infty} X_t(\omega)$ postoji za gotovo svaki $\omega \in \Omega$, i $E|X_\infty| < \infty$.*

Teorem 1.1.4. *(O optimalnom zaustavljanju) Neka je $\{X_t, \mathscr{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ zdesna neprekidan martingal sa zadnjim elementom X_∞ i neka su $S \leq T$ dva slaba vremena zaustavljanja. Tada imamo*

$$E(X_T|\mathscr{F}_{S+}) \geq X_S$$

gotovo sigurno. Ako je S vrijeme zaustavljanja, onda možemo zamjeniti $\mathscr{F}_{S+}$ sa $\mathscr{F}_S$. Posebno, $EX_T \geq EX_0$, i za martingal sa zadnjim elementom imamo $EX_T = EX_0$.

Iz ovoga teorema odmah slijedi da je zaustavljeni submartingal $\{X_t, \mathscr{F}_t; 0 \le t < \infty\}$ opet submartingal.

1.2 Doob-Meyerova dekompozicija i neprekidni, kvadratno integrabilni martingali

U ovom ćemo odjeljku govoriti o poopćenju Doobove dekompozicije na vremenski neprekidne submartingale.
Htjeli bismo imati isti rezultat kao u diskretnom slučaju: $X_t = M_t + A_t$ gdje je X submartingal, M martingal, a A nekakva vrsta "predvidivog" i neopadajućeg procesa. Možemo uočiti da ćemo trebati nekakvu drugu definiciju predvidivosti pošto vrijeme više nije diskretno. Prisjetimo se osnovnih definicija.

Definicija 1.2.1. *Za slučajan niz $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ adaptiran na filtraciju $\{\mathscr{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ kažemo da je neopadajući ako za gotovo svaki $\omega \in \Omega$ imamo $0 = A_0(\omega) \le A_1(\omega) \le \dots$ i $E(A_n) < \infty$ za svaki $n \ge 1$.*
Za neopadajući niz kažemo da je integrabilni ako je $E(A_\infty) < \infty$, gdje je $A_\infty = \lim_{n\to\infty} A_n$.
Za slučajan niz $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ kažemo da je predvidiv ako je za svaki $n \ge 1$ A_n $\mathscr{F}_{n-1}$-izmjeriv.

Sada bi htjeli imati nekakvu karakterizaciju predvidivosti s kojom bi mogli definirati predvidivost u neprekidnom vremenu.

Definicija 1.2.2. *Za neopadajući niz $\{A_n, \mathscr{F}_n; n = 0, 1, \dots\}$ kažemo da je prirodan ako za svaki ograničeni martingal $\{M_n, \mathscr{F}_n; n = 0, 1, \dots\}$ vrijedi*

$$E(M_n A_n) = E \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}(A_k - A_{k-1}), \quad \forall n \ge 1. \tag{1.1}$$

Propozicija 1.2.1. *Neopadajući slučajan niz A je predvidiv ako i samo ako je prirodan.*

Vratimo se sada na neprekidno vrijeme. Vraćamo se filtraciji $\{\mathscr{F}_t\}$ parametriziranoj sa $t \in [0, \infty)$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Neka je sada proces $A = \{A_t; 0 \le t < \infty\}$ adaptiran u odnosu na $\{\mathscr{F}_t\}$. Imamo sljedeće analogone prijašnjih definicija.

Definicija 1.2.3. *Adaptirani proces A je neopadajući ako za gotovo svaki $\omega \in \Omega$ vrijedi*

1. *$A_0(\omega) = 0$*
2. *$t \to A_t(\omega)$ je neopadajuća, zdesna neprekidna funkcija,*

i $E(A_t) < \infty$ *za svaki* $t \in [0, \infty)$. *Za neopadajući proces kažemo da je integrabilan ako vrijedi* $E(A_\infty) < \infty$, *gdje je* $A_\infty = \lim_{t\to\infty} A_t$.

Definicija 1.2.4. *Za neopadajući proces A kažemo da je prirodan ako za svaki ograničeni, zdesna neprekidni martingal* $\{M_t, \mathscr{F}_t; 0 \le t < \infty\}$ *vrijedi*

$$E\int_{(0,t]} M_s dA_s = E\int_{(0,t]} M_{s-} dA_s, \quad \forall 0 < t < \infty. \tag{1.2}$$

Lema 1.2.1. *U Definiciji 1.2.4, uvjet* (1.2) *je ekvivalentan*

$$E(M_t A_t) = E\int_{(0,t]} M_{s-} dA_s.$$

Sada možemo vidjeti da je to stvarno analogon Definicije 1.2.2.

Prije nego što možemo iskazati slavni teorem Doob-Meyerove dekompozicije, trebati će nam još jedna dodatna tehnička definicija koja će govoriti o uniformnoj integrabilnosti zaustvaljenih submartingala. U dokazu se vidi da je samo još taj uvjet potreban za prijelaz iz diskretne Doobove dekompozicije na neprekidnu.

Definicija 1.2.5. *Za familiju* $\mathfrak{C}$ *slučajnih varijabli kažemo da je uniformno integrabilna ako za svaki* $\epsilon > 0$ *postoji* $K \in [0, \infty)$ *tako da vrijedi* $E[|X| 1_{|X| \ge K}] \le \epsilon$ *za svaki* $X \in \mathfrak{C}$.

Definicija 1.2.6. *Neka je* $\mathcal{S}$ *(respektivno,* $\mathcal{S}_a$*) familija svih vremena zaustavljanja T u odnosu na filtraciju* $\{F_t\}$ *koji zadovoljavaju* $P(T < \infty) = 1$ *(respektivno,* $P(T \le a) = 1$*, za dani* $a > 0$*). Za zdesna-neprekidni proces* $\{X_t, \mathscr{F}_t; 0 \le t < \infty\}$ *kažemo da je klase D, ako je familija* $\{X_T\}_{T\in\mathcal{S}}$ *uniformno integrabilna, odnosno klase DL, ako je familija* $\{X_T\}_{T\in\mathcal{S}_a}$ *uniformno integrabilna za svaki* $0 < a < \infty$.

Teorem 1.2.1. *(Doob-Meyerova dekompozicija) Neka filtracija* $\{\mathscr{F}_t\}$ *zadovoljava uobičajene uvjete. Ako je zdesna-neprekidni submartingal* $X = \{X_t, \mathscr{F}_t; 0 \le t < \infty\}$ *klase DL, onda dopušta dekompoziciju*

$$X_t = M_t + A_t, \quad 0 \le t < \infty,$$

gdje je $M = \{M_t, \mathscr{F}_t; 0 \le t < \infty\}$ *zdesna-neprekidan martingal, a* $A = \{A_t, \mathscr{F}_t; 0 \le t < \infty\}$ *neopadajući proces. A se može uzeti da je prirodan, uz taj uvjet je dekompozicija jedinstvena (do na nerazlučivost). Nadalje, ako je X klase D, onda je M uniformno integrabilni martingal, a A je integrabilan.*

Definicija 1.2.7. *Kažemo da je submartingal* $X = \{X_t, \mathscr{F}_t; 0 \le t < \infty\}$ *je regularan ako za svaki* $a > 0$ *i za svaki neopadajući niz vremena zaustavljanja* $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{S}_a$ *sa* $T = \lim_{n\to\infty} T_n$ *vrijedi* $\lim_{n\to\infty} E(X_{T_n}) = E(X_T)$.

Teorem 1.2.2. *Neka je $X = \{X_t, \mathscr{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ zdesna-neprekidni submartingal klase DL u odnosu na filtraciju $\{\mathscr{F}_t\}$, koja zadovoljava uobičajene uvjete i neka je A prirodan neopadajući proces u Doob-Meyerovoj dekompoziciji. A je neprekidan ako i samo ako je X regularan.*

U ostatku ovog potpoglavlja ćemo obraditi kvadratno-integrabilne martingale koji će kasnije poslužiti kao osnova stohastičkih integrala. Od sada pa nadalje, kao i inače, imamo fiksan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ i filtraciju $\{\mathscr{F}_t\}$ koja zadovoljava uobičajene uvjete.

Definicija 1.2.8. *Neka je $X = \{X_t, \mathscr{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ zdesna-neprekidni martingal. Kažemo da je X kvadratno-integrabilan ako je $EX_t^2 < \infty$ za svaki $t \geq 0$. Ako uz to vrijedi i $X_0 = 0$ gotovo sigurno, onda pišemo $X \in \mathscr{M}_2$ (odnosno, $X \in \mathscr{M}_2^c$, ako je X neprekidan gotovo sigurno).*

Lema 1.2.2. *Neka je $X = \{X_t, \mathscr{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ zdesna-neprekidan submartingal. Ako je $X_t \geq 0$ gotovo sigurno za svaki $t \geq 0$, onda je X klase DL. Ako je još uz to i X neprekidan, onda je regularan.*

Ako imamo kvadratno integrabilan martingal, onda X^2 zadovoljava uvjete Doob-Meyerove dekompozicije, pa ga možemo rastaviti na martingal i prirodan neopadajući proces tako da vrijedi
$$X_t^2 = M_t + A_t.$$
Procese M i A možemo centrirati tako da je $M_0 = A_0 = 0$ gotovo sigurno. Ako je $X \in \mathscr{M}_2^c$ onda su procesi A i M neprekidni po Teoremu 1.2.2.

Definicija 1.2.9. *Za $X \in \mathscr{M}_2$, definiramo kvadratnu varijaciju od X kao proces $\langle X \rangle_t := A_t$, gdje je A prirodan, neopadajući proces u Doob-Meyerovoj dekompoziciji od X^2. Drugim riječima, $\langle X \rangle$ je jedinstven (do na nerazlučivost) adaptirani, prirodni, neopadajući proces tako da je $\langle X \rangle_0 = 0$ gotovo sigurno i $X^2 - \langle X \rangle$ je martingal.*

Ako uzmemo dva elementa $X, Y \in \mathscr{M}_2$, onda su procesi $(X+Y)^2 - \langle X+Y \rangle$ i $(X-Y)^2 - \langle X-Y \rangle$ martingali, pa je i njihova razlika $4XY - [\langle X+Y \rangle - \langle X-Y \rangle]$ martingal. To nas vodi na intuitivnu definiciju kovarijacije, kao i kod definiranja skalarnog produkta.

Definicija 1.2.10. *Za $X, Y \in \mathscr{M}_2$, definiramo kovarijacijski proces $\langle X, Y \rangle_t$ kao*
$$\langle X, Y \rangle_t := \frac{1}{4}[\langle X+Y \rangle_t - \langle X-Y \rangle_t], \quad 0 \leq t < \infty.$$
Primjetimo da je $XY - \langle X, Y \rangle$ martingal.

Ovakve definicije kvadratne varijacije i kovarijacije se može činiti prilično neprirodna. No sljedeći rezultati pokazuju da to zaista ima smisla.

Neka je $X = \{X_t; 0 \leq t < \infty\}$ slučajni proces, fiksirajmo $t > 0$ i neka je $\Pi = \{t_0, \dots, t_m\}$, $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = t$ particija od $[0, t]$. Definiramo p-varijaciju od X po particiji Π kao

$$V_t^{(p)}(\Pi) = \sum_{k=1}^{m} |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^p.$$

Definiramo dijametar particije $\|\Pi\| = \max_{1 \leq k \leq m} |t_k - t_{k-1}|$. Ako $V_t^{(2)}(\Pi)$ konvergira u nekom smislu kada $\|\Pi\|$ teži prema 0, onda limes ima smisla zvati kvadratnom varijacijom od X. Fokusirajmo se nadalje na neprekidne martingale.

Teorem 1.2.3. *Neka je $X \in \mathscr{M}_2^c$. Tada vrijedi $\lim_{\|\Pi\| \to 0} V_t^{(2)}(\Pi) = \langle X \rangle_t$ (po vjerojatnosti) za svaki $t \geq 0$.*

Propozicija 1.2.2. *Neka je X neprekidan proces sa svojstvom da za svaki fiksan $t > 0$ i $p > 0$ vrijedi*

$$\lim_{\|\Pi\| \to 0} V_t^{(p)}(\Pi) = L_t, \quad \text{(po vjerojatnosti)},$$

gdje je L_t slučajna varijabla s vrijednostima u $[0, \infty)$. Tada za svaki $q > p$ je $\lim_{\|\Pi\| \to 0} V_t^{(q)}(\Pi) = 0$ (po vjerojatnosti), i za svaki $0 < q < p$ je $\lim_{\|\Pi\| \to 0} V_t^{(q)}(\Pi) = \infty$ (po vjerojatnosti) na događaju $\{L_t > 0\}$.

Teorem 1.2.4. *Neka su $X, Y \in \mathscr{M}_2^c$. Tada postoji jedinstveni (do na nerazlučivost) $\{\mathscr{F}_t\}$ adaptirani, neprekidni proces konačne varijacije A koji zadovoljava $A_0 = 0$ gotovo sigurno, tako da je $XY - A$ martingal. Taj je proces upravo kvadratna kovarijacija $\langle X, Y \rangle$. Također, vrijedi*

$$\lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{k=1}^{m} (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})(Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}) = \langle X, Y \rangle_t, \quad \text{(po vjerojatnosti)}.$$

U stohastičkoj analizi postoji takozvana tehnika lokalizacije, gdje se martingali lokaliziraju sa vremenima zaustavljanja da bi se uspjelo dokazati nešto, pa se onda prelazi na limes kada vremena zaustavljanja teže prema beskonačnosti. To nas vodi na takozvane lokalne martingale, koji služe i za proširenje stohastičkog integrala.

Definicija 1.2.11. *Neka je $X = \{X_t, \mathscr{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ (neprekidan) proces sa $X_0 = 0$ gotovo sigurno. Ako postoji neopadajući niz $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ vremena zaustavljanja od $\{\mathscr{F}_t\}$ tako da je $\{X_t^{(n)} := X_{t \wedge T_n}, \mathscr{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ martingal za svaki $n \geq 1$ i $P[\lim_{n \to \infty} T_n = \infty] = 1$, onda kažemo da je X (neprekidan) lokalni martingal i pišemo $X \in \mathscr{M}^{loc}$ (odnosno, $X \in \mathscr{M}^{c,loc}$).*

Na kraju ovog potpoglavlja ćemo uvesti još metriku u odnosu na kojoj kvadratno integrabilni martingali (do na nerazlučivost) čine potpun metrički prostor.

Definicija 1.2.12. *Za $X \in \mathscr{M}_2$, i $0 \leq t < \infty$ definiramo*

$$\|X\|_t := \sqrt{E(X_t^2)}, \qquad \|X\| := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|X\|_n \wedge 1}{2^n}.$$

Pokazuje se da je $\|\cdot\|$ metrika na $\mathscr{M}_2$.

