Modalna potpunost logika interpretabilnosti

Horvat, Sebastijan

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Sebastijan Horvat

MODALNA POTPUNOST LOGIKA INTERPRETABILNOSTI

Diplomski rad

Voditelji rada:
izv. prof. dr. sc. Mladen Vuković
doc. dr. sc. Tin Perkov

Zagreb, srpanj 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Albert Visser je 1988. godine definirao modalni sistem **IL** (eng. *interpretability logic*) koji nazivamo logika interpretabilnosti. Alfabet sistema **IL** proširuje logiku dokazivosti **GL** (Gödel-Löb) binarnim modalnim operatorom $\rhd$. Kao i u slučaju logike **GL** teoreme sustava **IL** moguće je opisati s konačno mnogo shema aksioma i pravila zaključivanja. Semantika za sistem **IL** je složenija od semantike sistema **GL**. Promatraju se i razna proširenja sistema **IL** s principima interpretabilnosti. Neka od tih proširenje su logike interpretabilnosti **IL**$\mathtt{M}$, **IL**$\mathtt{P}$, **IL**$\mathtt{W}$ i **IL**$\mathtt{M}_0$.

Sistem **GL** je potpun u odnosu na Kripkeovu semantiku. S obzirom da je sistem **GL** dio svakog sistema logika interpretabilnosti, postavlja se pitanje potpunosti logike interpretabilnosti **IL**. Također, što je s potpunošću raznih proširenja logike interpretabilnosti **IL**? Za sistem interpretabilnosti **IL**$\mathtt{X}$, koji je dobiven dodavanjem sheme aksioma $\mathtt{X}$ sistemu **IL**, definiramo pojam potpunosti. Naime, pokazuje se da instance sheme aksioma $\mathtt{X}$ ne moraju biti valjane formule u sistemu **IL**. Stoga treba zahtijevati dodatna svojstva na okvire sistema **IL**. De Jongh i Veltman su 1990. godine dokazali potpunost sistema **IL**, **IL**$\mathtt{M}$ i **IL**$\mathtt{P}$. Povodom 50. rođendana Johana van Benthema, 1999. godine objavljen je i dokaz potpunosti sistema **IL**$\mathtt{W}$. Evan Goris i Joost Joosten 2004. godine daju nove dokaze potpunosti sistema **IL** i **IL**$\mathtt{M}$ koristeći *step–by–step* metodu kojom su potom dokazali i modalnu potpunost sistema **IL**$\mathtt{M}_0$ i **IL**$\mathtt{W}^*$. Recimo još samo da je 2003. godine Joosten dao dokaz potpunosti sistema **GL** koristeći *step–by–step* metodu.

Rad je podijeljen u tri poglavlja. Prvo poglavlje bavi se semantikom i sintaksom osnovne logike interpretabilnosti **IL**. Uvodimo alfabet logike **IL**, te rekurzivno definiramo formule logike **IL**. Zatim navodimo pravila izvoda i sheme aksioma sistema **IL**. Usput kratko komentiramo i logiku dokazivosti **GL**. U vezi semantike logike **IL**, definiramo sljedeće pojmove: **IL**–okvir, **IL**–model, te istinitost i valjanost neke **IL**–formule. U ovom poglavlju dokazujemo adekvatnost sistema **IL** i teorem dedukcije za sistem **IL**. Nakon što definiramo **IL**–konzistentne i maksimalno **IL**–konzistentne skupove, dokazujemo i Lindenbaumovu lemu.

Osnovni cilj drugog poglavlja je dati dokaz potpunosti sistema **IL** koristeći *step–by–step* metodu. Kao motivaciju naglašavamo korake dokaza potpunosti za logiku sudova. Također kratko prolazimo kroz dokaz potpunosti sistema **GL**. U svrhu dokaza potpunosti **IL** definiramo sljedeće pojmove: označen okvir, problemi i nedostatci, kritičan i generalizirani konus, adekvatan okvir, kvazi–okvir, te unija ograničenog lanca. Dokazujemo lemu o egzistenciji, te nizom propozicija dolazimo do dokaza leme o **IL**–proširenju. Na kraju poglavlja detaljno dokazujemo potpunost sistema **IL**.

U trećem poglavlju dokazujemo potpunost sistema **IL**P. Prvo dajemo definicije i rezultate vezane za proizvoljnu logiku interpretabilnosti **IL**X. Potom navodimo glavne korake *step–by–step* metode, te formalno iskazujemo glavnu lemu. Dajemo detaljan dokaz potpunosti **IL**P, pri čemu zapravo provjeravamo uvjete glavne leme kako bismo ju mogli primijeniti.

Poglavlje 1

Logika interpretabilnosti IL

1.1 Sintaksa sistema IL

U ovoj točki definiramo logiku **IL**. Uvodimo alfabet logike **IL**, te neke nazive za simbole tog alfabeta. Rekurzivno definiramo formule logike **IL**, te navodimo pravila izvoda i sheme aksioma sistema **IL**. Također, kratko komentiramo i logiku dokazivosti **GL**. Naposlijetku definiramo **IL**–dokaz.

Definicija 1.1.1. ***Alfabet logike interpretabilnosti*** *je unija skupova A_1, A_2 i A_3, pri čemu je:*

$A_1 = \{P_0, P_1, P_2, \ldots\}$	*prebrojiv skup čije elemente nazivamo* ***propozicionalne varijable;***
$A_2 = \{\perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \Box, \rhd\}$	*skup* ***logičkih veznika, konstanti*** *i* ***modalnih operatora;***
$A_3 = \{(,)\}$	*skup pomoćnih simbola (zagrade).*

Sada navodimo neke nazive za simbole alfabeta.

- Alfabet sadrži jednu **logičku konstantu** $\perp$ koju nazivamo *laž*.
- U alfabetu se nalaze sljedeći **logički veznici** (kao u *logici sudova*): $\neg$ **negacija**, $\wedge$ **konjunkcija**, $\vee$ **disjunkcija**, $\rightarrow$ **kondicional** i $\leftrightarrow$ **bikondicional**.
- U alfabetu je i jedan unarni **modalni operator** $\Box$, te jedan binarni modalni operator $\rhd$. Koristimo i unarni modalni operator $\Diamond$, kao pokratu za $\neg\Box\neg$.
- Skup A_1 ćemo označavati s $Prop$.

Definicija 1.1.2. *Atomarna formula* ***je svaki element skupa*** $\{\perp\} \cup Prop$. *Pojam* ***formule*** *definiramo rekurzivno:*

a) svaka atomarna formula je formula;

b) ako su A i B formule,[1] *tada su i riječi $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \leftrightarrow B)$, $(\Box A)$ i $(A \rhd B)$ također formule.*

Skup svih formula logike interpretabilnosti označavamo s $Form_{IL}$.

Formulu $A \rhd B$ čitamo „A interpretira B".

U nastavku nećemo zapisivati formule korištenjem *sistema vanjskih zagrada*, već ćemo uvesti prioritete. Najveći prioritet (isti) imaju $\Diamond$, $\Box$ i $\neg$, manji prioritet (ali isti) imaju $\wedge$ i $\vee$, a još manji ima $\rhd$. Najmanji prioritet (isti) imaju $\to$ i $\leftrightarrow$. Vanjske zagrade dakle ne pišemo. Primjerice, formulu $((A \rhd B) \to ((A \wedge (\Box C)) \rhd (B \wedge (\Box C))))$ ćemo zapisati i kao $A \rhd B \to A \wedge \Box C \rhd B \wedge \Box C$.

Definicija 1.1.3. ***Sistem IL*** *(kratko* ***IL****) je najmanji skup formula koji sadrži sve tautologije (iz $Form_{IL}$) i sve instance sljedećih shema aksioma:*

(L1)	$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$;
(L2)	$\Box A \to \Box\Box A$;
(L3)	$\Box(\Box A \to A) \to \Box A$;
(J1)	$\Box(A \to B) \to A \rhd B$;
(J2)	$(A \rhd B) \wedge (B \rhd C) \to A \rhd C$;
(J3)	$(A \rhd C) \wedge (B \rhd C) \to A \vee B \rhd C$;
(J4)	$A \rhd B \to (\Diamond A \to \Diamond B)$;
(J5)	$\Diamond A \rhd B$,

te je zatvoren na pravila izvoda ***modus ponens*** *(kratko* ***mod pon****) i* ***nužnost****, odnosno:*

$$\frac{A \qquad A \to B}{B} \quad i \quad \frac{A}{\Box A}.$$

Svaku instancu neke od shema (L1) - (L3), (J1) - (J5) nazivamo ***aksiomom****.*

Ovaj diplomski posvećen je teoremima modalne potpunosti, te se neće razmatrati aritmetički aspekt. O artimetičkoj interpretaciji pojedinog aksioma možete čitati u [9].

[1] Zapravo su A i B oznake za neke formule, to dakle nisu simboli jezika već su metasimboli.

Napomena 1.1.4. *Nekad se razmatra podskup od* **IL** *u kojem se nalaze formule koje ne sadrže modalni operator* $\rhd$. *Označavamo ga kratko s* **GL** *(Gödel-Löb)*[2,3] *i nazivamo* ***logika dokazivosti****. Dakle, alfabet logike dokazivosti* **GL** *je unija skupova* A_1, $A_2 \setminus \{\rhd\}$ *i* A_3. ***Sistem GL*** *(kratko* **GL***) je najmanji skup formula koji sadrži sve tautologije (iz* $Form_{GL}$*) i sve instance shema aksioma (L1) - (L3), te je zatvoren na pravila izvoda modus ponens i nužnost. Shema aksioma (L3) naziva se* ***Löbov aksiom****, dok se shema aksioma (L1) naziva* ***aksiom distributivnosti****.*

Definicija 1.1.5. *Kažemo da je niz formula* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ ***dokaz*** *za formulu* F *u sistemu IL (kraće* ***IL–dokaz****) ako vrijedi:*

a) formula F_n *je upravo* F*, tj. vrijedi* $F_n \equiv F$*;*

b) za svaki $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *vrijedi barem jedno od sljedećeg:*

- *b1)* F_k *je tautologija;*
- *b2)* F_k *je instanca jedne od shema aksioma (L1) - (L3) ili (J1) - (J5);*
- *b3) formula* F_k *je nastala iz nekih* F_i*,* F_j $(i, j < k)$ *pomoću pravila modus ponens;*
- *b4) formula* F_k *je nastala iz neke* F_i $(i < k)$ *pomoću pravila nužnosti.*

Kažemo da je formula F ***teorem*** *sistema* **IL** *(kraće* ***IL–teorem****), u oznaci* $\vdash_{IL} F$ *ili* **IL** $\vdash F$*, ako postoji* **IL** *–dokaz za* F*.*

1.2 Semantika sistema IL

U ovoj točki definiramo **IL**–okvir, **IL**–model, te istinitost i valjanost neke **IL**–formule.

Definicija 1.2.1. *Neka je* W *skup i* R *binarna relacija na* W*. Kažemo da je* R ***inverzno dobro fundirana*** *ako ne postoji niz* $(x_n) \subseteq W$ *takav da za svaki* $i \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $(x_i, x_{i+1}) \in R$*.*

Neka je R binarna relacija na skupu W. Umjesto $(x, y) \in R$ pišemo xRy, a ako vrijedi xRy i yRz pišemo još i $xRyRz$. Ukoliko vrijedi xRy, tada kažemo da je y jedan R–sljedbenik od x. Skup svih R–sljedbenika od x, dakle skup $\{z \in W \mid xRz\}$, označavamo s $R[x]$.

Definicija 1.2.2. ***IL–okvir*** *je trojka* (W, R, S)*, pri čemu je redom:*

- *W neprazan skup koji nazivamo* ***nosač****,*
- *R binarna relacija na W,*

[2] K. Gödel, 1906.–1978.
[3] M. H. Löb, 1921.–2006.

- *S skup binarnih relacija na W, indeksiran elementima iz W, tj. $S = \{S_x : x \in W\}$, pri čemu $S_x \subseteq W \times W$.*

Pritom, za sve $x, y, z, u, v, w \in W$, relacija R i relacija $S_x \in S$ zadovoljavaju sljedeće:

1. *R je inverzno dobro fundirana,*
2. *ako vrijedi $xRyRz$ tada vrijedi xRz (odnosno R je tranzitivna),*
3. *ako vrijedi yS_xz tada vrijedi xRy i xRz,*
4. *ako vrijedi xRy tada vrijedi yS_xy (tj. svaka relacija S_x je refleksivna),*
5. *ako vrijedi $xRyRz$ tada vrijedi yS_xz,*
6. *ako vrijedi uS_xvS_xw tada vrijedi uS_xw (odnosno S_x je tranzitivna).*

IL–okviri se nazivaju i Veltmanovim okvirima, dok se elementi od W nazivaju **svjetovi**.

Definicija 1.2.3. ***IL–model*** *je četvorka $\mathfrak{M} = (W, R, S, \Vdash)$, pri čemu je (W, R, S)* ***IL****–okvir, a $\Vdash$ je relacija na $W \times Prop$. Relaciju $\Vdash$ proširujemo do relacije $\widetilde{\Vdash}$ na $W \times Form_{IL}$ zahtijevajući za svaki $w \in W$ sljedeće uvjete:*

- *za $p \in Prop$, $w \widetilde{\Vdash} p$ ako i samo ako $w \Vdash p$,*
- *$w \widetilde{\nVdash} \bot$,*
- *$w \widetilde{\Vdash} \neg A$ ako i samo ako $w \widetilde{\nVdash} A$,*
- *$w \widetilde{\Vdash} A \land B$ ako i samo ako $w \widetilde{\Vdash} A$ i $w \widetilde{\Vdash} B$,*
- *$w \widetilde{\Vdash} A \lor B$ ako i samo ako $w \widetilde{\Vdash} A$ ili $w \widetilde{\Vdash} B$,*
- *$w \widetilde{\Vdash} A \to B$ ako i samo ako $w \widetilde{\nVdash} A$ ili $w \widetilde{\Vdash} B$,*
- *$w \widetilde{\Vdash} A \leftrightarrow B$ ako i samo ako $w \widetilde{\Vdash} A$ i $w \widetilde{\Vdash} B$, ili $w \widetilde{\nVdash} A$ i $w \widetilde{\nVdash} B$,*
- *$w \widetilde{\Vdash} \Box A$ ako i samo ako za svaki $v \in W$ vrijedi da wRv povlači $v \widetilde{\Vdash} A$,*
- *$w \widetilde{\Vdash} A \rhd B$ ako i samo ako*

$$\forall u \in W \Big((wRu \land u \widetilde{\Vdash} A) \Rightarrow \exists v \in W (uS_wv \land v \widetilde{\Vdash} B) \Big).$$

Sada navodimo neke nazive i oznake u vezi **IL**–modela.

- S obzirom da je relacija $\widetilde{\Vdash}$ u potpunosti određena relacijom $\Vdash$, umjesto $\widetilde{\Vdash}$ pišemo samo $\Vdash$, te tu relaciju zovemo **relacijom forsiranja**.
- Relacija forsiranja ovisi o modelu $\mathfrak{M} = (W, R, S, \Vdash)$, što se, za $w \in W$ i $F \in Form_{IL}$, ističe pisanjem $\mathfrak{M}, w \Vdash F$, a inače pišemo samo $w \Vdash F$.
- Ako za $w \in W$ i $F \in Form_{IL}$ vrijedi $w \Vdash F$ kažemo da je F **istinita na** w.
- Ako je $\mathfrak{F} = (W, R, S)$ IL–okvir, za $w \in W$ pišemo i $w \in \mathfrak{F}$. Ako je $\mathfrak{M} = (W, R, S, \Vdash)$ IL–model, za $w \in W$ pišemo i $w \in \mathfrak{M}$.
- Ako je $\mathfrak{M} = (W, R, S, \Vdash)$ kažemo da je $\mathfrak{M}$ **baziran na** okviru (W, R, S), koji nazivamo **pripadni okvir**.
- Ako je $\Gamma \subseteq Form_{IL}$ i $w \in W$, te za svaku formulu G iz Γ vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash G$, tada to kratko označavamo $\mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma$.

Kažemo da je formula G **globalno istinita na IL–modelu** $\mathfrak{M}$, i pišemo $\mathfrak{M} \Vdash G$, ako za svaki $w \in \mathfrak{M}$ vrijedi $w \Vdash G$. Kažemo da je formula G **valjana na IL-okviru** $\mathfrak{F}$, i pišemo $\mathfrak{F} \Vdash G$, ako je G globalno istinita na svakom **IL**–modelu baziranom na $\mathfrak{F}$. Kažemo da je shema formule valjana na **IL**–okviru ako je svaka instanca te sheme valjana na tom **IL**–okviru. Kažemo da je shema formule globalno istinita na **IL**–modelu ako je svaka instanca te sheme globalno istinita na tom **IL**–modelu.

Za formulu A kažemo da je **valjana** ako je A valjana na svakom **IL**–okviru.

1.3 Teorem adekvatnosti za sistem IL

U ovoj točki pokazujemo valjanost shema aksioma (L1)–(L3), (J1)–(J2), te pokazujemo da pravila izvoda modus ponens i nužnost čuvaju valjanost. Zatim dokazujemo adekvatnost sistema **IL**.

Lema 1.3.1. *Sheme aksioma (L1) - (L3), (J1) - (J5) su valjane formule.*

Dokaz. Redom pokazujemo da su sheme aksioma (L1) - (L3), (J1) - (J5) valjane formule. Sve sheme aksioma osim (J5) su oblika $Y \to Y'$. Za proizvoljan $w \in W$ i relaciju forsiranja $\Vdash$ vrijedi: $w \Vdash Y \to Y'$ ako i samo ako $w \nVdash Y$ ili $w \Vdash Y'$. Ako vrijedi $w \nVdash Y$, tada smo gotovi. Inače, ako vrijedi $w \Vdash Y$, dovoljno je pokazati $w \Vdash Y'$, što ćemo u ostatku dokaza i raditi.

Neka je $\mathfrak{F} = (W, R, S)$ proizvoljan **IL**–okvir, $\Vdash$ proizvoljna relacija forsiranja na skupu $W \times Form_{IL}$, te $w \in W$ proizvoljan svijet. Pokazujemo redom valjanost svake sheme aksioma **IL**.

(L1) $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$
Pretpostavimo da vrijedi $w \Vdash \Box(A \to B)$. Tada za svaki $v \in W$ takav da wRv vrijedi $v \Vdash A \to B$, odnosno $v \nVdash A$ ili $v \Vdash B$. Želimo pokazati $w \Vdash \Box A \to \Box B$. Pretpostavimo $w \Vdash \Box A$, odnosno za svaki $v \in W$ takav da wRv vrijedi $v \Vdash A$. Dovoljno je pokazati $w \Vdash \Box B$. Neka je $v \in W$ proizvoljan, takav da vrijedi wRv. No tada vrijedi $v \nVdash A$ ili $v \Vdash B$, pa dobivamo $v \Vdash B$. Dakle, $w \Vdash \Box B$, što je trebalo i pokazati.

(L2) $\Box A \to \Box\Box A$
Pretpostavimo da vrijedi $w \Vdash \Box A$, odnosno za svaki $v \in W$ takav da wRv vrijedi $v \Vdash A$. Želimo pokazati $w \Vdash \Box\Box A$. Neka je $v \in W$ proizvoljan takav da wRv. Treba pokazati $v \Vdash \Box A$. Neka je $r \in W$ proizvoljan takav da vRr. Tada zbog wRv i vRr, iz tranzitivnosti relacije R dobivamo wRr, pa vrijedi $r \Vdash A$. Dakle, $v \Vdash \Box A$, što je trebalo i pokazati.

(L3) $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$
Pretpostavimo da vrijedi $w \Vdash \Box(\Box A \to A)$, odnosno za svaki $v \in W$ takav da wRv vrijedi $v \Vdash \Box A \to A$, odnosno $v \nVdash \Box A$ ili $v \Vdash A$. Želimo pokazati $w \Vdash \Box A$. Pretpostavimo suprotno: $w \nVdash \Box A$, odnosno postoji $x_0 \in W$ takav da vrijedi wRx_0 i $x_0 \nVdash A$. Sada (zbog $x_0 \nVdash A$) vrijedi $x_0 \nVdash \Box A$. To znači da postoji $x_1 \in W$ tako da vrijedi x_0Rx_1 i $x_1 \nVdash A$. Sada iz wRx_0Rx_1 i tranzitivnosti relacije R slijedi wRx_1. Iz pretpostavke $w \Vdash \Box(\Box A \to A)$ slijedi $x_1 \Vdash \Box A \to A$, a onda (zbog $x_1 \nVdash A$) vrijedi $x_1 \nVdash \Box A$.
Dakle, nastavljajući na ovaj način dobivamo niz $w, x_0, x_1, \ldots$ takav da vrijedi wRx_0, $x_0Rx_1, \ldots$, što je u kontradikciji s inverzno dobrom fundiranošću relacije R.

(J1) $\Box(A \to B) \to (A \rhd B)$
Pretpostavimo da vrijedi $w \Vdash \Box(A \to B)$, odnosno za svaki $v \in W$ takav da wRv vrijedi $v \nVdash A$ ili $v \Vdash B$. Želimo pokazati $w \Vdash A \rhd B$. Neka je $v \in W$ takav da vrijedi wRv i $v \Vdash A$. Treba pokazati da postoji $u \in W$ takav da vS_wu i $u \Vdash B$. Iz wRv slijedi vS_wv. Dobivamo da vrijedi $v \Vdash B$. Dakle, vrijedi $w \Vdash A \rhd B$.

(J2) $(A \rhd B) \wedge (B \rhd C) \to A \rhd C$
Pretpostavimo da vrijedi $w \Vdash (A \rhd B) \wedge (B \rhd C)$, odnosno vrijedi $w \Vdash A \rhd B$ i $w \Vdash B \rhd C$. To znači:

a) za svaki $v \in W$ takav da wRv i $v \Vdash A$, postoji $v_1 \in W$ takav da vS_wv_1 i $v_1 \Vdash B$.
b) za svaki $v_1 \in W$ takav da wRv_1 i $v_1 \Vdash B$, postoji $v_2 \in W$ takav da $v_1S_wv_2$ i $v_2 \Vdash C$.

Želimo pokazati $w \Vdash A \rhd C$. Neka je $v \in W$ takav da vrijedi wRv i $v \Vdash A$. Prema a) postoji $v_1 \in W$ takav da vS_wv_1 i $v_1 \Vdash B$. Iz vS_wv_1 proizlazi wRv i wRv_1. Sada prema b) postoji $v_2 \in W$ takav da $v_1S_wv_2$ i $v_2 \Vdash C$. Iz vS_wv_1 i $v_1S_wv_2$, zbog tranzitivnosti relacije S_w, slijedi vS_wv_2, a već imamo $v_2 \Vdash C$, pa dobivamo $w \Vdash A \rhd C$.

(J3) $(A \rhd C) \wedge (B \rhd C) \to A \vee B \rhd C$
Pretpostavimo da vrijedi $w \Vdash (A \rhd C) \wedge (B \rhd C)$, odnosno vrijedi $w \Vdash A \rhd C$ i $w \Vdash B \rhd C$. Neka je $u \in W$ takav da vrijedi wRu, te vrijedi $w \Vdash A \vee B$, odnosno $w \Vdash A$ ili $w \Vdash B$. Ako vrijedi $w \Vdash A$, tada iz pretpostavke $w \Vdash A \rhd C$, postoji v_1 takav da dobivamo tvrdnju. Inače, vrijedi $w \Vdash B$, pa iz pretpostavke $w \Vdash B \rhd C$, postoji v_2 takav da ponovo dobivamo tvrdnju, odnosno vrijedi $w \Vdash A \vee B \rhd C$.

(J4) $A \rhd B \to (\Diamond A \to \Diamond B)$
Pretpostavimo da vrijedi $w \Vdash A \rhd B$. Želimo dokazati $w \Vdash \Diamond A \to \Diamond B$. Pretpostavimo da vrijedi $w \Vdash \Diamond A$. Treba pokazati $w \Vdash \Diamond B$.
Činjenica $w \Vdash \Diamond A$ zapravo znači $w \Vdash \neg\Box\neg A$, odnosno $w \nVdash \Box\neg A$. Drugim riječima, postoji $u \in W$ takav da wRu i $u \nVdash \neg A$, odnosno $u \Vdash A$ (zapravo $u \Vdash \neg\neg A$).
Sada iz pretpostavke $w \Vdash A \rhd B$ slijedi da postoji $v \in W$ takav da uS_wv i $v \Vdash B$ (odnosno $v \Vdash \neg\neg B$). Iz uS_wv slijedi wRv (i wRu), pa dobivamo $w \nVdash \Box\neg B$. Dakle, $w \Vdash \Diamond B$.

(J5) $\Diamond A \rhd A$
Neka je $u \in W$ takav da vrijedi wRu i $u \Vdash \Diamond A$. Tada postoji $v \in W$ takav da je uRv i $v \Vdash A$. Iz wRu i uRv slijedi uS_wv. Dakle, uS_wv i $v \Vdash A$, pa vrijedi $w \Vdash \Diamond A \rhd A$.

□

Lema 1.3.2. *Pravila izvoda modus ponens i nužnost čuvaju valjanost.*

Dokaz. Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, S, \Vdash)$ proizvoljan IL–model, te $w \in W$ proizvoljan.
Neka su A i $A \to B$ valjane formule. Dakle, $w \Vdash A$ i $w \Vdash A \to B$. Iz $w \Vdash A \to B$ dobivamo $w \nVdash A$ ili $w \Vdash B$. Zbog $w \Vdash A$ preostaje $w \Vdash B$. Dakle B je valjana, odnosno pravilo izvoda modus ponens čuva valjanost.
Neka je sada A valjana formula. Tada vrijedi $w \Vdash A$. Treba pokazati da za svaki $v \in W$ takav da wRv vrijedi $v \Vdash A$. No, za svaki $v \in W$ vrijedi $v \Vdash A$, pa tada i za one v za koje vrijedi wRv. Dakle, $\Box A$ je valjana, odnosno pravilo izvoda nužnosti čuva valjanost. □

Teorem 1.3.3 (Teorem adekvatnosti za sistem **IL**).
Ako $\vdash_{IL} A$ tada je A valjana formula.

Dokaz. Kažemo da je formula A **IL**–n–dokaziva ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) ako postoji barem jedan **IL**–dokaz duljine n u sistemu **IL** za formulu A. Indukcijom po n dokazujemo da je svaka **IL**–n–dokaziva formula valjana.

Ako je F **IL**–1–dokaziva, tada je F tautologija ili instanca neke sheme aksioma (L1)-(L3), (J1)-(J5), u kom je slučaju prema lemi 1.3.1. F valjana. Pretpostavimo da je za neki $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, za svaki $k < n$, svaka **IL**–k–dokaziva formula valjana.

Neka je F neka **IL**–n–dokaziva formula, te neka je $F_1, F_2, \dots, F_n$ neki **IL**–dokaz za F duljine n. Po definiciji **IL**–dokaza vrijedi $F_n \equiv F$, te je F_n tautologija, jedan od aksioma (prema lemi 1.3.1 valjana), ili je nastala primjenom pravila izvoda modus ponens iz formula F_i i F_j $(i, j < n)$, ili je nastala primjenom pravila nužnosti iz formule F_l $(l < n)$. S obzirom da su prema pretpostavci indukcije, F_i, F_j i F_k valjane, a pravila izvoda (prema lemi 1.3.2.) čuvaju valjanost, F_n je valjana. $\square$

Primijetimo da smo ujedno dokazali i teorem adekvatnosti za sistem **GL**.

1.4 Teorem dedukcije za sistem IL

Željeli bismo sada iskazati (i dokazati) teorem dedukcije za sistem **IL**. Međutim, **IL**–izvod formule F iz skupa formula S ne možemo definirati kao u logici sudova. Uz takvu definiciju **IL**–izvoda ne bi vrijedio teorem dedukcije, jer vrijedi $\{P\} \vdash_{IL} \Box P$, ali pošto $P \rightarrow \Box P$ nije valjana formula tada iz teorema adekvatnosti slijedi $\nvdash_{IL} P \rightarrow \Box P$. Stoga **IL**–izvod definiramo malo drugačije u sljedećoj definiciji:

Definicija 1.4.1. *Neka je S proizvoljan skup formula logike **IL** i F neka formula. Kažemo da je niz formula $F_1, F_2, \dots, F_n$ **izvod** iz skupa S formule F u sistemu **IL** (kraće **IL–izvod**), u oznaci $S \vdash_{IL} F$ ako vrijedi:*

a) formula F_n je upravo F, tj. vrijedi $F_n \equiv F$;

b) za svaki $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ vrijedi barem jedno od sljedećeg:

- *b1) F_k je tautologija;*
- *b2) F_k je instanca jedne od shema aksioma (L1) - (L3) ili (J1) - (J5);*
- *b3) $F_k \in S$ (tada formulu F_k nazivamo **pretpostavkom**);*
- *b4) formula F_k je nastala iz nekih F_i, F_j $(i, j < k)$ pomoću pravila modus ponens;*
- *b5) formula F_k je nastala iz neke F_i $(i < k)$ pomoću pravila nužnosti, **pri čemu je F_i IL–teorem** $(\vdash_{IL} F_i)$.*

Napomena 1.4.2. *Primijetimo da pojam izvoda nije definiran kao u logici sudova jer smo u prethodnoj definiciji u uvjetu b5) dodatno tražili da je formula F_i teorem (dakle, ne samo da je izvediva iz skupa formula S).*

Teorem 1.4.3 (Teorem dedukcije za sistem **IL**).
*Neka je S skup formula logike **IL**, te $A, B \in Form_{IL}$. Ako vrijedi $S \cup \{A\} \vdash_{IL} B$, tada vrijedi i $S \vdash_{IL} A \rightarrow B$.*

Dokaz. Za proizvoljnu formulu F reći ćemo da je **IL**–n–izvodljiva iz skupa formula $S \cup \{A\}$ ako postoji **IL**–izvod formule F iz tog skupa koji je duljine n. Indukcijom po n dokazujemo da za svaku **IL**–n–izvodljivu formulu F iz skupa $S \cup \{A\}$ vrijedi

$$S \vdash_{IL} A \to F.$$

Neka je **IL**–izvod za F iz $S \cup \{A\}$ duljine 1. To znači da postoji **IL**–izvod koji sadrži samo formulu F. Iz definicije **IL**–izvoda zaključujemo da je formula F nešto od sljedećeg:

- F je tautologija ili instanca neke od shema aksioma iz sistema **IL**. Tada jedan **IL**–izvod formule $A \to F$ iz skupa S izgleda ovako:

  1. $F \to (A \to F)$ (tautologija)
  2. F (aksiom ili tautologija)
  3. $A \to F$ (mod pon: 1. i 2.)

- F pripada skupu S. Tada jedan **IL**–izvod formule $A \to F$ izgleda ovako:

  1. $F \to (A \to F)$ (tautologija)
  2. F (iz skupa S)
  3. $A \to F$ (mod pon: 1. i 2.)

- F je upravo A. Tada jedan **IL**–izvod formule $A \to F$ izgleda ovako:

  1. $A \to A$ (tautologija)

Pretpostavimo da neki $n \in \mathbb{N}$ ima svojstvo da za svaki $k < n$ i svaku **IL**–k–izvodljivu formulu F iz $S \cup \{A\}$ vrijedi $S \vdash_{IL} A \to F$.

Neka je G proizvoljna **IL**–n–izvodljiva formula iz skupa $S \cup \{A\}$. Neka je $F_1, F_2, \ldots, F_n$ neki **IL**–izvod za G. Iz definicije **IL**–izvoda slijedi $G \equiv F_n$. Sljedeće slučajeve ne moramo posebno razmatrati jer smo ih detaljno razmotrili u bazi indukcije:

a) $G \equiv A$

a) G je tautologija

a) G je instanca neke sheme aksioma sistema **IL**

a) $G \in S$.

