SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO – MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Roman Karem

Eksponencijalna funkcija – strategije aktivne nastave i formativnog vrednovanja u srednjoškolskom matematičkom obrazovanju

Diplomski rad

Voditeljica rada:

Prof. dr. sc. Aleksandra Čižmešija

Zagreb, srpanj 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________________ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. ____, predsjednik
2. ____, član
3. ____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____________________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. _________________________________

2. _________________________________

3. _________________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu prikazat ćemo primjer obrade eksponencijalne funkcije kroz formativno vrednovanje u drugom razredu srednje škole. Suvremena nastava uvelike se razlikuje od tradicionalne gdje su djeca bili pasivni primatelji znanja i informacija, a nastavnik onaj koji je ta znanja i informacije prenosio i njihovu usvojenost mjerio. Danas se proces učenja nastoji promijeniti na način da učenici aktivnim sudjelovanjem u nastavi izgrađuju vlastito znanje i razmišljanje koje im je u tradicionalnoj nastavi bilo nametnuto. Glavna uloga nastavnika u suvremenoj nastavi je usmjeravanje učenika u njihovoj izgradnji znanja i razmišljanja te sustavno praćenje učenikova napretka.

Rad je podijeljen u šest cjelina. U prvoj cjelini predstavljen je pojam vrednovanja. Ukratko je opisano što pojam vrednovanja uključuje te koje su njegove glavne vrste. O važnosti pojma vrednovanja govori i činjenica da je dio zakonodavnog okvira Republike Hrvatske posvećen vrednovanju o čemu govorimo na kraju prvog poglavlja.

U naslovu diplomskog rada nailazimo na pojam „formativno vrednovanje“ čemu je posvećena druga cjelina diplomskog rada. Radi se o vrednovanju koje je usmjereno sustavnom praćenju napretka učenika. Formativno vrednovanje također raščlanjujemo na jednostavnije vrste koje su opisane u ovom dijelu. Najviše prostora druge cjeline zauzimaju detaljno opisani konkretni primjeri (strategije) formativnog vrednovanja koji se mogu provoditi u razredu. Glavni cilj strategija je dati povratnu informaciju učenicima o učenju i nastavnicima o poučavanju. Strategije formativnog vrednovanja utvrdit će učenikovo znanje te otkriti nedostatke i poteškoće prema kojima će nastavnik prilagoditi nastavak poučavanja. Dio drugog poglavlja odnosi se na pojam „aktivna nastava“ što podrazumijeva nastavu koja učenika potiče na samostalnost u učenju i učenju putem otkrivanja. Navedene su i opisane metode rada koje zadovoljavaju kriterije aktivne nastave. Dvije takve najpoznatije metode su suradnički rad u paru i skupini.

Za razliku od prva dva dijela u kojima smo se više posvetili terminologiji i metodama suvremene nastave, od trećeg dijela naglasak će biti na matematici. Dakle, treći dio započinje teorijskom izgradnjom eksponencijalne funkcije. Iako se s ovakvom izgradnjom učenici ne susreću u srednjoškolskom obrazovanju, za potrebe ovog diplomskog rada napravljen je kratki pregled eksponencijalne funkcije sa stajališta visokoškolske matematike.

Slijedi kratko poglavlje s ishodima učenja eksponencijalne funkcije. Ishodi učenja su jasno i precizno napisane izjave o tome što bi učenik trebao znati, razumjeti, moći napraviti i vrednovati kao rezultat procesa učenja. Budući da se u sljedećim poglavljima detaljno opisuju aktivnosti i strategije formativnog vrednovanja, važno je povezati svaku od opisanih aktivnosti/strategija s ishodom učenja. U tu svrhu ćemo u ovom poglavlju istaknuti sve što bi učenici nakon provedenih aktivnosti odnosno strategija vezanih za eksponencijalnu funkciju trebali znati, razumjeti, moći napraviti i vrednovati.

Peto i šesto poglavlje glavni su dijelovi diplomskog rada, a sastoje se od primjera aktivnosti za otkrivanje i izgradnju eksponencijalne funkcije. Aktivnosti pripremljene za učenike u ovom diplomskom radu prilagođene su suvremenom načinu učenja i poučavanja. Osim aktivnosti otkrivanja, neizostavni dio ovakvog načina poučavanja su i strategije formativnog vrednovanja koje su opisane u šestom poglavlju, a čiji je glavni cilj dati povratnu informaciju učenicima o učenju i nastavnicima o poučavanju. Za svaku aktivnost i strategiju detaljno su opisani sljedeći parametri:

- cilj aktivnosti/strategije
- veza s ishodima učenja eksponencijalne funkcije iz četvrtog poglavlja
- razred za koji je opisana aktivnost namijenjena
- organizacija rada (rad u grupi, rad u paru, individualan rad…)
- potreban materijal (sve što je učenicima potrebno od materijala da bi aktivnost/strategija mogla biti nesmetano provedena)
- vrijeme predviđeno za trajanje aktivnosti
- tijek aktivnosti (detaljan opis aktivnosti, uloge učenika i nastavnika).

Također, dani su primjeri nastavnih listića predviđeni za opisane aktivnosti. Nakon svake aktivnosti, nalazi se kratka refleksija na aktivnost koja govori na što bi nastavnik posebno trebao obratiti pažnju, česte učeničke greške prilikom rješavanja, na koji se način provodi formativno vrednovanje, kako aktivnost utječe na učenikovo znanje i sve ostalo što bi čitatelju moglo pomoći za kvalitetnije provođenje aktivnosti.

U ovom diplomskom radu prikazan je jedan od načina kako poučavanje eksponencijalne funkcije prilagoditi zahtjevima suvremene nastave. Kao što za ovaj dio gradiva postoji bezbroj različitih metoda prilagođenih suvremenoj nastavi, tako i prikazane metode možemo iskoristiti prilikom poučavanja ostalih matematičkih sadržaja.

1. Vrednovanje ishoda učenja u matematičkom obrazovanju

1.1 Pojam vrednovanja

U naslovu ovog diplomskog rada nailazimo na sintagmu „formativno vrednovanje“. Da bismo uopće mogli pratiti rad, trebali bismo definirati formativno vrednovanje, a da bismo definirali formativno vrednovanje, trebali bismo definirati vrednovanje. Pa krenimo redom.

Iako riječ „vrednovanje“ u kontekstu obrazovanja većinu ljudi asocira na ocjenjivanje, to je samo mali dio onoga što vrednovanje obuhvaća. Prema dokumentu izdanom od strane Vlade Republike Hrvatske (vidi [13]), vrednovanje obuhvaća sustavno prikupljanje podataka o učenikovom znanju, vještinama, sposobnostima, samostalnosti i odgovornosti prema radu, te korištenje prikupljenih podataka u različite svrhe. Dio tog prikupljanja podataka je i spomenuto ocjenjivanje kratkih i duljih pisanih provjera. Ograničimo li vrednovanje samo na ocjenjivanje, uskraćujemo nastavnicima i učenicima važne informacije o poučavanju nastavnika i učenju učenika koje mogu biti vrlo korisne za krajnji cilj obrazovanja – kvalitetu učenika. Ipak, valja naglasiti kako se pojam vrednovanja promijenio unazad nekoliko godina. Prije se zaista vrednovanje odnosilo samo na mjerenje učeničkih znanja i vještina, a u suvremenoj je nastavi primarni cilj vrednovanja poboljšanje učeničkog učenja i razumijevanja nastavnog sadržaja. Ukratko, vrednovanje je prikupljanje, evidentiranje i korištenje dokaza o učeničkom znanju.

1.2 Vrste vrednovanja

U sljedećem poglavlju vidjet ćemo koliko je vrednovanje zapravo široki pojam. Nabrojat ćemo i ukratko opisati vrste vrednovanja kako su u svojoj knjizi (vidi [1]) opisali Mijo Cindrić, Dubravka Miljković i Vladimir Strugar (2016). Za početak, recimo da Cindrić i sur. razlikuju vrednovanje s obzirom na to tko ga provodi (unutarnje i vanjsko vrednovanje), s kojim ciljem se provodi (vrednovanje za učenje, vrednovanje kao učenje i vrednovanje naučenog), kada se provodi (prije učenja, za vrijeme učenja i nakon učenja), u odnosu na što se vrednuje (apsolutno, relativno ili ipsativno vrednovanje) te što se vrednuje (znanje i vještine, spoznajni procesi).

S obzirom na to tko ga provodi, razlikujemo unutarnje i vanjsko vrednovanje. Unutarnje vrednovanje je vrednovanje koje nastavnik provodi unutar razreda prateći postignuća učenika, njihova znanja, vještine i sposobnosti. Vanjsko vrednovanje provode institucije koje djeluju izvan same škole. U Republici Hrvatskoj navedena institucija je Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja (NCVVO). Ispitima temeljenim na nacionalnim standardima institucija vrednuje postignuća učenika. Primjer takvog ispita je državna matura. Također, imamo primjer poznate međunarodne organizacije OECD (Organizacija za ekonomsku suradnju i razvoj) koja provodi poznato PISA istraživanje za učenike država članica.

Sljedeći kriterij po kojemu razlikujemo vrednovanje je cilj vrednovanja. Razlikujemo vrednovanje za učenje, vrednovanje kao učenje i vrednovanje naučenog. Vrednovanje za učenje provodi se prije samog učenja, a nastavniku daje informacije po kojima bi trebao prilagoditi poučavanje. Vrednovanje kao učenje uključuje prikupljanje informacija o učenikovim nedostacima i propustima koje bi učenik, uz pomoć nastavnika trebao ukloniti. Važno je naglasiti da nije samo nastavnik taj koji prikuplja informacije o učenikovim nedostacima. Nastavnik je dužan organizirati i provoditi poučavanje tako da i učenik može pratiti i nadzirati svoje učenje u cilju uklanjanja spomenutih nedostataka. Na kraju, ostalo je još vrednovanje naučenog koje nastavniku, učeniku i svim uključenim u nastavni proces otkriva do koje je mjere učenik ispunio unaprijed određene ishode učenja.

Vrednovanje koje razlikujemo s obzirom na vrijeme njegovog provođenja usko je vezano uz prethodni kriterij. Cindrić i sur. razlikuju vrednovanje koje se provodi na početku nastavnog procesa, za vrijeme nastavnog procesa i na kraju nastavnog procesa. Vrednovanje koje se provodi na početku nastavnog procesa zovemo dijagnostičko vrednovanje. Njime nastavnik želi utvrditi do koje mjere učenici posjeduju vještine i sposobnosti nužne za početak nastavnog procesa. Obično se provodi mjerenjima i testovima. Vrednovanje za vrijeme učenja nazivamo formativno vrednovanje. Budući da je ovom širokom pojmu posvećeno cijelo treće poglavlje ovog diplomskog rada, sada ćemo samo napisati da se ono odnosi na svaki oblik vrednovanja koji je osmišljen tako da je primjenjiv u svrhu promoviranja učeničkog učenja. Vrednovanje na kraju učenja nazivamo sumativno vrednovanje. Njime želimo utvrditi do koje su mjere učenici ostvarili predviđene ishode učenja i jesu li oni dovoljni za nastavak učenja novog gradiva. Obično se provodi na kraju nastavne godine ili na kraju sadržajne cjeline. Također, jedna od najvažnijih uloga ovakvog vrednovanja je pretvaranje rezultata u dokument koji će učenik koristiti za prijelaz u viši razred, sljedeći stupanj obrazovanja ili za početak radnog odnosa.

Zbog svega navedenog, možemo uočiti sličnost između sumativnog vrednovanja i vrednovanja naučenog, iz prethodnog kriterija. Na analogan način možemo povezati i dijagnostičko vrednovanje s vrednovanjem za učenjem, te formativno vrednovanje za vrednovanje kao učenje.

U odnosu na što vrednujemo razlikujemo sljedeća tri tipa vrednovanja. Ako vrednujemo s obzirom na unaprijed postavljene kriterije (koje može postaviti nastavnik ili su određeni kurikulumom) onda govorimo o kriterijskom vrednovanju. Bodovna skala odredit će u kojoj je mjeri učenik ispunio postavljene kriterije. Kod ovakvog vrednovanja, rezultat učenika ne ovisi o rezultatima drugih učenika, za razliku od relativnog (normalnog) vrednovanja. Naime, u takvom tipu vrednovanja učenik se vrednuje u odnosu na druge učenike koji su podvrgnuti istom postupku vrednovanja. Kod relativnog vrednovanja unaprijed se odredi koliki će dio učenika dobiti ocjenu odličan, vrlo dobar itd. Samo 10% ili 15% (ovisno o nastavniku) najboljih kod ovakvog tipa vrednovanja može dobiti ocjenu odličan, bez obzira na njihovu razinu znanja. Međutim, to ne znači da će uvijek 10% ili 15% dobiti ocjenu negativan jer se određuje minimalan broj bodova koji učenici moraju postići za ocjenu dovoljan. Zatim se pozitivne ocjene raspodjele po Gaussovoj (normalnoj) krivulji. Odavde i dolazi naziv normalno vrednovanje. U posljednjem tipu vrednovanja (ipsativno vrednovanje) po ovom kriteriju, učenik se vrednuje u odnosu na sebe samoga. Nastavnik prati napreduje li učenik, stagnira ili nazaduje. Također, prati ostvaruje li učenik rezultate koji su iznad, ispod ili u rangu njegovih potencijala (Cindrić i sur.)

Važno je naglasiti da niti za jedno vrednovanje ne možemo reći da je bolje od preostala dva. Svako navedeno vrednovanje ima svoje prednosti i mane. Zato je najbolje koristiti sva tri tipa vrednovanja kako bi učenik vidio gdje se nalazi u odnosu na željene ishode učenja, u odnosu na učenike iz razreda i generacije na razini države te jesu li njegova matematička znanja i vještine u skladu s prethodnima.

1.3 Položaj vrednovanja u zakonodavnom okviru u RH

O ozbiljnosti i važnosti vrednovanja dovoljno govori činjenica da postoji *Pravilnik o načinima, postupcima i elementima vrednovanja učenika u osnovnim i srednjim školama* (vidi [13]) izdan od strane Vlade Republike Hrvatske te potvrđen u Saboru Republike Hrvatske. U njemu je detaljno opisano na koji se način vrednovanje mora provoditi.

Također, Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta izdalo je zakonski okvir pod nazivom Hrvatski kvalifikacijsko okvir (HKO) koji ima reformsku ulogu u sustavu obrazovanja. Čitajući HKO možemo naići na dio posvećen vrednovanju. U tablici 1.3.1. prikazano je što bi nastavnik matematike trebao pratiti i vrednovati prema hrvatskom kvalifikacijskom okviru.

Tablica 1.3.1. *Hrvatski kvalifikacijski okvir*

<table>
<tr><td>ZNANJE</td><td>VJEŠTINE</td><td rowspan="2">SAMOSTALNOST</td><td rowspan="2">ODGOVORNOST</td></tr>
<tr><td>• Koncepti
• Principi
• Postupci</td><td>• Spoznajne (primjena znanja i rješavanje problema)
• Psihomotoričke (upotreba tehnologije)
• Socijalne</td></tr>
</table>

2. Aktivna nastava i formativno vrednovanje

2.1 Aktivna nastava

U hrvatskim školama još uvijek prevladava tradicionalni način poučavanja koji uključuje predavačku, tj. frontalnu nastavu. Ona je usmjerena nastavniku i nema dovoljno vremena za samostalne aktivnosti učenika. Takav tip nastave potrebno je zamijeniti suvremenom koja je usmjerena učeniku, koja učenika potiče na samostalnost u učenju i učenju putem otkrivanja.

Postoji više definicija aktivnog učenja, a svima je zajedničko isticanje učenika u središtu nastavnog procesa. Zoran Lalović (2009) u časopisu *Naša škola* (vidi [10]) daje vrlo jednostavnu definiciju aktivnog učenja u kojoj kaže kako su u aktivnom učenju učenici aktivni konstruktori vlastitog znanja. Imajući na umu tu definiciju, nastavnik bi trebao organizirati nastavu u kojoj će učenik biti aktivni subjekt. Konkretno, Lalović ističe da znanje učeniku ne treba prenositi nego mu se zadavati u vidu problema kojeg učenik nastoji riješiti. Dakle, učenike ne treba poticati da pamte činjenice već pred njih stavljati probleme i usmjeravati ih k njihovom rješavanju.

Aktivnu nastavu možemo organizirati kao individualni rad, suradnički rad u paru ili u skupinama. Individualni rad preporuča se prilikom uvježbavanja i ponavljanja i nije baš učestao. Ostala dva tipa pružaju nastavniku puno više mogućnosti pa ćemo ih detaljnije opisati u nastavku, za što ćemo koristiti časopis *Naša škola.*

2.1.1 Suradnički rad u skupinama

Prilikom rada u skupinama, razred se dijeli na manje skupine (obično 3 do 5 učenika) i svaka skupina obrađuje jedan aspekt zajedničkog problema. Na kraju sata se organizira međusobna razmjena novih saznanja. Budući da ovdje nema predavačkog dijela, dobrog od lošeg nastavnika razlikuje njegova sposobnost da organizira i koordinira rad grupa. Dakle, važno je da nastavni program nastavnik pripremi u obliku aktivnosti koje će učenike usmjeravati željenim ishodima. Nastavnikova je uloga osmišljavati situacije učenja i voditi učenike tijekom učenja (Lalović, 2009).

Razmjena mišljenja je glavni razlog zašto nastavnik organizira suradnički rad u skupinama. Da bi razmjena mišljenja uopće bila moguća, učenici trebaju već imati određeno predznanje o sadržaju poučavanja. Dakle, rad u skupinama u nekim slučajevima neće imati smisla.

S druge strane, dok je različitost u predznanju učenika veliki problem s kojim se susreće nastavnik za vrijeme frontalnog poučavanja, ona je u ovakvoj organizaciji rada prednost. Naime, dinamika rada u grupi uvelike će ovisiti o sučeljavanju različitih mišljenja, stavova i gledišta što će u konačnosti dovesti do produktivnije nastave. Zato je važno da prilikom formiranja skupina nastavnik vodi računa o heterogenosti, tj. da ne postoji jedna skupina koju čine odlični učenici, dok drugu skupinu čine učenici sa slabijim znanjem i nižim interesom za matematiku. Isto tako, nastavnik treba oblikovati aktivnosti tako da osigura rad svih učenika.

U poglavljima 5.1.1, 5.2.1, 5.2.2, 5.3.5. i 5.3.8. ovog diplomskog rada dani su primjeri aktivnosti koje uključuju rad u skupinama. Opisane su i prikazane poznate aktivnosti kao što su *Kolo naokolo* i *Gostionica*.

2.1.2 Suradnički rad u parovima

Kod suradničkog rada u parovima, dva učenika zajednički, kombinacijom samostalnog i suradničkog rada obrađuju jedan problem. Princip rada sličan je radu u skupinama, samo što u ovom slučaju skupinu čini manji broj učenika. Često se rad u paru koristi kao priprema učenika na rad u većim skupinama jer radom u paru učenici uče jedni od drugih, potiče se suradnja i učenici preuzimaju odgovornost za svoj uspjeh i postignuće, ali i postignuće drugog učenika.

I ovdje je uloga nastavnika puno drugačija u odnosu na frontalnu nastavu. Nastavnik bi trebao osmisliti aktivnosti koje će zahtijevati otprilike jednaki angažman oba učenika u paru. Također, poželjno je da aktivnosti budu strukturirane tako da jedan učenik ne može doći do traženog zaključka bez suradnje s drugim učenikom. Na taj će način nastavnik neizravno potaknuti sve učenike na rad.

Lalović ističe kako ovakav oblik rada od učenika zahtijeva komunikaciju te kritički odnos prema vlastitom, ali i prema mišljenju drugog učenika. Promišljanje i izražavanje o vlastitom znanju uvelike pomaže boljem shvaćanju, a rad u većim skupinama često sputava učenike da javno iznesu svoja razmišljanja. Zato je rad u paru dobra prilika da učenici razviju matematičku komunikaciju koju će kasnije moći koristiti i pred većim brojem ljudi.

Konkretni primjeri aktivnosti koje uključuju rad u paru nalaze se u petom poglavlju ovog diplomskog rada. Na kraju, važno je da se u aktivnoj nastavi kombiniraju svi navedeni oblici – rad u paru, rad u skupini i individualni rad. Svaki od njih ima pozitivne učinke na učenikov razvoj, ali važno je odabrati prikladan oblik za određenu aktivnost.

2.2 Formativno vrednovanje

Svakoga dana na nastavi matematike nastavnici postavljaju pitanja te pažljivo slušaju učenike dok odgovaraju i objašnjavaju svoja razmišljanja. Promatraju učenike dok rade u skupini te izražavaju ideje i zaključke u razrednim diskusijama. Takvu, često planiranu, a ponekad i spontanu interakciju nastavnici mogu koristiti za unaprjeđenje učenikova znanja. Taj proces u kojemu nastavnik koristi prikupljene informacije o učenikovom stanju nazivamo formativno vrednovanje. U ovome poglavlju opisat ćemo formativno vrednovanje na način kako su to prikazali Page Keeley i Cheryl Rose Tobey (vidi [17]).

Tobey i Keeley (2011) pišu: „Suvremeni nastavnik svjestan važnosti formativnog vrednovanja koje izgrađuje učenikovo razmišljanje, znanje, vještine i sposobnosti koristi se različitim tehnikama kako bi postigao željenu interakciju i koristio njene plodove." Spomenute tehnike nazivaju se strategijama formativnog vrednovanja. Neke strategije opisat ćemo u poglavlju 2.3.

Svaka opisana strategija iz poglavlja 2.3. je primjer aktivnosti koja i nastavniku i učeniku pruža informacije o učeničkom činjeničnom, konceptualnom i proceduralnom znanju matematike. Ove tehnike, tj. strategije omogućavaju nastavniku kontinuirano praćenje učeničkog znanja i napretka, uobičajenih pogrešaka i zabluda koje mogu biti prepreka u daljnjem učenju matematike. Nastavnik bi trebao prilagoditi daljnje nastavne aktivnosti rezultatima formativnog vrednovanja. Osim toga, formativno vrednovanje i učenicima daje povratne informacije o njihovom znanju te ih potiče da promišljaju o vlastitom znanju.

Opisane strategije osmišljene su tako da se lako ubace u nastavu u učionicu. Primarno su zamišljene za korištenje prije i tijekom poučavanja, a ne na kraju nastavne jedinice ili obrazovnog razdoblja. Njihova je glavna uloga prikupiti podatke o učenju koje će nastavnik kasnije koristiti u oblikovanju nastave. Strategije formativnog vrednovanja uglavnom ne uključuju ocjenjivanje. Naime, ocjenjivanje mjeri učenikovo znanje pa učenici često jedni druge gledaju kao konkurenciju što može dovesti do demotivacije pojedinih učenika i osjećaju nelagode na nastavi matematike (Tobey i Keeley).

Svestranost opisanih strategija obuhvaća različite stilove poučavanja, za grupe i za pojedince. Mogu se koristiti za poticanje učeničkog interesa za matematiku, stvaranje i razvoj ideja, pokretanje matematičkih istraživanja i slično. Nabrojat ćemo neke od mogućnosti koje strategije pružaju učenicima:

- potiču učenika na razmišljanje
- ohrabruju učenike na postavljanje pitanja
- uključuju sve učenike u nastavu
- potiču učenika o dubljem promišljanju o vlastitom znanju
- potiču učenika da izraze i objasne svoje ideje javno što zahtjeva ispravno matematičko izražavanje
- daju nastavniku povratnu informaciju o održanom satu
- smanjuju učenikovu nelagodu pri izražavanju svojih mišljenja i ideja.

Prema Tobeyu i Keeleyu, razlikujemo formalno i neformalno formativno vrednovanje. Formalno formativno vrednovanje je detaljno osmišljena aktivnost za cijeli razred gdje nastavnik unaprijed zna kako prikupiti povratne informacije od strane učenika. Obično i pripremi materijale za evidenciju povratnih informacija. Iako su oba formativna vrednovanja planirana i namjerna, u učionici to možda tako ne izgleda. Naime, u neformalnom formativnom vrednovanju, nastavnik prikuplja povratne informacije iz različitih tipova komunikacije. Čak i onih koji nisu usko vezani uz sadržaj koji se trenutno obrađuje, nastavniku može poslužiti kao uvid u stanje nekih učenika. U neformalnoj matematičkoj komunikaciji nastavnik lako uočava koji su učenici povučeniji, tiši i manje aktivni, nesigurni u svom nastupu. S druge strane, učenici koji su svjesni svojih matematičkih kvaliteta, s puno više samopouzdanja nastupaju u razgovoru. Glasniji su, brži, energičniji. Dakle, neformalno formativno vrednovanje je prikupljanje informacija iz svakodnevnih nastavnih interakcija između učenika i učenika ili učenika i nastavnika.

Često se u matematici događa da učenici uče samo postupak koji ih vodi točnom rješenju, bez razumijevanja materije. Čak i odlični učenici ponekad nauče samo za ispit, bez pravog razumijevanja. Znamo da se matematika neprestano nadograđuje pa takav tip učenja može doći na naplatu. U tom je trenutku prekasno vraćati se i ponovno prolaziti lekciju po lekciju. Kako se ovakve stvari ne bi događale, nastavnik treba prije i tijekom poučavanja neprestano pratiti, popunjavati praznine i ukloniti zablude. Učenici također moraju biti uključeni u praćenje vlastitog napretka. Dobro pripremljene strategije formativnog vrednovanja povećavaju kvalitetu nastave i potiču dublje konceptualno učenje. Formativno vrednovanje naposljetku dovodi do toga da i nastavnici i učenici donose najbolje moguće odluke u vezi s poučavanjem i učenjem. Kontinuirane i dobro osmišljene strategije formativnog vrednovanja učenika će osposobiti za racionalno promišljanje i donošenje ispravnih odluka i na drugim poljima, ne samo u matematici. Naučit će ga sagledavati životne situacije iz više različitih kutova, uzimajući sve opcije u obzir.

Budući da je krajnji cilj obrazovanja kvaliteta učenika, sve što vodi k tome cilju važno je implementirati u obrazovni proces. Pritom mislimo na nastavnika, tj. na njegovu ulogu koja nije samo pružanje novih informacija i mjerenje učenikovog znanja, već je najvažnija nastavnikova uloga voditelja nastavnog procesa. Dakle, nastavnik je osoba koja bi u prvom redu trebala slušati i poticati učeničke ideje i strategije rješavanja problema, analizirati njihovo ispravno i neispravno razmišljanje i zaključivanje te poticati učenike na argumentiranje svojih ideja. Na taj će način učenici shvatiti da nisu samo objekti obrazovanja nego i aktivni sudionici čiji je angažman neminovan žele li postati matematički pismeni građani, što im može biti od iznimne koristi u svakodnevnom životu.

2.3 Primjeri strategija formativnog vrednovanja

2.3.1 Sortiranje kartica

U nastavku ćemo opisati neke primjere strategija formativnih vrednovanja koristeći knjigu Tobeya i Keeleya (vidi [17]).

Sortiranje kartica je strategija formativnog vrednovanja u kojoj učenici spajaju parove kartica. Parove kartica povezuju iste vrijednosti, oblik, pojam i definicija, jednadžba i njeno rješenje ili neka druga veza koja je dio sadržaja koji se poučava. Dakle, nastavnik bi trebao pripremiti nekoliko odgovarajućih parova kartica prema određenoj temi. Uz parove, može uključiti i nekoliko kartica koje ne odgovaraju niti jednoj drugoj kartici kao otežavajući faktor učenicima. Nastavnik pomiješa kartice te ih podijeli učenicima koji su raspoređeni u parove ili u manje grupe. Obilazeći razred, nastavnik naizmjenično ispituje učenike zašto neke kartice čine ili ne čine par.

Ova strategija potiče učenike da aktivno koriste svoje znanje i sposobnosti u traženju parova. Budući da se obično radi u parovima ili u manjim grupama, ova strategija može biti zanimljiva i korisna jer često uzrokuje neslaganje oko nekih parova. Neslaganje će još više uključiti učenike u rad i izazvati raspravu u kojoj će učenici argumentirano braniti svoje stavove i matematički se izražavati.

Strategija se može provoditi prije nastavne jedinice kako bi nastavnici mogli utvrditi imaju li učenici poteškoća koje mogu negativno utjecati na daljnje poučavanje. Također, strategija se može koristiti i za praćenje učenja tijekom nastave kako bi nastavnik uvidio primjenjuju li učenici naučeno. U poglavlju 6.6. dan je konkretan primjer ove strategije provedene u obliku igre „Crni Petar“.

2.3.2 Strategija „Vrijedi uvijek, nekada ili nikada“

Strategija „Vrijedi uvijek, nekada ili nikada“ uključuje skup tvrdnji za koje učenici moraju utvrditi vrijede li uvijek, vrijede li nekada ili ne vrijede nikada. Nastavnik pripremi određeni broj izjava vezanih uz sadržaj koji se poučava te učenici individualno, u parovima ili manjim grupama analiziraju vrijedi li tvrdnja uvijek, nekada ili nikada. Osim određivanja, učenici usmeno obrazlažu svoje odgovore.

Ova strategija pokazuje učenicima da je ispravnost matematičkih tvrdnji često korisno provjeriti jer ako tvrdnja vrijedi za neki skup brojeva, ne znači nužno da vrijedi za neki drugi skup brojeva. Strategija potiče matematičko razmišljanje tako što učenici traže primjere i kontraprimjere kako bi potkrijepili svoje odgovore. Radom u parovima ili manjim skupinama potaknut će učenike na raspravu i argumentaciju.

Opisana se strategija može upotrijebiti na početku nastavne cjeline kao motivacija i poticaj učeničkom razmišljanju o temi koja slijedi. U ovom diplomskom radu ova je strategija iskorištena upravo u tu svrhu (vidi poglavlje 5.3.2.). S druge strane, nastavnik ju može upotrijebiti i nakon otkrivanja nekog matematičkog koncepta kako bi i nastavnik i učenici dobili povratne informacije o njegovom savladavanju. Tipične greške na koje je nastavnik navikao u dosadašnjem radu trebale bi biti sadržane u sastavljenim tvrdnjama.

Važno je da strategija završi raspravom koja uključuje cijeli razred kako bi svi učenici imali konačne zaključke o istinitosti svake tvrdnje uz odgovarajuće primjere ili kontraprimjere.

2.3.3 Strategija „Nekada sam mislio, a sada znam"

Ova strategija od učenika traži da usporede svoja razmišljanja s početka nastavnog procesa s razmišljanjem nakon nastavnog procesa. Nastavnik učenicima podijeli nastavne listiće na kojima piše rečenica koju učenici trebaju dovršiti: „Nekada sam mislio ____. Sada znam ____."

Dobro je da učenicima ovo zadamo za domaću zadaću kako bi mogli u miru i tišini razmišljati o svome znanju. Učenici trebaju objasniti kako se njihovo razmišljanje mijenjalo učenjem. Strategija se može proširiti i s dijelom „ … i to sam naučio … (kako?)" kako bi učenici razmislili o ključnom koraku u poučavanju novog sadržaja, a istovremeno nastavniku dali do znanja što njima predstavlja glavni korak.