Propozicija 1.2.3. $(\mathscr{M}_2, \|\cdot\|)$ *je potpun metrički prostor, a* $\mathscr{M}_2^c$ *je zatvoren potprostor.*

1.3 Stohastički integral

Fiksirajmo sada $M \in \mathscr{M}_2^c$, to jest neprekidni, kvadratno-integrabilni martingal na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ i filtracijom $\{\mathscr{F}_t\}$ koja zadovoljava uobičajene uvjete. Pretpostavljamo $M_0 = 0$ gotovo sigurno. Takav proces je neograničene varijacije na bilo kojem konačnom intervalu $[0, T]$, pa ne možemo definirati integral

$$I_T(X)(\omega) := \int_0^T X_t(\omega) dM_t(\omega)$$

po točkama, ali zato ima konačnu drugu varijaciju koja je dana sa neprekidnim, neopadajućim procesom $\langle M \rangle$. Ta činjenica nam pomaže da definiramo gornji integral na drugi način za određenu familiju integranada X. Poslije ćemo proširiti konstrukciju i na neprekidne, lokalne martingale M.
Definirajmo prvo mjeru (pokazuje se da je to zaista mjera) μ_M na $([0, \infty) \times \Omega, \mathscr{B}([0, \infty)) \otimes \mathscr{F})$:

$$\mu_M(A) = E \int_0^\infty 1_A(t, \omega) d\langle M \rangle_t(\omega).$$

Kažemo da su dva izmjeriva, adaptirana procesa X i Y ekvivalentni ako je $X = Y$ μ_M gotovo svuda. To inducira relaciju ekvivalencije na tom prostoru. Za izmjeriv, adaptiran proces X definiramo i

$$[X]_T^2 := E \int_0^T X_t^2 d\langle M \rangle_t(\omega).$$

Zapravo, $[X]_T$ je L^2 norma od X (kao funkcija od (t, ω)) na restringiranom prostoru $[0, T] \times \Omega$ u odnosu na mjeru μ_M. Sad je jasno da je $[X - Y]_T = 0$ za svaki $T > 0$ ako i samo ako su X i Y ekvivalentni. Stohastički integral će biti definiran u takvom smislu da, ako su X i Y ekvivalentni, onda su procesi $I(X)$ i $I(Y)$ nerazlučivi.

Definicija 1.3.1. *Neka je $\mathcal{L}$ skup svih klasa ekvivalencije od od svih izmjerivih $\{\mathscr{F}_t\}$ adaptiranih procesa X, tako da je $[X]_T < \infty$ za svaki $T > 0$. Definiramo metriku na prostoru $\mathcal{L}$ sa $[X - Y]$, gdje je*

$$[X] := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(1 \wedge [X]_n).$$

Neka je i $\mathcal{L}^*$ skup svih klasa ekvivalencije progresivno izmjerivih procesa koji zadovoljavaju isti uvjet i definiramo metriku na $\mathcal{L}^*$ na isti način.

Primjetimo da $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}^*$ ovise o fiksiranom martingalu M. Ako je funkcija $t \to \langle M \rangle_t(\omega)$ apsolutno neprekidna za gotovo svaki ω, integral će se moći konstruirati za svaki $X \in \mathcal{L}$. Ako nema tog uvjeta, moramo se ograničiti na malo manju klasu $\mathcal{L}^*$.

Definicija 1.3.2. *Kažemo da je proces X jednostavan ako postoji strogo rastući niz realnih brojeva $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ tako da je $t_0 = 0$ i $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$, kao i niz slučajnih varijabli $\{\xi\}_{n=0}^{\infty}$ sa $\sup_{n\geq 0} |\xi_n(\omega)| \leq C < \infty$ za svaki ω, tako da je ξ_n $\mathscr{F}_{t_n}$ izmjeriva za svaki $n \geq 0$ i*

$$X_t(\omega) = \xi_0(\omega) 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(\omega) 1_{(t_i, t_{i+1}]}(t); \qquad 0 \leq t < \infty, \omega \in \Omega.$$

Familiju svih jednostavnih procesa označavamo sa $\mathcal{L}_0$.

Primjetimo da, pošto su članovi od $\mathcal{L}_0$ progresivno izmjerivi i ograničeni, vrijedi $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}^* \subseteq \mathcal{L}$.

Prvo definiramo integral za $X \in \mathcal{L}_0$ na očiti način, kao martingalnu transformaciju:

$$I_t(X) := \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + \xi_n (M_t - M_{t_n}) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i (M_{t \wedge t_{i+1}} - M_{t \wedge t_i}), \quad 0 \leq t < \infty,$$

gdje je $n \geq 0$ jedinstveni prirodan broj tako da je $t_n \leq t < t_{n+1}$.

Slijede dvije fundamentalne propozicije sa kojima je moguće proširivanje integrala na $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}^*$.

Propozicija 1.3.1. *Ako je funkcija $t \to \langle M \rangle_t(\omega)$ apsolutno neprekidna u odnosu na Lebesgueovu mjeru za gotovo svaki $\omega \in \Omega$, onda je $\mathcal{L}_0$ gust u $\mathcal{L}$ u odnosu na metriku definiranu u Definiciji 1.3.1.*

Propozicija 1.3.2. *Skup $\mathcal{L}_0$ je gust u $\mathcal{L}^*$ u odnosu na metriku definiranu u Definiciji 1.3.1.*

Navedimo neka osnovna svojstva definiranog integrala na prostoru $\mathcal{L}_0$. Za $X, Y \in \mathcal{L}_0$ i $0 \leq s < t < \infty$ imamo:

$$I_0(X) = 0, \quad \text{g.s.} \tag{1.3}$$

$$E[I_t(X)|\mathscr{F}_s] = I_s(X), \quad \text{g.s.} \tag{1.4}$$

$$E(I_t(X))^2 = E\int_0^t X_u^2 d\langle M\rangle_u \tag{1.5}$$

$$\|I(X)\| = [X] \tag{1.6}$$

$$E[(I_t(X) - I_s(X))^2|\mathscr{F}_s] = E\Big[\int_s^t X_u^2 d\langle M\rangle_u \Big| \mathscr{F}_s\Big], \quad \text{g.s.} \tag{1.7}$$

$$I(\alpha X + \beta Y) = \alpha I(X) + \beta I(Y); \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

$$\langle I(X)\rangle_t = \int_0^t X_u^2 d\langle M\rangle_u. \tag{1.9}$$

Za $X \in \mathcal{L}^*$, propozicija 1.3.2. povlači da postoji niz $\{X^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}_0$ tako da $[X^{(n)} - X] \to 0$ za $n \to \infty$. Iz (1.6) i (1.8) slijedi

$$\|I(X^{(n)}) - I(X^{(m)})\| = \|I(X^{(n)} - X^{(m)})\| = [X^{(n)} - X^{(m)}] \to 0$$

za $n, m \to \infty$. Znači, niz $\{I(X^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}$ je Cauchyev u $\mathscr{M}_2^c$. Iz Propozicije 1.2.3. postoji proces $I(X) \in \mathscr{M}_2^c$ tako da $\|I(X^{(n)}) - I(X)\| \to 0$. Lagano se pokazuje da je proces $I(X)$ dobro definiran, to jest da ne ovisi o nizu $\{X^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$.

Definicija 1.3.3. *Za $X \in \mathcal{L}^*$, stohastički integral od X u odnosu na martingal $M \in \mathscr{M}_2^c$ je jedinstven, kvadratno-integrabilni martingal $I(X)$ koji zadovoljava* $\lim_{n\to\infty} \|I(X^{(n)}) - I(X)\| = 0$ *za svaki niz $\{X^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}_0$ sa* $\lim_{n\to\infty}[X^{(n)} - X] = 0$. *Pišemo*

$$I_t(X) = \int_0^t X_s dM_s \quad 0 \leq t < \infty.$$

Konstrukcija integrala se može lokalizacijom proširiti na integratore $M \in \mathscr{M}^{c,loc}$ i na familiju integranada $\mathcal{P}^*$ svih progresivno izmjerivih procesa X koji zadovoljavaju

$$P\Big[\int_0^T X_t^2 d\langle M\rangle_t < \infty\Big] = 1 \quad \forall T \in [0, \infty).$$

Također, takav integral $\int_0^t X_t dM_t$ je opet lokalni martingal.

Definicija 1.3.4. *Neprekidni semimartingal X je adaptiran proces koji ima dekompoziciju, P gotovo sigurno*

$$X_t = X_0 + M_t + B_t \quad 0 \leq t < \infty$$

gdje je $M \in \mathscr{M}^{c,loc}$ *(neprekidni lokalni martingal) a B razlika neprekidnih, neopadajućih adaptiranih procesa, to jest, proces konačne varijacije.*

Na kraju navodimo Itovu formulu, koja kaže da je "glatka" funkcija neprekidnog semimartingala opet semimartingal i daje njegovu dekompoziciju.

Teorem 1.3.1. *Neka je* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funkcija klase* C^2 *i X neprekidni semimartingal. Tada vrijedi P gotovo sigurno:*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dM_s + \int_0^t f'(X_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle M\rangle_s, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Formalno, u diferencijalnoj formi to glasi:

$$df(X_t) = f'(X_t)dM_t + f'(X_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(X_t)d\langle M\rangle_t = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)d\langle M\rangle_t$$

1.4 Optimalno zaustavljanje

U ovoj ćemo potpoglavlju malo više proučiti rezultate o optimalnom zaustavljanju za procese sa neprekidnim vremenom. Prvo moramo uvesti jedan fundamentalan pojam esencijalnog supremuma. Intuitivno, za familiju slučajnih varijabli $\mathcal{X}$ možemo uvesti supremum po točkama $\sup\{X(\omega); X \in \mathcal{X}\}$, ali pošto postoji relacija ekvivalencije P-g.s., nema prevelikog smisla govoriti o supremumu po točkama.

Definicija 1.4.1. *Neka je* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor i* $\mathcal{X}$ *neprazna familija nenegativnih slučajnih varijabli. Esencijalni supremum od* $\mathcal{X}$*, sa oznakom* ess sup $\mathcal{X}$*, je slučajna varijabla* X^* *koja zadovoljava:*

- $\forall X \in \mathcal{X}, \quad X \leq X^*$ *g.s.,*
- *ako je Y slučajna varijabla za koju vrijedi* $X \leq Y$ *g.s. za svaki* $X \in \mathcal{X}$*, onda vrijedi* $X^* \leq Y$ *g.s.*

Naravno, ako esencijalni supremum postoji, iz definicije je jasno da je on jedinstven.

Teorem 1.4.1. *Neka je* $\mathcal{X}$ *neprazna familija nenegativnih slučajnih varijabli. Onda* ess sup $\mathcal{X}$ *postoji.*

U nastavku ovog poglavlja ćemo proučavati nenegativne procese $Y = \{Y(t), \mathscr{F}(t); 0 \leq t \leq T\}$ sa zdesna neprekidnim putevima i $Y(T) \leq \limsup_{t \uparrow T} Y(t)$ g.s., gdje filtracija zadovoljava uobičajene uvjete. Neka je $\mathcal{S}$ familija svih $\{\mathscr{F}_t\}$-vremena zaustavljanja sa vrijednostima u $[0, T]$. Za bilo koje vrijeme zaustavljanja v definiramo i $\mathcal{S}_v := \{\tau \in \mathcal{S}; \tau \geq v \text{ g.s.}\}$. Naš se problem sastoji od maksimiziranja očekivane nagrade, to jest

$$Z(0) := \sup_{\tau \in \mathcal{S}} EY(\tau). \tag{1.10}$$

Također, poželjno je i naći vrijeme zaustavljanja gdje se taj supremum postiže. Od sada pa nadalje pretpostavljamo

$$0 < Z(0) < \infty. \tag{1.11}$$

Centar proučavanja rezultata o optimalnom zaustavljanju je familija slučajnih varijabli $\{Z(v)\}_{v \in \mathcal{S}}$

$$Z(v) := \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{S}_v} E[Y(\tau) | \mathscr{F}(v)], \ v \in \mathcal{S}. \tag{1.12}$$

$Z(v)$ je ustvari optimalna uvjetna očekivana nagrada nakon vremena v.

Propozicija 1.4.1. *Za bilo koji $v \in \mathcal{S}$, $\sigma \in \mathcal{S}$ i $\tau \in \mathcal{S}_v$ imamo*

$$Z(v) = Z(\sigma), \quad g.s.\ na \quad \{\sigma = v\}$$

$$\begin{aligned} E[Z(\tau)|\mathscr{F}(v)] &= \text{ess sup}_{p \in \mathcal{S}_v} E[Y(p)|\mathscr{F}(v)] \quad g.s. \\ E[Z(\tau)|\mathscr{F}(v)] &\leq Z(v) \quad g.s. \\ EZ(\tau) &= \sup_{p \in \mathcal{S}_\tau} EY(p) \leq Z(0) < \infty. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Naravno, $t \in [0, T]$ je također jedno vrijeme zaustavljanja. Znači, dobro su definirane varijable $Z(t)$. Ali (1.13) upravo kaže da je proces $\{Z(t)\}$ supermartingal. Također, može se pokazati da je funkcija $t \to EZ(t)$ neprekidna zdesna, pa po Teoremu 1.1.2 postoji modifikacija $Z^0(\cdot)$ sa RCLL putevima (koja je također supermartingal).

Definicija 1.4.2. *Za $Z^0(\cdot)$ kažemo da je Snellov omotač od $Y(\cdot)$.*

Dalje moramo biti oprezni sa oznakama, za vrijeme zaustavljanja $v \in \mathcal{S}$, $Z^0(v)$ označava zaustavljani proces u vremenu v, a $Z(v)$ slučajnu varijablu definiranu u smislu (1.12).

Definicija 1.4.3. *Neka su X_1 i X_2 slučajni procesi na $[0, T]$. Kažemo da X_1 dominira X_2 ako vrijedi $P(X_1(t) \geq X_2(t), \forall 0 \leq t \leq T) = 1$.*

Snellov omotač je upravo najmanji supermartingal koji dominira $Y(\cdot)$. To kaže sljedeći teorem.

Teorem 1.4.2. *Snellov omotač $Z^0(\cdot)$ od $Y(\cdot)$ zadovoljava*

$$Z^0(v) = Z(v) \quad g.s. \tag{1.14}$$

za svaki $v \in \mathcal{S}$. Nadalje, $Z^0(\cdot)$ dominira $Y(\cdot)$. Ako je $X(\cdot)$ neki drugi RCLL supermartingal koji dominira $Y(\cdot)$, onda $X(\cdot)$ dominira $Z^0(\cdot)$.

Teorem 1.4.3. *Vrijeme zaustavljanja τ_* je optimalno, to jest*

$$EY(\tau_*) = Z^0(0) = \sup_{p \in \mathcal{S}} EY(p)$$

ako i samo ako vrijedi

$$Z^0(\tau_*) = Y(\tau_*) \quad g.s.$$

i zaustavljeni supermartingal $Z^0(t \wedge \tau_*)$ je martingal.