U koraku indukcije detaljno razmatramo slučajeve kada je formula G dobivena primjenom nekog od pravila izvoda. U tu svrhu razmatramo sljedeća dva slučaja:

1. Formula G je nastala pomoću pravila izvoda modus ponens iz nekih formula F_i i F_j gdje su $i, j < n$. Tada je npr. $F_i \equiv F_j \to G$. Uočimo da je formula F_i tada **IL**–i–izvodljiva, a formula F_j je **IL**–j–izvodljiva iz skupa $S \cup \{A\}$. Iz pretpostavke indukcije tada vrijedi $S \vdash_{IL} A \to F_j$ i $S \vdash_{IL} A \to (F_j \to G)$. Jedan izvod formule $A \to G$ iz skupa S dan je sljedećim nizom formula:

1.	$(A \to (F_j \to G)) \to ((A \to F_j) \to (A \to G))$	(tautologija)
2.	$A \to (F_j \to G)$	(pretpostavka indukcije)
3.	$(A \to F_j) \to (A \to G)$	(mod pon: 1. i 2.)
4.	$A \to F_j$	(pretpostavka indukcije)
5.	$A \to G$	(mod pon: 3. i 4.)

2. Formula G je nastala pomoću pravila izvoda nužnosti iz neke formule F_i gdje je $i < n$, pri čemu je $\vdash_{IL} F_i$. Tada je $G \equiv \Box F_i$. Jedan izvod formule $A \to \Box F_i$ iz skupa S dan je sljedećim nizom formula:

1.	F_i	(IL-teorem)
2.	$\Box F_i$	(nužnost)
3.	$\Box F_i \to (A \to \Box F_i)$	(tautologija)
4.	$A \to \Box F_i$	(mod pon: 2. i 3.)

$\Box$

U sljedećim dokazima koristit ćemo pravilo koje označavamo s *mod pon**, koje glasi ovako:

$$\frac{A \qquad B \qquad A \wedge B \to C}{C},$$

pri čemu su A, B i C proizvoljne formule.

Lema 1.4.4. *Pravilo izvoda mod pon* je dopustivo, tj. za proizvoljne formule A, B i C vrijedi*

$$\{A, B, A \wedge B \to C\} \vdash_{IL} C.$$

Dokaz. Neka su A, B i C proizvoljne formule. Sljedećim nizom formula dajemo jedan izvod za formulu C (koristeći pretpostavke A, B i $A \wedge B \to C$):

1.	A	(pretpostavka)
2.	B	(pretpostavka)
3.	$A \wedge B \to C$	(pretpostavka)
4.	$A \to (B \to A \wedge B)$	(tautologija)
5.	$B \to A \wedge B$	(mod pon: 1. i 4.)
6.	$A \wedge B$	(mod pon: 2. i 5.)
7.	C	(mod pon: 6. i 3.)

$\square$

Sljedećom lemom dajemo ilustraciju **IL**–dokaza, te primjene teorema dedukcije. Primijetimo da treća tvrdnja sljedeće leme pokazuje da modalni operator $\square$ možemo shvatiti kao definirani simbol (tj. mogli smo i bez njega u alfabetu logike **IL**).

Lema 1.4.5. *Za svaku formulu A vrijedi:*

1. $IL \vdash A \vee \Diamond A \rhd A$;

2. $IL \vdash A \rhd A \wedge \square\neg A$;

3. $IL \vdash \square A \leftrightarrow \neg A \rhd \perp$.

Dokaz. Prvo sljedećim nizom formula dajemo jedan **IL**–dokaz za formulu iz tvrdnje 1.

1.	$A \to A$	(tautologija)
2.	$\square(A \to A)$	(nužnost)
3.	$\square(A \to A) \to A \rhd A$	(aksiom (J1))
4.	$A \rhd A$	(mod pon: 2. i 3.)
5.	$\Diamond A \rhd A$	(aksiom (J5))
6.	$(A \rhd A) \wedge (\Diamond A \rhd A) \to A \vee \Diamond A \rhd A$	(aksiom (J3))
7.	$A \vee \Diamond A \rhd A$	(mod pon*: 4., 5. i 6.)

Sada dokazujemo formulu iz tvrdnje 2. sljedećim nizom formula, od kojih je prva formula u tom nizu upravo **IL**–teorem dokazan u propoziciji 2.1.(j), u [5] na stranicama 477-478.

1. $A \to (A \wedge \Box\neg A) \vee \Diamond(A \wedge \Box\neg A)$ (**IL**–teorem)
2. $\Box(A \to (A \wedge \Box\neg A) \vee \Diamond(A \wedge \Box\neg A))$ (nužnost: 1.)
3. $\Box(A \to (A \wedge \Box\neg A) \vee \Diamond(A \wedge \Box\neg A))$
   $\to A \rhd (A \wedge \Box\neg A) \vee \Diamond(A \wedge \Box\neg A)$ (aksiom (J1))
4. $A \rhd (A \wedge \Box\neg A) \vee \Diamond(A \wedge \Box\neg A)$ (mod pon: 2. i 3.)
5. $(A \wedge \Box\neg A) \vee \Diamond(A \wedge \Box\neg A) \rhd (A \wedge \Box\neg A)$ (prethodno dokazana tvrdnja 1. ove leme)
6. $(A \rhd (A \wedge \Box\neg A) \vee \Diamond(A \wedge \Box\neg A))$
   $\wedge ((A \wedge \Box\neg A) \vee \Diamond(A \wedge \Box\neg A) \rhd (A \wedge \Box\neg A))$
   $\to A \rhd A \wedge \Box\neg A$ (aksiom (J2))
7. $A \rhd A \wedge \Box\neg A$ (mod pon*: 4., 5. i 6.)

Konačno, pokazujemo jedan smjer tvrdnje 3. korištenjem teorema dedukcije. Želimo pokazati $\vdash_{IL} \Box A \to \neg A \rhd \bot$, pa je prema teoremu dedukcije dovoljno pokazati

$$\Box A \vdash_{IL} \neg A \rhd \bot \, .$$

Dajemo jedan niz formula kao **IL**–izvod za formulu $\neg A \rhd \bot$ iz skupa $\{\Box A\}$.

1. $A \to (\neg A \to \bot)$ (tautologija)
2. $\Box(A \to (\neg A \to \bot))$ (nužnost: 1.)
3. $\Box(A \to (\neg A \to \bot)) \to (\Box A \to \Box(\neg A \to \bot))$ (aksiom (L1))
4. $\Box A \to \Box(\neg A \to \bot)$ (mod pon: 2. i 3.)
5. $\Box A$ (pretpostavka)
6. $\Box(\neg A \to \bot)$ (mod pon: 4. i 5.)
7. $\Box(\neg A \to \bot) \to \neg A \rhd \bot$ (aksiom (J1))
8. $\neg A \rhd \bot$ (mod pon: 6. i 7.)

$\Box$

1.5 Maksimalno IL–konzistentni skupovi

U ovoj točki definiramo **IL**–konzistentne i maksimalno **IL**–konzistentne skupove. Zatim iskazujemo Lindenbaumovu lemu, te navodimo još neke rezultate vezane uz (maksimalno) **IL**–konzistentne skupove, kao i za relacije koje ćemo na njima definirati.

Definicija 1.5.1. *Za skup formula S kažemo da je **IL–konzistentan** ako vrijedi $S \nvdash_{IL} \bot$. Ako skup formula nije **IL**–konzistentan tada kažemo da je **IL**–inkonzistentan.*

Iz definicija **IL**–konzistentnosti i **IL**–izvoda slijedi tvrdnja sljedeće propozicije.

Propozicija 1.5.2. *Svaki podskup **IL**–konzistentnog skupa je **IL**–konzistentan. Svaki nadskup **IL**–inkonzistentnog skupa je **IL**–inkonzistentan.*

Definicija 1.5.3. *Za skup formula S kažemo da je **maksimalno IL–konzistentan** ako je **IL**–konzistentan i za svaku formulu F vrijedi sljedeće:*

$$\textit{ako je skup } S \cup \{F\} \textbf{ IL}\textit{–konzistentan, tada je } F \in S.$$

Maksimalno **IL**–konzistentan skup kratko označavamo s **IL**–MCS. Lako je vidjeti da vrijedi da je neki skup S maksimalno **IL**–konzistentan ako je **IL**–konzistentan i za svaku formulu F vrijedi ili $F \in S$ ili $\neg F \in S$ (ovakva definicija može se pronaći na stranici 374 u [3]). Katkad je prikladnije koristiti jednu, a katkad drugu definiciju. Ekvivalencija tih definicija može se dokazati korištenjem leme 1.5.7, kao i teorema 2.16.(15) na stranici 48 u [2]. U dokazu sljedeće (Lindenbaumove) leme, koristimo i sljedeći teorem.

Teorem 1.5.4. *Skup formula je **IL**–konzistentan ako i samo ako je svaki njegov konačan podskup **IL**–konzistentan.*

Dokaz. Ako je skup S **IL**–konzistentan, tada iz propozicije 1.5.2. slijedi da je svaki podskup od S **IL**–konzistentan, a onda je posebno **IL**–konzistentan i svaki konačan podskup. Obratnu tvrdnju dokazujemo obratom po kontrapoziciji. Pretpostavimo da je skup S **IL**–inkonzistentan. Dakle vrijedi $S \vdash_{IL} \perp$. Neka je $F_1, F_2, \ldots, F_n$ neki **IL**–izvod za $\perp$ iz skupa S. Definiramo $S' = S \cap \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$, što je konačan podskup od S. Sada vrijedi $S' \vdash_{IL} \perp$, dakle našli smo konačan podskup od S koji je **IL**–inkonzistentan. □

Lema 1.5.5 (Lindenbaumova[4] lema)**.** *Neka je S neki **IL**–konzistentan skup formula. Tada postoji maksimalno **IL**–konzistentan skup formula S^+ takav da vrijedi $S \subseteq S^+$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je S **IL**–konzistentan skup formula. Skup svih formula logike **IL** je prebrojiv. Neka je $F_1, F_2, \ldots$ niz koji sadrži sve formule logike **IL**. Rekurzivno definiramo niz skupova formula (S_n) na sljedeći način:

$$S_0 = S$$
$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \{F_n\}, & \text{ako je } S_n \cup \{F_n\} \textbf{ IL}\text{–konzistentan}, \\ S_n, & \text{inače.} \end{cases}$$

Dokažimo indukcijom da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ skup S_n **IL**–konzistentan. Prema pretpostavci S_0 je **IL**–konzistentan. Pretpostavimo da je za neki $k \in \mathbb{N}$ skup S_k **IL**–konzistentan. Sada je

[4] A. Lindenbaum, 1904.–1941.

S_{k+1} upravo S_k (koji je **IL**–konzistentan), ili $S_{k+1} \cup \{F_{k+1}\}$ (ukoliko je to **IL**–konzistentno).

Definirajmo $S^+ = \bigcup_{i \geq 0} S_i$. Pokazujemo da je S^+ maksimalno **IL**–konzistentan.

Dokažimo prvo da je skup S^+ **IL**–konzistentan. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je S^+ **IL**–inkonzistentan. Prema teoremu 1.5.4, postoji konačan podskup od S^+ koji je **IL**–inkonzistentan. Taj podskup sadrži konačno mnogo formula F_i. Označimo s n maksimalni k takav da je F_k u tom podskupu. Tada je taj podskup sadržan u skupu S_n. Dakle, S_n je **IL**–inkonzistentan jer sadrži konačan **IL**–inkonzistentan podskup. No, malo prije smo dokazali da je svaki skup S_n **IL**–konzistentan. Dakle, S^+ je **IL**–konzistentan.

Dokažimo sada da je S^+ maksimalno **IL**–konzistentan. Pretpostavimo da za neku formulu $F \in Form_{IL}$, niti F niti $\neg F$ nisu u S^+. Pretpostavimo da u nizu svih formula iz $Form_{IL}$ vrijedi $F \equiv F_i$, te $\neg F \equiv F_j$, pri čemu $i < j$. Prema definiciji od (S_n), vrijedi

$$S_i \cup \{F\} \vdash \perp \qquad \text{i} \qquad S_j \cup \{\neg F\} \vdash \perp .$$

Sada prema teoremu dedukcije imamo $S_i \vdash F \to \perp$. Međutim, formula $(F \to \perp) \leftrightarrow \neg F$ je tautologija, pa stoga vrijedi $S_i \vdash \neg F$. No, $S_i \subseteq S_j$, jer $i < j$, pa vrijedi $S_j \vdash \neg F$. Također, prema teoremu dedukcije imamo $S_j \vdash \neg F \to \perp$, pa primjenom pravila izvoda modus ponens na dvije posljednje formule dobivamo $S_j \vdash \perp$. To znači da je skup S_j **IL**–inkonzistentan, što je u kontradikciji s prije dokazanom tvrdnjom. □

Definicija 1.5.6. *Na skupu svih **IL**–MCS–ova definiramo binarne relacije $\prec$ i $\prec_C$, gdje je C neka formula, ovako:*

- *$S \prec T$ ako i samo ako za svaku formulu A takvu da vrijedi $\Box A \in S$ vrijedi $A, \Box A \in T$. Relaciju $\prec$ nazivamo **relacija sljedbenik**.*
- *$S \prec_C T$ ako i samo ako za svaku formulu A takvu da vrijedi $A \rhd C \in S$ vrijedi $\neg A, \Box\neg A \in T$. Relaciju $\prec_C$ nazivamo **relacija C–kritičnog sljedbenika**.*

Zbog dokaza propozicije koja slijedi, ističemo sljedeću lemu koju je lako dokazati (korištenjem tvrdnje $S \cup \{A\}$ je **IL**–konzistentan ako i samo ako $S \nvdash \neg A$, dokazane u [2]).

Lema 1.5.7. *Neka je S neki **IL**–MCS, te A neka formula. Tada vrijedi:*

$$A \in S \qquad \textit{ako i samo ako} \qquad S \vdash_{IL} A.$$

U sljedećoj propoziciji ističemo neka svojstva relacija koje smo definirali na skupu svih **IL**–MCS–ova. Ta svojstva ćemo koristiti u dokazima raznih tvrdnji u idućim poglavljima.

Propozicija 1.5.8. *Neka su S, T i T' maksimalno **IL**–konzistentni skupovi, te neka je $C \in Form_{IL}$.*

a) Ako vrijedi $S \prec_C T \prec T'$ tada vrijedi i $S \prec_C T'$.

b) Vrijedi: $S \prec T$ ako i samo ako $S \prec_\perp T$.

c) Ako vrijedi $S \prec_C T$ tada vrijedi $S \prec T$.

Dokaz. a) Pretpostavimo da vrijedi $S \prec_C T \prec T'$. Neka je $A \rhd C \in S$. Zbog $S \prec_C T$ vrijedi $\Box\neg A \in T$, a zbog $T \prec T'$ tada i $\neg A, \Box\neg A \in T'$. Dakle vrijedi $S \prec_C T'$.

b) Neka je $\Box A \in S$. Tada očito vrijedi $S \vdash \Box A$. Prema lemi 1.4.5.3. tada vrijedi $S \vdash \neg A \rhd \perp$, pa i $\neg A \rhd \perp \in S$. Prema pretpostavci vrijedi $S \prec_\perp T$, pa dobivamo $\neg\neg A, \Box\neg\neg A \in T$, odnosno (zbog $\neg\neg A \leftrightarrow A$) vrijedi $A, \Box A \in T$, odakle $S \prec T$.

Obratno, pretpostavimo da vrijedi $S \prec T$. Ako vrijedi $A \rhd \perp \in S$, tada prema lemi 1.4.5.3. vrijedi $\Box\neg A \in S$. Prema pretpostavci, tada je $\neg A, \Box\neg A \in T$. Dakle, $S \prec_\perp T$.

c) Neka je $\Box A \in S$. Tada vrijedi $S \vdash \Box A$, a prema lemi 1.4.5.3. vrijedi i $S \vdash \neg A \rhd \perp$. Time smo dobili $\neg A \rhd \perp \in S$. Promotrimo sljedeći niz formula:

1.	$\perp \to C$	(tautologija)
2.	$\Box(\perp \to C)$	(nužnost: 1.)
3.	$\Box(\perp \to C) \to \perp \rhd C$	(J1)
4.	$\perp \rhd C$	(mod pon: 2. i 3.)
5.	$\neg A \rhd \perp$	(pretpostavka)
6.	$(\neg A \rhd \perp) \wedge (\perp \rhd C) \to \neg A \rhd C$	(J2)
7.	$\neg A \rhd C$	(mod pon*: 5., 4. i 6.)

Dakle, vrijedi $S \vdash \neg A \rhd C$, a onda vrijedi i $\neg A \rhd C \in S$. Prema pretpostavci vrijedi $S \prec_C T$, pa dobivamo $\neg\neg A, \Box\neg\neg A \in T$. Korištenjem ekvivalencije prethodnih formula s formulama A i $\Box A$, te maksimalne konzistentnosti skupa T, slijedi $A, \Box A \in T$. Dakle, vrijedi $S \prec T$.

$\Box$

Na poslijetku, navodimo lemu koja nam, za dani **IL**–model i svijet iz tog **IL**–modela, daje primjer maksimalno **IL**-konzistentnog skupa.

Lema 1.5.9. *Neka je $\mathfrak{M}$ proizvoljan **IL**–model, te $x \in \mathfrak{M}$ proizvoljan svijet. Tada je*

$$\mathcal{S} := \{A \mid \mathfrak{M}, x \Vdash A\}$$

*maksimalno **IL**–konzistentan skup.*

Dokaz. Neka su $\mathfrak{M}$ i $x \in \mathfrak{M}$ proizvoljni. S obzirom da vrijedi $x \nVdash \perp$, vrijedi $\perp \notin \mathcal{S}$, a onda i $\mathcal{S} \nvdash \perp$. Također, za proizvoljnu formulu A vrijedi $x \Vdash A$ ili $x \nVdash A$, tj. $x \Vdash \neg A$, pa vrijedi $A \in \mathcal{S}$ ili $\neg A \in \mathcal{S}$. Dakle, $\mathcal{S}$ je **IL**–MCS. $\square$

Poglavlje 2

Potpunost logike interpretabilnosti IL

U prethodnom poglavlju dokazali smo teorem adekvatnosti za sistem **IL**. U ovom poglavlju želimo dokazati teorem potpunosti, tj. dokazat ćemo da je svaka valjana formula ujedno i teorem sistema **IL**. Prije toga želimo naglasiti korake dokaza potpunosti za još dva sistema. Prvo ističemo glavne korake dokaza potpunosti logike sudova: Lindenbaumovu lemu i lemu o istinitosti. Zatim prolazimo kroz dokaz potpunosti sistema **GL**.

2.1 Potpunost logike sudova

Smatramo da su sintaksa i semantika logike sudova poznate. Također smatramo da je poznata definicija sistema **RS**, kao i pojmovi dokaza, teorema i izvoda u sistemu **RS**. Detalji se mogu pronaći u [8] ili [10]. Teorem potpunosti za sistem **RS** glasi ovako:

Teorem 2.1.1 (Teorem potpunosti za sistem **RS**).
*Neka je F proizvoljna formula logike sudova. Formula F je valjana ako i samo ako je F teorem sistema **RS**.*

Jedan smjer dan je teoremom adekvatnosti za sistem **RS** koji se lako dokazuje indukcijom po duljini dokaza teorema u **RS**.

Teorem 2.1.2 (Teorem adekvatnosti za sistem **RS**).
*Svaki teorem sistema **RS** je valjana formula.*

Sada ćemo skicirati dokaz potpunosti sistema **RS**. Za to će nam trebati nekoliko lema i propozicija.

Neka je F proizvoljna formula. Želimo pokazati: ako je formula F valjana, tada je F teorem sistema **RS**. To ćemo dokazati obratom po kontrapoziciji navedene tvrdnje, tj.

skicirat ćemo dokaz sljedeće tvrdnje: ako formula F nije teorem sistema **RS**, tada F nije valjana. U tu svrhu pretpostavimo da F nije teorem sistema **RS**. Sljedeća propozicija, čiji se dokaz može naći primjerice na stranici 4. u [8], implicira da je tada $\{\neg F\}$ konzistentan skup.

Propozicija 2.1.3. *Neka je S skup formula i F proizvoljna formula. Ako vrijedi $S \nvdash F$ tada je skup $S \cup \{\neg F\}$ konzistentan.*

Kada bismo znali da je konzistentan skup ispunjiv, dobili bismo da je formula $\neg F$ ispunjiva, tj. da formula F nije valjana. U tu svrhu lako se dokaže sljedeća lema:

Lema 2.1.4 (Lema o istinitosti za logiku sudova)**.**
Neka je S skup formula. Ako je S maksimalno konzistentan, tada je S ispunjiv.

Iako imamo da je $\{\neg F\}$ samo konzistentan, Lindenbaumova lema (čiji se dokaz može pronaći na stranici 5. u [8]) nam omogućava da nađemo nadskup koji jest maksimalno konzistentan, a onda prema lemi o istinitosti i ispunjiv.

Lema 2.1.5 (Lindenbaumova lema za logiku sudova)**.** *Neka je S konzistentan skup formula. Tada postoji maksimalno konzistentan skup formula S' takav da vrijedi $S \subseteq S'$.*

S obzirom da je podskup ispunjivog skupa ispunjiv, tada je i $\{\neg F\}$ ispunjiv skup. Time je dokaz potpunosti za logiku sudova gotov.

2.2 Potpunost sistema GL

Sistem **GL** već smo komentirali u prvom poglavlju. Međutim, nismo komentirali semantiku sistema **GL**. Stoga ćemo prvo reći što znači da je neka formula valjana u sistemu **GL**.

Definicija 2.2.1. ***Kripkeov okvir*** *je svaki uređeni par (W, R) gdje je W proizvoljan neprazan skup, a R je proizvoljna binarna relacija na skupu W.* ***Kripkeov model*** *je svaka uređena trojka $(W, R, \Vdash)$ gdje je (W, R) Kripkeov okvir, a $\Vdash$ je relacija na $W \times Prop$.*

Relaciju $\Vdash$ proširujemo do relacije na $W \times Form_{GL}$ na identičan način kao u sistemu **IL** (izuzimajući dio koji se odnosi na modalni operator $\rhd$). Elemente skupa W nazivamo **svjetovi**. Neka je A formula, $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ Kripkeov model, te $w \in W$ svijet. Analogno kao u sistemu **IL** (uz korištenje Kripkeovih okvira i Kripkeovih modela umjesto **IL**–okvira i **IL**–modela) definiraju se sljedeći pojmovi: formula A je istinita na svijetu w, formula A je globalno istinita na modelu $\mathfrak{M}$, formula A je valjana na okviru (W, R), te formula A je valjana.

Želimo dokazati da je formula A valjana na svakom tranzitivnom i inverzno dobro fundiranom okviru ako i samo ako je formula A **GL**–teorem. Jedan smjer dan je teoremom adekvatnosti za sistem **GL**, a već smo istaknuli da smo to dobili dokazom teorema 1.3.3. Preostaje skicirati dokaz obratne tvrdnje. Mi ćemo zapravo dokazati njen obrat po kontrapoziciji.

Napomena 2.2.2. *Neka je $(W, R, \Vdash)$ model takav da je R tranzitivna i W konačan. Pretpostavimo da R nije inverzno dobro fundirana. Tada postoji niz $(x_n)_n$ takav da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_i R x_{i+1}$. Označimo s m kardinalnost skupa W. Promotrimo početni komad niza $(x_n)_n$ duljine $m+1$, tj. promotrimo komad $x_0 R x_1 R x_2 R \dots R x_m$. Prema Dirichletovom principu, tada postoje indeksi $j, k \in \{0, 1, \dots, m\}$, $j < k$ tako da vrijedi $x_j = x_k$. Tada iz tranzitivnosti od R slijedi $x_j R x_k$, tj. $x_j R x_j$. Obratom po kontrapoziciji zaključujemo da na konačnom okviru s tranzitivnom relacijom R, irefleksivnost te relacije povlači njenu inverzno dobru fundiranost. S druge strane, ako je relacija R na konačnom okviru tranzitivna i inverzno dobro fundirana, tada ne postoji svijet x takav da vrijedi xRx. U protivnom bismo dobili niz $(x_n)_n$ takav da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_i = x$ i $x_i R x_{i+1}$, što je u kontradikciji s inverzno dobrom fundiranošću relacije R. Dakle, tada je R irefleksivna. Time smo dobili da je na konačnom okviru s tranzitivnom relacijom R, irefleksivnost te relacije ekvivalentna njenoj inverznoj dobroj fundiranosti.*

Neka je A formula takva da vrijedi $\nvdash_{GL} A$. Želimo definirati Kripkeov model $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ u kojem postoji svijet w takav da vrijedi $w \nVdash A$, tj. $w \Vdash \neg A$. Postavlja se pitanje što bi moglo biti W, R, $\Vdash$ i svijet w. Lako se pokazuje da je skup $\{\neg A\}$ konzistentan. Slično kao u logici sudova, i ovdje vrijedi Lindenbaumova lema.

Lema 2.2.3 (Lindenbaumova lema za **GL**).
*Za svaki konzistentan skup S u sistemu **GL** postoji maksimalno konzistentan skup S' u sistemu **GL** tako da vrijedi $S \subseteq S'$.*

Iz prethodne leme slijedi da postoji maksimalno konzistentan skup $\mathcal{S}$ takav da vrijedi $\neg A \in \mathcal{S}$. Nameće se ideja da relacija forsiranja $\Vdash$ bude takva da vrijedi $\mathcal{S} \Vdash \neg A$. To znači da će nam svjetovi u traženom Kripkeovom okviru biti upravo maksimalno konzistentni skupovi. No, s obzirom da ćemo maksimalno konzistentne skupove koristiti na više mjesta u modelu, zapravo nećemo poistovjećivati svjetove i maksimalno konzistentne skupove, nego ćemo svjetovima pridruživati maksimalno konzistentne skupove. Tako dolazimo do pojma označenog okvira.

Definicija 2.2.4. ***Označeni okvir*** *je uređena trojka (W, R, v) gdje je (W, R) Kripkeov okvir, a v je funkcija koja svakom svijetu $w \in W$ pridružuje neki maksimalno konzistentan skup $v(w)$.*

Ako je $\mathfrak{F} = (W, R, v)$ označeni okvir relaciju forsiranja $\Vdash$ definiramo ovako:

$$x \Vdash p \qquad \text{ako i samo ako} \qquad p \in v(x), \text{ za proizvoljan } p \in Prop.$$

U daljnjim razmatranjima smatramo da je na svakom označenom okviru relacija forsiranja upravo tako definirana.

Definicija 2.2.5. *Kažemo da* ***lema o istinitosti vrijedi na okviru*** (W, R, v) *obzirom na skup formula* $\mathcal{D}$ *ako vrijedi*

$$(\forall x \in W)(\forall B \in \mathcal{D})(x \Vdash B \textit{ ako i samo ako } B \in v(x)).$$

Pretpostavimo da smo definirali $\mathfrak{F} = (W, R, v)$ kao označeni okvir takav da za neki svijet $w \in W$ vrijedi $v(w) = \mathcal{S}$, te smo definirali skup formula $\mathcal{D}$ tako da vrijedi $\neg A \in \mathcal{D}$. Sada je jasno da ako lema o istinitosti vrijedi na okviru $\mathfrak{F}$ obzirom na skup formula $\mathcal{D}$, činjenica $\neg A \in \mathcal{S}$ povlači $w \Vdash \neg A$. Prema tome A nije valjana formula i time je dokaz gotov. No, kako postići da lema o istinitosti vrijedi na $\mathfrak{F}$?

Htjeli bismo da za svaku formulu B iz odabranog skupa $\mathcal{D}$ vrijedi sljedeća ekvivalencija: $x \Vdash B$ ako i samo ako vrijedi $B \in v(x)$. Zašto to jednostavno ne bismo dokazali indukcijom po složenosti formule B? To očito vrijedi kada je $B \equiv p \in Prop$. Zatim, lako je vidjeti da tvrdnja vrijedi za bulovske slučajeve. Međutim, problemi nastaju kada u koraku indukcije imamo slučaj $B \equiv \Box C$. Trebamo dokazati sljedeću ekvivalenciju: $x \Vdash \Box C$ ako i samo $\Box C \in v(x)$. Ističemo moguće poteškoće koje se mogu javiti u pojedinom smjeru dokaza te ekvivalencije.

(i) Pretpostavimo da vrijedi $x \Vdash \Box C$. Iz pretpostavke indukcije dobivamo da vrijedi $(\forall y \in W)\ (xRy \Rightarrow C \in v(y))$. No, sada je pitanje može li se dogoditi da imamo $\Box C \notin v(x)$, odnosno zbog maksimalne konzistentnosti od $v(x)$, vrijedi li $\neg\Box C \in v(x)$? Ukoliko to vrijedi, tada ne vrijedi lema o istinitosti. Takav par $(x, \neg\Box C)$ nazivat ćemo $\mathcal{D}$–problemom.

(ii) Pretpostavimo da vrijedi $\Box C \in v(x)$. Željeli bismo da vrijedi $x \Vdash \Box C$, tj. da vrijedi $(\forall y \in W)(xRy \Rightarrow y \Vdash C)$. No, prema pretpostavci indukcije, jer je složenost formule C strogo manja od složenosti formule $\Box C$, činjenica $C \in v(y)$ bi povlačila $y \Vdash C$. Stoga je dovoljno da vrijedi $(\forall y \in W)(xRy \Rightarrow C \in v(y))$. Dakle, želimo da $\Box C \in v(x)$ na neki način povlači $C \in v(y)$. Definirat ćemo posebnu relaciju $\prec_\Box$ i adekvatne okvire na kojima će ta tvrdnja vrijediti.

Sada formalno iskazujemo definiciju $\mathcal{D}$–problema.

Definicija 2.2.6. *Neka je* $\mathcal{D}$ *skup formula.* ***$\mathcal{D}$–problem*** *u označenom okviru* (W, R, v) *je uređeni par* $(x, \neg\Box C)$ *koji ima sljedeća svojstva:*

a) $x \in W$,

b) $\neg\Box C \in v(x) \cap \mathcal{D}$,

c) za svaki svijet $y \in W$, *ako vrijedi* xRy *tada vrijedi* $\neg C \notin v(y)$.

Kao što smo istaknuli u (ii), javlja se potreba da za neke svjetove x i y, koji su u relaciji R, vrijedi da $\Box C \in v(x)$ povlači $C \in v(y)$. Sada definiramo relaciju $\prec_\Box$.

Definicija 2.2.7. *Neka su* $\mathcal{S}_1$ *i* $\mathcal{S}_2$ *skupovi formula. Definiramo relaciju* $\prec_\Box$ *ovako:*

$$\mathcal{S}_1 \prec_\Box \mathcal{S}_2 \text{ ako i samo ako } \Box C \in \mathcal{S}_1 \text{ povlači } C, \Box C \in \mathcal{S}_2.$$

Primijetimo da je $\prec_\Box$ očito tranzitivna relacija. Kao što je istaknuto u (ii), te s obzirom na upravo definiranu relaciju $\prec_\Box$, za svjetove x i y, koji su u relaciji R, bilo bi dobro zahtijevati da vrijedi $v(x) \prec_\Box v(y)$. Okvire na kojima je ispunjen taj uvjet nazivat ćemo adekvatnima. Sada to formalno definiramo.

