SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marija Jurčević

POLIGONALNI BROJEVI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Tomislav Pejković

Zagreb, srpanj 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se svom mentoru, doc. dr. sc. Tomislavu Pejkoviću na ukazanom povjerenju i nesebično pruženoj pomoći tijekom izrade diplomskog rada. Od srca zahvaljujem svojoj obitelji na neizmjernoj potpori, posebno ocu kojem ovaj rad i posvećujem.

Sadržaj

Uvod

Počeci figurativnih brojeva sežu daleko u pitagorejsku školu (570.-501. pr. Kr.), gdje su ih Pitagorejci koristili kako bi povezali geometriju i aritmetiku. Brojevi koji čine niz

$$1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, 1 + 2 + 3 + 4, \ldots$$

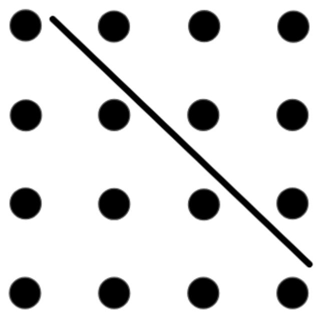
nazivaju se trokutni brojevi, a brojevi koji čine niz

$$1, 1 + 3, 1 + 3 + 5, \ldots$$

kvadratni brojevi (vidi sliku 1.1). Jednom točkicom (kružićem, kvadratićem ili drugim likom) prikazuje se broj 1, a slaganjem tih točkica (odnosno likova) dobivaju se ostali figurativni brojevi. Oni brojevi koji tvore pravilne poligone dobili su naziv poligonalni brojevi. Pitagorejci su, slijedeći svoje vjerovanje „ sve je broj“, svaki prirodan broj prikazivali kao skup točaka u ravnini. Posebnu pažnju su Pitagorejci pridavali broju 10 (trokutni broj) koji je za njih bio jedan od mističnih brojeva. Iz povijesnih izvora poznato je da su se molili nad brojem 10 i izgovarali sljedeće riječi: *Blagoslovi nas, o Božanski broju, koji si stvorio i bogove i ljude. O sveti, sveti Tetraktise! U tebi je vrelo i u tebi su korijeni prirode koja vječno cvate.*

Čak je i Platonov nećak, starogrčki filozof Speusip (407.-339. pr. Kr.) spominjao poligonalne i piramidalne brojeve govoreći kako 1 predstavlja točku, 2 liniju (dužinu), 3 trokut, a 4 piramidu i svaki od tih brojeva je predstavnik svoje vrste, a u sumi $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Oko 175. pr. Kr. starogrčki matematičar i astronom Hipsiklo dao je definiciju poligonalnih brojeva koju je potom Diofant citirao u svojem djelu *Poligonalni brojevi,* a glasi: *Ako postoji po volji mnogo brojeva, počevši s* 1 *i povećavajući ih za istu razliku, tada ako je uzastopna razlika* 1, *zbroj svih brojeva je trokutni broj; ako je razlika* 2, *kvadratan broj; kada je* 3, *peterokutni broj itd. Broj kutova računa se uvećavši uzastopnu razliku za* 2, *a veličina strane dobivenog poligonalnog broja kao ukupan broj članova.* Nikomah i Teon iz Smirne iznijeli su iste definicije za poligonalne brojeve i dobili isti rezultat, dva uzastopna trokutna broja zajedno daju kvadratni broj. Slika 0.1 geometrijski prikazuje da dva uzastopna trokutna broja slaganjem daju kvadrat.

Kao što je već spomenuto, Diofant iz Aleksandrije (starogrčki matematičar, oko 250.) napisao je knjigu *Poligonalni brojevi* koja je bila skup svih tadašnjih znanja o teoriji bro-



Slika 0.1: Zbrajanjem dva uzastopna trokutna broja dobiva se kvadratni broj

jeva, kojoj je i sam dao značajan doprinos. C. G. Bachet de Méziriac (Francuska, 1581.-1638.) napisao je dopunu dviju knjiga Diofantovih *Poligonalnih brojeva*. L. Euler bavio se određivanjem svih trokutnih brojeva koji su ujedno i kvadratni. Fermat se također bavio proučavanjem poligonalnih brojeva, a poznat je njegov komentar na rad i rezultate ostalih matematičara, kojeg je poslao u pismu Mersennu, Pascalu i Digbyju: *Ja sam bio prvi koji je otkrio vrlo lijep i općenit teorem da je svaki broj ili trokutan ili suma dva ili tri trokutna broja; svaki broj je ili kvadratan ili suma* 2, 3 *ili* 4 *kvadratna; peterokutan ili suma* 2, 3, 4 *ili* 5 *peterokutnih brojeva; analogno za šesterokutne, sedmerokutne i sve ostale poligonalne brojeve. Ne mogu vam dati dokaz ovdje, koji ovisi o dubokim i teško razumljivim svojstvima brojeva; namjeravam tome posvetiti cijelu knjigu i ovaj dio artimetike unaprijediti preko dosadašnjih granica.* Takva knjiga nije nikada objavljena. Tek je A. Cauchy (Francuska, 1789.-1857.) dao prvi dokaz Fermatovog teorema da je svaki broj suma m $m-$gonalnih brojeva.

J. Ozanam (Francuska, 1640.-1718.) pronašao je parove trokutnih brojeva 15 i 21, 780 i 990, 1747515 i 2185095 kojima je razlika i suma trokutni broj. J. Whitley pronašao je parove peterokutnih brojeva čija je suma i razlika peterokutni broj. E. B. Escott dokazao je da su 55, 66 i 666 jedini trokutni brojevi, koji imaju manje od 30 znamenki, a sadrže samo jednu ponavljajuću znamenku. A. Deidier (Francuska, 1698.-1746.) naveo je jednostavna svojstva poligonalnih brojeva i izveo centralne poligonalne brojeve tj. opisao njihov nastanak. L. Kronecker (Njemačka, 1823.-1891.) iznio je kratku povijest poligonalnih brojeva. Čitatelje koje interesira znatno više o povijesnom razvoju poligonalnih brojeva upućujemo na [2].

Ovaj diplomski rad temelji se na karakterizaciji poligonalnih brojeva te određivanju koji brojevi su poligonalni na više načina.

Rad se sastoji od dva poglavlja. U prvom poglavlju predstavljeni su poligonalni brojevi te opisi i formule pomoću kojih dobivamo $n-$ti $m-$gonalni broj. Zatim su opisani i centralni poligonalni brojevi, tj. poligonalni brojevi koji nastaju grupiranjem oko jedne čvrste točke. Veze između različitih tipova i veličina poligonalnih brojeva su interpretirane geometrijski.

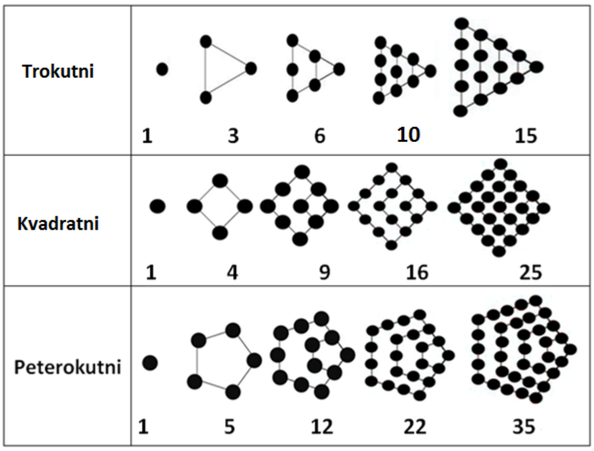
U drugom poglavlju predstavljene su različite multipoligonalnosti. Ponajprije dvostruke, gdje se pitamo koji brojevi su $n-$gonalni za dva različita fiksna broja n. Iznesena su dva načina za određivanje odgovarajućih nizova od kojih je jedan, rješavanjem dobivene Pellove jednadžbe, detaljnije objašnjen. Na kraju su spomenute i trostruke multipoligonalnosti kojima je zbog složenosti posvećeno manje prostora.

Diplomski rad napravljen je u sklopu aktivnosti Projekta KK.01.1.1.01.0004 - Znanstveni centar izvrsnosti za kvantne i kompleksne sustave te reprezentacije Liejevih algebri.

Poglavlje 1

Poligonalni brojevi

Figurativni brojevi su brojevi koji se reprezentiraju kao geometrijski likovi sastavljeni od jednoliko raspoređenih točaka odnosno kružića u ravnini. Kod poligonalnih brojeva točke gradimo u obliku pravilnih poligona koje rasporedimo počevši od jednog vrha dodavajući slojeve na nesusjedne stranice. Slika 1.1 prikazuje prvih nekoliko trokutnih, kvadratnih i peterokutnih brojeva te uočavamo da su pojedini poligonalni brojevi dobili naziv prema broju vrhova u pravilnom mnogokutu koji ih predstavlja. Općenito n-ti poligonalni broj reda m označavamo sa $S_m(n)$. Taj je broj reprezentiran točkama raspoređenim u obliku pravilnog m-terokuta kojem je na svakoj stranici n točaka. Na sljedećim stranicama opširnije



Slika 1.1: Prvih pet članova prva tri poligonalna broja

ćemo prikazati neke od prvih poligonalnih brojeva i proučiti neka njihova svojstva.

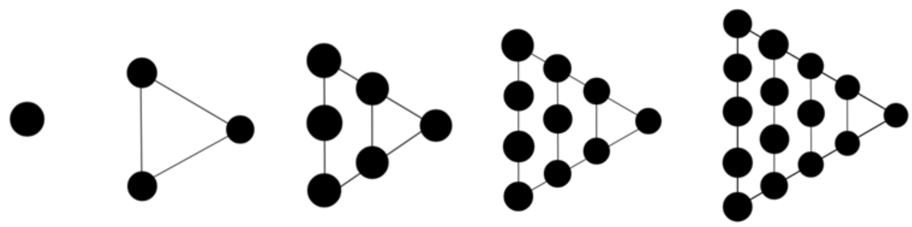
1.1 Trokutni brojevi

Trokutni brojevi su najjednostavniji poligonalni brojevi koje geometrijski u ravnini prikazujemo točkama raspoređenim u obliku trokuta. Ukoliko jednoj točki dodamo dvije točke dobivamo jednakostraničan trokut. Zatim, dodajući tri točke prethodnom jednakostraničnom trokutu dobivamo treći po redu trokutni broj 6. Ponavljajući tako opisan postupak vidimo da se trokutni brojevi opisuju formulom pomoću kojeg lako određujemo $n-$ti po redu trokutni broj.

Propozicija 1.1. *Za trokutne brojeve vrijedi*

$$S_3(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dokaz. Dokaz se lako provodi indukcijom. □

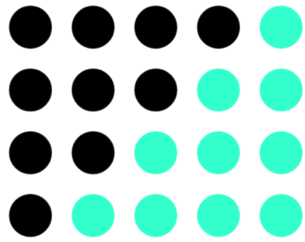


Slika 1.2: Prvih pet trokutnih brojeva

Niz prvih nekoliko trokutnih brojeva glasi:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, \ldots$$

Osim gore prikazanog načina dobivanja opće formula za određivanje n-tog trokutnog broja, mogli smo navedenu formulu dobiti geometrijskom interpretacijom koju prikazujemo na slici 1.3 za $n = 4$. Tada vidimo da je n-ti trokutni broj polovina pravokutnika sa duljinama stranica n i $n + 1$.



Slika 1.3: Geometrijski prikaz propozicije 1.1 za $n = 4$

Za kvadratne brojeve $S_4(n)$ očito vrijedi $S_4(n) = n^2$ a više o njima ćemo reći u idućem poglavlju. Kao ilustraciju, sada iskazujemo poveznicu između dva uzastopna trokutna broja i kvadratnog broja.

Propozicija 1.2. *Suma dva uzastopna trokutna broja je kvadratni broj, tj.*

$$S_3(n-1) + S_3(n) = S_4(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

(Baza indukcije) Za $n = 2$ vrijedi

$$S_3(2) + S_3(1) = 3 + 1 = 4 = S_4. \tag{1.1}$$

(Pretpostavka indukcije) Pretpostavimo da za neki prirodan broj n vrijedi

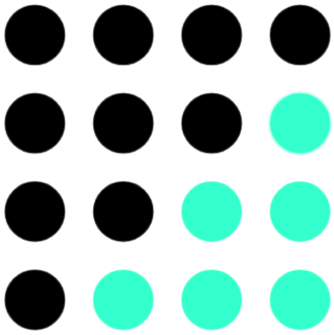
$$S_3(n-1) + S_3(n) = S_4(n).$$

(Korak indukcije) Provjerimo vrijedi li dana jednakost za $n + 1$.
Imamo

$$\begin{aligned} S_3(n) + S_3(n+1) &= S_3(n) + ((n+1) + n + S_3(n-1)) \\ &= S_3(n) + S_3(n-1) + 2n + 1 \\ &= [\text{pretpostavka indukcije}] \\ &= S_4(n) + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 = S_4(n+1). \end{aligned}$$

Iz pretpostavke da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ pokazali smo da vrijedi i za $n + 1$. Budući smo dokazali da vrijedi i baza indukcije, prema principu matematičke indukcije dana tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj n.