Sada bi htjeli naći neko optimalno vrijeme zaustavljanja, to jest pitati se da li zaista postoji. Konstrukcija počinje sa vremenima koja su "približno optimalna". Za $\lambda \in (0, 1)$ i $v \in \mathcal{S}$ definiramo vrijeme zaustavljanja:

$$D^\lambda(v) := \inf\{t \in (v, T]; \lambda Z^0(t) \leq Y(t)\} \wedge T.$$

Propozicija 1.4.2. *Za $0 < \lambda < 1$ i za svaki $v \in \mathcal{S}$ vrijedi:*

$$Z^0(v) = E[Z^0(D^\lambda(v))|\mathscr{F}(v)] \quad g.s.$$

Pošto je familija vremena zaustavljanja $\{D^\lambda(v)\}$ neopadajuća po λ možemo definirati vrijeme zaustavljanja

$$D_*(v) := \lim_{\lambda \uparrow 1} D^\lambda(v).$$

$D_*(v)$ je zapravo prvo vrijeme nakon v kada Snellov omotač postane jednak našem procesu nagrade $Y(\cdot)$. Sljedeći uvjet na Y je jedan od ključnih za vrijeme $D_*(v)$.

$$E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} Y(t)\right] < \infty. \tag{1.15}$$

Teorem 1.4.4. *Pretpostavimo da $Y(\cdot)$ ima neprekidne puteve i da vrijedi* (1.15). *Tada, za svaki $v \in \mathcal{S}$, vrijeme zaustavljanja $D_*(v)$ zadovoljava*

$$E[Y(D_*(v))|\mathscr{F}(v)] = Z^0(v) = \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{S}_v} E[Y(\tau)|\mathscr{F}(v)] \quad g.s.$$

Posebno, $D_*(0)$ postiže supremum (1.10). *Nadalje, za svaki $v \in \mathcal{S}$ vrijedi:*

$$D_*(v) = \inf\{t \in [v, T];\ Z^0(t) = Y(t)\} \quad g.s.$$

Teorem 1.4.5. *Uz uvjet* (1.15), *RCLL supermartingal $Z^0(\cdot)$ dopušta Doob-Meyerovu dekompoziciju*

$$Z^0(\cdot) = M(\cdot) - \Lambda(\cdot).$$

Poglavlje 2

Model financijskog tržišta

2.1 Dionice i tržite novca

Naš model će se sastojati od $N + 1$ financijske imovine. Jedna od tih imovina je tržište novca koje je nerizično (na infinitezimalnoj razini) gdje investitori mogu akumulirati kapital bez rizika po promjenjivoj kamatnoj stopi. Ostalih N imovina su rizične i one u praksi predstavljaju sve ostale financijske instrumente (bez izvedenica) npr. dionice, robu, sirovine, tečajeve.. Mi ćemo ih zbog jednostavnosti zvati dionice. Na tu imovinu utječe D-dimenzionalno Brownovo gibanje koje predstavlja "D nesigurnosti" u svijetu. Cijene se naravno kreću neprekidno, što znači da nema iznenađenja na tržištu.
Dakle, imamo potpuni vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ na kojemu je definirano D dimenzionalno Brownovo gibanje $W(t) = (W^1(t), \dots, W^D(t))' \quad 0 \leq t \leq T, W(0) = 0$ g.s. Definiramo filtracije $\mathscr{F}^W(t) := \sigma\{W(s) : 0 \leq s \leq t\}$ i proširenu filtraciju koja je dopustiva (tj. BM je martingal u odnosu na nju) kao $\mathscr{F}(t) := \sigma(\mathscr{F}^W(t) \cup \mathscr{N})$ za svaki $t \in [0, T]$ gdje je $\mathscr{N}$ familija svih P-nul podskupova od $\mathscr{F}^W(T)$.

Razlika u filtracijama $\mathscr{F}^W(\cdot)$ i $\mathscr{F}(\cdot)$ je to što je $\mathscr{F}(\cdot)$ neprekidna zdesna u smislu $\mathscr{F}(t) = \bigcap_{t<s\leq T} \mathscr{F}(s)$, a to će nam biti bitno kod nekih tehničkih rezultata. Možemo o tome razmišljati da je tok informacija u sigma algebrama neprekidan, tj. da nema naglih skokova.

Kako modelirati cijene $S_n(\cdot),\ n = 0, \dots, N$? Moderne metode financijske matematike pokazuju da su procesi cijena nužno semimartingali kada tržište ne bi imalo arbitražu, tj $S_n(t) = S_n(0) + B_n(t) + M_n(t)$. gdje je M lokalni martingal, a B RCLL proces sa konačnom varijacijom na $[0, T]$ (vidi [1]).

Također, svaki neprekidni, striktno pozitivni, i $\mathscr{F}(\cdot)$ adaptirani semimartingal zadovoljava SDJ

$$dS_n(t) = S_n(t)[b_n(t)dt + dA_n(t) + \sum_{d=1}^{D} \sigma_{nd}(t)dW^d(t)], \quad n = 0, \dots, N,$$

gdje su $b_n(\cdot)$ i $\sigma_{nd}(\cdot)$ progresivno izmjerivi procesi tako da vrijedi $\int_0^T [|b_n(t)| + \sum_{d=1}^{D} (\sigma_{nd}(t))^2] dt < \infty$ gotovo sigurno i $A_n(\cdot)$ progresivno izmjeriv proces sa neprekidnim putevima, ali singularan u odnosu na Lebesgovu mjeru. (vidi [3] dodatak B).

Pogledajmo prvo nerizičnu imovinu $S_0(\cdot)$. Budući da je ona nerizična, za očekivati je da u rastavu semimartingala jednostavno imamo $M_0(t) = 0$ tj. SDE glasi

$$dS_0(t) = S_0(t)[r(t)dt + dA(t)] \tag{2.1}$$

gdje smo uveli oznake $r(t) := b_0(t), A(t) := A_0(t)$. Također se može pokazati da je $A_n(\cdot) \equiv A(\cdot)$ jer bi inače postojala arbitraža. Dakle, imamo

$$dS_n(t) = S_n(t)[b_n(t)dt + dA(t) + \sum_{d=1}^{D} \sigma_{nd}(t)dW^d(t)] \quad n = 1, \dots N. \tag{2.2}$$

Rješenja SDE (2.1) i (2.2) (pretpostavili smo da je $S_0(0) = 1$) su dana sa

$$S_0(t) = \exp\{\int_0^t r(u)du + A(t)\}, \tag{2.3}$$

$$S_n(t) = S_n(0)\exp\{\int_0^t \sum_{d=1}^{D} \sigma_{nd}(s)dW^d(s) + \int_0^t [b_n(s) - \frac{1}{2}\sum_{d=1}^{D} \sigma_{nd}^2(s)]ds + A(t)\}. \tag{2.4}$$

Također, ako dionice isplaćuju dividende, možemo uvesti i proces isplate dividendi $\delta_n(\cdot)$ gdje je $\delta_n(t)$ stopa dividende za svaki uloženu kunu u dionicu n u vremenu t. Znači, dobivamo "$S_n(t)\delta_n(t)$" kuna u vremenu t. Definiramo i proces prinosa pomoću ovakve SDJ:

$$dY_n(t) = dS_n(t) + S_n(t)\delta_n(t)dt \quad n = 1, \dots, N$$

uz početni uvjet $Y_n(0) = S_n(0)$. Rješenje je naravno dano kao:

$$Y_n(t) = S_n(t) + \int_0^t S_n(s)\delta_n(s)ds \quad n = 1, \dots, N. \tag{2.5}$$

Stavimo $Y_0(t) = S_0(t)$.

Formalizirajmo ovo:

Definicija 2.1. *Financijsko tržište se sastoji od:*

1. *potpunog vjerojatnosnog prostora* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$
2. *terminalnog vremena* $T > 0$
3. *D-dim Brownovog gibanja* $\{W(t), 0 \leq t \leq T\}$ *sa proširenom filtracijom* $\mathscr{F}(\cdot)$
4. *progresivno izmjerivog nerizičnog kamatnog procesa* $r(\cdot)$ *koji zadovoljava* $\int_0^T |r(t)|dt < \infty$ *g.s.*
5. *progresivno izmjerivog N-dimenzionalnog procesa srednje stope povrata* $b(\cdot)$ *koji zadovoljava* $\int_0^T ||b(t)||dt < \infty$ *g.s.*
6. *progresivno izmjerivog N-dimenzionalnog procesa dividendi* $\delta(\cdot)$ *koji zadovoljava* $\int_0^T ||\delta(t)||dt < \infty$ *g.s.*
7. *progresivno izmjerivog* $(N \times D)$ *procesa volatilnosti* $\sigma(\cdot)$ *koji zadovoljava*

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{d=1}^{D} \int_0^T \sigma_{nd}^2(t)dt < \infty \quad g.s.$$

8. *vektor početnih, konstantnih cijena dionica* $S(0) = (S_1(0), \ldots, S_N(0))$
9. *progresivno izmjerivog, singularno neprekidnog, konačno-varijacijskog procesa* $A(\cdot)$ *čija je varijacija na* $[0, t]$ *dana sa* $\tilde{A}(t)$
10. *procesa cijena koji su dani sa* (2.3) *i* (2.4)

2.2 Portfolio i procesi dobitka, dohotka i bogatstva

Sada bismo htjeli definirati kako se mijenja bogatsvo ulagača. Ako investitor drži $\mu(t)$ dionica u trenutku t, promjena u bogatstvu investitora će jednostavno biti promjena u cijenu dionice (uključujući i eventualne promjene isplate dividendi) tj. u trenutku $t + \Delta t$ trebala bi vrijediti ovakva jednadžba $G(t+\Delta t) = G(t)+\mu(t)(Y(t+\Delta t)-Y(t))$ gdje je $Y(\cdot)$ već spomenuti jedinični prinos dionice, a $G(t)$ dobit u trenutku t. "Puštajući" Δt u 0, i uzimajući u obzir svu financijsku imovinu, dobivamo ovakvu definiciju procesa dobitka pomoću SDE:

$$dG(t) = \sum_{n=0}^{N} \mu_n(t)dY_n(t) \tag{2.6}$$

gdje je $\mu(\cdot) = (\mu_0(\cdot), \dots, \mu_N(\cdot))'$ $\{\mathscr{F}(t)\}$-adaptirani proces koji predstavlja broj držanih dionica u trenutku t (ovo znači da nije dopušteno insider trgovanje tj. znanje budućnosti, odluka o raspodjeli dionica ovisi samo o informacijama dopuštenih do trenutka t).

Ako definiramo $\pi_n(t) := \mu_n(t)S_n(t)$ (novčana vrijednost investirana u dionicu n u trenutku t), $\pi(\cdot) := (\pi_1(\cdot), \dots, \pi_N(\cdot))'$ i pogledamo definiciju procesa $Y_n(\cdot)$, možemo zapisati (2.6) kao

$$dG(t) = [\pi_0(t) + \pi'(t)\underset{\sim}{1}](r(t)dt + dA(t)) + \pi'(t)[b(t) + \delta(t) + r(t)\underset{\sim}{1}]dt + \pi'(t)\sigma(t)dW(t) \quad (2.7)$$

gdje je $dW(t) = (dW^1(t), \dots, dW^D(t))'$ i početni uvjet $G(0) = 0$. Ova SDE nas vodi na sljedeću formalnu definiciju.

Definicija 2.2. *Neka je dano financijsko tržište kao u Definiciji 2.1. Portfolio proces* $(\pi_0(\cdot), \pi(\cdot)) = (\pi_0(\cdot), \pi_1(\cdot), \dots, \pi_N(\cdot))$ *je* $\{\mathscr{F}(t)\}$ *progresivno izmjeriv, proces sa vrijednostima u* $\mathbb{R}^{N+1}$ *tako da vrijede sljedeći uvjeti:*

$$\int_0^T |\pi_0(t) + \pi'(t)\underset{\sim}{1}|[|r(t)|dt + d\tilde{A}(t)] < \infty, \quad (2.8)$$

$$\int_0^T |\pi'(t)(b(t) + \delta(t) - r(t)\underset{\sim}{1})|dt < \infty, \quad (2.9)$$

$$\int_0^T \|\sigma'(t)\pi(t)\|^2 dt < \infty \quad (2.10)$$

gotovo sigurno.
Proces dobitka $G(\cdot)$ *u odnosu na taj portfolio proces je dan sa*

$$G(t) := \int_0^t [\pi_0(s)+\pi'(s)\underset{\sim}{1}](r(s)ds+dA(s))+\int_0^t \pi'(s)[b(s)+\delta(s)-r(s)\underset{\sim}{1}]ds+\int_0^t \pi'(s)\sigma(s)dW(s). \quad (2.11)$$

Kažemo da je proces $(\pi_0(\cdot), \pi'(\cdot))$ *samofinancirajući ako vrijedi*

$$G(t) = \pi_0(t) + \pi'(t)\underset{\sim}{1} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.12)$$

Ovo samo kaže da je vrijednost portfelja u svakom trenutku jednaka vrijednosti dobitka koji su nastali od investicija do tog trenutka.
Možemo također i definirati N-dimenzionalni vektor tzv. viška prinosa kao ovakav Itov proces

$$R(t) := \int_0^t [b(u) + \delta(u) - r(u)\underset{\sim}{1}]du + \int_0^t \sigma(u)dW(u),\ 0 \le t \le T, \quad (2.13)$$

pa onda (2.11) postaje

$$G(t) := \int_0^t [\pi_0(s) + \pi'(s)\underset{\sim}{1}](r(s)ds + dA(s)) + \int_0^t \pi'(s)dR(s). \quad (2.14)$$

Ako imamo samofinancirajući portfolio proces, onda je odgovarajući SDE od (2.14) dan sa

$$dG(t) = \frac{G(t)}{S_0(t)} dS_0(t) + \pi'(t) dR(t)$$

i ima rješenje

$$G(t) = S_0(t) \int_0^t \frac{1}{S_0(u)} \pi'(u) dR(u). \tag{2.15}$$

Integrand $b_n(t) + \delta_n(t) - r(t)$ koji se pojavljuje u procesu $R(\cdot)$ se naziva premija rizika na n-tu dionicu. Intiuitivno, to je mjera koja pokazuje koliku je kompenzaciju investitor spreman uzeti da bi bio indiferentan prema investiranju u dionicu i investiranju u tržište novca.
Ako definiramo samo strategiju trgovanja $\pi(\cdot)$ (plan investiranja u dionice) koja zadovoljava (2.9) i (2.10), onda je, ako pretpostavimo samofinanciranje, $G(\cdot)$ dobro definiran sa (2.15) i $\pi_0(\cdot)$ sa (2.12). Uvjet (2.8) slijedi iz uvjeta Definicije 2.1. i neprekidnosti procesa G na $[0, T]$ (proces G je neprekidan pa tako i omeđen), pa je $\pi_0(\cdot) + \pi'(\cdot)$ omeđeno na $[0, T]$ gotovo sigurno. Dakle, zaključak je da je dovoljno definirati samo $\pi(\cdot)$.
Uvjeti (2.8)-(2.10) su samo tehničke svrhe za postojanje integrala u procesu dobitka, no kada bi to bili jedini uvjeti, prilično je jasno da bi postojala neka vrsta arbitraže, jer bi se na primjer mogli bezgranično zaduživati na tržištu novca i investirati u dionice sve dok nam prinos ne postane veći od kamatne stope duga. To znači da bi proces dobitka (ili u našem slučaju gubitka) mogao biti neograničen odozdo. To se lako može pokazati. Zato ipak tražimo i ograničenost procesa dobitka odozdo da bi spriječili takvu vrstu arbitraže.