Ova strategija je učenicima dobra vježba samoprocjene i refleksije koja im otkriva što se i kako mijenjalo u njihovom razmišljanju tijekom poučavanja. Ova metakognitivna aktivnost učenicima omogućuje da samostalno kontroliraju učenje, prepoznaju zahtjeve učenja, znaju vlastite snage i slabosti učenja te na kraju znaju što su naučili.

S druge strane, nastavnik dobiva na uvid različite načine na koji učenici razmišljaju o promjenama u njihovom znanju tijekom procesa učenja i jesu li učenici prepoznali i uklonili prethodne zablude ili poteškoće. Na kraju, ovom strategijom nastavnik ima povratnu informaciju o učinkovitosti svog poučavanja. U poglavlju 6.2. je opisana ova strategija na primjeru eksponencijalne funkcije.

2.3.4 Strategija „Četiri kuta“

Strategija „Četiri kuta“ uključuje odabrana pitanja ili tvrdnje s četiri ponuđena odgovora. Učenici s istim odgovorima smještaju se u isti kut razreda koji nastavnik unaprijed odredi. Dakle, nastavnik osmisli skupinu pitanja, a za svako pitanje četiri ponuđena odgovora. Unaprijed odredi kutove u koje će se smjestiti učenici koji smatraju da je točan odgovor a), b), c) ili d). Nakon postavljenog pitanja učenici imaju određeno vrijeme na raspolaganju kako bi se opredijelili za odgovor. U ovom koraku često može doći do rasprave među učenicima koja koristi i učenicima i nastavniku. Kada se učenici smjeste u kutove zajedno sa svojim istomišljenicima razgovaraju o razlozima zašto misle da je baš taj odgovor točan. Nastavnik nakon određenog vremena može iz svake skupine (svakog kuta) prozvati jednog ili više učenika da javno objasne te razloge. Dok svi učenici slušaju argumente učenika iz ostalih kutova, mogu se preseliti u njihov kut ako promijene razmišljanje. Cilj je nakon nekog vremena sve učenike argumentima privući u kut gdje stoje učenici s točnim odgovorom. Strategija se može prilagoditi i pitanjima koja imaju tri ili dva moguća odgovora. U ovom diplomskom radu, u poglavlju 6.7. imamo primjer ove strategije s dva ponuđena odgovora. Primjer jedne takve izjave za četiri kuta je:

1. Da bi paralelogram bio pravokutnik, treba imati barem:

a) jedan pravi kut
b) dva prava kuta
c) tri prava kuta
d) četiri prava kuta?

Strategija „Četiri kuta“ omogućava učenicima da javno iznesu i argumentirano brane svoja razmišljanja. Susreći se u kutu s učenicima koji dijele isto mišljenje, učenici mogu dodatno razgovarati i objasniti svoja razmišljanja. Sudjelujući u raspravi s učenicima iz drugih grupa, učenici mogu primijetiti neku nelogičnost ili prazninu u vlastitom rasuđivanju te prihvatiti nove zaključke.

2.3.5 Strategija „Suglasni krugovi“

Slična prethodno opisanoj strategiji, strategija „Suglasnih krugova“ uključuje priklanjanje učenika skupini svojih istomišljenika. Naime, dok učenici stoje raspoređeni u velikom krugu, nastavnik izjavljuje tvrdnju. Učenici koji se s tvrdnjom slažu skupljaju se oko središta kruga, a učenici koji se ne slažu s tvrdnjom ostaju stajati na mjestima, i dalje tvoreći krug. Zatim nastavnik formira nove, male skupine koje čine učenici koji se slažu i učenici koji se ne slažu s tvrdnjom. U malim skupinama učenici imaju priliku argumentirati svoje stavove ostalim učenicima. Za očekivati je da će neki od učenika u ovoj fazi promijeniti razmišljanje. Nakon isteka vremena predviđenog za ovu fazu, počinje rasprava koju predvodi nastavnik.

Nastavnik bi trebao pripremiti 3 do 5 konceptualnih tvrdnji vezano za temu koja se obrađuje. Primjeri tvrdnja su:

1) Svaki kvadrat je romb. (Točno)
2) Svaki paralelogram je trapez. (Točno)
3) Svaki pravokutnik je kvadrat. (Netočno)

Ova strategija aktivira učeničko razmišljanje o matematičkim idejama vezanim uz temu koja se proučava. Argumentiranje svojih stavova ostalim učenicima zahtjeva od učenika dublje promišljanje o svojim zaključcima.

Opisana strategija može se koristiti prije ili tijekom učenja novih koncepata. Njenom provedbom nastavnik brzo i lako dobiva povratne informacije o razmišljanjima učenika. Njihovo argumentiranje nastavniku će otkriti na kojoj su razini razumijevanja prema čemu može prilagoditi daljnje poučavanje. Strategiju je također važno iskoristiti kako bi popravili nedostatke ili učvrstili učenikovo razumijevanje.

2.3.6 Strategija „Da ili ne“

Strategija „Da ili ne“ uključuje niz izjava koje učenici moraju ocijeniti kao točne ili netočne. Nastavnik piše ili govori tvrdnje vezane uz sadržaj poučavanja, a učenici odgovaraju. Postoji više različitih načina na koji učenici mogu odgovarati. Jedna od mogućnosti je da svi učenici imaju kartice s odgovorima „DA“ i „NE“ pa karticu koju smatraju točnom podignu u zrak. Druga opcija je da ustajanje sa stolca predstavlja odgovor „DA“, a ostanak u sjedećem položaju predstavlja odgovor „NE“. Treća mogućnost je da učenici preko svojih pametnih telefona, koristeći alat Mentimeter odgovaraju na postavljena pitanja (o principu rada alata više u poglavlju 2.3.9.). Uglavnom, važno je da nastavnik nakon svake tvrdnje učenicima ostavi dovoljno vremena za razmišljanje i, zatim, na znak nastavnika, svi učenici odgovaraju – podizanjem kartice, ustajanjem sa stolca ili koristeći pametne telefone. Važno je da nakon što učenici odgovore na tvrdnje, nastavnik prozove više učenika (i one koji su ispravno i one koji su neispravno odgovorili) da objasne svoje razmišljanje. Pažljivo slušanje učeničkih razmišljanja može otkriti područja nesigurnosti koja upućuju na potrebu njihovih otklanjanja prije nastavka poučavanja novih sadržaja.

Ova strategija se koristi za ispitivanje postojećih znanja i razumijevanja učenika, uključujući njihovu sposobnost argumentiranog branjenja svojih stavova.

Primjer izjava:

1) Korijen prirodnog broja uvijek je iracionalan broj. (Netočno – kontraprimjer: $\sqrt{9} = 3 \in \mathbb{N}$)
2) Trokut s duljinama stranica 3, 5 i 9 je tupokutan. (Netočno – ne postoji takav trokut)
3) Zbroj dvaju negativnih brojeva je negativan broj. (Točno)

2.3.7 Strategija „Pogled unatrag“

„Pogled unatrag“ je strategija kojom učenici daju prikaz onoga što su naučili tijekom određenog nastavnog razdoblja. Nastavnici pripreme tablice 2.2.7.1. koje učenici ispunjavaju. Slično kao i kod strategije „Nekada sam mislio, a sada znam“, dobro je učenicima ovaj zadatak dati za napraviti kod kuće kako bi u miru i tišini promišljali o onome što su naučili. Učenike uputimo da prepričaju što nisu znali prije poučavanja, a sada, nakon poučavanja, znaju.

Nastavni listić 2.2.7.1 *Pogled unatrag*

Što sam naučio?	Kako sam to naučio?

Ova strategija pruža učenicima mogućnost da se osvrnu i sumiraju što su naučili. Pitanjem „Kako sam to naučio?“ potičemo ih razmišljati o vlastitom učenju.

Opisivanjem onoga što je učenicima pomoglo u učenju, nastavnik dobiva informacije o strategijama i aktivnostima koje su najučinkovitije kod promatranih učenika. Dobivene informacije nastavnik može koristiti i za prilagođavanje buduće nastave pojedincu ovisno o njegovom „pogledu unatrag“.

Za provedbu ove strategije trebali bismo ograničiti promatrani vremenski period. Naime, ne bi bilo dobro učenike vraćati unatrag više od tri tjedna kako ne bi imali problema s prisjećanjem. Za osnovnoškolce uzimamo čak i manji vremenski period (prethodni tjedan).

2.3.8 Strategija „3-2-1“

Slijedi još jedna metakognitivna strategija formativnog vrednovanja. U ovoj će strategiji učenici napisati sljedeće:

1) Tri nove stvari koje sam naučio:
   a) ______________________________
   b) ______________________________

c) ____

2. Dvije stvari s kojima još uvijek imam poteškoća:

   a) ____

   b) ____

3. Jednu stvar koju želim naučiti:

   a) ____

Ova tehnika potiče učenika na razmišljanje o njegovom učenju novih koncepata. S druge strane, nastavnik otkriva što učenici doživljavaju ključnim u nastavnoj jedinici. Također, nastavnik ovime provjerava jesu li ciljevi nastavne jedinice ispunjeni. Odgovorima na drugo pitanje nastavnik dobiva informaciju s čime još većina učenika ima poteškoća kako bi navedene poteškoće uklonio prije nastavka poučavanja novog sadržaja.

Da bi se ova strategija upotrijebila, važno je da nastavna jedinica sadrži i dio matematike koji učenici znaju otprije i novi dio. U poglavlju 6.3. imamo konkretan primjer ove strategije prilikom proširivanja svojstava računanja s potencijama na svojstva računanja s eksponencijalnom funkcijom. Strategija se može prilagoditi ovisno o procijeni nastavnika ili učenika na „5-2-1“, „3-3-1“ ili slično.

2.3.9 Digitalni alati za formativno vrednovanje tijekom nastave – primjer aplikacije „Mentimeter“

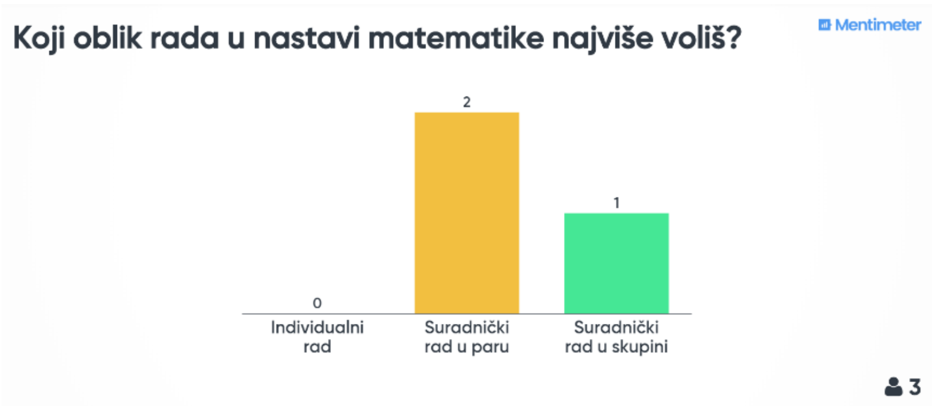
Neke od opisanih strategija možemo provesti koristeći različite alate u digitalnom obliku. U sljedećem poglavlju opisat ćemo princip rada jednog takvog alata.

Suvremenu nastavu prati vrlo brzi napredak tehnologije koji nastavniku omogućuje brzo, jednostavno i efikasno korištenje različitih alata. Njihova primjena može znatno utjecati na organizaciju nastave i poticati učenikovu aktivnost. Jedan od takvih alata je Mentimeter koji može pomoći za utvrđivanje učeničkog razumijevanja i otkrivanja nedostataka. Princip rada je takav da učenici odgovaraju na nastavnikova pitanja koristeći svoje pametne telefone. Nastavnik prezentira materijale na koje učenici odgovaraju digitalno. Takav način rada pomaže nastavniku da izravno provjeri znanje i nedostatke kod učenika. Prednost tehnologije je brzo prikupljanje i analiza podataka koji ostaju pohranjeni tako da ih nastavnik može koristiti i kasnije za daljnje analize.

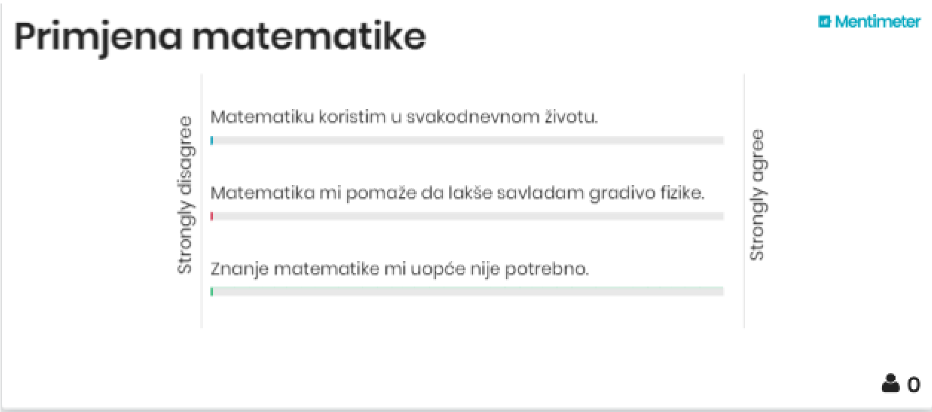
Osim jednostavnosti, praktičnosti i korisnosti, važna je prednost tehnologije nagli porast pažnje i zainteresiranosti kod učenika prilikom poučavanja u kojem se koristi. Sve navedene prednosti tehnologije iskoristit ćemo u sljedećoj strategiji. U nastavku ćemo opisati princip rada Mentimetra.

Mentimeter je vrlo jednostavan alat za korištenje, dostupan svima. Potrebna je samo registracija autora upitnika. Dakle, učenicima ne treba čak niti registracija. Alat uključuje dvije različite web stranice. Prva, https://www.mentimeter.com/, namijenjena je sastavljaču pitanja, u našem slučaju nastavniku. Druga, https://www.menti.com/ namijenjena je učenicima ili onima koji odgovaraju.

Registrirani korisnik ima profil na Mentimetru gdje su pohranjeni svi prethodni upitnici koje je napravio. Korisnik može kreirati različite tipove upitnika. Primjerice, pitanje višestrukog izbora kao na slici 2.3.9.1. gdje se učenika pita za mišljenje bez točnih i netočnih odgovora, upitnik gdje učenici skaliraju tvrdnje ovisno o kojoj se mjeri s njom slažu (slika 2.3.9.2), pitanje koje ima točne i netočne odgovore kao na slici 2.3.9.3. i dr.



Slika 2.3.9.1. *Mentimeter (1)*



Slika 2.3.9.2. *Mentimeter (2)*

Slika 2.3.9.3. *Mentimeter (3)*

Učenici ulaze na spomenutu stranicu gdje moraju upisati kod kako bi pristupili upitniku. Kod za pristup ima nastavnik. Alat jamči anonimnost učenika koji odgovaraju, ali u dogovoru s nastavnikom učenici mogu odgovarati i pod stvarnim imenima kako bi nastavnik imao uvid u odgovaranje svakog učenika. Svaki odgovor automatski se bilježi nastavniku na prezentaciji tako da nastavnik odmah vidi koliko je učenika što odgovorilo.

U poglavljima 6.4. i 6.5. opisane su konkretne strategije formativnog vrednovanja koje uključuju Mentimeter. Kao što sam već rekao, učenicima je ovakav tip rada zanimljiv pa ulažu više truda što utječe na kvalitetu učenja. S druge strane, nastavniku je vrlo jednostavan ako škola i učenici imaju potrebnu tehnologiju za provedbu strategije.

Upravo taj segment može biti veliki nedostatak kod ove strategije jer samo jedan učenik koji nema pametni telefon može biti razlog da se strategija ne provede.

Kod ove strategije važno je iskoristiti sve dobre stvari što nam tehnologija nudi, ali moramo biti svjesni i njene ograničenosti. Podaci su precizni i brzi, strategija ne zahtjeva nastavne listiće niti pisanje po ploči što je dodatni gubitak vremena. Međutim, ne smijemo zapostaviti glavni razlog provedbe strategije – učenikovo znanje. Dakle, važno je nakon svakog pitanja pokrenuti raspravu u razredu, prozvati nekoliko učenika da obrazlože svoje odgovore i potakne ih na razmišljanje. Ova nam strategija govori o broju točnih i netočnih odgovora, ali ne otkriva nam način učenikova razmišljanja. Zato je važno da se strategija ne svede na „klikanje“ nego da ispuni svoju glavnu svrhu – poboljšati učenikovo znanje.

3. Eksponencijalna funkcija

3.1 Eksponencijalna funkcija

Pojam funkcije jedan je od glavnih matematičkih pojmova. Predmet je poučavanja od sedmog razreda osnovne škole pa sve do kraja matematičkog obrazovanja. Na tom putu učenici se susreću različitim primjerima funkcija; počinju s linearnom funkcijom, nastavljaju s racionalnom funkcijom, kvadratnom funkcijom i s funkcijom drugog korijena, eksponencijalnom i logaritamskom funkcijom te u trećem razredu srednje škole s trigonometrijskim funkcijama. Zanimljivo da je kurikulumom propisano da se samim pojmom funkcije bave tek na kraju srednjoškolskog obrazovanja, nakon što su proučili sve elementarne funkcije. Kao što je spomenuto, jedna od osnovnih funkcija je eksponencijalna funkcija. U ovom ćemo poglavlju prikazati izgradnju eksponencijalne funkcije.

3.2 Izgradnja opće eksponencijalne funkcije

Kurepa (1997.) (vidi [9]) izgradnju počinje definicijom n – te potencije broja a:

Definicija 3.2.1. Za proizvoljan realan broj a i prirodan broj n, n – ta potencija a^n broja a definira se kao produkt od n faktora od kojih je svaki jednak a, to jest

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ puta}}$$

Na taj je način definirana funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ zadana pravilom pridruživanja $f(n) = a^n$. Funkciju f možemo proširiti sa skupa $\mathbb{N}$ na skup $\mathbb{Z}$ na sljedeći način:

1) $a^0 = 1$
2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, n \in \mathbb{N}$

Na taj smo način domenu funkcije f proširili na skup cijelih brojeva.

Dobivena funkcija ima sljedeća svojstva:

1) $a^n > 0$, za svaki $n \in \mathbb{Z}$
2) $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$
3) Funkcija f strogo raste za $a > 1$, odnosno strogo pada ako je $0 < a < 1$.
   Dakle, ako za $n, m \in \mathbb{N}$ i $a > 1$ vrijedi $n < m$ slijedi $a^n < a^m$.
   Ako za $n, m \in \mathbb{N}$ i $0 < a < 1$ vrijedi $n < m$ slijedi $a^n > a^m$.

Postavlja se problem možemo li domenu funkcije f proširiti sa skupa $\mathbb{Z}$ na skup $\mathbb{R}$ tako da svojstva 1) – 3) i dalje vrijede, tj. možemo li definirati broj a^x za realni broj x. Za početak, proširimo domenu funkcije na skup $\mathbb{Q}$.

Kako definirati a^r za racionalan broj r?

Ako je $r > 0$ onda pišemo $r = \frac{m}{n}$ $(m, n \in \mathbb{N})$ pa imamo:

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Međutim, znamo da se racionalan broj može prikazati na beskonačno mnogo načina u obliku kvocijenta dvaju prirodnih brojeva, pa možemo zapisati $r = \frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{N})$. Sada imamo:

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Dakle, ako ne pokažemo da je $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$ to bi značilo da a^r nije jedinstven. Pokažimo da zaista vrijedi $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$, to jest da je a^r jedinstven.

Označimo $\sqrt[n]{a^m}$ s x, a $\sqrt[q]{a^p}$ s y. Tada je $a^m = x^n$ i $a^p = y^q$. Odavde je $a^{mp} = x^{np}$ i $a^{pm} = y^{qm}$, to jest $x^{np} = y^{qm}$. Budući da vrijedi $r = \frac{p}{q} = \frac{m}{n}$, uz $x, y > 0$, slijedi da je $x = y$. Dakle, a^r je jedinstven.

Za $r < 0$, definiramo $a^r = \frac{1}{a^{-r}}$. Tako definirana funkcija $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ zadovoljava svojstvo 1).

Provjerimo zadovoljava li svojstvo 2).

Neka je $r_1 = \frac{m}{n}$ i $r_2 = \frac{p}{q}$ $(m, n, p, q \in \mathbb{N})$. Tada je $r = r_1 + r_2 = \frac{mq+np}{nq}$, pa je

$$a^{r_1+r_2} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^m} = a^{r_1} \cdot a^{r_2}.$$

Analogno bismo pokazali da $a^{r_1+r_2} = a^{r_1} \cdot a^{r_2}$ i u slučajevima kada r_1 i r_2 nisu oba pozitivna.

Dakle, pokazali smo da ovako definirana funkcija ispunjava i svojstvo 2).

Kako bismo pokazali da vrijedi svojstvo 3), pretpostavit ćemo da je $a > 1$. Tada je $a^r > 1$ za svaki $r = \frac{m}{n}$. Ako su r_1 i r_2 racionalni brojevi i $r_1 < r_2$, onda je $r_2 - r_1 > 0$ pa je $a^{r_2 - r_1} > 1$. Pomnožimo li ovu nejednakost s a^{r_1}, dobivamo $a^{r_2 - r_1} \cdot a^{r_1} > a^{r_1}$, to jest $a^{r_2} > a^{r_1}$.

Dakle, iz $r_1 < r_2$ slijedi $a^{r_1} < a^{r_2}$, tj. funkcija f strogo raste za $a > 1$.

Neka je sada $0 < a < 1$. Slijedi da je $\frac{1}{a} > 1$, pa $r_1 < r_2$ prema dokazanom povlači:

$\left(\frac{1}{a}\right)^{r_1} < \left(\frac{1}{a}\right)^{r_2}$, tj. $\frac{1}{a^{r_1}} < \frac{1}{a^{r_2}}$ iz čega slijedi $a^{r_2} < a^{r_1}$ što dalje znači da je funkcija f strogo padajuća za $0 < a < 1$.

Dakle, vrijedi i svojstvo 3), pa zaključujemo da funkcija $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ zadana pravilom pridruživanja $f(x) = a^x$ zadovoljava svojstva 1) – 3).

Kako definirati a^x za iracionalan broj x?

Promotrimo slučaj kada je $a > 1$. Definirajmo skup

$$A = \{a^r : r \leq x, r \in \mathbb{Q}\}.$$

Budući da je a^r strogo rastuća funkcija za $r \in \mathbb{Q}$ i da postoji neki $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n > x$ (što znači da je $a^n > a^x$, što pak znači da je a^n majoranta skupa A) zaključujemo da skup A ima supremum $S_{A.}$

Definiramo:

$$a^x = S_{A.}$$

I ovdje ćemo za $x < 0$ definirati

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}.$$

Na ovaj smo način definirali potencije s iracionalnim, pa samim time i realnim eksponentom. Svojstva 1) – 3) nasljeđujemo iz potencija s racionalnim eksponentom jer su iracionalni eksponenti definirani pomoću racionalnih.

3.3 Zasnivanje opće eksponencijalne funkcije

Dakle, ovako dobivenu funkciju $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadanu pravilom pridruživanja $f(x) = a^x$ zovemo **opća eksponencijalna funkcija** baze a. Funkcija f ima sljedeća svojstva:

1) $a^x > 0$, za svako $x \in \mathbb{R}$
2) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$
3) Funkcija f strogo raste za $a > 1$, odnosno strogo pada ako je $0 < a < 1$.
   Dakle, ako za $n, m \in \mathbb{N}$ i $a > 1$ vrijedi $n < m$ slijedi $a^n < a^m$.
   Ako za $n, m \in \mathbb{N}$ i $0 < a < 1$ vrijedi $n < m$ slijedi $a^n > a^m$.
4) Za svaki realan broj $y_0 > 0$ postoji jedinstven realan broj x_0 takav da je $a^{x_0} = y_0$

5) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

Funkciju možemo definirati i koristeći sljedeći teorem:

Teorem 3.3.1: Neka je $a > 0$, $a \neq 1$ realan broj. Postoji točno jedna funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:

1) $f(1) = a$
2) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$
3) ako je $a > 1$ funkcija f strogo raste, a ako je $0 < a < 1$ funkcija f strogo pada na $\mathbb{R}$
4) f preslikava $\mathbb{R}$ na $\langle 0, \infty \rangle$

Dokaz: Uočimo da prethodno opisana funkcija $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana pravilom pridruživanja $g(x) = a^x$ zadovoljava svojstva 1) – 4) iz Teorema 3.3.1. Dakle, egzistencija funkcije f je dokazana.

Dokažimo jedinstvenost: Pretpostavimo da funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ima svojstva 1) – 4). Iz 1) i 2) imamo:

$$a = f(1) = f(1 + 0) = f(1) \cdot f(0) = a \cdot f(0).$$

Budući da je $\neq 0$, slijedi da je $f(0)$ neutralni element za množenje, to jest $f(0) = 1$.

Za $x \in \mathbb{R}$ imamo: $1 = f(0) = f(-x + x) = f(-x) \cdot f(x)$ pa je

$$f(x) \neq 0 \text{ i } f(-x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Nadalje je $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = f^2\left(\frac{x}{2}\right) > 0$, tj. $f(x) > 0, x \in \mathbb{R}$.

Iz 2) imamo:

$$f(2x) = f(x + x) = f(x) \cdot f(x) = f^2(x),$$

$$f(3x) = f(2x + x) = f(2x) \cdot f(x) = f^3(x)$$

i općenito $f(nx) = f^n(x), n \in \mathbb{N}$.

Nadalje, $f(-nx)$ je prema definiciji potencije s negativnim cjelobrojnim eksponentom jednak $\frac{1}{f(nx)}$ što je jednako $\frac{1}{f^n(x)}$.

Za $x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ imamo $a = f(1)$. Zapišemo li broj 1 kao umnožak recipročnih brojeva n i $\frac{1}{n}$ imamo $f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = f^n\left(\frac{1}{n}\right)$ što zajedno s $f\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ daje $f\left(\frac{1}{n}\right) = a^{\frac{1}{n}}$.

Tada vrijedi i $f\left(\frac{k}{n}\right) = f^k\left(\frac{1}{n}\right) = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^k = a^{\frac{k}{n}}, k \in \mathbb{N}$.

Dakle, $f(r) = a^r, r \in \mathbb{Q},\ r \geq 0$, a ako je $r < 0$ onda je $f(r) = \frac{1}{f(-r)} = \frac{1}{a^{-r}} = a^r$, pa vrijedi $f(r) = a^r, r \in \mathbb{Q}$.

Pokazali smo da se funkcije f i g podudaraju na skupu racionalnih brojeva. Preostalo je proširiti tu podudarnost i na skupu iracionalnih, tj. na cijelom skupu realnih brojeva.

Neka je $a > 1$ i $x \in \mathbb{R}$. Za $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ postoji $r_n \in \mathbb{Q}$ takav da je $r_n < x < r_n + \frac{1}{n}$. S obzirom da funkcije f i g strogo rastu, vrijedi:

$$f(r_n) < f(x) < f\left(r_n + \frac{1}{n}\right),\ g(r_n) < g(x) < g\left(r_n + \frac{1}{n}\right)$$

odakle je

$$a^{r_n} < f(x) < a^{r_n + \frac{1}{n}}, a^{r_n} < a^x < a^{r_n + \frac{1}{n}}$$

pa je

$$|f(x) - a^x| < a^{r_n + \frac{1}{n}} - a^{r_n} = a^{r_n}\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < a^x\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

i konačno

$$|f(x) - a^x| < \frac{1}{n}(a - 1)a^x$$

što zbog $n \in \mathbb{N}$ i $n > 1$ povlači

$$f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}.$$

Analogno bismo pokazali i za slučaj $0 < a < 1$. Tada bi funkcije f i g strogo padale.

Dakle, pokazali smo da se funkcije f i g podudaraju na skupu realnih brojeva, tj. pokazali smo jedinstvenost funkcije za koju vrijede svojstva 1) – 4) iz Teorema 3.3.1. ■

Imajući na umu Teorem 3.3.1., opću eksponencijalnu funkciju možemo definirati i na sljedeći način:

Defincija 3.3.2. Funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja ispunjava sljedeća svojstva

1) $f(1) = a$
2) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$
3) ako je $a > 1$ funkcija f strogo raste, a ako je $0 < a < 1$ funkcija f strogo pada na $\mathbb{R}$
4) f preslikava $\mathbb{R}$ na $\langle 0, \infty \rangle$

zove se opća eksponencijalna funkcija baze a i označava se $f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}$.

4. Ishodi učenja u procesu izgradnje eksponencijalne funkcije

4.1 Ishodi učenja

Ishodi učenja su jasno i precizno napisane izjave o tome što bi učenik trebao znati, razumjeti, moći napraviti i vrednovati kao rezultat procesa učenja. Iskazuju se glagolima koji izražavaju učeničku aktivnost. Važno je da unaprijed određeni ishodi učenja budu mjerljivi kako bi učenik, roditelj i nastavnik mogli odrediti je li i u kojoj mjeri ishod učenja ostvaren. U ovom poglavlju prikazat ćemo ishode učenja vezane uz eksponencijalnu funkciju. U poglavlju 4.2. napisani su ishodi učenja vezani uz eksponencijalnu funkciju, određeni Nacionalnim okvirnim kurikulumom za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje (NOK – om).

4.2 Ishodi učenja eksponencijalne funkcije prema NOK-u

NOK predstavlja temeljni, kurikulumski dokument u Republici Hrvatskoj koji određuje sve bitne sastavnice odgojno – obrazovnoga sustava, od predškolske razine do završetka srednjoškolskoga odgoja i obrazovanja. Dio dokumenta posvećen je matematičkom području i određuje svrhu učenja i poučavanja matematike, ulogu matematike, opće ciljeve i očekivana učenička postignuća (ishode učenja) na kraju određenog odgojno – obrazovnog ciklusa. U dokumentu su istaknute dvije dimenzije matematičkog obrazovanja: matematički procesi i matematički koncepti. Procesi se odnose na opće matematičke kompetencije, a koncepti na znanje i vještine vezane uz konkretni matematički sadržaja. Ishodi učenja napisani su za svaki ciklus posebno. Budući da je eksponencijalna funkcija sadržaj drugog razreda srednje škole, u nastavku su istaknuta samo očekivana učenička postignuća iz četvrtog odgojno – obrazovnog ciklusa, kojemu pripada drugi razred srednje škole. Također, nisu navedeni ishodi učenja koji nisu povezani s eksponencijalnom funkcijom.

U nastavku slijede ishodi uz primjer njihovog konkretnog značenja u kontekstu eksponencijalne funkcije.