Geometrijski dokaz dan je na slici 1.4 za $n = 4$. □



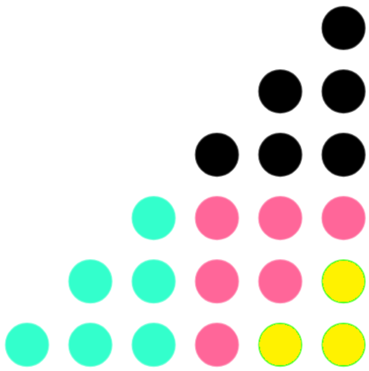
Slika 1.4: Geometrijski prikaz propozicije 1.2 za $n = 4$

Trokutne brojeve možemo prikazati zbrajanjem trokutnih brojeva manjeg indeksa. Izostavit ćemo dokaze koji se provode koristeći princip matematičke indukcije. Tvrdnje ćemo ilustrirati slikama iz kojih se jasno vidi način dokazivanja. Sljedeća propozicija prikazuje da se svaki trokutni broj parnog indeksa može prikazati kao linearna kombinacija dva uzastopna trokutna broja.

Propozicija 1.3. *Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$S_3(2n) = 3S_3(n) + S_3(n-1).$$

Geometrijski prikaz za $n = 3$ dan je na slici 1.5.



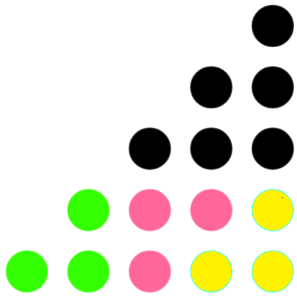
Slika 1.5: Geometrijski prikaz propozicije 1.3 za $n = 3$

Sljedeća propozicija slična je prethodnoj, osim što ovdje promatramo trokutne brojeve neparnog indeksa.

Propozicija 1.4. *Za* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$S_3(2n+1) = 3S_3(n) + S_3(n+1).$$

Dokaz. Dokaz se provodi korištenjem matematičke indukcije, a geometrijski prikaz za $n = 2$ dan je na slici 1.6. □



Slika 1.6: Geometrijski prikaz propozicije 1.4 za $n = 2$

Propozicija 1.5. *Za* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$S_3(3n-1) = 3S_3(n) + 6S_3(n-1).$$

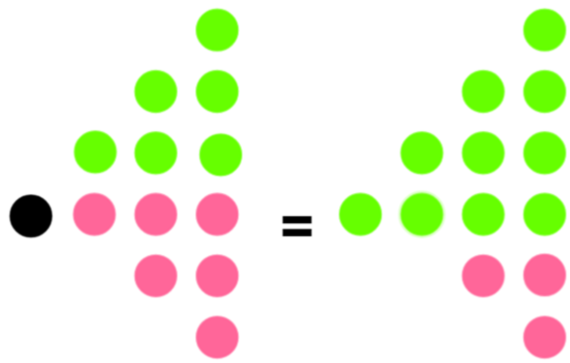
Slika 1.7 pokazuje geometrijski prikaz za $n = 3$.

Slika 1.7: Geometrijski prikaz propozicije 1.5 za $n = 3$

Propozicija 1.6. *Za svaki prirodan broj vrijedi*

$$S_3(n-1) + S_3(n+1) = 2S_3(n) + 1.$$

Na slici 1.8 dan je geometrijski prikaz za $n = 3$.



Slika 1.8: Geometrijski prikaz propozicije 1.6 za $n = 3$

1.2 Kvadratni brojevi

Kad jednoj točki dodajemo tri točke, a ne dvije kao u gore opisanom postupku, dobivamo kvadrat. Sada kvadratu pridodamo pet točaka, zatim sedam itd. te redom dobivamo sve kvadratne brojeve, tj. brojeve koje možemo prikazati točkama raspoređenim u ravnini u obliku kvadrata. Već nas sama riječ „kvadratni" upućuje da se $n-$ti kvadratni broj dobiva kao kvadrat broja n.

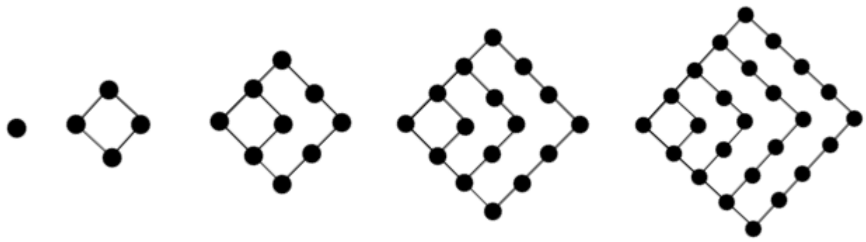
Propozicija 1.7. *Za $n-$ti kvadratni broj vrijedi*

$$S_4(n) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Prvih nekoliko kvadratnih brojeva čine niz

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, \ldots$$

što prikazuje slika 1.9.



Slika 1.9: Prvih pet kvadratnih brojeva

Formulu za određivanje $n-$tog kvadratnog broja dokazujemo indukcijom, a analogno situaciji s trokutnim brojevima, postoje i drugi načini dokazivanja. Spomenuli smo već kako suma dva uzastopna trokutna broja daje kvadratni broj, a sada ćemo navesti još neka svojstva kvadratnih brojeva.

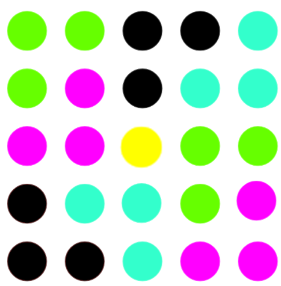
Propozicija 1.8. *Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$S_4(2n+1) = 8S_3(n) + 1.$$

Ovaj teorem poznat je pod nazivom Diofantova formula ili Plutahova formula. Raspisivanjem se lako vidi kako vrijedi

$$8S_3(n) + 1 = 8\frac{n(n+1)}{2} + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2 = S_4(2n+1).$$

Geometrijski to prikazujemo slikom 1.10 za $n = 2$, a potpuni dokaz se provodi matematičkom indukcijom.



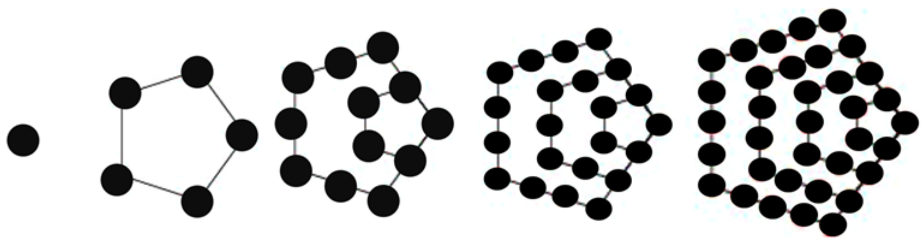
Slika 1.10: Geometrijski prikaz za $n = 2$

1.3 Peterokuti brojevi

Analogno dobivanju trokutnih i kvadratnih brojeva, ako točki pridodamo četiri, zatim sedam, deset itd. točaka dobivamo niz peterokutnih brojeva. Peterokutni brojevi su brojevi koje možemo prikazati točkama raspoređenim u ravnini tako da tvore pravilne peterokute. Prvih nekoliko peterokutnih brojeva čine niz

$$1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, \ldots$$

Slika 1.11 prikazuje prvih pet peterokutnih brojeva.



Slika 1.11: Prvih pet peterokutnih brojeva

Zaključujemo da $n-$ti peterokutni broj određujemo prema sljedećoj formuli.

Propozicija 1.9. *Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$S_5(n) = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{1}{2}n(3n - 1).$$

Veza trokutnih i peterokutnih brojeva dana je sljedećom formulom.

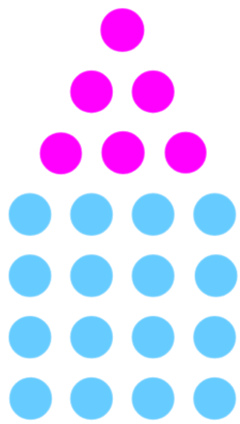
Propozicija 1.10. *Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$S_5(n) = \frac{1}{3}S_3(3n - 1).$$

Sljedeća propozicija pokazuje da se svaki peterokutni broj sastoji od četverokutnog broja i trokutnog broja. Geometrijska interpretacija za $n = 4$ je na slici 1.12.

Propozicija 1.11. *Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$S_5(n) = S_4(n) + S_3(n-1).$$



Slika 1.12: Geometrijski prikaz propozicije 1.18 za $n = 4$

1.4 Ostali poligonalni brojevi

Analogno dosad definiranim poligonalnim brojevima, lako možemo dobiti i ostale poligonalne brojeve: šesterokutne, sedmerokutne, osmerokutne itd. Za njih vrijede slične definicije kao i za prethodne poligonalne brojeve. Radi lakšeg razumijevanja, u tablici 1.1 je izneseno prvih 20 poligonalnih brojeva, navedena su imena poligonalnih brojeva, pripadna opća formula za određivanje $n-$tog člana i prvih nekoliko članova niza.

Naziv	Formula	Pripadni niz
Trokutni brojevi	$\frac{1}{2}n(n+1)$	1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66,...
Kvadratni brojevi	n^2	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121,...
Peterokutni brojevi	$\frac{1}{2}(3n^2 - n)$	1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, 176,...
Šesterokutni brojevi	$\frac{1}{2}(4n^2 - 2n)$	1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190, 231,...
Sedmerokutni brojevi	$\frac{1}{2}(5n^2 - 3n)$	1, 7, 18, 34, 55, 81, 112, 148, 189, 235, 286,...
Osmerokutni brojevi	$\frac{1}{2}(6n^2 - 4n)$	1, 8, 21, 40, 65, 96, 133, 176, 225, 280, 341,...
Deveterokutni brojevi	$\frac{1}{2}(7n^2 - 5n)$	1, 9, 24, 46, 75, 111, 154, 204, 261, 325, 396,...
Deseterokutni brojevi	$\frac{1}{2}(8n^2 - 6n)$	1, 10, 27, 52, 85, 126, 175, 232, 297, 370, 451,...
Jedanaesterokutni brojevi	$\frac{1}{2}(9n^2 - 7n)$	1, 11, 30, 58, 95, 141, 196, 260, 333, 415, 506,...
Dvanaesterokutni brojevi	$\frac{1}{2}(10n^2 - 8n)$	1 12, 33, 64, 105, 156, 217, 288, 369, 460, 561,...
Trinaesterokutni brojevi	$\frac{1}{2}(11n^2 - 9n)$	1 ,13, 36, 70, 115, 171, 238, 316, 405, 505, 616,...
Četrnaesterokutni brojevi	$\frac{1}{2}(12n^2 - 10n)$	1, 14, 39, 76, 125, 186, 259, 344, 441, 550, 671,...
Petnaesterokutni brojevi	$\frac{1}{2}(13n^2 - 11n)$	1, 15, 42 ,82, 135, 201, 280, 372, 477, 595, 726,...
Šesnaesterokutni brojevi	$\frac{1}{2}(14n^2 - 12n)$	1, 16, 48, 88, 145, 216, 301, 400, 513, 640, 781,...
Sedamnaesterokutni brojevi	$\frac{1}{2}(15n^2 - 13n)$	1, 17, 48, 94, 155, 231, 322, 428, 549, 685, 836,...
Osamnaesterokutni brojevi	$\frac{1}{2}(16n^2 - 14n)$	1, 18, 51, 100, 165, 246, 343, 456, 585, 730, 891,...
Devetnaesterokutni brojevi	$\frac{1}{2}(17n^2 - 15n)$	1, 19, 54, 106, 175, 261, 364, 484, 621, 775, 946,...
Dvadeseterokutni brojevi	$\frac{1}{2}(18n^2 - 16n)$	1, 20, 57, 112, 185, 276, 385, 512, 657, 820, 1001,...

Tablica 1.1: $S_m(n)$, $m \leq 20$

Iz tablice 1.1 vidimo drukčiji zapis formula u odnosu na prethodne. To dolazi od opće formule za određivanje $n-$tog $m-$gonalnog broja kojeg zapisujemo kao $S_m(n)$. Takvu generaliziranu definiciju m-gonalnog broja prvi je dao matematičar Hipokrat s Hiosa.

Teorem 1.12. *Neka su n i m prirodni brojevi ≥ 2. Definiramo $n-$ti $m-$gonalni broj u oznaci $S_m(n)$ kao sumu prvih n elemenata aritmetičkog niza s početnim članom 1 i razlikom $m-2$: $1, 1+(m-2), 1+2(m-2), 1+3(m-2), \ldots$ Vrijedi*

$$S_m(n) = \frac{n}{2}\left(n(m-2) - m + 4\right).$$

Dokaz. Suma aritmetičkog niza $a_1, a_2, \ldots a_n$ je $\frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ te je stoga

$$S_m(n) = \frac{n}{2}(1 + 1 + (n-1)(m-2)) = \frac{n}{2}(2 + nm - 2n - m + 2) = \frac{n}{2}(n(m-2) - m + 4).$$

Vidimo da formule dane u tablici 1.1 zaista za pripadni (m, n) odgovaraju ovoj formuli. □

Primjetimo da niz $n-$gonalnih brojeva zadovoljava ovu rekurziju

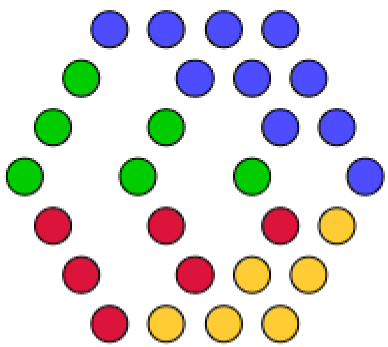
$$S_m(n+1) = S_m(n) + (1 + (m-2)n), \quad S_m(1) = 1, \quad S_m(0) = 0. \tag{1.2}$$

Prikazali smo poveznice između trokutnih, kvadratnih, peterokutnih brojeva, a sada ćemo navesti neke od ostalih poveznica s višim poligonalnim brojevima.