Definicija 2.3. *$\{\mathscr{F}(t)\}$-adaptirani, proces $\pi(\cdot)$ sa vrijednostima u $\mathbb{R}^N$ koji zadovoljava* (2.9) *i* (2.10) *je održiv ako je diskontirani proces dobitka koji je ujedno semimartingal*

$$\frac{G(t)}{S_0(t)} = M_0^\pi(t) := \int_0^t \frac{1}{S_0(u)} \pi'(u) dR(u), \ 0 \leq t \leq T \tag{2.16}$$

ograničen odozdo gotovo sigurno sa konstantom koja ne ovisi o t, ali može ovisiti o strategiji $\pi(\cdot)$. Ako imamo portfolio proces $(\pi_0(\cdot), \pi(\cdot))$ i $\pi(\cdot)$ je održiv, onda kažemo da je i $(\pi_0(\cdot), \pi(\cdot))$ održiv.

Ako bismo željeli da investitor ima i druge izvore dohotka, osim onih nastalih investiranjem, moramo uvesti još jedan proces.

Definicija 2.4. *Neka je dano financijsko tržište. Za semimartingal $\Gamma(t)$, $0 \leq t \leq T$ kažemo da je kumulativni proces dohotka. Proces bogatstva je dan jednadžbom (uz dani portfolio proces)*

$$X(t) := \Gamma(t) + G(t). \tag{2.17}$$

Portfelj $(\pi_0(\cdot), \pi(\cdot))$ je $\Gamma(\cdot)$-financiran ako vrijedi $X(t) = \pi_0(t) + \pi'(t)\underset{\sim}{1}$, $\forall t \in [0, T]$.

Napomena 2.1. *Za $\Gamma(\cdot)$-financiran portfelj $(\pi_0(\cdot), \pi(\cdot)$, iz definicije procesa viška prinosa i procesa dobitka, možemo zapisati proces $X(\cdot)$ u diferencijalnoj formi, analogno kao i prije:*

$$dX(t) = d\Gamma(t) + \frac{X(t)}{S_0(t)} dS_0(t) + \pi'(t) dR(t)$$

$$= d\Gamma(t) + X(t)[r(t)dt + dA(t)] + \pi'(t)[b(t) + \delta(t) - r(t)\underset{\sim}{1}]dt + \pi'(t)\sigma(t)dW(t)$$

i onda je diskontirani proces bogatstva dan sa

$$\frac{X(t)}{S_0(t)} = \Gamma(0) + \int_0^t \frac{d\Gamma(u)}{S_0(u)} + \int_0^t \frac{1}{S_0(u)} \pi'(u) dR(u), \quad 0 \le t \le T. \tag{2.18}$$

Poglavlje 3

Arbitraža, standardna i potpuna tržišta

3.1 Arbitraža i životno tržište

Definicija 3.1. *Neka je dano financijsko tržište $\mathcal{M}$. Kažemo da je samofinancirajući, održiv portfolio proces $\pi(\cdot)$ arbitraža ako pripadni proces dobitka $G(\cdot)$ zadovoljava $G(T) \geq 0$ gotovo sigurno i $G(T) > 0$ se postiže sa pozitivnom vjerojatnošću. Financijsko tržište je životno ako ne postoji arbitraža.*

Naravno, mi ćemo gledati samo takva tržišta gdje ne postoji mogućnost za bezrizičan profit, inače bi se očekivani profit mogao učiniti proizvoljno velikim, a to ne predstavlja dobru sliku realnosti.

Teorem 3.1. *Ako je financijsko tržište životno, onda postoji progresivno izmjeriv proces $\theta(\cdot)$ sa vrijednostima u $\mathbb{R}^D$, kojeg nazivamo tržišna cijena rizika, tako da za gotovo svaki $t \in [0, T]$ premija rizika zadovoljava ovu jednadžbu:*

$$b(t) + \delta(t) - r(t)\underset{\sim}{1} = \sigma(t)\theta(t) \quad g.s. \tag{3.1}$$

Obratno, ako pretpostavimo da postoji proces $\theta(\cdot)$ koji zadovoljava gornje uvjete, uz još i:

$$\int_0^T \|\theta(s)\|^2 ds < \infty \quad g.s. \tag{3.2}$$

$$E[exp\{-\int_0^T \theta'(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \|\theta(s)\|^2 ds\}] = 1, \tag{3.3}$$

onda je tržište životno.

Intuitivno, ovaj teorem kaže da ako možemo naći strategiju π tako da je $\pi'(t)\sigma(t) = 0$ (kombinacija dionica koja ne nosi nikakav rizik) sa očekivanim povratom koji je različit od 0, tj. $\pi'(t)[b(t) + \delta(t) - r(t)\underset{\sim}{1}] \neq 0$ na nekom podskupu od $[0, T] \times \Omega$ sa pozitivnom produktnom mjerom, onda bi ta strategija mogla biti arbitraža. Dakle, svaki vektor u jezgri od $\sigma'(t)$ bi trebao biti okomit na premiju rizika $b(t) + \delta(t) - r(t)\underset{\sim}{1}$, a to znači da bi premija rizika trebala biti u rangu od $\sigma(t)$.
U nastavku se bavimo sa dokazom ovog teorema. Fokusirati ćemo se prvo na izmjerivost. $\mathcal{K}(\sigma)$ je oznaka za jezgru, a $\mathcal{R}(\sigma)$ oznaka za rang matrice σ.

Lema 3.1. *Preslikavanja $(x, \sigma) \to proj_{\mathcal{K}(\sigma)}(x)$ i $(x, \sigma) \to proj_{\mathcal{K}^\perp(\sigma)}(x)$ sa $\mathbb{R}^D \times L(\mathbb{R}^D; \mathbb{R}^N)$, $(y, \sigma) \to proj_{\mathcal{K}(\sigma')}(y)$ i $(y, \sigma) \to proj_{\mathcal{K}^\perp(\sigma')}(y)$ sa $\mathbb{R}^N \times L(\mathbb{R}^D; \mathbb{R}^N)$ su Borel izmjeriva.*

Dokaz. Gledamo samo prvo preslikavanje. Ako dokažemo za prvo, tvrdnja za drugo slijedi iz $\mathrm{proj}_{\mathcal{K}^\perp(\sigma)}(x) = x - \mathrm{proj}_{\mathcal{K}(\sigma)}(x)$, a posljednja dva su trivijalna jer je transponiranje neprekidna funkcija. Ideja je pokazati da je graf preslikavanja Borelov skup.
Borelova σ-algebra na prostoru matrica je definirana iz topologije proizvoljne operatorske norme. Definiramo izmjerivu funkciju (kao prebrojivi infimum izmjerivih funkcija) $F : \mathbb{R}^D \times L(\mathbb{R}^D; \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ sa

$$F(z, \sigma) := \inf_{q \in \mathbb{Q}^N} \|z - \sigma' q\|, \quad \forall z \in \mathbb{R}^D, \sigma \in L(\mathbb{R}^D; \mathbb{R}^N).$$

Očito vrijedi $\{(z, \sigma); z \in \mathcal{R}(\sigma')\} \subset \{(z, \sigma); F(z, \sigma) = 0\}$ zbog neprekidnosti funkcije $x \to \sigma' x$ i gustoće skupa $\mathbb{Q}$. Obratno, pretpostavimo da je $F(z, \sigma) = 0$ onda postoji neki niz q_n tako da $\sigma' q_n$ teži prema z. Budući da vrijedi $\mathbb{R}^N = \mathcal{K}(\sigma') \bigoplus \mathcal{K}^\perp(\sigma')$, imamo rastav $q_n = p_n + r_n$ gdje $p_n \in \mathcal{K}(\sigma')$, $r_n \in \mathcal{K}^\perp(\sigma')$. Restringirano na $\mathcal{K}^\perp(\sigma')$ preslikavanje σ' je invertibilno i inverz je neprekidan. Pošto $\sigma' r_n \to z$, niz r_n teži prema nekom $r \in \mathcal{K}^\perp(\sigma')$ koje zadovoljava $\sigma' r = z$. Dakle, $z \in \mathcal{R}(\sigma')$, pa smo pokazali

$$\{(z, \sigma); z \in \mathcal{R}(\sigma')\} = \{(z, \sigma); F(z, \sigma) = 0\}.$$

Znači, gornji skup je Borelov. Dalje, imamo

$$\{(x, \sigma, \xi) \in \mathbb{R}^D \times L(\mathbb{R}^D; \mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^D; \xi = proj_{\mathcal{K}(\sigma)}(x)\}$$

$$= \{(x, \sigma, \xi);\ \xi \in \mathcal{K}(\sigma),\ (x - \xi) \perp \mathcal{K}(\sigma)\}$$
$$= \{(x, \sigma, \xi);\ \xi' \sigma = 0,\ x - \xi \in \mathcal{R}(\sigma')\}.$$

pa je i to Borelov skup, kao presjek dva Borelova skupa. Ako označimo $Q(x, \sigma) := \mathrm{proj}_{\mathcal{K}(\sigma)}(x)$, onda je prijašnji skup ustvari graf od Q. Kako je graf Borelov, onda je i Q Borelova funkcija, a to slijedi iz toga da bijektivno projeciramo graf na prve dvije varijable (Borelovo preslikavanje), a vrijedi da je slika od izmjerive bijekcije od Borelovog podskupa poljskog prostora u neki drugi poljski prostor opet Borelova. ([5], Tm 3.9) □

Korolar 3.1. *Proces* $\text{proj}_{\mathcal{K}(\sigma'(t))}[b(t) + \delta(t) - r(t)\underset{\sim}{1}]$, $0 \le t \le T$ *je progresivno izmjeriv.*

Lema 3.2. *Ako je tržište životno, onda je* $b(t) + \delta(t) - r(t)\underset{\sim}{1} \in \mathcal{R}(\sigma(t))$ *za gotovo svaki* $t \in [0, T]$ *gotovo sigurno.*

Dokaz. Definiramo proces

$$p(t) = \text{proj}_{\mathcal{K}(\sigma'(t))}[b(t) + \delta(t) - r(t)\underset{\sim}{1}]$$

i strategiju

$$\pi(t) = \frac{p(t)}{\|p(t)\|} 1_{\{p(t) \neq 0\}}.$$

Strategija $\pi(\cdot)$ je omeđen i progresivno izmjeriv proces po prethodnom korolaru. Uvjeti (2.9) i (2.10) su zadovoljeni zbog omeđenosti $\pi(\cdot)$ i definicija funkcija b, δ, r, σ. Prisjetimo se, čim imamo strategiju na dionicama, možemo definirati samofinancirajući portfelj $(\pi_0(\cdot), \pi(\cdot))$ sa njegovim procesom dobitka. Također, ako imamo rastav vektorskog prostora $V = V_1 \bigoplus V_2$, $x = x_1 + x_2$, onda je $x_1'x = x_1'x_1 = \|x_1\|^2$. Računamo:

$$G(T) = S_0(T)\int_0^T \frac{1}{S_0(t)}\pi'(t)dR(t) = S_0(T)\int_0^T \frac{1}{S_0(t)}\frac{p(t)}{\|p(t)\|}[b(t) + \delta(t) - r(t)\underset{\sim}{1}]1_{\{p(t)\neq 0\}}dt$$

$$+S_0(T)\int_0^T \frac{1}{S_0(t)}\pi'(t)\sigma(t)1_{\{p(t)\neq 0\}}dW(t) = (\pi'(t)\sigma(t) = 0) = S_0(T)\int_0^T \frac{\|p(t)\|}{S_0(t)}1_{\{p(t)\neq 0\}}dt.$$

Očito je strategija održiva, i vidimo da vrijedi $G(T) \ge 0$ gotovo sigurno, a pošto je tržište životno, mora vrijediti $G(T) = 0$ gotovo sigurno. Ali to znači da je $p(t) = 0$ za gotovo svaki t gotovo sigurno, a to je ekvivalentno tvrdnji da je $b(t) + \delta(t) - r(t)\underset{\sim}{1} \in \mathcal{K}^{\perp}(\sigma'(t)) = \mathcal{R}(\sigma(t))$ za gotovo svaki t gotovo sigurno. □

Lema 3.3. *Neka je preslikavanje* $\psi_1 : \{(y, \sigma) \in \mathbb{R}^N \times L(\mathbb{R}^D; \mathbb{R}^N); y \in \mathcal{R}(\sigma)\} \to \mathbb{R}^D$ *definirano tako da je* $\psi_1(y, \sigma)$ *jedinstveni* $\xi \in \mathcal{K}^{\perp}(\sigma)$ *tako da je* $\sigma\xi = y$. *Neka je* $\psi_2 : \{(x, \sigma) \in \mathbb{R}^D \times L(\mathbb{R}^D; \mathbb{R}^N); x \in \mathcal{R}(\sigma')\} \to \mathbb{R}^N$ *tako da je* $\psi_2(x, \sigma)$ *jedinstveni* $\eta \in \mathcal{K}^{\perp}(\sigma')$ *tako da je* $\sigma'\eta = x$. *Tada su* ψ_1 *i* ψ_2 *izmjerivi.*

Dokaz. Dokazujemo izmjerivost za ψ_1. ψ_2 je jednostavno ψ_1 komponirano sa transponiranjem što je neprekidna funkcija, pa je tvrdnja očita. Definiramo skup

$$\Delta = \{(y, \sigma, \xi) \in \mathbb{R}^N \times L(\mathbb{R}^D; \mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^D; y \in \mathcal{R}(\sigma), \xi \in \mathcal{R}(\sigma'), \sigma\xi = y\}.$$

Skup $\{(y, \sigma); y \in \mathcal{R}(\sigma)\}$ je Borelov, dokazano u Lemi 3.1., pa je Δ Borelov skup. Ali to je ustvari graf od ψ_1, pa je ψ_1 izmjeriva funkcija. □

Dokaz. (Teorema 3.1.)
Iz prijašnjih lemi i korolara definiramo progresivno izmjeriv proces

$$\theta(t) := \psi_1(b(t) + \delta(t) - r(t)\underset{\sim}{1}, \sigma(t)).$$

On je dobro definiran i zadovoljava (3.1) iz Lemi 3.1, 3.2 i 3.3.
Obratno, pretpostavimo da postoji takav proces koji zadovoljava uvjete (3.2) i (3.3). Za održiv portfolio $\pi(\cdot)$ imamo diskontirani proces dobitka

$$M^\pi(t) := \frac{G(t)}{S_0(t)} = \int_0^t \frac{\pi'(u)}{S_0(u)} dR(u) = \int_0^t \frac{\pi'(u)}{S_0(u)} \sigma(u) dW_0(u), \quad 0 \leq t \leq T$$

gdje je $W_0(t) := W(t) + \int_0^t \sigma(s)ds$ Brownovo gibanje po Girsanovljevom teoremu u odnosu na vjerojatnost

$$P_0(A) := E[1_A \exp\{-\int_0^T \theta'(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T ||\theta(s)||^2 ds\}].$$

Dakle, proces $M^\pi(\cdot)$ je lokalni martingal u odnosu na P_0, pa onda i supermartingal jer je omeđen odozdo. Imamo $E_0(\frac{G(T)}{S_0(T)}) \leq E_0 M^\pi(0) = 0$. Ta nejednakost upravo pokazuje da ne postoji arbitraža. □

Također ćemo ubuduće pretpostavljati da broj dionica N nije veći od dimenzije D Brownovog gibanja. Intuitivni razlog je taj što, ako imamo više dionica nego "rizika", neke od njih se mogu dobiti linearnom kombinacijom ostalih, točnije "N-D" njih, pa možemo reducirati broj dionica, što se može i formalno pokazati.

