SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ines Huić

DROZ-FARNYJEV TEOREM

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, srpanj, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svom mentoru prof. dr. sc. Juraju Šiftaru na mentorstvu, pomoći i podršci pri izradi ovog rada. Ovaj diplomski rad posvećujem svojim roditeljima koji su mi tijekom studija bili najveća podrška.

Sadržaj

Uvod

Švicarski matematičar Arnold Droz-Farny objavio je 1899. u obliku zadatka, bez navedenog rješenja, sljedeću tvrdnju: Ako se kroz ortocentar trokuta postave dva međusobno okomita pravca, oni na stranicama trokuta omeđuju tri segmenta čija su polovišta kolinearne točke. S vremenom je ova tvrdnja potaknula mnoge matematičare da različitim metodama pokušaju naći dokaz, a zatim i njezina poopćenja, u više smjerova. Naročito je u posljednjih dvadesetak godina objavljeno dosta članaka na temu Droz-Farnyjevog teorema.

U ovom radu izložit ćemo neke od tih dokaza, počevši s prvim poznatim sintetičkim dokazom koji je objavio J.-L. Aymé 2004. godine. Među poopćenjima posebno značajnim pokazao se Goormaghtighov teorem iz 1930. godine. U radu ćemo iznijeti dokaz ovog teorema u kojem ključnu ulogu igra dvoomjer kao projektivna invarijanta, a zatim ćemo protumačiti kako Droz-Farnyev teorem slijedi iz Goormaghtighovog.

Među zanimljivim rezultatima povezanim s Droz-Farnyjevim teoremom ističemo familiju pravaca koji su na način opisan u iskazu teorema određeni različitim položajima izabranog para okomitih pravaca, budući da svi ti pravci omataju krivulju 2. reda (koniku) upisanu polaznom trokutu, čija žarišta su ortocentar i središte opisane kružnice. Daljnje razmatranje navodi na uočavanje familije trokuta koji su svi opisani jednoj elipsi i upisani u jednu kružnicu, a svima im je zajednički ortocentar pa time i Eulerov pravac te imaju još neka zajednička svojstva.

Na kraju iznosimo najvažnije zaključke aksomatske analize Droz-Farnyjevog teorema, posebno s gledišta geometrije ravnine zasnovane na pojmu zrcaljenja.

Poglavlje 1

Biografija

Arnold Droz, sin Edouarda i Louise Droz, rođen je u švicarskom gradu La Chaux-de-Fonds, 14. veljače 1856. godine. Nakon studija matematike u Neufchatelu, nastavio je studij u Münchenu gdje je pohađao i predavanja Felixa Kleina iz matematičke analize. Do tada je već bio razvio izrazitu sklonost prema geometriji. Oženio se Linom Farny, također iz La Chaux-de-Fondsa. Nakon ženidbe, oboje su promijenili prezime u Droz-Farny. 1880. godine počeo je predavati fiziku i matematiku u školi u Porrentruyju u blizini Basela, gdje ostaje do 1908. godine. U razdoblju od 1897. do 1909. godine napisao je četiri knjige, od čega dvije knjige pripadaju području geometrije. Također, objavio je članke u časopisima Journal de Mathématiques Élementaries et Spéciales (1894., 1895.), L'intermédiare des Mathématiciens, The Educational Times (1899.) i u Mathesis (1901.). Njegov najpoznatiji rezultat je teorem kojim se bavimo u ovom radu, a formulirao ga je kao Question 1411 u časopisu The Educational Times 71 (1899), 89-90.

Bio je poznat kao veoma društvena osoba, a dopisivao se i s drugim matematičarima kao što su primjerice Talijan Virginio Retali i Španjolac Juan Jacobo Duran Loriga. U svoje slobodno vrijeme, bavio se planinarenjem i utrkama konja.

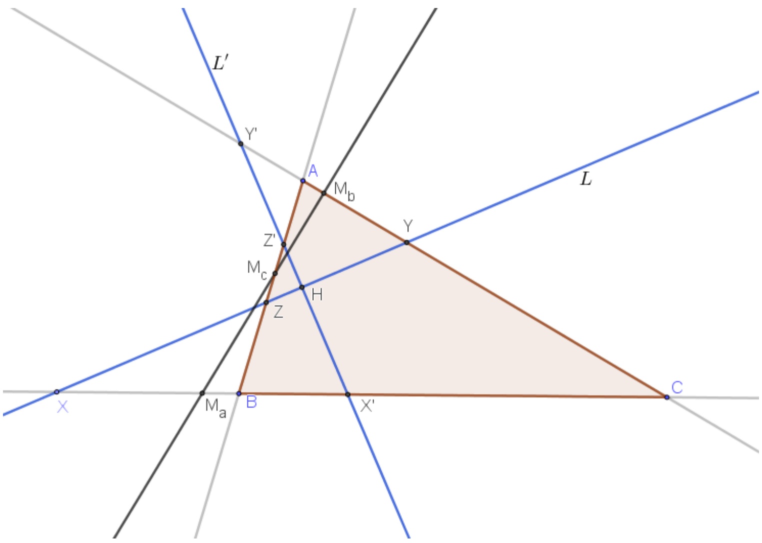
Umro je 14. siječnja 1912. godine u Porrentruyju nakon duge bolesti.

Poglavlje 2

Osnovni Droz-Farnyjev teorem

2.1 Osnovni Droz-Farnyjev teorem

Teorem 2.1.1 (Osnovni Droz-Farnyjev teorem)**.** *Ako se kroz ortocentar trokuta postave dva međusobno okomita pravca, oni na pravcima na kojima leže stranice trokuta omeđuju tri segmenta čija su polovišta kolinearne točke.*



Slika 2.1: Osnovni Droz-Farnyjev teorem

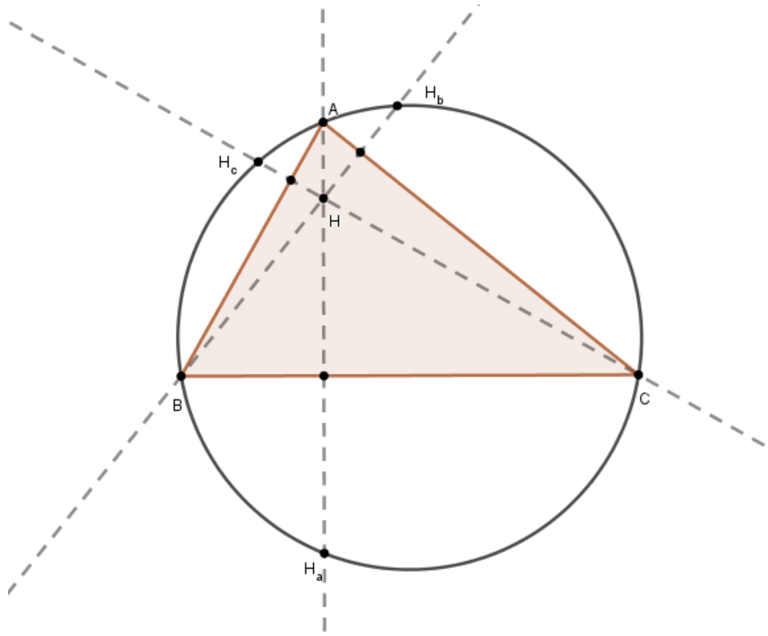
L i L' su okomiti pravci koji prolaze ortocentrom H trokuta ABC i sijeku pravce na kojima leži stranica $\overline{BC}$ u točkama X i X', $\overline{CA}$ u točkama Y i Y' te $\overline{AB}$ u točkama Z i Z',

redom. Polovišta segmenata $\overline{XX'}$, $\overline{YY'}$, $\overline{ZZ'}$ označena su točkama M_a, M_b, M_c i ona su kolinearna.
Nije poznato je li Droz-Farny dokazao sam teorem jer ga je objavio bez dokaza. Tek potkraj 20. stoljeća iskaz teorema ponovno se pojavljuje u različitim izvorima, bez dokaza ili kao zadatak (I. Šarigin 1986., R. Honsberger 1995.). Slijedi razdoblje pojačanog zanimanja za Droz-Farnyjev teorem te je objavljeno više pokušaja dokaza, katkad nepotpunih ili razmjerno kompliciranih. Pojavili su se različiti trigonometrijski dokazi (D. Grinberg 2002.-2004.), projektivnogeometrijski dokazi (N. Reingold 2003.), dokaz primjenom vektorskog računa (N. Stevanović 2004.) te ideje dokaza zasnovane na inverzivnoj geometriji. Otkrivena su i različita poopćenja.
Započinjemo s prvim poznatim sintetičkim dokazom Droz-Farnyjevog teorema, kojeg je objavio Jean-Louis Aymé 2004. godine. [1]. Primjenjuju se tri klasična teorema iz geometrije trokuta i kružnica čije ćemo dokaze također izložiti.

Teorem 2.1.2 (Carnot)**.** *Neka je H ortocentar trokuta ABC, a H_a, H_b i H_c redom sjecišta pravaca AH, BH i CH s kružnicom opisanom trokutu ABC. Tada su nožišta visina iz vrhova A, B, C redom polovišta dužina HH_a, HH_b i HH_c.*

Carnotov teorem često se iskazuje i u sljedećoj, ekvivalentnoj formulaciji:
Zrcalne slike ortocentra trokuta ABC s obzirom na njegove stranice nalaze se na kružnici opisanoj tom trokutu. Na Teorem 2.1.2 pozivat ćemo se i u takvoj formulaciji.

Dokaz. Za dokaz ovog teorema dovoljno je dokazati da je $\sphericalangle H_cAB = \sphericalangle BAH$ (ili $\sphericalangle H_cBA = \sphericalangle HBA$) jer je tada četverokut $AHBH_c$ deltoid budući da je AB simetrala $\sphericalangle HAH_c$ kao i $\sphericalangle HBH_c$.
Kutovi $\sphericalangle BAH_c$ i $\sphericalangle BCH_c$ su jednaki (obodni kutovi nad lukom $\widehat{BH_c}$).
Sada pogledajmo pravokutne trokute ABN_a i CBN_c. Oni su slični jer uz pravi kut imaju i zajednički kut $\sphericalangle ABC$. Zato su im jednaki i kutovi $\sphericalangle BAN_a$ i $\sphericalangle BCN_c$, pri čemu su N_a, N_b i N_c nožišta visina uz oznake sa slike.
Sada imamo $\sphericalangle H_cAB = \sphericalangle BCH_c = \sphericalangle BCN_c = \sphericalangle BAN_a = \sphericalangle BAH$, a to je upravo ono što smo i trebali - trokut AH_cH sad je jednakokračan ($AH = AH_c$) jer visina AN_c raspolavlja kut $\sphericalangle HAH_c$.



