SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ante Čeperić

REPREZENTACIJE VIRASOROVE ALGEBRE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc.
Dražen Adamović

Zagreb, lipanj, 2015

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Virasorova algebra je beskonačnodimenzionalna Liejeva algebra koja je dobila ime po argentinskom fizičaru Miguelu Angelu Virasoru. U fizici se Virasorova algebra pojavljuje u teoriji struna i konformnoj teoriji polja. No i prije Virasora, Virasorova algebra je bila poznata matematičarima kao univerzalno centralno proširenje Wittove algebre. Wittova algebra $\mathrm{Witt} = \mathrm{Der}\,\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ ima bazu $L_n = -z^{n+1}\frac{d}{dz}$, $n \in \mathbb{Z}$. Virasorova algebra $\mathrm{Vir} = \mathrm{Witt} \oplus \mathbb{C}C$ je centralno proširenje sa komutatorom danim relacijama:

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \delta_{n+m,0}\frac{m^3-m}{12}C\ .$$

U prvom poglavlju će nam glavni cilj biti prikazati dio općenite teorije Liejevih algebri koji ćemo koristiti u ovom radu (uglavnom pratimo [4]). Za Liejevu algebru L definirat ćemo omotačku algebru $U(L)$; o njoj možemo razmišljati kao o univerzalnoj asocijativnoj algebri s jedinicom koja sadrži L kao Liejevu podalgebru. Zatim ćemo pokazati nekoliko činjenica vezanih uz centralna proširenja Liejevih algebri. Najvažnija od njih je korespondencija između centralnih proširenja Liejeve algebre i određenih bilinearnih funkcija (tzv. 2-kociklusa) na njoj.

U drugom poglavlju ćemo definirati Wittovu i Virasorovu algebru i uz pomoć te korespondencije pokazati da je Virasorova algebra univerzalno centralno proširenje Liejeve algebre. Definirat ćemo i Heisenbergovu algebru $\mathcal{H}$ i pokazati kako se $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$ može shvatiti kao $\mathcal{H}$-modul (tzv. Fockov modul).

Treće poglavlje sadrži glavni dio rada; u njemu se bavimo reprezentacijama Virasorove algebre. Prije prvih primjera ćemo iskazati neke općenite rezultate i definicije vezane uz njih; važna definicija će biti definicija težinskog rastava. Za reprezentaciju Virasorove algebre V kažemo da ima težinski rastav ako vrijedi:

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$$

gdje je $\mathfrak{h} = \mathbb{C}C \oplus \mathbb{C}L_0$, a $V_\lambda = \{v \in V : x.v = \lambda(x)v, \forall x \in \mathfrak{h}\}$. $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ za koje je $V_\lambda \neq 0$ zovemo težinama, a te V_λ težinskim potprostorima. Pokazat ćemo da je unitarna reprezentacija Virasorove algebre koja ima težinski rastav u kojoj su težinski potprostori konačnodimenzionalni potpuno reducibilna.

Svaka reprezentacija Wittove algebre je ujedno i reprezentacija Virasorove algebre centralnog naboja 0. Prvo ćemo promatrati tzv. međuserije, reprezentacije Virasorove algebre koji su na određeni način generalizacije prirodnog djelovanja Wittove algebre na $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$.

Potom ćemo promatrati jednu familiju reprezentacija Virasorove algebre na kojoj C više ne djeluje trivijalno. Ona je usko vezana sa djelovanjem Heisenbergove algebre na Fockov modul. Heisenbergova algebra je dana sljedećim relacijama:

$$[a_n, a_m] = \delta_{n+m,0} nK, \quad [a_n, K] = 0, \; n, m \in \mathbb{Z} \, .$$

Preciznije, pokazat ćemo da se nad Fockovim modulom L_n mogu prikazati kao beskonačne sume elemenata Heisenbergove algebre:

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} : a_k a_{n-k} : \; . \tag{1}$$

Pokazat ćemo kako svojstva (unitarnost, postojanje težinskog rastava, ireducibilnost) obadviju familija reprezentacija ovise o parametrima. Za reprezentaciju nad Fockovim modulom ćemo vidjeti da je ona reprezentacija najveće težine. Za V kažemo da je reprezentacija najveće težine (s najvećom težinom $(c, h) \in \mathbb{C}^2$ ako postoji vektor $v \in V$ takav da vrijedi

1. $C.v = cv$
2. $L_0.v = hv$
3. V je razapet s elementima oblika $L_{-i_k} \dots L_{-i_1}.v$, za $k \in \mathbb{N}, i_j \in \mathbb{N}, 0 \leq i_1 \dots \leq i_k$.