Također, proces $\theta(\cdot)$ koji je konstruiran u Teoremu 3.1. zadovoljava

$$\theta(t) \in \mathcal{K}^\perp(\sigma(t)) \quad g.s. \tag{3.4}$$

za gotovo svaki $t \in [0, T]$. Proces $\theta(\cdot)$ je jedinstveno određen sa (3.4) i (3.1). Zaista, pretpostavimo da postoje $\theta_1(\cdot)$ i $\theta_2(\cdot)$ koji zadovoljavaju ta dva uvjeta. Onda iz (3.1) slijedi $\sigma(t)(\theta_1(t) - \theta_2(t)) = 0$, tj $\theta_1(t) - \theta_2(t) \in \mathcal{K}(\sigma(t))$. Zajedno sa (3.4) slijedi $\theta_1(t) = \theta_2(t)$ g.s. za gotovo svaki t. Ako je rang od $\sigma(t))$ jednak N onda možemo pogoditi rješenje koje zadovoljava ta dva uvjeta sa

$$\theta(t) = \sigma'(t)(\sigma(t)\sigma'(t))^{-1}[b(t) + \delta(t) - r(t)\underset{\sim}{1}].$$

3.2 Standardna financijska tržišta

Uzimajući u obzir prijašnje tvrdnje, uz još neke tehničke uvjete, uvodimo pojam standardnog financijskog tržišta.

Definicija 3.2. *Financijsko tržište $\mathcal{M}$ je standardno ako:*

1. *je životno*
2. *broj dionica N nije strogo veći od dimenzije D Brownovog gibanja*
3. *D-dimenzionalni, progresivno izmjeriv proces, tržišna cijena rizika θ, koja zadovoljava* (3.1) *i* (3.4), *zadovoljava i*
$$\int_0^T \|\theta(t)\|^2 dt < \infty \tag{3.5}$$
gotovo sigurno, i
4. *pozitivni lokalni martingal*
$$Z_0(t) := exp\{-\int_0^t \theta'(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\theta(s)\|^2 ds\} \tag{3.6}$$
je zapravo martingal.

Za standardno tržište, definiramo još standardnu martingalnu mjeru P_0 na $\mathscr{F}(T)$ sa

$$P_0(A) := E[Z_0(T)1_A] \tag{3.7}$$

Primjetimo da su P i P_0 ekvivalentne mjere.

Napomena 3.1. *Proces $Z_0(\cdot)$ je lokalni martingal zato što zadovoljava*

$$dZ_0(t) = -Z_0(t)\theta'(t)dW(t), \quad Z_0(0) = 1 \tag{3.8}$$

ili ekvivalentno,

$$Z_0(t) = 1 - \int_0^t Z_0(s)\theta'(s)dW(s). \tag{3.9}$$

Poznati uvjet da $Z_0(\cdot)$ bude martingal je $E[exp\{\frac{1}{2}\int_0^T \|\theta(t)\|^2 dt\}] < \infty$, pa posebno ako je $\theta(\cdot)$ omeđen po t i ω, onda je $Z(\cdot)$ martingal.

Napomena 3.2. *Po Girsanovljevom teoremu, proces*

$$W_0(t) := W(t) + \int_0^t \theta(s)ds, \quad \forall t \in [0, T] \tag{3.10}$$

je D-dimenzionalno Brownovo gibanje u odnosu na P_0, i filtraciju $\{\mathscr{F}(t)\}$, pa se proces viška prinosa može zapisati kao $R(t) = \int_0^t \sigma(u)dW_0(u)$, diskontirani proces postaje

$$\frac{G(t)}{S_0(t)} = M_0^\pi(t) := \int_0^t \frac{1}{S_0(u)}\pi'(u)\sigma(u)dW_0(u), \tag{3.11}$$

a diskontirani proces bogatstva

$$\frac{X(t)}{S_0(t)} = \Gamma(0) + \int_0^t \frac{d\Gamma(u)}{S_0(u)} + \int_0^t \frac{1}{S_0(u)}\pi'(u)\sigma(u)dW_0(u). \tag{3.12}$$

Teorem 3.2. *U odnosu na standardnu martingalnu mjeru P_0, proces diskontiranog bogatsva minus diskontirani kumulativni prihod,*

$$\frac{X(t)}{S_0(t)} - \Gamma(0) - \int_0^t \frac{d\Gamma(u)}{S_0(u)}, \quad 0 \le t \le T,$$

je lokalni martingal i ograničen odozdo, pa tako i supermartingal. Posebno, iz toga slijedi

$$E_0[\frac{X(T)}{S_0(T)} - \int_0^T \frac{d\Gamma(u)}{S_0(u)}] \le \Gamma(0). \tag{3.13}$$

Taj proces je martingal ako i samo ako vrijedi jednakost u (3.13).

Dokaz. Gornji proces je zapravo $M_0^\pi(t)$ koji je lokalni martingal (svojstva Itovog integrala) i ograničen odozdo jer je $\pi(\cdot)$ održiv. Lokalni martingal koji je ograničen odozdo je supermartingal. Supermartingal je martingal ako i samo ako ima konstantna očekivanja. □

Cijeli smisao uvođenja definicije standardnog tržišta je da možemo još nešto reći o semimartingalu $M_0^\pi(\cdot)$. U odnosu na P_0 to je lokalni martingal, pa ovo motivira uvođenje ovakve definicije.

Definicija 3.3. $\{\mathscr{F}(t)\}$*-adaptirani proces $\pi(\cdot)$ sa vrijednostima u $\mathbb{R}^N$ koji zadovoljava* (2.9) *i* (2.10) *je martingal-generirajući ako u odnosu na mjeru P_0, $M_0^\pi(\cdot)$ u* (3.11) *je martingal. Ako imamo portfolio proces $(\pi_0(\cdot), \pi(\cdot))$ i $\pi(\cdot)$ je martingal-generirajući, onda kažemo da je portfolio proces $(\pi_0(\cdot), \pi(\cdot))$ je martingal-generirajući.*

Napomena 3.3. *Ako je proces prihoda $\Gamma(\cdot) \equiv 0$ onda je zapravo proces bogatstva ustvari proces dobitka. Za neki održiv portfolio proces $\pi(\cdot)$,* (3.13) *pokazuje da $E_0[\frac{G(T)}{S_0(T)}] \le 0$. Za martingal-generirajući proces $\pi(\cdot)$ vrijedi $E_0[\frac{G(T)}{S_0(T)}] = 0$ i proces dobitka je martingal. U svakom slučaju, arbitraže očito nema.*

3.3 Potpuna financijska tržišta

Jedna od svrha financijskog tržišta je da pružiti investitorima zaštitu od rizika, tj "hedgirati" rizik. Uzmimo investitora koji zna u trenutku $t = 0$ da će u trenutku T morati isplatiti iznos $B(\omega)$, ali veličina iznosa ovisi o puno faktora na koje on nema utjecaja. On bi naravno želio ostaviti po strani fiksan iznos x u vremenu $t = 0$ i biti osiguran da će moći isplatiti tu isplatu u trenutku T. Konzervativna strategija je naravno ostaviti iznos $\sup_{\omega\in\Omega} B(\omega)$, ako je to konačno. Malo pametnija strategija je ostaviti manji iznos, ali ga investirati u nešto drugo tako da ukloni rizik i to nas dovodi do sljedećih definicija.

Definicija 3.4. *Neka je $\mathcal{M}$ standardno financijsko tržište, i neka je B $\mathscr{F}(T)$-izmjeriva slučajna varijabla tako da je $\frac{B}{S_0(T)}$ gotovo sigurno ograničen odozdo i neka je*

$$x := E_0\Big[\frac{B}{S_0(T)}\Big] < \infty. \tag{3.14}$$

1. *Kažemo da je B dostižan ako postoji održiv, x-financiran portfolio proces $(\pi_0(\cdot), \pi(\cdot))$ čiji proces bogatstva zadovoljava $X(T) = B$, tj.*

$$\frac{B}{S_0(T)} = x + \int_0^T \frac{1}{S_0(u)}\pi'(u)\sigma(u)dW_0(u) \tag{3.15}$$

   gotovo sigurno.

2. *Kažemo da je tržište $\mathcal{M}$ potpuno ako je svaka $\mathscr{F}(T)$-izmjeriva slučajna varijabla B, tako da je $\frac{B}{S_0(T)}$ ograničen odozdo i zadovoljava* (3.14)*, dostižna. Inače kažemo da je tržište nepotpuno.*

Propozicija 3.1. *Standardno financijsko tržište $\mathcal{M}$ je potpuno ako i samo ako za svaku $\mathscr{F}(T)$ izmjerivu slučajnu varijablu B koja zadovoljava*

$$E_0\Big[\frac{|B|}{S_0(T)}\Big] < \infty \tag{3.16}$$

i sa x definiran sa (3.14)*, postoji martingal-generirajući, x-financiran portfolio proces $(\pi_0(\cdot), \pi(\cdot))$ koji zadovoljava* (3.15)

Dokaz. Pretpostavimo da je tržište potpuno i B je $\mathscr{F}(T)$ izmjeriva slučajna varijabla koja zadovoljava (3.16). Onda postoji održiv, $x_\pm$ financiran portfolio proces $(\pi_0^\pm(\cdot), \pi^\pm(\cdot))$ sa

$$\frac{B^\pm}{S_0(T)} = x_\pm + \int_0^T \frac{1}{S_0(u)}(\pi^\pm)'(u)\sigma(u)dW_0(u) \tag{3.17}$$

gotovo sigurno, sa $B^{\pm} := \max\{\pm B, 0\}$ i $x_{\pm} := E_0[\frac{B^{\pm}}{S_0(T)}]$. Uzimanjem očekivanja u (3.17) u odnostu na P_0, vidimo da odozdo omeđen lokalni martingal (dakle supermartingal) $\int_0^t \frac{1}{S_0(u)}(\pi^{\pm})'(u)\sigma(u)dW_0(u)$, $0 \leq t \leq T$, ima konstantna očekivanja (jednaka 0, jer je za $t = 0$ i $t = T$ očekivanje jednako 0) u odnosu na P_0. Dakle, $\pi^{\pm}(\cdot$ je martingal-generirajući. Oduzimanjem (3.17) dobivamo (3.15), gdje je $\pi(\cdot) := \pi^{+}(\cdot) - \pi^{-}(\cdot)$ također martingal-generirajući.

Obratno, neka je $\mathscr{F}(T)$ izmjeriva slučajna varijabla B, tako da je $\frac{B}{S_0(T)}$ gotovo sigurno ograničen odozdo i zadovoljava (3.14). Onda postoji martingal-generirajući x-financiran portfolio proces $(\pi_0(\cdot), \pi(\cdot))$ koji zadovoljava (3.15). Uzimanjem uvjetnog očekivanja u toj formuli dobivamo da je

$$\int_0^t \frac{1}{S_0(u)}\pi'(u)\sigma(u)dW_0(u) = -x + E_0\Big[\frac{B}{S_0(T)}|\mathscr{F}(t)\Big], \quad 0 \leq t \leq T$$

ograničen odozdo. Znači, $(\pi_0(\cdot), \pi(\cdot))$ je održiv, $\frac{B}{S_0(T)}$ je dopustiv, i $\mathcal{M}$ je potpuno. □

Napomena 3.4. *U smislu Definicije 3.4, ako se za x-financiran, održiv portfelj* $(\pi_0(\cdot), \pi(\cdot))$ *može naći pripadni proces bogatstva* $X(\cdot)$ *koji zadovoljava* $X(T) = B$ *gotovo sigruno, onda vrijedi očito* $E_0\Big[\frac{X(T)}{S_0(T)}\Big] = x$*, a po zadnjoj tvrdnji u Teoremu 3.2, to kaže da je* $\frac{X(\cdot)}{S_0(\cdot)}$ *martingal u odnosu na* P_0*. Iz toga slijedi da vrijedi*

$$\frac{X(t)}{S_0(t)} = E_0\Big[\frac{B}{S_0(T)}|\mathscr{F}(t)\Big].$$

Sljedeći teorem daje karakterizaciju kad je standardno tržište potpuno.

Teorem 3.3. *Standardno financijsko tržište* $\mathcal{M}$ *je potpuno ako i samo ako je broj dionica* N *jednak broju dimenzije* D *pripadajućeg Brownovog gibanja i matrica volatilnosti* $\sigma(t)$ *je regularna za gotovo svaki* $t \in [0, T]$ *gotovo sigurno.*

Lema 3.4. *Neka je* $\{M_0(t), \mathscr{F}(t); 0 \leq t \leq T\}$ *martingal u odnosu na* P_0*. Onda postoji progresivno izmjeriv proces sa vrijednostima u* $\mathbb{R}^N$, $\varphi(\cdot)$ *tako da*

$$\int_0^T \|\varphi(s)\|^2 ds < \infty, \tag{3.18}$$

$$M_0(t) = M_0(0) + \int_0^t \varphi'(s)dW_0(s), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.19}$$

Ova je lema skoro pa analogon standardnog reprezentacijskog teorema o martingalima kao stohastičkim integralima, samo što je jedina komplikacija što je filtracija generirana sa procesom $W(\cdot)$, a ne $W_0(\cdot)$, ali može se lako pokazati da vrijedi.