Slika 2.2: Carnotov teorem

□

Teorem 2.1.3. *Neka je p pravac koji prolazi ortocentrom trokuta ABC. Zrcalne slike pravca p s obzirom na pravce koji sadrže stranice trokuta ABC tada su pravci koji se sijeku u jednoj točki na kružnici opisanoj tom trokutu.*

Dokaz. Neka pravac p prolazi ortocentrom H trokuta ABC i neka su njegova sjecišta sa stranicama BC, CA i AB označena redom s T_a, T_b i T_c. Znamo da se zrcalne slike H_a, H_b i H_c ortocentra s obzirom na stranice BC, CA i AB nalaze na opisanoj kružnici trokuta ABC. Zrcalne slike pravca p s obzirom na stranice zato su redom pravci T_aH_a, T_bH_b i T_cH_c. Treba dokazati da se ova tri pravca sijeku u jednoj točki i da se ona nalazi na opisanoj kružnici. Označimo sjecište pravaca T_aH_a i T_bH_b s Q. Ako pokažemo da se ta točka nalazi na opisanoj kružnici, onda se sasvim analogno na toj kružnici nalazi sjecište pravaca T_bH_b s T_cH_c te sjecište pravaca T_cH_c i T_aH_a. No, ta tri sjecišta moraju se onda podudarati, budući da se sjecište T_bH_b s opisanom kružnicom, različito od točke H_b, mora također nalaziti i na pravcu T_cH_c.
Točka Q nalazi se na opisanoj kružnici ako je $\sphericalangle H_aQH_b$ obodni kut nad lukom $\widehat{H_aCH_b}$. Kut nad tim lukom jednak je zbroju $\sphericalangle H_aAC + \sphericalangle H_bBC = \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$ (ove kutove vidimo iz pravokutnih trokuta kojima su vrhovi A, C i nožište visine iz vrha A na BC, odnosno B, C i nožište visine iz vrha B na AC, $\sphericalangle BCA = \gamma$). Dakle, treba pokazati da je

$\sphericalangle H_aQH_b = 2\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) = \pi - 2\gamma.$

Imamo $\sphericalangle H_aQH_b = \sphericalangle T_aQT_b = \pi - \sphericalangle QT_aT_b - \sphericalangle QT_bT_a$ (iz trokuta QT_aT_b).
Uočimo da je

$$\sphericalangle QT_aT_b = \pi - \sphericalangle CT_aT_b - \sphericalangle BT_aQ$$

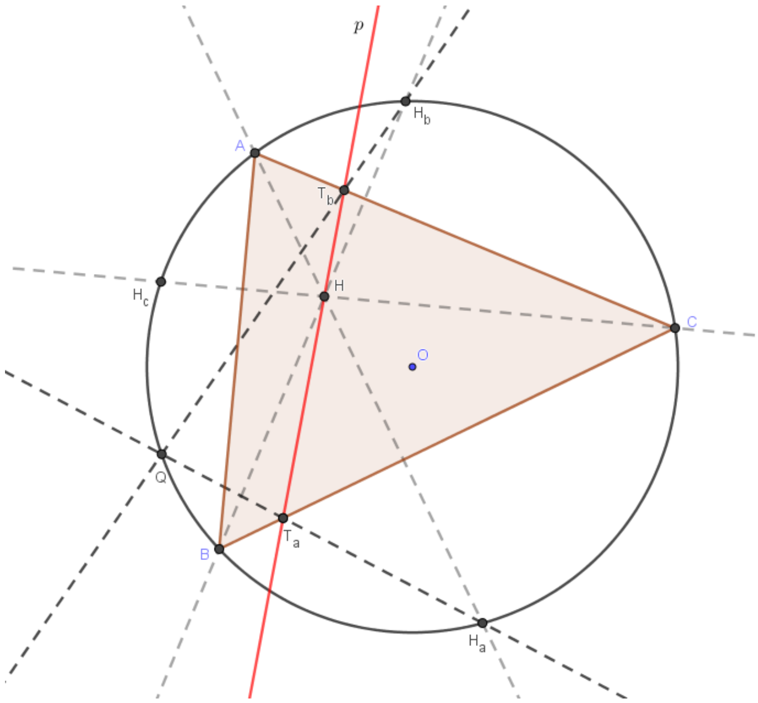
i, analogno,

$$\sphericalangle QT_bT_a = \pi - \sphericalangle CT_bT_a - \sphericalangle AT_bQ.$$

No, $\sphericalangle CT_aT_b = \sphericalangle BT_aQ$, jer je $\sphericalangle CT_aT_b = \sphericalangle CT_aH_a = \sphericalangle BT_aQ$ (simetrija i vršni kutovi), tako da je $\sphericalangle QT_aT_b = \pi - 2\sphericalangle CT_aT_b$ i, analogno, $\sphericalangle QT_bT_a = \pi - 2\sphericalangle CT_bT_a$.
Napokon, iz trokuta T_aT_bQ imamo:

$$\sphericalangle T_aQT_b = \pi-(\pi - 2\sphericalangle CT_aT_b)-(\pi - 2\sphericalangle CT_bT_a) = 2\,(\sphericalangle CT_aT_b + \sphericalangle CT_bT_a)-\pi = 2\,(\pi - \gamma)-\pi = \pi-2\gamma$$

što je i trebalo dokazati.

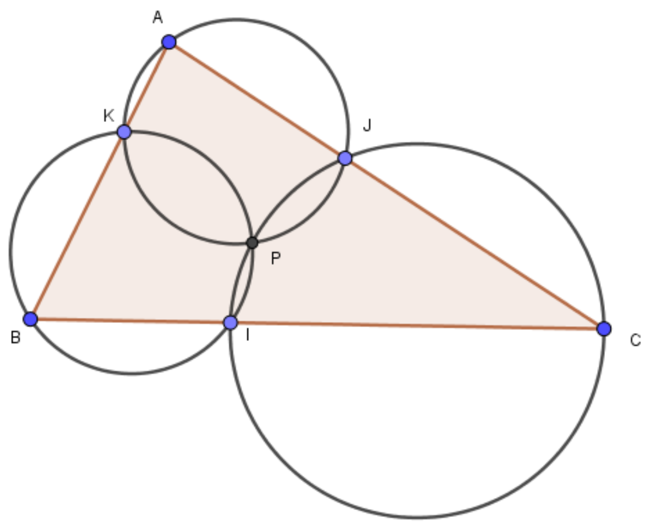


Slika 2.3: Teorem 2.1.3

Dokaz ovog teorema može se pronaći u [6] [Teorem 13.6., str. 111], kao dio jedne znatno općenitije tvrdnje. Naime, u prethodnom Teoremu 13.5. iskazano je svojstvo da su svi trokuti $A'B'C'$, koji su određeni zrcalnim slikama varijabilnog pravca p s obzirom na stranice trokuta ABC, međusobno slični. Pritom nema nikakvog posebnog uvjeta na položaj pravca p, a Teorem 13.6. govori da trokut $A'B'C'$ degenerira u točku P (to jest, da su zrcalne slike pravca p tri konkurentna pravca) ako i samo ako p prolazi ortocentrom trokuta ABC te da je geometrijsko mjesto svih takvih točaka P kružnica opisana trokutu ABC. Dokaz je dosta složen jer se temelji na promatranju sustava sličnosti (preslikavanja) koje preslikavaju zadani trokut, pri čemu njegove stranice prolaze kroz vrhove jednog čvrstog trokuta. (Vidi [6] [Teorem 6.12., str.54]

□

Teorem 2.1.4 (Miquelov teorem o pivotu)**.** *Neka je na svakoj stranici trokuta odabrana po jedna točka, različita od vrhova. Tri kružnice, određene po jednim vrhom trokuta i dvjema odabranim točkama na stranicama kojima je taj vrh zajednički, sijeku se u jednoj točki.*



Slika 2.4: Miquelov teorem o pivotu

Dokaz. Neka je zadan trokut ABC. Neka su točke $K \in AB$, $J \in AC$ i $I \in BC$ kao na slici 2.4. Neka je P sjecište kružnica kroz A, K, J i B, I, K (jedno sjecište je K, drugo je P). Trebamo dokazati da se P nalazi na kružnici kroz C, I, J što je ekvivalentno tvrdnji da je četverokut $PICJ$ tetivni.

Znamo da je zbroj veličina kutova trokuta jednak 180°.

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA = 180^\circ.$$

Također, budući da su četverokuti $AJPK$ i $BIKP$ tetivni znamo da vrijedi:

$$\sphericalangle IPK = 180^\circ - \sphericalangle ABC,$$
$$\sphericalangle KPJ = 180^\circ - \sphericalangle BAC,$$
$$\sphericalangle JPI = 360^\circ - \sphericalangle IPK - \sphericalangle KPJ = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BAC = 180^\circ - \sphericalangle BCA.$$

Preostaje dokazati da je $\sphericalangle CJP + \sphericalangle PIC = 180^\circ$.
Imamo:

$$\sphericalangle PIC = 180^\circ - \sphericalangle BIP = 180^\circ - (180^\circ - \sphericalangle BKP) = \sphericalangle BKP = 180^\circ - \sphericalangle AKP =$$

$$180^\circ - (180^\circ - \sphericalangle AJP) = \sphericalangle AJP = 180^\circ - \sphericalangle CJP.$$

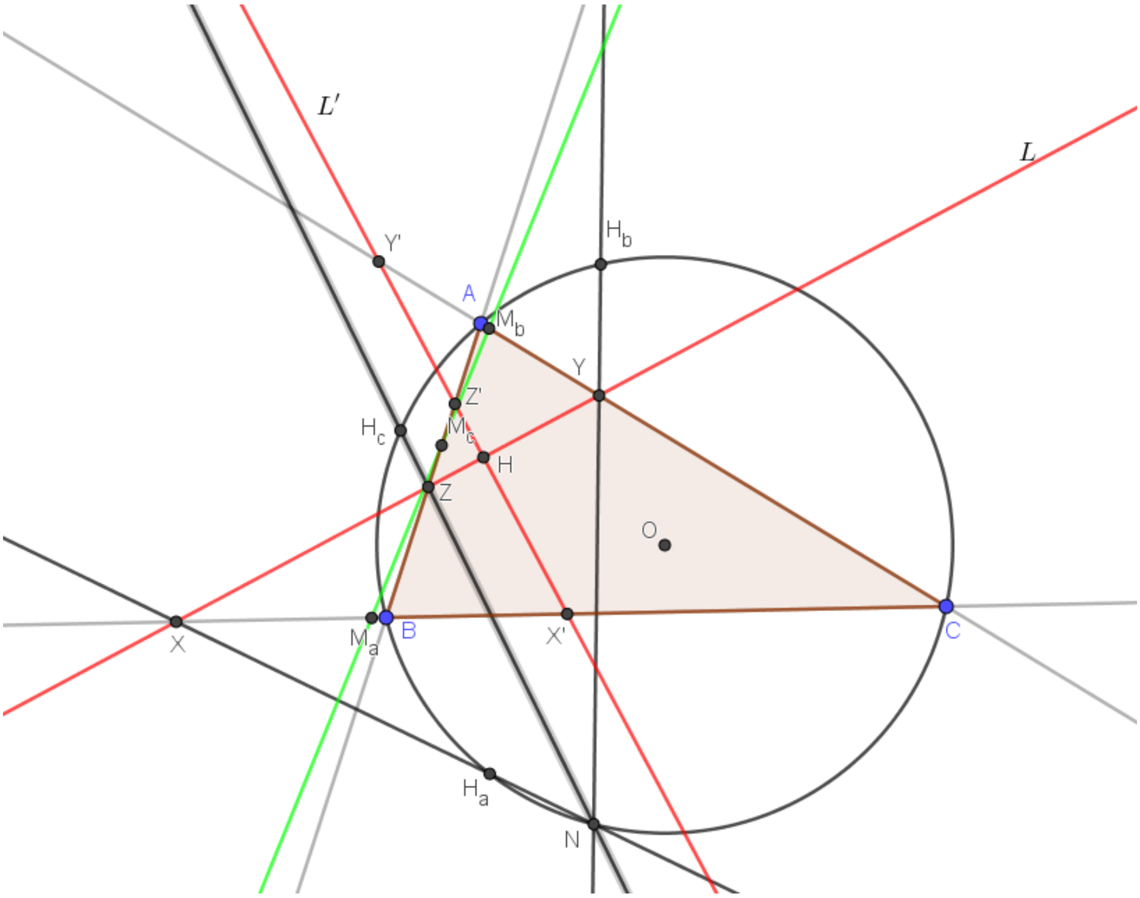
Prema tome, vrijedi da je $\sphericalangle PIC + \sphericalangle CJP = 180^\circ$ iz čega slijedi da je četverokut $PICJ$ tetivan.