Definicija 2.2.8. *Za označeni okvir* (W, R, v) *kažemo da je* ***adekvatan*** *ako je relacija* R *tranzitivna i inverzno dobro fundirana, te vrijedi:*

$$(\forall x, y \in W)(xRy \Rightarrow v(x) \prec_\Box v(y)).$$

Prisjetimo se da smo bili istaknuli da je važno indukcijom po složenosti formule $B \in \mathcal{D}$ dokazati sljedeću ekvivalenciju: $x \Vdash B$ ako i samo ako $B \in v(x)$, za svaki svijet $x \in W$. Zatim, bili smo istaknuli da je u dokazu koraka indukcije najkompliciraniji slučaj kada imamo $B \equiv \Box C$. U dokazu jednog smjera ekvivalencije pretpostavili smo da vrijedi $x \Vdash \Box C$. Koristeći pretpostavku indukcije, dobivamo da za svaki svijet $y \in W$ vrijedi da xRy povlači $C \in v(y)$. Zbog maksimalne konzistentnosti skupa $v(y)$, to je ekvivalentno s $\neg C \notin v(y)$. Kada ne bi vrijedilo $B \equiv \Box C \in v(x)$, tj. vrijedilo bi $\Box C \notin v(x)$, iz maksimalne konzistentnosti skupa $v(x)$ slijedilo bi $\neg\Box C \in v(x)$. Tada je $(x, \neg B)$ upravo jedan $\mathcal{D}$–problem. Uočimo sada neke poteškoće koje nismo eksplicitno naglasili:

- Promatrali smo formulu $B \equiv \Box C$ i primijenili pretpostavku indukcije na formulu C. To smo mogli jer je složenost formule C strogo manja od složenosti formule $\Box C$. Međutim, treba vrijediti i $C \in \mathcal{D}$. To bismo mogli osigurati zahtjevom da je skup $\mathcal{D}$ zatvoren na potformule.

- Pretpostavimo da je $(x, \neg\Box C)$ doista jedan $\mathcal{D}$ problem. Prema definiciji $\mathcal{D}$–problema, to znači da vrijedi $\neg\Box C \in \mathcal{D}$. Mogli bismo dakle tražiti da $\mathcal{D}$ bude zatvoren i na negacije. S obzirom da radimo s maksimalno konzistentnim skupovima, tada je primjerice nebitno ističemo li da se u nekom maksimalno konzistentnom skupu nalazi $\Box C$, $\neg\neg\Box C$ ili $\neg\neg\neg\neg\Box C$. Ukoliko samo zahtijevamo da $\mathcal{D}$ sadrži formulu $\neg\Box C$, tada možemo postići da je $\mathcal{D}$ konačan. To postižemo na način da zahtijevamo zatvorenost skupa $\mathcal{D}$ na jednostruke negacije. Pojam jednostruke negacije odmah definiramo.

Definicija 2.2.9. *Neka je B proizvoljna formula. Definiramo* **jednostruku negaciju** *od B, u oznaci $\sim B$, ovako:*

$$\sim B = \begin{cases} C, & \textit{ako } B \equiv \neg C; \\ \neg B, & \textit{inače}. \end{cases}$$

Sada nije teško dokazati sljedeću lemu.

Lema 2.2.10. *Neka je $\mathfrak{F}$ adekvatan okvir, te $\mathcal{D}$ skup formula zatvoren na potformule i jednostruke negacije. Lema o istinitosti vrijedi na okviru $\mathfrak{F}$ obzirom na $\mathcal{D}$ ako i samo ako ne postoji $\mathcal{D}$–problem u okviru $\mathfrak{F}$.*

Definirajmo sada jednočlani označeni okvir $\mathfrak{F}_0 = (\{w\}, \emptyset, \{(w, \mathcal{S})\})$. Primijetimo da je taj okvir adekvatan i da smo $v(w)$ definirali tako da vrijedi $\neg A \in v(w)$. Neka je $\mathcal{D}$ najmanji skup koji sadrži formulu $\neg A$ i koji je zatvoren na potformule i jednostruke negacije. S obzirom da je $\neg A$ formula, tj. konačan niz simbola, slijedi da ima konačno mnogo potformula, a za svaku od njih postoji najviše jedna jednostruka negacija (koja je različita od te potformule). Dakle, takav $\mathcal{D}$ je konačan. Iz toga, i činjenice da je skup svjetova $\{w\}$ očito konačan, $\mathcal{D}$–problema ima konačno.

Kao što smo istaknuli u prethodnoj lemi, dovoljno je naći adekvatan okvir koji nema niti jedan $\mathcal{D}$–problem. Pretpostavimo da imamo neki konačan adekvatan označeni okvir $\mathfrak{F} = (W, R, v)$ i $(y, \neg\Box B)$ jedan $\mathcal{D}$–problem na tom okviru. To znači da za svaki svijet $x \in W$ takav da vrijedi yRx, vrijedi i $\neg B \notin v(x)$. Uzmimo sada neki $x' \notin W$ (što možemo jer je W konačan). Definirajmo $W' = W \cup \{x'\}$, $R' = R \cup \{(y, x')\}$ i proširimo funkciju v do funkcije v' tako da vrijedi $\neg B \in v'(x')$. Naravno, postavlja se pitanje je li takvo proširenje moguće. Pretpostavimo na trenutak da doista jest, te da je time dobiven adekvatan označeni okvir $\mathfrak{F}' = (W', R', v')$. Očito na tom okviru $(x, \neg\Box B)$ više nije $\mathcal{D}$–problem. Reći ćemo da je taj $\mathcal{D}$–problem eliminiran ovim proširenjem $\mathfrak{F}'$ okvira $\mathfrak{F}$.

Dakle, počevši od jednočlanog okvira $\mathfrak{F}_0$, ideja je dobiti niz okvira $(\mathfrak{F}_n)_n$, pri čemu je $\mathfrak{F}_{i+1}$ adekvatan označeni okvir nastao eliminacijom barem jednog $\mathcal{D}$–problema iz adekvatnog označenog okvira $\mathfrak{F}_i$. Ako osiguramo da eliminacijom nekog $\mathcal{D}$–problema ne uvodimo nove $\mathcal{D}$–probleme, tada svaki puta imamo barem jedan $\mathcal{D}$–problem manje. S obzirom da smo krenuli od $\mathfrak{F}_0$ koji je imao konačno $\mathcal{D}$–problema, u konačno proširenja dolazimo do adekvatnog označenog okvira na kojem nema niti jedan $\mathcal{D}$–problem. Taj okvir je upravo onaj koji tražimo.

S obzirom da je R relacija koja je tranzitivna i prema napomeni 2.2.2 irefleksivna, u konstrukciji će adekvatni označeni okvir $\mathfrak{F}_i$ zapravo biti označeno stablo (W_i, R_i, v_i) s korijenom w (prisjetimo se da je w takav da vrijedi $\neg A \in v_i(w)$). Skup W_i je konačan i on predstavlja čvorove stabla, relacija R_i predstavlja lukove, a v_i je funkcija označavanja koja svaki čvor x označava maksimalno konzistentnim skupom $\nu_i(x)$. Nadalje je postupak dokaza ovakav:

- Pretpostavimo da je za neki $i \in \mathbb{N}$ definiran adekvatan označeni okvir $\mathfrak{F}_i = (W_i, R_i, \nu_i)$ tako da je (W_i, R_i) stablo visine i s korijenom w.

- Nadalje, pretpostavljamo da ne postoji $\mathcal{D}$–problem $(y, \neg\Box B)$ u okviru $\mathfrak{F}_i$ pri čemu je y čvor visine strogo manje od i. Također, pretpostavljamo da postoji barem jedan čvor x visine i tako da je $(x, \neg\Box B)$ jedan $\mathcal{D}$–problem. Drugim riječima, preostaje ukloniti $\mathcal{D}$–probleme oblika $(x, \neg\Box B)$ gdje je svijet x jedan R–terminalan čvor u okviru $\mathfrak{F}_i$.

- Sada konstruiramo adekvatan označeni okvir $\mathfrak{F}_{i+1} = (W_{i+1}, R_{i+1}, \nu_{i+1})$ koji ima strogo manje $\mathcal{D}$–problema od $\mathfrak{F}_i$, te je (W_{i+1}, R_{i+1}) stablo visine $i + 1$ s korijenom w.

- S obzirom da je na $\mathfrak{F}_0$ bilo konačno $\mathcal{D}$–problema, a svakim novim proširenjem $\mathfrak{F}_i$ $\mathcal{D}$–problema je strogo manje, u konačno mnogo proširenja dolazimo do okvira $\mathfrak{F}_n$, tj. konačnog stabla visine n na kojem nema $\mathcal{D}$–problema. To je upravo traženi okvir.

Sada istaknimo želje koje bi trebalo ispuniti da bismo za dani okvir $\mathfrak{F}_i$, mogli reći da njegovo proširenje $\mathfrak{F}_{i+1}$ ima strogo manje $\mathcal{D}$–problema od $\mathfrak{F}_i$.

- Iako možemo već opisanim postupkom eliminirati $\mathcal{D}$–problem $(x, \neg\Box B)$ iz okvira $\mathfrak{F}_i$ dodavanjem novog svijeta x', ne želimo da je tada $(x', \neg\Box B)$ novi $\mathcal{D}$–problem u okviru $\mathfrak{F}_{i+1}$. To ćemo lako spriječiti ako je $\nu_{i+1}(x')$ takav da, osim što vrijedi $\neg B \in \nu_{i+1}(x')$, vrijedi i $\Box B \in \nu_{i+1}(x')$.

- Želimo da svijet x' koji smo uveli ne generira niti jedan novi $\mathcal{D}$–problem, tj. želimo da ne postoji formula $C \in \mathcal{D}$ tako da je $(x', \neg\Box C)$ jedan $\mathcal{D}$–problem u okviru $\mathfrak{F}_{i+1}$, a $(x, \neg\Box C)$ nije $\mathcal{D}$–problem u okviru $\mathfrak{F}_i$. S obzirom da je x jedan R-terminalan svijet u okviru $\mathfrak{F}_i$, tada iz činjenice da $(x, \neg\Box C)$ nije $\mathcal{D}$–problem u $\mathfrak{F}_i$ slijedi $\neg\Box C \notin \nu_i(x)$. Iz maksimalne konzistentnosti skupa $\nu_i(x)$ slijedi $\Box C \in \nu_i(x)$. Bilo bi dobro osigurati da vrijedi $\Box C \in \nu_{i+1}(x')$, jer tada upravo $(x', \neg\Box C)$ ne bi bio $\mathcal{D}$–problem u $\mathfrak{F}_{i+1}$. Drugim riječima, bilo bi dobro osigurati $\nu_i(x) \prec_\Box \nu_{i+1}(x')$.

Sljedeća lema pokazuje da postoji takav maksimalno konzistentan skup $\nu_{i+1}(x')$ tako da su prethodne želje ispunjene.

Lema 2.2.11 (Lema o egzistenciji za **GL**). *Neka je C maksimalno konzistentan skup i $\neg\Box F \in C$. Tada postoji maksimalno konzistentan skup C' tako da vrijedi $C \prec_\Box C'$ i $\neg F, \Box F \in C'$.*

Time smo završili skicu dokaza teorema potpunosti za sistem **GL** jer smo doista osigurali da proširenje eliminira barem jedan $\mathcal{D}$–problem i ne uvodi nove $\mathcal{D}$–probleme. Konačno, iskažimo formalno teorem potpunosti za sistem **GL**.

Teorem 2.2.12 (Teorem potpunosti za **GL**)**.** *Neka je A formula takva da vrijedi $\nvdash_{GL} A$. Tada postoji konačno stablo (W, R) s korijenom w i model $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ tako da vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg A$.*

2.3 Označeni okviri, problemi i nedostaci

Teorem potpunosti za sistem **IL** dokazujemo također obratom po kontrapoziciji. Dakle, treba pokazati da ako vrijedi $\nvdash_{IL} A$ tada postoji **IL**–model $\mathfrak{M}$ i svijet $w \in \mathfrak{M}$ tako da vrijedi $\mathfrak{M}, w \nVdash A$, tj. $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg A$. Stoga se dokaz **IL**–potpunosti svodi na konstrukciju takvog modela $\mathfrak{M}$.

Pretpostavimo da vrijedi $\nvdash_{IL} A$. Tada je lako vidjeti da je $\{\neg A\}$ **IL**–konzistentan skup. Iz Lindenbaumove leme za sistem **IL** slijedi da postoji maksimalno **IL**–konzistentan skup formula $\mathcal{S}$ takav da vrijedi $\{\neg A\} \subseteq \mathcal{S}$, tj. $\neg A \in \mathcal{S}$.

Treba nam **IL**–model koji sadrži svijet w na kojem je istinita $\neg A$. Ono što zasad imamo je jedan **IL**–MCS. Kao i u slučaju sistema **GL**, svjetovi u modelu će nam biti označeni maksimalno konzistentnim skupovima. Naime, događa se da isti MCS treba koristiti na različitim mjestima u modelu. Iz tog razloga nećemo poistovjećivati svijet w s **IL**–MCS, nego ćemo svijetu w dodati oznaku $\nu(w)$, gdje je $\nu(w)$ neki **IL**–MCS. Stoga definiramo **IL**–označene okvire.

Definicija 2.3.1. ***IL–označeni okvir*** *je četvorka (W, R, S, ν), pri čemu je (W, R, S) **IL**–okvir, a ν je parcijalna funkcija koja svakom $x \in W$ pridružuje **IL**–MCS $\nu(x)$, a nekim parovima $(x, y) \in W^2$, takvima da vrijedi xRy, funkcija ν pridružuje formulu $\nu((x, y))$. Parcijalnu funkciju ν nazivamo **funkcijom označavanja**.*

Umjesto $\nu((x, y)) = B \in Form_{IL}$ pisat ćemo $\nu(x, y) = B$. Primijetimo još da u **IL**–označenom okviru različitim svjetovima mogu biti pridruženi isti maksimalno **IL**–konzi–stentni skupovi. Također, imamo potrebu nekom paru $(x, y) \in R$ pridružiti kao oznaku neku formulu. Motivacija za ovakvo označavanje možda trenutno nije jasna, no objašnjenju takvog označavanja vratit ćemo se nakon što uvedemo još neke pojmove.

Napomena 2.3.2. *Iz svakog **IL**–označenog okvira $\mathfrak{F} = (W, R, S, \nu)$ može se dobiti **IL**–model $\overline{\mathfrak{F}}$ uz definiranje relacije forsiranja $\Vdash$ ovako:*

$$\overline{\mathfrak{F}}, w \Vdash p :\Leftrightarrow p \in \nu(w), \qquad (w \in W,\ p \in Prop).$$

*Kažemo da je $\overline{\mathfrak{F}}$ **pripadni IL–model** za $\mathfrak{F}$.*

Neka je $\mathfrak{F}$ proizvoljan **IL**–označeni okvir s funkcijom označavanja ν, te $\overline{\mathfrak{F}}$ njegov pripadni **IL**–model (u smislu prethodne napomene). Neka je $x \in \overline{\mathfrak{F}}$ proizvoljan svijet. Tada, iz definicije (proširenja) relacije forsiranja slijedi da bi bilo idealno (indukcijom po složenosti formule) pokazati da za svaku formulu B vrijedi sljedeća ekvivalencija: $x \Vdash B$ ako i samo ako vrijedi $B \in \nu(x)$. Tu ekvivalenciju nazivamo lema o istinitosti. U dokazu potpunosti konstruira se model na kojem vrijedi neki oblik leme o istinitosti. To precizno definiramo u sljedećoj definiciji.

Definicija 2.3.3. *Neka je $\mathfrak{F} = (W, R, S, \nu)$ **IL**–označeni okvir i neka je $\overline{\mathfrak{F}} = (W, R, S, \Vdash)$ pripadni **IL**–model. Neka je $\mathcal{D} \subseteq Form_{IL}$. Kažemo da **lema o istinitosti vrijedi na $\mathfrak{F}$ obzirom na** $\mathcal{D}$ ako vrijedi sljedeće:*

$$(\forall B \in \mathcal{D})\,(\forall x \in W) \qquad (\overline{\mathfrak{F}}, x \Vdash B \Leftrightarrow B \in \nu(x)).$$

Glavno pitanje je kako od maksimalno **IL**–konzistentnog skupa $\mathcal{S}$ koji sadrži formulu $\neg A$ doći do modela gdje $\neg A$ vrijedi na nekom svijetu w. Sada je jasno da ako dođemo od **IL**–označenog okvira $\mathfrak{F} = (W, R, S, \nu)$, na kojem smo svijet $w \in W$ označili skupom $\mathcal{S}$ (koji sadrži formulu $\neg A$), te na kojem vrijedi lema o istinitosti s obzirom na $\mathcal{D}$ (koji također sadrži formulu $\neg A$), tada smo gotovi. Pripadni model je upravo model koji tražimo.

Dakle, želimo da na **IL**–okviru $\mathfrak{F}$ vrijedi lema o istinitosti obzirom na odabrani skup $\mathcal{D}$. Sada se, kao i u **GL**, pitamo možemo li indukcijom po složenosti formule B iz skupa $\mathcal{D}$ dokazati da vrijedi željena ekvivalencija: $x \Vdash B$ ako i samo ako vrijedi $B \in \nu(x)$. Ponovno, kao i slučaju **GL**, primjećujemo da problemi nastaju u koraku indukcije. No za razliku od **GL**, sada u koraku indukcije promatramo slučaj $B \equiv C \rhd D$. Trebamo dokazati sljedeću ekvivalenciju: $x \Vdash C \rhd D$ ako i samo ako $C \rhd D \in \nu(x)$. Ističemo moguće poteškoće koje se mogu javiti u pojedinom smjeru dokaza te ekvivalencije:

(i) Pretpostavimo da vrijedi $\neg(C \rhd D) \in \nu(x)$. Što ako tada vrijedi $x \nVdash \neg(C \rhd D)$? To bi značilo da vrijedi $x \Vdash C \rhd D$, tj. da za svaki $y \in W$ takav da xRy i $C \in \nu(y)$, postoji $z \in W$ takav da vrijedi yS_xz i $D \in \nu(z)$. Ukoliko to vrijedi, tada ne vrijedi lema o istinitosti. Takav par $(x, \neg(C \rhd D))$ nazivat ćemo $\mathcal{D}$–problemom.

(ii) Pretpostavimo da vrijedi $C \rhd D \in \nu(x)$. Ponovno se pitamo što ako ne vrijedi željeni rezultat, tj. što ako vrijedi $x \nVdash C \rhd D$. To znači da postoji svijet $y \in W$ takav da xRy i $C \in \nu(y)$, ali ne postoji svijet $z \in W$ sa sljedećim svojstvima:

- vrijedi yS_xz;
- vrijedi $D \in \nu(z)$.

Zaključujemo da tada očito ne vrijedi lema o istinitosti. Takvu trojku $(x, y, C \rhd D)$ nazivat ćemo $\mathcal{D}$–nedostatkom.

Napomenimo ovdje da ne razmatramo $\mathcal{D}$–probleme u smislu prethodne točke, tj. u sistemu **GL**. Naime, prema 3. tvrdnji leme 1.4.5, modalni operator $\Box$ je izraziv pomoću modalnog operatora $\rhd$, veznika $\neg$ i logičke konstante $\bot$. Prema tome u koraku indukcije po složenosti formule u dokazu ekvivalencije

$$x \Vdash B \text{ ako i samo } B \in v(x)$$

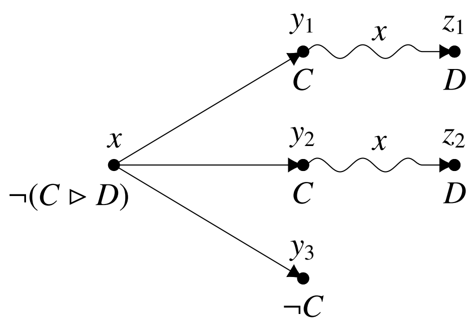
ne trebamo promatrati slučaj $B \equiv \Box C$. Sada formalno iskazujemo definiciju $\mathcal{D}$–problema.

Definicija 2.3.4. *Neka je $\mathcal{D} \subseteq Form_{IL}$ i $\mathfrak{F} = (W, R, S, v)$ **IL**–označeni okvir, $x \in W$, te $C, D \in Form_{IL}$. $\mathcal{D}$–**problem** je par $(x, \neg(C \rhd D))$ takav da vrijedi sljedeće:*

1. *$\neg(C \rhd D) \in v(x) \cap \mathcal{D}$,*
2. *za svaki $y \in W$, takav da vrijedi xRy, vrijedi*

$$C \in v(y) \Rightarrow \exists z(yS_x z \wedge D \in v(z)).$$

Primjer $\mathcal{D}$–problema ilustriran je na slici 2.1. Svjetove prikazujemo čvorovima grafa (kojima je pridružena odgovarajuća oznaka), a (usmjereni) lukovi označavaju elemente relacije. Ako su svjetovi x i y u relaciji R, tada je to označeno ravnom strelicom od čvora označenog s x do čvora označenog s y. Ako su svjetovi y i z u relaciji S_x, tada su oni povezani valovitom strelicom, pri čemu kod te strelice stoji oznaka x. Uz neke svjetove su napisane i formule. Primjerice, uz svijet x je napisana formula $\neg(C \rhd D)$. Time smo naznačili da vrijedi $\neg(C \rhd D) \in v(x)$.



Slika 2.1: $\mathcal{D}$–problem $(x, \neg(C \rhd D))$.

Sada formalno iskazujemo definiciju $\mathcal{D}$–nedostatka.

Definicija 2.3.5. *Neka je $\mathcal{D} \subseteq Form_{IL}$ i $\mathfrak{F} = (W, R, S, v)$ **IL**–označeni okvir, $x, y \in W$, te $C, D \in Form_{IL}$. $\mathcal{D}$–**nedostatak** je trojka $(x, y, C \rhd D)$ takva da vrijedi sljedeće:*

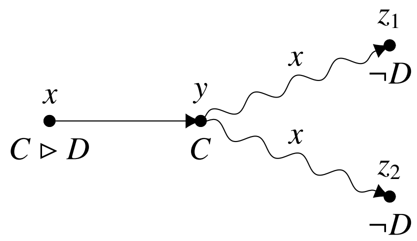
1. xRy,

2. $C \rhd D \in \nu(x) \cap \mathcal{D}$,

3. $C \in \nu(y)$,

4. niti za jedan $z \in W$ takav da vrijedi yS_xz ne vrijedi $D \in \nu(z)$.

Primjer $\mathcal{D}$–nedostatka ilustriran je na sljedećoj slici.



Slika 2.2: $\mathcal{D}$–nedostatak $(x, y, C \rhd D)$.

Ukoliko je $\mathcal{D}$ unaprijed fiksiran ili jasan iz konteksta, jednostavno govorimo o problemima i nedostatcima. Iako to nismo eksplicitno naglasili, ponovno kao i u slučaju **GL** (čak štoviše iz istih razloga kao i u slučaju **GL**), zahtijevamo zatvorenost skupa $\mathcal{D}$ na potformule i jednostruke negacije.

Sada iskazujemo i dokazujemo sljedeću lemu, koja nam daje nužan i dovoljan uvjet da bi na nekom **IL**–označenom okviru vrijedila lema o istinitosti obzirom na $\mathcal{D}$.

Lema 2.3.6. *Neka je $\mathfrak{F} = (W, R, S, \nu)$ označeni okvir, te $\mathcal{D}$ skup formula zatvoren na jednostruku negaciju i potformule. Lema o istinitosti vrijedi na $\mathfrak{F}$ obzirom na $\mathcal{D}$ ako i samo ako ne postoje niti $\mathcal{D}$–problemi niti $\mathcal{D}$–nedostatci.*

Dokaz. Pretpostavimo da na $\mathfrak{F}$ vrijedi lema o istinitosti u odnosu na $\mathcal{D}$. Pretpostavimo suprotno, tj. postoje $\mathcal{D}$–problemi ili $\mathcal{D}$–nedostatci. Razmatramo svaki od ta dva slučaja.

- Neka je $(x, \neg(C \rhd D))$ neki $\mathcal{D}$–problem u **IL**–okviru $\mathfrak{F}$. Tada vrijedi $\neg(C \rhd D) \in \nu(x)$ i $\neg(C \rhd D) \in \mathcal{D}$. Također, jer je $\mathcal{D}$ zatvoren na potformule, iz $\neg(C \rhd D) \in \mathcal{D}$ slijedi $C \in \mathcal{D}$ i $D \in \mathcal{D}$. Iz pretpostavke o istinitosti, slijedi $x \Vdash \neg(C \rhd D)$, tj. $x \nVdash C \rhd D$. Tada postoji $y \in W$ takav da imamo xRy i $y \Vdash C$ (zbog pretpostavke o istinitosti $C \in \nu(y)$), ali ne postoji $z \in W$ takav da vrijedi yS_xz i $z \Vdash D$ (zbog pretpostavke o istinitosti $D \in \nu(z)$). No, tada smo dobili kontradikciju s pretpostavkom da je $(x, \neg(C \rhd D))$ jedan $\mathcal{D}$–problem, jer bi prema definiciji $\mathcal{D}$–problema, za svaki $y \in W$ za koji vrijedi xRy, $C \in \nu(y)$ trebalo povlačiti da postoji $z \in W$ takav da vrijedi yS_xz i $D \in \nu(z)$.

- Neka je $(x, y, C \rhd D)$ neki $\mathcal{D}$–nedostatak u **IL**–okviru $\mathfrak{F}$. Tada vrijedi $C \rhd D \in \nu(x)$ i $C \rhd D \in \mathcal{D}$. Jer je $\mathcal{D}$ zatvoren na potformule vrijedi $C \in \mathcal{D}$ i $D \in \mathcal{D}$. Iz pretpostavke o istinitosti slijedi $x \Vdash C \rhd D$. Tada za svaki $u \in W$ takav da vrijedi xRu i $C \in \nu(u)$, postoji $v \in W$ takav da vrijedi uS_xv i $D \in \nu(v)$. Dakle, dobili smo kontradikciju, jer iz definicije $\mathcal{D}$–nedostatka, za y vrijedi xRy i $C \in \nu(y)$ (zbog pretpostavke o istinitosti, $y \Vdash C$). No, ne postoji $v \in W$ takav da vrijedi yS_xv i $D \in \nu(v)$ (zbog pretpostavke o istinitosti, $v \Vdash D$).

Dokažimo sada obratan smjer. Pretpostavimo da u **IL**–okviru $\mathfrak{F}$ ne postoje $\mathcal{D}$–problemi niti $\mathcal{D}$–nedostatci. Dokazujemo da u **IL**–okviru $\mathfrak{F}$ vrijedi lema o istinitosti u odnosu na skup $\mathcal{D}$. U tu svrhu dokazujemo indukcijom po složenosti formule $B \in \mathcal{D}$ da za svaki $x \in W$ vrijedi sljedeće:

$$x \Vdash B \qquad \text{ako i samo ako} \qquad B \in \nu(x).$$

Primijetimo da sve veznike logike sudova možemo iskazati pomoću $\bot$ i $\rightarrow$, a da modalni operator $\Box$ prema tvrdnji 3. leme 1.4.5. možemo iskazati koristeći samo $\rhd$ i $\bot$. Stoga ćemo u koraku indukcije razmatrati samo formule oblika $C \rightarrow D$ i $C \rhd D$.

Neka je B formula složenosti 0. Tada je $B \equiv p$ ili $B \equiv \bot$, za neki $p \in Prop$. No, relacija $\Vdash$ je definirana tako da za svaki $x \in W$ vrijedi: $x \Vdash p$ ako i samo ako $p \in \nu(p)$.

Pretpostavimo da za neki $k \in \mathbb{N}$ tvrdnja vrijedi za sve formule čija je složenost manja ili jednaka k.

Pokazujemo da tvrdnja vrijedi za slučaj kada je formula $B \in \mathcal{D}$ složenosti $k+1$. Neka je $x \in W$ proizvoljan. Razmatramo sljedeće slučajeve:

a) $B \equiv C \rightarrow D \in \mathcal{D}$. Jer je $\mathcal{D}$ zatvoren na potformule, vrijedi $C \in \mathcal{D}$ i $D \in \mathcal{D}$.

  - Pretpostavimo da vrijedi $x \Vdash C \rightarrow D$. Tada vrijedi $x \nVdash C$ ili $x \Vdash D$. Formule C i D su složenosti manje ili jednake k, pa prema pretpostavci indukcije vrijedi $C \notin \nu(x)$ (tj. $\neg C \in \nu(x)$) ili $D \in \nu(x)$. Koristeći tautologiju $\neg C \rightarrow (D \rightarrow (C \rightarrow D))$, dvostrukom primjenom pravila mod pon dobivamo $C \rightarrow D \in \nu(x)$.
  - Neka je $C \rightarrow D \in \nu(x)$. Ako vrijedi $x \nVdash C$, onda smo gotovi. Inače, vrijedi $x \Vdash C$. Tada primjenom pravila mod pon dobivamo $D \in \nu(x)$. Složenost od D je manja od $k+1$ pa prema pretpostavci indukcije vrijedi $x \Vdash D$. Tada $x \Vdash C \rightarrow D$.

b) $B \equiv C \rhd D \in \mathcal{D}$. Ponovo, jer je $\mathcal{D}$ zatvoren na potformule, vrijedi $C \in \mathcal{D}$ i $D \in \mathcal{D}$.

  - Neka je $x \Vdash C \rhd D$. Tada za svaki $y \in W$ takav da je xRy i $y \Vdash C$ postoji $z \in W$ takav da yS_xz i $z \Vdash D$. Jer je složenost od C i od D manja od $k+1$, prema pretpostavci indukcije $C \in \nu(y)$ i $D \in \nu(z)$. Jer je $\mathcal{D}$ zatvoren na jednostruke negacije vrijedi $\neg(C \rhd D) \in \mathcal{D}$. Pretpostavimo suprotno, tj. $C \rhd D \notin \nu(x)$. Zbog maksimalne konzistentnosti vrijedi $\neg(C \rhd D) \in \nu(x)$. Dakle, $\neg(C \rhd D) \in \nu(x) \cap \mathcal{D}$. No, tada dobivamo da je $(x, \neg(C \rhd D))$ jedan $\mathcal{D}$–problem, što je u kontradikciji s pretpostavkom da $\mathcal{D}$–problemi ne postoje.

- Neka je $C \rhd D \in \nu(x)$. Pretpostavimo suprotno, tj. $x \nVdash C \rhd D$. Tada postoji $y \in W$ takav da vrijedi xRy i $y \Vdash C$, te ne postoji $z \in W$ takav da vrijedi yS_xz i $z \Vdash D$. Jer su C i D složenosti manje od $k+1$, prema pretpostavci indukcije $C \in \nu(y)$ i $D \in \nu(z)$. No, tada je $(x, y, C \rhd D)$ jedan $\mathcal{D}$–nedostatak, što je u kontradikciji s pretpostavkom da $\mathcal{D}$–nedostatci ne postoje.

□

Dakle, lemu o istinitosti dobit ćemo nakon što se riješimo problema i nedostataka. Postavlja se pitanje kako. Sada navodimo moguće načine rješavanja.

- Ako je $(x, y, C \rhd D)$ neki $\mathcal{D}$–nedostatak tada za svijet y vrijedi xRy i $C \in \nu(y)$, ali ne postoji svijet z za koji vrijedi yS_xz i $D \in \nu(z)$. To upravo možemo popraviti dodavanjem novog svijeta z u skup W i uz definiranje yS_xz i $D \in \nu(z)$.