Propozicija 1.13. *Svaki šesterokutni broj može se prikazati kao linearna kombinacija dvaju uzastopnih trokutnih brojeva, tj. vrijedi*

$$S_6(n) = S_3(n) + 3S_3(n-1).$$

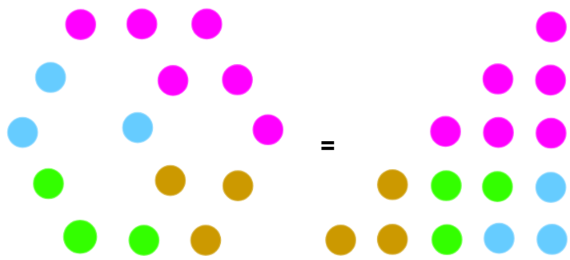
Slika 1.13 geometrijski je prikaz propozicije 1.13 za $n = 4$.



Slika 1.13: Geometrijski prikaz propozicije 1.13 za $n = 4$

Propozicija 1.14. *Svaki šesterokutni broj može se zapisati u obliku trokutnog broja tj. vrijedi*
$$S_6(n) = S_3(2n-1).$$

Slika 1.14 geometrijski je prikaz propozicije 1.14 za $n = 3$.

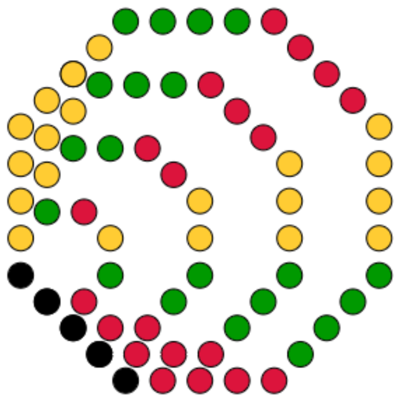


Slika 1.14: Geometrijski prikaz propozicije 1.14 za $n = 3$.

Propozicija 1.15. *Svaki osmerokutni broj može se zapisati kao linearna kombinacija trokutnog broja i danog broja n, odnosno vrijedi*

$$S_8(n) = 6S_3(n-1) + n.$$

Slika 1.15 geometrijski je prikaz propozicije 1.15 za $n = 5$.



Slika 1.15: Geometrijski prikaz propozicije 1.15 $n = 5$

Teorem 1.16. *Svaki poligonalan broj jednak je zbroju prethodnog poligonalnog broja s manjim brojem stranica i istim indeksom i trokutnog broja prethodnog indeksa, odnosno*

$$S_m(n) = S_{m-1}(n) + S_3(n-1).$$

Formula iz prethodnog teorema nazvana je po Nikomahu iz Gerase (1. stoljeće pr. Kr.) Teorem možemo izreći i na ovaj način: razlika $n-$tog $m-$gonalnog broja i $n-$tog $(m-1)-$gonalnog broja je $(n-1)$-vi trokutni broj.

Dokaz. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

(Baza indukcije) Provjeravamo formulu koju želimo pokazati za $n = 2$. Tada vrijedi

$$S_{m-1}(2) + S_3(1) = (m-1) + 1 = m = S_m(2).$$

(Pretpostavka indukcije) Pretpostavimo da za neki prirodan broj n vrijedi tvrdnja.

(Korak indukcije) Dokažimo sada da na temelju pretpostavke slijedi valjanost tvrdnje i za $n + 1$. Imamo

$$\begin{aligned} S_{m-1}(n+1) + S_3(n) &= S_{m-1}(n) + (1 + (m-3)n) + S_3(n-1) + n \\ &= S_m(n) + (1 + (m-2)n) = S_m(n+1). \end{aligned} \tag{1.3}$$

gdje smo za prvu i zadnju jednakost koristili (1.2). Prema principu matematičke indukcije dana tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj n. □

Vidimo da su propozicija 1.2 i propozicija 1.11 zapravo specijalni slučaji ovog teorema za $m = 4$ i $m = 5$.

Teorem 1.17. *Svaki $m-$gonalni broj može se prikazati kao linearna kombinacija dva trokutna broja, odnosno vrijedi*

$$S_m(n) = S_3(n) + (m-3)S_3(n-1) = (m-2)S_3(n-1) + n.$$

Dokaz. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom uz pozivanje na rekurziju (1.2) ili korištenjem teorema 1.12. □

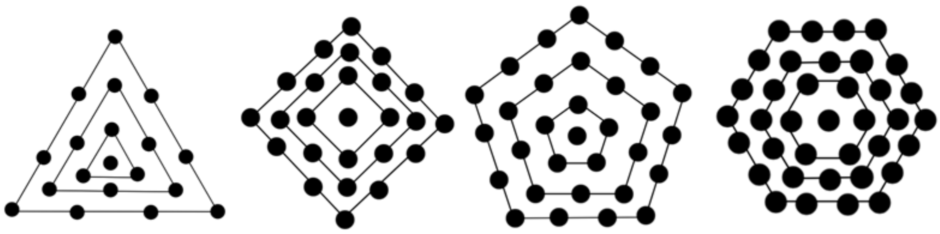
Teorem 1.17 koji se naziva i Bachet de Méziriacova formula je generalizacija propozicija 1.2, 1.13 i 1.15.

1.5 Centralni poligonalni brojevi

Uz jednostavne poligonalne brojeve, postoje i centralni poligonalni brojevi, koji su formirani u ravnini tako da se oko jedne centralne točke grade poligoni s konstantnim brojem stranica. Za fiksirani broj strane m svaki idući omotač centralnog $m-$gonalnog broja ima m točaka više nego prethodni omotač jer dodajemo po jednu točku na svaku stranu. Za $n-$ti centralni $m-$gonalni broj uvodimo oznaku

$$CS_m(n).$$

Tako je primjerice, centralni trokutni broj predstavljen jednakostraničnim trokutom s centralnom točkom oko koje su raspoređene ostale točke. Prvih nekoliko centralnih trokutnih brojeva čine niz 1, 4, 10, 19, 31, 46, 64, 85, ... Analogno dobivamo centralne kvadratne, peterokutne i druge poligonalne brojeve. Na slici 1.16 su prikazane geometrijske interpretacije za prva četiri centralna poligonalna broja.



Slika 1.16: Centralni trokutni, kvadratni, peterokutni i šesterokutni poligonalni brojevi

Teorem 1.18. *Za svaki centralni $m-$gonalni broj vrijedi*

$$CS_m(n+1) = CS_m(n) + nm, \quad CS_m(1) = 1.$$

Dokaz. Dokaz se provodi matematičkom indukcijom. □

Teorem 1.19. *Za $n-$ti centralni $m-$gonalni broj $CS_m(n)$ vrijedi da je jednak sumi prvih n elemenata niza* $1, m, 2m, 3m, 4m, \ldots$ *tj.*

$$CS_m(n) = \frac{mn^2 - mn + 2}{2}, \quad m \geq 3, n \geq 1.$$

Prethodno navedenu formulu iskazat ćemo za prvih dvadeset centralnih poligonalnih brojeva. Sistematizirali smo ih u tablici 1.2 gdje uz oznaku i formulu za određivanje $n-$tog centralnog poligonalnog broja, stoji i prvih deset članova danog niza.

Oznaka	Formula	Pripadni niz
$CS_3(n)$	$\frac{1}{2}(3n^2 - 3n + 2)$	$1, 4, 10, 19, 31, 46, 64, 85, 109, 136, \ldots$
$CS_4(n)$	$2n^2 - 2n + 1$	$1, 5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145, 181, \ldots$
$CS_5(n)$	$\frac{1}{2}(5n^2 - 5n + 2)$	$1, 6, 16, 31, 51, 76, 106, 141, 181, 226, \ldots$
$CS_6(n)$	$3n^2 - 3n + 1$	$1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271, \ldots$
$CS_7(n)$	$\frac{1}{2}(7n^2 - 7n + 2)$	$1, 8, 22, 43, 71, 106, 148, 197, 253, 316, \ldots$
$CS_8(n)$	$4n^2 - 4n + 1$	$1, 9, 25, 49, 81, 121, 169, 225, 289, 361, \ldots$
$CS_9(n)$	$\frac{1}{2}(9n^2 - 9n + 2)$	$1, 10, 28, 55, 91, 136, 190, 253, 325, 406, \ldots$
$CS_{10}(n)$	$5n^2 - 5n + 1$	$1, 11, 31, 61, 101, 151, 211, 281, 361, 451, \ldots$
$CS_{11}(n)$	$\frac{1}{2}(11n^2 - 11n + 2)$	$1, 12, 34, 67, 111, 166, 232, 309, 397, 496, \ldots$
$CS_{12}(n)$	$6n^2 - 6n + 1$	$1, 13, 37, 73, 121, 181, 253, 337, 433, 541, \ldots$
$CS_{13}(n)$	$\frac{1}{2}(13n^2 - 13n + 2)$	$1, 14, 40, 79, 131, 196, 274, 365, 469, 586, \ldots$
$CS_{14}(n)$	$7n^2 - 7n + 1$	$1, 15, 43, 85, 141, 211, 295, 393, 505, 631, \ldots$
$CS_{15}(n)$	$\frac{1}{2}(15n^2 - 15n + 2)$	$1, 16, 46, 91, 151, 226, 316, 421, 541, 676, \ldots$
$CS_{16}(n)$	$8n^2 - 8n + 1$	$1, 17, 49, 97, 161, 241, 337, 449, 577, 721, \ldots$
$CS_{17}(n)$	$\frac{1}{2}(17n^2 - 17n + 2)$	$1, 18, 52, 103, 171, 256, 358, 477, 613, 766, \ldots$
$CS_{18}(n)$	$9n^2 - 9n + 1$	$1, 19, 55, 109, 181, 271, 379, 505, 649, 811, \ldots$
$CS_{19}(n)$	$\frac{1}{2}(19n^2 - 19n + 2)$	$1, 20, 58, 115, 191, 286, 400, 533, 685, 856, \ldots$
$CS_{20}(n)$	$10n^2 - 10n + 1$	$1, 21, 61, 121, 201, 301, 421, 561, 721, 901, \ldots$

Tablica 1.2: $CS_m(n)$, $m \leq 20$

Sada ćemo navesti kako prikazati funkciju izvodnicu niza centralnih $m-$gonalni brojeva za fiksirani m. Podsjetimo se najprije definicije funkcije izvodnice pridružene nizu brojeva.

Definicija 1.20. *Neka je zadan niz realnih brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tada se tom nizu pridružuje red potencija*

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

koji zovemo obična funkcija izvodnica pridružena nizu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Primijetimo da nas neće zanimati pitanje područja konvergencije zadanog reda potencija, već ćemo funkcije izvodnice promatrati samo kao formalni red potencija.