□

Prelazimo na dokaz osnovnog Droz-Farnyjevog teorema.

Dokaz. Ako je trokut ABC pravokutan s pravim kutem pri vrhu C, tada je vrh C ortocentar tog trokuta pa umjesto tri segmenta na stranicama dobivamo samo vrh C i jedan segment na pravcu AB koji sadrži hipotenuzu te je u tom slučaju tvrdnja trivijalna. Stoga, uzimamo da trokut ABC nije pravokutan.
Uvodimo sljedeće oznake:
$\mathcal{C}$ kružnica opisana trokutu ABC
$\mathcal{C}_a$ kružnica opisana trokutu HXX' sa središtem u M_a
$\mathcal{C}_b$ kružnica opisana trokutu HYY' sa središtem u M_b
$\mathcal{C}_c$ kružnica opisana trokutu HZZ' sa središtem u M_c
H_a, H_b i H_c redom sjecišta pravaca AH, BH i CH s kružnicom opisanom trokutu ABC.
Sada iz Teorema 2.1.2 slijedi da je $H_a \in \mathcal{C}$.
Budući da je XX' promjer kružnice $\mathcal{C}_a$, slijedi da je $H_a \in \mathcal{C}_a$. Sada imamo da je H_a zapravo presjek kružnica $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}_a$, i $H_aH \perp XX'$. Analogno se dobije da je H_b presjek kružnica $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}_b$ i $H_bH \perp YY'$.
Pretpostavimo da je točka H_c točka simetrična točki H u odnosu na pravac AB. Tada prema Teoremu 2.1.2. slijedi da je $H_a \in \mathcal{C}$. Primijenimo Teorem 2.1.3. na pravac XYZ kroz H i

dobivamo da se pravci H_aX, H_bY i H_cZ sijeku u točki N na kružnici C.
Primijenimo teorem 2.1.4 na trokut XNY (s točkama $H_a \in XN$, $H_b \in YN$, $H_c \in XY$) i dobivamo da kružnice C, C_a i C_b prolaze zajedničkom točkom M.
Analogno se pokaže da kružnice C, C_b i C_c također prolaze zajedničkom točkom M.
Kružnice C_a, C_b i C_c sve prolaze točkama H i M i njihova su središta kolinearna, na simetrali zajedničke tetive $\widehat{HM}$.



Slika 2.5: Droz-Farnyjev teorem

□

Poglavlje 3

Neka poopćenja Droz-Farnyjevog teorema

3.1 Neka poopćenja Droz-Farnyjevog teorema

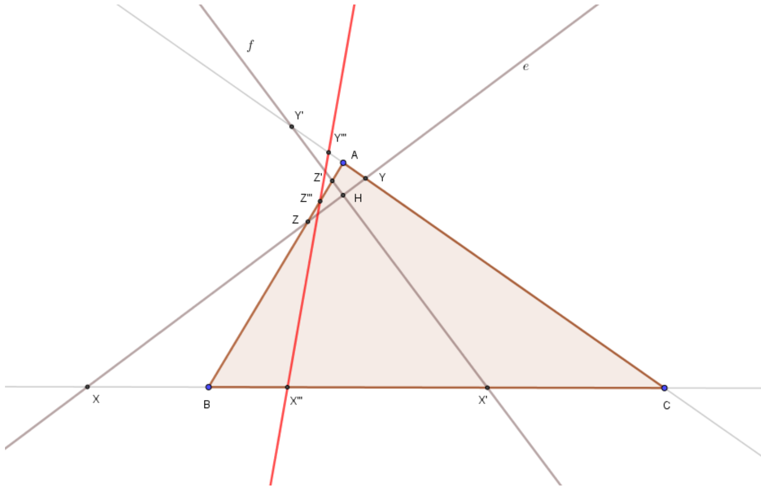
U ovom poglavlju prikazat ću neka poopćenja Droz-Farnyjevog teorema. Različita poopćenja idu u više smjerova, primjerice da istaknuta točka ne mora biti ortocentar zadanog trokuta ili da tri točke izabrane na stranicama ne moraju biti upravo polovišta odgovarajućih segmenata. Ovakvoj generalizaciji pripada i sljedeći rezultat koji je dokazao Floor van Lamoen.

Teorem 3.1.1 (Lamoen)**.** *Ako se u iskazu Droz-Farnyjevog teorema polovišta segmenata* XX', YY' *i* ZZ' *zamijene točkama* X'', Y'' *i* Z'' *koje te segmente dijele u jednakom omjeru, tada su točke* X'', Y'' *i* Z'' *kolinearne.*

U dokazu ovog i nekih sljedećih teorema koristit ćemo nekoliko osnovnih pojmova iz projektivne geometrije. Tu nam je najvažniji pojam dvoomjera i njegovo svojstvo da je invarijantan pod djelovanjem projektiviteta. Potrebne činjenice iskazat ćemo u pojednostavljenom obliku, koliko je dostatno za naša razmatranja.
Podsjetimo najprije da se za tri različite kolinearne točke A, B i C djelišni omjer (AB, C) definira kao omjer orijentiranih dužina $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$. Tako je, primjerice, za polovište M dužine $\overline{AB}$ djelišni omjer $(AB, M) = -1$.
U projektivnoj geometriji djelišni omjer nije invarijanta, ali njegovo poopćenje, dvoomjer, ima to svojstvo.

Definicija 3.1.2. *Neka su* A, B, C *i* D *četiri kolinearne točke. Tada se dvoomjer* $(A, B; C, D)$ *definira s*

$$(A, B; C, D) = (AB, C) \div (AB, D).$$



Slika 3.1: Teorem 3.1.1

Uočimo da je $(A, B; C, D) = (AB, C)$ ako se za točku D uzme tzv. neizmjerno daleka točka pravca kojem pripadaju A, B i C. Naime, realna projektivna ravnina dobiva se proširivanjem euklidske ravnine "novim" točkama koje odgovaraju klasama paralelnih pravaca, dakle, smjerovima pravaca. Svakom pravcu pridoda se i nova točka, njegov smjer, tako da svi međusobno paralelni pravci imaju zajedničko sjecište u "neizmjerno dalekoj točki".
Izračunavanje dvoomjera u kojem se pojavljuje i neizmjerno daleka točka pravca podliježe uobičajenim pravilima računanja sa simbolom ∞, kao kad se uzima limes.
Nama će praktično biti ključna sljedeća tvrdnja:

Lema 3.1.3. *Neka su a, b, c i d četiri različita pravca koji prolaze zajedničkom točkom S. Ako se ti pravci presijeku bilo kojim pravcem p koji ne prolazi točkom S, onda dvoomjer $(A, B; C, D)$, pri čemu su A, B, C, D sjecišta pravca p redom s pravcima a, b, c i d, ne ovisi o izboru pravca p.*

Napominjemo da ova tvrdnja povlači da je dvoomjer invarijantan pod djelovanjem projektiviteta. Za dokaz leme primijeni se Sinusov teorem na trokute SAC, SBC, SAD i SBD pa se pokaže da dvoomjer $(A, B; C, D)$ ovisi samo o kutovima između pravaca a, b, c i d.

Dokaz. (Lamoen): Označimo s p i q pravce koji prolaze ortocentrom H paralelne redom sa stranicama AB i AC. Nadalje, označimo s x i y pravce koji prolaze vrhom A paralelne s pravcima e i f (pri čemu su pravci e i f okomiti pravci iz iskaza Droz-Farnyjevog teorema) i neka su P i Q točke u kojima pravac BC siječe pravce x i y redom. Uočimo da je pramen pravaca (HZ, HZ', HB, p) zapravo slika pramena pravaca (HY', HY, q, HC) rotiranih

za $\psi\left(H, +\frac{\pi}{2}\right)$. Iz činjenice da se to dobiva rotacijom, slijedi da su jednaki dvoomjeri tih četvorki pravaca, a onda i su jednaki dvoomjeri četvorki točaka kad se ti prameni pravaca presijeku bilo kojim pravcima.
Kada se prva četvorka (HZ, HZ', HB, p) presiječe a AB, a druga četvorka (HY', HY, q, HC) s AC dobiva se jednakost dvoomjera

$$(Z, Z'; B, c_\infty) = (Y', Y; b_\infty, C)$$

pri čemu su c_∞ i b_∞ neizmjerno daleke točke pravaca AB i AC. (zbog paralelnosti se presijecanjem dobivaju i neizmjerno daleke točke).
Sada je $\frac{Yb_\infty}{Y'b_\infty} = 1$ i $\frac{Zc_\infty}{Z'c_\infty} = 1$
pa kada se izjednače dvoomjeri i iskoristi ova redukcija imamo:

$$\frac{Yb_\infty}{Y'b_\infty} \div \frac{Y'C}{YC} = \frac{ZB}{Z'B} \div \frac{Zc_\infty}{Z'c_\infty}$$

te

$$\frac{YC}{Y'C} = \frac{ZB}{Z'B} \Leftrightarrow \frac{ZB}{YC} = \frac{Z'B}{Y'C}.$$

Množenjem obje strane jednakosti s $\frac{AC}{AB}$ dobivamo

$$\frac{ZB}{AB} \cdot \frac{AC}{YC} = \frac{Z'B}{AB} \cdot \frac{AC}{Y'C}$$

S druge strane, budući da je:

$$\frac{ZB}{AB} = \frac{XB}{PB}, \frac{AC}{YC} = \frac{PC}{XC}, \frac{Z'B}{AB} = \frac{X'B}{QB}, \frac{AC}{Y'C} = \frac{QC}{X'C}$$

(slični trokuti)
slijedi da je

$$\frac{ZB}{AB} \cdot \frac{AC}{YC} = \frac{Z'B}{AB} \cdot \frac{AC}{Y'C}$$
$$\frac{XB}{PB} \cdot \frac{PC}{XC} = \frac{X'B}{QB} \cdot \frac{QC}{X'C}$$
$$\frac{XB}{XC} \div \frac{PB}{PC} = \frac{X'B}{X'C} \div \frac{QB}{QC}$$