A2 – učenik/ca odabire i primjenjuje prikladan prikaz u skladu sa situacijom i namjerom, povezuje različite prikaze i prelazi s jednih na druge

Navedeni ishod odlično dolazi do izražaja u zadacima u kojima učenici moraju povezati dva ili više različitih zapisa iste funkcije. Sljedeća dva ishoda vrlo su važni u aktivnoj nastavi gdje učenici često sukobljavaju mišljenja što dovodi do rasprave. Važno je učenike učiti pravilno se izražavati i argumentirano raspravljati

A3 – učenik/ca izražava ideje, rezultate i znanje jasnim, preciznim i sažetim govornim i matematičkim jezikom na različite načine (usmeno, pisano, vizualno i dr.)

A4 – učenik/ca radi u skupinama uz razmjenu i sučeljavanje ideja, mišljenja i stavova

Vladaju li učenici ishodom B1 nastavnik može ispitati u situacijama u kojima učenici moraju analognim zaključivanjem doći do novih spoznaja. Primjerice, nasljeđivanje svojstva ekspoenncijalne funkcije iz svojstva računanja s potencijama.

B1 – učenik/ca uspostavlja i razumije veze i odnose među matematičkim objektima, idejama, pojmovima, prikazima i postupcima te oblikuje cjeline njihovim nadovezivanjem

U suvremenoj nastavi popularno je kroz igru utvrđivati stečeno znanje. U poglavlju 6.5. ovog diplomskog rada upravo je na taj način osmišljena strategija kojom će učenici razlikovati rastuću od padajuće funkcije i obrnuto. Dakle, učenik grupira funkcije prema izabranom kriteriju (primjerice, sve funkcije su rastuće).

B3 – učenik/ca uspoređuje, grupira i klasificira objekte i pojave prema zadanom ili izabranom kriteriju

U definiciji eksponencijalne funkcije imamo ograničenja na bazu eksponencijalne funkcije. U otkrivanju spomenutih ograničenja, učenici bi si trebali postavljati pitanja koja će ih dovesti do ograničenja i objašnjenja zašto su ona takva.

C1 – učenik/ca postavlja matematici svojstvena pitanja (Postoji li? Ako postoji, koliko? Kako ćemo ih pronaći? Zbog čega?) te stvara i istražuje na njima zasnovane matematičke postavke

C2 – učenik/ca obrazlaže odabir matematičkih postupaka i utvrđuje smislenost dobivenoga rezultata

C3 – učenik/ca prati, stvara i vrednuje lance matematičkih argumenata različitih vrsta te primjenjuje analogiju, generalizaciju i specijalizaciju

Jedno od najvrijednijih mogućnosti funkcija je modeliranje. Kao što u NOK – u piše, matematika bi, između ostaloga trebala pomoći učenicima u svakodnevnom životu. Zato je važno da učenici budu u mogućnosti probleme iz svakodnevnog života svesti na matematički i riješiti ih, tj. modelirati funkcijom.

D1 – učenik/ca postavlja i analizira problem, planira njegovo rješavanje odabirom odgovarajućih matematičkih pojmova i postupaka, rješava ga, te tumači i vrednuje rješenje i postupak

D3 – učenik/ca izgrađuje novo matematičko znanje rješavanjem problema i modeliranjem situacija

G4 – opisuje i izvodi jednostavne ovisnosti (veze) dviju veličina formulama, tablicama, grafovima i riječima; prevodi s jednog od navedena četiri oblika na drugi te čita, uspoređuje i tumači ovisnosti (veze)

G5 – prepoznaje, određuje i tumači karakteristične elemente i svojstva jednostavnih funkcija, analizira linearne, kvadratne, eksponencijalne, logaritamske i trigonometrijske funkcije te rabi njihova svojstva

G2 – učenik/ca uvrštava konkretne vrijednosti u formulu (osobito u funkciju zadanu formulom), računa vrijednosti preostale veličine te u formuli izražava jednu veličinu pomoću ostalih

Budući da je pojam potencije usko vezan uz eksponencijalnu funkciju, što se vidi i u ovom diplomskom radu, važno je da učenik dobro vlada tim dijelom aritmetike.

G3 – računa s potencijama, jednostavnim algebarskim izrazima, faktorijelima i binomnim koeficijentima

4.3 Ishodi učenja nastavne teme

Slijede ishodi učenja usko vezani uz eksponencijalnu funkciju. Za razliku od ishoda učenja prema NOK – u koji su općeniti, ishodi učenja eksponencijalne funkcije su precizniji i specifični za točno određenu temu, u ovom slučaju eksponencijalnu funkciju. Određeni su planom i programom za svaki školski sat ili nastavnu cjelinu. Napisani ishodi odnose se na završetak drugog razreda srednje strukovne škole i gimnazije što je dio četvrtog odgojno - obrazovnog ciklusa.

Dakle, završetkom obrade eksponencijalne funkcije, očekuje se da svaki učenik:

1. zapisuje realan broj u obliku potencije i potenciju u obliku realnog broja u decimalnom i razlomačkom obliku
2. računa s potencijama
3. računa s korijenima

4. prepoznaje eksponencijalnu funkciju zadanu pravilom pridruživanja, tablicom i grafički te prelazi iz jednog zapisa u drugi
5. primjenjuje svojstva eksponencijalne funkcije
6. određuje vrijednost eksponencijalne funkcije u zadanoj točki i određuje točku u kojoj eksponencijalna funkcija poprima zadanu vrijednost
7. rješava eksponencijalne jednadžbe i nejednadžbe algebarski (primjenom svojstava eksponencijalne funkcije i metodom supstitucije) i grafički
8. modelira eksponencijalnom funkcijom
9. preciznim matematičkim izražavanjem argumentira zaključke vezane uz eksponencijalnu funkciju.

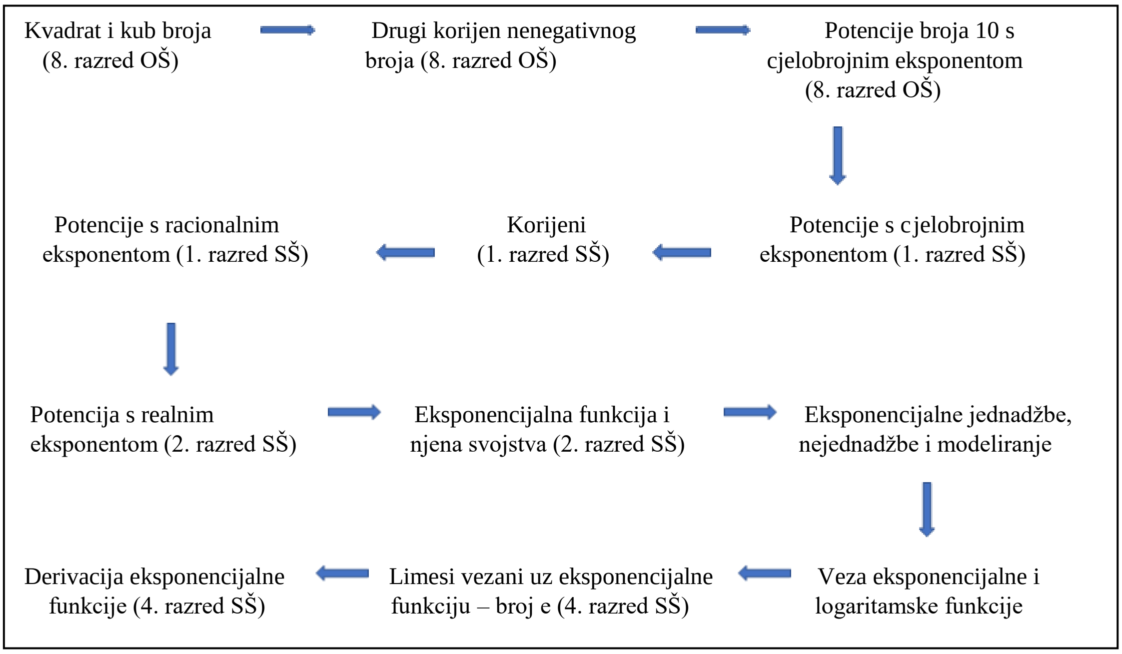
U devet izjavnih rečenica sažeto je sve što bi učenici trebali znati i moći napraviti nakon obrade eksponencijalne funkcije. U tu svrhu, u petom i šestom poglavlju ovog diplomskog rada, u opisu strategija aktivne nastave i formativnog vrednovanja istaknuti su ishodi 1. – 9. čijem ostvarivanju doprinosi svaka pojedina strategija.

4.4 Koraci u postupnoj izgradnji eksponencijalne funkcije u nastavi matematike

Preostaje nam vidjeti na koji način nastavni sadržaji, počevši od osmog razreda osnovne škole izgrađuju eksponencijalnu funkciju. Neki od njih samo su spomenuti kako se ne bi otišlo van granica ovog diplomskog rada, a većina je detaljno opisana i obrađena koristeći strategije aktivne nastave i formativnog vrednovanja.

Krenimo redom – u osmom razredu osnovne škole učenici se susreću s kvadratom i kubom realnog broja te drugim korijenom nenegativnog broja. Učenici uče svojstva kvadriranja i korjenovanja koja koriste prilikom računanja, te uvode kvadratnu funkciju i funkciju drugog korijena. Zatim slijede potencije broja 10 s cjelobrojnim eksponentom. U poglavlju 5.1.2. opisana je aktivnost otkrivanja prijelaza s prirodnih na cjelobrojne eksponente. Aktivnost je primjenjiva i na početku prvog razreda srednje škole gdje učenici uče potencije s cjelobrojnim eksponentima. Također, proširuju znanje o korijenima (kao rješenja algebarske jednadžbe) gdje učenici uče operacije s korijenima.

U poglavlju 5.2.1. prikazana je aktivnost otkrivanja korijena kao rješenja algebarske jednadžbe. U sljedećoj aktivnosti prikazano je uvođenje potencije s racionalnim eksponentom putem veze s korijenima što je također dio prvog razreda srednje škole. Neposredno prije uvođenje pojma eksponencijalne funkcije, u drugom razredu srednje škole, pojam potencije proširuje se na realni eksponent što je prikazano u poglavlju 5.3.1. Zatim dolaze eksponencijalna funkcija i njena svojstva, eksponencijalne jednadžbe i nejednadžbe te modeliranje eksponencijalnom funkcijom. Potom, krajem drugog razreda srednje škole učenici uče logaritamsku funkciju koja je usko vezana uz eksponencijalnu. Na kraju srednjoškolskog obrazovanja, učenici uče limese vezane uz eksponencijalnu funkciju (broj e) i derivaciju eksponencijalne funkcije.



Slika 3.3.1 *Prikaz koraka u izgradnji eksponencijalne funkcije*

5. Strategije aktivne nastave u izgradnji eksponencijalne funkcije

5.1 Aktivnosti u izgradnji koncepta potencije

U ovom poglavlju prikazat ćemo konkretne aktivnosti kojima učenicima otkrivaju matematičke koncepte i zakonitosti vezane uz eksponencijalnu funkciju. Svaku ćemo aktivnost detaljno opisati. Opis počinje iskazanim ciljem planirane aktivnosti u obliku ishoda učenja. Nadalje, za svaku će aktivnost biti opisan oblik i metoda rada, potreban materijal i predviđeno vrijeme. Osim toga, bit će napisano na koji se razred odnosi te kojim ishodima učenja iz poglavlja 4 doprinosi. Zatim slijedi detaljan opis tijeka aktivnosti u kojemu opisujemo zadatke za nastavnika i učenika.

Glavni dio aktivnosti su primjeri nastavnih listića ili zadataka. Dio listića koji bi trebali rješavati učenici istaknut je crvenom bojom. Nakon toga slijedi refleksija na aktivnost u kojoj ćemo istaknuti na što bi nastavnik trebao posebno obratiti pažnju, što bi trebao naglasiti i na što upozoriti učenike kako bi aktivnost bila što učinkovitija. Također, u refleksiji se osvrćemo i na način koji aktivnost doprinosi procesima.

Izgradnja koncepta eksponencijalne funkcije započinje izgradnjom koncepta potencije (pozitivnog) realnog broja s racionalnim eksponentom. Prvi korak pritom je izgradnja koncepta potencije realnog broja s eksponentom iz skupa $\mathbb{N} \setminus \{1\}$. S njime se započinje još u osmom razredu osnovne škole, gdje se uvode potencije s bazom 10, a nastavlja u prvom razredu srednje škole s općom bazom. Stoga je prva aktivnost koju ćemo opisati upravo ona u kojoj učenici prvog razreda srednje škole otkrivaju pojam potencije oblika a^n, pri čemu je $a \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

5.1.1 Aktivnost „Otkrivanje pojma potencije"

Provedba ove aktivnosti pridonosi ostvarenju ishoda učenja A3, A4 i C3 u prvom razredu srednje škole. Aktivnost će biti provedena u obliku suradničkog rada učenika u skupinama. U prvoj fazi šest skupina po četiri učenika radit će organizirano u obliku gostionice. Svi će učenici u pojedinoj skupini imati isti nastavni listić, a svaki će listić unutar skupine biti označen brojem 1 - 4. Prema tim brojevima učenici će formirati nove skupine čime započinje faza 2. Svi učenici s nastavnim listićem pod rednim brojem 1 činit će jednu u grupu u fazi 2, svi učenici s nastavnim listićem pod rednim brojem 2 činit će jednu grupu u fazi 2 itd.

Tri grupe će raditi s potencijama kojima su baze veće od 1, a preostale tri grupe će raditi s potencijama kojima su baze manje od 1. Dakle, u prvoj fazi gostionice učenici rješavaju zadatak 1. Odlaskom „u goste" učenici prezentiraju svoje bilješke, zapisuju bilješke učenika drugih grupa te zajedno istražuju pravilnosti. Faza 2 završava otkrivanjem pravilnosti nakon čega se učenici vraćaju u svoje prvotne skupine i započinje faza 3. U fazi 3 učenici zapisuju dobivene zaključke te se spremaju za razrednu diskusiju.

Osim pribora za pisanje, učenicima su potrebni nastavni listići. U nastavnim listićima *5.1.1.* i *5.1.2.* dani su primjeri listića dviju grupa – A i D (rješenja su označena crvenom bojom). Naime, grupe B i C imaju isti zadatak kao i grupa A, samo što Luka sada šalje pisma trojici, odnosno petorici prijatelja koji nastavljaju niz. Grupe E i F imaju isti zadatak kao grupa A, samo što pravokutnik nisu rezali na dva jednaka dijela nego na tri (u grupi E) odnosno pet (u grupi F). Predviđeno vrijeme za provedbu aktivnosti je oko 20 minuta.

Aktivnost je predviđena za prvi razred srednje škole kada učenici pojam potencije proširuju na racionalne baze i racionalne eksponente. U osmom razredu osnovne škole učenici se susreću s cjelobrojnim potencijama broja 10 pa bi se ova aktivnost mogla provesti i u osmom razredu ako bi se zadaci na listiću prilagodili tako da u bazi bude broj 10, a u eksponentu cijeli broj.

Nastavni listić 5.1.1.1. *Otkrivanje potencija*

Grupa A

Zadatak 1:

Luka je zaželio želju i poslao pisma na adrese svojih dvoje prijatelja. Svaki od prijatelja to pismo treba proslijediti na adrese nekih drugih dvoje prijatelja unutar sat vremena ako želi da mu se želja ispuni. Svaka osoba koja primi pismo treba, ako želi da joj se želja ispuni, poslati to pismo na adresu svojih dvoje prijatelja. Uz pretpostavku da su svi poštivali pravila „lanca sreće“, odgovorite na sljedeća pitanja:

a) Koliko je osoba primilo pismo prvog sata?

   Prvog sata pismo su primile dvije osobe, dva Lukina prijatelja.

b) Koliko je osoba primilo pismo drugog sata?

   Tijekom drugog sata svaki je od Lukinih prijatelja poslao po dva pisma, dakle $2 \cdot 2 = 4$ pisma.

c) Koliko je osoba primilo pismo trećeg sata?

   Tijekom trećeg sata, svaka od ove 4 osobe poslala je po dva pisma, dakle $4 \cdot 2 = 8$ pisama.

d) Koliko je osoba primilo pismo četvrtog sata?

   Tijekom četvrtog sata, svaka od ovih 8 osoba poslala je po dva pisma, dakle $8 \cdot 2 = 16.$

Broj sati	Zapis računa u obliku umnoška	Rezultat	Zapis rezultata u obliku umnoška s faktorima 2	Broj faktora iz prethodnog stupca
2	$2 \cdot 2$	4	$2 \cdot 2$	2
3	$4 \cdot 2$	8	$2 \cdot 2 \cdot 2$	3
4	$8 \cdot 2 = 16$	16	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	4

Zadatak 2:

1. Prezentirajte ostalim učenicima svoj zadatak s rješenjima.

Koristeći dobivene rezultate svoje i ostalih grupa, ispunite tablicu:

	Broj pisama					
	…ako Luka ima 2 prijatelja (A grupa)		…ako Luka ima 3 prijatelja (B grupa)		…ako Luka ima 5 prijatelja (C grupa)	
	Zapis u obliku umnoška s faktorom 2	Broj faktora	Zapis u obliku umnoška s faktorom 3	Broj faktora	Zapis u obliku umnoška s faktorom 5	Broj faktora
Nakon 2 sata	$2 \cdot 2$	2	$3 \cdot 3$	2	$5 \cdot 5$	2
Nakon 3 sata	$2 \cdot 2 \cdot 2$	3	$3 \cdot 3 \cdot 3$	3	$5 \cdot 5 \cdot 5$	3
Nakon 4 sata	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	4	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	4	$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$	4

Prisjetite se osnovne škole:
Kako ste kraće zapisivali umnožak:

$$10 \cdot 10 = 10^2$$
$$10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$$
$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$$
$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^9$$

Kako se naziva taj skraćeni prikaz?

Skraćeni izraz naziva se potencija broja 10.

2. Koristeći skraćeni zapis umnoška (potenciranje), ispunite sljedeću tablicu:

	Broj pisama		
	…ako Luka ima 2 prijatelja (A grupa)	…ako Luka ima 3 prijatelja (B grupa)	…ako Luka ima 5 prijatelja (C grupa)
Nakon 7 sati	2^7	3^7	5^7
Nakon 12 sati	2^{12}	3^{12}	5^{12}
Nakon 50 sati	2^{50}	3^{50}	5^{50}

Zadatak 3:

Kako biste nazvali zapis 2^{50}?

Zapis 2^{50} je pedeseta potencija broja 2.

Odredite vrijednost sljedećih zapisa:

$2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ $5^8 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

Kako biste nazvali i definirali broj a^n, gdje je $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$?

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ puta}}$$

U nastavku je prikazan nastavni listić za otkrivanje potencija s bazom manjom 1.

Nastavni listić 5.1.1.2. *Otkrivanje potencija 2*

Zadatak 1

Marko je papir oblika pravokutnika površine 1 izrezao tako da je dobio dva nova pravokutnika jednake površine. Odredio je površinu jednog od njih i postupak je nastavio na svakom od novodobivenog pravokutnika.

a) Koliko je površina malog pravokutnika nakon prvog rezanja?

Površina pravokutnika nakon prvog rezanja je $\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

b) Koliko je površina jednog pravokutnika nakon drugog rezanja?

Površina pravokutnika nakon drugog rezanja je $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

c) Koliko je površina jednog pravokutnika nakon trećeg rezanja?

Površina pravokutnika nakon trećeg rezanja je $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

d) Koliko je površina jednog pravokutnika nakon četvrtog rezanja?

Površina pravokutnika nakon četvrtog rezanja je $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$.

Broj rezanja	Površina nakon rezanja	Zapis rezultata u obliku umnoška s faktorima $\frac{1}{2}$	Broj faktora iz prethodnog stupca
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$	2
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$	3
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$	4

Zadatak 2

2. Prezentirajte ostalim učenicima svoj zadatak s rješenjima.

Koristeći dobivene rezultate svoje i ostalih grupa, ispunite tablicu:

	Površina					
	…ako Marko reže pravokutnik na pola (A grupa)		…ako Marko reže pravokutnike na trećine (B grupa)		…ako Marko reže pravokutnike na petine (C grupa)	
	Zapis u obliku umnoška s faktorom 2	Broj faktora	Zapis u obliku umnoška s faktorom 3	Broj faktora	Zapis u obliku umnoška s faktorom 5	Broj faktora
Nakon drugog rezanja	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$	2	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$	2
Nakon trećeg rezanja	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$	3	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$	3
Nakon četvrtog rezanja	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$	4	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$	4

Prisjetite se osnovne škole:

Kako ste kraće zapisivali umnožak:

$$10 \cdot 10 = 10^2$$

$$10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$$

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$$

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^9$$

Kako se naziva taj skraćeni prikaz?
Skraćeni izraz naziva se potencija broja 10.

1. Koristeći skraćeni zapis umnoška (potenciranje), ispunite sljedeću tablicu:

	Površina		
	…ako Marko reže pravokutnik na pola (A grupa)	…ako Marko reže pravokutnike na trećine (B grupa)	…ako Marko reže pravokutnike na petine (C grupa)
Nakon 10 rezanja	$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$	$\left(\frac{1}{5}\right)^{10}$
Nakon 22 rezanja	$\left(\frac{1}{2}\right)^{22}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{22}$	$\left(\frac{1}{5}\right)^{22}$
Nakon 55 rezanja	$\left(\frac{1}{2}\right)^{55}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{55}$	$\left(\frac{1}{5}\right)^{55}$

Zadatak 3:

Kako biste nazvali zapis 2^{50}?

Zapis 2^{50} je pedeseta potencija broja 2.

Odredite vrijednost sljedećih zapisa:

$2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ $\quad$ $5^8 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

Kako biste nazvali i definirali broj a^n, gdje je $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$?

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ puta}}$$

Aktivnost je zamišljena u obliku gostionice kako bismo istovremeno obuhvatili sve relevantne slučajeve i što je moguće više konkretnih primjera te potaknuli sve učenike na rad. Naime, radili smo s tri potencije različitih baza većih od 1 i s tri potencije različitih baza iz intervala $\langle 0,1 \rangle$. Nakon što su učenici u fazi 1 rješavali zadatke vezane uz samo jednu od tih potencija, u fazi 2 otišli su „u goste“ gdje su vidjeli što se događa s ostalih 5 potencija. Na taj smo način osigurali zastupljenost svih slučajeva te rad i angažman svih učenika jer su za zaključke iz faze 2 potrebna rješenja svih zadataka iz faze 1. Na kraju, u fazi 3 učenici u svojim prvotnim grupama zapisuju definiciju potencije.

Nastavnik za vrijeme aktivnosti obilazi razred, osluškuje učenike u njihovim razgovorima i raspravama te ih postavljenjem pitanja potiče na argumentiranu raspravu. Rasprave među učenicima obično su neformalne i opuštenijeg karaktera, što pojedinim učenicima može biti dobra prilika za uključivanje. Strah i nesigurnost koji se kod nekih učenika javljaju u raspravama koje uključuju nastavnika i cijeli razred često mogu biti prepreka za aktivno sudjelovanje na satu. Zato je rad u manjim skupinama dobar način da nastavnik sve učenike uključi u proces učenja.

Na kraju aktivnosti, nastavnik može upozoriti na najčešće greške u zaključivanju ili izražavanju koje je primijetio tijekom rada.

5.1.2 Aktivnost „Potencije s cjelobrojnim eksponentom“

Sljedeći korak je proširivanje pojma potencije na potencije s proizvoljnim cjelobrojnim eksponentom što odgovora ishodima A3 i A4 iz poglavlja 4. Aktivnost je predviđena za prvi razred srednje škole iako se može prilagoditi i učenicima osmog razreda tako što bi radili samo potencije s bazom 10. U ovoj aktivnosti učenici će otkriti pojam potencije s eksponentom 0 i negativnim cjelobrojnim eksponentima. Aktivnost je zamišljena kao rad u paru gdje će učenici rješavati nastavni listić. Nastavnik dijeli učenicima nastavne listiće i, obilazeći ih, osluškuje njihove razgovore, argumente i način razmišljanja. Postoji više analognih nastavnih listića, tj. razlikuje ih samo baza potencije. U nastavnom listiću 5.2.1. prikazani su nastavni listići predviđeni za jedan par - listić s bazom 5 i listić s bazom 3. Jedan od učenika rješava listić koji sadrži potencija s bazom 5, a drugi učenik listić s bazom 3. Nakon isteka predviđenog vremena za rješavanje listića, učenici uspoređuju postupke i raspravljaju o uočenim pravilnostima. Na kraju, nastavnik predvodi raspravu u kojoj učenici prezentiraju svoje zaključke. Sve što je učenicima potrebno za ovu aktivnost jest pribor za pisanje i nastavni listić. Predviđeno vrijeme za ovu aktivnost je 15 minuta.

Nastavni listić 5.1.2.1. *Cjelobrojni eksponent*

Učenik A

1. Odredi vrijednosti potencija u danom nizu.

$$5^8 = 390625$$

$$5^7 = 78125$$

$$5^6 = 15625$$

$$5^5 = 3125$$

$$5^4 = 625$$

$$5^3 = 125$$

$$5^2 = 25$$

2. Na koji se način mijenjaju eksponenti iz retka u redak?
   U svakom je sljedećem retku eksponent za 1 manji od eksponenata u prethodnom retku.

3. Na koji se način vrijednosti potencija mijenjaju iz retka u redak?
   U svakom sljedećem retku vrijednost potencije smanji se 5 puta.

4. Na praznu crtu upišite broj tako da uočeno pravilo i dalje vrijedi.

$$5^{1} = 5$$

$$5^{0} = 1$$

5. Nastavi niz prema uočenim pravilima, tj. dopuni niz tako da uočena pravila vrijede i u sljedećim jednakostima. Vrijednost potencije zapišite u obliku

potpuno skraćenog razlomka.

$$5^{-1} = \frac{1}{5}$$

$$5^{-2} = \frac{1}{25}$$

$$5^{-3} = \frac{1}{125}$$

$$5^{-4} = \frac{1}{625}$$

$$5^{-5} = \frac{1}{3125}$$

6. Promotri nazivnike razlomaka iz trećeg stupca i prvi zadatak. Što uočavaš?

   Nazivnici razlomaka su potencije broja 5.

7. Dopuni jednakosti tako da nazivnici razlomka budu zapisani u obliku potencije.

$$5^{-1} = \frac{1}{5^1}$$

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2}$$

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3}$$

$$5^{-4} = \frac{1}{5^4}$$

$$5^{-5} = \frac{1}{5^5}$$

Usporedi dobivene rezultate s partnerom.

8. Na praznu crte upiši definiciju potencije s negativnim cjelobrojnim eksponentom.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$$

U nastavku je prikazan nastavni listić drugog učenika u paru koji je analogan listiću prvog učenika. Jedina razlika je baza potencije.

Nastavni listić 5.1.2.2. *Cjelobrojni eksponent 2*

Učenik B

1. Odredi vrijednosti potencija u danom nizu.

$$3^8 = 6561$$

$$3^7 = 2187$$

$$3^6 = 729$$

$$3^5 = 243$$

$$3^4 = 81$$

$$3^3 = 27$$

$$3^2 = 9$$

2. Na koji se način mijenjaju eksponenti iz retka u redak?

U svakom je sljedećem retku eksponent za 1 manji od eksponenata u prethodnom retku.

3. Na koji se način vrijednosti potencija mijenjaju iz retka u redak?

   U svakom sljedećem retku vrijednost potencije smanji se 3 puta.

4. Na praznu crtu upišite broj tako da uočeno pravilo i dalje vrijedi.

$$3^{1} = 3$$

$$3^{0} = 1$$

5. Nastavi niz prema uočenim pravilima, tj. dopuni niz tako da uočena pravila vrijede i u sljedećim jednakostima. Vrijednost potencije zapišite u obliku potpuno skraćenog razlomka.

$$3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{9}$$

$$3^{-3} = \frac{1}{27}$$

$$3^{-4} = \frac{1}{81}$$

$$3^{-5} = \frac{1}{243}$$

6. Promotri nazivnike razlomaka iz trećeg stupca i prvi zadatak. Što uočavaš?
   Nazivnici razlomaka su potencije broja 3.

7. Dopuni jednakosti tako da nazivnici razlomka budu zapisani u obliku potencije.

$$3^{-1} = \frac{1}{3^1}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2}$$

$$3^{-3} = \frac{1}{3^3}$$

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4}$$

$$3^{-5} = \frac{1}{3^5}$$

Usporedi dobivene rezultate s partnerom.

8. Na praznu crte upiši definiciju potencije s negativnim cjelobrojnim eksponentom.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$$

Dok učenici rješavaju nastavne listiće, nastavnik obilazi razred i prati rad svih učenika te ih u slučaju eventualnih grešaka ispravlja. Primjerice, prijelaz s decimalnog zapisa broja u razlomak može učenicima stvarati poteškoće i usporiti ih u daljnjem zaključivanju. Također, važno je da nastavnik u svakoj prilici učenike usmjerava pravilnom matematičkom izražavanju da kompetencije razvijaju usmenim objašnjavanjem. Na primjer, u trećem pitanju postoji opasnost da će učenici odgovoriti da je „svaki sljedeći broj za 5 manji“ što je krivo. Ispravno je reći da je „svaki sljedeći broj 5 puta manji“. To je samo jedan od primjera u ovoj aktivnosti gdje učenici nisu svjesni da se neispravno izražavaju. Na kraju, važno je da se nastavnik pobrine da svi učenici sudjeluju, tj. da primijeti je li neki od učenika prepustio rad u ovoj aktivnosti svome paru.

5.1.3 Aktivnost „Pravila potenciranja“

U ovoj aktivnosti učenici će otkriti pravilo potenciranja $a^n \cdot a^m = a^{n+m},\ n, m \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}$ što će doprinijeti ostvarivanju ishoda A3, A4, G3 i 2. Iako je prikazana aktivnost namijenjena učenicima prvog razreda srednje škole, može biti provedena i u osmom razredu osnovne škole kada učenici uče potencije broja 10.

Aktivnost je zamišljena kao rad u paru koji se dijeli u dvije faze. U prvoj fazi svaki učenik u paru rješava 6 zadataka. Zadatak prvog učenika (nastavni listići *5.1.3.1.*) je pomnožiti dvije potencije tako da prvo izračuna vrijednost svake potencije i zatim izračuna umnožak brojeva. Zadatak drugog učenika je izračunati potencije kojima se u eksponentu nalazi zbroj dvaju brojeva. Učenik prvo treba zbrojiti eksponent i zatim izračunati vrijednost potencije (nastavni listići *5.1.3.2.*).

Završetkom prve faze, to jest kada par učenika odradi svoj dio zadatka, uspoređuju dobivene rezultate i zajedno odgovaraju na postavljena pitanja s listića *5.1.3.3.* Predviđeno vrijeme trajanja je oko 15 minuta. Sve što treba od materijala su pribor za pisanje i nastavni listići.