Korolar 3.2. *(Dovoljnost u Teoremu 3.3.) Ako je $N = D$ i $\sigma(t)$ je regularna za gotovo svaki $t \in T$ gotovo sigurno, onda je tržište potpuno.*

Dokaz. Koristit ćemo tvrdnju iz prijašnje propozicije. Neka je B $\mathscr{F}(T)$ izmjeriva slučajna varijabla koja zadovoljava (3.16) i definiramo martingal

$$M_0(t) = E_0\Big[\frac{B}{S_0(T)}|\mathscr{F}(t)\Big], \quad 0 \leq t \leq T.$$

Taj martingal ima reprezentaciju kao u (3.19) i ako definiramo

$$\pi'(t) := S_0(t)\varphi'(t)\sigma^{-1}(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

imamo (3.15) (to slijedi direktno iz (3.19)). Uvjet (2.10) slijedi iz (3.18), a uvjet (2.9) slijedi iz

$$\int_0^T |\pi'(s)(b(s) + \delta(s) - r(s)\underset{\sim}{1})|ds = (3.1) = \int_0^T S_0(u)\varphi'(u)\theta(u)du$$

$$\leq \max_{0 \leq u \leq T} S_0(u) \int_0^T ||\varphi(u)||^2 du \int_0^T ||\theta(u)||^2 du < \infty$$

gdje smo iskoristili neprekidnost $S_0(\cdot)$ i Cauchy-Schwartz nejednakost. □

Lema 3.5. *Postoji ograničena, Borel izmjeriva funkcija $\psi_3 : L(\mathbb{R}^D; \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^D$ tako da*

$$\psi_3(\sigma) \in \mathcal{K}(\sigma)$$

$$\psi_3(\sigma) \neq 0 \quad ako \quad \mathcal{K}(\sigma) \neq \{0\}$$

za svaki $\sigma \in L(\mathbb{R}^D; \mathbb{R}^N)$

Dokaz. Neka je $\{e_1, \ldots, e_D\}$ baza za $\mathbb{R}^D$ i definiramo

$$n(\sigma) = \min\{i; \mathrm{proj}_{\mathcal{K}(\sigma)}(e_i) \neq 0\}1_{\{\mathcal{K}(\sigma)\neq 0\}} + 1_{\{\mathcal{K}(\sigma)=0\}}$$

i

$$\psi_3(\sigma) = \mathrm{proj}_{\mathcal{K}(\sigma)}(e_{n(\sigma)}).$$

Izmjerivost od ψ_3 slijedi iz Leme 3.1. Očito je ψ_3 ograničena sa najvećom normom od vektora baze. □

Dokaz. Teorema 3.3 (nužnost): Pomoću funkcije ψ_3 iz prijašnje leme definiramo ograničeni, progresivno izmjeriv proces $\varphi(t) = \psi_3(\sigma(t))$ koji zadovoljava $\varphi(t) \in \mathcal{K}(\sigma(t))$ za svaki $t \in [0, T]$ i $\varphi(t) \neq 0$ kada $\mathcal{K}(\sigma(t)) \neq \{0\}$. Dalje, definiramo $\mathscr{F}(T)$ izmjerivu slučajnu varijablu

$$B := S_0(T)\Big[1 + \int_0^T \varphi'(u)dW_0(u)\Big].$$

Očito $E_0\Big[\frac{|B|}{S_0(T)}\Big] < \infty$ i $E_0\Big[\frac{B}{S_0(T)}\Big] = 1$. Potpunost tržišta i propozicija 3.1. impliciraju egzistenciju martingal-generirajućeg portfolio procesa π tako da vrijedi

$$\int_0^T \frac{1}{S_0(u)}\pi'(u)\sigma(u)dW_0(u) = \frac{B}{S_0(T)} - 1 = \int_0^T \varphi'(u)dW_0(u) \tag{3.20}$$

Budući da su ova dva integrala martingali u odnosu na P_0, uzimanjem uvjetnog očekivanja na $\mathscr{F}(t)$ vidimo da su integrali jednaki na svakom segmentu $[0, t]$. To znači da se i integrandi poklapaju. Dakle vrijedi $\sigma'(t)\pi(t) = S_0(t)\varphi(t)$ za gotovo svaki $t \in [0, T]$ gotovo sigurno. To pokazuje da je $\varphi(t) \in \mathcal{R}(\sigma'(t)) = \mathcal{K}^{\perp}(\sigma(t))$. Po konstrukciji je $\varphi(t) \in \mathcal{K}(\sigma(t))$, pa je $\varphi(t) = 0$ a to vrijedi samo ako $\mathcal{K}(\sigma(t)) = \{0\}$. Dakle $N = D$ i $\sigma(t)$ je regularna za gotovo svaki t gotovo sigurno. $\square$

Napomena 3.5. *U potpunom tržištu $\mathcal{M}$, postoji jedinstvena tržišna cijena rizika $\theta(\cdot)$ definirana sa*

$$\theta(t) = (\sigma(t))^{-1}[b(t) + \delta(t) - r(t)\underline{1}]. \tag{3.21}$$

Poglavlje 4

Američki slučajni zahtjevi i američka put opcija

4.1 Američki slučajni zahtjevi

U ovom ćemo poglavlju definirati američke slučajne zahtjeve. Za razliku od europskih slučajnih zahtjeva koji se mogu iskoristiti samo u terminalnom vremenu T, američki se mogu iskoristiti u bilo kojem trenutku $t \in [0, T]$ za iznos $L(t)$, koji ćemo zvati paušal (eng. lump-sum).

Definicija 4.1. *Američki slučajni zahtjev (eng. American contigent claim, oznaka ACC) se sastoji od kumulativnog procesa dohotka $C(\cdot)$ koji zadovoljava C(0)=0 gotovo sigurno i $\{\mathscr{F}(t)\}$-adaptiranog, RCLL paušalnog procesa $L(\cdot)$. Definiramo diskontirani proces isplate:*

$$Y(t) := \int_{(0,t]} \frac{dC(u)}{S_0(u)} + \frac{L(t)}{S_0(t)}, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{4.1}$$

Pretpostavljamo da je on omeđen odozdo, uniformno po $t \in [0, T]$ i $\omega \in \Omega$, neprekidan (skokovi u $C(\cdot)$ i $L(\cdot)$ se događaju u isto vrijeme, jednakih veličina i suprotnih predznaka) i zadovoljava

$$E_0\Big[\sup_{0 \leq t \leq T} Y(t)\Big] < \infty. \tag{4.2}$$

Kupac ACC-a, koji plaća neki neslučajni iznos γ u trenutku $t = 0$ dobiva kumulativni proces dohotka $C(\cdot)$, no također i može birati vrijeme zaustavljanja $\tau : \Omega \to [0, T]$ koje se zove vrijeme izvršavanja. U trenutku τ, kupac se odriče svih budućih dohodaka od procesa $C(\cdot)$ i dobiva paušal $L(\tau)$. Dakle, kumulativni proces dohotka prodavatelja ACC-a je

$$\Gamma(t) = \gamma - C(t \wedge \tau) - L(\tau)1_{\{t \geq \tau\}}, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{4.3}$$

Za puno američkih slučajnih zahtjeva je $C(\cdot) \equiv 0$. Na primjer, za američku call opciju sa cijenom izvršenja q možemo staviti $C(\cdot) \equiv 0$ i $L(t) = (S_1(t) - q)^+$.

Prodavatelj ACC-a bi trebao odabrati portfolio da se zaštiti od rizika koji nosi njegova pozicija. Tu zaštitu dodatno komplicira slučajnost vremena izvršenja τ. Pogledajmo prvo slučaj kad je $\tau = T$. U tom slučaju, prodavateljev proces dohotka je dan sa $\gamma - C(t) - L(T)1_{\{t=T\}}$ za $0 \leq t \leq T$. Za martingal-generirajući portfelj je onda proces bogatstva dan sa (vidi (3.12)):

$$\frac{X(t)}{S_0(t)} = \gamma - \int_{(0,t]} \frac{dC(u)}{S_0(u)} - \frac{L(T)}{S_0(T)} 1_{\{t=T\}} + \int_0^t \frac{1}{S_0(u)} \pi'(u)\sigma(u)dW_0(u), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{4.4}$$

Prodavatelj naravno želi $X(T) \geq 0$ (ne želi izgubiti na prodavanju opcije), to jest:

$$Y(T) = \int_{(0,T]} \frac{dC(u)}{S_0(u)} + \frac{L(T)}{S_0(T)} \leq \gamma + \int_0^T \frac{1}{S_0(u)} \pi'(u)\sigma(u)dW_0(u). \tag{4.5}$$

Da bi osigurao da može isplatiti paušal u slučaju da kupac odluči iskoristiti zahtjev prijevremeno, prodavatelj također želi $X(t) \geq L(t)$ za svaki $0 \leq t < T$. Taj uvjet, zajedno sa (4.5) daje:

$$Y(t) = \int_{(0,t]} \frac{dC(u)}{S_0(u)} + \frac{L(t)}{S_0(t)} \leq \gamma + \int_0^t \frac{1}{S_0(u)} \pi'(u)\sigma(u)dW_0(u) \quad \text{g.s.} \quad \forall t \in [0, T]. \tag{4.6}$$

Pošto su obadvije strane neprekidne po t, skup mjere 0 gdje nejednakost ne vrijedi se može odabrati tako da ne ovisi o t. Dakle, nejednakost vrijedi ako t zamjenimo sa nekim slučajnim vremenom τ koji poprima vrijednosti u $[0, T]$:

$$Y(\tau) = \int_{(0,\tau]} \frac{dC(u)}{S_0(u)} + \frac{L(\tau)}{S_0(\tau)} \leq \gamma + \int_0^\tau \frac{1}{S_0(u)} \pi'(u)\sigma(u)dW_0(u) \quad \text{g.s.} \tag{4.7}$$

Intuitivno, ovo je tvrdnja da prodavatelj ne želi ništa izgubiti nakon što izvrši obaveze koje zahtjeva njegova napisana opcija.

Definicija 4.2. *Neka je $(C(\cdot), L(\cdot))$ ACC. Vrijednost zahtjeva u trenutku nula je*

$$V^{\mathrm{ACC}}(0) := \inf\{\gamma \in \mathbb{R};\ \textit{postoji martingal-generirajući proces } \pi(\cdot) \textit{ koji zadovoljava } (4.6)\}.$$

Portfolio za kojeg se taj infimum postiže zovemo hedging portfolio.

Ovdje smo eksplicitno definirali vrijednost američkog zahtjeva. Intuitivno, to je najmanji broj za koji se može naći portfolio koji "replicira" zahtjev. Kada bi prodavatelj naplatio više, nitko ne bi kupovao jer bi inače konstruirali baš taj portfolio.

Teorem 4.1. *Uz oznake kao gore, vrijedi:*

$$V^{\mathrm{ACC}}(0) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}_{0,T}} E_0 Y(\tau) \tag{4.8}$$

gdje je $\mathcal{S}_{0,T}$ skup svih vremena zaustavljanja koji poprimaju vrijednosti u $[0,T]$. Nadalje, postoji vrijeme zaustavljanja τ^* koji postiže taj supremum i postoji hedging portfolio $\hat{\pi}(\cdot)$ tako da vrijedi:

$$Y(\tau^*) = V^{\mathrm{ACC}}(0) + \int_0^{\tau^*} \frac{1}{S_0(u)} \hat{\pi}'(u)\sigma(u)dW_0(u) \quad g.s. \tag{4.9}$$

Dokaz. $Y(\cdot)$ se može, ako je potrebno, učiniti nenegativnim dodavajući konstantu, pošto je omeđen uniformno po t i ω, pa možemo iskoristiti rezultate o optimalnom zaustavljanju. Po Teoremu 1.4.2 postoji P_0 supermartingal $\{\xi(t), \mathscr{F}(t);\ 0 \leq t \leq T\}$ sa RCLL putevima, kojeg zovemo Snellov omotač od $Y(\cdot)$, tako da vrijedi

$$\xi(t) \geq Y(t), \quad \forall t \in [0,T] \quad \text{g.s.}$$

i

$$\xi(\nu) = \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{S}_{\nu,T}} E_0[Y(\tau)|\mathscr{F}(\nu)] \quad \text{g.s.}, \quad \forall \nu \in \mathcal{S}_{0,T}. \tag{4.10}$$

gdje je $\mathcal{S}_{\nu,T}$ skup svih vremena zaustavljanja koji su veći ili jednaki od ν. Posebno, $\xi(0) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}_{0,,T}} E_0 Y(\tau)$. Po Teoremu 1.4.4, vrijeme zaustavljanja

$$\tau^* := \inf\{t \in [0,T);\ \xi(t) = Y(t)\} \wedge T$$

zadovoljava $\xi(0) = E_0 Y(\tau^*)$.

Teorem 1.4.5 kaže da se postoji Doob-Meyerova dekompozicija od Snellovog omotača, to jest $\xi(\cdot) = M(\cdot) - \Lambda(\cdot)$, gdje je M uniformno integrabilni RCLL martingal u odnosu na P_0, a $\Lambda(\cdot)$ je adaptiran, neprekidan, neopadajući proces sa $\Lambda(0) = \Lambda(\tau^*) = 0$ g.s. (jer je $\Lambda(t) = 0$ na skupu gdje je $\xi(t) > Y(t)$, a τ^* je prvo vrijeme gdje se jednakost postiže). Budući da je tržište potpuno, $\mathscr{F}(T)$-izmjeriva slučajna varijabla $B := S_0(T)M(T)$ je dostižna, pa postoji martingal-generirajući proces $\hat{\pi}(\cdot)$ tako da je:

$$M(T) = \xi(0) + \int_0^T \frac{1}{S_0(u)} \hat{\pi}'(u)\sigma(u)dW_0(u) \tag{4.11}$$

(vidi Propoziciju 3.1 zajedno sa $x = E_0(\frac{B}{S_0(T)}) = E_0(M(0)) = \xi(0)$). Uzimanjem uvjetnog očekivanja u odnosu na $\mathscr{F}(t)$ u (4.11) dobivamo:

$$Y(t) \leq \xi(t) = M(t) - \Lambda(t) = \xi(0) - \Lambda(t) + \int_0^t \frac{1}{S_0(u)}\hat{\pi}'(u)\sigma(u)dW_0(u) \leq$$

$$\leq \xi(0) + \int_0^t \frac{1}{S_0(u)}\hat{\pi}'(u)\sigma(u)dW_0(u), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{4.12}$$

Iz ovoga odmah slijedi da je $V^{\mathrm{ACC}}(0) \leq \xi(0)$. Pretpostavimo sad da vrijedi (4.6) za neki $\gamma \in \mathbb{R}$ i martingal-generirajući proces $\pi(\cdot)$. Uzimanjem očekivanja u (4.7) slijedi da je $E_0 Y(\tau) \leq \gamma$ za svako vrijeme zaustavljanja (iz teorema o optimalnom zaustavljanju vrijedi da očekivanje zaustavljenog martingala jednako očekivanju od $M(0)$ što je u našem slučaju 0). No sada imamo $\xi(0) \leq \gamma$ jer je $\xi(0) = \sup_{\tau\in\mathcal{S}_{0,,T}} E_0 Y(\tau)$. Dakle, vrijedi $\xi(0) \leq V^{\mathrm{ACC}}(0)$. Sada kada imamo $\xi(0) = V^{\mathrm{ACC}}(0)$, vidimo iz (4.12) da je $\hat{\pi}(\cdot)$ hedging portfolio i vrijedi (4.9) (uzmemo očekivanje u (4.7) sa τ^*).