što znači da su jednaki dvoomjeri $(B, C; X, P)$ i $(B, C; X', Q)$.
Posebno, kada presiječemo četvorku $(AB, AC; AX, AP)$ pravcem e, a četvorku $(AB, AC; AX', AQ)$

pravcem f dobivamo odgovarajuće trojke točaka Z, Y, X i Z', Y', X'. Četvrta točka, zbog paralelnosti pravaca $e||AP$ i $f||AQ$, jest neizmjerno daleka točka pravca e, odnosno pravca f. Stoga, dvoomjer prelazi u djelišni omjer te vrijedi:

$$\frac{ZX}{ZY} = \frac{Z'X'}{Z'Y'}.$$

Za bilo koju točku R označimo radijvektor $\overrightarrow{PR}$ s $\mathbf{R}$ pri čemu je P neka točka u ravnini trokuta ABC izabrana kao ishodište. Budući da je

$$\frac{ZX}{ZY} = \frac{Z'X'}{Z'Y'}$$

postoje realni brojevi k i r za koje vrijedi $k + r = 1$ takvi da je

$$\mathbf{Z} = k\mathbf{X} + r\mathbf{Y}$$

$$\mathbf{Z'} = k\mathbf{X'} + r\mathbf{Y'}$$

S druge strane, budući da X'', Y'' i Z'' dijele segmente XX', YY' i ZZ', redom, u istom omjeru, postoje realni brojevi u i v za koje vrijedi $u + v = 1$ takvi da:

$$\mathbf{X''} = u\mathbf{X} + v\mathbf{X'}$$

$$\mathbf{Y''} = u\mathbf{Y} + v\mathbf{Y'}$$

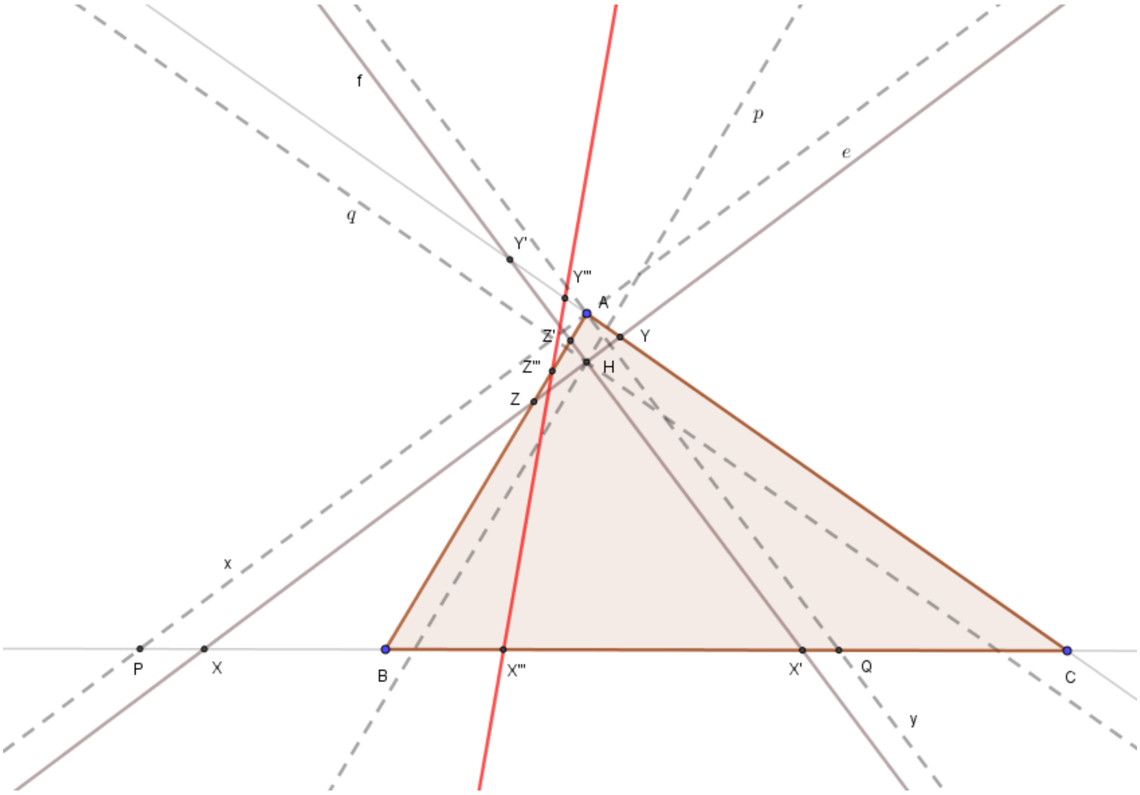
$$\mathbf{Z''} = u\mathbf{Z} + v\mathbf{Z'}$$

Stoga,

$$\mathbf{Z''} = u\mathbf{Z} + v\mathbf{Z'} = u\left(k\mathbf{X} + r\mathbf{Y}\right) + v\left(k\mathbf{X'} + r\mathbf{Y'}\right) = k\left(u\mathbf{X} + v\mathbf{X'}\right) + r\left(u\mathbf{Y} + v\mathbf{Y'}\right) = k\mathbf{X''} + r\mathbf{Y''}$$

Iz činjenice da je $k + r = 1$, slijedi da su točke X'', Y'' i Z'' kolinearne.

□



Slika 3.2: Dokaz Teorema 3.1.1

Jedno poopćenje Droz-Farnyjevog teorema u kojem istaknuta točka ne mora biti ortocentar objavio je 1930. godine Rene Goormaghtigh, belgijski inženjer elektrotehnike i matematičar.

Teorem 3.1.4 (Goormaghtigh)**.** *Neka je ABC trokut, P točka različita od vrhova A, B i C i neka je q pravac koji prolazi točkom P. Nadalje, neka su A', B', C' točke na pravcima BC, CA i AB redom, takve da su pravci PA', PB' i PC' zrcalne slike pravaca PA, PB i PC redom s obzirom na os q. Tada su A', B' i C' kolinearne točke.*

Postoji više dokaza ovog teorema. Ovdje ćemo izložiti teorem iz kojeg on slijedi kao poseban slučaj, a objavili su ga, gotovo istovremeno i neovisno jedan o drugom Dao Thann Oai i Tran Quang Hung.
Naime, u slučaju da su pravci q i q' okomiti, iz ovog teorema slijedi Goormaghtighov teorem.
U dokazu teorema 3.1.7 ključnu ulogu ponovno će imati pristup pomoću projektivne geometrije i dvoomjera.

Također, radi jednostavnosti, dvoomjer pramena pravaca (PA, PB, PC, PD) označavat ću s $P(ABCD)$.

Lema 3.1.5. *Neka su $(O_1O_2, O_1A, O_1B, O_1C)$ i $(O_2O_1, O_2A, O_2B, O_2C)$ dva pramena pravaca. Tada su točke A, B, C kolinearne ako i samo ako*

$$O_1(O_2ABC) = O_2(O_1ABC).$$

Dokaz. Pretpostavimo da su A, B, C kolinearne točke. Označimo s O točku u kojoj se sijeku pravci O_1O_2 i AB. Lako se vidi da je

$$O_1(O_2ABC) = O_1(OABC) = (O, A; B, C) = O_2(OABC) = O_2(O_1ABC)$$

Neka je sada $O_1(O_2ABC) = O_2(O_1ABC)$.
Označimo s O, C_1, C_2 točke u kojima pravci O_1O_2, O_1C, O_2C sijeku AB, redom. Također, lako se vidi da je:

$$(O, A; B, C_1) = O_1(OABC_1) = O_1(O_2ABC) = O_2(O_1ABC) = O_1(OABC_2) = (O, A; B, C_2)$$

te slijedi da je

$$C_1 = C_2 = C.$$

Također, $C \in AB$. Drugim riječima, točke A, B i C su kolinearne. □

Napomena 3.1.6. *Uočimo da u Lemi 3.1.5 uvjet $O_1(O_2ABC) = O_2(O_1ABC)$ možemo zamijeniti s $O_1(AO_2BC) = O_2(AO_1BC)$*

Teorem 3.1.7. *Neka je dan trokut ABC i točka P različita od A, B, C. Neka su q i q' pravci koji prolaze točkom P. Ako točke A', B', C' pripadaju redom pravcima BC, CA i AB tako da*

$$(PA, PA'; q, q') = (PB, PB'; q, q') = (PC, PC'; q, q') = -1,$$

tada su A', B' i C' kolinearne.

Dokaz. Neka je dan proizvoljan pravac koji ne prolazi točkom P te neka on siječe pravce $q, q', PA, PA', PB, PB', PC, PC'$ u točkama $T, T', X, X', Y, Y', Z, Z'$ redom kao na Slici 3.3. Budući da je

$$(PA, PA'; q, q') = (PB, PB'; q, q') = (PC, PC'; q, q') = -1,$$

slijedi

$$P(XX'TT') = P(YY'TT') = P(ZZ'TT') = -1.$$

Uočimo da je $(A, B; C, D) \cdot (B, A; C, D) = 1$ za bilo koje točke A, B, C, D. Primjenom svojstva dvoomjera dobivamo:

$$P(X'XTT') = P(Y'YTT') = P(Z'ZTT') = -1.$$

Slično kao i ranije možemo zaključiti da je

$$P(AA'B'C') = P(XX'Y'X') = P(X'XYZ) = P(A'ABC).$$

Iz Leme 3.1.5 sada slijedi da je $P(A'ABC) = A(A'PBC)$. Štoviše,

$$A(A'PBC) = A(A'PC'B') = A(PA'B'C').$$

Tada, prema Lemi 3.1.5 slijedi da su točke A', B' i C' kolinearne.

□

Lema 3.1.8. *Neka je deset točaka $P, Q, A, A', B, B', C, C', D, D'$ kolinearno i neka vrijedi*

$$(A, A; P, Q) = (B, B'; P, Q) = (C, C'; P, Q) = (D, D'; P, Q) = -1.$$

Tada vrijedi:

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D').$$

Dokaz. Neka je l pravac na kojem leže točke $P, Q, A, A', B, B', C, C', D, D'$. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je l koordinatna os te da točke $P, Q, A, A', B, B', C, C', D, D'$ imaju redom koordinate $0, q, a, a', b, b', c, c', d, d'$. Budući da je

$$(A, A; P, Q) = (B, B'; P, Q) = (C, C'; P, Q) = (D, D'; P, Q) = -1.$$

tj.

$$\frac{AP}{A'P} \div \frac{AQ}{A'Q} = \frac{BP}{B'P} \div \frac{BQ}{B'Q} = \frac{CP}{C'P} \div \frac{CQ}{C'Q} = \frac{DP}{D'P} \div \frac{DQ}{D'Q} = -1$$

$$\frac{a(a'-q)}{a'(a-q)} = \frac{b(b'-q}{b'(b-q)} = \frac{c(c'-q)}{c'(c-q)} = \frac{d(d'-q)}{d'(d-q)}$$

te slijedi

$$2aa' = q(a + a')$$

$$2bb' = q(b + b')$$

$$2cc' = q(c + c')$$

$$2dd' = q(d + d')$$

Izjednačavanjem dobivamo:

$$\frac{aa'}{a+a'} = \frac{bb'}{b+b'} = \frac{cc'}{c+c'} = \frac{dd'}{d+d'}$$

te slijedi:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{c} + \frac{1}{c'} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d'}$$

pa imamo:

$$\frac{a-c}{ac} = -\frac{a'-c'}{a'c'}$$
$$\frac{b-c}{bc} = -\frac{b'-c'}{b'c'}$$
$$\frac{a-d}{ad} = -\frac{a'-d'}{a'd'}$$
$$\frac{b-d}{bd} = -\frac{b'-d'}{b'd'}.$$