Teorem 1.21. *Funkcija izvodnica niza $(CS_m(n))_{n\geq 0}$, centralnih $m-$gonalnih brojeva ima oblik*

$$\sum_{n=1}^{\infty} CS_m(n)x^n = \frac{x(1+(m-2)x+x^2)}{(1-x)^3}.$$

Dokaz. Na početku pogledajmo rekurzivnu formulu iz teorema 1.18. Vrijedi

$$CS_m(n+1) = CS_m(n) + nm.$$

Zamijenimo n s $n+1$ dobivamo

$$CS_m(n+2) = CS_m(n+1) + (n+1)m.$$

Kada oduzmemo prvu jednakost od druge dobivamo

$$CS_m(n+2) - CS_m(n+1) = CS_m(n+1) - CS_m(n) + m,$$

odnosno

$$CS_m(n+2) = 2CS_m(n+1) - CS_m(n) + m.$$

Slično vrijedi

$$CS_m(n+3) = 2CS_m(n+2) - CS_m(n+1) + m$$

pa oduzimanjem slijedi

$$CS_m(n+3) - CS_m(n+2) = 2CS_m(n+2) - 2CS_m(n+1) - CS_m(n+1) + CS_m(n).$$

Dakle,

$$CS_m(n+3) = 3CS_m(n+2) - 3CS_m(n+1) + CS_m(n).$$

Time smo za niz centralnih $m-$gonalnih brojeva dobili sljedeću linearnu rekurzivnu relaciju

$$CS_m(n+3) - 3CS_m(n+2) + 3CS_m(n+1) - CS_m(n) = 0.$$

Navedena linearna rekurzija je trećeg reda s početnim vrijednostima

$$CS_m(1) = 1, \quad CS_m(2) = m + 1, \quad CS_m(3) = 3m + 1.$$

Radi lakšeg zapisa uvodimo supstituciju $CS_m(n + 1) = c_n$ za $n \geq 0$ i sada dana rekurzivna relacija glasi

$$c_0 = 1, \quad c_1 = m + 1, \quad c_2 = 3m + 1$$

$$c_n - 3c_{n-1} + 3c_{n-2} - c_{n-3} = 0, \quad \text{za} n \geq 3.$$

Sada primijenjujemo uobičajeni način rješavanja rekurzija pomoću funkcija izvodnica. Ako stavimo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

onda imamo

$$\begin{aligned}
xf(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n, \\
x^2 f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n, \\
x^3 f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+3} = \sum_{n=3}^{\infty} c_{n-3} x^n.
\end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned}
f(x) - 3xf(x) + 3x^2 f(x) - x^3 f(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 - 3(c_0 x + c_1 x^2) + 3c_0 x^2 \\
&\quad + \sum_{n=3}^{\infty} (c_n - 3c_{n-1} + 3c_{n-2} - c_{n-3}) x^n \\
&= 1 + (m + 1)x + (3m + 1)x^2 - 3(x + (m + 1)x^2) + 3x^2 \\
&= 1 + (m - 2)x + x^2.
\end{aligned}$$

Dakle, funkcija izvodnica za niz centralnih $m-$gonalnih brojeva je

$$xf(x) = \frac{x(1 + (m - 2)x + x^2)}{1 - 3x + 3x^2 - x^3} = \frac{x(1 + (m - 2)x + x^2)}{(1 - x)^3}.$$

□

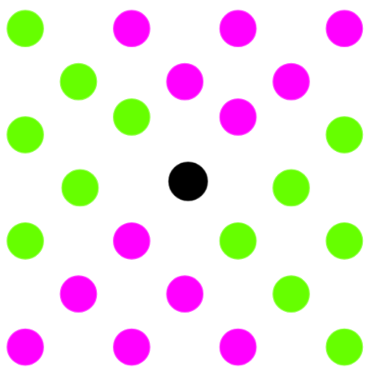
1.6 Identiteti za centralne i obične poligonalne brojeve

Sada ćemo iznijeti neke zanimljive relacije koje povezuju obične i centralne poligonalne brojeve. Te ćemo relacije i geometrijski ilustrirati. Najčešće ćemo preskočiti dokaze koji se lako dobiju iz formula za navedene brojeve dobivenih u teoremima 1.12 i 1.19.

Teorem 1.22. *Svaki $n-$ti centralni $m-$gonalni broj može se dobiti lijepljenjem m kopija $(n-1)-$og trokutnog broja $S_3(n-1)$ oko jedne centralne točke. Vrijedi*

$$CS_m(n) = 1 + mS_3(n-1).$$

Slika 1.17 prikazuje geometrijsku interpretaciju za $n = m = 4$.



Slika 1.17: Geometrijski prikaz teorema 1.22 za $n = m = 4$

Sada slijedi još jedna poveznica između centralnih trokutnih brojeva te sume tri uzastopna trokutna broja.

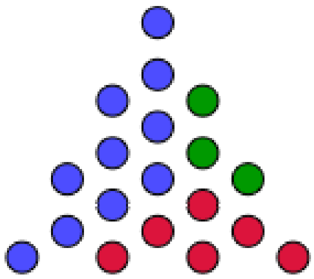
Propozicija 1.23. *Za svaki $n-$ti centralni trokutni broj $CS_3(n)$ vrijedi*

$$CS_3(n) = S_3(n) + S_3(n-1) + S_3(n-2), \quad n \geq 3.$$

Dokaz. Vidimo da je zapravo desna strana dane jednakosti jednaka

$$\frac{1}{2}((n-2)(n-1) + (n-1)n + n(n+1)) = \frac{1}{2}(3n^2 - 3n + 2)$$

što je upravo formula za $n-$ti centralni trokutni broj. Slika 1.18 to prikazuje za $n = 4$. $\square$



Slika 1.18: Geometrijski prikaz propozicije 1.23 za $n = 4$

Slično kao što smo pokazali centralne trokutne brojeve sa sumom uzastopnih trokutnih brojeva, može se učiniti i za centralne i obične kvadratne brojeve.

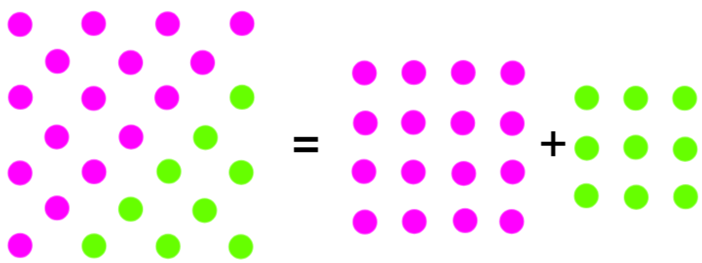
Propozicija 1.24. *Za svaki centralni kvadratni broj $CS_4(n)$ vrijedi*

$$CS_4(n) = S_4(n) + S_4(n-1).$$

Dokaz. Ako $CS_4(n)$ zapišemo koristeći pripadnu formulu tada je

$$CS_4(n) = 2n^2 - 2n + 1 = n^2 + (n^2 - 2n + 1) = n^2 + (n-1)^2 = S_4(n) + S_4(n-1).$$

Slika 1.19 geometrijski je prikaz za $n = 4$. $\square$



Slika 1.19: Geometrijski prikaz propozicije 1.24 za $n = 4$

Pokazat ćemo sada da se centralni kvadratni brojevi mogu prikazati kao linearna kombinacija trokutnih i kvadratnih brojeva.

Propozicija 1.25. *Za $n-$ti centralni kvadratni broj vrijedi*

$$CS_4(n) = S_4(2n-1) - 4S_3(n-1).$$

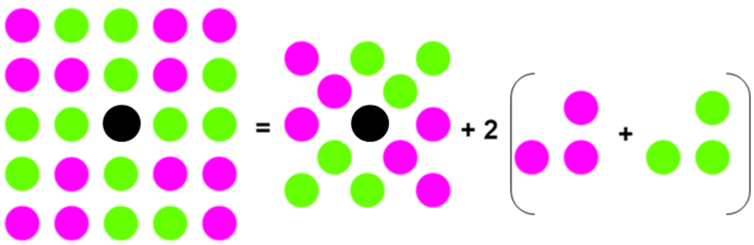
Dokaz. Vidimo da je

$$\begin{aligned} S_4(2n-1) = (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 &= (2n^2 - 2n + 1) + (2n^2 - 2n) \\ &= (2n^2 - 2n + 1) + 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = CS_4(n) + 4S_3(n-1). \end{aligned}$$

Geometrijski prikažemo formulu koju smo upravo dokazali

$$S_4(2n-1) = CS_4(n) + 4S_3(n-1).$$

Svaki centralni kvadratni broj može se načiniti od četiri kopije danog trokutnog broja konstruirajući ih oko centralne točke. Slika 1.20 prikazuje kako se za $n = 3$, peti kvadratni broj konstruira od osam kopija $S_3(2)$ s odgovarajućom centralnom točkom, tj. uzevši od trećeg centralnog kvadratnog broja $CS_4(3)$ četiri kopije $S_3(2)$ i dodavši još preostale četiri kopije $S_3(2)$. □



Slika 1.20: Geometrijski prikaz za $n = 3$

Slična veza postoji između centralnog šesterokutnog broja i trokutnih brojeva, a navodimo je u sljedećoj propoziciji.

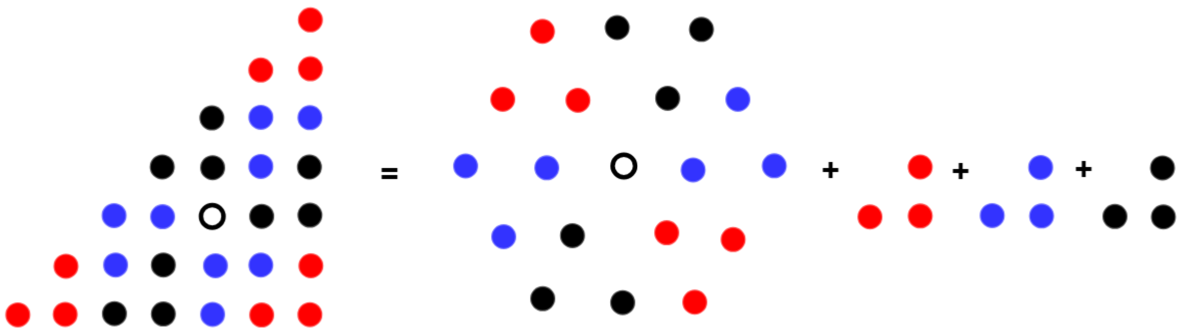
Propozicija 1.26. *Za svaki centralni šesterokutni broj vrijedi*

$$CS_6(n) = S_3(3n-2) - 3S_3(n-1).$$

Dokaz. Kada $S_3(3n-2)$ zapišemo u obliku

$$\begin{aligned} S_3(3n-2) = \frac{(3n-2)(3n-1)}{2} &= \frac{1}{2}(9n^2-9n+2) \\ &= \frac{6n^2-6n+2}{2} + 3\cdot\frac{n(n-1)}{2} = CS_6(n) + 3S_3(n-1) \end{aligned}$$

dobijemo da zaista vrijedi tvrdnja iz propozicije. Geometrijski prikaz, slično prethodnom, dobiven je za $n=3$. Slika 1.21 prikazuje kako spajanjem devet kopija trokutnog broja $S_3(2)$ oko centralne točke nastaje sedmi trokutni broj. Od tih devet trokutnih brojeva desna strana slike sadrži centralni šesterokutni broj sa šest brojeva $S_3(2)$ te još tri slobodna trokutna broja $S_3(2)$. $\square$



Slika 1.21: Geometrijski prikaz propozicije 1.26 za $n = 3$

Sljedeća propozicija navodi da se svaki centralni šesterokutni broj može prikazati u obliku razlike kubova dva uzastopna broja.

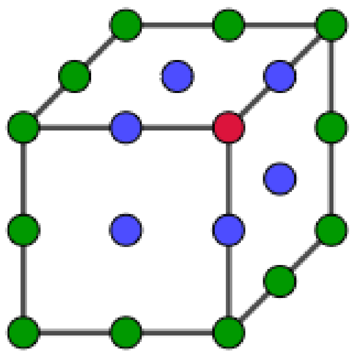
Propozicija 1.27. *Za svaki centralni šesterokutni broj vrijedi*

$$CS_6(n) = n^3 - (n-1)^3.$$

Dokaz. Ova popozicija lako se pokaže ako $CS_6(n)$ zapišemo preko formule i sredimo izraz. Vrijedi

$$CS_6(n) = 3n^2 - 3n + 1 = n^3 - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) = n^3 - (n-1)^3.$$

Na slici 1.22 je naznačeno kako točke s triju susjednih strana kocke koja predstavlja kubni broj 3^3 čine $CS_6(3)$ te njihovim uklapanjem dobivamo kubni broj 2^3. □



Slika 1.22: Geometrijski prikaz propozicije 1.27 za $n = 3$

Navodimo lako uočljivu poveznicu između centralnog osmerokutnog broja i kvadratnog broja neparnog indeksa.

Propozicija 1.28. *Za svaki centralni osmerokutni broj $CS_8(n)$ vrijedi*

$$CS_8(n) = S_4(2n-1).$$

Dokaz. Tvrdnja se zaista lako pokaže. Sjetimo se kako glasi formula za $CS_8(n)$ koju smo naveli u tablici 1.2. Vrijedi $CS_8(n) = 4n^2 - 4n + 1 = (2n-1)^2$. Geometrijski prikaz za $n = 3$ dan je na slici 1.23. □

Veza između centralnog deveterokutnog broja i trokutnog broja dana je u sljedećoj propoziciji.