Nastavni listić 5.1.3.1. *Pravila potenciranja 1*

1A

Izračunaj potencije pa pomnoži:

a) $3^2 \cdot 3^3 = 9 \cdot 27 = 243$

b) $2^0 \cdot 2^{-3} = 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

c) $11^{-2} \cdot 11^1 = \frac{1}{121} \cdot 11 = \frac{1}{11}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{243}$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 1 \cdot 8 = 8$

f) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{125} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$

Nastavni listić 5.1.3.2. *Pravila potenciranja 2*

1B

Zbroji eksponente pa izračunaj:

a) $3^{2+3} = 3^5 = 243$

b) $2^{0+(-3)} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

c) $11^{-2+1} = 11^{-1} = \frac{1}{11}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2+3} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{0+(-3)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$

f) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3+(-1)} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$

Nastavni listić 5.1.3.3. *Pravila potenciranja 3*

Zadatak 2:

Usporedite zadatke pod istim slovom u listićima 1A i 1B.

1. Kakve su baze potencija iz zadataka u odnosu na 1?

   Sve su baze veće od 1.

2. U kakvom su odnosu baze potencija u zadacima pod istim slovom na oba listića?

   Jednake su.

3. U kakvom su odnosu rješenja zadataka pod istim slovom na oba listića?

   Jednaka su.

4. Napišite pravilnost koju uočavate?

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad n, m \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}$$

Po završetku rasprave, oba para međusobno razgovaraju o provedenoj aktivnosti. Prezentiraju jedni drugima zadatke koje su rješavali i zaključke do kojih su stigli. Važno je da uvide da navedeno pravilo vrijedi za sve pozitivne racionalne brojeve (vrijedi općenito za sve racionalne, čak i realne brojeve, ali uzimajući u obzir eksponencijalnu funkciju, negativne racionalne brojeve smo zanemarili, a egzistenciju i smisao potencija s realnom bazom ili eksponentom tek trebaju otkriti).

Aktivnost je koncipirana tako da učenik prvo samostalno rješava zadatke što će već u sljedećoj fazi biti nužno za donošenje ispravnog zaključka. Dakle, nije moguće da jedan od učenika ne odradi svoj dio posla ako par želi doći do zaključka. Na taj način nastavnik ima sigurnost da će svi učenici biti uključeni u rad.

Dok učenici rade, nastavnik obilazi razred i lako uviđa koji učenici brzo i sigurno rješavaju svoje zadatke, a koji učenici imaju poteškoća. Dobivene informacije nastavnik treba iskoristiti u skorijem periodu kako bi uočene miskoncepcije što prije uklonio. Isto vrijedi i za učenika koji kroz ovu aktivnost može uočiti poteškoće koje mu onemogućuju usvajanje nadolazećeg sadržaja. Primjer zadataka koji učenicima mogu praviti probleme su zadaci koji sadrže izraze tipa $\left(\frac{1}{10}\right)^{-2}$, tj. izraze s bazom manjom od 1 i negativnim eksponentom. Potencije s negativnim eksponentom učenici su učili na jednom od prethodnih satova i lako se može dogoditi da neki od učenika ne vladaju tim sadržajem.

Ova aktivnost prilika je da osvijeste prisutne nedostatke te ih, još uvijek, bezbolno riješe prije nadolazećih sadržaja

5.2 Otkrivanje koncepta korijena broja

Da bismo mogli definirati potenciju s racionalnim eksponentom, potrebno nam je uvođenje koncepta korijena broja. U tu svrhu, sljedećih nekoliko aktivnosti posvećeno je otkrivanju koncepta korijena broja te računanju s korijenima. Budući da korijeni nisu u fokusu ovog diplomskog rada, prikazani su primjeri samo nekih aktivnosti vezanih uz korijen broja.

5.2.1 Aktivnost „Otkrivanje n – tog korijena broja“

Budući da je potencija s racionalnim eksponentom usko vezana uz korijen broja, cilj sljedeće aktivnosti je otkriti pojam n – tog korijena što je dio prvog razreda srednje škole. U osmom razredu osnovne škole učenici su se već upoznali s drugim korijenom broja pa će ovdje samo proširiti pojam korijena te doprinijeti ispunjavaju ishoda A3, A4 i C3.

Aktivnost je zamišljena u obliku rada u skupinama. Naime, učenike ćemo prvo podijeliti u pet skupina tako da svaka rješava nastavni listić. Unutar skupine učenici zajedno rješavaju listić, ali svaki učenik rješenja piše na vlastiti koji će kasnije koristiti u novoj skupini. Završetkom ove faze nastavnik oblikuje nove peteročlane skupine tako da jednu čini jedan učenik s nastavnim listićem A, jedan s listićem B i jedan s Listićem C itd. U novoj skupini svaki učenik prezentira svoja rješenja nakon čega rješavaju nastavne listiće 5.2.2.6.

Za provedbu aktivnosti potrebno je oko 20 minuta, pribor za pisanje te nastavni listići.

Nastavni listić 5.2.1.1. *Otkrivanje korijena 1*

Grupa A

1) Dunja je zamislila jedan broj i pomnožila ga samim sobom. Koji je broj Dunja

zamislila ako je po završetku množenja dobila broj:

a) 256
b) 0
c) -121?

Rješenje:

a) Tražimo broj koji pomnožen sam sobom dva puta daje broj 256. Imamo dva rješenja: 16 i -16. Dakle, Dunja je zamislila jedan od ta dva broja.

b) Tražimo broj koji pomnožen sam sobom dva puta daje broj 0. Imamo jedno rješenje: 0. Dakle, Dunja je zamislila broj 0.

c) Tražimo broj koji pomnožen sam sobom dva puta daje broj -121. Ne postoji takav broj.

Rasprava:

Kako biste zapisali da nepoznati broj množimo samim sobom dva puta? Uputa: Zapiši u obliku potencije.

$$x \cdot x = x^2$$

a) Koju ste jednadžbu rješavali u prvom slučaju?

U prvom slučaju imamo jednadžbu:

$$x^2 = 256$$

Koristeći formulu za razliku kvadrata, riješi jednadžbu:

$$x^2 = 256 \Leftrightarrow x^2 - 256 = 0 \Leftrightarrow (x-16)(x+16) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 16 \text{ i } x_2 = -16$$

b) Koju ste jednadžbu rješavali u drugom slučaju?

U drugom slučaju imamo jednadžbu:

$$x^2 = 0$$

Riješi jednadžbu algebarski.

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

c) Koju ste jednadžbu rješavali u drugom slučaju?

U drugom slučaju imamo jednadžbu:

$$x^2 = -121$$

Riješite jednadžbe algebarski.

$x^2 = -121 \Leftrightarrow x^2 + 121 = 0$

Nema rješenja jer $x^2 + 121 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nastavni listić 5.2.1.2. *Otkrivanje korijena 2*

Grupa B

a) Jelena je zamislila jedan broj i pomnožila ga samim sobom tri puta. Koji je broj Jelena zamislila ako je po završetku množenja dobila broj:
b) 8
c) 0
d) -64?

Rješenje:

a) Tražimo broj koji pomnožen sam sa sobom tri puta daje broj 8. Traženi broj je 2. Jelena je zamislila broj 2.

b) Tražimo broj koji pomnožen sam sa sobom tri puta daje broj 0. Imamo jedno rješenje: 0. Dakle, Jelena je zamislila broj 0.

c) Tražimo broj koji pomnožen sam sa sobom tri puta daje broj -64. Traženi broj je -4. Jelena je zamislila broj -4.

Rasprava:

Kako biste zapisali da nepoznati broj množimo samim sobom dva puta? Uputa: Zapiši u obliku potencije.

$$\underline{x \cdot x \cdot x = x^3}$$

a) Koju ste jednadžbu rješavali u prvom slučaju?

$$x^3 = 8$$

Dovrši rješavanje jednadžbe upisujući na prazne crte tražene izraze:

$$x^3 = 8$$
$$x^3 - 8 = 0$$
$$(x - \_\_)(x^2 + 2x + \_\_) = 0$$
$$(x - \_\_)[\,(x+1)^2 + \_\_] = 0$$

1) Kada je umnožak dvaju brojeva jednak nuli?

   Kada su oba faktora jednaka nuli.

2) Za koji $x \in \mathbb{R}$ će prvi faktor biti jednak nuli?

   Prvi faktor će biti jednak nuli za $x = 2$.

3) Za koji $x \in \mathbb{R}$ će drugi faktor biti jednak nuli?

   Faktor $[\,(x+1)^2 + 1] > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ pa ne postoji $x \in \mathbb{R}$ za koji je drugi faktor jednak nuli.

4) Koliko početna jednadžba ima rješenja? Napiši ih.

   Jedino rješenje jednadžbe je broj 2.

b) Koju ste jednadžbu rješavali u drugom slučaju?

U drugom slučaju imamo jednadžbu:

$$x^3 = 0$$

Riješi jednadžbu algebarski.

$x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

c) Koju ste jednadžbu rješavali u trećem slučaju?

U trećem slučaju imamo jednadžbu:

$$x^3 = -64$$

Dovrši rješavanje jednadžbe upisujući na prazne crte tražene izraze:

$$x^3 = -64$$
$$x^3 + 64 = 0$$
$$(x + \_\_)(x^2 - 4x + \_\_) = 0$$
$$(x + \_\_)[\,(x-2)^2 + \_\_] = 0$$

1) Kada je umnožak dvaju brojeva jednak nuli?

   Kada su oba faktora jednaka nuli.

2) Za koji $x \in \mathbb{R}$ će prvi faktor biti jednak nuli?

   Prvi faktor će biti jednak nuli za $x = -4$.

3) Za koji $x \in \mathbb{R}$ će drugi faktor biti jednak nuli?

   Faktor $[\,(x-2)^2 + 12\,] > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ pa ne postoji $x \in \mathbb{R}$ za koji je drugi faktor jednak nuli.

4) Koliko početna jednadžba ima rješenja? Napiši ih.

   Jedino rješenje jednadžbe je broj -4.

Nastavni listić 5.2.1.3. *Otkrivanje korijena 3*

Grupa C

2) Linda je zamislila jedan broj i pomnožila ga samim sobom četiri puta. Koji je broj Jelena zamislila ako je po završetku množenja dobila broj:
   a) 625
   b) 0
   c) -16?

Rješenje:

a) Tražimo broj koji pomnožen sam sobom četiri puta daje broj 256. Imamo dva rješenja: 5 i -5. Dakle, Linda je zamislila jedan od ta dva broja.
b) Tražimo broj koji pomnožen sam sobom dva puta daje broj 0. Imamo jedno rješenje: 0. Dakle, Linda je zamislila broj 0.
c) Tražimo broj koji pomnožen sam sobom dva puta daje broj -16. Ne postoji takav broj.

Rasprava:

Kako biste zapisali da nepoznati broj množimo samim sobom dva puta? Uputa: Zapiši u obliku potencije.

$$\underline{x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4}$$

a) Koju ste jednadžbu rješavali u prvom slučaju?

$$x^4 = 625$$

Koristeći formulu za razliku kvadrata, riješi jednadžbu:

$x^4 = 625 \Leftrightarrow x^4 - 625 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 25)(x^2 + 25) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x + 5)(x - 5)(x^2 + 25) \Leftrightarrow x_1 = 5$ i $x_2 = -5$

b) Koju ste jednadžbu rješavali u drugom slučaju?

U drugom slučaju imamo jednadžbu:

$$x^4 = 0$$

Riješi jednadžbu algebarski.

$x^4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

c) Koju ste jednadžbu rješavali u trećem slučaju?

U trećem slučaju imamo jednadžbu:

$$x^4 = -16$$

Riješite jednadžbe algebarski.

$x^4 = -16 \Leftrightarrow x^4 + 16 = 0$

Nema rješenja jer $x^4 + 16 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nastavni listić 5.2.1.4. *Otkrivanje korijena 4*

Grupa D

3) Domagoj je zamislio jedan broj i pomnožila ga samim sobom pet puta. Koji je broj Jelena zamislila ako je po završetku množenja dobila broj:
   a) 32
   b) 0
   c) -32?

Kako biste mogli zapisati da nepoznati broj množimo samim sobom pet puta? Uputa: Zapiši u obliku potencije.

$$\underline{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5}$$

a) Koju smo jednadžbu rješavali u prvom slučaju?

$$x^5 = 32$$

Dovrši rješavanje jednadžbe upisujući na prazne crte tražene izraze:

$$x^5 = 32$$
$$x^5 - 32 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - \_\_\_\_)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + \_\_\_\_) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - \_\_\_\_)[(x^2 + \_\_\_\_)^2 + 3x^2 + 8x + 16] = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - \_\_\_\_)\left[(x^2 + x)^2 + \_\_\_\_\left(x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{16}{3}\right)\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - \_\_\_\_)\left[(x^2 + x)^2 + 3\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + \_\_\_\_\right] = 0$$

1) Kada je umnožak dvaju brojeva jednak nuli?

Kada su oba faktora jednaka nuli.

2) Za koji $x \in \mathbb{R}$ će prvi faktor biti jednak nuli?

Prvi faktor će biti jednak nuli za $x = 2$.

3) Za koji $x \in \mathbb{R}$ će drugi faktor biti jednak nuli?

Faktor $\left[(x^2 + x)^2 + 3\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{32}{9}\right] > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ pa ne postoji $x \in \mathbb{R}$ za koji je drugi faktor jednak nuli.

4) Koliko početna jednadžba ima rješenja? Napiši ih.

Jedino rješenje jednadžbe je broj 2.

b) Koju smo jednadžbu rješavali u drugom slučaju?

$$x^5 = 32$$

Riješite drugu jednadžbu:

$$x^5 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0$$

Rješenje druge jednadžbe je $x = 0$.

c) Koju smo jednadžbu rješavali u trećem slučaju?

$$x^5 = -32$$

Dovrši rješavanje jednadžbe upisujući na prazne tražene izraze:

$$x^5 = 32$$
$$x^5 - 32 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + \_\_\_\_)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + \_\_\_\_) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + \_\_\_\_)[(x^2 - \_\_\_\_)^2 + 3x^2 - 8x + 16] = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + \_\_\_\_)\left[(x^2 + x)^2 + \_\_\_\_\left(x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{16}{3}\right)\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + \_\_\_\_)\left[(x^2 + x)^2 + 3\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + \_\_\_\_\right] = 0$$

1) Kada je umnožak dvaju brojeva jednak nuli?

   Kada su oba faktora jednaka nuli.

2) Za koji $x \in \mathbb{R}$ će prvi faktor biti jednak nuli?

   Prvi faktor će biti jednak nuli za $x = 2$.

3) Za koji $x \in \mathbb{R}$ će drugi faktor biti jednak nuli?

   Faktor $\left[(x^2 + x)^2 + 3\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{32}{9}\right] > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ pa ne postoji $x \in \mathbb{R}$ za koji je drugi faktor jednak nuli.

4) Koliko početna jednadžba ima rješenja? Napiši ih.

   Jedino rješenje jednadžbe je broj -2.

Nastavni listić 5.2.1.5. *Otkrivanje korijena 5*

Grupa E

1) Ivan je zamislio jedan broj i pomnožio ga samim sobom šest puta. Koji je broj Ivan zamislila ako je po završetku množenja dobio broj:

   d) 729

   e) 0

f) -729?

Kako biste mogli zapisati da nepoznati broj množimo samim sobom šest puta? Uputa: Zapiši u obliku potencije.

$$x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^6$$

a) Koju smo jednadžbu rješavali u prvom slučaju?

$$x^6 = 729$$

Dovrši rješavanje jednadžbe upisujući na prazne crte tražene izraze:

$$x^6 = 729$$
$$\Leftrightarrow x^6 - 729 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x^3 - \_\_\_\_)(\_\_\_\_ + 27) = 0$$
$$\Leftrightarrow [(x - \_\_)(x^2 + 3x + \_\_\_)]\,[(x + \_\_)(x^2 - 3x + \_\_)] = 0$$
$$\Leftrightarrow \{(x-3)[(x+3)^2 + \_\_\_]\}\left\{(x+3)[(x - \_\_\_)^2 + \frac{27}{4}]\right\} = 0$$

Kada je umnožak jednak nuli?

Umnožak je jednak nuli ako je barem jedan od faktora jednak nuli.

Za koje $x \in \mathbb{R}$ će prvi i treći faktor biti jednaki nuli?

Faktori s dva člana bit će jednaki nuli za $x = 3$ i $x = -3$.

Za koje $x \in \mathbb{R}$ će drugi i četvrti faktor biti jednaki nuli?

Budući da su drugi i četvrti faktor jednaki zbroju pozitivnog i nenegativnog broja, oni će biti strogo veći od nule za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dakle, ovi faktori su različiti od nule za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Koliko početna jednadžba ima rješenja? Koje je rješenje početne jednadžbe?

Dakle, jednadžba ima 2 rješenja: $x = 3$ i $x = -3$.

b) Koju smo jednadžbu rješavali u drugom slučaju?

$$x^6 = 0$$

Riješite jednadžbu:

$$x^6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Rješenje jednadžbe je $x = 0$.

c) Koju smo jednadžbu rješavali u trećem slučaju?

$$x^6 = -729$$

Riješite jednadžbu:

$$x^6 = -729$$

$$\Leftrightarrow x^6 + 729 = 0$$

Nema rješenja jer $x^6 + 729 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nastavni listić 5.2.1.6. *Otkrivanje korijena 6*

1. Ispunite tablicu koristeći podatke iz zadatka 1. Tablicu popunjavate na sljedeći način: U red $n = 2$ i stupac $a > 0$ napišite broj rješenja jednadžbe $x^2 = a > 0$, u red $n = 3$ i stupac $a > 0$ napišite broj rješenja jednadžbe $x^3 = a > 0$ itd.

	Broj rješenja jednadžbe $x^n = a$ u skupu $\mathbb{R}$		
	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
$n = 2$	2	1	0
$n = 3$	1	1	1
$n = 4$	2	1	0
$n = 5$	1	1	1
$n = 6$	2	1	0

2. Raspravite u grupi: Kako se mijenja broj rješenja jednadžbe oblika $x^n = a$ u ovisnosti o n i a, gdje je $a \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$.
3. Ispunite sljedeću tablicu prema uočenoj pravilnosti.

	Broj rješenja jednadžbe $x^n = a$ u skupu $\mathbb{R}$		
	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
$n = 7$	1	1	1
$n = 8$	2	1	0
$n = 15$	1	1	1
$n = 118$	2	1	0

4. Napišite općenito pravilo:

Jednadžba oblika $x^{2k} = a, k \in \mathbb{Z}$ ima dva realna rješenja za $a > 0$, jedno realno rješenje za $a = 0$ i nema realnih rješenja za $a < 0$.

Jednadžba oblika $x^{2k+1} = a, k \in \mathbb{Z}$ ima 1 realno rješenje za $a > 0$, 1 realno rješenje za $a = 0$ i 1 realno rješenje za $a < 0$.

Kako nazivamo broj x koji je rješenje jednadžbe $x^2 = a$? Broj x je drugi korijen broja a.

Kako nazivamo broj x koji je rješenje jednadžbe $x^3 = a$? Broj x je treći korijen broja a.

Kako bismo nazvali broj x koji je rješenje jednadžbe $x^4 = a$? Broj x je četvrti korijen broja a.

Kako bismo nazvali broj x koji je rješenje jednadžbe $x^n = a$? Broj x je n - ti korijen broja a.

Učenik bi za rješavanje ove aktivnosti trebao prepoznati i primijeniti razliku kvadrata, razliku i zbroj kubova te svođenje na potpuni kvadrat. Zato je prije provođenja same aktivnosti važno učenike prisjetiti na spomenute stvari. Bez obzira na to, važno je da nastavnik u prvom formiranju grupa vodi računa da grupe budu heterogene kako neke od grupa ne bi zastale na ovom koraku. Također, nastavnik obilazi razred i, po potrebi, usmjerava učenike k traženim rješenjima. Cilj ove aktivnosti nije naučiti rješavati algebarske jednadžbe stupnja većeg od 1 pa taj dio aktivnosti ne bi trebao izazvati zastoj koji će onemogućiti ispunjavanje cilja ove aktivnosti. Ipak, kroz ovu aktivnost i učenik i nastavnik mogu vidjeti s čime još učenici imaju poteškoća te ispraviti nedostatke kako ne bi imali smetnje u daljnjem matematičkom obrazovanju.

Također, za očekivati je da će dio učenika imati poteškoća s izrazom x^{2k} i $x^{2k+1}, k \in \mathbb{Z}$ to jest, neće prepoznati da se radi o općenitom zapisu potencije s parnim odnosno neparnim eksponentom. Moguće je da nastavnik izbjegne ovakav zapis i umjesto toga zapiše x^p i x^q gdje je p paran, a q neparan broj. Međutim, učenici su tek na početku srednje škole, a u nastavku ih očekuje puno općenitih zapisa pomoću simbola pa je preporučljivo odmah na početku navikavati ih naprednijim oblicima kojim unaprjeđuju svoje matematičko znanje.

Što se tiče mehanike rada, ovakav će način onemogućiti pojedincima da izbjegnu rad jer su rezultati iz prve grupe nužni za donošenje zaključka u drugoj grupi. Dakle, svaki učenik mora dati svoj doprinos u prvoj i drugoj grupi kako bi ostali članovi došli do traženih zaključaka.

5.2.2 Aktivnost „Svojstva korijena“

U sljedećoj ćemo aktivnosti prikazati jedan od načina kako učenici u okvirima aktivne nastave mogu otkriti svojstva korijena. Kako ne bismo otišli preširoko u odnosu na temu diplomskog rada, prikazat ćemo otkrivanje samo jednog svojstva korjenovanja. Dakle, cilj ove aktivnosti je otkriti da vrijedi $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$, gdje su $m, n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}, a \in \mathbb{R}$ za koje svi izrazi imaju smisla. Aktivnost je zamišljena kao rad u tročlanim skupinama. Naime, svaki učenik iz tročlane skupine dobit će jednaki nastavni listić (primjer nastavnog listića 5.2.2.1.). Jedan od učenika rješava 4. i 6. stupac tablice, drugi učenik rješava 5. i 7. stupac tablice, a treći učenik rješava 8. i 9. stupac tablice. Nakon isteka vremena predviđenog za ovaj dio zadatka, nastavnik predvodi razrednu raspravu postavljajući pitanja koja bi učenike trebala dovesti do traženih zaključaka.

Predviđeno trajanje aktivnosti je oko 20 minuta, a nastavnik bi, osim nastavnih listića, učenicima trebao obavezno pripremiti i džepna računala. Na kraju, spomenimo samo da se opisana aktivnost radi u prvom razredu srednje škole kada učenici uče korijene i odgovara ispunjavanju sljedećih ishoda učenja: A3, A4, G3 i 3.

U prilogu *5.2.2.1.* dan je primjer nastavnog listića jedne skupine. Ostale skupine imaju analogne listiće koje se od priloženog razlikuju samo u zadanim brojevima.

Popuni tablicu:

a	m	n	$\sqrt[m]{a}$	$\sqrt[n]{a}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$	$m \cdot n$	$\sqrt[m\cdot n]{a}$
-19683	3	3	27	27	3	3	9	3
$-\frac{1}{729}$	2	3	Ne postoji u $\mathbb{R}$	9	Ne postoji u $\mathbb{R}$	Ne postoji u $\mathbb{R}$	6	Ne postoji u $\mathbb{R}$
-512	4	2	Ne postoji u $\mathbb{R}$	Ne postoji u $\mathbb{R}$	Ne postoji u $\mathbb{R}$	Ne postoji u $\mathbb{R}$	8	Ne postoji u $\mathbb{R}$
32768	5	3	8	32	2	2	15	2
$\frac{1}{64}$	3	2	4	8	2	2	6	2
4096	2	6	64	4	2	2	12	2
0	3	5	0	0	0	0	15	0
0	3	4	0	0	0	0	12	0
0	6	8	0	0	0	0	48	0

Nastavni listić 5.2.2.1. *Pravila korjenovanja*

Nastavni listić 5.2.2.2. *Pravila korjenovanja 2*

Popunite tablicu tako da jedan učenik ispuni 4. i 6. stupac, drugi učenik 5. i 7. stupac i treći učenik 8. i 9. stupac:

a	m	n	$\sqrt[m]{a}$	$\sqrt[n]{a}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$	$m \cdot n$	$\sqrt[m\cdot n]{a}$
$\frac{19683}{512}$	3	3	$-\frac{27}{8}$	$-\frac{27}{8}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	9	$-\frac{3}{2}$
$-\frac{1}{512}$	3	2	8	Ne postoji u $\mathbb{R}$	Ne postoji u $\mathbb{R}$	Ne postoji u $\mathbb{R}$	6	Ne postoji u $\mathbb{R}$
-256	2	4	Ne postoji u $\mathbb{R}$	Ne postoji u $\mathbb{R}$	Ne postoji u $\mathbb{R}$	Ne postoji u $\mathbb{R}$	8	Ne postoji u $\mathbb{R}$
32768	3	5	32	8	2	2	15	2
531441	3	4	81	27	3	3	12	3
4096	6	2	4	64	2	2	12	2
0	5	3	0	0	0	0	15	0
0	2	3	0	0	0	0	6	0
0	4	6	0	0	0	0	24	0

Dok učenici ispunjavaju tablice, nastavnik obilazi razred i, prema potrebi, pomaže učenicima koji imaju poteškoća. Osim toga, važno je i da tijekom cijelog školovanja potiče učenike da pomažu ostalim učenicima kojima je pomoć potrebna, osobito tijekom grupnog rada.

Kao što je već rečeno, nakon isteka vremena za ispunjavanje tablice, nastavnik predvodi raspravu sljedećim pitanjima.

Koje ste korijene mogli izračunati, a koje niste?

Nismo mogli izračunati korijene kojima je radikand negativan, a red korijena paran. Ostaje smo mogli izračunati.

Usporedite rješenje unutar skupine. Što uočavate, kakvi su brojevi u 6., 7. i 9. stupcu?

Brojevi u 6., 7. i 9. stupcu su jednaki, osim u slučaju u kojem je a negativan realan broj, a m i n su različitih parnosti.

Učenici zaključuju međusobnim provjeravanjem rješenja, da na danim primjerima:

Za a nenegativan realan broj, korijeni komutiraju.

Za a negativan realan broj, korijeni komutiraju samo aku su i m i n neparni.

Na kraju, nastavnik na ploču zapisuje otkrivena pravila:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}\,, m, n \in \mathbb{N}, n \neq 1, a \geq 0$$

Odnosno, da za neparne prirodne brojeve m i n vrijedi:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}\,, a \in \mathbb{R}$$

5.2.3 Aktivnost „Prijelaz na racionalne eksponente“

U sljedećoj aktivnosti učenici će otkriti definiciju potencije s racionalnim eksponentom i na taj način doprinijeti ostvarivanju ishoda A3, A4, G3 i 2. Aktivnost je zamišljena kao rad u peteročlanim grupama u obliku gostionice. Dakle, na početku aktivnosti učenike dijelimo u pet grupa: A, B, C, D i E. U svakoj skupini učenici dobivaju iste nastavne listiće označene brojem između 1 i 5, ali svaka grupa ima različiti listić. U prvoj fazi rješavanja učenici zajedno rješavaju nastavne listiće, međusobno komentirajući i obrazlažući svoja razmišljanja. Nakon isteka vremena predviđenog za prvu fazu, nastavnik formira nove grupe tako da svi učenici koji su u prvoj fazi imali nastavni listić s brojem 1 čine jednu grupu, učenici s brojem 2 drugu grupu itd. U novoj grupi učenici prezentiraju rješenja nastavnog listića iz faze 1 dok ostali učenici zapisuju rješenja. Učenici otkrivaju i zapisuju traženu pravilnost -

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad n \in \mathbb{N}$. Nakon isteka vremena predviđenog za drugu fazu učenici se vraćaju u svoje početne skupine gdje trebaju otkriti potenciju s pozitivnim racionalnim eksponentom. Za to će im poslužiti zaključak iz faze 2 i pravila potenciranja koja na ovoj razini već trebaju znati.

Predviđeno vrijeme za ovu aktivnost je oko 15 minuta, a potrebni je materijal nastavni listić i pribor za pisanje.

Aktivnost je predviđena za prvi razred srednje škole kada učenici uče potenciranje.

Nastavni listić 5.2.3.1. *Racionalni eksponent*

Zadatak 1: Odredite vrijednost potencija:

$$2^8 = 256$$
$$2^4 = 16$$
$$2^2 = 4$$
$$2^1 = 2$$

1. Na koji se način mijenjaju eksponenti iz retka u red?

   U svakom sljedećem redu vrijednost eksponenta je za 1 manja.

2. Na koji se način mijenjaju vrijednosti potencija iz retka u redak?

   U svakom redu vrijednost potencije jednaka je drugom korijenu vrijednosti potencija iz reda iznad.

3. Nastavite niz tako da uočena pravilnost vrijedi.

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$
$$2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$$
$$2^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{2}$$

Zadatak 2:

Zapišite rezultate drugih grupa i opišite zapažanja iz vaše grupe.

$3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$	$5^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{5}$
$3^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{3}$	$5^{\frac{1}{25}} = \sqrt[25]{5}$
$3^{\frac{1}{27}} = \sqrt[27]{3}$	$5^{\frac{1}{125}} = \sqrt[125]{5}$

$$4^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{4} \qquad 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$$

$$4^{\frac{1}{16}} = \sqrt[16]{4} \qquad 10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10}$$

$$4^{\frac{1}{64}} = \sqrt[64]{4} \qquad 10^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{10}$$

2. Napišite općenito pravilo:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Zadatak 3:

1. Ispunite prazna polja da biste odredili vrijednosti sljedećih potencija:

$$3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{3}\cdot\square} = (3\;\;)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3\;\;}$$

$$5^{\frac{3}{5}} = 5^{\frac{1}{5}\cdot\square} = (5\;\;)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{5\;\;}$$

$$4^{\frac{7}{16}} = 4^{\frac{1}{16}\cdot\square} = (4\;\;)^{\frac{1}{16}} = \sqrt[16]{4\;\;}$$

$$10^{\frac{9}{10}} = 10^{\frac{1}{10}\cdot\square} = (10\;\;)^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{10\;\;}$$

2. Napišite općenito pravilo:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

Ovom aktivnošću provedenom na opisani način učenici komuniciraju međusobne ideje i razmišljanja s ostalim učenicima. Usklađuju i provjeravaju svoje rezultate te zajednički otkrivaju nove pravilnosti. Radom u obliku gostionice učenicima onemogućujemo „švercanje“, to jest da drugi rade umjesto njih jer zaključivanje grupe učenike u drugoj fazi ovisi o rješenjima svakog pojedinog učenika. Isto vrijedi i za otkrivanje pravilnosti u trećoj fazi gdje zaključivanje ovisi o primjeni zaključaka iz druge faze. Također, ovaj oblik rada motivira učenike, potiče ih na angažman koji učenicima olakšava u daljnjem uočavanju pravilnosti. Nastavnik obilaženjem razreda također može uočiti eventualne poteškoće i miskoncepcije kod nekih učenika te se posvetiti njihovom rješavanju prije nastavka poučavanja novih nastavnih sadržaja. To se posebno odnosi na primjenu pravila računanja s potencijama kao što je pravilo $(a^n)^m = (a^n)^m = a^{n \cdot m}$ bez kojeg učenici nisu u mogućnosti doći do novih otkrića.