□

Napomena 4.1. (4.9) *baš kaže da je τ^* optimalno vrijeme za iskoristiti ACC, jer je u tom trenutku prodavateljevo bogatstvo $X(\tau^*) = 0$. Ako kupac ne iskoristi ACC, prodavatelj ima arbitražu.*

Sada bi htjeli proširiti vrijednost ACC-a na proizvoljno vrijeme $t \in [0, T]$. Pretpostavimo da kupac plati vrijednost $\gamma(s)$ koja je $\mathscr{F}(s)$ izmjeriva slučajna varijabla da dobije ostatak procesa dohotka $\{C(t) - C(s); t \in [s, \tau]\}$ do vremena zaustavljanja $\tau \in \mathcal{S}_{s,T}$ u kojem dobije paušal $L(\tau)$. Isto argument sa kojim smo došli do uvjeta (4.6) daje prodavateljevo željeno hedgiranje:

$$Y(t) - \int_{(0,s]} \frac{dC(u)}{S_0(u)} = \int_{(s,t]} \frac{dC(u)}{S_0(u)} + \frac{L(t)}{S_0(t)} \leq$$

$$\leq \frac{\gamma(s)}{S_0(s)} + \int_s^t \frac{1}{S_0(u)}\pi'(u)\sigma(u)dW_0(u) \quad \text{g.s.} \quad \forall t \in [s, T]. \tag{4.13}$$

Definicija 4.3. *Neka je $(C(\cdot), L(\cdot))$ američki slučajni zahtjev. Vrijednost zahtjeva u vremenu $s \in [0, T]$ (oznaka: $V^{\mathrm{ACC}}(s)$) je najmanja $\mathscr{F}(s)$-izmjeriva slučajna varijabla $\gamma(s)$ tako da vrijedi* (4.13) *za neki martingal-generirajući portfolio proces $\pi(\cdot)$.*

Teorem 4.2. *Za $s \in [0, T]$ imamo*

$$V^{\mathrm{ACC}}(s) = S_0(s)\Big[\xi(s) - \int_{(0,s]} \frac{1}{S_0(u)}dC(u)\Big] \tag{4.14}$$

gdje je $\xi(\cdot)$ Snellov omotač od $Y(\cdot)$ koji zadovoljava (4.10). *Nadalje, vrijeme zaustavljanja*

$$\tau_s^* := \inf\{t \in [s, T); \xi(t) = Y(t)\} \wedge T$$

zadovoljava $\xi(s) = E[Y(\tau_s^*)|\mathscr{F}(s)]$ *g.s., i sa hedging portfeljom* $\hat{\pi}(\cdot)$ *iz Teorema 4.1, jednakost u* (4.13) *vrijedi u* τ_s^**:*

$$Y(\tau_s^*) - \int_{(0,s]} \frac{dC(u)}{S_0(u)} = \frac{V^{\mathrm{ACC}}(s)}{S_0(s)} + \int_s^{\tau_s^*} \frac{1}{S_0(u)} \hat{\pi}'(u)\sigma(u)dW_0(u) \quad g.s. \tag{4.15}$$

Dokaz. Zamjenimo t u (4.13) sa proizvoljnim $\tau \in \mathcal{S}_{s,T}$ (analogni argument kao i za (4.7) i uzmemo uvjetno očekivanje s obzirom na $\mathscr{F}(s)$ da dobijemo

$$E_0[Y(\tau)|\mathscr{F}(s)] - \int_{(0,s]} \frac{dC(u)}{S_0(u)} \leq \frac{\gamma(s)}{S_0(s)} \quad \text{g.s.}$$

Jer je τ proizvoljno, onda nejednakost vrijedi i za esencijalni supremum (uzmemo $\gamma(s) = V^{\mathrm{ACC}}(s)$). Dakle

$$\xi(s) - \int_{(0,s]} \frac{dC(u)}{S_0(u)} \leq \frac{V^{\mathrm{ACC}}(s)}{S_0(s)} \quad \text{g.s.}$$

Za obrnutu nejednakost, neka je $t \in [s, T]$ i primjetimo iz (4.11) i (4.12):

$$\xi(t) - \xi(s) = \int_s^t \frac{1}{S_0(u)} \hat{\pi}'(u)\sigma(u)dW_0(u) - [\Lambda(t) - \Lambda(s)].$$

Zbog $Y(t) \leq \xi(t)$ i $\Lambda(t) - \Lambda(s) \geq 0$, imamo

$$\begin{aligned} Y(t) - \int_{(0,s]} \frac{dC(u)}{S_0(u)} &\leq \xi(t) - \int_{(0,s]} \frac{dC(u)}{S_0(u)} \leq \\ \leq \xi(s) - \int_{(0,s]} \frac{dC(u)}{S_0(u)} &+ \int_s^t \frac{1}{S_0(u)} \hat{\pi}'(u)\sigma(u)dW_0(u) \quad \text{g.s.} \end{aligned} \tag{4.16}$$

Ovo pokazuje da (4.13) vrijedi za

$$\frac{\gamma(s)}{S_0(s)} = \xi(s) - \int_{(0,s]} \frac{dC(u)}{S_0(u)}.$$

Jer je $V^{\mathrm{ACC}}(s)$ baš najmanja takva varijabla, onda vrijedi

$$\frac{V^{\mathrm{ACC}}(s)}{S_0(s)} \leq \xi(s) - \int_{(0,s]} \frac{dC(u)}{S_0(u)}.$$

Time smo dokazali (4.14). Ako umjesto t stavimo τ_s^* u (4.16), dobivamo svugdje jednakost jer $Y(\tau_s^*) = \xi(\tau_s^*)$ i $\Lambda(\tau_s^*) - \Lambda(s) = 0$ (Teorem 1.4.5). □

4.2 Američka put opcija

U ovom ćemo se poglavlju fokusirati na američku put opciju sa cijenom izvršenja $q > 0$ i konačnim vremenom izvršenja $T \in (0, \infty)$. Zbog jednostavnosti, u našem modelu financijskog tržišta ćemo staviti $N = D = 1$ i izostaviti indekse na $S_1(\cdot), \sigma_{11}(\cdot), b_1(\cdot)$ i $\delta_1(\cdot)$. Dakle, imamo jednu dionicu na koju imamo napisanu opciju. Također, pretpostavit ćemo fiksnu volatilnost, dividendu i kamatnu stopu:

$$\sigma(\cdot) \equiv \sigma > 0, \quad \delta(\cdot) \equiv \delta \geq 0, \quad r(\cdot) \equiv r > 0. \tag{4.17}$$

Tada je cijena dionice dana sa

$$S(t) = S(0)H(t), \tag{4.18}$$

gdje je

$$H(t) := \exp\{\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \int_0^t b(u)du\} = \exp\{\sigma W_0(t) + (r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})t\}. \tag{4.19}$$

Diskontirani proces isplate američke put opcije ($C(\cdot) \equiv 0, L(t) = (q - S(t))^+$) je:

$$Y(t) = e^{-rt}(q - S(t))^+. \tag{4.20}$$

Po Teoremu 4.1, vrijednost američke put opcije sa vremenom izvršenja T, kada je $S(0) = x$ je dana sa:

$$p(T, x) := \sup_{\tau \in \mathcal{S}_{0,T}} E_0[e^{-r\tau}(q - xH(\tau))^+], \quad 0 \leq x < \infty, \quad 0 \leq T < \infty. \tag{4.21}$$

Iz jakog Markovljevog svojstva od $S(\cdot)$, translatiranjem vremena zaustavljanja $\tau \in \mathcal{S}_{t,T}$ u $\tau + t, \tau \in \mathcal{S}_{0,T-t}$ i korištenja svojstva $S(t_1 + t_2) = S(t_1)H(t_2)$ dobivamo Snellov omotač

$$\xi(t) := \sup_{\tau \in \mathcal{S}_{t,T}} E_0[Y(\tau)|\mathscr{F}(t)] = e^{-rt}p(T - t, S(t)), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{4.22}$$

Po Teoremu 1.4.4, optimalno vrijeme izvršavanja opcije sa početnom cijenom $S(0) = x$ je dano sa

$$\tau_x := \inf\{t \in [0, T]; \quad p(T - t, S(t)) = (q - S(t))^+\}. \tag{4.23}$$

Ovo vrijeme poprima vrijednosti u $[0, T]$ jer je $p(0, S(T)) = (q - S(T))^+$, i postiže supremum u (4.21). Dokaz Teorema 4.1 pokazuje da je zaustavljeni proces

$$\{e^{-r(t \wedge \tau_x)}p(T - (t \wedge \tau_x), S(t \wedge \tau_x)), \mathscr{F}(t); \quad 0 \leq t \leq T\} \tag{4.24}$$

P_0 martingal. To slijedi iz toga da je zaustavljeni Snellov omotač u optimalnom vremenu zaustavljanja martingal. Fokusirajmo se sada na svojstva vrijednosti opcije, to jest funkciju $p(\cdot,\cdot)$.

Propozicija 4.1. *Funkcija* $p : [0,\infty)^2 \to [0,\infty)$ *je neprekidna i dominira "unutrašnju vrijednost" opcije*

$$\varphi(x) := (q-x)^+, \quad 0 \le x < \infty. \tag{4.25}$$

Dokaz. Fiksirajmo $(T,x) \in [0,\infty)^2$ i neka je τ_x kao u (4.23). Budući da vrijedi $z_1^+ - z_2^+ \le (z_1 - z_2)^+$ za svaki $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, imamo za svaki $y \in [0,\infty)$

$$p(T,x) - p(T,y) = E_0[e^{-r\tau_x}\{(q - xH(\tau_x))^+ - (q - yH(\tau_x))^+\}] \le$$

$$\le (y-x)^+ E_0[e^{-r\tau_x} H(\tau_x)] \le |x-y|,$$

gdje zadnja nejednakost slijedi iz toga da je $e^{-rt}H(t)$ P_0-supermartingal i $H(0) = 1$. Zamjenom x i y, dobivamo da je $|p(T,x) - p(T,y)| \le |x-y|$, pa je $p(T,x)$ Lipschitz neprekidna po x. Definirajmo sada

$$\psi(t) := E_0[\max_{0\le s\le t}(1 - e^{-rs}H(s))^+].$$

Zbog teorema o dominiranoj konvergenciji imamo $\lim_{t\downarrow 0}\psi(t) = 0$. Neka su sad $0 \le T_1 \le T_2$ i $x \in [0,\infty)$. Stavimo τ_1 i τ_2 kao u (4.23) ($T = T_1,\ T_2$ respektivno). Možemo ih zapisati i kao:

$$\tau_2 = \inf\{t \in [0,T_2), \quad p(T_2 - t, xH(t)) = (q - xH(t))^+\} \wedge T_2, \quad \tau_1 = \tau_2 \wedge T_1.$$

Vidimo da vrijedi $\tau_1 \le \tau_2$. Onda sa $S(t) = xH(t)$ imamo

$$0 \le p(T_2,x) - p(T_1,x) = E_0[e^{-r\tau_2}(q - S(\tau_2))^+ - e^{-r\tau_1}(q - S(\tau_1))^+] \le$$

$$\le E_0(e^{-r\tau_1}S(\tau_1) - e^{-r\tau_2}S(\tau_2) - q(e^{-r\tau_1} - e^{-r\tau_2}))^+ \le E_0(e^{-r\tau_1}S(\tau_1) - e^{-r\tau_2}S(\tau_2))^+ =$$

$$= E_0[e^{-r\tau_1}S(\tau_1)(1 - e^{-r(\tau_2-\tau_1)}H(\tau_2 - \tau_1))^+] \le E_0\{e^{-r\tau_1}S(\tau_1)E_0[\max_{T_1\le t\le T_2}(1 - \exp\{\sigma(W_0(t) - W_0(T_1))$$

$$-(\delta + \sigma^2/2)(t - T_1)\})^+|\mathscr{F}(T_1)]\} = E_0\{e^{-r\tau_1}S(\tau_1)\}\psi(T_2 - T_1) \le x\psi(T_2 - T_1).$$

Sada vidimo da je $p(T,x)$ uniformno neprekidna po T. Funkcija p očito dominira φ, uzimajući $\tau \equiv 0$ u (4.21).

□

Lema 4.1. *Preslikavanja* $T \to p(T,X)$, $x \to p(T,x)$ *i* $x \to x + p(T,x)$ *su neopadajuća, nerastuća i neopadajuća respektivno i zadnja dva su konveksna.*

Dokaz. Prvo preslikavanje je neopadajuće jer se za $T_1 \geq T_2$ uzima supremum po većem skupu. Drugo preslikavanje je nerastuće jer vrijedi $e^{-r\tau}(q - x_1 H(\tau))^+ \leq e^{-r\tau}(q - x_2 H(\tau))^+$ za $x_1 \geq x_2$ i $\tau \in \mathcal{S}_{0,T}$ pa je i $p(T, x_1) \leq p(T, x_2)$. Provjerimo još treću funkciju. Za $0 \leq x < y < \infty$ imamo

$$p(T, y) - p(T, x) = p(T, y) - E_0[e^{-r\tau_x}(q - xH(\tau_x))^+] \geq$$
$$E_0[e^{-r\tau_x}\{(q - yH(\tau_x))^+ - (q - xH(\tau_x))^+\}] \geq (z_2^+ - z_1^+ \geq -(z_1 - z_2)^+) \geq$$
$$\geq (x - y)E_0[e^{-r\tau_x}H(\tau_x)] \geq x - y$$

budući da je $e^{-rt}H(t)$ supermartingal sa $H(0) = 1$. Budući da je funkcija $g(x, C) = (q - Cx)^+$ konveksna po x i za fiksan C, računamo, za $\lambda \in [0, 1]$, $\tau \in \mathcal{S}_{0,T}$ i $x_1, x_2 \in [0, \infty)$:

$$e^{-r\tau}g(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, H(\tau)) \leq \lambda e^{-r\tau}g(x_1, H(\tau)) + (1 - \lambda)e^{-r\tau}g(x_2, H(\tau)),$$

pa uzimanjem očekivanja i supremuma po $\tau \in \mathcal{S}_{0,T}$ slijedi konveksnost od $x \to p(T, x)$. Konveknost funkcije $x \to x + p(T, x)$ slijedi direktno iz konveknosti $p(T, x)$. □

Lema 4.2. *Za svaki* $(T, x) \in (0, \infty)^2$ *vrijedi* $0 < p(T, x) < q$.