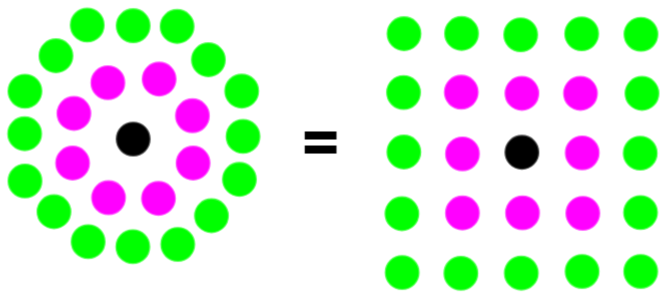
Propozicija 1.29. *Za svaki centralni deveterokutni broj $CS_9(n)$ vrijedi*

$$CS_9(n) = S_3(3n-2).$$

Dokaz. Kao i u nekoliko prethodnih iskaza, ako $CS_9(n)$ zapišemo eksplicitno, imamo

$$CS_9(n) = \frac{9n^2 - 9n + 2}{2} = \frac{(3n-2)(3n-1)}{2} = S_3(3n-2).$$

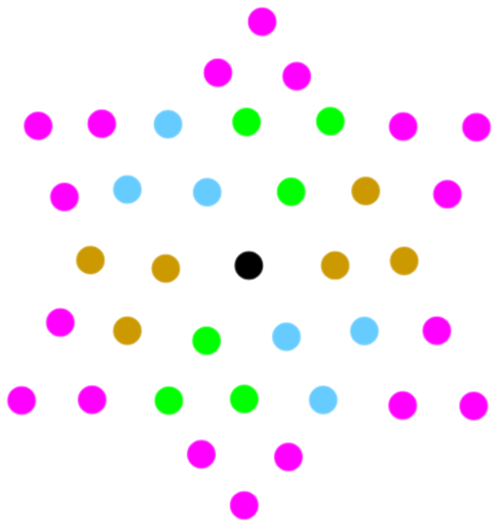
Zaključujemo da od niza centralnih deveterokutnih brojeva $CS_9(1), CS_9(2), CS_9(3), \ldots$ dobivamo odgovarajući podniz koji se sastoji od svakog trećeg trokutnog broja $S_3(1)$, $S_3(4)$, $S_3(7), \ldots$ □



Slika 1.23: Geometrijski prikaz propozicije 1.28 za $n = 3$

Propozicija 1.30. *Za svaki centralni dvanaesterokutni broj vrijedi*

$$CS_{12}(n) = 1 + 12S_3(n-1).$$

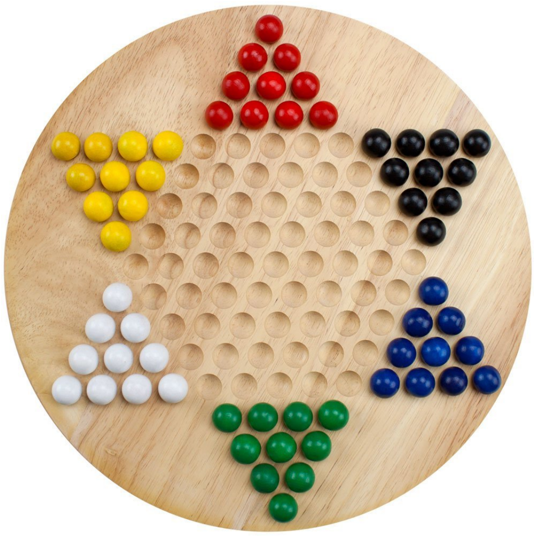


Slika 1.24: Geometrijski prikaz propozicije 1.30 za $n = 3$

Propozicija 1.30 je direktna posljedica teorema 1.22. Ako dvanaest kopija trokuta $S_3(n-1)$ koje zajedno s centralnom točkom izgrađuju $CS_{12}(n)$ rasporedimo tako da od njih šest izgradimo centralni šesterokutni broj, a ostale pridodamo kao kuteve zvijezde, dobivamo takozvani zvijezdasti broj $S(n)$ koji koji je prikazan za $n = 3$ na slici 1.24. Zabavna igra slična dami igra se na ploči zvjezdastog oblika i ima ukupno

$$S(5) = CS_{12}(5) = 1 + 12S_3(4) = 1 + 12 \cdot 10 = 121$$

rupa za figure koje su raznobojne kuglice. Ova društvena igra se ponekad naziva kineska dama iako nema veze s Kinom, već je izumljena krajem 19. stoljeća u Njemačkoj, a proširena po SAD-u. Ploča i figure prikazani su na slici 1.25.



Slika 1.25: Takozvana kineska dama

Poglavlje 2

Multipoligonalnost

Nakon što smo upoznali poligonalne brojeve i njihova svojstva, možemo proučiti koji od tih brojeva su poligonalni na više načina. Za početak, krenut ćemo od jednostavnijih dvostrukih poligonalnosti, a na kraju se dotaknuti trostruko poligonalnih brojeva. Radi lakšeg snalaženja u daljnjem tekstu, ukoliko je neki broj $n-$gonalan i $m-$gonalan, kraće ćemo to zapisivati kao (n, m)-gonalan broj. Npr. za trokutno-kvadratni broj koristit ćemo oznaku $(3, 4)$-kutni broj.

2.1 $(3, 4)$-kutni brojevi

Pravokutni brojevi su brojevi koji se prikazuju kao pravokutnici sastavljeni od točkica pri čemu dulja stranica ima točno jednu točkicu više od kraće. Njih nismo posebno isticali do sada a očito je n-ti pravokutni broj $n(n + 1)$ pa vrijedi

$$2S_3(n) = n(n + 1),$$

i to je poveznica između trokutnih i pravokutnih brojeva. Kao što i sam naziv kaže, $(3, 4)$-kutni brojevi su brojevi koji su istovremeno trokutni i kvadratni. Prvih nekoliko takvih brojeva čine niz 1, 36, 1225, 41616,... Vidimo da nije očito koji brojevi su takvi, ali postoji način kako ih možemo odrediti. Pokazali smo da vrijedi

$$S_3(n) = \frac{n(n + 1)}{2} \quad \text{i} \quad S_4(n) = n^2.$$

Dakle, potrebno je odrediti sve prirodne brojeve n i k za koje vrijedi

$$\frac{n(n + 1)}{2} = k^2, \tag{2.1}$$

odnosno

$$\begin{aligned} n^2 + n &= 2k^2 \\ 4n^2 + 4n + 1 &= 8k^2 + 1 \\ (2n+1)^2 - 2(2k)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Napravimo li supstituciju $x = 2n + 1$ i $y = 2k$, dobivamo jednadžbu

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$

Ovaj tip jednadžbi naziva se Pellove jednadžbe, pa ćemo ukratko izložiti postupak za njihovo rješavanje.

2.2 Pellove jednadžbe

Na početku iznosimo definiciju jednostavnog verižnog razlomka koji će nam trebati u postupku za rješavanje Pellove jednadžbe. Ovdje nećemo provoditi dokaze, a zainteresirane čitatelje upućujemo na [3].

Definicija 2.1. *Ako je a_0 cijeli broj, $a_1, \dots, a_n$ prirodni brojevi, te*

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}},$$

onda ovaj izraz zovemo razvoj broja α u konačni jednostavni verižni (neprekidni) razlomak i kraće to zapisujemo $\alpha = [a_0, a_1, ..., a_n]$. Nadalje, $\frac{p_i}{q_i} = [a_0, ..., a_n]$ je $i-$ta konvergenta od α, a_i je $i-$ti parcijalni kvocijent, a $\alpha_i = [a_i, a_{i+1}, ..., a_n]$ je $i-$ti potpuni kvocijent od α.

Ako je α iracionalan broj, onda ima beskonačni razvoj u verižni razlomak

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}},$$

tj. postoji $\lim_{n\to\infty}[a_0, a_1, \dots, a_n]$ i označavamo ga $[a_0, a_1, a_2...]$. I u ovom slučaju je $\frac{p_i}{q_i} = [a_0, \dots, a_i]$ $i-$ta konvergenta od α, a_i $i-$ti parcijalni kvocijent, $\alpha_i = [a_i, a_{i+1}, \dots]$ $i-$ti potpuni kvocijent od α.

Definicija 2.2. *Za iracionalan broj α kažemo da je kvadratna iracionalnost ako je α korijen kvadratne jednadžbe s racionalnim koeficijentima.*

Pokazuje se da postoji veza periodičnosti verižnog razlomka i kvadratnih iracionalnosti.

Teorem 2.3. *(Euler, Lagrange) Razvoj u jednostavni verižni razlomak realnog broja α je periodski, tj. oblika*

$$\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_k, \overline{a_{k+1}, \dots, a_{k+l}}]$$

(gdje crta iznad znači ponavljanje bloka u nedogled) ako i samo ako je α kvadratna iracionalnost.

Teorem 2.4. *Ako prirodan broj d nije potpun kvadrat, onda razvoj u jednostavni verižni razlomak od $\sqrt{d}$ ima oblik*

$$\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_{r-1}, 2a_0}],$$

gdje je $a_0 = \lfloor \sqrt{d} \rfloor$,dok su $a_1, \dots, a_{r-1}$ centralno simetrični, tj. $a_1 = a_{r-1}$, $a_2 = a_{r-2}$, itd.

Na primjeru ćemo pokazati razvoj nekih kvadratnih iracionalnosti u verižni razlomak.

Primjer 2.5. $1 + \sqrt{2} = 2 + (\sqrt{2} - 1) = 2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$, *pa je* $1 + \sqrt{2} = [\overline{2}]$ *te* $\sqrt{2} = [1, \overline{2}]$.
Slično pokažemo da je

$$1 + \sqrt{3} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\sqrt{3}}},$$

pa je $1 + \sqrt{3} = [\overline{2, 1}]$ *te* $\sqrt{3} = [1, \overline{1, 2}]$. *Algoritmom za razvoj kvadratne iracionalnosti u verižni razlomak dobijemo* $\sqrt{6} = [2, \overline{2, 4}]$.

U nastavku iznosimo osnovne definicije i činjenice vezane uz Pellovu jednadžbu koje su nam potrebne, a dokaze se može potražiti u [3] i [4].

Definicija 2.6. *Neka je d prirodan broj koji nije potpuni kvadrat. Diofantska jednadžba oblika*

$$x^2 - dy^2 = 1$$

zove se Pellova jednadžba.
Jednadžba oblika

$$x^2 - dy^2 = N,$$

gdje je d prirodan broj koji nije potpun kvadrat i N cijeli broj različit od nule, naziva se pellovska jednadžba.

Teorem 2.7. *Neka je d prirodan broj koji nije potpun kvadrat, te neka su p_n/q_n konvergente u razvoju od $\sqrt{d}$. Neka je N cijeli broj takav da je $|N| < \sqrt{d}$. Tada svako pozitivno rješenje $x = u$, $y = v$ jednadžbe $x^2 - dy^2 = N$ za koje su x i y relativno prosti zadovoljava $u = p_n$, $v = q_n$ za neki prirodan broj n.*

Teorem 2.8. *Sva rješenja u prirodnim brojevima jednadžbi $x^2 - dy^2 = \pm 1$ nalaze se među $x = p_n$, $y = q_n$, gdje su p_n, q_n konvergente u razvoju od $\sqrt{d}$.*
Neka je r duljina perioda u razvoju od $\sqrt{d}$.
Ako je r paran, onda jednadžba $x^2 - dy^2 = -1$ nema rješenja, a sva rješenja od $x^2 - dy^2 = 1$ su dana sa $x = p_{nr-1}$, $y = q_{nr-1}$ za $n \in \mathbb{N}$.
Ako je r neparan, onda su sva rješenja jednadžbe $x^2 - dy^2 = -1$ dana sa $x = p_{nr-1}$, $y = q_{nr-1}$ za n neparan, dok su sva rješenja $x^2 - dy^2 = 1$ dana sa $x = p_{nr-1}$, $y = q_{nr-1}$ za n paran.

Teorem 2.9. *Ako je (x_1, y_1) najmanje rješenje u prirodnim brojevima jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$, onda su sva rješenja ove jednadžbe dana sa (x_n, y_n) za $n \in \mathbb{N}$, gdje su x_n i y_n prirodni brojevi definirani s*

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n.$$

Teorem 2.10. *Neka je $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz svih rješenja Pellove jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$ u prirodnim brojevima, zapisan u rastućem redosljedu. Uzmimo da je $(x_0, y_0) = (1, 0)$. Tada vrijedi*

$$x_{n+2} = 2x_1x_{n+1} - x_n, \quad y_{n+2} = 2x_1y_{n+1} - y_n, \quad n \geq 0.$$

2.3 Nastavak o $(3, 4)$-kutnim brojevima

Vratimo se sada rješavanju navedene Pellove jednadžbe

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$

U primjeru 2.5 pokazali smo da je $\sqrt{2} = [1, \overline{2}]$. Fundamentalno tj. najmanje rješenje ove Pellove jednadžbe u prirodnim brojevima prema teoremu 2.8 je

$$x = p_{1\cdot 2-1} = p_1 = 3, \quad y = q_1 = 2.$$

To smo mogli dobiti i direktno uvrštavanjem. Teorem 2.10 daje niz svih rješenja dane Pellove jednadžbe

$$\begin{array}{lll} x_0 = 1, & x_1 = 3, & x_{m+2} = 6x_{m+1} - x_m, \\ y_0 = 0, & y_1 = 2, & y_{m+2} = 6y_{m+1} - y_m \end{array} \quad \text{za } m \geq 0.$$

Dobivamo

$$y_m = 2, 12, 70, 408, 2378, 13860, \ldots$$

Iz Pellove jednadžbe $x^2 - 2y^2 = 1$ y je paran. Kako je u (2.1) $k = \frac{y_m}{2}$, vidimo da je k pa i k^2 cijeli broj za svaki m, tj. iz svakog rješenja (x_m, y_m) Pellove jednadžbe $x^2 - 2y^2 = 1$ dobivamo jedan $(3,4)$-kutni broj $(y_m/2)^2$. Svi $(3,4)$-kutni brojevi čine niz

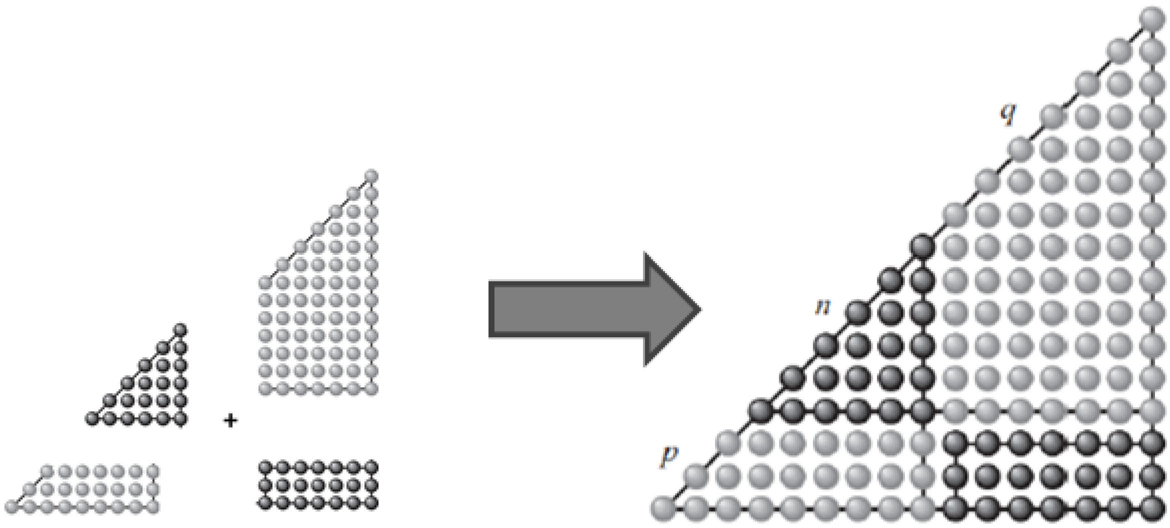
$$1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, \ldots$$

Sljedeći postupak za pronalaženje svih $(3,4)$-kutnih brojeva generira niz kvadratnih i pravokutnih trokutnih brojeva pomoću idućeg teorema koji povezuje faktore jednog trokutnog broja s dva veća trokutna broja kojima je suma također trokutni broj.