5.3 Izgradnja eksponencijalne funkcije

Prethodnom aktivnošću završili smo sadržaj prvog razreda srednje škole koji nam je potreban za izgradnju eksponencijalne funkcije. Budući da je eksponencijalna funkcija definirana kao $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, gdje je $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$, tj. kao funkcija realne varijable, preostaje nam još vidjeti što se događa s potencijom kada je u eksponentu iracionalan, odnosno realan broj. Osim toga, u nastavku je osmišljena aktivnost kojom će učenici otkriti koja su i zašto ograničenja na bazu eksponencijalne funkcije. Nakon tih aktivnosti, sve će biti spremno za definiciju eksponencijalne funkcije i njeno proučavanje.

5.3.1 Aktivnost „Prijelaz na iracionalne eksponente“

Preostaje nam vidjeti što se događa kada se u eksponentu nađe iracionalni broj. U ovoj će aktivnosti učenici otkriti ima li uopće smisla promatrati takve potencije i, ako ima, čemu su one jednake. Skupom iracionalnih brojeva kompletirali bismo skup realnih brojeva u eksponentu. Učenici na ovoj razini znaju da postoji i skup kompleksnih brojeva, ali potencije s kompleksnim eksponentom nadilaze srednjoškolsku razinu pa u ovom diplomskom radu ovaj slučaj nećemo promatrati.

Nastavnik će ovom aktivnošću uvidjeti ispunjavaju li učenici drugog razreda srednje škole ishode A3, A4, C2 i G3. Učenici će pomoću približnih vrijednosti iracionalnih brojeva odrediti približne vrijednosti potencija s iracionalnim eksponentima. Učenicima ćemo pripremiti tablice 5.3.1.1. i 5.3.1.2. Tablica sadrži nizove brojeva koji konvergiraju brojevima $\sqrt{2}$ i $2^{\sqrt{2}}$. Prvi učenik proučavat će niz brojeva $(A)_n$ koji konvergira broju $\sqrt{2}$ slijeva na način da član niza A_n ima u decimalnom zapisu broja $\sqrt{2}$ n decimala. Istovremeno, drugi učenik proučava niz brojeva $(B)_n$ koji broju $\sqrt{2}$ konvergira slijeva na način da član niza B_n ima u decimalnom zapisu broja $\sqrt{2}$ n

decimala, a pritom je zadnja decimala uvećana za 1. Zatim prvi učenik proučava niz brojeva $(A')_n$ gdje je član niza $A'_n = 2^{A_n}$ zaokružen na 10 decimala. Istovremeno, drugi učenik proučava niz brojeva $(B')_n$ gdje je član niza $B'_n = 2^{B_n}$. Učenici odgovaraju na pitanja koja ih usmjeravaju traženom zaključku. Za provedbu aktivnosti predviđeno je oko 15 minuta, a potreban materijal čine nastavni listić s ispunjenom tablicom te pribor za pisanje. U nastavku je prikazan listić 5.3.1.3. s tablicama za par učenika koji će istraživati broj $2^{\sqrt{2}}$. Ostali parovi mogu istraživati broj $3^{\sqrt{2}}$, $2^{\sqrt{3}}, 2^{\pi}$ itd. Nakon isteka vremena predviđenog za rješavanje nastavnog listića, nastavnik predvodi diskusiju u koju nastoji uključiti sve učenike.

Tablica za prvog učenika:

Tablica 5.3.1.1. *Broj* $\sqrt{2}$

n	$A_n = \sqrt{2}$ do $n -$ tog decimalnog mjesta	2^A na 10 decimala
1	1,4	2,6390158215
2	1,41	2,6573716281
3	1,414	2,6647496501
4	1,4142	2,6651190885
5	1,41421	2,6651375617
6	1,414213	2,6651431038
7	1,4142135	2,6651440274
8	1,41421356	2,6651441383
9	1,414213562	2,6651441420
10	1,4142135623	2,6651441425
11	1,41421356237	2,6651441426

Tablica za drugog učenika:

Tablica 5.3.1.2. *Broj* $\sqrt{2}$ *(2)*

n	$B_n = \sqrt{2}$ do $n -$ tog decimalnog mjesta tako da $n -$tu decimalu uvečaš za 1	$B'_n = 2^{B_n}$ na 10 decimala
1	1,5	2,8284271247
2	1,42	2,6758551095
3	1,415	2,6665973541
4	1,4143	2,66530382691
5	1,41422	2,6651560351
6	1,414214	2,6651449511
7	1,4142136	2,6651442122
8	1,41421357	2,6651441567
9	1,414213563	2,6651441438
10	1,4142135624	2,6651441427
11	1,41421356238	2,6651441427

Nastavni listić 5.3.1.3. *Iracionalni eksponent*

Učenik A

Promotrimo nizove brojeva $(A)_n$ i $(A')_n$.

1. Kakav je niz brojeva $(A)_n$ s obzirom na monotonost?

   Niz $(A)_n$ je rastući.

2. Postoji li neki realni broj za kojeg možemo reći da će sigurno biti veći od **svakog** člana niza $(A)_n$? Ako postoji, napiši (može i više brojeva).

   Postoji! Primjerice, brojevi 2, 3, 1.5

3. Koji je najmanji takav broj?

   Najmanji takav broj je $\sqrt{2}$.

4. Kako biste nazvali takve nizove?

Takvi su nizovi ograničeni odozgo.

5. Kakav je niz brojeva $(A')_n$ s obzirom na monotonost?

   Niz je rastući.

6. Postoji li neki realni broj za kojeg možemo reći da će sigurno biti veći od **svakog** člana niza $(A')_n$? Ako postoji, napiši (može i više brojeva).

   Postoji. Primjerice, 2.7, 3, 10.

7. Koji je najmanji takav broj?

   Najmanji takav broj je $2^{\sqrt{2}}$.

8. Kako biste jednom riječi nazvali takve nizove?

   Niz ograničen odozgo.

Porazgovaraj sa svojim parom i usporedi svoje odgovore s njegovim, a zatim zajedno odgovorite na sljedeće pitanje:

1. Čemu je jednak broj $2^{\sqrt{2}}$? (napišite riječima!)

Broj $2^{\sqrt{2}}$ je broj u kojem se „susreću" beskonačni članovi niza $(A')_n$ iz A i B listića.

Promotrimo nizove brojeva $(B)_n$ i $(B')_n$.

1. Kakav je niz brojeva $(B)_n$ s obzirom na monotonost?

   Niz $(B)_n$ je padajući.

2. Postoji li neki realni broj za kojeg možemo reći da će sigurno biti manji od **svakog** člana niza $(B)_n$? Ako postoji, napiši (može i više brojeva).

   Postoji. Primjerice 0, 1, 1.4.

3. Koji je najveći takav broj?

   Najmanji takav je $\sqrt{2}$.

4. Kako biste jednom riječi nazvali takve nizove?

   Nizovi ograničeni odozdo.

5. Kakav je niz brojeva $(B')_n$ s obzirom na monotonost?

   Niz je padajući.

6. Postoji li neki realni broj za kojeg možemo reći da će sigurno biti manji od

svakog člana niza $(B')_n$? Ako postoji, napiši (može i više brojeva).

Postoji. Primjerice 1, 2, 2.5.

7. Koji je najveći takav broj?

   Najveći takav je $2^{\sqrt{2}}$.

8. Kako biste jednom riječi nazvali takve nizove?

   Takav je niz ograničen odozdo.

Porazgovaraj sa svojim parom i usporedi svoje odgovore s njegovim, a zatim zajedno odgovorite na sljedeće pitanje:

1. Čemu je jednak broj $2^{\sqrt{2}}$? (napišite riječima!)

   Broj $2^{\sqrt{2}}$ je broj u kojem se „susreću" beskonačni članovi niza $(B')_n$ iz A i B listića.

Opisana je aktivnost korisna kako bi učenici otkrili na koji način, poštujući dosadašnja matematička pravila i postupke, dolazimo do novootkrivenih stvari. Iako se učenici do sada nisu susreli s izrazom „ograničeni niz", smatram da ih se može, detaljnim navođenjem, dovesti do spomenutih izraza i zatim njihovog korištenja.

Kao i kod mnogih drugih aktivnosti, ovakvim načinom rada navest ćemo sve učenike na sudjelovanje u nastavi jer svaki učenik ima svog para čije zaključivanje ovisi o zaključivanju drugog učenika. Bez obzira na to, nastavnik je dužan obilaziti razred, poticati učenike i usmjeravati ih traženim zaključcima.

5.3.2 Aktivnost „Uvijek – nekada – nikada"

U izgrađivanju eksponencijalne funkcije preostao nam je još jedan korak - određivanje uvjeta na bazu eksponencijalne funkcije, to jest kakva baza može odnosno ne smije biti. Cilj sljedeće aktivnosti je rješavanje navedenog problema, a nastavnik njenom provedbom može uvidjeti usipunjavaju li učenici ishode C1, C5, G3 i 2. Za njenu provedbu u drugom razredu srednje škole koristit ćemo aktivnost „Vrijedi uvijek, nekada i nikada“. Dakle, učenike ćemo podijeliti u parove i dati im nastavne listiće s pitanjima. Svako pitanje ima i tri ponuđena odgovora: uvijek, nekada i nikada. Pitanja su oblika: „Možemo li odrediti vrijednost potencije $x^{\frac{1}{2}}, x \in \mathbb{Z}$?“ Zadatak učenika je odgovoriti s „uvijek“, „nekada“ ili „nikada“ te obrazložiti svoj odgovor i potkrijepiti objašnjenje primjerima. Pitanjima na listiću nastojat ćemo obuhvatiti sve moguće slučajeve tako da učenici na kraju ove aktivnosti mogu zaključiti kakve ćemo potencije ubuduće proučavati. Predviđeno vrijeme za ovu aktivnost je oko 15 minuta, a nastavni listić 5.3.2.1.i pribor za pisanje je sve što je potrebno za provedbu aktivnosti. Prije početka aktivnosti, važno je naglasiti učenicima da radimo isključivo s realnim brojevima. Dakle, kompleksne brojeve nećemo uzimati u obzir.

Nastavni listić 5.3.2.1. *Uvijek, nekada ili nikada*

Zaokružite slovo ispred točnog odgovora i odgovorite na pitanja.

1. Vrijednost potencije x^2:
   a) postoji za svako $x \in \mathbb{R}$
   b) postoji samo za neke $x \in \mathbb{R}$
   c) ne postoji niti za koje $x \in \mathbb{R}$.

Objasni: Znamo iz definicije kvadratne funkcije da vrijednost potencije možemo odrediti za svaki realni broj x.

2. Vrijednost potencije $x^{\sqrt{2}}$:
   a) postoji za svako $x \in \mathbb{N}$
   b) postoji samo za neke $x \in \mathbb{N}$
   c) ne postoji niti za koje $x \in \mathbb{N}$.

Objasni: U aktivnosti 5.3 vidjeli smo kako odrediti potenciju s iracionalnim eksponentom. Dakle, danu potenciju možemo izračunati za svaki prirodan broj x.

3. Vrijednost potencije $x^{\frac{1}{2}}$:
   a) postoji za svako $x \in \mathbb{N}$
   b) postoji samo za neke $x \in \mathbb{N}$
   c) ne postoji niti za koje $x \in \mathbb{N}$.

Objasni: Potencija s bazom x i eksponentom $\frac{1}{2}$ jednaka je drugom korijenu broja x, a drugi korijen možemo izračunati za svaki prirodan broj.

4. Vrijednost potencije $(-x)^{\frac{1}{2}}$:
   a) postoji za svako $x \in \mathbb{N}$
   b) postoji samo za neke $x \in \mathbb{N}$
   c) ne postoji niti za koje $x \in \mathbb{N}$.

Objasni: Potencija s bazom x i eksponentom $\frac{1}{2}$ jednaka je drugom korijenu broja x, a drugi korijen negativnog broja nije realan broj.

5. Vrijednost potencije $x^{\frac{1}{3}}$:
   a) postoji za svako $x \in \mathbb{Z}$
   b) postoji samo za neke $x \in \mathbb{Z}$
   c) ne postoji niti za koje $x \in \mathbb{Z}$.

Objasni: Potencija s bazom x i eksponentom $\frac{1}{3}$ jednaka je trećem korijenu broja x, a treći korijen realnog broja je realan broj.

6. Vrijednost potencije $x^{\frac{3}{8}}$:
   a) postoji za svako $x \in \mathbb{Z}$
   b) postoji samo za neke $x \in \mathbb{Z}$
   c) ne postoji niti za koje $x \in \mathbb{Z}$.

Objasni: Potencija s bazom x i eksponentom $\frac{3}{8}$ jednaka je osmom korijenu broja x^3, a osmi korijen možemo izračunati samo za pozitivne brojeve. Budući da x^3 poprima i pozitivne i negativne vrijednosti, danu potenciju možemo izračunati samo za neke cijele brojeve.

7. Vrijednost potencije 1^x:
   a) postoji za svako $x \in \mathbb{R}$
   b) postoji samo za neke $x \in \mathbb{R}$
   c) ne postoji niti za koje $x \in \mathbb{R}$.

Objasni: Potencija s bazom 1 i realnim eksponentom može se izračunati za svaki realni broj x.

Koliko iznosi 1^x?

$1^x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

8. Vrijednost potencije 0^x:
   a) postoji za $\forall\ x \in \mathbb{R}$
   b) postoji samo za neke $x \in \mathbb{R}$
   c) ne postoji niti za koje $x \in \mathbb{R}$.

Objasni: Potencija s bazom 0 i realnim eksponentom može se izračunati za svaki realni broj x.

Koliko iznosi $0^x, \forall x \in \mathbb{R}$?

$0^x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Koristeći prethodne odgovore, odgovorite na pitanje i nadopunite rečenicu.

9. Kokva bi trebala biti baza potencije da bi njenu vrijednost **uvijek** mogli odrediti?

   Baza bi trebala biti pozitivan realan broj ili nula.

10. Elemente 0 i 1 možemo izbaciti iz proučavanja njihovih potencija jer su one konstantne.

Kao što smo vidjeli u definiciji eksponencijalne funkcije, postoje ograničenja na bazu eksponencijalne funkcije. Opisana aktivnost učenicima će otkriti koja su to ograničenja i zašto. Na učenicima je da dobro razmisle, uvrste više različitih brojeva u promatranu potenciju te iskoriste svo stečeno znanje prije no što odgovore na pitanje. Na taj način će sami shvatiti zašto elementi određenih skupova brojeva ne mogu biti baza eksponencijalne funkcije.

Budući da ova aktivnost zahtjeva kreativnost i više razmišljanja, analiziranja i ispitivanja, za očekivati je da će učenici imati poteškoća više nego obično. Udio parova koji će samostalno riješiti aktivnost mogao bi biti vrlo malen. Zato je od iznimne važnosti da nastavnik obilazi razred i navodi učenike u njihovim istraživanjima.

5.3.3 Aktivnost „Otkrivanje eksponencijalne funkcije“

Cilj sljedeće aktivnosti u drugom razredu srednje škole je otkriti definiciju eksponencijalne funkcije i doprinijeti ispunjavanju sljedećih ishoda učenja: A3, A4, C1, C2 i 2. Dakle, nakon što su učenici otkrili smislenost potencija s eksponentima iz skupa realnih brojeva (pa i njegovih podskupova) učenici su spremni zaključiti da postoji funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ koja realnim brojevima pridružuje potencije koje su također realni brojevi. Učenike ćemo podijeliti u parove i svakom paru podijeliti nastavni listić. Dok učenici rješavaju i diskutiraju, nastavnik obilazi razred i, po potrebi, usmjerava učenike. Nakon isteka vremena predviđenog za ovu aktivnost (10 minuta), nastavnik predvodi razgovor u kojem učenici otkrivaju nove zaključke. Za provedbu ove aktivnosti potrebni su nastavni listić, pribor za pisanje i džepno računalo. Iako je u prilogu prikazan samo primjer listića u kojem sve potencije imaju bazu 2, važno je da u razredu imamo i više analognih listića s različitim bazama (primjerice: 3, 5, 10, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ itd.)

Nastavni listić 5.3.3.1. *Otkrivanje eksponencijalne funkcije*

Radeći u paru i koristeći džepno računalo odgovorite na postavljena pitanja.

Biolozi s PMF – a stavili su jednu biljku visine 1cm na hranjivu podlogu. Sljedeći tjedan su uočili da se visina biljke udvostručila. Biljka je nastavila s rastom na isti način. Izračunajte veličinu populacije bakterija nakon zadanog broja tjedana.

Za zadani broj dana odredi broj bakterija.

Nakon x tjedana	0 (danas)	1	2	3	4	5	x
Visina biljke	1	2	4	8	16	32	2^x

1. Kolika je visina biljke nakon 7 tjedana?

Nakon 7 tjedana biljka je bila visoka $2^7 = 128$ centimetara.

2. Kolika je visina biljke nakon deset tjedana?

Nakon deset tjedana biljka je bila visoka $2^{10} = 1024$ centimetara.

3. Kolika je visina biljke nakon 17 dana?

17 dana je 2 tjedna i 3 dana ili $2\frac{3}{7}$ tjedana.
Dakle, visina biljka nakon 17 dana jednaka je
$2^{2\frac{3}{7}} = 5.39$ centimetara.

4. Kolika je visina biljke nakon x tjedana, gdje je $x \in \mathbb{R}^+$?

Visina biljke nakon x tjedana, gdje je $x \in \mathbb{R}^+$ je 2^x centimetara.

5. Zapišite pravilo koje broju tjedana x pridružuje visinu biljke.

$$f(x) = 2^x$$

6. Kojem skupu pripadaju brojevi proteklih tjedana od početka promatranja rasta biljke?

   Pripadaju skupu pozivinih realnih brojeva ($\mathbb{R}^+$).

7. Kojem skupu brojeva pripadaju vrijednosti koje odgovaraju visini biljke?

   Dobivene vrijednosti pripadaju skupu pozivinih realnih brojeva ($\mathbb{R}^+$).

8. Koristeći posljednja tri pitanja, napišite funkciju koja opisuje visinu biljke u ovisnosti o broju tjedana provedenih na hranjivoj podlozi.

   Funkcija $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ zadana pravilom pridruživanja $f(x) = 2^x$ opisuje visinu biljke u ovisnosti o x tjedana provedenih na hranjivoj podlozi.

9. Kojem skupu pripadaju brojevi u eksponentu potencije da bi potenciju uvijek mogli odrediti?

   Da bismo odredili potenciju, u eksponentu može biti bilo koji realni broj (eksponenti pripadaju skupu $\mathbb{R}$).

10. Prisjetite se aktivnosti 5.3.2. Kakva mora biti baza potencije da bi njenu vrijednost mogli izračunati za svaki realni eksponent, a da pritom ne bude konstantna?

    Baza mora biti pozitivan realan broj različit od 1.

11. Proširite funkciju iz zadatka 8. koristeći zadatke 9. i 10. kako biste dobili opću eksponencijalnu funkciju.

Funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$ zadana pravilom pridruživanja $f(x) = a^{x}, a > 0, a \neq 1$ zove se opća eksponencijalna funkcija.

Ključni korak u ovoj aktivnosti je povezati definiciju funkcije sa zadanim pridruživanjem iz tablice. Važno je da učenici znaju da funkcija zadovoljava pojmove: pridruživanje, svakom (elementu jednog skupa), točno jedan (element drugog skupa). Na učenicima je da uoče da pridruživanje s listića zadovoljava definiciju funkcije koju bi prije sata trebalo ponoviti. Također, važno je da ispravno odrede skup brojeva kojemu se pridružuje i skup brojeva koji se pridružuje (domenu i kodomenu). Na kraju, učenici proširuju dobivene skupove van konteksta rasta biljke, a u skladu s dosadašnjim proučavanjem potencija. Ispravnim rješavanjem zadataka otkrit će opću eksponencijalnu funkciju.

5.3.4 Aktivnost „Algebarska svojstva eksponencijalne funkcije“

U sljedećoj aktivnosti učenici će otkriti mogu li se pravila koja koristimo kod računanja s potencijama primjenjivati prilikom računanja s eksponencijalnom funkcijom. Promatrana svojstva su sljedeća:

1) $a^{x} \cdot a^{y} = a^{x+y}$
2) $\frac{a^{x}}{a^{y}} = a^{x-y}$
3) $(a^{x})^{y} = (a^{y})^{x} = a^{x \cdot y}$

gdje su x, y iz skupa realnih brojeva, a a iz skupa prirodnih brojeva.

Provedba ove aktivnosti pridonosi ostvarenju ishoda učenja A3, A4, B1, G2 i 2 u drugom razredu srednje škole. Aktivnost je zamišljena kao suradnički rad u paru. Naime, aktivnost se sastoji od dva zadatka u obliku tablice te pitanja koja se odnose na zadatke. Svaki će učenik u prvom dijelu samostalno ispuniti jednu tablicu, a drugu će tablicu ispuniti koristeći gotova rješenja svoga para. Zatim će u suradnji sa svojim parom odgovarajući na postavljena pitanja doći do željenog zaključka. Budući da imamo više svojstava koje želimo obuhvatiti, podijelit ćemo listiće tako da svako svojstvo otkriva otprilike jednaki broj parova. Za ovu aktivnost učenicima trebaju pribor za pisanje i nastavni listić kojeg će im pripremiti nastavnik. Predviđeno vrijeme za rješavanje nastavnog listića je oko 15 minuta. Nakon isteka predviđenog vremena, nastavnik u diskusiji s učenicima potvrđuje otkrivene zaključke nakon čega slijedi uvježbavanje otkrivenog.

Nastavni listić 5.3.4.1. *Veza potencija i eksponencijalne funkcije*

Funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ zadana je pravilom $f(x) = 3^x$.
Popuni tablice 1 i 2:

Tablica 1:

x	y	$f(x)$	$f(y)$	$f(x) \cdot f(y)$
1	2	3	9	27
-2	1	$\frac{1}{9}$	3	$\frac{1}{3}$
3	0	27	1	27
2	4	9	81	729
-3	-1	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{81}$

Tablica 2:

x	y	$x + y$	$f(x + y)$
1	2	3	27
-2	1	-1	$\frac{1}{3}$
3	0	3	27
2	4	6	729
-3	-1	-4	$\frac{1}{81}$

Uočite da su **prva dva** stupca obje tablice jednaka.

Što se traži u posljednjem stupcu prve tablice, a što u zadnjem stupcu druge tablice?

U posljednjem stupcu prve tablice tražimo $f(x) \cdot f(y)$, a u posljednjem stupcu druge tablice tražimo $f(x+y)$.

U kakvom su odnosu posljednji stupci tablice?

Posljednji stupci tablica su jednaki.

Gdje ste se susreli s ovom jednakošću?

Ovu jednakost smo već susreli kod računanja s potencijama, to jest kod množenja potencija s istim bazama. Vrijedilo je pravilo: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

Napišite otkriveni zaključak.

$$f(x) \cdot f(y) = f(x+y), x, y \in \mathbb{R}$$

Eksponencijalna funkcija prepoznatljiva je po svojstvu koje su učenici otkrili na ovome satu. Niti za jednu elementarnu funkciju, to jest funkciju s kojom će se učenici susresti tijekom svog školovanja ne vrijedi svojstvo $f(x) \cdot f(y) = f(x+y), x, y \in \mathbb{R}$. Zato je važno da svojstvo otkriveno na ovom satu ostane upečatljivo do kraja školovanja.

Aktivnost je organizirana tako da parovi rade suradnički. Dakle, zaključivanje jednog učenika ovisi o radu njegovog para. Nije moguće da par dođe do traženih zaključaka ako oba učenika ispravno ne odrade svoj dio zadatka. Dobra strana ove aktivnosti je što na taj način osigurava rad svih učenika. Naravno, i ovdje je važno da nastavnik za vrijeme cijelog trajanja aktivnosti obilazi razred. Postoji mogućnost da među učenicima i dalje postoji netko tko ne zna odrediti vrijednost potencije 3^3 ili 3^{-2}. Također, postoji mogućnost da neki od učenika neće ispravno odrediti vrijednost $f(x+y)$ što bi spriječilo normalan nastavak aktivnosti. Često sam se susretao s učenicima koji bi $f(x+y)$ računali kao $f(x)+f(y)$ ili koji uopće ne bi znali odrediti vrijednost $f(x+y)$. Zato je važno da nastavnik prepozna takvu situaciju i pravovremenom reakcijom omogući normalan nastavak aktivnosti tom paru i, što je još važnije, učeniku možda dugoročno otkloni problem. Ako ne, nastavnik će na ovaj diskretan način dobiti uvid u probleme pojedinih učenika čijem će se otklanjanju morati posvetiti. Također, za očekivati je da će učenici kod pisanja otkrivenog pravila zaboraviti napisati da ono vrijedi za sve realne brojeve x i y, to jest $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Iako se učenicima ovaj propust možda ne čini važnim, moramo učenike na svakom koraku učiti pravilnom matematičkom izražavanju. Na kraju, učenici će se kroz ovu aktivnost prisjetiti možda zaboravljenih pravila potenciranja koja su za nastavak matematičkog obrazovanja vrlo važna.

5.3.5 Aktivnost „Monotonost eksponencijalne funkcije“

Radom u obliku „gostionice“ učenici će otkriti monotonost eksponencijalne funkcije. Provedba ove aktivnosti doprinijet će ostvarivanju ishoda učenja A3, A4, G2 i 6 u drugom razredu srednje škole. Učenike ćemo podijeliti u peteročlane skupine. Za potrebe opisivanja ove aktivnosti, pretpostavimo da u razredu ima 25 učenika. Dakle, učenike ćemo podijeliti u 5 grupa koje ćemo razlikovati bojama: zelena, crvena, plava, žuta i ljubičasta grupa. Također, svakom ćemo članu grupe dodijeliti broj od 1 do 5. Na taj način smo sve učenike jednoznačno označili bojom i brojem. Svaka grupa ima različiti nastavni listić i svaki učenik u grupi dobiva po jedan listić. Podjelom listića započinje „Faza 1“. Učenici surađujući rješavaju nastavne listiće dok ne dođu do dijela listića na kojem piše „Faza 2“. Predviđeno vrijeme za „Fazu 1“ je 5 do 7 minuta. Nakon isteka vremena predviđenog za „Fazu 1“, učenike raspoređujemo u nove grupe na način da sve „jedinice“ čine novu grupu, sve „dvojke“ još jednu novu grupu itd. Nakon novoformiranih grupa, započinje „Faza 2“, to jest, učenici surađujući rješavaju svoje nastavne listiće sve do dijela listića na kojem piše „Faza 3“. Za ovaj dio predviđeno je oko 10 minuta. Istekom predviđenog vremena za „Fazu 2“, učenici se vraćaju u svoje prvobitne skupine. „Faza 3“ je najzahtjevnija. Ovdje učenici u skupini trebaju otkriti nove pojmove i njihove definicije za što će im, bude li trebalo, pomoći nastavnik.

Osim nastavnih listića i pribora za pisanje, za ovu je aktivnost potreban materijal kojim ćemo svakom učeniku odrediti grupu. Dakle, potrebne su nam kartice s brojevima i bojama. Predviđeno trajanje aktivnosti je oko 30 minuta.

Za kraj, napomenimo samo da će učenici raditi s 10 različitih funkcija. Naime, svaka će grupa dobiti dvije eksponencijalne funkcije s recipročnim bazama. U prilogu se nalazi primjer listića s funkcijama $f_1(x) = 2^x$ i $g_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Ostale grupe imaju funkcije s bazama 3 i $\frac{1}{3}$, 5 i $\frac{1}{5}$, 6 i $\frac{1}{6}$ i 10 i $\frac{1}{10}$.

Nastavni listić 5.3.5.1. *Monotonost*

Zadatak 1:

Zadane su funkcije $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ i $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ pravilom pridruživanja: $f_1(x) = 2^x$ i $g_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Ispuni tablicu:

x	$f_1(x)$	$g_1(x)$
$x_1 = -2$	$\frac{1}{4}$	4
$x_2 = -1$	$\frac{1}{2}$	2
$x_3 = 0$	1	1
$x_4 = 1$	2	$\frac{1}{2}$
$x_5 = 2$	4	$\frac{1}{4}$
$x_6 = 3$	8	$\frac{1}{8}$

Zadatak 2:

Sljedeće tablice popunite na sljedeći način: učenik koji je došao iz prve grupe čita ostalim članovima grupe rješenja stupaca $f_1(x)$ i $g_1(x)$ dok svi ostali učenici to zapisuju. Zatim učenik iz druge grupe čita rješenja stupaca $f_2(x)$ i $g_2(x)$ te svi ostali to zapisuju. Postupak se ponavlja dok tablica ne bude ispunjena.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$
-2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{100}$
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$
0	1	1	1	1	1
1	2	3	5	6	10
2	4	9	25	36	100
3	8	27	125	216	1000

x	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$	$g_5(x)$
-2	4	9	25	36	100
-1	2	3	5	6	10
0	1	1	1	1	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{100}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{216}$	$\frac{1}{1000}$

Diskusija:

1. Kakve su baze funkcija f u odnosu na broj 1?

Baze funkcija f su veće od 1.

2. Kakve su baze funkcija g u odnosu na broj 1?

Baze funkcija g su manje od 1.

3. Kako se mijenjaju argumenti funkcija f i g od prvog reda nadalje?

Argumenti funkcija f i g, to jest x – evi iz prvog stupca tablice se povećavaju.

4. Kako se mijenjaju vrijednosti funkcije f od prvog reda nadalje?

Vrijednosti funkcija f se povećavaju.

5. Kako se mijenjaju vrijednosti funkcije g od prvog reda nadalje?

Vrijednosti funkcija g se smanjuju.

6. Koristeći odgovore na pitanja 1. – 5. napišite zaključak.

Kod eksponencijalne funkcije s bazom većom od 1, rastom argumenata funkcije, raste i vrijednost funkcije. Kod eksponencijalne funkcije s bazom manjom od 1, rastom argumenata funkcije, vrijednosti funkcije se smanjuju.

.

Zadatak 3:

Upisivanjem znakova $<, >$ ili $=$ usporedite argumente funkcija f te njihovih vrijednosti u odgovarajućim argumentima.

$x_1 < x_2$	$f(x_1) < f(x_2)$
$x_3 < x_5$	$f(x_3) < f(x_5)$
$x_4 > x_2$	$f(x_4) > f(x_2)$
$x_1 < x_4$	$f(x_1) < f(x_4)$
$x_3 > x_2$	$f(x_3) > f(x_2)$
$x_5 < x_1$	$f(x_5) < f(x_1)$

Upisivanjem znakova $<, >$ ili $=$ usporedite argumente funkcija f te njihovih vrijednosti u odgovarajućim argumentima.

$x_1 < x_2$	$g(x_1) > g(x_2)$
$x_3 < x_5$	$g(x_3) > g(x_5)$
$x_4 > x_2$	$g(x_4) < g(x_2)$
$x_1 < x_4$	$g(x_1) > g(x_4)$
$x_3 > x_2$	$g(x_3) < g(x_2)$
$x_5 < x_1$	$g(x_5) > g(x_1)$

Što možete zaključiti uspoređujući pojedina dva argumenta funkcija f i vrijednosti funkcija f u tim argumentima?