Podijelimo obje strane prve jednadžbe s obje strane druge jednadžbe, obje strane treće jednadžbe s obje strane četvrte jednadžbe pa dobivamo:

$$\frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a'-c'}{b'-c'} \cdot \frac{b'}{a'}$$

$$\frac{a-d}{b-d} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a'-d'}{b'-d'} \cdot \frac{b'}{a'}$$

Dijeljenjem ove dvije jednadžbe dobivamo:

$$\frac{a-c}{b-c} \div \frac{a-d}{b-d} = \frac{a'-c'}{b'-c'} \div \frac{a'-d'}{b'-d'}$$

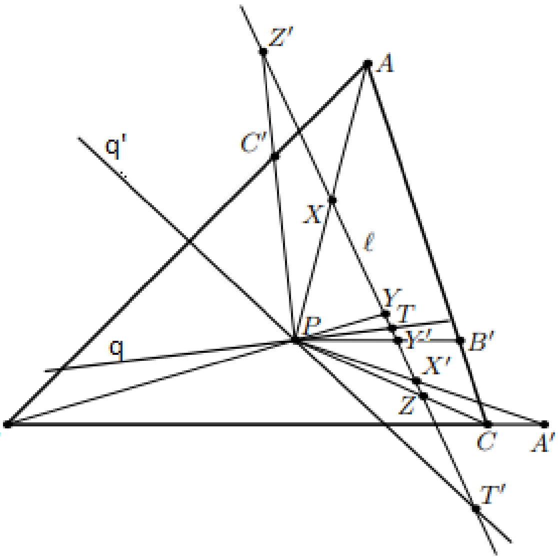
tj.

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D').$$

□

Napomena 3.1.9. *Primijetimo da se u uvjetu Leme 3.1.5 točke A, B, C, D mogu podudarati s točkama A', B', C', D'.*

Dokažimo sada konačno i Goormaghtighov teorem:



Slika 3.3: Dokaz Goormaghtighovog teorema

Dokaz. (Goormaghtigh) Neka je zadan trokut ABC, točka P, pravci q i q' i kolinearne točke A', B', C'. Sada slijedi da je $P(AA'B'C') = P(A'ABC)$, te primjenom Leme 3.1.5. dobivamo da je $P(A'ABC) = A(A'PBC)$. Budući da su točke A, B, C' i A, C, B' kolinearne, slijedi da je $A(A'PBC) = A(A'PC'B')$ te zbog simetrije dvoomjera zaključujemo da je $A(A'PC'B') = A(PA'B'C')$. Sada ponovo, iz Leme 3.1.5. slijedi da su točke A', B' i C' kolinearne.

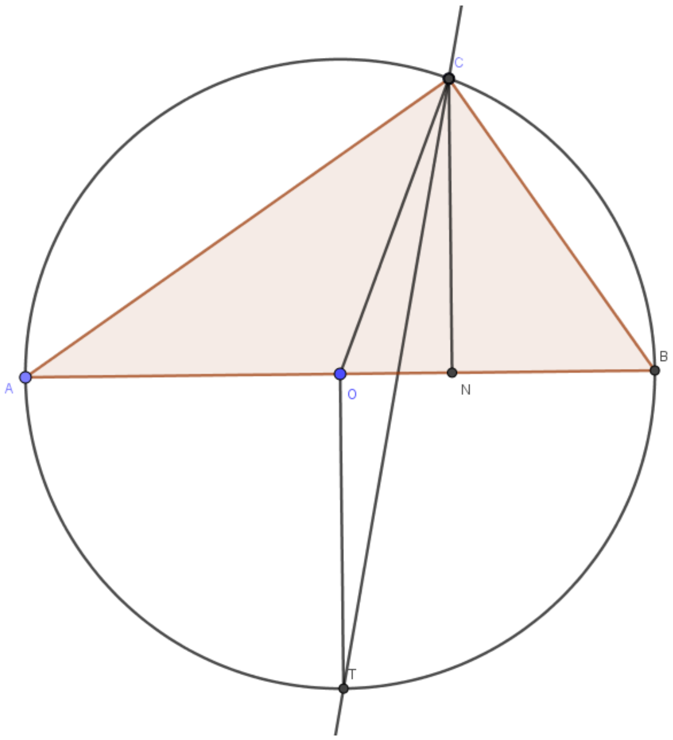
□

Preostaje objasniti vezu između Goormaghtighovog teorema i Droz-Farnyevog teorema. Pokazat ćemo najprije da se Droz-Farnyev teorem može izvesti kao poseban slučaj Goormaghtighovog teorema, kada se za točku P odabere ortocentar H trokuta ABC.
Uzmimo ponovno da su l i l' dva međusobno okomita pravca koji prolaze ortocentrom H te sijeku stranice BC, CA i AB redom u parovima točaka X i X', Y i Y' te Z i Z'. Nadalje, neka su M_a, M_b i M_c redom polovišta dužina $\overline{XX'}, \overline{YY}$ i $\overline{ZZ'}$. Imamo tri pravokutna trokuta: HXX', HYY' i HZZ'. Točke M_a, M_b i M_c, kao polovišta njihovih hipotenuza, ujedno su središta opisanih kružnica ova tri pravokutna trokuta.
Poznato je da pravokutni trokut ima sljedeće svojstvo koje ću prikazati u obliku leme:

Lema 3.1.10. *Simetrala pravog kuta pravokutnog trokuta raspolavlja kut između visine i težišnice iz vrha pravog kuta.*

Dokažimo ovu tvrdnju.

Dokaz. Neka je ABC trokut s pravim kutom u vrhu C, neka je O polovište hipotenuze $\overline{AB}$, ujedno i središte opisane kružnice trokuta ABC te neka je T drugo sjecište simetrale pravog kuta i opisane kružnice. Tada je T polovište luka nad promjerom AB pa je pravac OT paralelan s visinom CN iz vrha C budući da je i $OT \perp AB$. Stoga pravac CT zatvara sukladne kutove s pravcima OT i CN. Kako je trokut OTC jednakokračan ($OT = OC$), to je i $\sphericalangle OCT = \sphericalangle NCT$, što je i trebalo dokazati.



Slika 3.4: Dokaz Leme 3.1.10

□

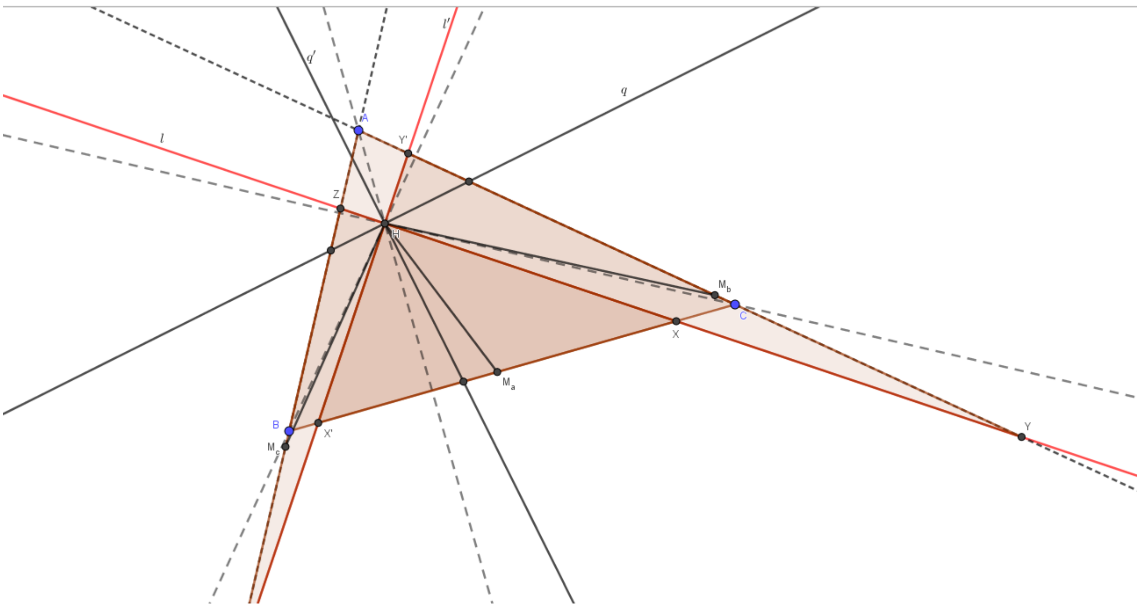
Napomenimo da je ovo svojstvo pravokutnog trokuta poseban slučaj općenite tvrdnje o trokutima. [6, Teorem 14.8., Teorem 14.9., str.122,123].

Vratimo se na razmatranje zašto je Droz-Farnyjev teorem poseban slučaj Goormaghtighovog teorema.

U pretpostavkama Goormaghtighovog teorema uzmimo da je $P = H$ (ortocentar), a pravac q neka je simetrala $\sphericalangle XPX'$ (unutrašnja simetrala pravaca l i l', uzimajući ovaj trokut).

Sada su pravci CP i PM_a međusobno zrcalni s obzirom na pravac q (jer je $CP \perp AB$ pa se visina trokuta PXX' nalazi na pravcu CP), prema dokazanoj Lemi 3.1.10. Stoga je M_a

točka na stranici AB iz Goormaghtighovog teorema. Analognim zaključivanjem za točke M_b i M_c, trebalo bi dobiti da su M_a, M_b i M_c kolinearne točke po Goormaghtighovom teoremu. No, to nije sasvim očito jer odabrana simetrala q pravaca L i l' neće sjeći sve tri stranice u polovištima promatranih segmenata $\overline{XX'}, \overline{YY'}$ i $\overline{ZZ'}$.
Primjerice, pravac q može sjeći segment $\overline{YY'}$ u polovištu M_b, segment $\overline{ZZ'}$ u polovištu M_c, ali sjecište q i AB je vanjska točka segmenta $\overline{XX'}$.
Neka je, kao i ranije, M_a polovište segmenta $\overline{XX'}$. Pitanje je, je li pravac PM_a zrcalna slika pravca PA s obzirom na pravac q.
Lako se vidi, općenito, da ako su q i q' međusobno okomiti pravci, a s bilo koji pravac koji prolazi njihovim sjecištem, onda se podudaraju zrcalne slike pravca s s obzirom na q i q'.
Uzmimo stoga da je q' druga simetrala pravaca l i l', a ta siječe segment $\overline{XX'}$ u unutrašnjoj točki. Prema dokazanom, ta točka je upravo M_a, polovište segmenta $\overline{XX'}$. Budući da pravac PA prolazi točkom P (sjecištem pravaca q i q') njegove zrcalne slike s obzirom na q i q' se podudaraju pa je M_a točka na stranici BC koja odgovara točki A' u iskazu Goormaghtighovog teorema. Po Goormaghtighovom teoremu su onda M_a, M_b i M_c kolinearne, što znači da vrijedi tvrdnja Droz-Farnyevog teorema.