Teorem 2.11. *Neka su n, p, q pozitivni prirodni brojevi. Tada je*

$$S_3(n) = pq \quad \textit{ako i samo ako je} \quad S_3(n+p+q) = S_3(n+p) + S_3(n+q). \tag{2.2}$$

Dokaz. Slika 2.1 će nam poslužiti kao ilustracija broja $S_3(n+p+q)$ i ujedno kao geometrijska potkrijepa teorema. Prebrojavajući točke vidimo da je



Slika 2.1: Prikaz za $n = 6$, $p = 3$, $q = 7$

$$S_3(n+p+q) = S_3(n+p) + S_3(n+q) - S_3(n) + pq$$

što je upravo tvrdnja teorema. Na slici 2.1 je

$$S_3(16) = S_3(9) + S_3(13) - S_3(6) + 3 \cdot 7,$$

a budući da je $S_3(6) = 21 = 3 \cdot 7$ to je ekvivalentno

$$S_3(16) = S_3(9) + S_3(13).$$

□

Iz teorema 2.11 za $n = 2k - 1$, $p = k$, $q = 2k - 1$ slično slijede i drugi identiteti poput

$$S_3(5k - 2) = S_3(3k - 1) + S_3(4k - 2), \quad k \geq 1.$$

Dva specijalna slučaja prethodnog teorema povezuju trokutno-kvadratne brojeve i trokutno-pravokutne brojeve

$$S_3(n) = p^2 \;\Leftrightarrow\; S_3(n + 2p) = 2S_3(n + p) = (n + p)(n + p + 1)$$

$$S_3(n) = p(p + 1) \;\Leftrightarrow\; S_3(n + 2p + 1) = S_3(n + p) + S_3(n + p + 1) = (n + p + 1)^2.$$

Koristeći prethodne identitete nekoliko puta i polazeći od najmanjeg $(3, 4)-$kutnog broja $S_3(1) = 1^2$ dobivamo sljedeći niz trokutno-kvadradnih i trokutno-pravokutnih brojeva

$$S_3(1) = 1^2 \Leftrightarrow S_3(3) = 2S_3(2) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$S_3(3) = 2 \cdot 3 \Leftrightarrow S_3(8) = S_3(5) + S_3(6) = 6^2 = 36$$

$$S_3(8) = 6^2 \Leftrightarrow S_3(20) = 2S_3(14) = 14 \cdot 15 = 210$$

$$S_3(20) = 14 \cdot 15 \Leftrightarrow S_3(49) = S_3(34) + S_3(35) = 35^2 = 1225$$

$$S_3(49) = 35^2 \Leftrightarrow S_3(119) = 2S_3(84) = 84 \cdot 85 = 7140$$

$$S_3(119) = 84 \cdot 85 \Leftrightarrow S_3(288) = S_3(203) + S_3(2 + 4) = 204^2 = 41616$$

Sa $\mathbb{T}$ ćemo označiti sve brojeve koje smo generirali gornjim postupkom, tj.

$$\mathbb{T} = \{1, 6, 36, 210, 1225, 7140, 41616, 242556, ...\}$$

Očito je $\mathbb{T}$ niz trokutnih brojeva za koje vrijedi $S_3(1) = 1^2 \in \mathbb{T}$ i

$$S_3(n) = p^2 \in \mathbb{T} \Leftrightarrow S_3(n + 2p) = (n + p)(n + p + 1) \in \mathbb{T} \tag{2.3}$$

te

$$S_3(n) = p(p + 1) \in \mathbb{T} \Leftrightarrow S_3(n + 2p + 1) = (n + p + 1)^2 \in \mathbb{T}. \tag{2.4}$$

Pokazali smo da $\mathbb{T}$ sadrži samo trokutno-kvadratne i trokutno-pravokutne brojeve, no može se dokazati da $\mathbb{T}$ sadrži sve takve brojeve.

Dokaz. Skup $\mathbb{T}$ sadrži $(3,4)-$kutne i trokutno-pravokutne brojeve. Pokazat ćemo da ih sadrži sve. Dokaz se temelji na činjenici da svaki neprazan skup prirodnih brojeva sadrži najmanji element. Na početku ćemo iskoristiti teorem 2.11 za

$$a = n + p, \quad b = n + qic = n + p + q$$

tj. za

$$n = a + b - c, \quad p = c - b, \quad q = c - a).$$

Tada vrijedi

$$S_3(c) = S_3(a) + S_3(b) \quad \Leftrightarrow \quad S_3(a + b + c) = (c - a)(c - b). \tag{2.5}$$

Primijetimo da je $S_3(c) > S_3(a + b - c) \geq 1$ jer je $a + b - c = n \geq 1$ i $a + b - c < c$ zbog $a < c$ i $b < c$. Za $c = n$ i $a = b = p$ u (2.5) imamo

$$S_3(n) = p(p + 1) \quad \Leftrightarrow \quad S_3(2p - n) = (n - p)^2, \tag{2.6}$$

dok za $c = n$, $a = p$, $b = p - 1$ u (2.5) imamo

$$S_3(n) = p^2 \quad \Leftrightarrow \quad S_3(2p - n - 1) = (n - p)(n - p + 1). \tag{2.7}$$

Neka je $\mathbb{T}_1$ skup svih $(3,4)$-kutnih brojeva i trokutno-pravokutnih brojeva koji se ne nalaze u skupu $\mathbb{T}$ i pretpostavimo da je $\mathbb{T}_1$ neprazan skup. $\mathbb{T}_1$ ima najmanji element $S_3(n_0)$. Ako je $S_3(n_0)$ pravokutan broj i ako je $S_3(n_0) = p_0(p_0 + 1)$, tada iz (2.6) slijedi da je

$$S_3(2p_0 - n_0) = (n_0 - p_0)^2$$

$(3,4)$-kutan broj manji od $S_3(n_0)$, pa je element skupa $\mathbb{T}$. Ako uzmemo da je $n = 2p_0 - n_0$ i da je $p = n_0 - p_0$ u (2.4) imamo $n + 2p = n_0$ i tada je $S_3(n_0)$ član skupa $\mathbb{T}$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da su skupovi $\mathbb{T}$ i $\mathbb{T}_1$ disjunktni. Dakle, najmanji element $S_3(n_0)$ nije pravokutan. Slično se pokaže da $S_3(n_0)$ nije kvadratan, pa $\mathbb{T}_1$ nema najmanji element i stoga je prazan skup. Dokazali smo da skup $\mathbb{T}$ sadrži sve $(3,4)$-kutne i trokutno-pravokutne brojeve. □

Usporedimo li drugi način generiranja trokutno-kvadratnih brojeva s prvim načinom preko Pellove jednadžbe, postavlja se pitanje odakle potječu trokutno-pravokutni brojevi koji se pojavljuju naizmjenično s trokutno-kvadratnima u skupu $\mathbb{T}$. Koristeći teorem 2.8 i općenitiju verziju teorema 2.9, pokazuje se da kao što smo trokutno-kvadratne brojeve dobivali iz rješenja Pellove jednadžbe $x^2 - 2y^2 = 1$, trokutno-pravokutne dobivamo iz rješenja pripadne pellovske jednadžbe $x^2 - 2y^2 = -1$

2.4 $(3,5)$-kutni brojevi

Trokutno-peterokutni brojevi su brojevi koji su istovremeno trokutni i peterokutni. Prvih nekoliko takvih brojeva čini niz 1, 210, 40755, 7906276, 1533776805,. . . Za određivanje svih $(3,5)$-kutnih brojeva potrebno je riješiti jednadžbu

$$\frac{1}{2}u(3u-1) = \frac{1}{2}v(v+1) \tag{2.8}$$

jer znamo da vrijedi $S_5(n) = \frac{1}{2}n(3n-1)$ i $S_3(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$. Kada izvršimo nadopunjavanje do potpunih kvadrata, dobivamo sljedeću jednadžbu

$$(6u-1)^2 - 3(2v+1)^2 = -2.$$

Uzmemo li supstituciju $x = 6u - 1$ i $y = 2v + 1$, dobivamo pellovsku jednadžbu

$$x^2 - 3y^2 = -2 \tag{2.9}$$

koja ima sljedeća pozitivna rješenja:

$$(x,y) = (1,1), (5,3), (19,11), (71,41), (265,153), \ldots$$

Poredajmo ta rješenja po veličini u niz $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdje je $(x_1,y_1) = (1,1)$, $(x_2,y_2) = (5,3)$, itd. Rješenja (u,v) moraju biti cjelobrojna tj.

$$\frac{x+1}{6} \in \mathbb{Z}, \quad v = \frac{y-1}{2} \in \mathbb{Z}. \tag{2.10}$$

Kada se vratimo na (u,v), dobivamo

$$(u,v) = (\frac{1}{3},0), (1,1), (\frac{10}{3},5), (12,20), (\frac{133}{3},76), (165,285), \ldots$$

od kojih su cjelobrojna rješenja

$$(u,v) = (1,1), (12,20), (165,285), (2296,3976), (31977,55385), \ldots$$

Promotrimo detaljnije kako dobivamo ova rješenja. Pogledajmo pripadnu Pellovu jednadžbu $x^2 - 3y^2 = 1$ i njezino minimalno rješenje $(2,1)$. Fundamentalno rješenje pellovske jednadžbe $x^2 - 3y^2 = -2$ je $(1,1)$ što smo prethodno gore i naveli. Iduće rješenje ove pellovske jednadžbe dobivamo pomoću njezinog fundamentalnog rješenja i minimalnog rješenja pripadne Pellove jednadžbe. Imamo

$$(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 5 + 3\sqrt{3}.$$

Dalje dobivamo

$$(5 + 3\sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 19 + 11\sqrt{3}.$$

Općenito,

$$(x_1 + y_1\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^k = x_{k+1} + y_{k+1}\sqrt{3}. \tag{2.11}$$

Vidimo da je

$$\begin{aligned} x_{k+1}^2 - 3y_{k+1}^2 &= (x_{k+1} + y_{k+1}\sqrt{3})(x_{k+1} - y_{k+1}\sqrt{3}) \\ &= (x_1 + y_1\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^k (x_1 - y_1\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^k \\ &= (x_1^2 - 3y_1^2)(4 - 3)^k = -2, \end{aligned}$$

pa (x_{k+1}, y_{k+1}) zaista jest rješenje jednadžbe (2.9). Želimo rekurzivno odrediti sva rješenja te pellovske jednadžbe. Iz (2.11) je

$$x_{k+1} + y_{k+1}\sqrt{3} = (x_k + y_k\sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = (2x_k + 3y_k) + (x_k + 2y_k)\sqrt{3},$$

pa je

$$x_{k+1} = 2x_k + 3y_k, \quad y_{k+1} = x_k + 2y_k.$$

Vrijedi $3y_k = x_{k+1} - 2x_k$, a zamjenom k s $k + 1$ dobiva se $3y_{k+1} = x_{k+2} - 2x_{k+1}$. Kada to supstituiramo u rekurzivnu relaciju dobivamo

$$\frac{1}{3}(x_{k+2} - 2x_{k+1}) = x_k + \frac{2}{3}(x_{k+1} - 2x_k)$$

$$x_{k+2} - 2x_{k+1} = 3x_k + 2x_{k+1} - 4x_k$$

$$x_{k+2} = 4x_{k+1} - x_k.$$

Kako je $(x_1, y_1) = (1, 1)$, a $(x_2, y_2) = (5, 3)$, dobiva se

$$x_3 = 4 \cdot 5 - 1 = 19, \quad x_4 = 4 \cdot 19 - 5 = 71, \quad x_5 = 4 \cdot 71 - 19 = 265, \ldots$$