Dokaz. Za proizvoljan $\tau \in \mathcal{S}_{0,T}$ i $x > 0$ imamo $e^{-r\tau} \leq 1$ i $(q - xH(\tau))^+ < q$, pa je $p(T, x) < q$. Provjerimo strogu pozitivnost. Za $0 < x < q$ imamo $p(T, x) \geq (q - x)^+ > 0$. Za $x \geq q$, definiramo $\tau = T \wedge \inf\{t \geq 0;\ xH(t) \leq \frac{q}{2}\}$ i računamo:

$$p(T, x) \geq E_0[e^{-r\tau}(q - xH(\tau))^+] \geq \frac{q}{2}E_0[e^{-r\tau}1_{\{\tau<T\}}] > 0.$$

□

Za kraj ćemo pokazati da je funkcija p ustvari rješenje jedne posebne paraboličke parcijalne diferencijalne jednadžbe. Definiramo prvo područje gdje je vrijednost opcije strogo veća od njezine unutrašnje vrijednosti:

$$C := \{(T, x) \in (0, \infty)^2; \quad p(T, x) > (q - x)^+\}$$

i njezine presjeke

$$C_T := \{x \in (0, \infty); \quad p(T, x) > (q - x)^+\}, \quad T \in (0, \infty).$$

Budući da su p i φ neprekidne funkcije, C je otvoren u $(0, \infty)^2$ i svaki C_T je otvoren u $(0, \infty)$.

Propozicija 4.2.1. *Za svaki* $T \in (0, \infty)$, *postoji realan broj* $c(T) \in (0, q)$ *tako da vrijedi* $C_T = (c(T), \infty)$. *Funkcija* $T \to c(T)$ *je nerastuća, odozgo poluneprekidna i neprekidna slijeva na* $(0, \infty)$. *Dakle, može se proširiti po definiciji* $c(0+) := \lim_{T\downarrow 0} c(T)$. *Imamo* $c(0+) \leq q$.

Dokaz. Neka je $T \in (0, \infty)$ i pretpostavimo da je $x \in C_T$ i $y > x$. Iz Lemi 4.1 i 4.2 imamo:

$$p(T, y) \geq p(T, x) + x - y > (q - x)^+ + x - y \geq q - y.$$

Budući da također $p(T, y) > 0$, slijedi $p(T, y) > (q - y)^+$, dakle $y \in C_T$. Ovo pokazuje da C_T ima formu $(c(T), \infty)$. Egzistencija $c(T)$ slijedi iz osnovnih svojstava skupa realnih brojeva, ako neki neprazan podskup ima donju među, postoji infimum. Infimum se ne može postići jer su C_T otvoreni skupovi. Budući da je $T \to p(T, x)$ neopadajuća, imamo za svaki $\epsilon > 0,\ \delta > 0$:

$$p(T + \epsilon, c(T) + \delta) \geq p(T, c(T) + \delta) > (q - c(T) - \delta)^+.$$

Dakle, $(c(T) + \delta) \in C_{T+\epsilon}$, pa je $c(T + \epsilon) < c(T) + \delta$. Pošto je $\delta > 0$ proizvoljan, imamo $c(T + \epsilon) \leq c(T)$, što pokazuje da je $c(\cdot)$ nerastuća.
Uzmimo sada bilo koji niz $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ u $(0, \infty)$ sa limesom $T_0 \in (0, \infty)$ i $\lim_{n\to\infty} c(T_n) = c_0$. Pošto je C otvoren i $(T_n, c(T_n)) \notin C$ za svaki n, slijedi $(T_0, c_0) \notin C$. Dakle, $c_0 \leq c(T_0)$. Drugim riječima, $\limsup_{T\to T_0} c(T) \leq c(T_0)$ za svaki $T_0 \in (0, \infty)$. Ovo dokazuje poluneprekidnost odozgo od $c(\cdot)$, a pošto je i neopadajuća, imamo $c(T-) = c(T)$, to jest neprekidnost slijeva.
Iz Leme 4.2, za $x \geq q$ imamo $p(T, x) > 0 = (q - x)^+$. Zato je $c(T) < q$ za svaki $T \in (0, \infty)$. Dakle, slijedi da je $c(0+) \leq q$. □

Napomena 4.2. *Skup C je zapravo epigraf od $c(\cdot)$.*

Teorem 4.3. *Funkcija p je jedinstveno rješenje na $\bar{C}$ od početnog problema*

$$\mathcal{L}f = 0 \quad na \quad C = \{(t, x) \in (0, \infty)^2; \quad x > c(t)\}, \tag{4.26}$$

$$f(t, c(t)) = q - c(t), \quad 0 \leq t < \infty, \tag{4.27}$$

$$f(0, x) = (q - x)^+, \quad c(0) \leq x < \infty, \tag{4.28}$$

$$\lim_{x\to\infty} \max_{0\leq t\leq T} |f(t, x)| = 0 \quad \forall T \in (0, \infty), \tag{4.29}$$

gdje je $\mathcal{L}f := \frac{1}{2}\sigma^2 f_{xx} + (r - \delta)x f_x - rf - f_t$. Posebno, parcijalne derivacije p_{xx}, p_x, p_t postoje i neprekidne su u C.

Dokaz. Očito, p zadovoljava (4.27) i (4.28). (4.27) slijedi iz neprekidnosti funkcije p na $(0, \infty)^2$, a (4.28) slijedi direktno iz definicije funkcije p. Provjeravamo (4.26). Uzmimo točku $(t, x) \in C$ i pravokutnik $\mathcal{R} = (t_1, t_2) \times (x_1, x_2)$ tako da vrijedi $(t, x) \in \mathcal{R} \subset C$. Označimo takozvani "parabolički" rub pravokutnika $\partial_0 \mathcal{R} := \partial \mathcal{R} \setminus [\{t_2\} \times (x_1, x_2)]$ i razmotrimo problem

$$\mathcal{L} f = 0, \quad \text{na} \quad \mathcal{R},$$

$$f = p, \quad \text{na} \quad \partial_0 \mathcal{R}.$$

Zbog uvjeta $x_1 \geq c(t) > 0$, klasična teorija paraboličkih jednadžbi (vidi [2], 3. poglavlje) garantira egzistenciju i jedinstvenost rješenja f tako da su f_{xx}, f_x, f_t neprekidne. Sada moramo samo pokazati da se f i p podudaraju na $\mathcal{R}$.
Neka je $(t_0, x_0) \in \mathcal{R}$ i promotrimo vrijeme zaustavljanja u $\mathcal{S}_{0, t_0 - t_1}$:

$$\tau := \inf\{\theta \in [0, t_0 - t_1); \quad (t_0 - \theta, x_0 H(\theta)) \in \partial_0 \mathcal{R}\} \wedge (t_0 - t_1).$$

To je prvo vrijeme kada taj poseban proces u $\mathcal{R}$ dodirne paraboličnu granicu. Nadalje, definirajmo proces

$$N(\theta) := e^{-r\theta} f(t_0 - \theta, x_0 H(\theta)), \quad 0 \leq \theta \leq t_0 - t_1.$$

Dokažimo, pomoću Itovog pravila da je to P_0 martingal. Zamjeniti ćemo $\theta \leftrightarrow t$ zbog jednostavnosti. Izračunajmo prvo dH_t. Uz $g(t, x) := \exp\{\sigma x + (r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})t\}$ i (4.19) imamo $H(t) = g(t, W_0(t))$. Računamo (izostavljamo indeks 0 u Brownovom gibanju zbog jednostavnosti):

$$\begin{aligned} dH_t = g_t dt + g_x dW_t + \frac{1}{2} g_{xx} dt = (r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}) H_t dt + \sigma H_t dW_t + \frac{\sigma^2}{2} H_t dt = \\ = H_t((r - \delta) dt + \sigma dW_t). \end{aligned}$$

Izračunajmo formalno još $d[H, H]_t$:

$$d[H, H]_t = dH_t dH_t = H_t^2 \sigma^2 dt.$$

Za funkciju $h(t, x) = e^{-rx} f(t_0 - x, x_0 x)$ imamo $N(t) = h(t, H(t))$. Sada imamo:

$$\begin{aligned} dN_t &= h_t dt + h_x dH_t + \frac{1}{2} h_{xx} d[H, H]_t = \\ &= (-rN_t - f_t e^{-rt}) dt + e^{-rt} x_0 f_x dH_t + e^{-rt} \frac{1}{2} x_0^2 f_{xx} H_t^2 \sigma^2 dt = \\ &= (-rN_t - f_t e^{-rt} + x_0 H_t (r - \delta) f_x e^{-rt} + \frac{1}{2} x_0^2 f_{xx} H_t^2 \sigma^2) dt + \text{član uz } dW_t = \\ &= (N_t = e^{-rt} f;\ x_0 H_t = x) = e^{-rt} \mathcal{L} f dt + \text{član uz } dW_t = \text{član uz } dW_t. \end{aligned}$$

Dakle, $N(\theta)$ je P_0 martingal, pa je i zaustavljeni proces $N(\cdot \wedge \tau)$ ograničeni P_0 martingal, pa imamo:

$$f(t_0, x_0) = N(0) = E_0 N(\tau) = E_0[e^{-r\tau} p(t_0 - \tau, xH(\tau)].$$

Zbog $(t_0 - \tau, x_0 H(\tau)) \in C$, imamo

$$\tau \leq \tau_x := \inf\{\theta \in [0, t_0); \quad p(t_0 - \theta, x_0 H(\theta)) = (q - x_0 H(\theta))^+\} \wedge t_0,$$

pa iz teorema o opcionalnom zaustavljanju i (4.24) slijedi

$$f(t_0, x_0) = E_0[e^{-r\tau} p(t_0 - \tau, xH(\tau)] = p(t_0, x_0).$$

Znači, f i p se podudaraju na $\mathcal{R}$, pa parcijalne derivacije p_{xx}, p_x, p_t postoje, neprekidne su i zadovoljavaju (4.26).
Provjeravamo (4.29). Neka je $T \in (0, \infty)$. Za $(t, x) \in [0, T] \times (0, \infty)$, definiramo vrijeme zaustavljanja τ_x kao u (4.23). Dakle, vrijedi $p(t, x) = E_0[e^{-r\tau_x}(q - xH(\tau_x))^+]$. Stavimo vrijeme zaustavljanja $\rho_x := \inf\{\theta \in [0, \infty); \quad xH(\theta) \leq q\}$, tako da je na događaju $\{\rho_x \leq t\}$ $\tau_x \geq \rho_x$ jer je $p(t, x) > 0$, a na događaju $\{\rho_x > t\}$ je $\tau_x = t$. Slijedi

$$0 \leq p(t, x) \leq qE_0[1_{\{\rho_x \leq t\}} e^{-r\rho_x}] + E_0[1_{\{\rho_x > t\}} e^{-rt}(q - xH(t))^+] \leq qP_0[\rho_x \leq T].$$

Primjetimo da gornji izraz ne ovisi o t. Pošto je $\lim_{x\to\infty} P_0[\rho_x \leq T] = 0$, dobivamo (4.29).
Za jedinstvenost, neka je f definiran na $\bar{C}$ rješenje našeg problema. Primjetimo da je zbog (4.29) za svaki $T > 0$ funkcija f ograničena na $\{(t, x) \in [0, T] \times [0, \infty); \quad x \geq c(t)\}$. Za $x > c(T)$ definiramo $M(t) := e^{-rt} f(T - t, xH(t))$, $0 \leq t \leq T$ i $\tau_x := T \wedge \inf\{t \in [0, T]; \; xH(t) \leq c(T - t)\}$. Analogno kao i prije, pomoću Itovog pravila dobivamo da je $M(\cdot \wedge \tau_x)$ ograničeni P_0 martingal. Pošto τ_x postiže supremum u (4.21) zbog definicije funkcije $c(\cdot)$, iz teorema o opcionalnom zaustavljanju imamo

$$\begin{aligned} f(T, x) = M(0) = E_0 M(\tau_x) = E_0[e^{-r\tau_x} f(T - \tau_x, xH(\tau_x))] = \\ = (4.27) = E_0[e^{-r\tau_x}(q - xH(\tau_x))^+] = p(T, x). \end{aligned}$$

□

Bibliografija

[1] Sergio Albeverio i Walter Schachermayer, *Lectures on probability theory and statistics: ecole d'eté de probabilités de Saint-Flour XXX-2000*, Springer Science & Business Media, 2003.

[2] Avner Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, Courier Dover Publications, 2008.

[3] Ioannis Karatzas i Steven E Shreve, *Methods of mathematical finance*, sv. 39, Springer, 1998.

[4] Ioannis Karatzas i Steven Shreve, *Brownian motion and stochastic calculus*, sv. 113, Springer Science & Business Media, 2012.

[5] Kalyanapuram Rangachari Parthasarathy, *Probability measures on metric spaces*, sv. 352, American Mathematical Soc., 2005.

Sažetak

Kroz ovaj diplomski rad smo se upoznali sa osnovama stohastičke analize i Black-Scholes-Mertonovog modela financijskog tržišta. Glavni cilj je bio što jednostavnije opisati kako bi cijena izvedenice ovisila o financijskom instrumentu na koji je napisana. Naravno, u praksi cijena ne mora biti točno jednaka teoretskoj cijeni, jer smo isključili puno pretpostavci o financijskim tržištima (na primjer, cijenu trgovanja, to jest trenje tržišta). Posebno smo proučavali vrijednost američke put opcije i njezina svojstva.

Summary

Through this graduate thesis we learned about the basics of stochastic analysis and the Black-Scholes-Merton model of the financial market. The main goal was to describe how the price of a derivative depended on the underlying financial instrument. Of course, in practice, price does not have to be exactly equal to theoretical price, because we have excluded many assumptions about financial markets (for example, the price of trading, that is, friction of the market). We have specifically studied the value of the american put option and its properties.

Životopis

Osobni podaci:

- Ime i prezime: Marko Galenić
- Datum rođenja: 19.02.1995.
- Mjesto rođenja: Zagreb, Republika Hrvatska

Obrazovanje:

- 2016.-2018. Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, diplomski studij Financijska i poslovna matematika
- 2013.-2016. Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, preddiplomski studij Matematika, inženjerski smjer
- 2009.-2013. XI. gimnazija, Zagreb
- 2001.-2009. Osnovna škola Nikola Tesla, Zagreb