Slika 3.5: Veza između Droz-Farnyevog i Goormaghtighovog teorema

Poglavlje 4

Droz-Farnyjevi pravci kao omotaljka konike

4.1 Droz-Farnyjevi pravci kao omotaljka konike

Neka je ABC trokut s ortocentrom H i opisanom kružnicom Σ. Kao što je ranije rečeno, ako kroz ortocentar trokuta ABC postavimo dva međusobno okomita pravca oni na pravcima BC, CA i AB omeđuju tri segmenta čija su polovišta M_a, M_B i Mc kolinearne točke i pravac na kojem leže te točke zovemo Droz-Farnyjev pravac.
Promjenom položaja para okomitih pravaca dobiva se familija Droz-Farnyjevih pravaca koja čini omotaljku (anvelopu) jedne krivulje drugog reda (konike). To znači da su svi pravci te familije tangente jedne konike. Ona je upisana trokutu ABC, a žarišta su joj ortocentar H i središte O kružnice opisane tom trokutu. Ta konika poznata je kao Macbeathova, ali i kao Eulerova konika. U ovom radu koristit ću termin Eulerova konika zbog povezanosti s Eulerovim pravcem.
Spomenuta anvelopa može se tumačiti i kao upisana konika jednog takozvanog "porizma". Pojam porizma potječe još od Euklida te nema sasvim preciznu definiciju, a odnosi se na formulaciju uvjeta pod kojima stanovita relacija, primjerice međusobni položaj nekih geometrijskih objekata, nastupa za beskonačno mnogo početnih vrijednosti. Vjerojatno najpoznatiji su Steinerov porizam i Ponceletov porizam, koji će kasnije biti posebno spomenut.
Omotaljka koju tvore Droz-Farnyjevi pravci jednog trokuta ABC poprima ulogu zajedničke upisane konike za beskonačnu familiju trokuta koji imaju zajednički Eulerov pravac i svi su upisani u jednu kružnicu.
Stranice svih trokuta iz te familije pojavljuju se kao Droz-Farnyjevi pravci bilo kojeg pojedinačnog trokuta iz familije. Obrnuto, ako je ortocentar jednog trokuta unutar kružnice Σ, svi Droz-Farnyjevi pravci tog trokuta pojavit će se kao stranice nekih trokuta iz spomenute

familije.
Prije iskaza teorema navest ću teoreme i definicije koji su nam potrebni u daljnjem dokazu. Dokazi navedenih teorema mogu se pronaći u [6, Teorem 13.3., str. 109, Teorem 15.1., str. 128].

Definicija 4.1.1. *Neka je dan kut* $\sphericalangle BAC$*. Par pravaca koji prolaze vrhom kuta i sa simetralom tog kuta čine jednake kutove zovemo izogonalama tog kuta.*

Definicija 4.1.2. *Ako se tri pravca položena vrhovima trokuta* ABC *sijeku u jednoj točki* P*, tada se i njihove izogonale također sijeku u nekoj točki* P'*. Točke* P *i* P' *zovemo tada izogonalno konjugiranim točkama ili kraće izogonalnim točkama trokuta* ABC*.*

Definicija 4.1.3. *Dvije točke na istoj stranici danog trokuta koje su jednako udaljene od polovišta te stranice zovemo izotomičnim točkama tog trokuta.*
Spojimo li par izotomičnih točaka na nekoj stranici danog trokuta sa suprotnim vrhom, tada tako dobivene pravce zovemo izotomičnim pravcima danog trokuta.

Definicija 4.1.4. *U geometriji, omotaljka (anvelopa) familije krivulja u ravnini je krivulja koja je tangentna svakom članu familije u nekoj točki, a sve točke dodira čine cijelu omotaljku.*

Teorem 4.1.5 (Simsonov teorem)**.** *Neka je dan trokut* ABC *i njemu opisana kružnica* k*. Neka je* P *točka kružnice* k *i neka su točke* P_1*,* P_2*,* P_3 *ortogonalne projekcije točke* P *na pravce* BC, AC *i* AB *redom. Tada su točke* P_1*,* P_2*,* P_3 *kolinearne.*

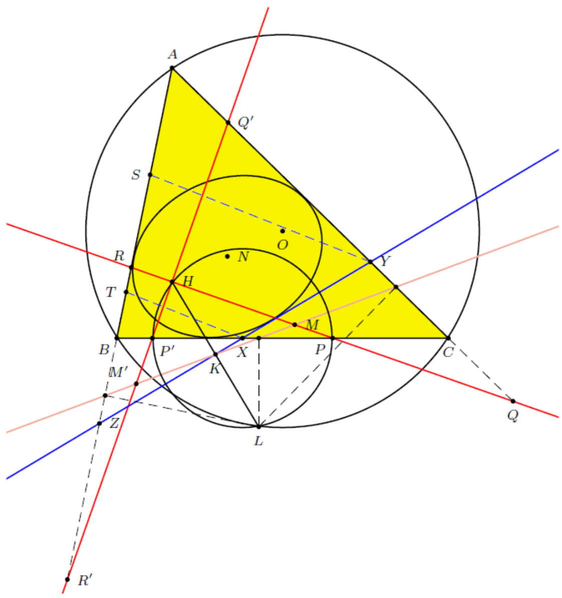
Pravac na kojem leže točke P_1*,* P_2*,* P_3 *zovemo Simsonovim pravcem točke* P *s obzirom na trokut* ABC*.*

Teorem 4.1.6 (Kružnica devet točaka)**.** *Neka su u trokutu* ABC *točke* D, E, F *nožišta visina, točke* A_0, B_0, C_0 *polovišta stranica te točke* M, N, P *polovišta dužina* HA, HB, HC*, gdje je* H *ortocentar. Točke* $D, E, F, A_0, B_0, C_0, M, N, P$ *leže na jednoj kružnici koju nazivamo kružnica devet točaka. Središte te kružnice je polovište dužine* $\overline{HO}$*, gdje je* O *središte opisane kružnice trokuta* ABC*, a njen polumjer* R *jednak je polovini polumjera* r *kružnice opisane trokutu* ABC*.*

Teorem 4.1.7. *Točka koja je simetrična ortocentru* H *trokuta* ABC *s obzirom na Droz-Farnyjev pravac pripada opisanoj kružnici trokuta* ABC*.*

Dokaz. Promotrimo sliku (4.1). Neka su l i l' okomiti pravci koji prolaze ortocentrom H trokuta ABC te neka oni sijeku pravce na kojima leže stranice trokuta BC, CA i AB u točkama P i P', Q i Q', R i R', redom. Neka su X, Y, Z redom polovišta segmenata PP', QQ' te RR'. Prema Droz-Farnyjevom teoremu znamo da su točke X, Y, Z kolinearne. Neka je sada K nožište okomice kroz H na pravac XYZ te neka je L točka na okomici takva da je

$|HK| = |KL|$ pri čemu su točke K i L s različitih strana te okomice. Sada imamo kružnicu HPP' sa središtem u X i $|XH| = |XL|$ (polumjer kružnice HPP', $H \in \Sigma$ zbog Talesovog teorema) pa L leži na toj kružnici. Neka su sada M i M' nožišta okomica kroz L na l i l'. Vidimo da je $LMHM'$ pravokutnik ($HM \perp HM'$ po konstrukciji, M i M' su nožišta okomica iz L na l i l') pa slijedi da je $K \in MM'$ (K raspolavlja dijagonalu HM po konstrukciji pa raspolavlja i $\overline{MM'}$ jer je $HMLM'$ pravokutnik). Sada nožište okomice kroz L na pravac PP' (tj. BC) leži na MM' prema Simsonovom teoremu za opisanu kružnicu trokuta $PP'H$. Analogno, obje okomice kroz L na AB i CA imaju nožišta na MM'. Pritom, L leži na kružnici ABC pri čemu je MM' Simsonov pravac. Stoga je XYZ simetrala segmenta kroz ortocentar i točku na opisanoj kružnici. Uočimo da K leži na kružnici devet točaka.



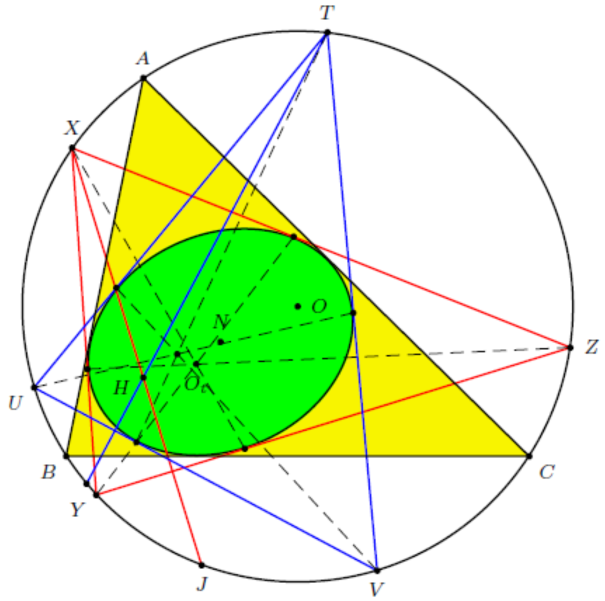
Slika 4.1: Droz-Farnyeva anvelopa

□

Porizam Eulerovog pravca

U trokutu sa stranicama duljine a, b, c, radijus opisane kružnice R i središte opisane kružnice O i ortocentar H uvijek leže u unutrašnjosti kružnice sa središtem O radijusa $3R$. Euler je pokazao da vrijedi jednakost:

$$|OH|^2 = 9R^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$



Slika 4.2: Porizam Eulerovog pravca

Neka je Σ kružnica sa središtem O, radijusa R u koju je upisan trokut ABC (koji nije pravokutan) s ortocentrom H, takva da je $|OH| < 3R$ i H ne leži na kružnici Σ. H će biti ortocentar beskonačno mnogo trokuta XYZ upisanih u kružnicu te ćemo već ovdje dobiti jedan porizam. Konstruiramo te trokute tako da odaberemo točku J na kružnici te konstruiramo simetralu dužine $\overline{HJ}$ koja siječe kružnicu Σ u točkama Y i Z te je XYZ taj trokut, pri čemu smo točku X dobili kao presjek pravca HJ i kružnice Σ. Kako bi to sjecište doista postojalo, možemo namjestiti točku X dovoljno blizu vrha A, B ili C. Elementarno razmatranje pokazat će da taj trokut XYZ ima ortocentar H (što slijedi iz Teorema 2.1.2) i to je jedini takav trokut s opisanom kružnicom Σ i vrhom X, čiji su vrhovi na kružnici Σ.
Promotrimo trokut ABC. Iz same konstrukcije vidi se da je $XH \perp YZ$. Želimo dokazati da je H ortocentar trokuta XYZ. Dovoljno je pokazati da je $YH \perp XZ$. Neka je $YH \cap XZ$ točka Y' te $HJ \cap YZ$ točka T. Želimo pokazati da su trokuti HYT i HXY' slični jer će tada vrijediti da je $\sphericalangle HTY = \sphericalangle HY'T$.
Znamo da je $\sphericalangle YHT = \sphericalangle XHY'$ (jer su to vršni kutovi) te da je $\sphericalangle TYH = \sphericalangle TYJ$ (YT je simetrala kuta HYJ) te je $\sphericalangle TYJ = \sphericalangle ZXJ$ (obodni kutovi nad lukom $\widehat{YZ}$).
Dakle, $\sphericalangle TYH = \sphericalangle ZXY = \sphericalangle Y'XH$.