- Ako je $(x, \neg(C \rhd D))$ neki $\mathcal{D}$–problem tada za svaki svijet $y \in W$ za koji vrijedi xRy, $C \in \nu(y)$ povlači postojanje svijeta $z \in W$ tako da vrijedi yS_xz i $D \in \nu(z)$. To možemo popraviti tako da dodamo u W novi svijet y za koji definiramo xRy i $C \in \nu(y)$. Također definiramo $D \notin \nu(y)$ (dakle, $\neg D \in \nu(y)$). Naime, ako vrijedi yS_xz, tada (zbog refleksivnosti od S_x) vrijedi $z = y$. Primijetimo da za neki drugi svijet $z \in W$ nismo niti definirali yS_xz. Međutim, definirali smo $D \notin \nu(z)$ (tj. $D \notin \nu(y)$), pa sada $(x, \neg(C \rhd D))$ više nije $\mathcal{D}$–problem.

Dakle, dodajemo svjetove u W, te dodajemo nove elemente u relaciju R, odnosno u relacije koje su elementi od S. Time dobivamo proširenja modela. U sljedećoj definiciji to precizno opisujemo.

Definicija 2.3.7. *Neka je $\mathfrak{F} = (W, R, S, \nu)$ **IL**–označeni okvir. Kažemo da je **IL**–označeni okvir $\mathfrak{F}' = (W', R', S', \nu')$ **proširenje** od $\mathfrak{F}$, i pišemo $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}'$, ako je $W \subseteq W'$ i relacije u $\mathfrak{F}'$ restringirane na $\mathfrak{F}$ daju odgovarajuće relacije na $\mathfrak{F}$, te je funkcija ν restrikcija funkcije ν'.*

Preciznije, zahtjevi na restrikcije u gornjoj definiciji svode se na sljedeće zahtjeve za sve $x, y, z \in \mathfrak{F}$:

- $xR'y$ ako i samo ako xRy,

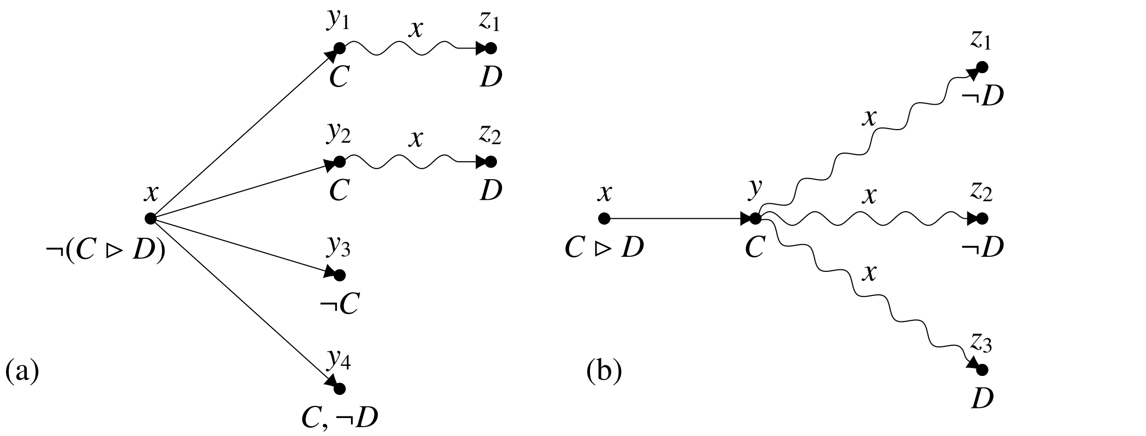
- yS'_xz ako i samo ako yS_xz,

- $\nu'(x) = \nu(x)$,

- $v'(x, y)$ je definirano ako i samo ako je $v(x, y)$ definirano, te u tom slučaju vrijedi $v'(x, y) = v(x, y)$.

Kažemo da je problem (nedostatak) u okviru $\mathfrak{F}$ **eliminiran** proširenjem $\mathfrak{F}'$ ako to više nije problem (nedostatak) u okviru $\mathfrak{F}'$.

Eliminacija $\mathcal{D}$–problema sa slike 2.1 prikazana je slikom 2.3(a). Taj problem je eliminiran dodavanjem svijeta y_4. Eliminacija $\mathcal{D}$–nedostatka sa slike 2.2 prikazana je slikom 2.3(b). Taj nedostatak je eliminiran dodavanjem svijeta z_3.



Slika 2.3: (a) Eliminacija $\mathcal{D}$–problema $(x, \neg(C \rhd D)$ sa slike 2.1; (b) Eliminacija $\mathcal{D}$–nedostatka $(x, y, C \rhd D)$ sa slike 2.1.

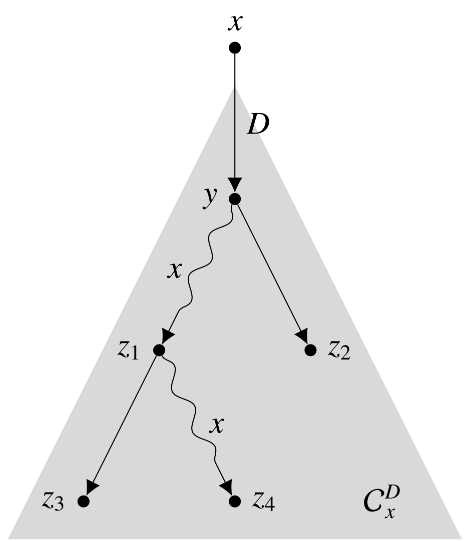
Želimo da se nedostatak ili problem koji je jednom uklonjen više ne pojavljuje. Promotrimo prvo neki nedostatak $(x, y, C \rhd D)$. Tada ne postoji svijet $z \in W$ za koji vrijedi yS_xz i $D \in v(z)$. To smo riješili dodavanjem takvog z za koji vrijedi yS_xz i $D \in v(z)$. Sada se u svim proširenjima taj nedostatak više ne može pojaviti. Naime, uvijek nešto dodajemo, nikada ne oduzimamo. Stoga će z kojim smo eliminirali taj nedostatak uvijek biti prisutan.

No, problemi doista stvaraju probleme. Promotrimo neki problem $(x, \neg(C \rhd D))$. Tada za svaki svijet y za koji vrijedi xRy vrijedi da $C \in v(y)$ povlači postojanje svijeta $z \in W$ da vrijedi yS_xz i $D \in v(z)$. Taj problem smo eliminirali uvođenjem novog svijeta y tako da vrijedi xRy i $C, \neg D \in v(y)$. Tada, ukoliko vrijedi yS_xz, zbog $y \notin W$ i tranzitivnosti od S_x, vrijedi $z = y$. Stoga je zbog $\neg D \in v(y)$ problem eliminiran. No, to bi trebalo vrijediti i na daljnjim proširenjima. Kako onda jamčiti da nećemo u nekom sljedećem proširenju sa S_x prijelazima doći od svijeta y do nekog svijeta z, takvog da vrijedi $C \in v(z)$? No, nisu samo S_x prijelazi opasni. Ako R–prijelazima dođemo od nekog svijeta y do nekog svijeta z za koji vrijedi $D \in \nu(z)$, tada $xRyRz$ povlači yS_xz (što je opet problem). Dakle, treba dati jamstvo da se ni tako nešto neće dogoditi. Navedena jamstva treba dati prilikom svakog uvođenja novog svijeta y, te sva ta jamstva pratiti kroz konstrukciju i biti siguran da ona doista vrijede i dalje. O tome se brine tzv. D–kritičan konus. Budući da niti za jedan $z \in R[y]$ ne smije vrijediti $D \in \nu(z)$, razumno je zahtijevati da vrijedi $\Box\neg D \in \nu(y)$ (pri čemu je ovaj y uveden zbog eliminacije problema sa $\neg(C \rhd D) \in \nu(x) \cap \mathcal{D}$).

Definicija 2.3.8. *Neka je (W, R, S, ν) **IL**–označeni okvir, $x \in W$ proizvoljan svijet, te $D \in Form_{IL}$. **D–kritičan konus nad** x, u oznaci C_x^C, definiramo kao najmanji skup koji zadovoljava sljedeće uvjete:*

1. *za svaki $y \in W$, ako vrijedi $\nu(x, y) = C$ tada je $y \in C_x^C$,*
2. *za sve $y, x' \in W$, ako vrijedi $x' \in C_x^C$ i $x'S_xy$ tada $y \in C_x^C$,*
3. *za sve $y, x' \in W$, ako vrijedi $x' \in C_x^C$ i $x'Ry$ tada $y \in C_x^C$.*

Dakle, ako je $(x, \neg(C \rhd D)$ problem, tada ćemo, po uvođenju novog svijeta y koji će taj problem eliminirati, par $(x, y) \in R$ označiti formulom D. Sada su svi (R ili S_x)–sljedbenici koji su nam kritični (tj. na koje treba paziti - na njima ne želimo da vrijedi D) u D–kritičnom konusu nad x.



Slika 2.4: Primjer D–kritičnog konusa nad x. Konus je označen sivom bojom.

Ilustracija jednog D–kritičnog konusa nad svijetom x dana je na slici 2.4. Primijetimo prvo da vrijedi $x \notin C_x^D$ (inače bi se pokazalo da vrijedi xRx što je u kontradikciji s inverzno dobrom fundiranošću relacije R). Promotrimo nadalje svijet z_2. Vrijedi yRz_2 i xRy pa iz svojstva 5. definicije **IL**–okvira slijedi yS_xz_2. Promotrimo svijet z_3. Vrijedi yS_xz_1, što povlači xRz_1, pa iz xRz_1Rz_3 slijedi $z_1S_xz_3$. No, zbog tranzitivnosti od S_x, iz yS_xz_1 i $z_1S_xz_3$ proizlazi yS_xz_3. Konačno, za svijet z_4, iz tranzitivnosti od S_x i $yS_xz_1S_xz_4$ slijedi yS_xz_4.

Napomena 2.3.9. *D–kritičan konus nad x je prema definiciji zatvoren na uzimanje sljedbenika po relaciji R, te po relaciji S_x. No, zapravo je traženje zatvorenja po relaciji R redundantan zahtjev. Dovoljno je tražiti zatvorenost na sljedbenike po relaciji S_x.*

Ukoliko zahtijevamo zatvorenost na relaciju S_x, za proizvoljan svijet x, dolazimo do pojma generaliziranog D–konusa. Ukoliko znamo da na nekom generaliziranom D–kritičnom konusu nad x ne vrijedi formula D (tj. na svakom svijetu iz tog konusa), tada smo sigurni da smo ispunili uvjet da ona ne vrijedi niti na D–kritičnom konusu nad x.

Definicija 2.3.10. *Neka je (W, R, S, v) **IL**–označeni okvir, $x \in W$ proizvoljan svijet, te $D \in Form_{IL}$. **Generalizirani D–konus nad** x, u oznaci $\mathcal{G}_x^D$, definiramo kao najmanji skup koji zadovoljava sljedeće uvjete:*

1. *za svaki $y \in W$, ako $y \in \mathcal{C}_x^D$ tada $y \in \mathcal{G}_x^D$,*
2. *za sve $y, x' \in W$, ako $x' \in \mathcal{G}_x^D$ i $x'S_zy$ tada $y \in \mathcal{G}_x^D$, za proizvoljan $z \in W$,*
3. *za sve $y, x' \in W$, ako $x' \in \mathcal{G}_x^D$ i $x'Ry$ tada $y \in \mathcal{G}_x^D$.*

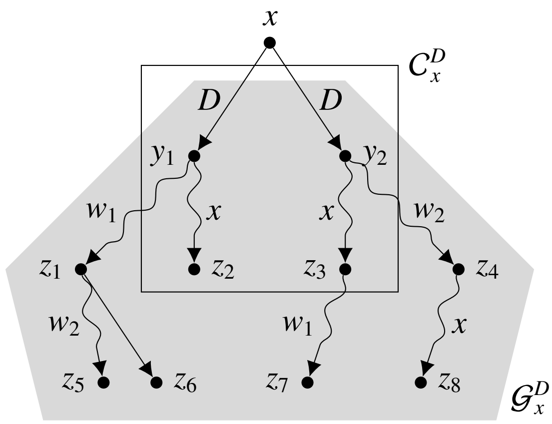
Primijetimo da iz uvjeta 1. prethodne definicije slijedi da je D–kritičan konus nad x podskup generaliziranog D–konusa nad x. Prema tome ako vrijedi $\mathcal{G}_x^{D_1} \cap \mathcal{G}_x^{D_2} = \emptyset$ tada vrijedi i $\mathcal{C}_x^{D_1} \cap \mathcal{C}_x^{D_2} = \emptyset$, za sve formule D_1 i D_2.

Za označene okvire koje ćemo koristiti, zahtijevat ćemo da zadovoljavaju neka svojstva koja će nam osigurati ne pojavljivanje jednom uklonjenih problema. Tako definiramo adekvatne okvire. Prvo iskazujemo definiciju, a onda komentiramo zašto su upravo takvi **IL**–označeni okviri prikladni.

Definicija 2.3.11. ***IL**–označeni okvir (W, R, S, v) nazivamo **adekvatnim okvirom** ako su za sve $x, y \in W$, te $C, D \in Form_{IL}$ zadovoljeni sljedeći uvjeti:*

1. *ako xRy tada $v(x) \prec v(y)$,*
2. *ako su C i D različite formule tada $\mathcal{G}_x^C \cap \mathcal{G}_x^D = \emptyset$,*
3. *ako $y \in \mathcal{C}_x^C$ tada $v(x) \prec_C v(y)$.*

Za sve označene okvire nadalje ćemo podrazumijevati da su adekvatni, pa ćemo jednostavno govoriti o označenim okvirima. Sada komentiramo zahtjeve prethodne definicije. Zbog lakšeg praćenja, dana je kao ilustracija slika 2.6 na kojoj se mogu pratiti sve iskazane tvrdnje.



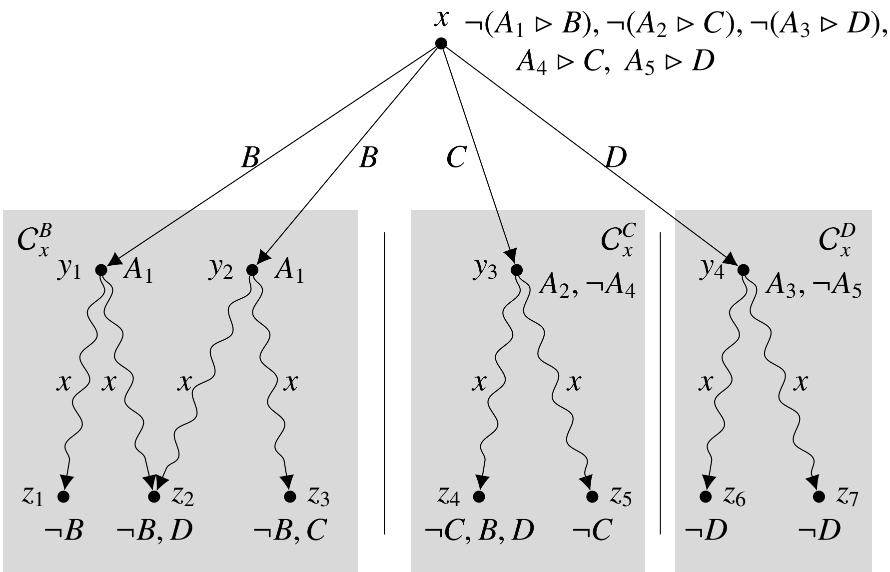
Slika 2.5: Primjer generaliziranog D–kritičnog konusa nad x. Konus je označen sivom bojom. Dio koji se nalazi u pravokutniku predstavlja D–kritičan konus nad x.

Napomena 2.3.12. *Razmatramo redom zahtjeve 1.–3. iz prethodne definicije.*

1. *Prisjetimo se priče o uvjetima kod nepojavljivanja već uklonjenih problema. Rekli smo da imamo D–kritičan konus, te smo htjeli da D ne vrijedi na nekom R–sljedbeniku od y, pa samo zahtjevali da vrijedi* $\Box\neg D \in \nu(y)$. *No, sada upravo ovaj zahtjev kaže da ako je z neki R–sljedbenik od y (novouveden svijet), te vrijedi* $\Box\neg D \in \nu(y)$, *tada* $\nu(y) \prec \nu(z)$ *povlači* $\neg D \in \nu(z)$. *Drugim riječima, D doista ne vrijedi na R–sljedbeniku od y (dodatno dobivamo da na njemu vrijedi* $\Box\neg D$*).*

2. *Kod eliminiranja problema* $(x, \neg(C \rhd D))$, *uveli smo novi svijet y i označili* $\nu(x, y) = D$. *Zaključili smo dosad da niti za jedan element z konusa* C_x^D *ne smije vrijediti* $D \in \nu(z)$. *Pretpostavimo da sada eliminiramo neki drugi problem* $(x', \neg(C' \rhd D'))$. *Uvodimo novi* y' *i želimo da na* $C_x^{D'}$ *ne vrijedi* D'. *No, sada se može dogoditi da je neki svijet z u presjeku prethodno navedenih konusa. Tada dakle ne smije vrijediti ni* $D \in \nu(z)$, *ni* $D' \in \nu(z)$. *Daljnjim eliminiranjem drugim problema dobivamo dodatne zahtjeve na* $\nu(z)$. *To predstavlja znatne komplikacije jer je* $\nu(z)$ ***IL****–MCS, pa nema garancije da je sve te zahtjeve moguće ispuniti. No,* $\mathcal{G}_x^D \cap \mathcal{G}_x^{D'} = \emptyset$ *povlači* $C_x^D \cap C_x^{D'} = \emptyset$, *što znači da ne postoji takav z. Drugim riječima, za svaki* $\nu(z)$ *moramo osigurati da samo jedna formula ne bude unutra (a za ostale nas nije briga).*

3. *Ponovo, kod eliminacije problema* $(x, \neg(C \rhd D))$, *uveli smo y i dobili konus* C_x^D *(svjetove koji su pod posebnim nadzorom tijekom ostatka konstrukcije). Za proizvoljan* $z \in C_x^D$ *već smo vidjeli da vrijedi* yS_xz. *Je li sada moguće da u nekom trenutku postoji formula* $E \rhd D \in \nu(x)$, *tako da vrijedi* $E \in \nu(y)$, *ali ne postoji* $z \in C_x^D$ *tako da vrijedi*



Slika 2.6: Ilustracija B, C i D–kritičnog konusa nad $x \in \mathfrak{F}$, pri čemu je $\mathfrak{F}$ adekvatan okvir. Također su B, C i D međusobno različite formule, dok formule A_i, $i \in \{1, 2, ..., 5\}$, nisu nužno različite. Kritični (i disjunktni) konusi označeni su sivom bojom.

$D \in \nu(z)$? Ako se prisjetimo, željeli smo da na svakom $z \in C_x^D$ vrijedi $\neg D \in \nu(z)$, tako da je gornje lako moguće (pogotovo jer je E proizvoljna formula). Ali to je upravo $\mathcal{D}$–nedostatak! No, rješenje dolazi upravo u okviru ovog zahtjeva, jer iz $E \rhd D \in \nu(x)$ i $\nu(x) \prec_D \nu(y)$ dobivamo $\neg E \in \nu(y)$, tj. $E \notin \nu(y)$. Dakle, takav nedostatak se sigurno ne može pojaviti.

$\mathcal{D}$–probleme ćemo ipak definirati malo drugačije kako bi dokazi daljnjih tvrdnji bili lakši. Sljedeću lemu ćemo koristiti da bismo pokazali da je nova definicija dobra.

Lema 2.3.13. *Neka je $(x, \neg(C \rhd D))$ $\mathcal{D}$–problem u adekvatnom označenom okviru. Tada za svaki $y \in C_x^D$ vrijedi $C \notin \nu(y)$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. postoji $y \in C_x^D$ takav da vrijedi $C \in \nu(y)$. Koristeći definiciju D–kritičnog konusa i $y \in C_x^D$, lako je dokazati da vrijedi xRy. Prema definiciji $\mathcal{D}$–problema slijedi da postoji $z \in W$ takav da je yS_xz i $D \in \nu(z)$. No, tada je i $z \in C_x^D$. Iz definicije adekvatnog okvira slijedi $\nu(x) \prec_D \nu(z)$. Iz dokaza tvrdnje 1. leme 1.4.5, dobivamo $\vdash_{IL} D \rhd D$, pa je $D \rhd D \in \nu(x)$ jer je $\nu(x)$ **IL**–MCS. Iz definicije relacije D–kritičnog sljedbenika tada proizlazi $\neg D \in \nu(z)$. No, to je u kontradikciji s **IL**–konzistentnošću skupa $\nu(z)$. □

Definicija 2.3.14. *Neka je $\mathcal{D} \subseteq Form_{IL}$ i $\mathfrak{F} = (W, R, S, v)$ **IL**–označeni okvir, $x \in W$, te $C, D \in Form_{IL}$. **$\mathcal{D}$–problem** je par $(x, \neg(C \rhd D))$ takav da vrijedi:*

- $\neg(C \rhd D) \in v(x) \cap \mathcal{D}$,
- *ne postoji $y \in C_x^D$ takav da vrijedi $C \in v(y)$.*

Dakle, ukoliko na adekvatnom označenom okviru nemamo $\mathcal{D}$–problema u novom smislu, tada ih prema lemi 2.3.13 nemamo ni u starom. Stoga i dalje vrijedi lema o istinitosti ako nema problema niti nedostataka. Iz tog razloga, i zato što će se pokazati da je u dokazima lakše rukovati novom definicijom, nadalje ćemo tu definiciju koristiti umjesto stare definicije.

Sada znamo kako ćemo ukloniti neki problem ili nedostatak danog **IL**–okvira. Tako ćemo doći do novog **IL**–okvira (doduše uz još neke potrebne leme koje ćemo dokazati) koji više nema taj problem ili nedostatak. Kao što smo uklonili jedan problem ili nedostatak, uklonit ćemo i ostale. Tako ćemo svaki puta doći do novog **IL**–okvira. Konačno, traženi **IL**–okvir bit će unija svih dobivenih **IL**–okvira, koji čine tzv. lanac, i to će biti tzv. unija ograničenog lanca. No, da bismo pokazali da je i ta unija **IL**–okvir, pripadna relacija R mora biti inverzno dobro fundirana, što možemo dobiti ako je lanac ograničen. Sada definiramo navedene pojmove i jednom lemom pokazujemo da je tako dobivena unija **IL**–okvir. U ovoj metodi konstrukcije krećemo od jednočlanog **IL**–okvira, a svakim uklanjanjem dodajemo najviše jedan novi svijet. Dakle, imamo posla s konačnim **IL**–okvirima, pa stoga definiramo pojmove na konačnim **IL**–okvirima.

Definicija 2.3.15. *Neka je $\mathfrak{F}$ **IL**–okvir ili **IL**–označeni okvir koji je konačan. **Dubina** od $\mathfrak{F}$, u oznaci dubina$(\mathfrak{F})$, je maksimalna duljina nizova oblika*

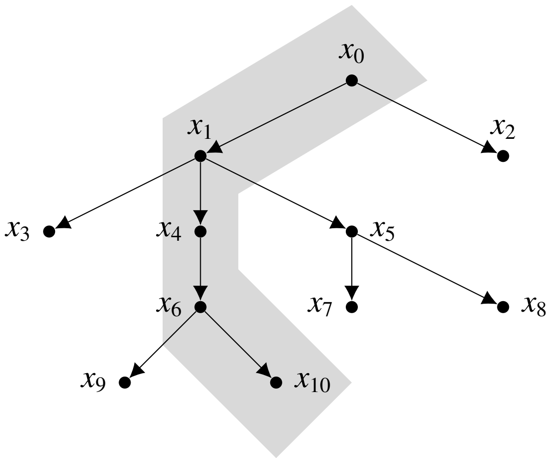
$$x_0 R x_1 R \ldots R x_n,$$

pri čemu je $x_i \in \mathfrak{F}$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Ukoliko takvih nizova nema, kažemo da je dubina od $\mathfrak{F}$ jednaka 0.

Za ilustraciju dana je slika 2.7 koja prikazuje jedan **IL**–okvir čija dubina iznosi 4.

Definicija 2.3.16. *Indeksiranu familiju $\{\mathfrak{F}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ označenih **IL**–okvira nazivamo **lanac** ako za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}_{i+1}$. Za lanac kažemo da je **ograničen** ako postoji prirodan broj n tako da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi dubina$(\mathfrak{F}_i) \leq n$. **Uniju** ograničenog lanca $\{\mathfrak{F}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ označenih okvira $\mathfrak{F}_i$ definiramo ovako:*

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{F}_i := \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i,\ \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R_i,\ \left\{ \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_x^{(i)} : x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i \right\},\ \bigcup_{i \in \mathbb{N}} v_i \right).$$



Slika 2.7: Primjer **IL**–okvira $\mathfrak{F}$ takvog da vrijedi $dubina(\mathfrak{F}) = 4$. Sivom bojom označen je najdulji niz $x_0 R x_1 R x_4 R x_6 R x_{10}$ (primijetimo da nizova duljine 4 ima više).

Lema 2.3.17. *Neka je $\mathfrak{F} = (W, R, S, v)$ unija ograničenog lanca $\{\mathfrak{F}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ označenih okvira $\mathfrak{F}_i$. Tada je $\mathfrak{F}$ **IL**–označeni okvir.*

Dokaz. Koristeći definiciju unije ograničenog lanca dobivamo da je W neprazan skup, R je binarna relacija na W i S je skup binarnih relacija na W, indeksiran elementima iz W. Redom dokazujemo svojstva (1)–(3) iz definicije **IL**–okvira. Svojstva (4)–(6) imaju potpuno analogan dokaz kao i svojstva (2) i (3). Neka su u nastavku $x, y, z \in W$ proizvoljni.

1. R je inverzno dobro fundirana relacija.
   Prema pretpostavci je lanac ograničen. Stoga postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $dubina(\mathfrak{F}_i) \leq n$. Uzmimo neki takav n. Pretpostavimo suprotno, tj. R nije inverzno dobro fundirana. Tada postoji niz $(x_i)_i$ takav da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_i R x_{i+1}$. Promotrimo početni komad tog niza duljine $n+1$, tj. promotrimo konačan niz $x_0 R x_1 R \ldots R x_{n+1}$. Za svaki $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ vrijedi $x_j R x_{j+1}$, pa iz definicije od R postoji $k_j \in \mathbb{N}$ takav da na $\mathfrak{F}_{k_j}$ vrijedi $x_j R_{k_j} x_{j+1}$. Ako definiramo $k = max\{k_0, k_1, \ldots, k_n\}$, koristeći definiciju od R dobivamo konačan niz $x_0 R_k x_1 R_k \ldots R_k x_{n+1}$ na $\mathfrak{F}_k$ koji je duljine $n + 1 > n$. No, to je u kontradikciji s pretpostavkom da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $dubina(\mathfrak{F}_i) \leq n$.

2. Ako xRy i yRz, tada to povlači xRz.
   Iz definicije od R, postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi xR_iy i yR_jz. Ako definiramo $k = max\{i, j\}$, dobivamo xR_ky i yR_kz. No, $\mathfrak{F}_k$ je **IL**–okvir pa vrijedi xR_kz, a onda vrijedi i xRz.

3. Ako yS_xz, tada xRy i xRz.
   Iz yS_xz i definicije od S slijedi da postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $y(S_i)_xz$. S obzirom da je $\mathfrak{F}_i$ **IL**–okvir, vrijedi xR_iy i xR_iz. To povlači xRy i xRz.

□

Već smo opisali kako se eliminira neki $\mathcal{D}$–problem ili $\mathcal{D}$–nedostatak. Primjerice, $\mathcal{D}$–problem $(x, \neg(C \rhd D))$ smo uklonili uvođenjem novog svijeta y takvog da vrijedi $C \in \nu(y)$ i $\neg D \in \nu(y)$. Postavlja se pitanje postoji li uopće takav maksimalno konzistentan skup $\nu(y)$? Također, ne bismo htjeli da uvođenjem takvog svijeta y ponovo dobivamo neke $\mathcal{D}$–probleme koje smo već uklonili. Sada za ispunjenje tih želja, kao u slučaju **GL**, iskazujemo leme o egzistenciji za **IL**. One nam daju postojanje traženih **IL**–MCS, tj. kažu da postoji traženo, dovoljno dobro označavanje ν. Sljedeća lema 2.3.18 se primjenjuje u slučaju eliminiranja $\mathcal{D}$–problema, a lema iza nje se odnosi na slučaj eliminiranja $\mathcal{D}$–nedostataka.

Lema 2.3.18 (Lema o egzistenciji za **IL**)**.** *Neka su C i D proizvoljne formule. Neka je Γ **IL**–MCS takav da $\neg(C \rhd D) \in \Gamma$. Tada postoji **IL**–MCS Δ tako da vrijedi $\Gamma \prec_D \Delta$ i $C, \Box\neg C \in \Delta$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da ne postoji **IL**-MCS Δ tako da vrijedi $\Gamma \prec_D \Delta$ i $C, \Box\neg C \in \Delta$.

Definirajmo skup formula $\mathcal{S}$ ovako:

$$\mathcal{S} = \{\neg E, \Box\neg E : E \rhd D \in \Gamma\} \cup \{C, \Box\neg C\}.$$

Sada mogu nastupiti dva slučaja:

a) Skup $\mathcal{S}$ **IL**–konzistentan. Tada prema Lindenbaumovoj lemi postoji **IL**–MCS Δ takav da vrijedi $\mathcal{S} \subseteq \Delta$. Primijetimo da ako za neke formule E i D vrijedi $E \rhd D \in \Gamma$, tada prema definiciji od $\mathcal{S}$ vrijedi $\neg E, \Box\neg E \in \mathcal{S}$. Tada zbog $\mathcal{S} \subseteq \Delta$ vrijedi i $\neg E, \Box\neg E \in \Delta$. Dakle, vrijedi $\Gamma \prec_D \Delta$. Također, zbog $\mathcal{S} \subseteq \Delta$, vrijedi $C, \Box\neg C \in \Delta$. Time smo dobili kontradikciju s tvrdnjom da upravo dobiveni Δ ne postoji.

b) Skup $\mathcal{S}$ je **IL**–inkonzistentan. To znači da vrijedi $\mathcal{S} \vdash_{IL} \bot$. Tada je $\bot$ izvediv iz konačnog podskupa od $\mathcal{S}$ (jer **IL**–izvodi su konačni). S obzirom da je nadskup **IL**–inkonzistentnog skupa je **IL**–inkonzistentan, taj skup možemo tako nadopuniti formulama iz $\mathcal{S}$ da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\neg E_1, \ldots, \neg E_n, \Box\neg E_1, \ldots, \Box\neg E_n, C, \Box\neg C \vdash_{IL} \bot .$$

Definirajmo formulu E kao $E_1 \vee \cdots \vee E_n$. Prvo primijetimo da je $\neg E$ ekvivalentno $\neg E_1 \wedge \ldots \wedge \neg E_n$ (za dvije formule F_1 i F_2 kažemo da su **ekvivalentne** ako vrijedi $\vdash_{IL} F_1 \leftrightarrow$

F_2). Zatim primijetimo da je prema tvrdnji 3. leme 1.4.5. formula $\Box\neg E_1$ ekvivalentna formuli $E_1 \rhd \bot$, a formula $\Box\neg E_2$ je ekvivalentna formuli $E_2 \rhd \bot$. Primjenom aksioma (J3) iz tih formula slijedi $(E_1 \vee E_2) \rhd \bot$, što je pak ekvivalentno (koristeći ponovno tvrdnju 3. leme 1.4.5) formuli $\Box\neg(E_1 \vee E_2)$. Indukcijom po n dobivamo da iz $\Box\neg E_1 \wedge \cdots \wedge \Box\neg E_n$ slijedi $\Box\neg E$. Također, iz $E_1 \rhd D$ i $E_2 \rhd D$, primjenom aksioma (J3) slijedi $E_1 \vee E_2 \rhd D$, a onda indukcijom po n, iz $E_1 \rhd D, \ldots, E_n \rhd D \in \Gamma$ dobivamo $E \rhd D \in \Gamma$.