Ako je $x_1 < x_2$, onda je $f(x_1) < f(x_2)$.

Što možete zaključiti uspoređujući pojedina dva argumenta funkcija g i vrijednosti funkcija g u tim argumentima?

Ako je $x_1 < x_2$,onda je $g(x_1) > g(x_2)$.

Iz faze 2 znamo da su funkcije f rastuće, a funkcije g padajuće.

1. Kako biste općenito definirali rastuću, odnosno padajuću funkciju?

Rastuća: Funkcija je rastuća ako iz $x_1 < x_2$ slijedi $f(x_1) < f(x_2)$, za sve $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Padajuća: Funkcija je padajuća ako iz $x_1 > x_2$ slijedi $f(x_1) < f(x_2)$, za sve $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

U prvoj fazi učenici trebaju izračunati vrijednosti eksponencijalne funkcije za dane argumente. Iako bi na ovoj razini učenici trebali bez poteškoća ispuniti tablicu, nastavnik bi trebao prošetati razredom i provjeriti jesu li svi učenici savladali ovaj dio gradiva. Budući da ova aktivnost zahtjeva angažman svakog učenika, niti jedna grupa ne smije dopustiti da jedan od njihovih članova ne ispuni svoj dio zadatka. Dakle, ukoliko jedan od učenika ima problema s prvom fazom, to jest određivanjem vrijednosti eksponencijalne funkcije u danim argumentima, na ostalim je učenicima da spomenutom učeniku pomognu u izvršavanju zadatka. U suprotnom, daljnji bi tijek aktivnosti i zaključivanja mogao krenuti u krivom smjeru. Osim što će nastavnik, uvidom u učenike koji ne znaju riješiti prvi zadatak, dobiti povratnu informaciju o učeniku koji očito nije na razini s koje može normalno pratiti nastavu, učenika situacija u kojoj je on kotačić koji zapinje može potaknuti na pažljivije praćenje nastave i izvršavanje obaveza kod kuće. Na nastavniku je da utvrdi uzroke zbog kojih je do ovoga došlo i da se pobrine za njihovo rješavanje.

Drugu fazu učenici započinju prezentacijom svojih rješenja. Nakon toga slijedi odgovaranje na pitanja o kojima učenici u grupi raspravljaju i zapisuju dobivene zaključke. Nastavnik obilazi razred, osluškuje i, po potrebi, usmjerava učenike. Odgovor na 6. pitanje glavni je zaključak druge faze i od iznimne je važnosti za nastavak proučavanja eksponencijalne funkcije.

Učenici se u trećoj fazi vraćaju u svoje prvobitne skupine i donose zaključke važne za ovu fazu. Treća faza donosi nove termine i njihove definicije, ne samo važne za eksponencijalnu funkciju nego i za funkcije općenito. Baš zato što bi učenici sada sami trebali doći do novih termina i njihovih definicija, aktivnost nastavnika u svakoj grupi je vrlo važna. Za očekivati je odgovore koji nisu traženi, ali važno je učeniku dozvoliti da svaki takav odgovor obrazloži. Najviše poteškoća očekujemo u definiranju rastuće i padajuće funkcije, ali važno je da nastavnik usmjerava učenike kako bi došli do tražene definicije.

5.3.6 Aktivnost „Graf eksponencijalne funkcije"

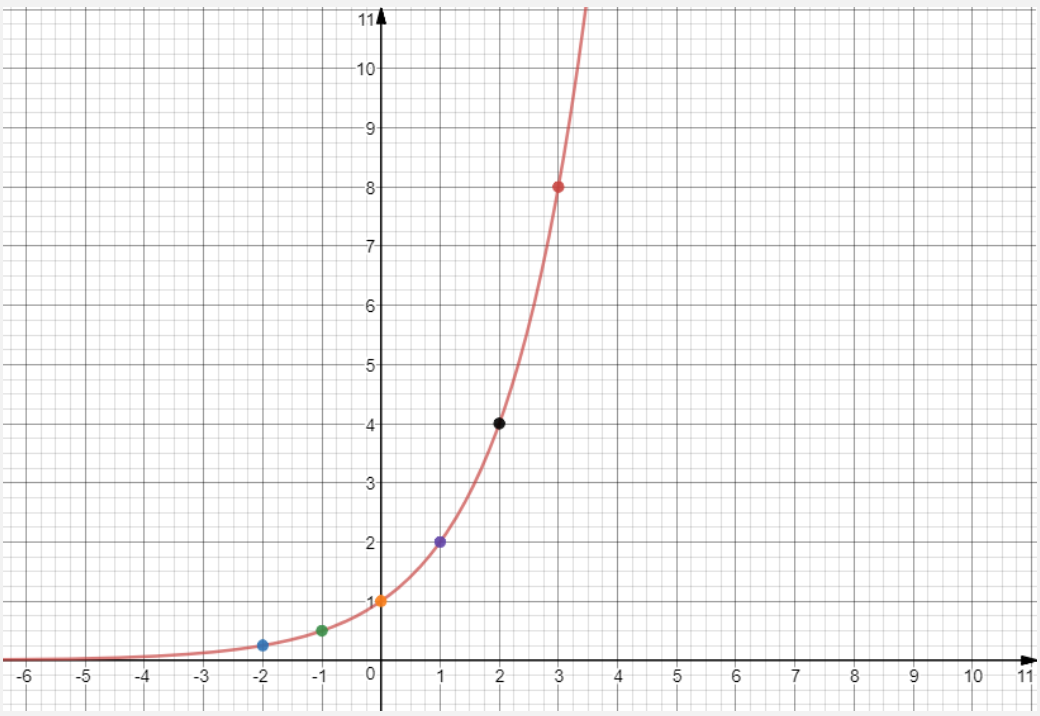
Neizostavni dio kod proučavanja funkcija su grafovi. Isto vrijedi i za eksponencijalnu funkciju. Cilj ove aktivnosti u drugom razredu srednje škole je otkrivanje grafa eksponencijalne funkcije. U procesu otkrivanja učenici će ispuniti ishode učenja 4, 5 i 6. U tu svrhu učenike ćemo podijeliti u parove i podijeliti im nastavne listiće s milimetarskim papirom. Učenici u paru ispunjavaju tablicu s listića i na milimetarski papir u koordinatni sustav ucrtavaju točke grafa. Zatim sve dobivene točke spajaju i dobivaju graf eksponencijalne funkcije. Za provedbu aktivnosti potrebno je oko 10 minuta. Iako za samu provedbu aktivnosti nije potrebno računalo s projektorom, ono nastavniku može poslužiti za prikaz grafova eksponencijalnih funkcija s različitim bazama koristeći programe dinamičke geometrije. Dakle, nužan materijal za provedbu ove aktivnosti je pribor za pisanje te nastavni listić 5.3.6.1. Tehnologija je poželjna, ali ne i nužna.

Osim priloženog, postoji još jedan nastavni listić koji se od priloženog razlikuje u bazi eksponencijalne funkcije (umjesto baze 2, baza $\frac{1}{2}$). Budući da eksponencijalne funkcije s bazom većom od 2 (ili manjom od $\frac{1}{2}$) vrlo brzo postižu vrijednosti koje nadmašuju veličinu milimetarskog papira, zaustavit ćemo se na bazama 2 i $\frac{1}{2}$. Poželjno je da nastavnik za ovaj sat pripremi i tehnologiju, to jest računalo s projektorom. Naime, koristeći programe dinamičke geometrije nastavnik može prikazati grafove funkcija s nastavnih listića. Također, može prikazati i grafove drugih eksponencijalnih funkcija koje iz praktičnih, već spomenutih razloga nećemo zadati učenicima.

Nastavni listić 5.3.6.1. *Graf*

Ispuni tablicu, u koordinatni sustav na milimetarskom papiru ucrtaj točke $(x, 2^x)$ te spoji ucrtane točke.

x	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



Nakon isteka vremena predviđenog za aktivnost, nastavnik zajedno s učenicima analizira ponašanje dobivenih grafova. Potrebno je obratiti pažnju na približavanje grafa osi apscisa. Pitanja koja nastavnik postavlja učenicima su: „Hoće li graf dotaknuti os apscisa? Koje je algebarsko objašnjenje toga?“. Zatim svojstvo grafa da je cijeli iznad osi apscise. Nastavnik traži algebarsko objašnjenje i tog svojstva. Nadalje, algebarsko objašnjenje činjenice da svi traženi grafovi sijeku os ordinata u istoj točki.

Rasprava vezana uz graf sadrži mnogo pitanja i odgovora. Sve odgovore učenici bi trebali znati koristeći dosadašnje znanje o grafu funkcije općenito i o eksponencijalnoj funkciji. U raspravi nastavnik vrlo jasno može vidjeti koji učenici sudjeluju, razmišljaju, na koji se način izražavaju i kako svoje znanje primjenjuju na novootkrivene stvari.

5.3.7 Aktivnost „Odnos grafova“

U ovoj aktivnosti učenici će otkrivati odnos između funkcija. Za otkrivanje će im pomoći vladanje ishodima učenja A3, A4, B1, 4 i 6. Radom u četveročlanim skupinama učenici drugog razreda srednje škle crtat će grafove četiriju funkcija i istraživati njihov odnos. Funkcije će, jednu od druge, razlikovati predznak u eksponentu, predznak ispred baze ili recipročna baza. Dakle, svaka će grupa imati zadatak skicirati četiri grafa funkcije. Nakon što nastavnik podijeli nastavne listiće i prozirnice s ucrtanim koordinatnim sustavom, učenici započinju zadatak. Svaki učenik iz skupine odabire jednu od četiri funkcije čiji će graf skicirati na prozirnicu. Važno je da su na svim prozirnicama u skupini ucrtani koordinatni sustavi s jednakim jediničnim dužinama. Također, svaki učenik skicira graf markerom u jednoj boji, različitoj od boja markera ostalih učenika u grupi. Nakon što su svi učenici iz skupine skicirali svoje grafove, postavljaju sve prozirnice jednu na drugu tako da se koordinatne osi sa svih prozirnica podudaraju. Učenici promatraju prozirnice i određuju odnos između grafova. Zaključke iz diskusije koriste za rješavanje zadatka 2 gdje je potrebno nadopuniti dani tekst. Predviđeno vrijeme za ovaj dio je oko 15 minuta. Nakon isteka predviđenog vremena, nastavnik odabire grupu koja će svoje prozirnice staviti na grafoskop kako bi nastavnik, zajedno s učenicima, potvrdio njihove zaključke.

Za ovu je aktivnost potrebno više materijala no inače. Osim uobičajenog pribora za pisanje i nastavnih listića, potrebne su prozirnice s ucrtanim koordinatnim osima, markeri u boji i grafoskop.

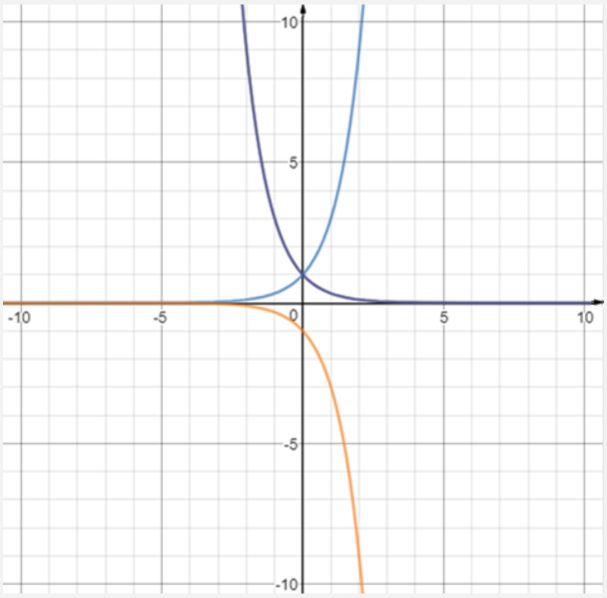
Nastavni listić 5.3.7.1. *Odnos grafova*

1. Neka svaki učenik odabere jednu od sljedećih funkcija:

a) $f(x) = 3^x$ b) $f(x) = -3^x$ c) $f(x) = 3^{-x}$ d) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Odabrane funkcije skicirajte u koordinatne sustave na prozirnicama.

2. Kada završite s 1. zadatkom, postavite sve prozirnice jednu na drugu, tako da se koordinatni sustavi na svim prozirnicama podudaraju. Obratite pažnju na odnose svih grafova pa nadopunite tekst.



Grafovi funkcija $\underline{f(x) = 3^x}$ i $\underline{f(x) = -3^x}$ su osnosimetrični s obzirom na x -os.

Grafovi funkcija $\underline{f(x) = 3^x}$ i $\underline{f(x) = 3^{-x}}$ su osnosimetrični s obzirom na y – os.

Grafovi funkcija, to jest funkcije $\underline{f(x) = 3^{-x}}$ i $\underline{f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x}$ su identične.

Prethodna aktivnost lijepo se uklapa u plan obrade eksponencijalne funkcije. Prvi dio aktivnosti koristit će učenicima da uvježbaju crtanje grafova eksponencijalne funkcije što su naučili na jednom od prethodnih sati. Također, zaključci iz drugog dijela aktivnosti (nadopunjavanje rečenica) učenicima mogu biti od velike pomoći u daljnjem crtanju složenijih eksponencijalnih funkcija, rješavanju jednadžbi i nejednadžbi te određivanju monotonosti funkcije. S druge strane, kroz crtanje grafova funkcija iz prvog dijela zadatka nastavnik diskretno i jednostavno može dobiti uvid u učenike koji nisu savladali crtanje grafova funkcija. Moguće je i da veći dio razreda još nije savladalo crtanje grafa funkcije što je korisna povratna informacija nastavniku za njegov rad.

Ovdje imamo još jedan primjer aktivnosti koja se radi u grupi. Takav tip organizacije rada osigurava angažman svih učenika. Zakaže li ijedan učenik, svi članovi grupe ostat će uskraćeni za samostalno otkrivanje traženih zaključaka. Takav tip rada mogao bi potaknuti učenike koji usporavaju rad svoje grupe da ubuduće na nastavu matematike dolaze bolje pripremljeni. Također, međusobno pomaganje učenika u grupi može pomoći razumijevanju i onog učenika koji pomaže i onome kome se pomaže. Često će objašnjavanje drugog učenika biti učinkovitije od objašnjavanja nastavnika i ovakav tip aktivnosti je dobra prilika za takav način učenja.

5.3.8 Aktivnost „Transformacije grafa"

Slijedi aktivnost koja se nadovezuje na prethodnu aktivnost s grafom eksponencijalne funkcije. Aktivnost pridonosi ostvarivanju ishoda učenja A3, A4, B1, 4 i 6 u drugom razredu srednje škole. Za njenu provedbu koristit ćemo „kolo naokolo" za što su nam potrebne četveročlane skupine. Nakon podjele učenika u skupine, nastavnik dijeli učenicima nastavne listiće sa četiri međusobno povezana zadatka. Svi učenici u grupi imaju različite zadatke na listiću. Aktivnost počinje tako da svaki učenik rješava samo prvi zadatak s nastavnog listića. Kada svi učenici riješe prvi zadatak s listića, prosljeđuju svoj listić učeniku lijevo od sebe. Svi učenici počinju rješavati samo drugi zadatak s listića kojeg su dobili od učenika do sebe. Drugi zadatak, za razliku od prvog, sadrži i dva pitanja na koja bi učenik trebao odgovoriti. Nakon isteka vremena predviđenog za drugi zadatak, učenici ponovo prosljeđuju nastavni listić učeniku lijevo od sebe. Postupak se ponavlja sve dok do svakog učenika u skupini ne dođe nastavni listić s kojim je počeo ovu aktivnost. Na svakom su listiću riješena četiri od pet zadatka. Ostao je još posljednji zadatak kojeg bi učenici trebali riješiti koristeći odgovore na pitanja iz zadataka 2. – 4. Dakle, cilj ove aktivnosti je da učenici, koristeći transformacije jednostavnih grafova eksponencijalne funkcije skiciraju graf složene eksponencijalne funkcije. Predviđeno vrijeme za ovu aktivnost je 30 minuta nakon čega slijedi uvježbavanje. Materijal potreban za ovu aktivnost je pribor za pisanje te nastavni listići.

U nastavku je dan primjer nastavnog listića jednog učenika u grupi. Ostali učenici imaju analogne listiće, to jest razlikuje ih samo baza eksponencijalne funkcije. Osim baze 2, na listićima se još pojavljuju i baza 3, baza 4 i baza 5.

Nastavni listić 5.3.8.1. *Transformacije grafova*

Učenik A

U koordinatnom sustavu skiciraj grafove funkcija $f_1, f_2, f_3, f_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i odgovori na pitanja.

1. $f_1(x) = 2^x$
2. $f_2(x) = 2^{-x}$

a) Kako su međusobno povezana pravila pridruživanja za funkcije f_1 i f_2?

Eksponent u funkciji f_2 je suprotan eksponentu u funkciji f_1.

U kakvom su međusobnom odnosu grafovi funkcija f_1 i f_2?

Grafovi funkcija su osnosimetrični s obzirom na y – os.

3. $f_3(x) = 2^{-x+2}$

b) Kako su međusobno povezana pravila pridruživanja za funkcije f_2 i f_3?

Eksponent u funkciji f_3 je za 2 veći u odnosu na eksponent u funkciji f_2

U kakvom su međusobnom odnosu grafovi funkcija f_2 i f_3?

Graf funkcije f_3 je „translatiran“ za dvije jedinične dužine ulijevo duž x – osi u odnosu na graf funkcije f_2.

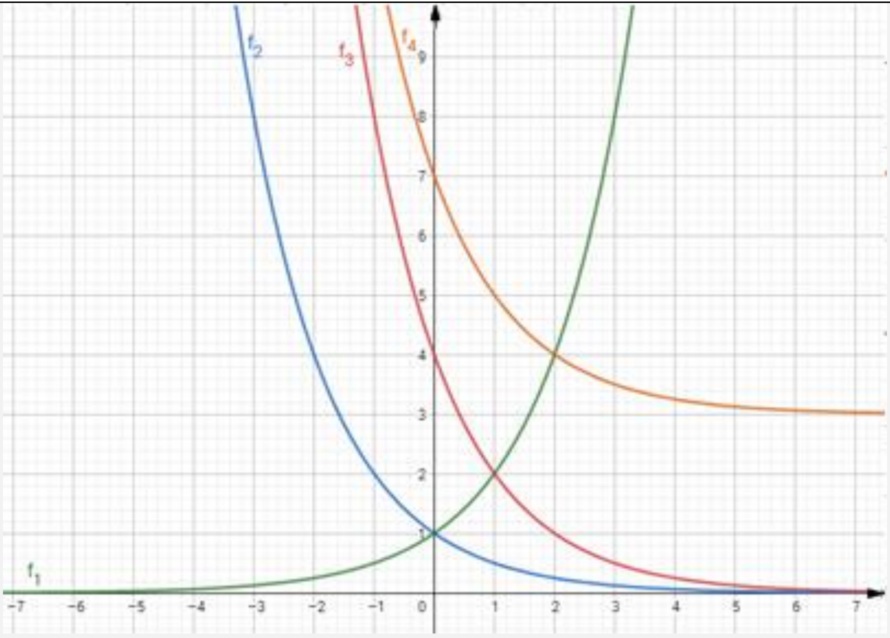
4. $f_4(x) = 2^{-x+2} + 3$

c) Kako su međusobno povezana pravila pridruživanja za funkcije f_3 i f_4?

Funkcija f_4 je uvećana za 3 u odnosu na funkciju f_3.

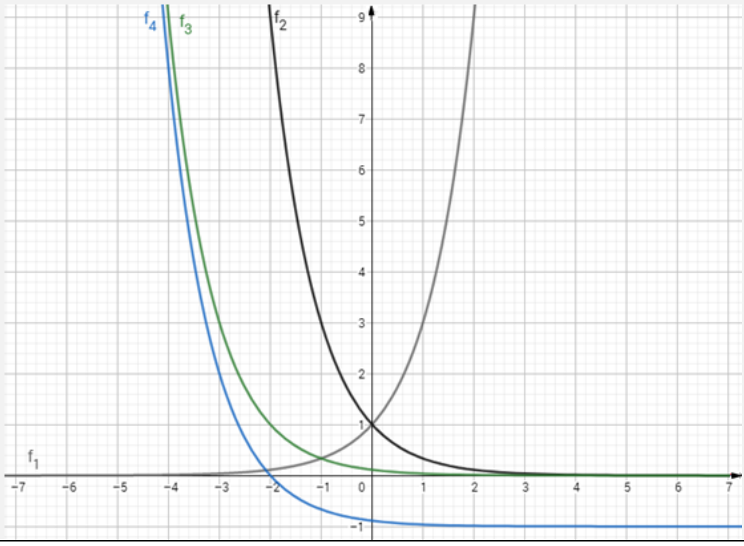
U kakvom su međusobnom odnosu grafovi funkcija f_3 i f_4?

Graf funkcije f_4 je translatiran za 3 prema gore duž y – osi u odnosu na graf funkcije f_3.



5. Koristeći zadatke 1. – 4. skiciraj graf funkcije $g(x) = 3^{-x-2} - 1$.

Funkciju g rastavit ćemo na jednostavnije funkcije kao u prethodnom zadatku:
$g_1(x) = 3^x \;\rightarrow\; g_2(x) = 3^{-x} \;\rightarrow\; g_3(x) = 3^{-x-2} \;\rightarrow g_4(x) = 3^{-x-2} - 1$



Iako je kolo naokolo zamišljena kao brza, dinamična aktivnost gdje listići brzo kruže, ovdje to neće biti slučaj. Svaka sljedeća izmjena učenicima će uzimati više vremena jer funkcije čije grafove trebaju skicirati postaju sve složenije. Aktivnost počinje skiciranjem elementarne eksponencijalne funkcije $f(x) = a^x, a \in \mathbb{N}$. Za očekivati je da skiciranje grafa spomenute funkcije učenicima neće uzeti više od 2-3 minute. Obilaskom razreda nastavnik treba obratiti pažnju na načine na koji učenici skiciraju navedeni graf. Naime, u ovoj fazi poželjno je da učenici već znaju izgled grafa elementarne eksponencijalne funkcije, a ne da ga crtaju uvrštavanjem argumenata x u izraz $f(x)$. Iako je i potonji način ispravan, njegovim korištenjem učenik pokazuje da nije u stanju primjenjivati naučeno s dosadašnjih satova.

Radom u grupi gdje svi učenici crtaju grafove funkcija jednake složenosti, spomenuti učenici će vidjeti da postoji i brži način za crtanje grafa ovakve funkcije. Kod crtanja grafova sljedećih funkcija učenici će vjerojatno koristiti metodu uvrštavanja argumenata x u izraz $f(x)$. Osim crtanja grafova, od učenika se u ovoj aktivnosti očekuje i da preciznim matematičkim izražavanjem opišu vezu dva grafa. Bitno je da rječnik kojim se učenici koriste bude matematički i ispravan. U svrhu poboljšanja ovog segmenta, nakon što učenici završe s rješavanjem nastavnog listića, nastavnik će prozvati nekoliko učenika da pročitaju svoje zaključke i posebnu će pozornost obratiti na izražavanje učenika. Svaku eventualnu grešku nastavnik mora ispraviti i objasniti razloge njene neispravnosti.

Ovdje također imamo aktivnost koja prisiljava sve učenike na rad. Svaki je učenik kotačić u mehanizmu koji vodi do traženih otkrića. Izostankom učinka samo jednog učenika, grupa neće biti u mogućnosti otkriti tražene zaključke. U takvom obliku rada, svaki učenik osjeća važnost svog doprinosa radu grupi što dovodi do veće odgovornosti i ozbiljnijeg pristupa radu.

Transformacije grafova funkcija općenito su važna u matematici. Prvi put ih susrećemo kod linearne funkcije, zatim kvadratne i sada kod eksponencijalne. Isto tako, koristit ćemo ih i kod logaritamske i trigonometrijskih funkcija. Zato su zaključci s ovog sata učenicima vrlo važni za nastavak matematičkog obrazovanja i njegovog boljeg razumijevanja.

5.3.9 Aktivnost „Injektivnost“

U sljedećoj aktivnosti učenici će otkriti važno svojstvo funkcija. Radi se o svojstvu injektivnosti koje, između ostalih, ima i eksponencijalna funkcija. Osim definicije, učenici će otkriti i kriterij po kojem će ispitivati je li grafički zadana funkcija injektivna ili nije. Provedbom ove aktivnosti nastavnik može uvidjeti jesu li i u kojoj mjeri učenici svladali ishode učenja A3, A4, G5 i 5.

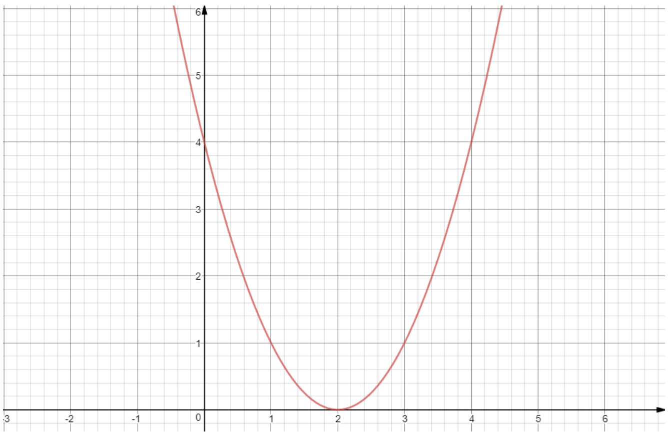
Aktivnost je zamišljena kao suradnički rad u četveročlanim skupinama koji završava frontalnom nastavom. Na početku, nastavnik dijeli učenike u četveročlane skupine i svakoj skupini daje nastavni listić (po dvije skupine imaju isti nastavni listić). Svaki nastavni listić sadrži 3 funkcije zadane tablicom i grafički. Dvije funkcije nisu injektivne (funkcija apsolutne vrijednosti i kvadratna funkcija) i jedna injektivna funkcija (eksponencijalna). U nastavku se nalaze pitanja vezana uz funkcije na koja učenici trebaju odgovoriti i na temelju odgovora donijeti traženi zaključak. Nakon isteka vremena predviđenog za ovaj dio aktivnosti, predstavnici svake skupine prezentiraju dobivene zaključke i kako su do njih stigli.

Vrijeme predviđeno za trajanje ove aktivnosti je oko 15 minuta. Osim pribora za pisanje, potrebni su nastavni listići. Iako se injektivnost detaljnije obrađuje u četvrtom razredu srednje škole kada se proučavaju funkcije, ova je aktivnost predviđena za drugi razred srednje škole u sklopu proučavanja eksponencijalne funkcije.

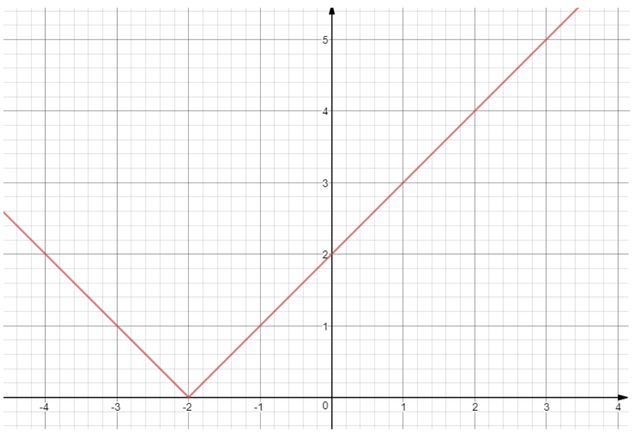
Nastavni listić 5.3.9.1. *Injektivnost*

Zadatak 1: Popuni tablice i skiciraj grafove zadanih funkcija.

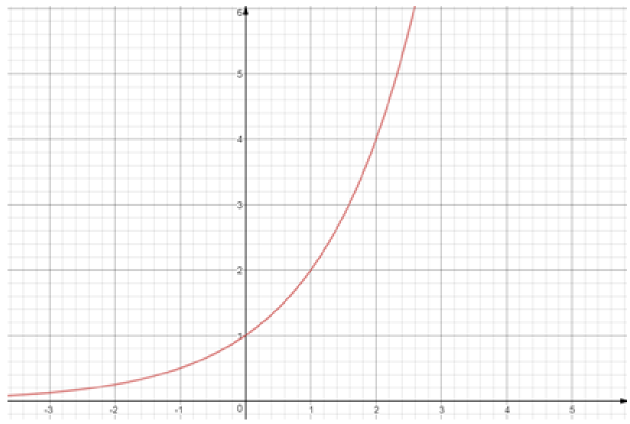
x	$f(x) = (x-2)^2$
-2	16
-1	9
-0.6	6.76
-0.4	5.76
-0.2	4.84
0	4
0.1	3.61
0.5	2.25
0.7	1.69
1	1
2	0
3	1
4	4
6	16



x	$f(x) = \|x+2\|$
-2	0
-1	3
-0.6	1.4
-0.4	1.6
-0.2	1.8
0	2
0.1	2.1
0.5	2.5
0.7	2.7
1	3
2	4
3	5
4	6



x	$f(x) = 2^x$
-2	0.25
-1	0.5
-0.6	0.65975
-0.4	0.7578
-0.2	0.8705
0	1
0.1	1.0717
0.5	1.4142
0.7	1.6245
1	2
2	4
3	8
4	16
6	64



Nastavni listić 5.3.9.2. *Injektivnost 2*

Promotrite grafove na nastavnim listićima.

Odaberite, po volji, jednu vrijednost funkcije (izračunatu u tablici) i odredite sve x – eve u kojima funkcija postiže tu vrijednost.

Odgovorite na pitanja:

Koje su funkcije prikazane na grafovima?

Na prvoj slici je graf funkcije apsolutne vrijednosti, na drugoj graf kvadratne funkcije, a na trećoj graf eksponencijalne funkcije.

Što uočavate? Koliko x- eva ste odredili za odabranu vrijednost funkcije?

Za neke vrijednosti funkcije možemo odrediti samo jedan x, a za neke po dva.

Koliko x – eva možete odrediti za odabranu vrijednost kvadratne funkcije?

Za kvadratnu funkciju možemo odrediti jedan ili dva x – eva za odabranu vrijednost funkcije.

Koliko x – eva možete odrediti za odabranu vrijednost funkcije apsolutne vrijednosti?

Za funkciju apsolutne vrijednosti možemo odrediti jedan ili dva x – eva za odabranu vrijednost funkcije.

Koliko x – eva možete odrediti za odabranu vrijednost eksponencijalne funkcije?

Za eksponencijalnu funkciju možemo odrediti samo jedan x za odabranu vrijednost funkcije.

Što vrijedi za svako od zadanih pravila pridruživanja ako je $x_1 \neq x_2$?

Kod kvadratne funkcije i funkcije apsolutne vrijednosti, za dva različita argumenta vrijednosti funkcije mogu biti iste ili različite. Kod eksponencijalne funkcije, za svaka dva različita argumenta, vrijednosti funkcije su različite.