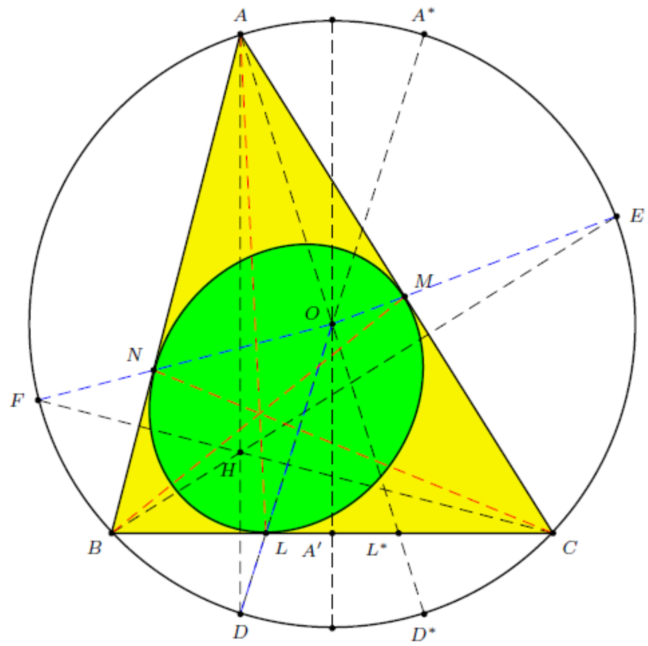
U slučaju kada je H unutar opisane kružnice (što se događa kada je trokut ABC šiljastokutan), tada se svaka točka X na opisanoj kružnici pojavljuje kao vrh trokuta XYZ u porizmu. Konstrukciju možemo ponavljati kako bismo konstruirali po volji mnogo trokuta ABC, TUV, PQR, sve upisane u kružnicu, s ortocentrom H, kao na slici 4.1. Važno je uočiti da trokuti u porizmu svi imaju isti radijus i središte opisane kružnice te ortocentar tako da je suma kvadrata duljina stranica svakog trokuta u porizmu jednaka. (Vidi se iz Eulerove formule da $\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$ ovisi samo o R i $|OH|^2$).

Iskažimo sada teorem u cijelosti u slučaju šiljastokutnog trokuta:

Teorem 4.1.8 (Porizam Eulerovog pravca za šiljastokutan trokut)**.** *Neka je ABC šiljastokutan trokut s ortocentrom H, upisan kružnici Σ sa središtem O i polumjerom R. Tada je svaka točka X kružnice Σ vrh jednog trokuta XYZ kojem je ortocentar H i upisan je kružnici Σ. Nadalje, svi takvi trokuti XYZ opisani su jednoj elipsi sa žarištima H i O i duljinom velike poluosi R.*

Slučaj šiljastokutnog trokuta (konstrukcija)

Povucimo pravce AH, BH, CH koji sijeku kružnicu Σ u točkama D, E, F, redom. Pravci DO, EO, FO sijeku redom stranice AC, AB, BC u točkama L, M, N. Pravac AO siječe kružnicu Σ u točki D^* i BC u točki L^*. Također, DO siječe Σ u A^*. Točke $M^*, N^*, E^*, F^*, B^*, C^*$ nisu prikazane na slici, ali su slično definirane.
A' je polovište stranice $\overline{BC}$ i pravac kroz A' okomit je na $\overline{BC}$.



Slika 4.3: Konika u slučaju šiljastokutnog trokuta

Dokaz. (Porizam Eulerovog pravca za šiljastokutan trokut)

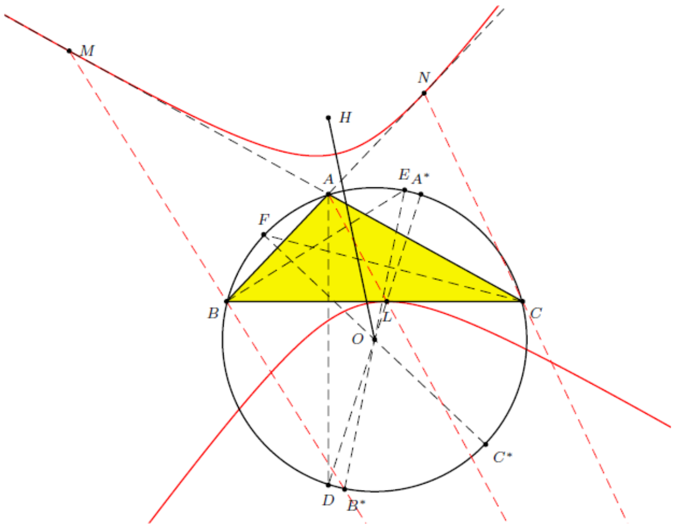
Neka je elipsa definirana kao geometrijsko mjesto točaka P takvih da je $|HP| + |OP| = R$, gdje je R radijus opisane kružnice Σ. Trokut HLD je jednakokračan te slijedi da je $|HL| + |OL| = |LD| + |OL| = R$ pri čemu L leži na elipsi. Sada je $\sphericalangle OLB = \sphericalangle CLD = \sphericalangle CLH$ jer stranica $\overline{BC}$ raspolavlja dužinu $\overline{HD}$. Također, elipsa dira $\overline{BC}$ u točki L i slično u M i N. Slijedi da AL, BM, CN prolaze istom točkom koju ćemo uskoro identificirati pod nazivom Brianchonova točka. Budući da elipsa ovisi samo o O, H i R, slijedi da ako je TUV bilo koji trokut upisan kružnici Σ sa središtem O, radijusom R i ortocentrom H, tada elipsa dira stranice trokuta TUV. Na taj način je porizam dokazan. □

Iskažimo sada teorem u slučaju tupokutnog trokuta:

Teorem 4.1.9 (Porizam Eulerovog pravca za tupokutan trokut)**.** *Neka je ABC tupokutan trokut s ortocentrom H koji se nalazi izvan kružnice Σ opisane trokutu ABC sa središtem O i polumjerom R. I u tom slučaju postoji familija beskonačno mnogo trokuta XYZ koji su upisani kružnici Σ i zajednički ortocentar im je točka H, ali nije svaka točka kružnice vrh*

tog trokuta.
Nadalje, svi trokuti XYZ u ovom slučaju opisani su jednoj hiperboli u smislu da su pravci kojima pripadaju stranice tih trokuta tangente hiperbole. Žarišta te hiperbole također su točke H i O. Međutim, jasno je da postoje tangente te krivulje koje ne određuju trokut iz navedene familije.

Dokaz. (Slučaj tupokutnog trokuta)



Slika 4.4: Konika u slučaju tupokutnog trokuta

Uz ranije oznake, neka je sada hiperbola definirana kao geometrijsko mjesto točke P takve da je $||HP| - |OP|| = R$. Slijedi da je $|HL| - |OL| = |LD| - |OL| = R$ pa L leži na hiperboli.
Također, $\sphericalangle A^*LB = \sphericalangle CLD = \sphericalangle HLC$ pa hiperbola dira $\overline{BC}$ u točki L te dokaz slijedi kao i u slučaju šiljastokutnog trokuta.

$\square$

Dakle, svi ovi trokuti opisuju koniku s jednom osi duljine R usmjerene duž zajedničkog Eulerovog pravca, uz ekscentricitet $\dfrac{|OH|}{R}$. Slijedi da je ta konika elipsa ako je H unutar kružnice odnosno hiperbola ukoliko je H izvan kružnice. Na taj način se pojavljuje porizam kojeg zovemo Porizam Eulerovog pravca budući da svaki trokut unutar porizma ima isti radijus opisane kružnice, težište, središte kružnice devet točaka, ortocentar, itd. Trokut koji je opisan konici dovodi do Brianchonove točke gdje se sjeku tri cevijane koje spajaju svaki vrh s nasuprotnim diralištem. Pokazat ćemo da je Brianchonova točka trokuta iz porizma izotomični konjugat O_t zajedničkog središta opisane kružnice O. Na slici 4.2 odabrana je točka O_t za trokut XYZ. Moguće je odabrati točku H na udaljenosti većoj od $3R$ od O tako da se ne može upisati trokut unutar kružnice sa ortocentrom H i tada ne postoji točka J na kružnici tako da simetrala dužine $\overline{HJ}$ siječe kružnicu.

Identifikacija Brianchonove točke

Teorem 4.1.10 (Brianchon)**.** *Spojnice parova suprotnih vrhova šesterokuta opisanog elipsi, paraboli ili hiperboli imaju zajedničku točku.*

Napomenimo da općenita formulacija Brianchonovog teorema pripada području projektivne geometrije i govori o šesterostranu opisanom nedegeneriranoj krivulji drugog reda (konici).
Brianchonova točka u našem slučaju je točka u kojoj se sijeku pravci AL, BM, CN. Budući da su O i H izogonalni konjugati, slijedi da su D i A^* osnosimetrične slike točaka D i A obzirom na simetralu stranice $\overline{BC}$. Isto vrijedi i za točke B^*, C^*, E^* i F^* obzirom na simetrale odgovarajućih strana trokuta. Slijedi da su A^*D i AD^* međusobno osnosimetrični pravci obzirom na simetrale. Također, L^* je simetričan s L pa je i $A'L = A'L^*$. Konačno, AL^*, BM^*, CN^* se sijeku u točki O, pravci AL, BM, CN u točki O_t što je izotomični konjugat točke O.

Primijetimo također da je Porizam Eulerovog pravca zapravo vrlo poseban slučaj Ponceletovog porizma kojeg mnogi matematičari smatraju jednim od najljepših i najvažnijih rezultata klasične projektivne geometrije. U njemu se tvrdi da ukoliko postoji jedna zatvorena poligonalna crta upisana u danu koniku i opisana oko druge dane konike, tada postoji beskonačna familija takvih poligonalnih crta.

Prirodno je pitati se koja je Kartezijeva jednadžba upisane krivulje. Neka $R = 1$. Pretpostavimo da je točka O u ishodištu koordinatnog sustava te $H := H(c, 0)$ gdje je $0 \leq c < 3, c \neq 1$.

Tada je jednadžba krivulje:

$$4y^2 + (1 - c^2)(2x - c)^2 = 1 - c^2. \tag{4.1}$$

Kada je $c < 1$, H je unutar kružnice Σ te je krivulja elipsa, ali u slučaju kada je $c > 1$ krivulja je hiperbola. U svim slučajevima središte je u $\left(\frac{c}{2}, 0\right)$, što je središte kružnice devet točaka.
Jedna od osi elipse je Eulerov pravac čija je jednadžba $y = 0$. Iz jednadžbe 4.1 vidimo da je ekscentricitet upisane krivulje $c = \frac{|OH|}{R}$ i naravno, žarišta su točke O i H. Ukoliko je H izvan kružnice Σ, tada neće svaka tangenta na krivulju biti stranica trokuta iz porizma.