Dakle, pronašli smo formulu E, za koju je $E \rhd D \in \Gamma$, te takvu da vrijedi:

$$\neg E, \Box\neg E, C, \Box\neg C \vdash_{IL} \bot \ .$$

Ako dva puta primijenimo teorem dedukcije, prvo dobivamo $\neg E, C, \Box\neg C \vdash_{IL} \Box\neg E \to \bot$, a onda dobivamo i $C, \Box\neg C \vdash_{IL} \neg E \to (\Box\neg E \to \bot)$. Prisjetimo se da su formule $\neg D$, $\Diamond D$ i $D \vee F$ redom pokrate za formule $D \to \bot$, $\neg\Box\neg D$, te $\neg D \to F$. Tada formulu $\neg E \to (\Box\neg E \to \bot)$ zapravo možemo korištenjem tih pokrata zapisati u obliku $E \vee \Diamond E$. Stoga ponovnom primjenom teorema dedukcije iz $C \wedge \Box\neg C \vdash_{IL} E \vee \Diamond E$ dobivamo da vrijedi $\vdash_{IL} C \wedge \Box\neg C \to E \vee \Diamond E$. Sljedećim nizom formula dajemo jedan **IL**–dokaz formule $C \rhd E$.

1.	$C \wedge \Box\neg C \to E \vee \Diamond E$	(**IL**–teorem)
2.	$\Box(C \wedge \Box\neg C \to E \vee \Diamond E)$	(nužnost: 1)
3.	$\Box(C \wedge \Box\neg C \to E \vee \Diamond E)$ $\to C \wedge \Box\neg C \rhd E \vee \Diamond E$	(J1)
4.	$C \wedge \Box\neg C \rhd E \vee \Diamond E$	(mod pon: 2, 3)
5.	$C \rhd C \wedge \Box\neg C$	(**IL**–teorem: lema 1.4.5, 2.)
6.	$(C \rhd C \wedge \Box\neg C) \wedge (C \wedge \Box\neg C \rhd E \vee \Diamond E)$ $\to C \rhd E \vee \Diamond E$	(J2)
7.	$C \rhd E \vee \Diamond E$	(mod pon*: 5, 4, 6)
8.	$E \vee \Diamond E \rhd E$	(**IL**–teorem: lema 1.4.5, 1.)
9.	$(C \rhd E \vee \Diamond E) \wedge (E \vee \Diamond E \rhd E) \to C \rhd E$	(J2)
10.	$C \rhd E$	(mod pon*: 7, 8, 9)

Dakle, $C \rhd E$ je **IL**–teorem. Jer je Γ **IL**–MCS, vrijedi $\Gamma \vdash_{IL} E \rhd D$, pa iz $\Gamma \vdash_{IL} C \rhd E$ korištenjem aksioma (J2), tj. $(C \rhd E) \wedge (E \rhd D) \to C \rhd D$ primjenom pravila mod pon* dobivamo $\Gamma \vdash_{IL} C \rhd D$. No, tada vrijedi $C \rhd D \in \Gamma$, što je uz $\neg(C \rhd D) \in \Gamma$ u kontradikciji s **IL**–konzistentnošću skupa Γ.

S obzirom da smo u oba slučaja a) i b) došli do kontradikcije, zaključujemo da je početna pretpostavka bila pogrešna. Dakle, postoji **IL**-MCS Δ tako da vrijedi $\Gamma \prec_D \Delta$ i $C, \Box\neg C \in \Delta$. $\Box$

Lema 2.3.19. *Neka su $B, C, D \in Form_{IL}$. Neka su Γ i Δ **IL**–MCS takvi da vrijedi $C \rhd D \in \Gamma$, $\Gamma \prec_B \Delta$ i $C \in \Delta$. Tada postoji **IL**–MCS Δ' tako da vrijedi $\Gamma \prec_B \Delta'$ i $D, \Box\neg D \in \Delta'$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da ne postoji **IL**–MCS Δ' s traženim svojstvom. Tada obratom po kontrapoziciji tvrdnje leme 2.3.18. vrijedi $\neg(D \rhd B) \notin \Gamma$. Iz pretpostavke da je Γ **IL**–MCS slijedi $D \rhd B \in \Gamma$. Sada iz $C \rhd D \in \Gamma$, $D \rhd B \in \Gamma$ i $(C \rhd D) \wedge (D \rhd B) \to (C \rhd B) \in \Gamma$ (instanca sheme aksioma (J2)), primjenom pravila mod pon* dobivamo $C \rhd B \in \Gamma$. Dakle, vrijedi $C \rhd B \in \Gamma$ i $\Gamma \prec_B \Delta$, pa vrijedi i $\neg C \in \Delta$, što je zbog pretpostavke $C \in \Delta$ u kontradikciji s konzistentnošću skupa Δ. □

2.4 Potpunost IL

U ovoj točki ističemo potrebne definicije i dokazujemo potrebne leme da bismo zatim dokazali potpunost **IL**.

U prošlim točkama vidjeli smo kako eliminirati probleme i nedostatke. Jedna poteškoća je u tome da samom eliminacijom nećemo dobiti **IL**–okvir. Tek će lema o **IL**–proširenju reći da postoji proširenje koje doista jest **IL**–okvir. Ono što ćemo dobiti samom eliminacijom će ipak imati neka svojstva koja smo već tražili u definiciji **IL**–okvira (to su svojstva 1. i 2. sljedeće definicije), te sva tri svojstva iz definicije adekvatnog okvira (to su svojstva 3.–5. sljedeće definicije). Pokazat će se (lemom o **IL**–proširenju) da su ta svojstva dovoljna da bismo doista mogli dobiti proširenje koje jest **IL**–okvir.

Definicija 2.4.1. ***Kvazi–okvir*** $\mathfrak{G}$ *je četvorka* (W, R, S, ν)*, gdje je* W *neprazan skup svjetova,* R *binarna relacija na* W*,* $S = \{S_w : w \in W,\ S_w \subseteq W \times W\}$*, te* ν *funkcija označavanja, pri čemu vrijedi sljedeće:*

1. *R je inverzno dobro fundirana,*
2. *za sve $x, y, z \in W$, ako yS_xz tada xRy i xRz,*
3. *za sve $x, y \in W$, ako xRy tada $\nu(x) \prec \nu(y)$,*
4. *ako su C i D dvije različite formule, tada za svaki $x \in W$ vrijedi $\mathcal{G}^C_x \cap \mathcal{G}^D_x = \emptyset$,*
5. *za sve formule C i $x, y \in W$, ako $y \in \mathcal{C}^C_x$ tada $\nu(x) \prec_C \nu(y)$.*

Napomena 2.4.2. *Neka je* $\mathfrak{G} = (W, R, S, \nu)$ *kvazi–okvir. Primijetimo da je tada, prema definiciji kvazi–okvira,* R *inverzno dobro fundirana, te za sve* $x, y, z \in W$ *vrijedi da* yS_xz *povlači* xRy *i* xRz*. Međutim, da bi* $\mathfrak{G}$ *bio i* ***IL****–okvir tada bi redom trebalo vrijediti i sljedeće:*

(i) *za sve $x, y, z \in W$ takve da xRy i yRz vrijedi xRz,*

(ii) *za sve $x, y \in W$ takve da xRy vrijedi yS_xy,* *(iii)* *za sve* $u, v, w, x \in W$ *takve da* $uS_x vS_x w$ *vrijedi* $uS_x w$,

(iv) *za sve* $x, y, z \in W$ *takve da* xRy *i* yRz *vrijedi* $yS_x z$.

Primjerice, ako postoje neki $x, y \in W$ *takvi da vrijedi* xRy*, ali ne i* $yS_x y$*, tada očito ne vrijedi (ii). Zato moramo osigurati da u proširenju ovog kvazi–okvira vrijedi* $yS'_x y$*. Za svaku tvrdnju (i)–(iv) definiramo pripadne tzv. nesavršenosti, koje ćemo potom uklanjati. Naravno, kasnije se još preostaje uvjeriti da je dobiven označen* ***IL****–okvir, te da je on ujedno i adekvatan.*

Prije iskaza leme o **IL**–proširenju, definirat ćemo nesavršenosti.

Definicija 2.4.3. *Neka je* $\mathfrak{F} = (W^{\mathfrak{F}}, R^{\mathfrak{F}}, S^{\mathfrak{F}}, v^{\mathfrak{F}})$ *neki kvazi–okvir, te* $a, b, c, d \in W$ *proizvoljni svjetovi. Kažemo da je konačan niz* γ ***nesavršenost*** *kvazi–okvira* $\mathfrak{F}$ *ako je* γ *u jednom od sljedećih oblika:*

(i) $\gamma = (0, a, b, c)$ *pri čemu vrijedi* $aR^{\mathfrak{F}} bR^{\mathfrak{F}} c$*, ali ne vrijedi* $aR^{\mathfrak{F}} c$,

(ii) $\gamma = (1, a, b)$ *pri čemu vrijedi* $aR^{\mathfrak{F}} b$*, ali ne vrijedi* $bS^{\mathfrak{F}}_a b$,

(iii) $\gamma = (2, a, b, c, d)$ *pri čemu vrijedi* $bS^{\mathfrak{F}}_a cS^{\mathfrak{F}}_a d$*, ali ne vrijedi* $bS^{\mathfrak{F}}_a d$,

(iv) $\gamma = (3, a, b, c)$ *pri čemu vrijedi* $aR^{\mathfrak{F}} bR^{\mathfrak{F}} c$*, ali ne vrijedi* $bS^{\mathfrak{F}}_a c$.

Sada formalno iskazujemo lemu o **IL**–proširenju. S obzirom da ćemo u dokazu potpunosti **IL** koristiti kvazi–okvire koji su konačni ili prebrojivi, lemu o **IL**–proširenju iskazujemo samo za takve kvazi–okvire.

Lema 2.4.4 (IL–proširenje)**.** *Neka je* $\mathfrak{G} = (W, R, S, v)$ *konačan ili prebrojiv kvazi–okvir. Tada postoji adekvatan* ***IL****–okvir* $\mathfrak{F} = (W, R', S', v)$ *koji proširuje* $\mathfrak{G}$*, tj. vrijedi* $R \subseteq R'$ *i* $S \subseteq S'$.

Dokaz ove leme slijedit će iz niza propozicija koje slijede.

Neka je $\mathfrak{G} = (W, R, S, v)$ konačan ili prebrojiv kvazi–okvir. Definirat ćemo lanac kvazi–okvira, pri čemu će svaki novi element tog lanca imati barem jednu nesavršenost manje od svog prethodnika u lancu. Pokazat ćemo da unija tog lanca uopće neće imati nesavršenosti, te će to biti traženi adekvatan **IL**–okvir.

Neka je

$$C^{\mathfrak{G}} := (\{0\} \times W^3) \cup (\{1\} \times W^2) \cup (\{2\} \times W^4) \cup (\{3\} \times W^3).$$

Ukoliko kvazi–okvir $\mathfrak{G}$ ima neku nesavršenost γ, tada vrijedi $\gamma \in C^{\mathfrak{G}}$. S obzirom da je skup W konačan ili prebrojiv, tada su i skupovi W^2, W^3 i W^4 konačni ili prebrojivi, pa je i skup C

konačan ili prebrojiv. Sada možemo poredati sve elemente iz $C^{\mathfrak{G}}$ (pa onda i nesavršenosti od $\mathfrak{G}$) u niz $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ Neka su γ' i γ'' dvije nesavršenosti kvazi–okvira $\mathfrak{G}$. Tada oni imaju pripadne indekse i, odnosno j, u gornjem nizu. Na taj način definiramo jedan totalni uređaj na nesavršenostima, pri čemu je $\gamma_i < \gamma_j$ ako i samo ako vrijedi $i < j$. Dakle, za dani kvazi–okvir ima smisla govoriti o minimalnoj nesavršenosti na tom kvazi–okviru.

Kako bismo definirali naš lanac rekurzivno, prvo definiramo $\mathfrak{F}_0 := \mathfrak{G}$. Preostaje pokazati kako za dani $n \in \mathbb{N}$ i element lanca $\mathfrak{F}_n$ dobiti $\mathfrak{F}_{n+1}$. Neka je γ minimalna nesavršenost kvazi–okvira $\mathfrak{F}_n$.

- Ukoliko takva γ ne postoji, definiramo $\mathfrak{F}_{n+1} := \mathfrak{F}_n$.
- Ukoliko takva γ postoji, u ovisnosti o obliku nesavršenosti γ (i)–(iv), $\mathfrak{F}_{n+1}$ definiramo ovako:

  (i) $\mathfrak{F}_{n+1} := (W_n, R_n \cup \{(a, c)\}, S_n, v_n)$

  (ii) $\mathfrak{F}_{n+1} := (W_n, R_n, S_n \cup \{(a, b, b)\}, v_n)$

  (iii) $\mathfrak{F}_{n+1} := (W_n, R_n, S_n \cup \{(a, b, d)\}, v_n)$

  (iv) $\mathfrak{F}_{n+1} := (W_n, R_n \cup \{(a, c)\}, S_n \cup \{(a, b, c)\}, v_n)$

  Za proizvoljne $n \in \mathbb{N}$ i $a, b, c \in W_n$, $(a, b, c) \in S_n$ znači da na $\mathfrak{F}_n$ vrijedi bS_ac (pri čemu $S_a \in S_n$).

Želimo pokazati da je tako dobiveni $\mathfrak{F}_{n+1}$ jedan kvazi–okvir. U tu svrhu indukcijom dokazujemo da je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}_n$ kvazi–okvir. U koraku indukcije koristit ćemo tvrdnju da su pri prijelazu s $\mathfrak{F}_n$ na $\mathfrak{F}_{n+1}$ kritični i generalizirani konusi ostali nepromijenjeni. U svrhu dokazivanja te tvrdnje, definiramo još jedan pojam.

Definicija 2.4.5. *Neka je (W, R, S, v) kvazi–okvir, $x, y \in W$ proizvoljni svjetovi i C proizvoljna formula. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq W$. Kažemo da je konačan niz $x_0, x_1, \ldots, x_n$ **C–kritičan nad** x **za** y ako vrijedi:*

1. *$x_n = y$*
2. *$v(x, x_0) = C$*
3. *za svaki $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ vrijedi x_iRx_{i+1} ili $x_iS_xx_{i+1}$.*

Pritom $n \in \mathbb{N}$ nazivamo duljinom tog niza.

Primijetimo ovdje da vrijedi sljedeća tvrdnja: $y \in C_x^C$ ako i samo ako postoji C–kritičan niz nad x za y.

Propozicija 2.4.6. *Neka je $\mathfrak{F}_k$ kvazi–okvir, te $\mathfrak{F}_{k+1}$ definiran na prije opisan način. Neka su W_k i W_{k+1} pripadni skupovi svjetova. Za proizvoljan svijet $y \in W_k$ i proizvoljnu formulu C vrijede sljedeće tvrdnje:*

(a) Na $\mathfrak{F}_{k+1}$ vrijedi $y \in \mathcal{G}'^C_x$ ako i samo ako na $\mathfrak{F}_k$ vrijedi $y \in \mathcal{G}^C_x$.

(b) Na $\mathfrak{F}_{k+1}$ vrijedi $y \in C'^C_x$ ako i samo ako na $\mathfrak{F}_k$ vrijedi $y \in C^C_x$.

Dokaz. Dokazujemo samo tvrdnju (b). Tvrdnja (a) se dokazuje analogno.

Neka su svijet $x \in W_k$ i formula C proizvoljni. Neka je C^C_x neki C–kritičan konus nad x za $\mathfrak{F}_k$, a C'^C_x neki C–kritičan konus nad x za $\mathfrak{F}_{k+1}$. Tada $C^C_x = C'^C_x$.

- Prvo pokazujemo $C^C_x \subseteq C'^C_x$. Neka je $y \in W_k$ proizvoljan svijet takav da vrijedi $y \in C^C_x$. Indukcijom po duljini C–kritičnog niza nad x za y, koju označavamo s n, pokazujemo da vrijedi $y \in C'^C_x$.

  Ako je $n = 0$, tada vrijedi $\nu_k(x, y) = C$, pa iz $\nu_k = \nu_{k+1}$ slijedi $\nu_{k+1}(x, y) = C$. No, tada vrijedi $y \in C'^C_x$. Pretpostavimo da postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da tvrdnja vrijedi za sve $n < m$. Pokazujemo tvrdnju za $n = m$. Neka je $x_0 x_1 \ldots x_m$ jedan C–kritičan niz nad x za y. Tada je prema pretpostavci indukcije, $x_{m-1} \in C'^C_x$. Također vrijedi barem jedno od sljedećeg: $x_{m-1} R_k y$ ili $x_{m-1} (S_k)_x y$.

  Jer vrijedi $S_k \subseteq S_{k+1}$ i $R_k \subseteq R_{k+1}$, preostaje samo promotriti specijalne slučajeve (primjerice one iz $R_{k+1} \setminus R_k$), no lako je vidjeti da tada tvrdnja slijedi izravno iz definicija (i)–(iv) kvazi–okvira $\mathfrak{F}_{k+1}$.

- Sada pokazujemo $C'^C_x \subseteq C^C_x$. U tu svrhu za proizvoljan $y \in W_{k+1}$ takav da vrijedi $y \in C'^C_x$, indukcijom po duljini C'–kritičnog niza nad x za y, koju označavamo sa n, pokazujemo da vrijedi $y \in C^C_x$. Ako je $n = 0$, tada vrijedi $\nu_{k+1}(x, y) = C$, pa iz $\nu_{k+1} = \nu_k$ slijedi $\nu_k(x, y) = C$. No, tada vrijedi $y \in C^C_x$. Pretpostavimo da postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da tvrdnja vrijedi za sve $n < m$. Neka je sada $x_0 x_1 \ldots x_m$ jedan C'–kritičan niz nad x za y. Prema pretpostavci indukcije vrijedi $x_{m-1} \in C^C_x$. Razmatramo sljedeće slučajeve:

  1. Vrijedi $x_{m-1} R_{k+1} y$. U slučajevima (ii) i (iii) vrijedi $R_k = R_{k+1}$ pa vrijedi i tvrdnja. U slučajevima (i) i (iv) iz definicije kvazi–okvira $\mathfrak{F}_{k+1}$ vrijedi $R_{k+1} = R_k \cup \{(a, c)\}$. Ako je $(x_{m-1}, y) \in R_k$ tada smo gotovi. Inače, vrijedi $x_{m-1} = a$ i $y = c$. No, za slučajeve (i) i (iv) iz definicije kvazi–okvira $\mathfrak{F}_{k+1}$ vrijedi $aRbRc$, pa onda zbog pretpostavke da je $\mathfrak{F}_k$ kvazi–okvir, $aR_k b$ povlači $b \in C^C_x$. Tada zbog $bR_k c$ vrijedi $y = c \in C^C_x$.

2. Vrijedi $x_{m-1}(S_{k+1})_x y$. U slučaju (i) iz definicije kvazi–okvira $\mathfrak{F}_{k+1}$ tvrdnja vrijedi jer vrijedi $S_{k+1} = S_k$. U slučaju (ii) iz definicije kvazi–okvira $\mathfrak{F}_{k+1}$ vrijedi $S_{k+1} = S_k \cup \{(a, b, b)\}$. Ako je $x_{m-1} = y = b$, tada $bS_a b$ povlači $y \in C_x^C$ jer vrijedi $x_{m-1} \in C_x^C$. U slučaju (iii) iz definicije kvazi–okvira $\mathfrak{F}_{k+1}$, slično promatramo specijalan slučaj $bS_a d$. No, u tom slučaju vrijedi $bS_a cS_a d$. Sada $bS_a c$ povlači $c \in C_x^C$, a onda slijedi i $y = d \in C_x^C$. Slično, u slučaju (iv) iz definicije kvazi–okvira $\mathfrak{F}_{k+1}$, imamo $bS_a c$ i $aR_k bR_k d$, što redom povlači $b \in C_x^C$ i $y = c \in C_x^C$.

□

Sada možemo dokazati sljedeću propoziciju korištenjem prethodne propozicije.

Propozicija 2.4.7. *Ako je $\mathfrak{F}$–kvazi okvir, tada je za svaki $n \in \mathbb{N}$ $\mathfrak{F}_n$ kvazi–okvir.*

Dokaz. Indukcijom pokazujemo da je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}_n$ kvazi–okvir. Neka je $n = 0$. S obzirom da smo definirali $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{G}$, a $\mathfrak{G}$ je prema pretpostavci kvazi–okvir, tada je i $\mathfrak{F}_0$ kvazi–okvir. Pretpostavimo da je za neki $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}_k$ kvazi–okvir.

Sada pokazujemo da je $\mathfrak{F}_{k+1}$ kvazi–okvir, tj. provjeravamo vrijede li svojstva iz definicije kvazi–okvira. Bez obzira na slučaj (i)–(iv) kojim smo definirali $\mathfrak{F}_{k+1}$, jer je prema pretpostavci indukcije $\mathfrak{F}_k$ kvazi–okvir tada je i $W_{k+1} = W_k$ neprazan skup svjetova, $v_{k+1} = v_k$ funkcija označavanja, R_{k+1} binarna relacija na W_{k+1} i S_{k+1} skup binarnih relacija na W_{k+1} indeksiran elementima iz W_{k+1}. Provjeravamo redom svojstva iz definicije kvazi–okvira:

(1.) R_{k+1} je inverzno dobro fundirana.

- Za slučajeve (ii) i (iii) (tj. kako samo definirali $\mathfrak{F}_{k+1}$ iz $\mathfrak{F}_k$) vrijedi $R_{k+1} = R_k$. Dakle, R_{k+1} jest inverzno dobro fundirana jer je prema pretpostavci indukcije $\mathfrak{F}_k$ kvazi–okvir (pa je R_k inverzno dobro fundirana).
- Za slučajeve (i) i (iv) vrijedi $R_{k+1} = R_k \cup \{(a, c)\}$. Pretpostavimo suprotno, tj. da R_{k+1} nije inverzno dobro fundirana. Tada postoji niz $(x_i)_i$ takav za za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_i R_{k+1} x_{i+1}$. Promotrimo sljedeće slučajeve:
  a) Postoji najviše konačno (moguće 0) mnogo indeksa $i \in \mathbb{N}$ takvih da vrijedi $x_i = a$ i $x_{i+1} = c$. Tada možemo definirati $j \in \mathbb{N}$ kao najveći takav indeks (ukoliko takvih nema, definiramo $j = 0$). No, tada je $(x_i)_{i>j}$ niz za koji zapravo, za svaki $l \in \mathbb{N}$, $l > j$ vrijedi $x_l R_k x_{l+1}$, pa R_k nije inverzno dobro fundirana, što je u kontradikciji s pretpostavkom indukcije.
  b) Postoji prebrojivo mnogo indeksa $i \in \mathbb{N}$ takvih da vrijedi $x_i = a$ i $x_{i+1} = c$. Uzmimo dva indeksa i i $j \in \mathbb{N}$, takva da vrijedi $x_i = a$, $x_{i+1} = c$, $x_j = a$ i $x_{j+1} = c$, te takva da ne postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $i + 1 < l < j$ i $x_l = a$.

Tada dobivamo konačan niz $x_{i+1}R_{k+1}\dots R_{k+1}x_j$ takav da vrijedi $cR_k\dots R_ka$. No, u slučajevima (i) i (iv) vrijedi aR_kbR_kc, pa sada beskonačan niz

$$cR_k\dots R_kaR_kbR_kcR_k\dots R_kaR_kbR_kcR_k\dots R_kaR_kbR_kc\dots$$

povlači da R_k nije inverzno dobro fundirana, što je u kontradikciji s pretpostavkom indukcije.

Dakle, R_{k+1} je inverzno dobro fundirana.

(2.) Ako za neke $x, y, z \in W_{k+1}$ vrijedi yS_xz, tada vrijedi $xR_{k+1}y$ i $xR_{k+1}z$.

- Za slučaj (i), tvrdnja slijedi iz pretpostavke indukcije jer vrijedi $S_{k+1} = S_k$.

U preostalim slučajevima (ii)–(iv), prema definiciji od S_{k+1}, dovoljno je samo provjeriti tvrdnju za one $a, b, c \in W_{k+1}$ za koje vrijedi $(a, b, c) \in S_{k+1} \setminus S_k$.

- Za slučaj (ii), vrijedi bS_ab i aR_kb.
- Za slučaj (iii), vrijedi bS_ad i bS_acS_ad, što povlači (jer je $\mathfrak{F}_k$ kvazi–okvir prema pretpostavci indukcije) aR_kb i aR_kd, a onda i $aR_{k+1}b$ i $aR_{k+1}d$ (s obzirom da vrijedi $R_{k+1} = R_k$).
- Za slučaj (iv), vrijedi bS_ac, $aR_{k+1}b$ (jer vrijedi aR_kbR_kc) i $aR_{k+1}c$ (jer vrijedi $R_{k+1} = R_k \cup \{(a, c)\}$).

(3.) Za sve $x, y \in W_{k+1}$ činjenica $xR_{k+1}y$ povlači $\nu_{k+1}(x) \prec \nu_{k+1}(y)$.

- Za slučajeve (ii) i (iii) vrijedi $R_{k+1} = R_k$ i $\nu_{k+1} = \nu_k$, pa tvrdnja vrijedi jer je prema pretpostavci indukcije $\mathfrak{F}_k$ kvazi–okvir.
- Za slučajeve (i) i (iv) vrijedi $R_{k+1} = R_k \cup \{(a, c)\}$ i $\nu_{k+1} = \nu_k$, pa treba vidjeti da $aR_{k+1}c$ povlači $\nu_{k+1}(a) \prec \nu_{k+1}(c)$. No, vrijedi aR_kbR_kc, iz čega slijedi (jer je $\mathfrak{F}_k$ prema pretpostavci indukcije kvazi–okvir) $\nu_k(a) \prec \nu_k(b) \prec \nu_k(c)$. S obzirom da vrijedi $\nu_{k+1} = \nu_k$, dobivamo $\nu_{k+1}(a) \prec \nu_{k+1}(c)$.

Iz definicije kvazi–okvira slijedi da je preostalo još dokazati sljedeće tvrdnje:

(4.) Za sve formule C i D takve da vrijedi $C \neq D$, vrijedi i $\mathcal{G}_x^C \cap \mathcal{G}_x^D = \emptyset$.

(5.) Za proizvoljan $y \in W_{k+1}$ takav da vrijedi $y \in \mathcal{C}_x^C$, vrijedi i $\nu_{k+1} \prec_C \nu_{k+1}(y)$.

Umjesto toga, iz propozicije 2.4.6 slijede jače tvrdnje: kritični i generalizirani konusi su nepromijenjeni pri prijelazu s $\mathfrak{F}_k$ na $\mathfrak{F}_{k+1}$. Tada, jer su, za proizvoljne formule C i D, te svijet $x \in W_k$, $\mathcal{G}_x^C$, $\mathcal{G}_x^D$ i $\mathcal{C}_x^C$ nepromijenjeni, na $\mathfrak{F}_{k+1}$ vrijede tvrdnje (4.) i (5.) jer one, prema pretpostavci indukcije, vrijede i na $\mathfrak{F}_k$. □

Time smo pokazali da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ $\mathfrak{F}_n$ kvazi–okvir. Sada definiramo $\mathfrak{F} := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{F}_i$. Iz sljedeće propozicije će slijediti da je to traženi adekvatan **IL**–okvir koji proširuje $\mathfrak{G}$.

Propozicija 2.4.8. *Neka je $\mathfrak{F} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{F}_i$. Tada je $\mathfrak{F}$ adekvatan **IL**–označeni okvir koji proširuje $\mathfrak{G}$.*

Dokaz. Primijetimo za početak da iz definicije niza $(\mathfrak{F}_n)_n$ vrijedi $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{G}$, te $W = W_i$, za svaki $i \in \mathbb{N}$, pa je W domena od $\mathfrak{F}$. Također, za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $\nu = \nu_i$, $R_i \subseteq R_{i+1}$ i $S_i \subseteq S_{i+1}$, pa zbog $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{G}$ dobivamo da je $\mathfrak{F}$ doista proširenje od $\mathfrak{G}$. Samo još preostaje pokazati da je $\mathfrak{F}$ adekvatan **IL**–okvir. Sljedeće tvrdnje (a)–(f) pokazuju da je $\mathfrak{F} = (W, R, S, \nu)$ **IL**–okvir, dok tvrdnje (g)–(i) pokazuju da je $\mathfrak{F}$ i adekvatan.

(a) $R = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} R_i$ je inverzno dobro fundirana.

- Prvo, indukcijom po $n \in \mathbb{N}$ dokazujemo da za svaki R_n vrijedi: ako su $x, y \in W$ proizvoljni svjetovi takvi da vrijedi xR_ny, tada postoji $k \in \mathbb{N}$ i konačan niz $(x_i)_{i\leq k}$ tako da za svaki $i < k$ vrijedi $x_iR_0x_{i+1}$. Neka je $n = 0$. Neka su $x, y \in W$ proizvoljni svjetovi takvi da vrijedi xR_0y. Tada je xR_0y upravo jedan takav konačan niz. Pretpostavimo da postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da tvrdnja vrijedi za svaki $n < l$.

  U koraku indukcije pokazujemo da tvrdnja vrijedi za $n = l$. Neka su $x, y \in \mathbb{N}$ proizvoljni svjetovi takvi da vrijedi xR_ly. Prema definiciji, vrijedi $R_l = R_{l-1}$ ili $R_l = R_{l-1} \cup \{(a, c)\}$. U slučaju $R_l = R_{l-1}$ gotovi smo prema pretpostavci indukcije. Preostaje vidjeti slučaj kada $x = a$ i $y = c$, tj. kada imamo aR_lc. No, tada prema definiciji našeg lanca $(\mathfrak{F}_i)_i$ postoji $b \in W$ takav da vrijedi $aR_{l-1}bR_{l-1}c$. Sada, uz korištenje pretpostavke indukcije, dobivamo konačan niz $aR_0 \dots R_0bR_0 \dots R_0c$ koji je upravo naš traženi niz.

- Dokažimo sada da je R inverzno dobro fundirana. U tu svrhu pretpostavimo suprotno, tj. da R nije inverzno dobro fundirana na $\mathfrak{F}$. Tada postoji beskonačan niz $(x_n)_n$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi x_nRx_{n+1}. Iz $R = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} R_i$ slijedi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $k_n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $x_nR_{k_n}x_{n+1}$. Tako dobivamo niz

  $$x_0R_{k_0}x_1R_{k_1}x_2 \dots x_nR_{k_n}x_{n+1} \dots$$

  No, pokazali smo da za svaki R_i, te proizvoljne svjetove x i y postoji $k \in \mathbb{N}$ i konačan niz $(x'_i)_{i\leq k}$ tako da vrijedi $x'_iR_0x'_{i+1}$. Sada specijalno iz činjenice $x_0R_{k_0}x_1$ slijedi da postoji konačan niz $x_0R_0 \dots R_0x_1$. Također, iz činjenice $x_1R_{k_1}x_2$ slijedi da postoji niz $x_1R_0 \dots R_0x_2$. Ponavljajući ovakvo zaključivanje, dobivamo beskonačan niz

  $$x_0R_0 \dots R_0x_1R_0 \dots R_0x_2R_0 \dots R_0x_3 \dots$$

što povlači da R_0 nije inverzno dobro fundirana. No, to je u kontradikciji sa pretpostavkom da je $\mathfrak{G}$ kvazi–okvir. Dakle, R je inverzno dobro fundirana.