Možemo li kod eksponencijalne funkcije naći dva različita argumenta za koje će vrijednost funkcija biti jednaka? Zašto?

Ne možemo. Učili smo da je eksponencijalne funkcija strogo rastuća za bazu veću od 1, odnosno strogo padajuća za bazu između 0 i 1. Dakle, za različite argumente funkcija poprima različite vrijednosti.

U opisanoj aktivnosti važno je da učenici vladaju i razlikuju pojmove „argument funkcije“ i „vrijednost funkcije“. Obilaskom razreda dok učenici rješavaju, nastavnik se može susresti sa spomenutim ili nekim drugim problemom na koje bi trebao upozoriti učenike. Budući da sama formulacija definicije injektivnosti može biti većem dijelu učenika problem, stroga definicija predviđena je za nastavnika koji će napisati na ploču. Važno je da svaki učenik intuitivno shvati svojstvo injektivnosti.

Zaključak:

Neka je funkcija zadana sa $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Ako iz* $x_1 \neq x_2$ *slijedi* $f(x_1) \neq f(x_2)$*, onda funkciju* f *nazivamo injekcijom.*

Budući da za eksponencijalnu funkciju spomenuta implikacija vrijedi, eksponencijalna funkcija je injekcija (injektivna je).

5.3.10 Aktivnost „Eksponencijalne jednadžbe“

Važan dio eksponencijalne funkcije čine eksponencijalne jednadžbe i nejednadžbe. U sljedećoj će aktivnosti učenici otkriti oblik eksponencijalne jednadžbe i njenu definiciju. Ishodi učenja povezani s ovom aktivnošću su A4, B1 i B3. Budući da očekujemo da će neki učenici imati dvojbe oko odluke je li neka jednadžba eksponencijalna ili nije, aktivnost je zamišljena kao rad u paru kako bi učenici mogli svoje argumente „za“ i „protiv“ podijeliti sa svojim parom te tako doći do definicije eksponencijalne funkcije. Dakle, nastavnik učenike podijeli u parove i podijeli im nastavne listiće. Učenici rješavaju dok nastavnik obilazi razred i osluškuje njihova razmišljanja. Aktivnost završava tako što nastavnik nasumično proziva učenike koji izlažu i obrazlažu svoja rješenja. Za navedenu je aktivnost potreban samo nastavni listić uz pribor za pisanje. Aktivnost je zamišljena za uvodnih 10 minuta sata u drugom razredu srednje škole na kojem se obrađuju eksponencijalne jednadžbe.

Nastavni listić 5.3.10.1. *Eksponencijalne jednadžbe*

<table>
<tr><td colspan="2">Navedene jednadžbe grupiraj u dvije skupine tako da u jednu skupinu smjestiš jednadžbe za koje misliš da jesu eksponencijalne, a u drugu jednadžbe za koje misliš da nisu eksponencijalne.
$\sqrt[3]{2x+1}=3$ $\frac{2^x}{4}=8$ $(2x+1)^2=9$ $x^2=4$ $3^x+2^x=13$
$x^2+2x+3=0$ $2^x\cdot 4^{-x+3}=\frac{1}{2}$ $3x+1=-5$ $2^x+2\cdot 2^x=24$
$3^x=27$ $(2x-3)^{\frac{1}{2}}=3$ $x^3=27$ $x+3=2x$ $4^{2x^2+3x-1}=2$</td></tr>
<tr><td>$\frac{2^x}{4}=8$ $3^x+2^x=13$ $3^x=27$
$2^x\cdot 4^{-x+3}=\frac{1}{2}$ $2^x+2\cdot 2^x=24$
$4^{2x^2+3x-1}=2$</td><td>$\sqrt[3]{2x+1}=3$ $(2x+1)^2=9$ $x^2=4$
$x^2+2x+3=0$ $3x+1=-5$ $x+3=2x$
$(2x-3)^{\frac{1}{2}}=3$ $x^3=27$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Eksponencijalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica nalazi u eksponentu.</td></tr>
</table>

Dok učenici rješavaju nastavne listiće, nastavnik obilazi razred. Prati angažman učenika, njihova rješenja i zaključke. Rad u paru može potaknuti i raspravu među učenicima, a rasprava povlači i argumente koji potiču učenike na razmišljanje i pravilno matematičko izražavanje.

Opisana aktivnost sadrži i definiciju koju učenici moraju sami napisati. To je još jedan način kojim ćemo učenike potaknuti na precizno matematičko izražavanje i korištenje matematičkog rječnika.

5.3.11 Aktivnost „Otkrivanje metode supstitucije za rješavanje eksponencijalne jednadžbe“

Nakon što su učenici upoznali eksponencijalne jednadžbe, kreću na njihovo rješavanje i ostvarivanje ishoda učenja A4, D1 i 7. Poznato nam je da postoji više tipova eksponencijalnih jednadžbi, pa samim time postoji i više različitih načina za njihovo rješavanje. U sljedećoj će aktivnosti učenici otkriti jedan od često korištenih načina u rješavanju eksponencijalnih, a kasnije i logaritamskih i trigonometrijskih jednadžbi. Radi se o uvođenju supstitucije i svođenju eksponencijalne jednadžbe na kvadratnu i rješavanje jednadžbe algebarskom metodom. Dakle, na nastavnom listiću nalazit će se eksponencijalna jednadžba i postupak njenog rješavanja, korak po korak. Neke će korake učenici, koristeći prethodni i sljedeći korak, trebati nadopuniti kako bi postupak bio potpun. Aktivnost je zamišljena kao individualni rad, trajanja do 5 minuta. Nastavnik treba osigurati nastavne listiće, a učenici pribor za pisanje kako bi se aktivnost mogla provesti. Nakon isteka vremena predviđenog za aktivnost, nastavnik proziva učenike koji izlažu svoja rješenja. Kada se nastavnik uvjeri da je većina učenika shvatila ovaj način rješavanja jednadžbe, nastavnik zadaje učenicima sličan zadatak kojeg učenici, služeći se nastavnim listićem, trebaju riješiti.

Nastavni listić 5.3.11.1. *Metoda supstitucije*

Nadopuni prazne pravokutnike tako da postupak rješavanja eksponencijalne jednadžbe bude potpun: $2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$ Uvedimo supstituciju:

$$\boxed{t = 2^x}$$

Primjenom supstitucije imamo:

$t^2 - 10t + 16 = 0$ (1)

Rješavanjem kvadratne jednadžbe (1) imamo rješenja:

$$t_1 = \boxed{8} \qquad t_2 = \boxed{2}$$

Vraćanjem u supstituciju dobivamo x_1 i x_2:

$$\boxed{\begin{array}{c} t = 2^x \\ 8 = 2^x \\ 2^3 = 2^x \\ x = 3 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} t = 2^x \\ 2 = 2^x \\ 2^1 = 2^x \\ x = 1 \end{array}}$$

Iako se radi o jednostavnoj i, u kasnijem obrazovanju, među učenicima vrlo popularnoj metodi rješavanja, prvi susret učenika s ovom metodom često zna biti problematičan. Upravo zato je otkrivanje ove metode osmišljeno na ovaj način. Učenike se doslovno navodi korak po korak, gdje oni moraju nadopuniti neke jednostavne, ali ključne korake u postupku rješavanja zadatka. Uzimajući u obzir da u razredu postoji više analognih primjera te da će svi biti prezentirani pred razredom, za očekivati je da će već na satu učenici shvatiti ovu metodu rješavanja eksponencijalnih jednadžbi. Za kraj sata učenicima smo pripremili i strategiju formativnog vrednovanja u obliku igre „Crni Petar“ kojom će učenici savladati uvođenje supstitucije u jednadžbu (vidi poglavlje 6.6.).

5.3.12 Aktivnost „Eksponencijalne nejednadžbe“

Pokažimo kako učenicima možemo predstaviti jednu od metoda rješavanja eksponencijalnih nejednadžbi koja će doprinijeti ostvarivanju ishoda A3, B1 i 7. Učenici će raditi suradnički u paru kako bi mogli razmjenjivati mišljenja na putu do traženih zaključaka. Aktivnost se sastoji od dva jednaka listića (za svakog učenika jedan) i milimetarskog papira s ucrtanim koordinatnim sustavom. Nastavnik dijeli potreban materijal i učenici započinju s rješavanjem. Za vrijeme rješavanja, nastavnik obilazi razred te, po potrebi, pomaže učenicima u rješavanju. Nakon isteka vremena predviđenog za rješavanje nastavnog listića (5 – 10 minuta), nastavnik predvodi raspravu u kojoj učenici prezentiraju i obrazlažu svoje zaključke.

Nastavni listić 5.3.12.1. *Eksponencijalnene jednadžbe*

Učenik A

Prateći korake, riješi sljedeću nejednadžbu: $2^{x-1} > 4^{-x+1}$

Korak 1

Odgovori na pitanje: Što znači riješiti nejednadžbu?

Riješiti kvadratnu nejednadžbu znači odrediti sve x tako da zadana nejednakost vrijedi.

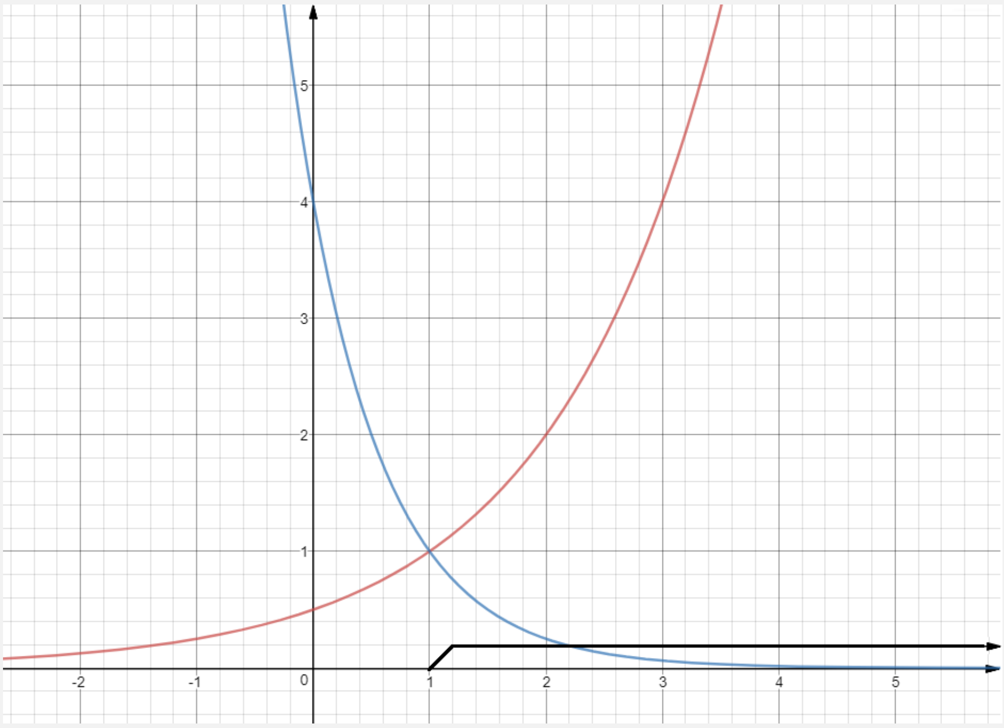
Korak 2:

Na milimetarskom papiru neka jedan učenik nacrta graf funkcije $f(x) = 2^{x-1}$, a drugi učenik graf funkcije $g(x) = 4^{-x+1}$.

Korak 3:

Očitaj i označi na koordinatnom sustavu za koje x vrijedi nejednakost $2^{x-1} > 4^{-x+1}$, to jest $f(x) > g(x)$.

Dakle, rješenje dane nejednadžbe je: $x > 2$.



Iako je aktivnost vremenski kratka, ona od učenika zahtijeva puno znanja. Prvo, prisjetit će se što uopće znači „riješiti nejednažbu“. Zatim će učenici trebati skicirati dva grafa eksponencijalne funkcije. Nastavnik ovdje vrlo lako može vidjeti koji učenik graf crta određujući i spajajući više točaka, a koji su učenici napredniji, to jest koji crtaju koristeći translacije grafova jednostavnih eksponencijalnih funkcija. Također, kroz ovaj zadatak može vidjeti i postoje li učenici koji još uvijek ne znaju nacrtati graf eksponencijalne funkcije.

Tek nakon ovoga, do izražaja dolazi konceptualno razumijevanje, to jest što i kako očitati iz grafova. Dakle, učenici trebaju u ovoj situaciji odrediti za koje se x – eve graf funkcije f nalazi iznad grafa funkcije g. Na ovom dijelu nastavnik posebno mora obratiti pažnju i utvrditi jesu li svi učenici shvatili što i zašto trebaju napraviti.

U ovom su radu prikazane dvije metode za rješavanje eksponencijalnih jednadžbi i nejednadžbi. Iako eksponencijalne jednadžbe i nejednadžbe čine veliki i važan dio eksponencijalne funkcije, zbog velikog broja različitih tipova i složenosti (ne)jednadžbi, metode njihovog rješavanja nećemo prikazivati. Dat ćemo samo primjer strategije formativnog vrednovanja koja se može provesti za uvježbavanje rješavanje eksponencijalnih jednadžbi i nejednadžbi.

5.3.13 Modeliranje eksponencijalnom funkcijom

Na kraju poučavanja eksponencijalne funkcije preostalo nam je učenicima otkriti gdje sve mogu primjenjivati ono što su dosad naučili vezano za eksponencijalnu funkciju. Općenito, eksponencijalna je funkcija prisutna u različitim životnim sferama. Na primjer, u biologiji eksponencijalnom funkcijom opisujemo rast neke populacije (bakterija, demografska kretanja), zacjeljivanje rana na koži i djelovanje lijeka u organizmu. U ekonomiji, složeno ukamaćivanje je određeno eksponencijalnim rastom. U fizici je promjena atmosferskog tlaka s porastom visine opisana eksponencijalnom funkcijom, a Newton je svoj zakon hlađenja opisao eksponencijalnom funkcijom. Neke od spomenutih situacija prikazat ćemo u obliku konkretnih problema koje će učenici, koristeći znanje uz eksponencijalnu funkciju, modelirati i riješiti.

Napomena: Za rješavanje zadataka s primjenom eksponencijalne funkcije, učenicima je potrebno znanje o računanju s logaritmima, što su učili u međuvremenu.

Primjer 1 – Stanovništvo Hrvatske

Hrvatska je prema popisu stanovništva 2011. godine imala 4 290 000 stanovnika. Prema nekim prognozama, taj bi broj do 2031. godine mogao pasti na 3 680 000. Ako znamo da je broj stanovnika opisan funkcijom $f(t) = n_0 \cdot e^{kt}$ o vremenu t (u godinama), gdje je n_0 broj stanovnika u početnom stanju, a k nepoznati koeficijent, odredi:

1) Koliko Hrvatska ima stanovnika u 2018. godini?
2) Kada će Hrvatska imati 3 milijuna stanovnika?

(Pretpostavimo da se broj stanovnika zaista mijenja danom formulom.)

Rješenje: Da bismo odgovorili na ponuđena pitanja, moramo prvo odrediti pravilo pridruživanja funkcije f.

Iz podataka o broju stanovnika danas i očekivanom broju stanovnika 2031. (20 godina od početnog stanja) imamo:

$$n_0 = 4290000$$

$$f(20) = 4290000 \cdot e^{20k}$$

Iz čega možemo odrediti nepoznati koeficijent k

$$e^{20k} = 0.8578$$

$$20k = \ln 0.8578$$

$$20k = -0.15337$$

$$k = -0.0076685.$$

Dakle, sada imamo zakonitost po kojoj se tijekom vremena mijenja broj stanovnika u našoj zemlji:

$$f(t) = 4290000 \cdot e^{-0.0076685t}$$

1) Godine 2018., 7 godina nakon početnog stanja Hrvatska će imati

$$f(7) = 4290000 \cdot e^{-7 \cdot 0.0076685} \approx 4065000$$

stanovnika.

2) Da bismo odredili kada će Hrvatska imati 3 milijuna stanovnika, trebamo odrediti t tako da vrijedi sljedeća jednakost:

$$3\,000\,000 = 4290000 \cdot e^{-0.0076685t}$$

pa je

$$e^{-0.0076685t} = 0.7$$

Djelovanjem prirodnog logaritma dobivamo

$$-0.0076685t = \ln(0.7) = -0.3566$$

$$t \approx 46$$

Dakle, za otprilike 46 godina, to jest 2057. godine Hrvatska bi trebala imati oko 3 milijuna stanovnika.

Zadatak 2 – Torinsko platno

U torinskoj katedrali (Duomo di San Giovanni) u proljeće 2010. godine posjetitelji su mogli vidjeti restauriranu Sindonu, platno u koje je po vjerovanju nekih, nakon smrti bilo umotano Isusovo tijelo. Na tom komadu platna duljine 4.4 metra i širine 1.1 metra uočljivi su obrisi ljudskog tijela koji neodoljivo podsjeća na Isusa. Je li u taj komad zaista bilo omotano Isusovo mrtvo tijelo? Nedoumica traje stoljećima pa je 1988. godine torinski nadbiskup potražio pomoć znanstvenika te su u laboratorijima sveučilišta u Oxfordu, Zurichu te sveučilišta u američkoj Arizoni provedene tri nezavisne provjere.

Provjera je provođena jednom vrlo preciznom metodom koja se temelji na radioaktivnom ugljiku C-14. Ustanovljeno je kako je platno nastalo negdje između 1260. i 1390. godine pa bi prema tome to platno bilo krivotvorina. No i dalje se javljaju osporavatelji nalaza.

Njihovi se argumenti svode na upitnost čistoće uzorka. Tvrde kako se tijekom vremena u platno uvuklo nešto mlađeg materijala što je utjecalo na rezultate mjerenja, a neki govore kako je za analizu uzet dio zakrpe koja je mlađa od samog platna. Na neki način priča ostaje otvorena.

A kako je provedena provjera starosti platna?

Sve živo, uključujući ljude, biljke i životinje, tijekom života iz ugljikova dioksida u atmosferi apsorbira izotop ugljika C-14. Nakon smrti ili ugibanja C-14 se počinje smanjivati u sada neživom organizmu po eksponencijalnom zakonu $m(t) = m_0 \cdot e^{-kt}$ gdje je $m(t)$ količina izotopa ugljika C-14, t vrijeme proteklo od smrti, a k nepoznata konstanta. S obzirom da je vrijeme poluraspada (vrijeme potrebno da se količina smanji za pola) izotopa ugljika C-14 5730 godina, možemo izračunati nepoznatu konstantu k.

Iz $k = \frac{\ln 2}{t}$ za $t = 5730$ dobivamo $k = 1.2 \cdot 10^{-4}$.

Provjera je pokazala da se u lanenim nitima Torinskog platna zadržala količina od 91.6% izvorne količine C-14. I sada iz jednadžbe $0.916 = e^{-0.00012t}$ slijedi da je približna starost platna oko 730 godina iz čega se zaključuje da Isusovo tijelo nije bilo zamotano u Torinsko platno.

Primjer 3 – Newtonov zakon hlađenja

Jedna od najpoznatijih primjena eksponencijalne funkcije je u forenzici prilikom određivanja vremena smrti. Naime, Newton je promjenu temperature tijela T u ovisnosti o proteklom vremenu t opisao na sljedeći način:

$$T(t) = T_{okoline} + (T_{početna} - T_{okoline}) \cdot e^{-kt}$$

gdje je k nepoznata konstanta.

Dana se formula ne odnosi samo na temperaturu ljudskog tijela nego tijela općenito. Ipak, ova se formula najčešće koristi baš u svrhu određivanja vremena smrti.

Primjer zadatka: Dogodilo se ubojstvo i na teren je izašla policijska ekipa za očevid. Temperatura tijela ubijenog tada je iznosila $26.5°$C. Dva sata poslije temperatura tijela žrtve iznosila je $24.5°C$. U sobi je temperatura konstanta i iznosi $20°C$. Uz pretpostavku da je temperatura tijela prije smrti bila prosječnih $36.5°C$, odredite vrijeme smrti.

Rješenje:

Uvrštavanjem danih podataka u formulu dobivamo:

$$24.5 = 20 + (26.5 - 20) \cdot e^{-k2}$$

$$4.5 = 6.5 \cdot e^{-2k}$$

$$0.6923 = e^{-2k}$$

$$\ln(0.6923) = -2k$$

$$k = 0.18387$$

Dakle, hlađenje tijela pri tim uvjetima slijedi zakonitost:

$$T(t) = 20 + (36.5 - 20) \cdot e^{-0.18387t}$$

Budući da znamo temperaturu trupla, možemo odrediti vrijeme smrti:

$$24.5 = 20 + 16.5 \cdot e^{-0.18387t}$$

$$4.5 = 16.5 \cdot e^{-0.18387t}$$

$$0.2727 = e^{-0.18387t}$$

$$\ln(0.2727) = -0.18387t$$

$$t = 7.07$$

Dakle, smrt je nastupila oko 7 sati prije pronalaska tijela.

6. Primjeri strategija formativnog vrednovanja pri izgradnji eksponencijalne funkcije

U ovom poglavlju bit će prikazani primjeri strategija formativnog vrednovanja u izgradnji eksponencijalne funkcije. Za svaku je strategiju naveden njen cilj, oblik rada, potreban materijal i opisan tijek. Dan je konkretan primjer nastavnog listića ili zadataka koji će biti korišteni u strategiji. Zatim slijedi osvrt na opisanu strategiju koji odgovara na sljedeća pitanja:

1) Kako strategija pridonosi vrednovanju za učenje (povratna informacija nastavniku o učeničkim postignućima, poteškoćama, miskoncepcijama, radu, samostalnosti, odgovornosti...)?

2) Kako strategija pridonosi vrednovanju kao učenju (povratna informacija učeniku od drugih učenika, vršnjačka pomoć, suradničko učenje, učenje od nastavnika)?

6.1 Strategija „Ocijeni sat“

Slijedi strategija formativnog vrednovanja koja se uglavnom nadovezuje na prethodnu aktivnost otkrivanja. Podijelit ćemo učenicima listiće s izjavnim rečenicama. Uz svaku rečenicu, bit će i skala od 1 do 4. Učenici zaokružuju jedan broj iz skale za svaku rečenicu.

Zaokruživanjem broja 1 učenici kažu da se uopće ne slažu s izjavom, zaokruživanjem broja 2 učenici kažu da se više ne slažu nego slažu s izjavom, zaokruživanjem broja 3 učenici kažu da se više slažu nego ne slažu s izjavom i zaokruživanjem broja 4 učenici kažu da se slažu s izjavom. Također, bit će i pitanja otvorenog odgovora kako bi nastavnik dobio detaljniji uvid o učenikovom dojmu odrađenog sata. Aktivnost je predviđena za posljednjih 4-5 minuta sata. Važno je naglasiti da je ispunjavanje listića anonimno.

Nastavni listić 6.1.1. *Eksponencijalne jednadžbe*

Uz svaku rečenicu 1. – 8. zaokruži po jedan broj 1. – 4. ovisno o tome u kojoj se mjeri slažeš s rečenicom.

1 – *ne slažem se* 2 – *više se ne slažem nego slažem*

3 – *više se slažem nego ne slažem* 4 – *slažem se*

1. Sat se dobro nadovezuje na prethodne satove.
   1 2 3 4
2. Na današnjem satu sam bio/bila aktivan/aktivna.
   1 2 3 4
3. Razumio/la sam upute i postavljena pitanja.
   1 2 3 4
4. Nastavnik me usmjeravao ispravnom odgovaranju.
   1 2 3 4
5. Partner je bio aktivan.
   1 2 3 4
6. Diskusija s partnerom pomogla mi je u zaključivanju.
   1 2 3 4

Što mi je na satu bilo najzanimljivije? ____.
Što mi je na satu bilo najmanje zanimljivo? ____.

Provedbom opisane strategije učenici imaju priliku izraziti svoje mišljenje o ovakvom tipu sata. Rezultate razreda nastavnik bi trebao uzeti u obzir u budućem planiranju satova s ovim razrednim odjelom i s ovom nastavnom jedinicom u sljedećim generacijama. Također, učenici ovom aktivnošću mogu preispitati svoj angažman na današnjem satu što ih može navesti na razmišljanje i odluke o poboljšavanju u tom segmentu.

6.2 Strategija „Nekada i sada“

Budući da su u prethodnoj aktivnosti otkrivanja učenici koristili već poznatu matematičku formu (funkciju) i proširivali ju na aktualni predmet proučavanja (eksponencijalna funkcija) za strategiju formativnog vrednovanja možemo koristiti aktivnost „Nekada i sada“. Kao što je i opisano u poglavlju 2.3.3. učenici će dobiti nastavne listiće 6.3.1 i kod kuće će popuniti rečenice. Oblik rada je individualan. Listiće će na sljedećem satu učenici predati nastavniku. Primjer izjava na koje možemo naići su:

Nekada sam mislio da se funkcije mogu zadati samo pravilom pridruživanja. Sada znam da se funkcije mogu zadati i tablično i grafički.

Nastavni listić 6.2.1. *Nekada i sada*

Funkcije su vrlo važan i složen predmet proučavanja u školi. Učenici se s funkcijom susreću u osnovnoj školi, nastavljaju s funkcijom u prvom razredu srednje škole, pa sada u drugom, zatim u trećem i na kraju u četvrtom razredu. Zato je važno učenike iznova podsjećati na definiciju i svojstva funkcije. Opisana aktivnost potaknut će učenike da promišljaju o funkciji, o vlastitom poimanju funkcije što će zasigurno pridonijeti boljem razumijevanju i daljnjem proučavanju funkcija. Pozitivna stvar kod opisane aktivnosti je što nastavniku ne uzima puno vremena, a korisna je i za učenike i za samog nastavnika. Naime, nastavnik na ovaj način može vidjeti imaju li učenici i dalje poteškoća sa shvaćanjem pojma funkcije pa, sukladno tome, prilagoditi poučavanje uočenim poteškoćama.

6.3 Strategija „3 – 2 – 1"

Strategija „3-2-1" prikladna je za provedbu nakon aktivnosti koja sadrži veliki dio starog znanja i manji dio novostečenog znanja. Naime, njome ćemo uvidjeti što učenici misle o svome znaju – „starom" i „novom". Dakle, na kraju sata učenicima ćemo podijeliti nastavne listiće na koja moraju napisati tri stvari koje su naučili na ovome satu, dvije stvari s kojima još uvijek imaju problema i jednu stvar koju bi željeti naučiti. Učenici će o odgovorima razmisliti kod kuće i ispunjeni nastavni listić sljedeći sat predati nastavniku. Osim što će nastavnik dobiti informacije iz prve ruke na čemu još treba poraditi s učenicima, ova će aktivnost potaknuti i učenike da razmišljaju o svome znanju što ih može motivirati da spomenute „rupe" u znanju što prije pokrpaju. U nastavnom listiću 6.3.1. prikazan je primjer mogućih izjava učenika o vlastitom znanju.

Nastavni listić 6.3.1. *Strategija 3-2-1*

Na prazne crte upiši:

1) 3 činjenice koje si danas naučio/la:
   a) Kako graf translatiram duž osi apsicisa.
   b) Kako graf translatiram duž osi ordinata.
   c) Kako graf preslikavam osnom simetrijom preko osi apscisa.

2) 2 činjenice s kojima još uvijek imam problema
   a) Zapisati eksponencijalnu funkciju s bazom manjom od 1 kao eksponencijalnu funkciju s bazom većom od 1.
   b) Riješiti se minusa u eksponentu eksponencijalne funkcije.

3) 1 činjenicu koju želim naučiti

Skicirati graf složene eksponencijalne funkcije u jednom koraku.

Opisana strategija je vrlo korisna iz više razloga. Prvo, učenike će prisiliti da kod kuće, gdje nisu vremenski ograničeni promišljaju o vlastitom znanju i neznanju, što ih može potaknuti da se što prije suoče s problemima. S druge strane, nastavniku može otkriti da jedan dio učenika ima poteškoća s istim dijelom gradiva na čemu će onda nastavnik poraditi. Ta informacija nastavnika može natjerati i da preispita svoje poučavanje vezano za navedeni dio i u sljedećim generacijama poradi na nedostacima. Velika prednost ove strategije je njena jednostavnost. Za njenu provedbu nije potrebno više od 2 minute (podjela nastavnih listića), a rezultati su od velike koristi i učenicima i nastavnicima.

6.4 Strategija „DA ili NE"

Sljedeća strategija formativnog vrednovanja predviđena je za provođenje nakon obrađivanja monotonosti eksponencijalne funkcije. Ovdje će učenici uspoređivati vrijednosti dviju potencija. Naime, nastavnici će pisati nejednakosti na ploči, jednu po jednu, a na učenicima je da procjene je li napisana nejednakost ispravna ili nije. U tu svrhu svakom ćemo učeniku podijeliti dvije kartice – jedna kartica na kojoj piše „DA", druga na kojoj piše „NE". Dakle, nastavnik na ploču napiše nejednakost tipa $\frac{1}{5^{-3}} < 5^4$. Učenici zatim imaju zadano vrijeme nakon čijeg isteka, na znak nastavnika, učenici podižu karticu „DA" ili „NE", ovisno o odgovoru kojeg smatraju točnim. Važno je napomenuti da učenici podižu kartice u istom trenutku kako dio učenika ne bi „prepisivao" odgovore drugih učenika. Aktivnost počinjemo jednostavnim zadacima s prirodnim eksponentima koje učenici znaju otprije i prelazimo na složenije gdje imamo dva negativna cjelobrojna eksponenta, pa kombinaciju negativnog i pozitivnog eksponenta te na kraju razlomka s pozitivnim i negativnim eksponentima. Aktivnost je predviđena za zadnje minute sata i doprinosi ostvarivanju ishoda učenja A3, C2 i 2. Za njenu provedbu, nastavnik treba osigurati dvije kartice za svakog učenika, te standardno – pribor za pisanje po ploči.

Primjer nejednakosti:

1. $3^4 > 3^6$
2. $4^2 < 4$
3. $2^0 < 2$
4. $1^4 > 1^6$
5. $3^{-\sqrt{2}} < 3^{-\sqrt[3]{2}}$
6. $6^{-4} < 6^{-\sqrt{15}}$
7. $4^{-2} > 4^{-1}$
8. $\frac{1}{3^{\pi}} < \frac{1}{3^{3.14}}$
9. $\frac{1}{4^{-1}} < \frac{1}{4^2}$
10. $\frac{1}{5^{-3}} > \frac{1}{5^{-2}}$
11. $\frac{1}{3^{-3}} < 3^2$
12. $2^{-2} > \frac{1}{2^{-3}}$

Točni odgovori:

1) Odredimo vrijednosti potencija: $3^4 = 81$ i $3^6 = 729$.
   Očito ne vrijedi $81 > 729$.
2) Odredimo vrijednost potencije: $4^2 = 16$.
   Očito ne vrijedi $16 < 4$.
3) Odredimo vrijednost potencije: $2^0 = 1$.
   Očito vrijedi $1 < 2$.
4) Odredimo vrijednosti potencija: $1^4 = 1$ i $1^6 = 1$.
   Očito ne vrijedi $1 > 1$.
5) S lijeve i desne strane nejednakosti imamo potenciju s bazom većom od 1. Od dviju potencija s istom bazom koja je veća od 1, veća je ona s većim eksponentom. Budući da je broj $-\sqrt[3]{2}$ veći od $-\sqrt{2}$, nejednakost vrijedi.
6) Od dviju potencija s istom bazom koja je veća od 1, veća je ona s većim eksponentom. Budući da je $-\sqrt{15} > -4$, nejednakost vrijedi.
7) Odredimo vrijednosti potencija: $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$ i $4^{-1} = \frac{1}{4}$.