Imamo

$$u \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{6} \in Z \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv -1 \pmod 6.$$

Niz $x_k \pmod 6$, $k \geq 1$ izgleda $(1, -1, 1, -1, 1...)$, pa je u cijeli broj samo za paran k. Analogno dobijemo da y_k zadovoljava istu rekurziju

$$y_{k+2} = 4y_{k+1} - y_k$$

uz početne uvjete $y_1 = 1$, $y_2 = 3$, pa je $y_k \equiv 1 \pmod 2$, za svaki k. Dakle, cjelobrojna rješenja za (u_k, v_k) dobiju se za k paran što smo prethodno i naslutili. Sva rješenja dobivene pellovske jednadžbe mogu se dobiti na ovaj način. Uvrštavanjem x_k u u ili y_k u v za k paran iz (2.8) dobivamo da

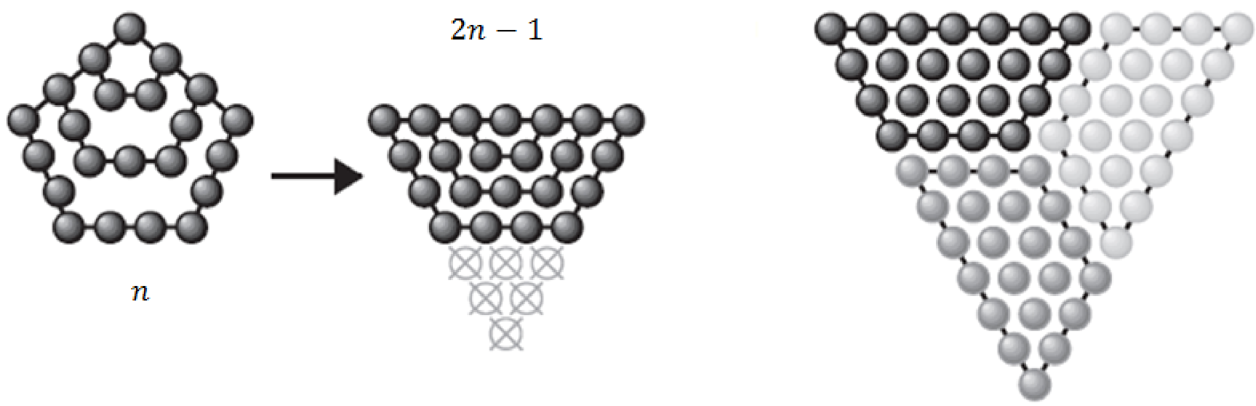
$$1, 210, 40755, 7906276, 1533776805, \ldots$$

čine niz prvih $(3, 5)$-kutnih brojeva.

Isti postupak koji smo primjenili za konstruirati niz trokutno-kvadratnih i trokutno-pravokutnih brojeva, primjenjujemo za konstruiranje niza $(3, 5)$-kutnih brojeva. Na slici 2.2 je prikazan peterokutni broj $S_5(4) = 22$ te kako smo od peterokutnog broja rastavljanjem dobili trapez i pokazali da vrijedi

$$S_5(n) = S_3(2n-1) - S_3(n-1).$$

Na desnoj strani slike 2.2 ilustrirana je jednakost



Slika 2.2: Transformacija peterokutnog broja

$$S_5(n) = \frac{1}{3} S_3(3n-1) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

koju smo već naveli u propoziciji 1.10. Broj $S_5(n)$ je trokutni ako postoji broj k takav da je $S_5(n) = S_3(k)$ odnosno ako postoji k takav da vrijedi

$$3S_3(k) = S_3(m), \quad m = 3n - 1.$$

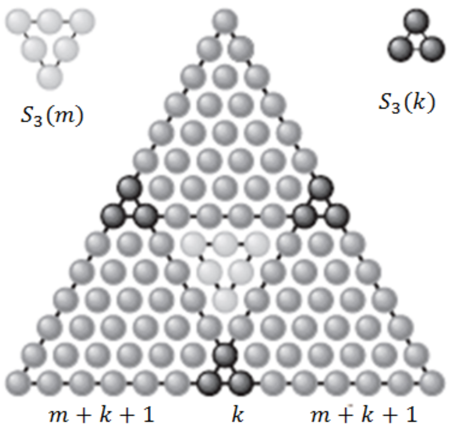
U sljedećem teoremu pokazat ćemo kako svako rješenje $S_3(m) = 3S_3(k)$ daje veće rješenje iste jednadžbe. Onda za $m = -1 \pmod 3$ imamo $S_5(n) = S_3(k)$ za $n = \frac{m+1}{3}$.

Teorem 2.12. *Neka su m i k prirodni brojevi. Tada je*

$$S_3(m) = 3S_3(k) \quad \text{ako i samo ako je} \quad S_3(2m + 3k + 2) = 3S_3(m + 2k + 1).$$

Dokaz. Prije samog postupka primjetimo da su teorem 2.11 i teorem 2.12 diskretne verzije tzv. teorema o tepisima koji kaže:

Stavimo dva tepiha u sobu. Područje preklapanja tepiha jednako je površini nepokrivenog dijela poda ako i samo ako je ukupna površina tepiha jednaka površini sobe.



Slika 2.3: Geometrijski prikaz $S_3(2m + 3k + 2)$ za $m = 3$, $k = 2$

Na slici 2.3 prikazan je $S_3(2m + 3k + 2)$ za $m = 3$ i $k = 2$. Kada se pobroje točke dobivamo pomoću formule uključivanja-isključivanja da je $S_3(2m+3k+2) = 3S_3(m+k+1) - 3S_3(k) + S_3(m)$, iz čega slijedi tvrdnja teorema. Teorem se može dokazati i algebarski. □

Ponavljamo postupak kao i kod (3, 4)-kutnih brojeva. Vrijedi $S_3(0) = 0$. Iz teorema 2.12 imamo

$$S_3(0) = 3S_3(0) \Leftrightarrow S_3(2) = 3S_3(1), \quad S_3(1) = 1 = S_5(1),$$

$$S_3(2) = 3S_3(1) \Leftrightarrow S_3(9) = 3S_3(5), \quad S_3(5) = 15,$$

$$S_3(9) = 3S_3(5) \Leftrightarrow S_3(35) = 3S_3(20), \quad S_3(20) = 210 = S_5(12),$$

$$S_3(35) = 3S_3(20) \Leftrightarrow S_3(132) = 3S_3(76), \quad S_3(76) = 2926,$$

$$S_3(132) = 3S_3(76) \Leftrightarrow S_3(494) = 3S_3(285), \quad S_3(285) = 40755 = S_5(165),$$

$$S_3(494) = 3S_3(285) \Leftrightarrow S_3(1845) = 3S_3(1065), \quad S_3(1065) = 567645,$$

$$S_3(1845) = 3S_3(1065) \Leftrightarrow S_3(6887) = 3S_3(3976), \quad S_3(3976) = 7906276 = S_5(2296),$$

Sa $\mathbb{P}$ ćemo označiti sve brojeve koje smo generirali gornjim postupkom, tj.

$$\mathbb{P} = \{1, 15, 210, 2926, 40755, 567645, 7906276, \ldots\}$$

Očito je $\mathbb{P}$ niz trokutnih brojeva za koje vrijedi $S_3(1) = 1$,

$$S_3(k) \in \mathbb{P} \text{ i } 3S_3(k) = S_3(m) \quad \Leftrightarrow \quad S_3(m+2k+1) \in \mathbb{P} \text{ i } 3S_3(m+2k+1) = S_3(2m+3k+2).$$

Dokaz da $\mathbb{P}$ sadrži sve trokutne brojeve koji su jednaki trećini nekog trokutnog broja analogan je dokazu koji smo proveli za skup $\mathbb{T}$ pokazavši da sadrži sve trokutno-kvadratne i trokutno-pravokutne brojeve. Zato taj dokaz ispuštamo. Nije teško ni provjeriti da je svaki drugi element u $\mathbb{P}$ peterokutni broj.

2.5 $(4, 5)$-kutni brojevi

Peterokutni broj $S_5(m)$ je kvadratan kada vrijedi

$$S_5(m) = \frac{1}{3}S_3(3m-1) = p^2$$

tj. $S_3(3m - 1) = 3p^2$. Ovdje smo opet koristili propoziciju 1.10 Za pronalaženje rješenja ove jednadžbe potreban nam je sljedeći teorem.

Teorem 2.13. *Neka su n i k pozitivni brojevi. Tada je*

$$S_3(n) = 3k^2 \quad \textit{ako i samo ako je} \quad S_3(5n + 12k + 2) = 3(2n + 5k + 1)^2.$$

Dokaz. Elementarno se pokaže da je $\frac{1}{2}(5n + 12k + 2)(5n + 12k + 3) = 3(2n + 5k + 1)^2$, ekvivalentno $\frac{1}{2}n(n + 1) = 3k^2$. □

Na analogan način kao u $(3, 4)$-kutnim i $(3, 5)$-kutnim brojevima provodimo postupak dobivanja $(4, 5)$-kutnih brojeva.

$$S_3(0) = 3 \cdot 0^2 \Leftrightarrow S_3(2) = 3 \cdot 1^2, \; S_5(1) = 1^2,$$

$$S_3(2) = 3 \cdot 1^2 \Leftrightarrow S_3(24) = 3 \cdot 3 \cdot 10^2, \; S_5(-8) = 10^2,$$

$$S_3(24) = 3 \cdot 10^2 \Leftrightarrow S_3(242) = 3 \cdot 99^2, \ \ S_5(81) = 99^2,$$
$$S_3(242) = 3 \cdot 99^2 \Leftrightarrow S_3(2400) = 3 \cdot 980^2, \ \ S_5(-800) = 980^2,$$
$$S_3(2400) = 3 \cdot 980^2 \Leftrightarrow S_3(23762) = 3 \cdot 9701^2, \ \ S_5(7921) = 9701^2, \ldots$$

Slično kao kod skupova **T** i **P** ovdje smo generirali niz kvadrata koji se izmjenjuju između peterokutnih i poopćenih peterokutnih brojeva. Sa $\mathbb{S}$ ćemo označiti sve brojeve koje smo generirali gornjim postupkom, tj. korijene običnih i poopćenih peterokutnih brojeva

$$\mathbb{S} = \{s_i\} = \{1, 10, 99, 980, 9701, \ldots\}.$$

Dobiva se sljedeća rekurzivna formula

$$S_3(5n - 12k + 2) = 3(5k - 2n - 1)^2 \Leftrightarrow S_3(n) = 3k^2 \Leftrightarrow S_3(5n + 12k + 2) = 3(2n + 5k + 1)^2,$$

pri čemu je $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}((5k - 2n - 1) + (2n + 5k + 1)) = k$, odnosno svaki član skupa $\mathbb{S}$ veći od 1 je petina aritmetičke sredine dva susjedna člana. Dakle, članovi niza $\mathbb{S}$ zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$s_{i+2} = 10s_{i+1} - s_i.$$

Drugi način za pronalaženje svih $(4, 5)$-kutnih brojeva je rješavanje diofantske jednadžbe

$$\frac{1}{2}u(3u - 1) = v^2.$$

Dopunjavanjem do potpunog kvadrata $(6u - 1)^2 - 24v^2 = 1$ i korištenjem supstitucije $x = 6u - 1$ i $y = 2v$, dobiva se Pellova jednadžba

$$x^2 - 6y^2 = 1.$$

Prema teoremu 2.8, potrebno je pronaći konvergente p_n/q_n u razvoju $\sqrt{6}$ u verižni razlomak. Vidjeli smo u primjeru 2.5 da je $\sqrt{6} = [2, \overline{2, 4}]$. Period u razvoju verižinog razlomka je parne duljine, $r = 2$, pa su sva rješenja Pellove jednadžbe oblika

$$x = p_{2n-1}, \quad y = q_{2n-1}, \quad n \text{ prirodan broj }.$$

Minimalno rješenje je $(p_1, q_1) = (5, 2)$, pa su prema teoremu 2.9 sva rješenja oblika

$$x_n + y_n\sqrt{6} = (5 + 2\sqrt{6})^n.$$

Dobiva se

$$(x, y) = (5, 2), (49, 20), (495, 198) \ldots$$

Analogno kao i kod $(3, 5)-$kutnih brojeva dobivamo da je $x_k \equiv -1 \pmod 6$, za k neparan, a $y_k \equiv 0 \pmod 2$ za svaki k, pa sva cjelobrojna rješenja (u, v) dobivamo za k neparan.

Sva rješenja su oblika $(u, v) = (1, 1)$, $(\frac{25}{3}, 10)$, $(81, 99)$, $(\frac{2401}{3}, 980)$, $(7921, 9701)$, itd., a cjelobrojna rješenja

$$(u, v) = (1, 1), (81, 99), (7921, 9701), (776161, 950599), \ldots$$

Tako dobivamo niz $(4, 5)$-kutnih brojeva

$$1, 9801, 94109401, 903638458801, 8676736387298001, \ldots$$

2.6 Ostali (n, m)-kutni brojevi

Iz prethodnog dijela vidjeli smo kako se traže (n, m)-kutni brojevi. Dovoljno je poznavati pripadne formule za poligonalne brojeve kako bi mogli postaviti jednažbu. Problem se svodi na rješavanje Pellove ili pellovske jednadžbe. Postavlja se pitanje postoje li za svaki n, $m \in \mathbb{N}$ (n, m)-kutni brojevi. Odgovor nam daje sljedeći teorem [7] koji iznosi uvjete egzistencije (n, m)-kutnih brojeva.