(b) Za sve $x, y, z \in W$, takve da $xRyRz$ imamo xRz.
Neka su $x, y, z \in W$ proizvoljni svjetovi takvi da vrijedi $xRyRz$. S obzirom da je $R = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R_i$, tada postoje $j, k \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi xR_jy i yR_kz. Definirajmo $p := max\{j, k\}$. Tada, prema definiciji niza $(\mathfrak{F}_n)_n$ vrijedi $R_j \subseteq R_p$ i $R_l \subseteq R_p$, pa onda vrijedi xR_pyR_pz. Ukoliko vrijedi xR_pz onda smo gotovi. Inače, ukoliko ne vrijedi xR_pz, a vrijedi xR_pyR_pz, tada je $(0, x, y, z)$ upravo jedna nesavršenost na kvazi–okviru $\mathfrak{F}_p$. Ako pokažemo da smo tu nesavršenost eliminirali, tada postoji $v \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi xR_vz. Dakle, vrijedi xRz.

Preostaje argumentirati tvrdnju da smo tu nesavršenost eliminirali. U ostatku dokaza više nećemo eksplicitno ponavljati ovaj argument. Pretpostavimo suprotno, tj. da je to nesavršenost koja nikad nije eliminirana. Jer je $W_i = W$, za sve $i \in \mathbb{N}$, skup C u kojem se nalaze sve nesavršenosti je isti za sve kvazi–okvire u lancu $(\mathfrak{F}_i)_i$. Neka je $j \in \mathbb{N}$ indeks koji naša nesavršenost ima u nizu svih elemenata iz C. Ako ona nikad nije uklonjena, tada ona zapravo nikad nije bila minimalna nesavršenost na nekom kvazi–okviru. No, tada smo uvijek uklanjali nesavršenosti s indeksom manjim od j. To zapravo znači da smo neku nesavršenost uklanjali beskonačno mnogo puta, što je zbog $R_n \subseteq R_m$ i $S_n \subseteq S_m$, za sve $n, m \in \mathbb{N}$ takve da je $n < m$, nemoguće (ili drugim riječima, jednom eliminirana nesavršenost se ne može više pojaviti).

(c) Za sve $x, y, z \in W$, takve da yS_xz (mislimo na $S_x \in S$) imamo xRy i xRz.
Neka su $x, y, z \in W$ proizvoljni svjetovi takvi da vrijedi yS_xz. Tada, jer je $R = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R_i$, postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da na kvazi–okviru $\mathfrak{F}_j$ vrijedi yS_xz. Jer je za svaki $i \in \mathbb{N}$ $\mathfrak{F}_i$ kvazi–okvir, posebno je i $\mathfrak{F}_j$ kvazi–okvir, pa prema definiciji kvazi–okvira, činjenica yS_xz povlači xR_jy i xR_jz. Zbog $R_j \subseteq R$ tada vrijedi xRy i xRz.

(d) Za sve $x, y \in W$, takve da xRy imamo yS_xy.
Neka su $x, y \in W$ proizvoljni svjetovi takvi da vrijedi xRy. Tada, zbog $R = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R_i$, postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi xR_jy. Ako na kvazi–okviru $\mathfrak{F}_j$ vrijedi yS_xy, tada smo gotovi. Inače smo dobili nesavršenost $(1, x, y)$ na kvazi–okviru $\mathfrak{F}_j$. No, nesavršenosti smo eliminirali, tj. postoji $z \in \mathbb{N}$ takav da na kvazi–okviru $\mathfrak{F}_z$ vrijedi yS_xy. Jer vrijedi $S_z \in S$, tada yS_xy vrijedi i na $\mathfrak{F}$.

(e) Za sve $x, y, z \in W$, takve da $xRyRz$ imamo yS_xz.
Neka su $x, y, z \in W$ proizvoljni svjetovi takvi da vrijedi $xRyRz$. Tada, zbog $R = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R_i$, postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi xR_iy i yR_jz. Sada za $k := max\{i, j\}$ vrijedi xR_kyR_kz

(jer $k \geq i, j$ pa vrijedi $R_i, R_j \subseteq R_k$). Ako na kvazi–okviru $\mathfrak{F}_k$ vrijedi yS_xz tada smo gotovi. Inače smo dobili nesavršenost $(3, x, y, z)$ na okviru $\mathfrak{F}_k$. No, nesavršenosti smo eliminirali, tj. postoji $p \in \mathbb{N}$ takav da na kvazi–okviru $\mathfrak{F}_p$ vrijedi yS_xz, a tada i na $\mathfrak{F}$ vrijedi yS_xz.

(f) Za sve $u, v, w, x \in W$ takve da uS_xvS_xw imamo uS_xw.
Neka su $u, v, w, x \in W$ proizvoljni svjetovi takvi da vrijedi uS_xvS_xw. Jer je $\mathfrak{F} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{F}_i$, tada postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da na kvazi–okviru $\mathfrak{F}_i$ vrijedi uS_xv, a na kvazi–okviru $\mathfrak{F}_j$ vrijedi vS_xw. No tada, za $k = max\{i, j\}$, na kvazi–okviru $\mathfrak{F}_k$ vrijedi uS_xvS_w. Ako na $\mathfrak{F}_k$ vrijedi uS_xw, tada smo gotovi, a inače dobivamo nesavršenost $(2, x, u, v, w)$. S obzirom da smo nesavršenosti eliminirali tada postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da na kvazi–okviru $\mathfrak{F}_y$ vrijedi uS_xw, a tada i na $\mathfrak{F}$ vrijedi uS_xw.

(g) Za sve $x, y \in W$, takve da xRy imamo $v(x) \prec v(y)$.
Neka su $x, y \in W$ proizvoljni svjetovi. Tada iz xRy i $\mathfrak{F} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{F}_i$ slijedi da postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da na $\mathfrak{F}_i$ vrijedi xR_iy. No, $\mathfrak{F}_i$ je kvazi–okvir pa vrijedi $v_i(x) \prec v_i(y)$. S obzirom da je $v_n = v$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, tada na $\mathfrak{F}_i$ vrijedi $v(x) \prec v(y)$, a tada to vrijedi i na $\mathfrak{F}$.

Preostaje dokazati sljedeće dvije tvrdnje:

(h) Za sve formule C, D takve da je $C \neq D$, na $\mathfrak{F}$ vrijedi $\mathcal{G}_x^C \cap \mathcal{G}_x^D = \emptyset$.

(i) Ako za proizvoljne $x, y \in W$ i proizvoljnu formulu C, na $\mathfrak{F}$ vrijedi $y \in C_x^C$, tada vrijedi i $v(x) \prec_C v(y)$.

Za dokaze te dvije tvrdnje, prvo primijetimo da iz pretpostavke da je $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_0$ kvazi–okvir slijedi:

- za proizvoljne formule C i D, te $x \in W$, $C \neq D$ povlači da na $\mathfrak{F}_0$ vrijedi $\mathcal{G}_x^C \cap \mathcal{G}_x^D = \emptyset$,
- za proizvoljnu formulu C i $x, y \in W$, ako na $\mathfrak{F}_0$ vrijedi $y \in C_x^C$, vrijedi i $v(x) \prec_C v(y)$.

Prema propoziciji 2.4.6, u nizu $(\mathfrak{F}_i)_i$ ne mijenjamo generalizirane i C–kritične konuse. Zato primjerice, ako na $\mathfrak{F}_0$ vrijedi $y \in C_x^A$, tada i na $\mathfrak{F}$ vrijedi $y \in C_x^A$ (i obratno). Sada vrijedi tvrdnja (h) jer za formule $C \neq D$ na $\mathfrak{F}_0$ vrijedi $\mathcal{G}_x^C \cap \mathcal{G}_x^D = \emptyset$, a onda to vrijedi i na $\mathfrak{F}$ (jer su ti konusi ostali nepromijenjeni). Također, vrijedi i tvrdnja (i). Naime, ako je neki svijet y element skupa C_x^C na $\mathfrak{F}$, tada to vrijedi i na $\mathfrak{F}_0$ (jer su konusi ostali nepromijenjeni). No, već smo istaknuli da to povlači $v(x) \prec_C v(y)$. □

Time je dokaz leme o **IL**–proširenju gotov.

Napomena 2.4.9. *$\mathbf{IL}$–okvir $\mathfrak{F}$ iz prethodnog dokaza zapravo je minimalan $\mathbf{IL}$–okvir koji proširuje $\mathfrak{G}$. Ako u nastavku govorimo o $\mathbf{IL}$–proširenju, mislimo upravo na minimalno $\mathbf{IL}$–proširenje.*

Već smo objasnili kako ćemo u dokazu potpunosti **IL** eliminirati probleme i nedostatke. Također smo rekli da tako nećemo nužno dobiti **IL**–okvir, već kvazi–okvir. No, prema lemi o **IL**–proširenju, za taj kvazi–okvir možemo naći adekvatan **IL**–označeni okvir koji ga proširuje. Dakle, uklanjanjem nekog problema ili nedostatka, možemo doći do **IL**–okvira. Jednom kad uvedemo enumeraciju problema i nedostataka, moći ćemo redom eliminirati probleme i nedostatke. Tako će dobiti lanac **IL**–okvira čija će unija biti traženi **IL**–okvir bez problema i nedostataka. No, da bi ta unija bila **IL**–okvir, za početak bi pripadna relacija dostiživosti R trebala biti inverzno dobro fundirana. Pokazuje se da je dovoljno da bi se to postiglo da taj lanac bude ograničen. Međutim, za to trebamo pokazati da elementi tog lanca imaju određeno svojstvo. To svojstvo ističemo u sljedećem korolaru.

Korolar 2.4.10. *Neka je $\mathcal{D}$ konačan skup formula koji je zatvoren na potformule i jednostruke negacije. Neka je $\mathfrak{G} = (W, R, S, v)$ konačan ili prebrojiv kvazi–okvir na kojem, za proizvoljne $x, y \in W$, vrijedi:*

$$\textit{ako } xRy \textit{ tada } \Big((v(y) \setminus v(x)) \cap \{\Box D \mid D \in \mathcal{D}\}\Big) \neq \emptyset. \qquad (\star)$$

Tada $(\star)$ vrijedi i na $\mathbf{IL}$–proširenju $\mathfrak{F}$ od $\mathfrak{G}$.

Dokaz. Neka je $\mathfrak{G}$ kvazi–okvir takav da na njemu vrijedi tvrdnja $(\star)$. Definirajmo **IL**–proširenje za $\mathfrak{G}$, u oznaci $\mathfrak{F}$, kao u dokazu leme 2.4.4. Dakle, $\mathfrak{F} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{F}_i$. Neka su $x, y \in W$ proizvoljni tako da na $\mathfrak{F} = (W, R', S', v)$ vrijedi $xR'y$. S obzirom na to kako je definiran $\mathfrak{F}$, iz $R' = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R_i$ slijedi da postoji $i \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi xR_iy. Preciznije, na kvazi–okviru $\mathfrak{F}_i$ vrijedi xR_iy. Sada je jasno da preostaje pokazati da za svaki $i \in \mathbb{N}$, tvrdnja $(\star)$ vrijedi na kvazi–okviru $\mathfrak{F}_i$ (zbog $v = v_i$, za svaki $i \in \mathbb{N}$ tada $(\star)$ vrijedi i na $\mathfrak{F}$). Tu tvrdnju pokazujemo indukcijom po $i \in \mathbb{N}$.

Za $i = 0$ imamo $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{G}$, a prema pretpostavci na $\mathfrak{G}$ vrijedi $(\star)$ (pa vrijedi i na $\mathfrak{F}_i$). Pretpostavimo da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da tvrdnja $(\star)$ vrijedi na kvazi–okviru $\mathfrak{F}_k$. Pokazujemo da $(\star)$ vrijedi na kvazi–okviru $\mathfrak{F}_{k+1}$. Iz definicije od $\mathfrak{F}_{k+1}$ vrijedi $R_{k+1} = R_k$ ili $R_{k+1} = R_k \cup \{(a, c)\}$, pri čemu tada na $\mathfrak{F}_k$ za neki $b \in W$ vrijedi aR_kbR_kc i ne vrijedi aR_kc.

- U slučaju $R_{k+1} = R_k$, na $\mathfrak{F}_{k+1}$ vrijedi tvrdnja $(\star)$ jer vrijedi i na $\mathfrak{F}_k$ prema pretpostavci indukcije.
- U slučaju $R_{k+1} = R_k \cup \{(a, c)\}$ preostaje pokazati da postoji formula C takva da vrijedi:

$$C \in ((v(c) \setminus v(a)) \cap \{\Box D \mid D \in \mathcal{D}\}).$$

No, vrijedi $aR_k bR_k c$, pa onda vrijedi i $aR_{k+1} bR_{k+1} c$, a s obzirom da je $\mathfrak{F}_k$ kvazi–okvir, vrijedi $\nu(a) \prec \nu(b) \prec \nu(c)$. Također, zbog $aR_k b$ i pretpostavke indukcije, postoji formula C takva da vrijedi:

$$C \in ((\nu(c) \setminus \nu(b)) \cap \{\Box D \mid D \in \mathcal{D}).$$

Dakle, $C \in \nu(c)$, te $C \in \{\Box D \mid D \in \mathcal{D}\}$, što znači da je formula C oblika $\Box B$, za neku formulu $B \in \mathcal{D}$, pa preostaje pokazati da vrijedi $\Box B \notin \nu(a)$. No, vrijedi $C \equiv \Box B \notin \nu(b)$, pa kada bi vrijedilo $C \equiv \Box B \in \nu(a)$, iz $\nu(a) \prec \nu(b)$ bismo dobili $C \equiv \Box B \in \nu(b)$, što je u kontradikciji s početkom ove rečenice. Dakle, vrijedi $C \notin \nu(a)$, tj. $(\star)$ vrijedi na $\mathfrak{F}_{k+1}$.

$\Box$

Sada pokazujemo da ukoliko svaki element lanca ima svojstvo $(\star)$ to povlači da je lanac ograničen.

Lema 2.4.11. *Neka je $\mathcal{D}$ konačan skup formula, zatvoren na potformule i jednostruke negacije. Neka je $(\mathfrak{F}_i)_i$ lanac **IL**–okvira, pri čemi je za svaki $i \in \mathbb{N}$ $\mathfrak{F}_i$ adekvatan označeni **IL**–okvir. Neka za proizvoljan $i \in \mathbb{N}$, na $\mathfrak{F}_i$ za proizvoljne $x, y \in W$, vrijedi:*

$$\text{ako } xRy \text{ tada } \Big((\nu(y) \setminus \nu(x)) \cap \{\Box D \mid D \in \mathcal{D}\}\Big) \neq \emptyset. \qquad (\star)$$

Tada je $(\mathfrak{F}_i)_i$ ograničen lanac.

Dokaz. Neka je C formula takva da vrijedi

$$C \in \Big((\nu(y) \setminus \nu(x)) \cap \{\Box D \mid D \in \mathcal{D}\}\Big).$$

Skup $\mathcal{D}$ je prema pretpostavci konačan, pa označimo $m := |\mathcal{D}|$. Neka je $\mathcal{D}' := \{\Box D \mid D \in \mathcal{D}\}$. Tada vrijedi i $|\mathcal{D}'| = m$. Neka je $i \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Neka je $\mathfrak{F}_i = (W, R, S, \nu)$. S obzirom da je R inverzno dobro fundirana, svaki niz $x_0 R x_1 R \ldots$ je konačan. Uzmimo jedan takav proizvoljan niz te označimo njegovu duljinu s n (to možemo jer je niz konačan). Dakle, imamo niz $x_0 R x_1 R \ldots R x_n$. Tvrdimo da vrijedi

$$n \leq m.$$

Pretpostavimo suprotno, tj. vrijedi $n > m$. Za svaki par $x_i R x_{i+1}$ u našem nizu postoji formula D iz $\mathcal{D}'$. Tada prema Dirichletovom principu, postoje i i j, pri čemu je bez smanjenja općenitosti $i < j$, tako da vrijedi $x_i R x_{i+1}$ i $x_j R x_{j+1}$, te $C \in \nu(x_{i+1}) \setminus \nu(x_i)$ i $C \in \nu(x_{j+1}) \setminus \nu(x_j)$. Zbog tranzitivnosti od R slijedi da vrijedi jedan od sljedećih slučajeva:

- $j = i + 1$. Tada $(x_j = x_{i+1}) R x_{j+1}$. No, tada $C \notin \nu(x_{i+1})$, što je kontradikcija s $C \in \nu(x_{i+1})$.

- $j > i+1$. Tada $x_{i+1}Rx_jRx_{j+1}$. Jer je $\mathfrak{F}_i$ adekvatan, vrijedi $\nu(x_{i+1}) \prec \nu(x_j) \prec \nu(x_{j+1})$. Prema pretpostavci $C \in \nu(x_{j+1})$ i $C \in \mathcal{D}'$, što znači da je formula C oblika $\Box B$, za neku formulu $B \in \mathcal{D}$. Iz $C \equiv \Box B \in \nu(x_{i+1})$ i $\nu(x_{i+1}) \prec \nu(x_j)$ slijedi $C \equiv \Box B \in \nu(x_j)$. No, to je u kontradikciji s pretpostavkom $C \notin \nu(x_j)$.

S obzirom da je niz u $\mathfrak{F}_i$ bio proizvoljan, te je i bio proizvoljan, našli smo $m \in \mathbb{N}$ takav da za sve i vrijedi $dubina(\mathfrak{F}_i) \leq m$. Time je tvrdnja dokazana. $\square$

Teorem 2.4.12 (Potpunost **IL**). *Neka je $A \in Form_{IL}$ proizvoljan. Tada vrijedi $\vdash_{IL} A$ ako i samo ako je A valjana.*

Dokaz. Obratom po kontrapoziciji pokazujemo smjer: ako je A valjana formula, tada vrijedi $\vdash_{IL} A$. Drugi smjer dan je teoremom adekvatnosti za sistem **IL** (teorem 1.3.3).

Neka je A proizvoljna formula takva da vrijedi $\nvdash_{IL} A$. Tada je $\{\neg A\}$ **IL**–konzistentan skup. Prema Lindenbaumovoj lemi (lema 1.5.5), nalazimo **IL**–MCS S tako da vrijedi $\neg A \in S$. Neka je $\mathcal{D}$ najmanji skup formula koji sadrži $\neg A$ i zatvoren je na potformule i jednostruke negacije. (S obzirom da $\neg A$ ima konačno mnogo potformula, te možemo dobiti najviše konačno mnogo jednostrukih negacija, a $\mathcal{D}$ je najmanji skup s traženim svojstvom, zaključujemo da je $\mathcal{D}$ konačan.) Definiramo jednočlani adekvatan **IL**–označeni okvir $\mathfrak{F}' := (\{x\}, \emptyset, \emptyset, (x, S))$. Drugim riječima, vrijedi $\neg A \in \nu(x)$.

Definirat ćemo lanac adekvatnih označenih **IL**–okvira $(\mathfrak{F}_i)_i$, pri čemu će svaki sljedeći element lanca biti proširenje prethodnog elementa lanca. Prvi element lanca će biti upravo $\mathfrak{F}'$, koji je jednočlan okvir. U svakom proširenju dodat ćemo najviše jedan svijet. Stoga ćemo ukupno raditi s najviše prebrojivo svjetova. Neka je $X = \{x_0, x_1, \ldots\}$ indeksirani skup svih trenutnih i budućih svjetova. Svaki svijet x u nekom $\mathfrak{F}_i$ ima neki indeks $j \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi $x = x_j \in X$. Definirajmo skup

$$\mathcal{A} := \{(x, \neg(C \rhd D)) \mid x \in X, \neg(C \rhd D) \in \mathcal{D}\} \cup \{(x, y, C \rhd D) | x, y \in X, C \rhd D \in \mathcal{D}\}.$$

S obzirom da su skupovi $Form_{IL}$ i X prebrojivi, tada je i $\mathcal{A}$ prebrojiv, pa možemo napisati niz $a_0, a_1, \ldots$ koji sadrži sve elemente iz $\mathcal{A}$. Također je jasno da se svi mogući $\mathcal{D}$–problemi i $\mathcal{D}$–nedostatci nalaze u $\mathcal{A}$. Za nedostatke ili probleme γ_1 i γ_2, definiramo totalan uređaj $<'$, pri čemu vrijedi $\gamma_1 <' \gamma_2$ ako i samo ako su pripadni indeksi i i j od γ_1, γ_2 u nizu $a_0, a_1, \ldots$ takvi da vrijedi $i <' j$.

Definiramo $\mathfrak{F}_0 := \mathfrak{F}'$. Primijetimo da sljedeća tvrdnja

$$\text{ako } xRy \text{ tada } \Big((\nu(y) \setminus \nu(x)) \cap \{\Box F \mid F \in \mathcal{D}\}\Big) \neq \emptyset, \qquad (\star)$$

vrijedi na okviru $\mathfrak{F}_0$. Budući da je $\mathfrak{F}_0$ jednočlani označeni okvir, tj. $W = \{x\}$, tada zbog inverzno dobre fundiranosti od R ne može vrijediti xRx. Dakle, tada ne postoji $y \in W$ tako da vrijedi xRy. Zaključujemo da $(\star)$ vrijedi na $\mathfrak{F}_0$.

Pretpostavimo da je za neki $i \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_i = (W, R, S, \nu)$ adekvatan označeni okvir na kojem vrijedi $(\star)$. Neka je γ $<'$–najmanji nedostatak ili problem u $\mathfrak{F}_i$. Stoga razmatramo dva slučaja:

- **γ je $\mathcal{D}$–problem u $\mathfrak{F}$.** Tada postoji svijet $a \in W$ i formule C, D takve da je $\gamma = (a, \neg(C \rhd D))$. Tada taj problem eliminiramo u dva koraka.

  (1.) Iz definicije problema slijedi $\neg(C \rhd D) \in \nu(a)$. S obzirom da je $\nu(a)$ **IL**–MCS, primjenom leme 2.3.18. postoji **IL**–MCS Δ takav da vrijedi $\nu(a) \prec_D \Delta \ni C, \Box\neg C$. Fiksirajmo neki $b \notin W$. Sada definiramo

  $$\mathfrak{G}' := (W \cup \{b\}, R \cup \{(a, b)\}, S, \nu \cup \{(b, \Delta), ((a, b), D)\}).$$

  Tvrdimo da je $\mathfrak{G}'$ kvazi–okvir. Za dokaz te tvrdnje treba provjeriti 5 svojstava iz definicije kvazi–okvira. Da je $R \cup \{(a, b)\}$ inverzno dobro fundirana slijedi iz inverzne dobre fundiranosti od R i činjenice da ne postoji $x \in (W \cup \{b\})$ takav da vrijedi bRx ili bS_yx, za neki $y \in (W \cup \{b\})$. Relaciju S nismo mijenjali pa vrijedi da za sve $x, y, z \in (W \cup \{b\})$ takve da yS_xz imamo xRy i xRz. Zbog pretpostavke da je $\mathfrak{F}$ adekvatan označeni okvir, za dokaz da za sve $x, y \in (W \cup \{b\})$ takve da vrijedi xRy vrijedi i $\nu(x) \prec \nu(y)$, preostaje pokazati da aRb povlači $\nu(a) \prec \nu(b)$. Jer je $\nu(b) = \Delta$, vrijedi $\nu(a) \prec_D \nu(b)$ što povlači $\nu(a) \prec \nu(b)$. Preostale dvije tvrdnje

  $$C \neq D \text{ povlači } \mathcal{G}_x^C \cap \mathcal{G}_x^D = \emptyset, \text{ te}$$
  $$y \in \mathcal{C}_x^C \text{ povlači } \nu(x) \prec_C \nu(y),$$

  slijede iz pretpostavke da je $\mathfrak{F}$ adekvatan označeni okvir i činjenice da ne postoji $x \in (W \cup \{b\})$ takav da vrijedi nešto od sljedećeg: bRx, bS_yx (za neki $y \in (W \cup \{b\})$), te $\nu(b, x)$ je definirano. Ovo posljednje znači da za svaku formulu C vrijedi $\mathcal{G}_b^C = \mathcal{C}_b^C = \emptyset$.

  Dakle, $\mathfrak{G}'$ je stvarno kvazi–okvir. Primijetimo da ako na $\mathfrak{G}'$ vrijedi xRb, tada x mora biti a i otuda $\nu(a) = \nu(x) \prec \nu(b) = \Delta$ prema definiciji od $\nu(b)$. Također, ako vrijedi $b \in \mathcal{C}_x^C$, za $x \neq a$, tada iz definicije kvazi–okvira slijedi $\nu(x) \prec_C \nu(b)$. Zatim, $b \in \mathcal{C}_x^C$ povlači $a \in \mathcal{C}_x^C$, pa onda iz definicije kvazi–okvira $\nu(x) \prec_C \nu(a)$. Iz aRb i definicije kvazi–okvira dobivamo $\nu(a) \prec \nu(b)$, pa iz $\nu(x) \prec_C \nu(a) \prec \nu(b)$ slijedi $\nu(x) \prec \nu(b)$. U slučaju $x = a$, iz definicije od $\mathfrak{G}'$, preciznije iz $\nu((a, b)) = B$, vrijedi $b \in \mathcal{C}_a^D$. Ali, izabrali smo Δ takav da vrijedi $\nu(a) \prec_D \nu(b) = \Delta$.

  Pokažimo sada da $\mathfrak{G}'$ zadovoljava tvrdnju $(\star)$. Pokazujemo redom:

- Vrijedi: $\Box\neg C \in \nu(b) \setminus \nu(a)$.
  Treba dakle dokazati da vrijedi $\Box\neg C \in \nu(b)$ i $\Box\neg C \notin \nu(a)$. Prva tvrdnja slijedi iz leme 2.3.18, tj. pronašli smo takav Δ (i definirali $\Delta = \nu(b)$) da vrijedi $\Box\neg C \in \Delta$. Za drugu tvrdnju, pretpostavimo suprotno, tj. $\Box\neg C \in \nu(a)$. Prema tvrdnji c) propozicije 1.5.8, činjenica $\nu(a) \prec_D \nu(b)$ povlači $\nu(a) \prec \nu(b)$. Tada iz definicije relacije $\prec$, $\Box\neg C \in \nu(a)$ povlači $\neg C \in \nu(b)$. No, iz leme 2.3.18. smo dobili takav $\Delta = \nu(b)$ da vrijedi $C \in \nu(b)$. Time smo dobili kontradikciju s maksimalnom konzistentnošću skupa $\Delta = \nu(b)$, pa vrijedi $\Box\neg C \notin \nu(a)$.
- Vrijedi: $\sim C \in \mathcal{D}$.
  Prisjetimo se da je $(a, \neg(C \rhd D))$ jedan $\mathcal{D}$–problem, što po definiciji povlači $\neg(C \rhd D) \in \mathcal{D}$. No, $\mathcal{D}$ je zatvoren na potformule, pa vrijedi $C \in \mathcal{D}$. S druge strane, $\mathcal{D}$ je zatvoren i na jednostruke negacije, pa tada vrijedi i $\sim C \in \mathcal{D}$.
- $\mathfrak{G}'$ zadovoljava tvrdnju $(\star)$.
  Imamo aRb. No, lako je vidjeti da vrijedi

$$\Box\neg C \in ((\nu(b) \setminus \nu(a)) \cap \{\Box F : F \in \mathcal{D}\}.$$

(2.) Dobili smo kvazi–okvir $\mathfrak{G}'$ koji sada prema lemi 2.4.4. proširujemo do adekvatnog označenog **IL**–okvira $\mathfrak{G}$. Korolar 2.4.10. kaže da tvrdnja $(\star)$ doista vrijedi na $\mathfrak{G}$. S obzirom da vrijedi $\neg(C \rhd D) \in \nu(a) \cap \mathcal{D}$, te za $b \in C_a^D$ vrijedi $C \in \nu(b)$, $(a, \neg(C \rhd D))$ više nije problem u $\mathfrak{G}$. Definiramo $\mathfrak{F}_{i+1} := \mathfrak{G}$.

- γ **je $\mathcal{D}$–nedostatak u** $\mathfrak{F}$. Tada postoje svjetovi $a, b \in W$ i formule C, D takve da je $\gamma = (a, b, C \rhd D)$. Tada taj nedostatak eliminiramo u dva koraka.

(1.) Prvo definiramo formulu B kao formulu takvu da vrijedi $b \in C_a^B$. Ako takva B ne postoji, definiramo $B \equiv \perp$. Ako takva B postoji tada je ona jedinstvena. Naime, kada bi postojale dvije različite formule B_1 i B_2 takve da vrijedi $b \in C_a^{B_1}$ i $b \in C_a^{B_2}$, vrijedilo bi $b \in C_a^{B_1} \cap C_a^{B_2}$. S obzirom da je $B_1 \neq B_2$, prema svojstvu 4. iz definicije kvazi–okvira slijedi $\mathcal{G}_a^{B_1} \cap \mathcal{G}_a^{B_2} = \emptyset$. To povlači $C_a^{B_1} \cap C_a^{B_2} = \emptyset$ što je u kontradikciji s $b \in C_a^{B_1} \cap C_a^{B_2}$.

Pokažimo da vrijedi $\nu(a) \prec_B \nu(b)$.
Formulu B smo definirali kao formulu takvu da vrijedi $b \in C_a^B$. S obzirom da je $\mathfrak{F}$ adekvatan okvir, iz svojstva 3. definicije kvazi–okvira slijedi $\nu(a) \prec_B \nu(b)$. No, ako nije postojala formula B takva da vrijedi $b \in C_a^B$, onda smo definirali $B \equiv \perp$. Ponovo, $\mathfrak{F}$ je adekvatan okvir, pa iz svojstva 1. definicije adekvatnog okvira i aRb slijedi $\nu(a) \prec \nu(b)$. Sada prema tvrdnji 2. propozicije 1.5.8. vrijedi $\nu(a) \prec_\perp \nu(b)$, tj. $\nu(a) \prec_B \nu(b)$.

Dakle, možemo primijeniti lemu 2.3.19. i naći **IL**–MCS Δ' takav da vrijedi $\nu(a) \prec_B \Delta' \ni D, \Box\neg D$. Označimo sa c neki svijet koji nije element W. Definiramo $W' = W \cup \{c\}$, $R' = R \cup \{(a, c)\}$, $S'_a = S_a \cup \{(b, c)\}$, $S' = (S \setminus \{S_a\}) \cup \{S'_a\}$, te $\nu' = \nu \cup \{(c, \Delta')\}$. Pokazujemo da je tada $\mathfrak{G}' = (W', R', S', \nu')$ kvazi–okvir.

a) R' je inverzno dobro fundirana.
Pretpostavimo suprotno, tj. postoji niz $(x_n)_n$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_n R' x_{n+1}$. Tada su moguća sljedeća dva slučaja:
   - Ne postoji $i \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi $x_i R' x_{i+1}$, $x_i = a$ i $x_{i+1} = c$. Tada imamo niz $(x_n)_n$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_n R x_{n+1}$, što znači da je relacija R nije inverzno dobro fundirana. To je u kontradikcija s pretpostavkom da je $\mathfrak{F}$ (adekvatan) **IL**–okvir.
   - Postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $x_i R' x_{i+1}$, $x_i = a$ i $x_{i+1} = c$. No, tada postoji x_{i+2} takav da vrijedi $c R' x_{i+2}$, što povlači $c R x_{i+2}$. To je, zbog $c \notin W$ u kontradikciji s $R \subseteq W \times W$.

b) Neka su $x, y, z \in W'$ takvi da vrijedi $y S'_x z$. Trebamo pokazati da tada vrijedi $x R' y$ i $x R' z$. Ako vrijedi $(x, y, z) \in S$, tada tvrdnja slijedi iz pretpostavke da je $\mathfrak{F}$ (adekvatan) **IL**–okvir. Preostaje još promotriti slučaj $b S'_a c$. No, R' smo definirali tako da vrijedi $a R' c$, dok $a R' b$ slijedi iz definicije nedostatka $(a, b, C \rhd D)$. Time je dokaz od b) gotov.

c) Neka su $x, y \in W'$ proizvoljni tako da vrijedi $x R' y$. Želimo pokazati $\nu'(x) \prec \nu(y)$. Ako vrijedi xRy tada tvrdnja slijedi iz adekvatnosti od $\mathfrak{F}$, a ako vrijedi $a R' c$ tada iz $\nu(a) \prec_B \Delta' = \nu(c)$ slijedi $\nu(a) \prec \nu(c)$.