Poglavlje 5

O aksiomatskoj analizi Droz-Farnyjevog teorema

5.1 O aksiomatskoj analizi Droz-Farnyjevog teorema

U opsežnoj literaturi na temu Droz-Farnyjevog teorema vidljivo je kako je ta tvrdnja, iskazom sasvim elementarna u okvirima euklidske geometrije, matematičarima bila poticajna ne samo da pronađu što prirodniji i elegantniji dokaz nego da time pokušaju doprijeti i do njezine "suštine". Koje su to bitne pretpostavke i svojstva iz kojih proizlazi istinitost teorema? Detaljnu analizu u tom smislu proveli su Rolf Struve i Horst Struve u članku An axiomatic analysis of the Droz-Farny Line Theorem, [9].
U uvodu tog rada autori komentiraju kako su najprije, u duljem razdoblju, objavljivani dokazi pretežno u okvirima analitičke geometrije, pri čemu su bitno korištena svojstva uređaja u euklidskoj ravnini, odnosno svojstvo neprekidnosti polja realnih brojeva. Kao prvi sintetički dokaz navode onaj J.-L. Ayméa, izložen u 1. poglavlju ovog rada, u kojem se primjenjuju teoremi Miquela, Steinera i Carnota, a svrstavaju ga u okvire inverzivne geometrije (geometrije kružnica). Autori zatim navode kako im je cilj proučiti Droz-Farnyjev teorem s gledišta aksiomatskog zasnivanja geometrije. Prvi im je važan rezultat u tom pogledu elementarni sintetički dokaz u kojem nema pozivanja na geometriju kružnica niti na svojstva uređaja i neprekidnosti. Taj pristup smješten je u okvir geometrije zrcaljenja, koju je razvio J. Hjelmslev u prvoj polovici 20. stoljeća, a doradio i sistematizirao R. Bachmann u svojoj knjizi o izgradnji geometrije na pojmu zrcaljenja iz 1973.
Taj dokaz, naglašavaju R. i H. Struve, otkriva također kako je Droz-Farnyjev teorem posebni slučaj Goormaghtighovog, a da je taj sa svoje strane posebni slučaj Hessenbergovog Teorema o nasuprotnom sparivanju (Counterpairing Theorem).
U daljnjem dijelu članka težište je stoga na Goormaghtighovom i Hessenbergovom teoremu, preciznije na proučavanju aksiomatskih temelja za njihovu valjanost, u duhu Hil-

bertovog i Bachmannovog pristupa. Zrcaljenja s obzirom na pravac i s obzirom na točku osnovni su pojmovi, a gibanja se dobivaju kompozicijom zrcaljenja. Incidencija točke i pravca također se definira u terminima zrcaljenja, tako da je točka A incidentna s pravcem p ako i samo ako zrcaljenja s obzirom na A i p komutiraju. Dva pravca su ortogonalna ako i samo ako komutiraju pripadna zrcaljenja. Tri pravca a, b i c pripadaju jednom pramenu, to jest ili prolaze jednom točkom ili su paralelni, ako i samo ako je kompozicija pripadnih zrcaljenja također zrcaljenje.
Prvi aksiom tada glasi:
(A1) Ako je $a \neq b$ i ako vrijedi da su abc i abd zrcaljenja, onda je i acd zrcaljenje.
Drukčije rečeno, ovo znači da ako c i d pripadaju pramenu određenom pravcima a i b, onda a, c i d pripadaju jednom pramenu, što je sasvim razumljivo, ali je formulirano pomoću zrcaljenja.
U svojim završnim zaključcima autori navode kako aksiomatska analiza pokazuje da su jednostavna svojstva grupe gibanja (a ona je generirana zrcaljenjima, kao svojim involutornim elementima) dostatna za dokaz Hessenbergovog i Goormaghtighovog teorema. Štoviše, uz neke formalne bazične postavke, Hessenbergov teorem pokazuje se ekvivalentom sasvim elementarnog aksioma (A1). U tom smislu, aksiomatski pristup preko geometrije zrcaljenja razotkriva stvarne razloge valjanosti teorema, a koje analitički kontekst samo zamagljuje", pišu autori.
Nadalje, jedna od posljedica aksiomatskog raščlanjivanja dovodi do zapažanja kako Hessenbergov i Goormaghtighov teorem, kao i teorem o konkurentnosti visina trokuta te njihove dualne tvrdnje pripadaju apsolutnoj Bachmannovoj geometriji ravnine. Oni su, dakle, neovisni o euklidskom aksiomu o paralelama. Međutim, za Droz-Farnyjev teorem potreban je taj postulat ili aksiom, tako da se Goormaghtighov teorem može smatrati "apsolutnom" verzijom Droz-Farnyjevog teorema.
U ovom pristupu, sintetičkim dokazom pokazuje se da je Dualni Goormaghtighov teorem specijalni slučaj Papposovog teorema o četverovrhu, da pravac siječe tri para nasuprotnih stranica potpunog četverovrha u parovima pridruženih točaka jednog involutornog projektiviteta, što je jedan od ključnih rezultata projektivne geometrije ravnine (nad poljem).
Na kraju, sustav aksioma izložen u ovom članku pokazuje se dostatnim ne samo za spomenute teoreme, nego se svaki model takve geometrije, a to su tzv. Bachmannove ravnine, može smjestiti u projektivno-metričku geometriju nad poljem karakteristike različite od 2, takvu da se relacija ortogonalnosti pravaca može uvesti pomoću simetrične bilinearne forme. Ovim je dan i prikladan odgovor na pitanje koje se prirodno postavlja: koje uvjete treba ispunjavati grupa gibanja kako bi bila moguća koordinatizacija i algebarski opis pripadne geometrijske strukture.
Teorem o nasuprotnom sparivanju ima važnu ulogu u koordinatizaciji, jer se njegovom (trostrukom) primjenom može izvesti Pappus-Pascalov teorem, a dobro je poznato da taj teorem omogućuje koordinatizaciju ravnine poljem.

Iz svega navedenog vidljivo je kako Droz-Farnyjev teorem nije samo zanimljivi kuriozitet iz geometrije trokuta, čiji se dokaz pokazao težim od očekivanog, bez obzira na metodu, nego je usko povezan s nekim fundamentalnim rezultatima iz euklidske, projektivne i apsolutne geometrije ravnine.

Bibliografija

[1] J-L. Aymé, *A Purely Synthetic Proof of the Droz-Farny Line Theorem*, Forum Geometricorum 4(2004), 219-224.

[2] Ch. J. Bradley, D. Monk and G. C. Smith, *On a Porism Associated with the Euler and Droz-Farny Lines*, Forum Geometricorum 7(2007), 11-17., http://forumgeom.fau.edu/FG2007volume7/FG200702.pdf

[3] J.-P. Ehrmann and F. van Lamoen, *A Projective Generalization of the Droz-Farny Line Theorem*, Forum Geometricorum 4(2004), 225-227., http://forumgeom.fau.edu/FG2004volume4/FG200427.pdf

[4] Nguyen Minh Ha and Pham Nam Khanh, *Another simple proof of the Goormaghtigh theorem and the generalized Goormaghtigh theorem*, Journal of Classical Geometry, vol.4 (2/8), http://jcgeometry.org/Articles/Volume4/MinHaNamKhanh.pdf

[5] D. Palman, *Projektivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1984.

[6] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

[7] C. Pohoata and S. H. Ta, *A Short Proof of Lamoen's Generalization of the Droz-Farny Line Theorem*, Math. Reflections 3(2011).,http://geometry.ru/articles/short-Droz-Farny.pdf

[8] C. Pohoata, T. Andreescu, *Back to Euclidean Geometry: Droz-Farny Demystified*, Mathematical Reflections 3 (2012), http://geometry.ru/articles/DFdemystified.pdf

[9] R. Struve, H. Struve, *An axiomatic analysis of the Droz-Farny Line Theorem*, Aequationes Mathematicae 90(6) (2016), 1201-1218.

[10] Ch. Thas, *A Note on the Droz-Farny Theorem*, Forum Geometricorum 6(2006), 25-28., http://forumgeom.fau.eduFG2006volume6/FG200603.pdf

Sažetak

Švicarski matematičar Arnold Droz-Farny objavio je 1899. godine, bez dokaza, tvrdnju iz geometrije trokuta u euklidskoj ravnini koja je u matematičkoj literaturi postala poznata kao Droz-Farnyjev teorem: *Polovišta segmenata koje na stranicama trokuta odsijecaju dva međusobno okomita pravca koji prolaze njegovim ortocentrom tri su kolinearne točke.*
U ovom radu prikazan je prvi sintetički dokaz osnovnog Droz-Farnyjevog teorema, koji je objavio Aymé 2004. godine, zatim dokazi nekih njegovih poopćenja, među kojima je najvažniji Goormaghtighov teorem iz 1930. godine te još neki zanimljivi rezultati povezani s osnovnim teoremom.
Primjerice, Droz-Farnyjevi pravci pridruženi jednom trokutu s obzirom na različite izbore parova okomitih pravaca kroz njegov ortocentar određuju familiju trokuta koji su svi upisani u jednu kružnicu, a opisani jednoj konici te imaju zajednički Eulerov pravac i još neke karakteristične točke. Time je ustanovljeno svojstvo tipa kakav se u geometriji često naziva porizmom, a ovdje je to i poseban slučaj glasovitog Ponceletovog porizma.
Na kraju su istaknuti bitni zaključci aksiomatske analize Droz-Farnyjevog i Goormaghtighovog teorema koju su 2016. proveli R. i H. Struve, s gledišta zasnivanja geometrije na pojmu zrcaljenja.

Summary

The Swiss mathematician Arnold Droz-Farny published in 1899, without a proof, the statement on a property of a triangle in the euclidean plane geometry that became known in mathematical literature as the Droz-Farny Line Theorem: *Two perpendicular lines through the orthocenter of a triangle intercept on the sides of the triangle three segments whose midpoints are collinear.*

In this paper we present the first purely synthetic proof of the basic Droz-Farny theorem as it was published by Aymé in 2004, as well as proofs of some of its generalizations, among which the theorem of Goormaghtigh from 1930 turned out to be the most important one.

We also exhibit some interesting results related to the basic theorem. For example, Droz-Farny lines generated in a triangle by various choices of two perpendicular lines through the orthocenter constitute a family of triangles that all share the circumcircle and an inscribed conic, having the Euler line and some characteristic points in common, too. In this way a certain property is established of the type that in geometry is often called a porism. This one is also a special case of the renowned Poncelet porism.

Finally, we indicate the essential conclusions of the axiomatic analysis of the theorems of Droz-Farny and Goormaghtigh as published by R. and H. Struve in 2016, from the viewpoint of the geometry of reflections.

Životopis

Rođena sam 29. svibnja 1991. godine u Zagrebu. Osnovnoškolsko obrazovanje započinjem 1997. godine u Osnovnoj školi Jordanovac. Paralelno završavam osnovnu glazbenu školu Pavao Markovac u Zagrebu. Godine 2005. upisujem se u III. Gimnaziju u Zagrebu gdje sam 2009. godine maturirala. Iste godine upisujem Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, smjer nastavnički te 2014. godine završavam preddiplomski studij. Godine 2016. upisujem na istom fakultetu diplomski studij, smjer nastavnički.