Teorem 2.14. *Neka su dana dva različita prirodna broja n i m, $3 \leq n < m$, te promatramo n-kutne i m-kutne brojeve. Postoji beskonačno mnogo (n, m)-kutnih brojeva ako i samo ako je jedna od sljedećih tvrdnji istinita:*

(i) $n = 3$ *i* $m = 6$ *ili*

(ii) $(n - 2)(m - 2)$ *nije potpun kvadrat.*

Prvi slučaj prethodnog teorema odnosi se na rezultat iz propozicije 1.14 po kojem je svaki šesterokutni broj ujedno i trokutni broj. Primjenimo li navedeni teorem za $n = 6$, $m = 18$, imamo $(6 - 2)(18 - 2) = 4 \cdot 16 = 64$, što je potpun kvadrat. Stoga ne postoji beskonačno $(6, 18)-$terokutnih brojeva. Pogledajmo sada još neke (n, m)-kutne brojeve.

$(3, 7)$-kutni brojevi

$(3, 7)$-kutne brojeve pronalazimo rješavanjem jednadžbe

$$\frac{1}{2}u(5u - 3) = \frac{1}{2}v(v + 1).$$

Primjenjujući već usvojen postupak dopune do potpunog kvadrata dobiva se jednadžba $(10u - 3)^2 - 5(2u + 1)^2 = 4$. Uz odgovarajuću supstituciju $x = 10u - 3$, $y = 2v + 1$ dobiva se pellovska jednadžba

$$x^2 - 5y^2 = 4.$$

Rješavanjem se dobiju cjelobrojna rješenja $(u, v) = (1, 1), (5, 10), (221, 493), (1513, 3382), (71065, 158905), \ldots$ Dakle, svi $(3, 7)$-kutni brojevi čine niz

$$1, 55, 121771, 5720653, 12625478965, \ldots$$

$(4,6)$-kutni brojevi

$(4,6)$-kutne brojeve pronalazimo preko cjelobrojnih rješenja pripadne diofantske jednadžbe

$$u(2u-1)=v^2.$$

Slično kao u prethodnom postupku dobiva se jednadžba $(4u-1)^2-8v^2=1$ te se uz supstituciju $x=4u-1$, $y=2v$ problem svodi na rješavanje Pellove jednadžbe

$$x^2-2y^2=1.$$

S tom smo se jednadžbom već bavili kod $(3,4)$-kutnih brojeva. Dobivamo

$$(u,v)=(1,1),(25,35),(841,1189),(28561,40391),\ldots$$

Dakle, svi $(4,6)$-kutni brojevi čine niz

$$1,1225,1413721,1631432881,1882672131025,\ldots$$

$(5,7)$-kutni brojevi

Svi $(5,7)-$kutni brojevi mogu se pronaći preko cjelobrojnih rješenja pripadne diofantske jednadžbe

$$\frac{1}{2}u(5u-3)=\frac{1}{2}v(3v-1).$$

Uz već naveden postupak dopune do potpunog kvadrata i prikladne supstitucije dobiva se pellovska jednadžba

$$3x^2-5y^2=22$$

koja ima pozitivna cjelobrojna rješenja $(x,y)=(3,1),(7,5),(17,13),(53,41),\ldots$ Svi $(5,7)$-kutni brojevi čine niz

$$1,4347,16701685,64167869935,246532939589097,\ldots$$

Zaključujemo da što dalje idemo s pronalaženjem (n,m)-kutnih brojeva, to su članovi niza brže rastu. Radi sistematizacije ćemo u tablici 2.1 prikazati preostale (n,m)-kutne brojeve za $n,m\leqslant 9$.

n	m	$(n, m)-$kutni brojevi
3	4	1, 36, 1225, 41616, 1413721,...
3	5	1, 210, 40755, 7906276, 1533776805,...
3	6	1,6,15,28,45,... (svi šesterokutni brojevi)
3	7	1, 55, 121771, 5720653, 12625478965,...
3	8	1,21, 11781, 203841, 113123361,...
3	9	1, 325, 82621, 20985481, 5330229625,...
4	5	1, 9801, 94109401, 903638458801, 8676736387298001,...
4	6	1, 1225, 1413721, 1631432881, 1882672131025,...
4	7	1, 81, 5929, 2307361, 168662169,...
4	8	1, 225, 43681, 8473921, 1643897025,...
4	9	1, 9, 1089, 8281, 978121,...
5	6	1, 40755, 1533776805, 57722156241751, 2172315626468283465,...
5	7	1, 4347, 16701685, 64167869935,...
5	8	1, 176, 1575425, 234631320, 2098015778145,...
5	9	1, 651, 180868051, 95317119801,...
6	7	1, 121771, 12625478965, 1309034909945503, 135723357520344181225,...
6	8	1, 11781, 113123361, 1086210502741, 10429793134197921,...
6	9	1, 325, 5330229625, 1353857339341, 221847152273627061 61,...
7	8	1, 297045, 69010153345, 16032576845184901,...
7	9	1, 26884, 542041975, 10928650279834,...

Tablica 2.1: (n, m)-kutni brojevi za $3 \leq n < m \leq 9$

2.7 Trostruke poligonalnosti, (n, m, k)-kutni brojevi

Nakon što smo naveli neke od jednostavnijih i nama bližih dvostrukih poligonalnosti, promatrat ćemo samo za najmanju trojku $(3, 4, 5)$ trostruke poligonalnosti tj. (n, m, k)−kutne brojeve.

$(3, 4, 5)$- kutni brojevi

Brojevi koji se mogu zapisati u obliku $\frac{1}{2}k(k+1)$, k^2, $\frac{1}{2}k(3k-1)$, pri čemu su k prirodni brojevi nazivaju se $(3, 4, 5)$-kutni brojevi. Postavlja se problem kako pronaći sve takve brojeve. Zanimljivo rješenje dao je S. C. Locke, doktorand Sveučilišta u Waterloou [5]. Pretpostavimo da za $p, q, r \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$p^2 = \frac{1}{2}q(q+1) = \frac{1}{2}r(3r-1).$$

Tada je

$$(2q+1)^2 = 1 + 8p^2, \tag{2.12}$$

$$(6r-1)^2 = 1 + 24p^2. \tag{2.13}$$

Oduzimanjem (2.12) od (2.13) dobivamo

$$(6r-1)^2 = (4p)^2 + (2q+1)^2.$$

Iz (2.12) su $2q+1$ i $4p$ relativno prosti, a iz (2.13) su $6r-1$ i $4p$ relativno prosti pa je $(4p, 2q+1, 6r-1)$ primitivna Pitagorina trojka. Znamo kako izgleda skup primitivnih Pitagorinih trojki [3], pa je

$$4p = 2mn, \quad 2q+1 = m^2 - n^2, \quad 6r-1 = m^2 + n^2,$$

pri čemu su m i n relativno prosti prirodni brojevi i $m - n$ je neparan broj. Uvrstimo li ovo u (2.12), dobivamo

$$m^4 - 4m^2n^2 + n^4 = 1. \tag{2.14}$$

Prema teoremu koji je dokazao L. Mordell [5], diofantska jednadžba oblika

$$y^2 = Dx^4 + 1,$$

gdje je $D > 0$ i D nije potpun kvadrat, ima najviše dva rješenja u skupu prirodnih brojeva. Jednadžbu (2.14) možemo zapisati kao

$$(m^2 - 2n^2)^2 = 3n^4 + 1.$$

Jednadžba $y^2 = 3x^4 + 1$ ima samo rješenja $(x, y) = (1, 2)$ i $(2, 7)$ u skupu prirodnih brojeva a jedina rješenja od (2.14) u skupu prirodnih brojeva su $m = 2$, $n = 1$. Dobiva se da je $p = \frac{mn}{2} = 1$ i jedini pozitivni $(3, 4, 5)$-kutni broj je $1^2 = 1$. Problem pronalaženja trostrukih poligonalnih brojeva zahtjevan je postupak, isključivši slučaj gdje se pojavljuju 3 i 6, zato jer su svi šesterokutni brojevi sadržani u trokutnim brojevima. Za sam kraj u tablici 2.2 prikazat ćemo prvih 11 članova jednog zanimljivog niza [9].

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$a(n)$	3	6	15	36	225	561	1225	11935	11781	27405	220780

Tablica 2.2: $a(n)$, $n \leq 11$

Sa $a(n)$ je označen je najmanji broj koji se može prikazati kao poligonalan broj na točno n načina, $n \in \mathbb{N}$. Dakle,

$$\begin{gathered}
3 \text{ je trokutan broj,} \\
6 \text{ je } (3, 6)-\text{kutan broj,} \\
15 \text{ je } (3, 6, 15)-\text{kutan broj,} \\
36 \text{ je } (3, 4, 13, 36)-\text{kutan broj,} \\
225 \text{ je } (4, 8, 24, 76, 225)-\text{kutan broj,} \\
561 \text{ je } (3, 6, 12, 39, 188, 561)-\text{kutan broj,} \\
1225 \text{ je } (3, 4, 6, 29, 60, 125, 1225)-\text{kutan broj,} \\
11935 \text{ je } (3, 10, 22, 133, 267, 570, 11935)-\text{kutan broj.}
\end{gathered}$$

Bibliografija

[1] E. Deza, M. M. Deza, *Figurate Numbers*, World Scientific, Singapore, 2012.

[2] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers: Volume II: Diophantine Analysis*, Dover Publications, New York 2005.

[3] A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva*, dostupno na `http://e.math.hr/zeta/utblink.pdf` (travanj 2018.)

[4] A. Dujella, *Diofantske jednadžbe*, poslijediplomski kolegij 2006/2007., dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/dioph/dioph.pdf` (travanj 2018.)

[5] S. C. Locke, *Triangular-square-pentagonal numbers*, Problem E 2618, Amer. Math. Monthly 85 (1978.) 51–52.

[6] R. B. Nelsen, *Multy-Polygonal Numbers*, Mathematics Magazine, Vol. 89, No. 3 (2016.), 159-164.

[7] D. L. Smith, *Numbers common to two polygonal sequences* Fibonacci Quart. 11 (1973.), no. 1, 78–84.

[8] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb 2001.

[9] D. W. Wilson, OEIS Foundation Inc. (2018.), *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, dostupno na `http://oeis.org/A063778`

Sažetak

Poligonalni broj je prirodan broj koji možemo pomoću točkica (ili drugih likova) prikazati u obliku pravilnog mnogokuta koji gradimo počevši od jednog vrha i dodavajući slojeve na nesusjedne strane. Centralni poligonalni brojevi tvore pravilne poligone tako da se točkice grupiraju oko jedne čvrste točke. U prvom dijelu rada opisano je prvih nekoliko poligonalnih i centralno poligonalnih brojeva. Algebarski su izvedene formule za određivanje $n-$tog $m-$gonalnog broja, a zatim su te formule geometrijski interpretirane. Izvedene su veze između poligonalnih brojeva različitog reda.

U drugom dijelu rada opisane su multipoligonalnosti, tj. brojevi koji su poligonalni na više načina. Dvostruke multipoligonalnosti detaljnije su ispitane na nekoliko načina. Također su iskazane tvrdnje vezane uz rješavanje Pellovih i pellovskih jednadžbi koje su bile potrebne za određivanje (n, m)-kutnih brojeva tj. brojeva koji su istovremeno $n-$kutni i $m-$kutni. Problem određivanja brojeva poligonalnih na tri ili više načina je vrlo složen, a u radu je pokazano da je jedini $(3, 4, 5)$-kutni broj 1.

Summary

Polygonal number is a positive integer which can be presented as dots (or other figures) arranged in the form of a regular polygon which is built starting from a vertex of such a polygon and adding layers on nonadjacent sides. Central polygonal numbers are positive integers which can be represented by grouping dots around a fixed point. In the first part of this graduation thesis the simplest polygonal and central polygonal numbers are explicitely described. Algebraic formulas for $n-$th $m-$gonal number are found and these formulas are interpreted geometrically. Relations between polygonal numbers of different orders are derived.

The second part of this thesis examines multipolygonal numbers, i.e. numbers which are polygonal in more than one way. Double multipolygonality is studied in more detail. Some results on Pell and Pellian equation are given and these results are used for determining $(n,m)-$gonal numbers, i.e. number which are simultaneously $n-$gonal and $m-$gonal. The problem of determining numbers which are polygonal in three or more ways is quite complicated, so the sole result of this kind that is reported in this thesis is that the only $(3,4,5)$-gonal number is 1.

Životopis

Rođena sam 22.12.1994. na otoku Pagu. Pohađala sam OŠ Jurja Dalmatinca u Pagu do 2009. godine. Iste godine nastavila sam svoje školovanje u Gimnaziji Franje Petrića u Zadru, smjer prirodoslovno-matematički. U srpnju 2013. godine, nakon završetka gimnazije, upisala sam Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu. Godine 2016. završila sam preddiplomski studij matematike, smjer nastavnički i iste godine upisala diplomski studij matematike, smjer nastavnički na istom fakultetu.