Posljednje dvije tvrdnje mogu se dokazati definiranjem kritičnih nizova i onda indukcijom po njihovoj duljini (kao u lemi o **IL**–proširenju).

d) Neka su G i H formule, $G \neq H$. Tada za proizvoljan $x \in W'$ vrijedi $\mathcal{G}'^G_x \cap \mathcal{G}'^H_x = \emptyset$.

e) Neka su $x, y \in W'$ proizvoljni svjetovi i G proizvoljna formula. Tada $y \in C'^G_x$ povlači $\nu'(x) \prec_G \nu(y)$.

Dakle, $\mathfrak{G}'$ je kvazi–okvir. Pokažimo da zadovoljava tvrdnju ($\star$). Za sve $x, y \in W$ takve da vrijedi xRy postoji formula G takva da vrijedi $G \in ((\nu(y) \setminus \nu(x)) \cap \{\Box F \mid F \in \mathcal{D})$. To vrijedi jer prema pretpostavci $\mathfrak{F}$ zadovoljava tvrdnju ($\star$). Preostaje još pokazati da ako vrijedi $a R' c$ tada postoji formula G takva da vrijedi $G \in ((\nu(c) \setminus \nu(a)) \cap \{\Box D \mid D \in \mathcal{D}\})$. No, vrijedi $\Box\neg D \in \nu(c) = \Delta'$, $\Box\neg D \notin \nu(a)$, te $\Box\neg D \in \{\Box F \mid F \in \mathcal{D}\}$.

Dokažimo još da doista vrijedi $\Box\neg D \notin \nu(a)$. Pretpostavimo suprotno, tj. $\Box\neg D \in \nu(a)$. Činjenica $\nu(a) \prec_B \nu(c)$ povlači $\nu(a) \prec \nu(c)$, pa iz $\Box\neg D \in \nu(a)$ slijedi

$\neg D, \Box\neg D \in \nu(c)$. No, sada je $D \in \nu(c)$ i $\neg D \in \nu(c)$, što je u kontradikciji s konzistentnošću skupa $\nu(c)$.

(2.) Pokazali smo da je $\mathfrak{G}'$ kvazi–okvir, pa primjenom leme 2.4.4. dobivamo adekvatan **IL**–okvir $\mathfrak{G}''$ koji proširuje $\mathfrak{G}'$ i na kojem, prema korolaru 2.4.10. vrijedi tvrdnja ($\star$). S obzirom da vrijedi $D \in \Delta' = \nu(c)$, $(a, b, C \rhd D)$ nije nedostatak u $\mathfrak{G}''$. Definiramo $\mathfrak{F}_{i+1} := \mathfrak{G}''$.

Dakle, dobili smo lanac **IL**–okvira $(\mathfrak{F}_i)_i$, pri čemu je za svaki $i \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}_i$ adekvatan označeni **IL**–okvir koji zadovoljava tvrdnju ($\star$). Prema lemi 2.4.11, $(\mathfrak{F}_i)_i$ je ograničen.

Označimo s $\mathfrak{F}$ uniju ograničenog lanca $(\mathfrak{F}_i)_i$. Prema lemi 2.3.17, $\mathfrak{F}$ je (označeni) **IL**–okvir. Preostaje pokazati da $\mathfrak{F}$ nema ni $\mathcal{D}$–problema, ni $\mathcal{D}$–nedostataka. To pokazujemo sljedećim nizom tvrdnji:

1. Jednom uklonjeni $\mathcal{D}$–problemi i $\mathcal{D}$–nedostatci se više ne pojavljuju.

   - Neka je $(x, y, C \rhd D)$ $\mathcal{D}$–nedostatak u nekom $\mathfrak{F}_i$ koji eliminiramo u $\mathfrak{F}_{i+1}$. Prema definiciji $\mathcal{D}$–nedostatka, to znači da vrijedi $C \rhd D \in \nu(x)$, $C \in \nu(y)$ i xRy. Eliminirali smo ga dodavanjem svijeta z. Tada $\mathfrak{F}_{i+1}$ sadrži z tako da vrijedi $D \in \nu(z)$ i yS_xz. No, to vrijedi i za sve $j > i$ (zbog $\mathfrak{F}_i \subset \mathfrak{F}_j$), tj. taj $\mathcal{D}$–nedostatak se više ne može pojaviti.
   - Neka je $(x, \neg(C \rhd D))$ $\mathcal{D}$–problem u $\mathfrak{F}_i$ koji eliminiramo u $\mathfrak{F}_{i+1}$. To radimo dodavanjem nekog svijeta y tako da vrijedi $y \in C_x^D$ i $C \in \nu(y)$. S obzirom da je $\mathfrak{F}_{i+1} \subseteq \mathfrak{F}_j$, za svaki $j \geq i + 1$, ostaje $y \in C_x^D$ i $C \in \nu(y)$ vrijediti na svakom $\mathfrak{F}_j$, za $j \geq i + 1$, pa se taj $\mathcal{D}$–problem više ne javlja.

2. Svi $\mathcal{D}$–problemi i $\mathcal{D}$–nedostatci su uklonjeni (čak i oni koji nisu $\mathcal{D}$–problemi ili $\mathcal{D}$–nedostatci na $\mathfrak{F}_0$, već su se pojavili u postupku konstrukcije).
   Pretpostavimo suprotno, tj. neka je a neki $\mathcal{D}$–problem takav da on nije uklonjen. Znamo da postoji indeks i takav da je $a = a_i$, pri čemu je a_i u nizu svih elemenata iz $\mathcal{A}$. S obzirom da se jednom uklonjeni $\mathcal{D}$–problemi više ne pojavljuju, a_i nije nikada bio $\mathcal{D}$–problem ili $\mathcal{D}$–nedostatak s najmanjim indeksom. Tada smo zapravo beskonačno mnogo puta eliminirali $\mathcal{D}$–probleme ili $\mathcal{D}$–nedostatke čiji je indeks strogo manji od i. S obzirom da je takvih konačno mnogo, nekoga smo eliminirali strogo više od jednom (čak beskonačno puta), što je u kontradikciji s tvrdnjom o neponavljanju jednom uklonjenih $\mathcal{D}$–problema ili $\mathcal{D}$–nedostataka.

3. $\mathfrak{F}$ nema ni $\mathcal{D}$–problema ni $\mathcal{D}$–nedostataka.
   Pretpostavimo suprotno, tj. neka je γ neki $\mathcal{D}$–problem ili $\mathcal{D}$–nedostatak na $\mathfrak{F}$. Bez smanjenja općnitosti, neka je γ $\mathcal{D}$–nedostatak, tj. postoje svjetovi x, y i formule C, D,

tako da vrijedi $\gamma = (x, y, C \rhd D)$. Tada vrijedi xRy, $C \rhd D \in \nu(x) \cap \mathcal{D}$, te $C \in \nu(y)$, ali ne postoji svijet z tako da vrijedi yS_xz i $D \in \nu(z)$. Zbog definicije od $\mathfrak{F}$, tada postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je γ $\mathcal{D}$–nedostatak na $\mathfrak{F}_i$. Prethodno smo pokazali da su svi $\mathcal{D}$–nedostatci uklonjeni, tj. postoji $\mathfrak{F}_j$, $j > i$, takav da γ na njemu nije $\mathcal{D}$–nedostatak. No, to je, zbog definicije od $\mathfrak{F}$, nemoguće.

4. $\mathfrak{F}$ je adekvatan. Za to treba pokazati da za sve svjetove x, y, te međusobno različite formule C i D vrijede sljedeće tvrdnje:

   - xRy povlači $\nu(x) \prec \nu(y)$,
   - $\mathcal{G}_x^C \cap \mathcal{G}_x^D = \emptyset$,
   - $y \in \mathcal{C}_x^C$ povlači $\nu(x) \prec_C \nu(y)$.

   Sve navedeno lako se pokazuje koristeći definiciju od $\mathfrak{F}$, te činjenicu da je za svaki $i \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}_i$ adekvatan.

Prema lemi 2.3.6, na $\mathfrak{F}$ vrijedi lema o istinitosti. Napomenimo ovdje da smo uklonili sve $\mathcal{D}$–probleme u smislu definicije 2.3.4, pa smo zbog adekvatnosti od $\mathfrak{F}$ uklonili $\mathcal{D}$–probleme u smislu definicije 2.3.14. Drugim riječima, stvarno smijemo upotrijebiti lemu 2.3.6. Definirali smo $\nu(x) = S$, pa vrijedi $\neg A \in S$. Stoga vrijedi $\mathfrak{F}, x \Vdash \neg A$, tj. A nije valjana formula. $\square$

Poglavlje 3

Logika interpretabilnosti ILP

U ovom poglavlju razmatramo proširenja logike interpretabilnosti **IL**. Iako ćemo prvo reći nešto općenito o proširenjima **IL**X, namjera nam je dokazati modalnu potpunost sistema **IL**P. To ćemo napraviti *step–by–step* metodom. U tu svrhu ćemo opisati tu metodu, te dokazati glavni rezultat (u obliku leme) koji se u njoj koristi.

3.1 Logike interpretabilnosti ILX

Često se razmatraju proširenja sistema **IL**. Proširenja se ostvaruju posebnim formulama koje se obično nazivaju **principima interpretabilnosti**. Princip Montagne, koji kratko označavamo s M, glasi ovako:

$$\mathtt{M} \quad \equiv \quad A \rhd B \to A \land \Box C \rhd B \land \Box C.$$

Sa **IL**M označavamo proširenje sistema **IL** čiji je novi aksiom princip interpretabilnosti M.

Princip perzistentnosti, koji kratko označavamo s P, glasi ovako:

$$\mathtt{P} \quad \equiv \quad A \rhd B \to \Box(A \rhd B).$$

Sa **IL**P označavamo proširenje sistema **IL** čiji je novi aksiom princip interpretabilnosti P.

Osim M i P, razmatraju se još mnogi principi interpretabilnosti, a neki od njih su:

$$\begin{array}{lcl}
\mathtt{M}_0 & \equiv & A \rhd B \to \Diamond A \land \Box C \rhd B \land \Box C \\
\mathtt{W} & \equiv & A \rhd B \to A \rhd B \land \Box\neg A \\
\mathtt{W}^* & \equiv & A \rhd B \to B \land \Box C \rhd B \land \Box C \land \Box\neg A \\
\mathtt{P}_0 & \equiv & A \rhd \Diamond B \to \Box(A \rhd B) \\
\mathtt{R} & \equiv & A \rhd B \to \neg(A \rhd \neg C) \rhd B \land \Box C
\end{array}$$

Neka je $\mathtt{X}$ skup principa. Tada s IL$\mathtt{X}$ označavamo proširenje sistema **IL** čiji su novi aksiomi principi interpretabilnosti iz skupa $\mathtt{X}$. Preciznije, **IL**$\mathtt{X}$ je najmanji skup formula zatvoren na pravila izvoda modus ponens i nužnost koji sadrži sve tautologije (iz $Form_{IL}$) i sve instance shema aksioma (L1) - (L3), (J1) - (J5), te sve instance shema aksioma iz $\mathtt{X}$. Vitičaste zagrade obično ne pišemo, npr. umjesto pisanja **IL**$\{\mathtt{M}_0,\mathtt{W}\}$ pišemo **IL**$\mathtt{M}_0\mathtt{W}$. Nadalje, dopuštamo da je $\mathtt{X}$ prazan skup, pa oznaka **IL**$\mathtt{X}$ obuhvaća i sistem interpretabilnosti **IL**. Primijetimo još da s W označavamo i nosač nekog okvira, no iz konteksta će uvijek biti jasno radi li se o tome ili o principu interpretabilnosti.

IL$\mathtt{X}$–dokaz definira se na jednak način kao i **IL**–dokaz, s razlikom:

b2) F_k je instanca jedne od shema aksioma (L1) - (L3) ili (J1) - (J5) *ili jedne od shema aksioma iz* $\mathtt{X}$*.*

IL$\mathtt{X}$–izvod definira se na jednak način kao i **IL**–izvod, s razlikama:

b2) F_k je instanca jedne od shema aksioma (L1) - (L3) ili (J1) - (J5) ili jedne od shema aksioma iz $\mathtt{X}$;

b5) formula F_k je nastala iz neke F_i ($i < k$) pomoću pravila nužnosti, **pri čemu je $\mathbf{F_i}$ ILX–teorem** ($\vdash_{ILX} F_i$).

Dokaz sljedećeg teorema potpuno je analogan dokazu teorema 1.4.3:

Teorem 3.1.1 (Teorem dedukcije za sistem **IL**$\mathtt{X}$)**.** *Neka je S skup formula logike **ILX**, te A, $B \in Form_{IL}$. Ako vrijedi $S \cup \{A\} \vdash_{ILX} B$, tada vrijedi i $S \vdash_{ILX} A \to B$.*

Pojmovi **IL**$\mathtt{X}$–konzistentnog i maksimalno **IL**$\mathtt{X}$–konzistentanog skupa (u oznaci **IL**$\mathtt{X}$–MCS) definiraju se na isti način kao i u logici interpretabilnosti **IL**. Također vrijedi Lindenbaumova lema za sistem **IL**$\mathtt{X}$.

Treba napomenuti da principi interpretabilnosti nisu nužno valjani. Primjerice, $\mathfrak{F} \Vdash \mathtt{P}$ ne vrijedi na svima **IL**–okvirima $\mathfrak{F}$. Stoga se postavlja pitanje možemo li reći nužan i dovoljan uvjet na **IL**–okvir $\mathfrak{F}$ (i ako možemo koji je to uvjet) tako da vrijedi $\mathfrak{F} \Vdash \mathtt{X}$, pri čemu je $\mathtt{X}$ neki princip interpretabilnosti.

Definicija 3.1.2. *Neka je $\mathtt{X}$ princip interpretabilnosti. Kažemo da je formula C logike prvog ili višeg reda* ***uvjet na okvir za princip*** $\mathtt{X}$ *ako za svaki **IL**–okvir $\mathfrak{F}$ vrijedi:*

$$\mathfrak{F} \models C \qquad \textit{ako i samo ako} \qquad \mathfrak{F} \models \mathtt{X}.$$

U prethodnoj definiciji, C također nazivamo uvjet na okvir logike **IL**$\mathtt{X}$. Sljedećim teoremom dajemo uvjete na okvir za neke principe interpretabilnosti.

Teorem 3.1.3. *Neka je $\mathfrak{F} = (W, R, \{S_w : w \in W\})$ **IL**–okvir. Tada redom vrijedi:*

a) $\mathfrak{F} \Vdash \mathtt{M}$ *ako i samo ako uS_wvRz uvijek povlači uRz;*

b) $\mathfrak{F} \Vdash \mathtt{P}$ *ako i samo ako $wRw'RuS_wv$ uvijek povlači $uS_{w'}v$;*

c) $\mathfrak{F} \Vdash \mathtt{M}_0$ *ako i samo ako $wRuRxS_wvRz$ uvijek povlači uRz;*

d) $\mathfrak{F} \Vdash \mathtt{W}$ *ako i samo ako je relacija $S_w \circ R$ inverzno dobro fundirana za svaki w;*

e) $\mathfrak{F} \Vdash \mathtt{W}^*$ *ako i samo ako $\mathfrak{F} \Vdash M_0$ i $\mathfrak{F} \Vdash W$.*

Dokaz. Za dokaz adekvatnosti odgovarajućih sistema dovoljno je dokazati samo dovoljnost, a ne oba smjera. Ovdje dajemo dokaz samo dovoljnosti u tvrdnji b) jer je namjera dokazati potpunost **IL**P.

b) Neka je $\mathfrak{F}$ **IL**–okvir takav da $wRw'RuS_wv$ uvijek povlači $uS_{w'}v$. Neka su relacija forsiranja $\Vdash$ i svijet $w \in W$ proizvoljni. Treba dokazati da vrijedi $w \Vdash \mathtt{P}$. Pretpostavimo da vrijedi $w \Vdash A \rhd B$. Treba dokazati $w \Vdash \Box(A \rhd B)$, tj. da za svaki svijet $w' \in W$, ako vrijedi wRw' tada vrijedi $w' \Vdash A \rhd B$.

Neka je w' takav da vrijedi wRw'. Tada preostaje pokazati da vrijedi $w' \Vdash A \rhd B$. Preciznije, treba pokazati da za svaki svijet $u \in W$, takav da vrijedi $w'Ru$ i $u \Vdash A$, postoji svijet $v \in W$ takav da vrijedi $uS_{w'}n$ i $v \Vdash B$.

Neka je u takav da vrijedi $w'Ru$ i $u \Vdash A$. No, $\mathfrak{F}$ je **IL**–okvir pa je relacija R tranzitivna. Tada iz wRw' i $w'Ru$ dobivamo da vrijedi wRu. Prema pretpostavci vrijedi $w \Vdash A \rhd B$, pa iz toga slijedi da postoji svijet $v \in W$ takav da vrijedi uS_wv i $w \Vdash B$. Time smo dobili da vrijedi $wRw'RuS_wv$ što prema pretpostavci povlači tvrdnju $uS_{w'}v$. Dakle, pronašli smo svijet v takav da vrijedi $v \Vdash B$ i $uS_{w'}v$. Drugim riječima, vrijedi $w' \Vdash A \rhd B$, što je i trebalo dokazati.

□

Klasu svih **IL**–okvira koji zadovoljavaju uvjete prethodnog teorema u odnosu na princip interpretabilnosti $\mathtt{X}$ zovemo **karakteristična klasa za $\mathtt{X}$**. **IL**–okvir iz karakteristične klase za princip $\mathtt{X}$ nazivamo **ILX–okvirom**. **IL**–model koji se bazira na **IL**$\mathtt{X}$–okviru nazivamo **ILX–modelom**.

Sljedeća lema dokazuje se kao i teorem adekvatnosti.

Lema 3.1.4. *Neka je F neki **ILX**–teorem. Tada za svaki **ILX**–okvir $\mathfrak{F}$ vrijedi $\mathfrak{F} \models F$.*

Sada definiramo što znači da je neki sistem **IL**$\mathtt{X}$ potpun.

Definicija 3.1.5. *Kažemo da je sistem* $\mathbf{ILX}$ *potpun ako za svaku formulu* A *vrijedi: ako je* $\mathfrak{F} \Vdash A$ *za svaki* $\mathbf{ILX}$*–okvir* $\mathfrak{F}$*, onda je* $\vdash_{\mathbf{ILX}} A$.

U prethodnoj definiciji nismo istaknuli obratan smjer jer je to zapravo adekvatnost sistema $\mathbf{ILX}$.

Napomena 3.1.6. *De Jongh i Veltman su 1990. godine dokazali potpunost sistema* $\mathbf{IL}$*,* $\mathbf{ILM}$ *i* $\mathbf{ILP}$*, te nešto kasnije* $\mathbf{ILW}$*. Goris i Joosten su 2004. godine dali nove dokaze potpunosti sistema* $\mathbf{IL}$ *i* $\mathbf{ILM}$ *koristeći* ***step–by–step*** *metodu. Tom metodom su dokazali i modalnu potpunost sistema* $\mathbf{ILM}_0$ *i* $\mathbf{ILW}^*$.

3.2 *Step–by–step* metoda

U ovoj točki koristiti ćemo pojmove koje smo definirali u logici $\mathbf{IL}$. Iako te pojmove koristimo i ovdje, nećemo ih eksplicitno definirati za logiku $\mathbf{ILX}$.

Kratko ćemo proći kroz korake *step–by–step* metode koju primjenjujemo da bismo dokazali da je neka logika $\mathbf{ILX}$ potpuna. Preciznije, želimo dokazati da za proizvoljnu formulu A vrijedi: ako je $\mathfrak{F} \Vdash A$ za svaki $\mathbf{ILX}$–okvir $\mathfrak{F}$, onda je $\vdash_{\mathbf{ILX}} A$. To ćemo dokazati obratom po kontrapoziciji. Dakle, pretpostavimo da je formula A takva da vrijedi $\nvdash_{\mathbf{ILX}} A$ i konstruiramo $\mathbf{ILX}$–model koji sadrži svijet w takav da vrijedi $w \nVdash A$, odnosno $w \Vdash \neg A$. Sada opisujemo tri važna koraka *step–by–step* metode.

Korak prvi. Prema pretpostavci vrijedi $\nvdash_{\mathbf{ILX}} A$. Tada je $\{\neg A\}$ jedan $\mathbf{ILX}$–konzistentan skup. Prema Lindenbaumovoj lemi za sistem $\mathbf{ILX}$, skup $\{\neg A\}$ možemo proširiti do $\mathbf{ILX}$–MCS Γ. Kao i u logici $\mathbf{IL}$, maksimalno konzistentni skupovi se uzimaju za elemente modela. S obzirom da se isti maksimalno konzistentan skup može koristiti na više mjesta u modelu, definiramo $\mathbf{ILX}$–označeni okvir. Dakle, svakom svijetu pridružujemo funkcijom označavanja ν neki maksimalno konzistentan skup.

Korak drugi. Želimo da za svaku formulu B vrijedi (na proizvoljnom svijetu x modela) sljedeća ekvivalencija:

$$x \Vdash B \qquad \text{ako i samo ako} \qquad B \in \nu(x).$$

Za označeni okvir precizno definiramo što znači da vrijedi lema o istinitosti u odnosu na skup $\mathcal{D}$. Kao i u slučaju $\mathbf{IL}$, skup $\mathcal{D}$ je konačan skup formula koji sadrži formulu $\neg A$, te je zatvoren na potformule i jednostruku negaciju. Želimo doći do označenog okvira na kojem vrijedi lema o istinitosti. Uočavamo formule oblika $B \rhd C$ i $\neg(B \rhd C)$ zbog kojih lema o istinitosti možda trenutno ne vrijedi. Te slučajeve definiramo kao $\mathcal{D}$–probleme i $\mathcal{D}$–nedostatke. Dokazujemo da lema o istinitosti obzirom na $\mathcal{D}$ vrijedi ako i samo ako ne postoje niti $\mathcal{D}$–problemi niti $\mathcal{D}$–nedostatci.

Korak treći. Počinjemo od jednočlanog okvira $\mathfrak{F}$, čijem je jedinom elementu pridružen skup Γ. Dokazujemo glavnu lemu prema kojoj okvir $\mathfrak{F}$ uz određene uvjete proširujemo do **IL**X–okvira koji nema niti $\mathcal{D}$–problema niti $\mathcal{D}$–nedostataka. Pritom je postupak eliminacije takav da se eliminirani $\mathcal{D}$–problemi ili $\mathcal{D}$–nedostatci ne mogu pojaviti u nastavku konstrukcije. Stoga preostaje samo dokazati da sistem **IL**X zadovoljava uvjete glavne leme (da bismo ju mogli primijeniti). Naime, tada dobivamo okvir bez $\mathcal{D}$–problema ili $\mathcal{D}$–nedostataka, pa na njemu vrijedi lema o istinitosti obzirom na $\mathcal{D}$. No, skup $\mathcal{D}$ sadrži formulu $\neg A$, te smo definirali skup $\Gamma = \nu(w)$ tako da vrijedi $\neg A \in \Gamma$, pa prema lemi o istinitosti vrijedi (na pripadnom modelu od $\mathfrak{F}$) $x \Vdash \neg A$. Time je dokaz potpunosti gotov.

Sada iskazujemo glavnu lemu koja nam daje dovoljne uvjete na sistem **IL**X tako da on bude potpun. Dokaz te leme može se pronaći u članku [3] ili u skripti [8].

Lema 3.2.1 (Glavna lema)**.** *Neka je $\mathcal{D}$ konačan skup formula. Neka je $\mathcal{I}$ klasa označenih okvira tako da vrijedi:*

*a) ako je $\mathfrak{F} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{F}_i$ unija ograničenog lanca $(\mathfrak{F}_i)_i$ označenih okvira iz klase $\mathcal{I}$ onda je $\mathfrak{F}$ jedan **IL**X–okvir;*

b) za svaki označeni okvir $\mathfrak{F} = (W, R, S, \nu)$ iz klase $\mathcal{I}$ i za sve svjetove $x, y \in W$, takve da je xRy, vrijedi
$$\Big((\nu(y) \setminus \nu(x)) \cap \{\Box D \mid D \in \mathcal{D}\}\Big) \neq \emptyset;$$

c) za svaki adekvatni označeni okvir $\mathfrak{F}$ iz klase $\mathcal{I}$, svaki $\mathcal{D}$–problem i $\mathcal{D}$–nedostatak može se eliminirati proširenjem do adekvatnog označenog okvira koji je također u klasi $\mathcal{I}$.

Ako postoji takva klasa $\mathcal{I}$, onda se svaki konačan adekvatan označeni okvir $\mathfrak{F}$ iz klase $\mathcal{I}$ može proširiti do adekvatnog okvira $\mathfrak{F}'$ za kojeg vrijedi lema o istinitosti obzirom na $\mathcal{D}$.

*Nadalje, ako za bilo koji konačan skup formula $\mathcal{D}$ zatvoren na potformule i jednostruku negaciju postoji takva klasa $\mathcal{I}$ da je svaki jednočlani označeni okvir u toj klasi, onda je **IL**X potpun sistem.* □

3.3 Potpunost sistema ILP

Dokaz potpunosti sistema **IL**P može se pronaći u [7] kao dokaz teorema 5.2. Mi ćemo ovdje dokazati potpunost sistema **IL**P na drugi način, tj. primjenom *step–by–step* metode. Istaknimo prvo korake u dokazu teorema potpunosti **IL**P, tj. istaknimo što sve treba napraviti da bismo mogli iskoristiti glavnu lemu. To su sljedeći koraci:

1. Definirati što je klasa označenih okvira $\mathcal{I}$. Pritom ne smijemo zaboraviti da treba tražiti da za svaki označeni okvir iz klase $\mathcal{I}$ treba vrijediti tvrdnja b) Glavne leme.

2. Pokazati da je svaki jednočlan okvir u klasi $\mathcal{I}$.

3. Pokazati da je unija ograničenog lanca označenih okvira iz $\mathcal{I}$ jedan **IL**P–okvir.

4. Pokazati da se svaki $\mathcal{D}$–problem adekvatnog okvira iz klase $\mathcal{I}$ može eliminirati proširenjem do adekvatnog označenog okvira koji je također u $\mathcal{I}$.

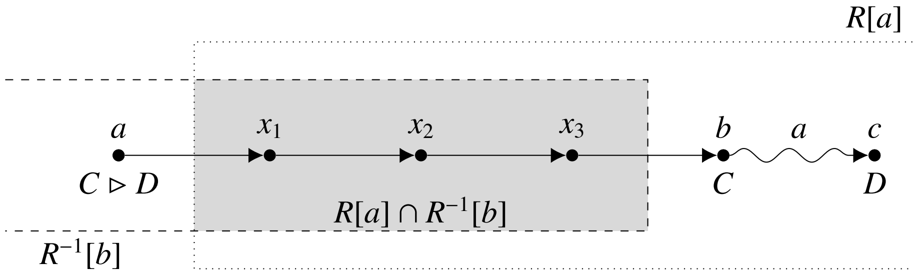
5. Pokazati da se svaki $\mathcal{D}$–nedostatak adekvatnog okvira iz klase $\mathcal{I}$ može eliminirati prošire-njem do adekvatnog označenog okvira koji je također u $\mathcal{I}$.

Kada to sve napravimo, tada smo ispunili uvjete za primjenu glavne leme, pa dobivamo da je sistem **IL**P potpun. Promotrimo prije samog dokaza potpunosti **IL**P, zašto ne prolazi potpuno isti pristup kao u dokazu potpunosti **IL**.

U točki 1.2. definirali smo pojam R-sljedbenika, te za neki svijet x, pojam skupa svih R-sljedbenika od x, u oznaci $R[x]$. U ovoj točki definiramo i pojam R-prethodnika. Ako za neke svjetove x i y vrijedi xRy tada kažemo da je y jedan R–prethodnik od x. Skup svih prethodnika svijeta x označavamo s $R^{-1}[x]$. U nastavku ćemo umjesto R–sljedbenika i R–prethodnika jednostavno govoriti o sljedbenicima i prethodnicima. Ukoliko vrijedi xRy, te ne postoji svijet $z \neq x$ takav da vrijedi $zRxRy$, tada kažemo da je x neposredni prethodnik od y. Pojam neposrednog sljedbenika nećemo definirati jer nam neće ni trebati.

Promotrimo primjer sa slike 3.1. U tom primjeru svijet c je dodan tako da vrijedi bS_ac i $D \in \nu(c)$. Time je eliminiran $\mathcal{D}$–nedostatak $(a, b, C \rhd D)$. Tako bismo postupili i u dokazu potpunosti **IL**, te za neki adekvatan **IL**–označeni okvir $\mathfrak{F}_i$ s tim $\mathcal{D}$–nedostatkom došli (uz primjenu leme o **IL**–proširenju) do proširenja koje je adekvatan **IL**–označeni okvir, te koje nema taj $\mathcal{D}$–nedostatak. No, ovdje bismo htjeli da proširenje bude i **IL**P–okvir. To prema tvrdnji b) teorema 3.1.3 znači da treba vrijediti sljedeće:

$$\text{za sve svjetove } w,\ w',\ x \text{ i } y, \text{ ako } wRw'RxS_wy \text{ tada } xS_{w'}y.$$



Slika 3.1: Eliminacija $\mathcal{D}$–nedostatak $(x, y, C \rhd D)$. Tako nije dobiven **IL**P–okvir.

Vratimo se sada našem primjeru sa slike 3.1. Proširenjem smo dobili bS_az. Sada uočavamo sljedeće:

- vrijedi aRx_1RbS_ac, no ne vrijedi $bS_{x_1}c$;
- vrijedi aRx_2RbS_ac, no ne vrijedi $bS_{x_2}c$;
- vrijedi aRx_3RbS_ac, no ne vrijedi $bS_{x_3}c$.

Dakle, imamo barem tri argumenta zašto nije dobiven **IL**P–okvir. Trebali bismo stoga proširiti i pripadne relacije iz skupa S tako da vrijedi $bS_{x_1}c$, $bS_{x_2}c$ i $bS_{x_3}c$. Primijetimo da tako definiramo bS_zc, za svaki svijet $z \in R[a] \cup R[b]$. Također primijetimo da ukoliko za neki $i \in \{1, 2, 3\}$ vrijedi $C \rhd D \in v(x_i)$, tada je $(x_i, b, C \rhd D)$ jedan $\mathcal{D}$–nedostatak. No, jer vrijedi $D \in v(c)$ i ako gornjim postupkom definiramo $bS_{x_i}c$, tada smo taj $\mathcal{D}$–nedostatak eliminirali. Dakle, na taj način postižemo eliminaciju $\mathcal{D}$–problema oblika $(z, b, C \rhd D)$, za $z \in \{a\} \cup (R[a] \cap R^{-1}[b])$. Primijetimo da smo stavili i mogućnost $z = a$ jer smo eliminirali i početni $\mathcal{D}$–nedostatak $(a, b, C \rhd D)$.