Od dva pozitivna razlomka s brojnikom jedan, veći je onaj s manjim nazivnikom. Dakle, nejednakost ne vrijedi.

8) Od dviju potencija iste baze manje od 1, manja je ona s većim eksponentom. Budući da je $3.14 < \pi$, nejednakost vrijedi.

9) Odredimo vrijednost potencija: $\frac{1}{4^{-1}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ i $\frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

Nejednakost očito ne vrijedi.

10) Odredimo vrijednost potencija: $\frac{1}{5^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{5^3}} = 5^3 = 125$ i $\frac{1}{5^{-2}} = \frac{1}{\frac{1}{5^2}} = 5^2 = 25.$

Nejednakost očito vrijedi.

11) Odredimo vrijednost potencija u nazivniku: $\frac{1}{3^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{3^3}} = 3^3 = 27$ i $3^2 = 9.$

Nejednakost očito ne vrijedi.

12) Odredimo vrijednost potencija u nazivniku: $2^{-2} = \frac{1}{4}$ i $\frac{1}{2^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{2^3}} = 2^3 = 8.$

Nejednakost očito ne vrijedi.

Da bi ova aktivnost bila potpuna, nužno je da svi ovi odgovori budu obrazloženi. U tu svrhu ćemo nakon svakog primjera prozvati jednog od učenika s netočnim odgovorom i jednog učenika s točnim odgovorom. Za učenika i nastavnika može biti vrlo korisno čuti razmišljanje koje učenika nije dovelo do točnog odgovora. Na nastavniku je da s učenikom proanalizira njegovo razmišljanje korak po korak, uoči u kojem je trenutku razmišljanje skrenulo s ispravnog puta, zaustavi se, objasni i nastavi ispravnim putem. S druge strane, važno je i da učenik s ispravnim odgovorom prezentira tijek razmišljanja koji ga je doveo do točnog odgovora. Često je učenicima bliži način razmišljanja njihovih vršnjaka pa će im i njihovo objašnjenje biti prihvatljivije. Ne treba zanemariti niti vjerojatnost da je učenik koji je ispravno odgovorio u svom razmišljanju imao i neku grešku (ili čak i više grešaka). Kod ovakvih pitanja gdje imamo dvije mogućnosti za odgovor, često se događa da učenika dvije greške ipak dovedu do točnog odgovora. Imajući sve to u vidu, možemo reći da je diskusija koja slijedi nakon prikazanih odgovora čak i važnije od samih odgovora

.

6.5 Strategija „Izbaci uljeza“¸

U ovoj ćemo aktivnosti učenicima ponuditi 4 eksponencijalne funkcije po zadatku, zadane na različite načine: tablično i pravilom pridruživanja. Također, ako se aktivnost radi nakon što su učenici otkrili graf eksponencijalne funkcije, u ovim zadacima možemo koristiti i grafički prikaz funkcije.

Njihov je zadatak izbaciti uljeza, to jest prepoznati padajuću među rastućim funkcijama i obrnuto. U zaključivanju i obrazlaganju koristit će ishode učenja A3, B1, B3, 4 i 5. Počinjemo s jednostavnijim primjerima gdje su sve funkcije prikazane u istom zapisu, a kasnije prelazimo na složenije primjere gdje ćemo kombinirati više različitih zapisa u istom zadatku. I ovdje ćemo koristiti tehnologiju. Dakle, nastavnik će zadatke prikazivati projiciranjem Mentimetra, a učenici će koristeći pametne telefone birati funkcije za koje misle da su uljez. Nakon svakog zadatka slijedi diskusija kako bismo razriješili sve nejasnoće. Cilj ove aktivnosti je ponoviti različite zapise eksponencijalne funkcije i provjeriti naučeno iz prethodne aktivnosti, vezano za monotonost funkcije. Ukoliko nastavnik želi ovu aktivnost provesti u ovom obliku, osim pripremljene prezentacije, mora osigurati i pametne telefone za učenike koji eventualno nemaju. Iako bi trebalo biti očito, naglasit ću da je rad u ovoj aktivnosti individualan.

Primjer zadataka:

1) a) $f(x) = 5^x$ b) $f(x) = 1.5^x$ c) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ d) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

U slučajevima a), b) i c) baza eksponencijalne funkcije je veća od 1. Funkcije su rastuće. U slučaju d), baza eksponencijalne funkcije je manja od 1. Funkcija je padajuća. Uljez je funkcija u odgovoru d)

2)

x	-1	0	1	2
$f(x)$	0.5	1	2	4

A)

x	-1	0	1	2
$f(x)$	0.25	1	4	16

B)

x	-1	0	1	2
$f(x)$	5	1	0.2	0.04

C)

x	-1	0	1	2
$f(x)$	$0.\dot{3}$	1	3	9

D)

Budući da su argumenti funkcija ($x -$ evi) u svim tablicama poredani od najmanjeg prema najvećem, lako je razlikovati rastuću od padajuće funkcije. Naime, kod rastućih funkcija, vrijednosti funkcija ($f(x)$) će također biti poredane od najmanje prema najvećoj. U a), b) i d) slučaju imamo rastuće funkcije, u c) slučaju padajuću funkciju. Uljez je funkcija u slučaju c).

3) a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ b) $f(x) = 3^{-x}$ $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x}$ d) $f(x) = 0.3^{x}$

Ovdje imamo negativne predznake u eksponentu. U takvim slučajevima gledamo bazu recipročnu zadanoj bazi i onda ju uspoređujemo s 1. Dakle, recipročna baza u a) slučaju je 2, u b) slučaju $\frac{1}{3}$, u c) slučaju $\frac{1}{3}$ i u d) slučaju 0.3, to jest, sve su funkcije padajuće osim funkcije u odgovoru a) koja je rastuća. Uljez je funkcija u odgovoru a).

4)

x	-1	0	1	2
$f(x)$	2	1	0.5	0.25

A)

x	-1	2	1	0
$f(x)$	$0.\dot{3}$	9	3	1

B)

x	0	2	1	-1
$f(x)$	1	16	4	0.25

C)

x	1	2	-1	0
$f(x)$	2	4	0.5	1

D)

Poredamo li argumente od najmanjeg do največeg, dobivamo istu situaciju kao u trećem primjeru. Sve funkcije osim funkcije u slučaju a) su rastuće. Dakle, uljez je a).

5) **a)** $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ **b)** $f(x) = -3^{-x}$ **c)** $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x}$ **d)** $f(x) = -0.3^{-x}$

Zanemarimo li ovaj minus u funkciji u slučaju a) dobit ćemo funkciju ekvivalentnu funkciji $g(x) = 2^x$, što je rastuća funkcija. Dodavanjem minusa ispred baze, funkcija postaje padajuća.

Zanemarimo li minus u funkciji u slučaju b) dobit ćemo funkciju ekvivalentnu funkciji $g(x) = 3^{-x}$što je padajuća funkcija. Dodavanjem minusa ispred baze, funkcija postaje rastuća.

Funkcija u slučaju c) ima bazu manju od 1 pa je padajuća.

Zanemarimo li minus u funkciji u slučaju d) dobit ćemo funkciju ekvivalentnu funkciji $g(x) = 0.3^{-x}$što je rastuća funkcija. Dodavanjem minusa ispred baze, funkcija postaje padajuća. Dakle, uljez je rastuća funkcija među padajućima, to jest funkcija u slučaju b).

6)

$\boxed{f(x) = 5^{-x}}$

A)

x	2	0	-1	1
$f(x)$	0.04	1	5	0.2

B)

$\boxed{f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x}$

C)

x	0	2	1	-1
$f(x)$	1	16	4	0.25

D)

Funkcija iz a) zadatka ekvivalentna je funkciji $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ što je padajuća funkcija. Poredamo li argumente funkcije iz tablice od najmanjeg prema najvećem, vidjet ćemo da će vrijednosti funkcije biti posložene od najveće prema najmanjoj pa zaključujem da je funkcija u odgovoru b) padajuća. Funkcija u odgovoru c) je padajuća jer joj je baza manja od 1. Poredamo li argumente funkcije u odgovoru d) od najmanjeg prema najvećem, vrijednosti funkcija odgovarajućih argumenata bit će posložene također od najmanje prema najvećoj što znači da je funkcija rastuća. Uljez je rastuća funkcija među padajućim. Dakle, uljez je funkcija u odgovoru d).

Opisana strategija istovremeno obuhvaća i aktivnost vezanu za graf funkcije i aktivnost vezanu za monotonost. Aktivnost koja uključuje korištenje pametnih telefona i ovakvu primjenu tehnologije učenicima je vrlo zanimljiva. Samim time za očekivati je njihov veći angažman od uobičajenog što je jedan od najvećih pluseva kod ove aktivnosti. Osim toga, učenici će primjenjivati definicije rastuće i padajuće funkcije na funkciji zadanoj pravilom pridruživanja, tablično i grafički. Također, povezivat će različite zapise funkcija.

Kao što smo spomenuli, aktivnost obavezno uključuje i prozivanje više učenika nakon odgovora kako bi obrazložili svoje mišljenje. Osim što će učenici tako primjenjivati znanje vezano za eksponencijalnu funkciju, argumentiranjem će učiti i matematički se ispravo izražavati. Uvijek je dobro čuti i mišljenje učenika koji nije točno odgovorio na pitanje, to jest, u ovom slučaju izbacio uljeza.

Kako bismo osigurali individualnost u ovoj aktivnosti, učenicima ćemo nakon prikazanog pitanja dati određeno vrijeme u kojem moraju razmisliti o točnom odgovoru i onda, na znak nastavnika, svi u isti tren odabrati odgovor za koji smatraju da je točan.

U sljedećoj aktivnosti vraćamo se na proučavanje grafa eksponencijalne funkcije.

6.6 Strategija „Crni Petar“

Prilog 6.6.1. *Kartice „Crni Petar“*

$3 \cdot 36^x + 6 \cdot 6^x + 9 = 0$	$t = 6^x$
$3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 3 = 0$	$t = 3^x$

$\left(\frac{4}{9}\right)^x - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 8 = 0$	$t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$
$5^{2x} - 4 \cdot 5^x - 5 = 0$	$t = 5^x$
$4^x + 4 \cdot 2^x - 3 = 0$	$t = 2^x$
$49^x + 2 \cdot 7^x - 8 = 0$	$t = 7^x$
$-3 \cdot \left(\frac{1}{225}\right)^x + 4 \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^x - 5 = 0$	$t = \left(\frac{1}{15}\right)^x$
$2 \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^x - 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x - 8 = 0$	$t = \left(\frac{3}{5}\right)^x$
$2 \cdot 900^x + 5 \cdot 30^x + 4 = 0$	$t = 30^x$
$144^x + 2 \cdot 12^x + 3 = 0$	$t = 12^x$
$15 \cdot 400^x + 5 \cdot 20^x + 1 = 0$	$t = 20^x$
$15 \cdot 5^x + 5 \cdot (2.5)^x + 1 = 0$	

Ovom strategijom želimo vidjeti jesu li učenici razumjeli glavni korak u rješavanju ovog tipa jednadžbi, to jest znaju li koji izraz trebaju zamijeniti novom varijablom. Kao što smo već rekli, u ovom se tipu zadatka eksponencijalna jednadžba svodi na kvadratnu koju bi učenici na ovoj razini već trebali znati riješiti. Zato nam je sada u cilju da učenici savladaju onaj prvi korak, to jest uvođenje supstitucije koji će ih dovesti do kvadratne jednadžbe što se poklapa s ishodima učenja A4 i B1. Kako bi u što kraćem vremenu bili što učinkovitiji, aktivnost „Crni Petar“ čini se kao dobra prilika da učenici provjere i utvrde svoje znanje na što više primjera, a mi dobijemo povratnu informaciju o njihovom savladavanju ovog tipa jednadžbi. Dakle, učenike ćemo podijeliti u parove i podijeliti im kartice. Broj kartica mora biti neparan, odnosno, sve osim jedne kartice moraju imati svoj par. Par kartica činit će eksponencijalna jednadžba i izraz oblika $t = a^x$, to jest supstitucija. Karta koja ne bude imala svoj par je „Crni Petar“. Karte se na početku igre raspoređuju tako da jedan od učenika u paru dobije jednu kartu više. Učenik koji ima jednu kartu manje počinje s izvlačenjem nasumične karte od drugog učenika. Učenici naizmjence izvlače karte. Sve parove karata koje imaju izdvajaju i izbacuju iz igre. Igra traje dok se sve karte ne upare. Onaj učenik kod kojeg je na kraju igre u rukama ostao „Crni Petar“ je izgubio.

Prikazan je još jedan primjer strategije formativnog vrednovanja koji će biti od velike koristi i učenicima i nastavnicima, a natjecateljski i zabavni karakter strategije trebao bi jamčiti dobru zainteresiranost za njenu provedbu. Kroz opisanu strategiju učenici će na 12 primjera imati prilike vidjeti na koji se način radi supstitucija. Dakle, čak i ako strategiju počnu ne znajući što trebaju sparivati, do kraja bi kroz ovih 12 primjera i natjecateljski duh trebali naučiti. Što se tiče nastavnika, obilazeći razred lako vidi koji učenik dobro sparuje, koji učenik u rukama možda drži par kartica za koje ne zna da čine par ili slično. Sreća će dodatno začiniti igru pa neki parovi možda stignu odigrati i više od samo jedne partije koliko će možda igrati par kod kojeg su sreća i prepoznavanje para kartica izostali.

6.7 Strategija „Dva kuta“

Slijedi nam strategija formativnog vrednovanja „dva kuta“. Koristeći spomenutu strategiju, provjerit ćemo jesu li učenici shvatili i znaju li primijeniti novootkrivene veze u eksponencijalnoj funkciji, tj. ispunjavaju li ishode učenja A3, C1 i C3.

Dakle, sve ćemo učenike pozvati pred ploču na hrpu i pojasniti im pravila strategije. Na lijevi kraj ploče napisat ćemo slovo I (ispravno), a na desni kraj slovo N (neispravno). Učenicima ćemo pročitati izjavne rečenice koje mogu i ne moraju biti točne. Učenici će istovremeno stati uz lijevi ili desni kraj ploče, ovisno o tome smatraju li pročitanu rečenicu točnom ili netočnom. Kada svi učenici zauzmu željene pozicije, prozvat ćemo jednog učenika iz svake skupine da obrazloži zašto smatra da je dana tvrdnja točna ili netočna. Učenicima je dopušteno promijeniti stranu ukoliko ih u vrijeme rasprave ostali uvjere u suprotno. Nastavnik može prijeći na sljedeću izjavnu rečenicu kada svi učenici zauzmu ispravnu stranu, to jest kada se sve učenike uvjeri u ispravnu tvrdnju. Osim markera (ili krede) za pisanje po ploči, za strategiju je potrebno i pripremiti desetak tvrdnji s kojima ćemo raditi. Predviđeno vrijeme za trajanje aktivnosti je oko 10 minuta.

Primjeri tvrdnja:

1. Neka su $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ funkcije zadane pravilom pridruživanja $f(x) = 10^x$ i $g(x) = (0.1)^x$. Grafovi eksponencijalnih funkcija f i g simetrični su s obzirom na os ordinatu.
2. Neka su $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ funkcije zadane pravilom pridruživanja $f(x) = (0.5)^{-x}$ i $g(x) = 2^x$. Grafovi funkcija f i g su identični.
3. Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ funkcija zadana pravilom pridruživanja $f(x) = -10^x$. Graf funkcije f siječe os ordinatu u točki $(0, 1)$.
4. Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ funkcija zadana pravilom pridruživanja $f(x) = -10^{-x}$. Graf funkcije f siječe os ordinatu u točki $(0, 1)$.

5. Neka su $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ i $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ funkcije zadane pravilom pridruživanja $f(x) = -3^{-x}$ i $g(x) = -3^x$ Grafovi funkcija f i g simetrični su s obzirom na os ordinatu.
6. Neka je $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ funkcija zadana pravilom pridruživanja $f(x) = 2^{-x}$. Funkcija $f(x) = 2^{-x}$ poprima pozitivne vrijednosti za svaki $x \in \mathbb{R}$.
7. Neka je $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ funkcija zadana pravilom pridruživanja $f(x) = 4^x$. Tada je $f(-x) = (-4)^x$.
8. Za svaki $x < 0$ vrijedi $2^x > 3^x$.
9. Neka je $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ funkcija zadana pravilom pridruživanja $f(x) = (0.2)^{-x}$. Tada vrijedi $f(-3) < f(-2)$.
10. Neka je $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ funkcija zadana pravilom pridruživanja $f(x) = -3^{-x}$. Tada vrijedi $f(-3) < f(-2)$.

Obrazloženja:

1. Grafovi eksponencijalnih funkcija f i g simetrični su s obzirom na os ordinatu. (Ispravno).

   Funkcije f i g su eksponencijalne funkcije s recipročnim bazama pa im je graf simetričan s obzirom na os ordinatu.
2. Grafovi f i g su identični. (Ispravno)

   Graf funkcije f je simetričan grafu funkcije $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ zadan pravilom pridruživanja $h(x) = (0.5)^x$ s obzirom na os ordinatu, a graf $h(x) = (0.5)^x$ je također simetričan grafu funkcije g s obzirom na os ordinatu jer imaju recipročne baze. Dakle, grafovi f i g su identični.
3. Graf eksponencijalne funkcije f siječe os ordinatu u točki $(0, 1)$. (Neispravno)

   Funkcija f poprima samo negativne vrijednosti (jer je $10^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$) pa vrijednost funkcije ne može biti jednaka 1.
4. Graf eksponencijalne funkcije f siječe os ordinatu u točki $(0, 1)$. (Neispravno)

   Funkcija f poprima samo negativne vrijednosti (jer je $10^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$) pa vrijednost funkcije ne može biti jednaka 1.
5. Grafovi f i g simetrični su s obzirom na os ordinatu.

(Ispravno)

Skiciranjem grafova obiju funkcija dolazimo do odgovora.

6. Funkcija f poprima pozitivne vrijednosti za svaki $x \in \mathbb{R}$.

   (Ispravno)

   Funkciju f zadanu pravilom pridruživanja $f(x) = 2^{-x}$ možemo zapisati i kao $f(x) = (\frac{1}{2})^x$, a znamo da opće eksponencijalna funkcija $f(x) = a^x$, $a > 0, a \neq 1$ poprima samo pozitivne vrijednosti.

7. Ako je $f(x) = 4^x$ tada je $f(-x) = (-4)^x$.

   (Neispravno)

   Ako je $f(x) = 4^x$ tada je $f(-x) = 4^{-x} \neq (-4)^x$.

8. Za svaki $x < 0$ vrijedi $2^x > 3^x$.

   (Ispravno)

   Skiciramo li grafove, vidjet ćemo da tvrdnja vrijedi.

9. Ako je $f(x) = (0.2)^{-x}$ onda je $f(-3) < f(-2)$.

   (Ispravno)

   Funkcija $f(x) = (0.2)^{-x} = (\frac{1}{5})^{-x} = 5^x$ što je rastuća funkcija pa tvrdnja vrijedi.

10. Ako je $f(x) = -3^{-x}$ onda je $f(-3) < f(-2)$.

    (Ispravno)

    Skiciramo li graf funkcije f, vidjet ćemo da je funkcija f rastuća pa tvrdnja vrijedi.

Svaki tip aktivnosti koji ne uključuje pisanje i sjedenje u klupi učenicima je draži od uobičajenih. Isto vrijedi i za ovaj. Veća zainteresiranost učenika za aktivnost trebala bi jamčiti i njihov veći angažman, a u konačnici bolje znanje i razumijevanje.

Međutim, navedene rečenice nisu nimalo jednostavne i od učenika zahtijevaju visoku razinu koncentracije, pažnje i znanja. Izjavne rečenice svakim sljedećim primjerom postaju složenije i kognitivno zahtjevnije. Upravo zato, u nekim ćemo primjerima izjavne rečenice ili njihove dijelove trebati pisati na ploču kako bi učenicima bilo jednostavnije.

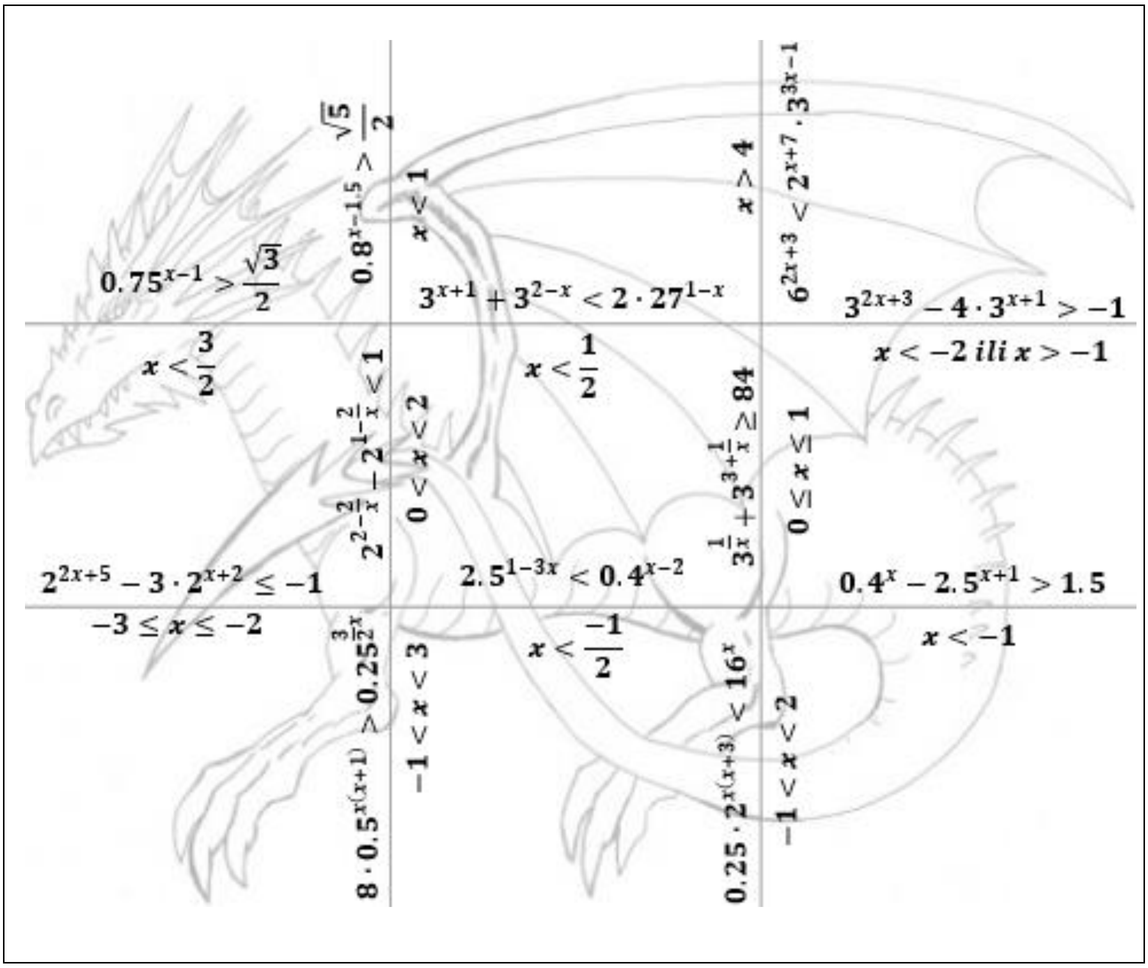
Kao što sam i napisao, nakon što se svi učenici opredijele za odgovor, nužno je iz obje skupine prozvati učenika (ili više njih) da obrazlože zašto se s tvrdnjom slažu ili ne slažu. Argumentiranje pred ostalim učenicima učenike će potaknuti na precizno i ispravno matematičko izražavanje. Na nastavniku je da na svaku grešku reagira, ispravi i objasni. Sustavno inzistiranje nastavnika na preciznom matematičkom izražavanju doprinijet će boljem razumijevanju matematike. Za očekivati je da će se učenici tijekom rasprave seliti iz jedne skupine u drugu. I njih je poželjno pitati što ih je potaknulo na promjenu mišljenja.

Kroz ovakav oblik aktivnosti, nastavnik lako može vidjeti koji učenik zaista razmišlja i odabire (makar i pogrešnu) stranu, a koji se učenik „šverca“, to jest prati odabir većine ili pojedinih učenika. Učenicima primjeri iz izjavnih rečenica mogu poslužiti da još jednom utvrde veze između „sličnih“ zapisa eksponencijalnih funkcija, testiraju svoje znanje i, na kraju, nauče nešto novo.

6.8 Strategija „Slagalica“

Sljedeću aktivnost iskoristit ćemo za uvježbavanje rješavanja eksponencijalnih nejednadžbi što će doprinijeti ostvarivanju ishoda učenja D1 i 6. Dakle, učenike ćemo rasporediti u parove i dat ćemo im 9 kartica na čijim rubovima pišu nejednažbe ili rješenja nejednadžbi. Cilj je da svaki par posloži kartice tako da se jednadžba koja se nalazi na jednoj kartici i njeno rješenje koje se nalazi na drugoj kartici spoje. Pravilnim spajanjem, to jest, rješavanjem eksponencijalnih nejednadžbi kartice će se spojiti u smislenu sliku. Iako slika podsjeća na dječju igru, rješavanjem ovih jednadžbi učenici će uvidjeti da posao nije nimalo jednostavan. Nastavniku je zadatak obilaziti razred, pomagati i spriječiti eventualne pokušaje „varanja“ jer postoji mogućnost da neki parove slože slagalicu bez rješavanja nejednadžbi. Aktivnost je predviđena za cijeli sat uvježbavanja eksponencijalnih nejednadžbi, a materijal potreban za ovu aktivnost je pribor za pisanje i kartice.

Nastavni listić 6.8.1. *Slagalica*



Učenike svakako treba upozoriti da poanta ovog zadatka nije slaganje slagalice nego rješavanje eksponencijalnih nejednadžbi. Iako nagrada paru koji najbrže složi slagalicu može biti dobar poticaj da se sve učenike prisili na rad, obavezno je postaviti i uvjet da par ima riješene sve nejadnažbe. Na nastavniku je da obilazi razred, potiče učenike na rad, pomaže im po potrebi, ali i sve bilježi u pripremljene rubrike. Kod rješavanja je moguće da ćemo nailaziti na različite strategije: učenici raspodjele zadatke tako da svaki riješi dio zadataka, jedan učenik rješava dok drugi slaže i dr.

Važno je da slagalica obuhvati što je moguće više različitih tipova zadataka. Ovakav tip aktivnosti može biti dobar način za uvježbavanje prije ispita.

Literatura

[1] Cindrić M., Miljković D., Strugar V., (2016.), *Didaktika i kurikulum*, Zagreb, IEP d.o.o.

[2] Čižmešija A. (2015./2016.), *Cjelobrojne potencije broja 10 i znanstveni zapis broja. Potencije,*

[3] Čižmešija A. (2015./2016.), *Izgradnja eksponencijalne funkcije*, predavanje iz kolegija *Metodika nastave matematike 3*, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno – matematički fakultet

[4] Čižmešija A., Milin Šipuš Ž. (2016./2017.), *Abeceda vrednovanja u matematičkom obrazovanju*, predavanje iz kolegija *Vrednovanje u matematičkom obrazovanju*

[5] Dakić B., Elezović N., (2015), *Matematika 2, udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, 2. dio*, Zagreb, Element.

[6] Gračan M., (2016./2017.), *Eksponencijalne jednadžbe i nejednadžbe*, seminarski rad iz kolegija *Vrednovanje u matematičkom obrazovanju*

[7] Hunjek M., (2015.), *Vrednovanje kao strategija učenja matematike*, diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno – matematički fakultet, Zagreb

[8] Knezović M., (2016./2017.), *Eksponencijalna funkcija*, seminarski rad iz kolegija *Vrednovanje u matematičkom obrazovanju*

[9] Kurepa S., (1997.), *Matematička analiza 1 diferenciranje i integriranje (prerađeno i prošireno izdanje)*, Zagreb, Školska knjiga

[10] Lalović Z., (2009.), *Naša škola: Metode učenja/nastave u školi*. Podgorica, Zavod za školstvo

[11] Matić T., (2014.), *Metode aktivnog učenja u razrednoj nastavi*, diplomski rad, Sveučilište Josipa Juraja Strossmayera u Osijeku, Osijek

[12] Ministartsvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske, *Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje*, Zagreb, 2010.

[13] Narodne novine (2010). *Pravilnik o načinima, postupcima i elementima vrednovanja u osnovnoj i srednjoj školi* (NN 112/2010) Preuzeto s https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2010_09_112_2973.html (03.01.2018.)

[14] Popham W. J., (2013.), *Classroom assessment: What teachers need to know*, Prentice Hall
predavanje iz kolegija *Metodika nastave matematike 2*, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno – matematički fakultet

[15] Soldić D., (2014.), *Strategije formativnog vrednovanja u nastavi matematike u osnovnoj i srednjoj školi*, diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno – matematički fakultet

[16] Šišić D., Šišić S., (2011.), *Matematika, priručnik za pripremu ispita na državnoj maturi, osnovna i viša razina*, Zagreb, Profil

[17] Tobey C. R., Keeley P. D. (2011), *Mathematics Formative Assesment: 75 Practical Strategies for Linking Assessment, Instruction, and Learning*, Corwin Press & NCTM, 2011.

Sažetak

Prema aktualnom nastavnom planu i programu, pojam potencije s realnim eksponentom te eksponencijalne funkcije i njihova primjena zauzimaju značajan prostor u nastavi matematike drugog razreda većine programa srednjoškolskog obrazovanja u Hrvatskoj. U ovom diplomskom radu dani su teorijska osnova te konkretni primjeri učinkovitih učeničkih aktivnosti na otkrivanju i primjeni pojmova i zakonitosti vezanih uz ovu klasu funkcija, utemeljenih na konstruktivističkim teorijama učenja, kao i primjeri strategija formativnog vrednovanja u svrhu poboljšanja učenja i učeničkog razumijevanja ovih nastavnih sadržaja.

Summary

According to the current curriculum, the concepts of exponentiation and the exponential functions and their applications have a significant role in the second grade mathematics classes in most of the secondary education programs in Croatia. The paper contains a theoretical basis and specific examples of efficient learning activities in discovering and applying the notions related to the range of these functions, which are based on the constructivist learning theory. Also, the paper will contain a paradigm of strategies in formative assessment, which aims for both the improvement of adoption of these contents, and also its comprehension.