Teorem 3.3.1. *Sistem* ***IL****P je potpun.*

Dokaz. Za dokaz koristimo glavnu lemu, tj. lemu 3.2.1. U tu svrhu redom provjeravamo da vrijede uvjeti iz te leme. Neka je $\mathcal{D}$ proizvoljan konačan skup formula koji je zatvoren na potformule i jednostruke negacije. Neka je $\mathcal{I}$ klasa svih označenih okvira $\mathfrak{F} = (W, R, S, v)$ za koje vrijedi sljedeće:

(1) Za sve svjetove $x, y \in W$, takve da je xRy vrijedi

$$((v(y) \setminus v(x)) \cap \{\Box D \mid D \in \mathcal{D}\}) \neq \emptyset.$$

(2) Za sve svjetove $w, w', x, y \in W$, ako $wRw'RxS_wy$ tada $xS_{w'}y$.

(3) (W, R) je stablo.

Prvo primijetimo da je s (1) zadovoljen uvjet b) glavne leme. Zatim, prema (2) i tvrdnji b) teorema 3.1.3. svaki okvir iz klase $\mathcal{I}$ je jedan **IL**P–okvir.

Očito je svaki jednočlani označeni okvir u klasi $\mathcal{I}$, s obzirom da su za takav okvir trivijalno ispunjeni uvjeti (1) – (3).

Neka je sada $\mathfrak{F} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{F}_i$ unija ograničenog lanca $(\mathfrak{F}_i)_i$ označenih okvira iz klase $\mathcal{I}$. Želimo pokazati da je tada $\mathfrak{F}$ također u $\mathcal{I}$. Na ovom mjestu primijetimo dvije stvari: zbog $\mathfrak{F}_i \in \mathcal{I}$ i uvjeta (1), iz leme 2.4.11. slijedi da je riječ o ograničenom lancu, a tada je prema lemi 2.3.17. $\mathfrak{F}$ jedan **IL**–označeni okvir. Ukoliko se $\mathfrak{F}$ još k tome nalazi u $\mathcal{I}$, tada je prema (2) riječ o **IL**P–označenom okviru.

Pokazujemo $\mathfrak{F} \in \mathcal{I}$. Neka je $\mathfrak{F} = (W, R, S, v)$, te za svaki $i \in \mathbb{N}$ neka je $\mathfrak{F}_i = (W_i, R_i, S_i, v_i)$. Treba pokazati da $\mathfrak{F}$ zadovoljava uvjete (1), (2) i (3) iz definicije klase $\mathcal{I}$.

- Neka su $x, y \in W$ proizvoljni svjetovi takvi da vrijedi xRy. Iz definicije lanca i definicije unije lanca slijedi da postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi xR_jy. No, na okviru $\mathfrak{F}_j$ vrijedi tvrdnja (1) pa dobivamo da vrijedi $((v_j(y) \setminus v_j(x)) \cap \{\Box D \mid D \in \mathcal{D}\}) \neq \emptyset$. Sada iz činjenice $v = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} v_i$ slijedi da tvrdnja (1) vrijedi na $\mathfrak{F}$.

- Neka su $w, w', x, y \in W$ proizvoljni svjetovi, te neka vrijedi wRw', $w'Rx$, te xS_wy. Iz definicije od $\mathfrak{F}$ slijedi da postoje $i, j, k \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi wR_iw', $w'R_jx$, te $x(S_k)_wy$. Koristeći definiciju lanca, uz $l = max\{i, j, k\}$, dobivamo da vrijedi $wR_lw'R_lx(S_l)_wy$. No, na okviru $\mathfrak{F}_l$ vrijedi tvrdnja (2) pa slijedi $x(S_l)_{w'}y$. Ponovno koristeći definiciju od $\mathfrak{F}$ dobivamo $xS_{w'}y$, dakle tvrdnja (2) vrijedi na $\mathfrak{F}$.

- Pretpostavimo da na $\mathfrak{F}$ ne vrijedi tvrdnja (3), tj. pretpostavimo da (W, R) nije stablo. Tada postoji neki svijet $x \in W$ takav da skup $R^{-1}[x]$ sadrži neka dva neusporediva svijeta y i $z \in W$. Drugim riječima, vrijedi yRx i zRx, ali ne vrijedi niti jedno od: yRz, zRy, $z = y$. Iz definicije unije lanca slijedi da postoje $i, j, k \in \mathbb{N}$, tako da okvir $\mathfrak{F}_i$ sadrži svijet x, okvir $\mathfrak{F}_j$ sadrži svijet y, a okvir $\mathfrak{F}_k$ sadrži svijet z. Uz $l = max\{i, j, k\}$ tada dobivamo da okvir $\mathfrak{F}_l$ sadrži te sve navedene svjetove. No, tada vrijedi da (W_l, R_l) nije stablo, što je u kontradikciji s $\mathfrak{F}_l \in \mathcal{I}$. Dakle, (W, R) je stablo.

Time smo pokazali da vrijedi $\mathfrak{F} \in \mathcal{I}$. Preostaje pokazati kako se riješiti $\mathcal{D}$–problema i $\mathcal{D}$–nedostataka.

Primijetimo da dosad nismo imali nikakve zahtjeve na to što su svjetovi, tj. pričali smo o skupu W i svjetovima iz W, ali nigdje nismo rekli koji su to objekti (brojevi, formule, skupovi, ...). Svi prethodni rezultati nisu o tome ovisili. Ovdje ćemo, radi lakšeg referiranja na pojedine svjetove, pretpostaviti da svjetovi sadrže konačne nizove parova formula. U tu svrhu, uvedimo neke oznake. Prazni niz ćemo označavati s (). Ukoliko je a neprazan konačan niz formula, tada s $l(a)$ označavamo posljednji element niza a. Ukoliko je p neki uređen par, tada s $(p)_1$ označavamo prvu komponentu od v, dok s $(p)_2$ označavamo drugu komponentu od v. Dakle, vrijedi $p = ((p)_1, (p)_2)$.

Označimo s $(\star)$ sljedeću tvrdnju, za proizvoljne svjetove x i y, te proizvoljne formule H i J.

Ako za svjetove x i y vrijedi xRy i $l(y)_\rightarrow = H \rhd J$, tada vrijedi $v(x) \prec_J v(y)$. $(\star)$

Pri svakom dodavanju novog R–brida provjerit ćemo da vrijedi tvrdnja $(\star)$, tj. naš izbor oznaka će biti takav da će tvrdnja $(\star)$ biti ispunjena. Važnost te tvrdnje doći će do izražaja kod eliminacije $\mathcal{D}$–nedostataka.

Neka je sada za neki $i \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_i = (W, R, S, v)$ adekvatan označeni okvir iz $\mathcal{I}$, s korijenom (). Pretpostavimo da smo kao u dokazu teorema potpunosti **IL** uveli totalan uređaj na $\mathcal{D}$–nedostatcima i $\mathcal{D}$–problemima. Neka je γ najmanji (u smislu tog uređaja) $\mathcal{D}$–nedostatak ili $\mathcal{D}$–problem u $\mathfrak{F}$. Razmatramo sljedeća dva slučaja.

- **γ je $\mathcal{D}$–problem u** $\mathfrak{F}$.
  Tada postoji svijet $a \in W$ i formule C, D takve da je $\gamma = (a, \neg(C \rhd D))$. Ovaj problem ćemo eliminirati kao i u slučaju **IL**. Iz definicije problema slijedi $\neg(C \rhd D) \in v(a)$. S obzirom da je $v(a)$ **IL**–MCS, primjenom leme 2.3.18. slijedi da postoji **IL**–MCS Δ takav da vrijedi $v(a) \prec_D \Delta \ni C, \Box\neg C$. Odaberimo neki $b \notin W$, te definirajmo $v(b) = \Delta$. Također definiramo da vrijedi aRb. S obzirom da smo postupili kao u slučaju **IL**, prolazi isti dokaz da je upravo dobiven kvazi–okvir koji se potom proširuje do adekvatnog označenog **IL**–okvira. Za taj okvir vrijedi (1), te vrijedi da γ više nije problem u tom okviru.

  Definirali smo aRb, te je b novi svijet. Time smo ponovo dobili stablo, tj. vrijedi i (3). Želimo naglasiti da iz dokaza leme o **IL**–proširenju slijedi da je nova struktura također stablo. Naime, pri uklanjanju nesavršenosti smo ili ostavili relaciju R istom, ili smo eventualno za neki svijet x, iz $xRaRb$ dobili xRb (čime nismo pokvarili strukturu stabla).

  Preostaje pokazati da vrijedi (2) kako bismo mogli reći da smo ostali u klasi $\mathcal{I}$. Tvrdnja (2) očito vrijedi za sve svjetove w, w', x, y, osim eventualno kada je $x = b$ ili $y = b$. Naime, b je novi svijet, dakle nema R-sljedbenika, pa ako se b niti ne javlja u izrazu $wRw'RxS_wy$, tvrdnja slijedi iz pretpostavke $\mathfrak{F} \in \mathcal{I}$. Sada razmatramo pojedini slučaj $x = b$ i $y = b$.

- Neka je $x = b$, tj. postoje svjetovi w, w' i y tako da vrijedi $wRw'RbS_wy$. Koristeći ponovno dokaz leme o **IL**–proširenju slijedi da je svijet b list u stablu (W, R). Dobiveno proširenje je **IL**–okvir, pa tada dobivamo da je moguće jedino $y = b$. Sada iz pretpostavke $w'Rb$ i refleksivnosti relacije $S_{w'}$ slijedi $bS_{w'}b$, što je i trebalo pokazati.
- Neka je $y = b$, tj. postoje svjetovi w, w' i x tako da vrijedi $wRw'RxS_wb$. Ukoliko vrijedi $x = b$, dobivamo $wRw'RbS_wb$, što je upravo prethodno opisani slučaj. Zato pretpostavimo da vrijedi $x \neq b$. Promotrimo izraz xS_wb. Primijetimo da kod uvođenja svijeta b nismo nigdje to definirali. Stoga je to moglo doći jedino od primjene leme o **IL**–proširenju. Preciznije, prema načinu eliminiranja nesavršenosti u dokazu te leme, xS_wb je jedino moglo doći uklanjanjem nesavršenosti oblika (iii) ili (iv) (ne (ii) jer je b list u stablu (W, R)). Sada treba promotriti svaki od ta dva slučaja.
  - Pretpostavimo da je xS_wb posljedica uklanjanja nesavršenosti oblika (iii). Bez smanjenja općenitosti, zbog aS_wb i tranzitivnosti relacije S_w, možemo pretpostaviti da je xS_wb rezultat od xS_wa i aS_wb. Prema pretpostavci vrijedi $wRw'Rx$, pa dobivamo da vrijedi $wRw'RxS_wa$. No, w, w', i x su svjetovi iz W, pa iz $\mathfrak{F} \in \mathcal{I}$ (tj. vrijedi (2) na $\mathfrak{F}$) slijedi $xS_{w'}a$. Tu smo koristili pretpostavku $x \neq b$, te da je b list u (W, R) (tj. nema R–sljedbenika), što povlači $w \neq b$ i $w' \neq b$. Korištenjem činjenice da je proširenje **IL**–okvir, prvo iz $xS_{w'}a$ slijedi $w'Ra$, a onda iz $w'RaRb$ slijedi $aS_{w'}b$. Sada zbog tranzitivnosti relacije $S_{w'}$ na proširenju vrijedi $xS_{w'}b$.
  - Pretpostavimo da je xS_wb posljedica uklanjanja nesavršenosti oblika (iv). To znači da postoji svijet c tako da vrijedi $xRcRb$. Tada vrijedi $xRaRb$. Naime, ako $c \neq b$, tada iz činjenica da je u stablu (W, R) svijet a neposredni prethodnik od b, te tranzitivnosti relacije R na proširenju, slijedi $xRcRaRb$. Tada (ponovo zbog tranzitivnosti od R) slijedi $xRaRb$. Prema pretpostavci vrijedi $w'Rx$, pa onda iz $w'RxRaRb$ prvo slijedi $w'RxRb$, a onda (jer je proširenje **IL**–okvir) slijedi $xS_{w'}b$.

Već smo istaknuli da su svjetovi konačni nizovi parova formula. Ako je $a = ((F_1, G_1), \dots, (F_n, G_n))$ za neki $n \in \mathbb{N}$, svijet b će nam biti konačan niz

$$((F_1, G_1), \dots, (F_n, G_n), (C \rhd D, C \rhd D)).$$

S obzirom da smo dodali novi R–brid, tj. definirali smo aRb, preostaje nam provjeriti da vrijedi tvrdnja ($\star$). Tvrdnju trebamo provjeriti samo za R–bridove koji su posljedica definiranja aRb (dakle za aRb i posljedice proširenja po tranzitivnosti relacije R).

– Definirali smo aRb i $(l(b))_2 = C \rhd D$. Treba pokazati $\nu(a) \prec_D \nu(b)$. No, upravo tako smo definirali $\nu(b)$.
– Neka je x proizvoljan svijet takav da vrijedi xRb. S obzirom da vrijedi $(l(b))_2 = C \rhd D$, treba pokazati da vrijedi $\nu(x) \prec_D \nu(b)$. Ako je $x = a$, tada imamo prethodni slučaj. Pretpostavimo stoga da vrijedi $x \neq a$. Svijet a je neposredni prethodnik svijeta b, pa iz tranzitivnosti relacije R slijedi xRa. Proširenje je adekvatan **IL**–okvir, pa dobivamo $\nu(x) \prec \nu(a)$. Sada pokazujemo $\nu(x) \prec_D \nu(b)$. Neka je A proizvoljna formula takva da vrijedi $A \rhd D \in \nu(x)$. Tada vrijedi $\nu(x) \vdash_{\mathbf{ILP}} A \rhd D$, pa koristeći $\vdash_{\mathbf{ILP}} A \rhd D \to \Box(A \rhd D)$ i pravilo izvoda modus ponens dobivamo $\nu(x) \vdash_{\mathbf{ILP}} \Box(A \rhd D)$.[1] Dakle, vrijedi $\Box(A \rhd D) \in \nu(x)$. Tada $\nu(x) \prec \nu(a)$ povlači $A \rhd D \in \nu(a)$. U prethodnom slučaju smo pokazali da vrijedi $\nu(a) \prec_D \nu(b)$, pa to sada povlači $\neg A, \Box\neg A \in \nu(b)$, što je i trebalo pokazati.

- γ **je $\mathcal{D}$–nedostatak u** $\mathfrak{F}$. Tada postoje svjetovi $a, b \in W$ i formule E, G takve da je $\gamma = (a, b, E \rhd G)$.

  Tada vrijedi $E \rhd G \in \nu(a)$. Iz $\nu(a) \vdash_{\mathbf{ILP}} E \rhd G$ i $\vdash_{\mathbf{ILP}} E \rhd G \to \Box(E \rhd G)$ slijedi $\nu(a) \vdash_{\mathbf{ILP}} \Box(E \rhd G)$, a onda i $\Box(E \rhd G) \in \nu(a)$. Neka je $a' \in R[a] \cap R^{-1}[b]$ proizvoljan (primijetimo da se ovdje ne traži da je a neposredni prethodnik od b u stablu (W, R), pa taj presjek nije nužno prazan skup). Pretpostavka $a' \in R[a]$, tj. aRa', te adekvatnost okvira $\mathfrak{F}$ povlače $\nu(a) \prec \nu(a')$. Stoga vrijedi $E \rhd G \in \nu(a')$.

  Eliminirat ćemo nedostatak $(a, b, E \rhd G)$, ali ćemo i osigurati da niti jedna trojka oblika $(a', b, E \rhd G)$ za neki svijet $a' \in R[a] \cap R^{-1}[b]$ ne bude $\mathcal{D}$–nedostatak u daljnjim proširenjima. Iako bismo načinom eliminacije nedostatka kao u **IL** mogli riješiti te moguće $\mathcal{D}$–nedostatke kasnije, ovako radimo da bismo ispunili uvjet (2), tj. da proširenje bude u klasi $\mathcal{I}$. Neka je svijet a_0 neposredni prethodnik od b. Primijetimo da on postoji jer bi inače vrijedilo $R[a] \cap R^{-1}[b] = \emptyset$, a u tom slučaju smo gotovi jer tada ne postoje opisani nedostatci $(a', b, E \rhd G)$ (s obzirom da tada ne postoji takav svijet $a' \in R[a] \cap R^{-1}[b]$). Iz činjenice da je (W, R) stablo slijedi da je takav a_0 jedinstven. S obzirom da vrijedi $a_0 \in R[a] \cap R^{-1}[b]$, vrijedi $E \rhd G \in \nu(a_0)$.

  Neka je $C \rhd D = (l(b))_2$. Primijetimo na ovom mjestu da smo početno krenuli od jednočlanog okvira $\mathfrak{F}_0$, te da u proširenjima ubacujemo nove svjetove samo kod eliminiranja $\mathcal{D}$–problema ili $\mathcal{D}$–nedostatka. Dakle, svijet b je bio uveden zbog eliminacije nekog $\mathcal{D}$–problema ili $\mathcal{D}$–nedostatka (također, b ne može biti korijen stabla (W, R) jer ima nekog neposrednog prethodnika u (W, R)). No, već smo istaknuli da kod eliminacije $\mathcal{D}$–problema (a istaknut ćemo i kod $\mathcal{D}$–nedostataka), novi svijet je

[1] Primijetimo da nismo mogli koristiti pravilo nužnosti jer formula $A \rhd D$ nije teorem sistema **ILP**.

konačan niz parova formula u kojem je zadnji par formula oblika $(F_1, F_2 \rhd F_3)$ (za neke formule F_1, F_2 i F_3). Stoga doista smijemo označiti $C \rhd D = \big(l(b)\big)_2$.

Iz pretpostavke a_0Rb, korištenjem tvrdnje ($\star$) na okviru $\mathfrak{F}$ dobivamo da vrijedi $\nu(a_0) \prec_D \nu(b)$. Neka je $a_0 = ((F_1, H_1), \ldots, (F_n, H_n))$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Neka je $c = ((F_1, H_1), \ldots, (F_n, H_n), (C \rhd D, E \rhd G))$. Ukoliko takav svijet c već ne postoji, tada postupamo na sljedeći način. Prvo primijetimo da iz definicije $\mathcal{D}$–nedostatka $(a, b, E \rhd G)$ slijedi $E \in \nu(b)$. Zatim smo već vidjeli da vrijedi $E \rhd G \in \nu(a_0)$, te $\nu(a_0) \prec_D \nu(b)$. Time imamo sve uvjete za primjenu leme 2.3.19. kojom dobivamo da postoji takav **IL**–MCS Δ' da vrijedi $\nu(a_0) \prec_D \Delta'$ i $G, \Box\neg G \in \Delta'$. Sada možemo definirati novi svijet c kao već istaknuti konačan niz parova formula, uz definiranje $\nu(c) = \Delta'$ ($G \in \nu(c)$ je bilo nužno da bismo eliminirali $\mathcal{D}$–nedostatak $(a_0, c, E \rhd G)$ na način kao i prije). Proširimo relaciju R s a_0Rc. Tim proširivanjem R dobivamo kvazi–okvir, pa primijenimo lemu o **IL**–proširenju. Dokaz da se to proširenje nalazi u klasi $\mathcal{I}$, tj. da zadovoljava svojstva (1)–(3), je isti kao i kod eliminacije $\mathcal{D}$–problema (sa svjetovima a_0 i c umjesto svjetova a i b). Dokaz da na proširenju vrijedi tvrdnja ($\star$) je također isti kao i kod eliminacije $\mathcal{D}$–problema (sa svjetovima a_0 i c umjesto svjetova a i b).

Sada proširujemo relaciju $S_{a'}$ s $bS_{a'}c$ za sve svjetove $a' \in \{a\} \cup (R[a] \cap R^{-1}[b])$, u svrhu eliminacije svih $\mathcal{D}$–nedostataka $(a', b, E \rhd G)$ (pa i $\mathcal{D}$–nedostatka $(a, b, E \rhd G)$). Primijetimo da je to možemo jer je svijet c sljedbenik svijeta a_0 koji je neposredni prethodnik svijeta b u stablu (W, R). Drugim riječima, svijet c je sljedbenik svih prethodnika svijeta b u stablu (W, R). Tada posebno, zbog $a' \in R^{-1}[b]$ vrijedi $a'Rc$ (pa vršimo eliminaciju $\mathcal{D}$–nedostatka upravo pomoću tog svijeta c). Kao i prije, ponovno koristimo lemu o **IL**–proširenju, te tako dobivamo adekvatan **IL**–okvir, koji zadovoljava svojstvo (1), a također i svojstvo (3) (argumentacija ista kao i prije). Uz onakvo proširenje svake od relacija $S_{a'}$ postigli smo eliminacije svih $\mathcal{D}$–nedostataka koja se se tražile.

Preostaje još samo pokazati da vrijedi svojstvo (2) da bismo mogli zaključiti da je proširenje u klasi $\mathcal{I}$ (te tako završiti ovaj dokaz). Pretpostavimo da su w, w', x i y takvi svjetovi da vrijedi $wRw'RxS_wy$. Pretpostavimo te da $xS_{w'}y$ nije vrijedilo prije proširenja relacija $S_{a'}$ (inače vrijedi tvrdnja (2), pa nemamo što dokazivati). Primijetimo da u posljednjem proširenju nismo proširivali relaciju R, tj. relacija R je ostala nepromijenjena. Stoga prilikom primjene leme o **IL**–proširenju, uklanjaju se samo nesavršenosti oblika (iii). To pak znači, prema dokazu leme o **IL**–proširenju, da se samo relacija $S_{a'}$ promijenila i to samo za svjetove $a' \in \{a\} \cup (R[a] \cap R^{-1}[b])$. Stoga mora vrijediti $w \in \{a\} \cup (R[a] \cap R^{-1}[b])$. Inače, ako se S_w nije promijenila, na okviru koji smo imali prije proširenja i mijenjanja relacija $S_{a'}$ prema pretpostavci ne bi vrijedilo $xS_{w'}y$, što bi bilo u kontradikciji s činjenicom da na tom okviru vrijedi (2).

Dakle, prema obliku nesavršenosti (iii) i njenom uklanjanju u dokazu leme o **IL**–proširenju, xS_wy mora biti posljedica zatvorenja na tranzitivnost nekog S_w lanca koji sadrži bS_wc. Možemo pretpostaviti da je S_w lanac oblika $xS_wbS_wcS_wy$, pri čemu su xS_wb i cS_wy već vrijedili prije ovog proširenja. S obzirom da je $wRw'RxS_wb$ vrijedilo i prije proširivanja, svojstvo (2) povlači $xS_{w'}b$.

Vidjeli smo da mora vrijediti $w \in \{a\} \cup (R[a] \cap R^{-1}[b])$, pa tada posebno vrijedi $w \in R[a]$. Iz toga i pretpostavke wRw' (uz korištenje tranzitivnosti relacije R) slijedi $w' \in R[a]$. Također, $xS_{w'}b$ i činjenica da je proširenje **IL**–okvir povlače $w'Rb$, tj. vrijedi $w' \in R^{-1}[b]$. Dakle, vrijedi $w' \in \{a\} \cup (R[a] \cap R^{-1}[b])$. No, za sve svjetove $a' \in \{a\} \cup (R[a] \cap R^{-1}[b])$ smo radi uklanjanja $\mathcal{D}$–nedostataka proširili relaciju $S_{a'}$ s $bS_{a'}c$. Tada smo posebno proširili i relaciju $S_{w'}$ s $bS_{w'}c$.

Iz $w'Rb$ i činjenice da je svijet c sljedbenik svih prethodnika svijeta b (a upravo je w' jedan takav) slijedi $w'Rc$. Sada koristeći pretpostavku cS_wy i wRw' dobivamo $wRw'RcS_wy$. S obzirom da je to vrijedilo i prije proširenja (jer proširenja nisu oblika cS_rp, za neke svjetove r i p), tvrdnja (2) povlači $cS_{w'}y$. Sada iz $bS_{w'}cS_{w'}y$ i tranzitivnosti relacije $S_{w'}$ na proširenju dobivamo $xS_{w'}y$, što je i trebalo pokazati.

□

Bibliografija

[1] P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema. *Modal Logic*. Cambridge University Press, 2010.

[2] B. Chellas. *Modal logic: An introduction*. Cambridge University Press, 1980.

[3] E. Goris, J. Joosten. *Modal Matters in Interpretability Logics*. Logic Journal of IGPL 16 (2008), 371-412

[4] R. Hakli, S. Negri. *Does the deduction theorem fail for modal logic?*. Sveučilište u Helsinkiju, Finska, 2010,

`http://www.helsinki.fi/~negri/selected_pub/dedthm.pdf`

[5] G. Japaridze, D. de Jongh. *The Logic of Provability*. S. R. Buss (ed.), Handbook of Proof Theory, Elsevier, 1998, pp. 475-546

[6] D. K. Johnston. *Elements of Modal Logic*. Department Philosophy, University of Victoria,

`http://web.uvic.ca/~tiberius/logic/modal.pdf`

[7] D. H. J. de Jongh, F. Veltman. *Provability logics for relative interpretability*. P. P. Petkov (ed.), Proceedings of the 1988 Heyting Conference, Plenum Press, 1990, pp. 31-42

[8] T. Perkov, M. Vuković. *Semantike logika dokazivosti i interpretabilnosti*. Nastavni materijal za istoimeni kolegij na doktorskom studiju 2016/17,

`https://www.math.pmf.unizg.hr/sites/default/files/pictures/00-predavanja-doktorski-2016-17.pdf`

[9] A. Visser, *An overview of interpretability logic*. Kracht, Marcus (ed.) et al., Advances in modal logic. Vol. 1. Selected papters from the 1st international workshop (AiML'96), Berlin, Germany, 1996, Stanford, CA: CSLI Publications, CSLI Lect. Notes. 87, 307–359 (1998)

[10] M. Vuković. *Matematička logika*. Element, Zagreb, 2009.

Sažetak

Sistem $\mathbf{IL}$ je modalni sistem kojeg je 1988. uveo Albert Visser. Ovaj sistem sadrži jedan unarni modalni operator $\Box$ i jedan binarni modalni operator $\rhd$. Promatraju se i razna proširenja sistema $\mathbf{IL}$ s principima interpretabilnosti. Neka od tih proširenja su logike interpretabilnosti $\mathbf{IL}\mathtt{M}$, $\mathbf{IL}\mathtt{P}$, $\mathbf{IL}\mathtt{W}$ i $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$.

De Jongh i Veltman su 1990. dokazali potpunost sistema $\mathbf{IL}$, $\mathbf{IL}\mathtt{M}$ i $\mathbf{IL}\mathtt{P}$, a nešto kasnije i potpunost sistema $\mathbf{IL}\mathtt{W}$. Evan Goris i Joost Joosten su 2004. dali nove dokaze potpunosti sistema $\mathbf{IL}$ i $\mathbf{IL}\mathtt{M}$ koristeći *step–by–step* metodu kojom su potom dokazali i modalnu potpunost sistema $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$ i $\mathbf{IL}\mathtt{W}^*$. Glavni cilj ovog rada je dokazati teoreme modalne potpunosti za logike interpretabilnosti $\mathbf{IL}$ i $\mathbf{IL}\mathtt{P}$ koristeći *step–by–step* metodu.

U prvom poglavlju bavimo se semantikom i sintaksom osnovne logike interpretabilnosti $\mathbf{IL}$. U ovom poglavlju dokazujemo adekvatnost sistema $\mathbf{IL}$ i teorem dedukcije za sistem $\mathbf{IL}$. Nakon što definiramo pojmove $\mathbf{IL}$–konzistentnih i maksimalno $\mathbf{IL}$–konzistentnih skupova, dokazujemo Lindenbaumovu lemu.

U drugom poglavlju definiramo pojmove označenih, adekvatnih i kvazi–okvira, problema i nedostataka, te kritičnog i generaliziranog konusa. Dokazujemo lemu o egzistenciji i lemu o $\mathbf{IL}$–proširenju. Osnovni cilj ovog poglavlja je dati dokaz potpunosti sistema $\mathbf{IL}$ korištenjem *step–by–step* metode.

U trećem poglavlju dokazujemo potpunost sistema $\mathbf{IL}\mathtt{P}$. Prvo dajemo definicije i rezultate vezane za logike interpretabilnosti $\mathbf{IL}\mathtt{X}$. Potom navodimo glavne korake *step–by–step* metode, te formalno iskazujemo glavnu lemu. Dajemo detaljan dokaz potpunosti $\mathbf{IL}\mathtt{P}$, pri čemu zapravo provjeravamo uvjete glavne leme kako bismo ju mogli primijeniti.

Summary

System **IL** is a system of modal logic introduced by Albert Visser in 1988. This system contains one unary modal operator $\Box$ and one binary modal operator $\rhd$. We also consider extensions of system **IL**. They are given by the intepretability principles, and some of these extensions are interpretability logics $\mathbf{IL}\mathtt{M}$, $\mathbf{IL}\mathtt{P}$, $\mathbf{IL}\mathtt{W}$ and $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$.

Modal completeness of logics **IL**, $\mathbf{IL}\mathtt{M}$ and $\mathbf{IL}\mathtt{P}$ was proven in 1990. by De Jongh and Veltman. Later they also proved modal completeness of the logic $\mathbf{IL}\mathtt{W}$. In 2004. Evan Goris and Joost Joosten gave new proofs of completeness of logics **IL** and $\mathbf{IL}\mathtt{M}$ using their step–by–step method. Using that method, they also proved modal completeness of logics $\mathbf{IL}\mathtt{M}_0$ and $\mathbf{IL}\mathtt{W}^*$. The main goal of this thesis is to present the proof of modal completeness of interpretability logics **IL** and $\mathbf{IL}\mathtt{P}$ by using step–by–step method.

In the first chapter, we deal with syntax and semantic of the interpretability logic **IL**. In this chapter we present proof of soundness theorem for logic **IL** and proof of deduction theorem for logic **IL**. After presenting the notion of **IL**–consistent and maximal **IL**–consistent set, we give proof of Lindenbaum's lemma.

In the second chapter, we define the following notions: labeled frame, adequate frame, quasi–frame, problems, deficiencies, critical cone and generalized cone. We also prove existence lemma and **IL**–closure lemma. The main goal of this chapter is to prove model completeness of the logic **IL** by using the step–by–step method.

In the third chapter, we present the proof of completeness of the logic $\mathbf{IL}\mathtt{P}$. We first present definitions and results that are related to interpretability logics $\mathbf{IL}\mathtt{X}$. Then we describe main steps of the step–by–step method. Also, we give formal statement of the main lemma. Finally, we present detailed proof of completeness of the logic $\mathbf{IL}\mathtt{P}$. We are doing that by checking requirements of the main lemma.

Životopis

Rođen sam 27. srpnja 1994. godine u Varaždinu. Osnovnu školu završio sam u Ivancu. Prvu gimnaziju u Varaždinu (prirodoslovno-matematički smjer), kao i Srednju glazbenu školu u Varaždinu (smjer glazbenik gitarist) završio sam 2013. godine. Sve školske godine tijekom tog obrazovanja završio sam s odličnim uspjehom. Tijekom osnovne i srednje škole sudjelovao sam na nizu natjecanja iz područja matematike, tehničke kulture, fizike, hrvatskog jezika, latinskog jezika, biologije, kemije i logike. Posebno bih istaknuo sudjelovanje na 52. državnom natjecanju iz matematike koje je održano u Opatiji 2011. godine.

Po završetku srednjoškolskog obrazovanja, godine 2013. upisao sam Prirodoslovno–matematički fakultet u Zagrebu, smjer Matematika. Nakon tri godine upisao sam na istome fakultetu diplomski studij Matematika i računarstvo. Tijekom posljednjeg semestra studija, primio sam Pohvalnicu za izuzetan uspjeh u studiju, te Priznanje za izuzetan uspjeh u akademskoj godini 2017./2018.