Definirat ćemo Vermaov modul $M(c, h)$ kao univerzalnu reprezentaciju najveće težine s najvećom težinom (c, h). Pokazat ćemo da $M(c, h)$ ima jedinstveni maksimalni podmodul $J(c, h)$; iz toga će slijediti da je $M(c, h)/V(c, h)$ jedinstveni prosti modul najveće težine s najvećom težinom (c, h). $J(c, h)$ se može shvatiti kao radikal određene bilinearne forme na $M(c, h)$, pa će nam biti korisna Kacova formula za determinantu koja pokazuje kako se može izračunati determinanta matrice te forme. Uz pomoć Kacove formule ćemo pokazati da je $M(c, h)$ ireducibilan za neke (c, h).

Zadnji paragraf trećeg poglavlja slijedi [5]; u njemu ćemo pokazati određene rezultate o strukturi Vermaovih modula. Bitni rezultati u ovom paragrafu bit će usko vezani za pojam singularnog vektora; to je nenul $v \in M(c, h)$ kojeg poništava svaki $L_n, n > 0$. Pokazat ćemo da je svaki netrivijalan podmodul Vermaovog modula generiran sa najviše dva singularna vektora, te da svaki nivo od $M(c, h)$ sadrži najviše jedan. Klasificirat ćemo najveće težine (c, h) u tri klase, i za svaku od njih pokazati kako izgledaju homomorfizmi s $M(c, h)$ u druge Vermaove module. To će nam omogućiti da opišemo kako izgledaju podmoduli od $M(c, h)$ ovisno o (c, h), posebno i maksimalni podmoduli $J(c, h)$.

U četvrtom poglavlju ćemo definirati verteks algebre. Ukratko, to su algebre formalnih redova endomorfizama nad nekim $\mathbb{Z}_+$-graduiranim vektorskim prostorom V. Pokazat ćemo kako "funkcije izvodnice" Heisenbergove i Virasorove algebre

$$a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}, \quad L(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$$

na određeni način generiraju dvije verteks algebre (Heisenbergovu, odnosno Virasorovu algebru) nad Fockovim modulom. Reinterpretirat ćemo relaciju (1) u kontekstu verteks algebri kao:

$$L(z) = \frac{1}{2} : a(z)^2 : \ .$$

Ovo poglavlje slijedi [2].

Poglavlje 1

Liejeve algebre i omotačke algebre

1.1 Liejeve algebre

U ovom dijelu ćemo navesti neke osnovne definicije i činjenice o Liejevim algebrama. Izlaganje u ovom poglavlju uglavnom slijedi [4].

Osnovne definicije

Definicija 1.1.1. *Vektorski prostor L nad poljem k s operacijom $L \times L \to L, (x, y) \to [x, y]$ zovemo Liejevom algebrom nad k ako vrijedi:*

1. $[\cdot\,, \cdot]$ *je bilinearna funkcija*
2. $[x, x] = 0, \ \forall x \in L$
3. *(Jacobijev identitet)* $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \ \forall x, y, z \in L$

Operaciju $[\cdot\,, \cdot]$ zovemo komutatorom.

Napomena 1.1.2. *Uzimamo da su svi vektorski prostori i Liejeve algebre u ovom poglavlju nad nekim fiksnim poljem k.*

Primjeri:

- Svaku asocijativnu algebru A možemo shvatiti kao Liejevu algebru s komutatorom $[a, b] = ab - ba, \ a, b \in A$.
- Neka je A asocijativna algebra. Tada $\mathrm{Der}\, A$, vektorski prostor derivacija nad A, možemo shvatiti kao Liejevu algebru s komutatorom $[\delta_1, \delta_2] = \delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1$.

Slijede neke osnovne definicije:

Definicija 1.1.3. *Neka su L_1, L_2 Liejeve algebre. Linearan operator $A : L_1 \to L_2$ zovemo homomorfizmom Liejevih algebri ako vrijedi:*

$$[Ax, Ay] = A[x, y], \ \forall x, y \in L_1 \ .$$

Injektivne homomorfizme zovemo monomorfizmima, surjektivne homomorfizme epimorfizmima a bijektivne homomorfizme izomorfizmima. Ako postoji izomorfizam Liejevih algebri $A : L_1 \to L_2$ tada algebre L_1 i L_2 zovemo izomorfnima i pišemo $L_1 \simeq L_2$.

Definicija 1.1.4. *Neka je L Liejeva algebra. Vektorski potprostor $V \leq L$ zovemo Liejevom podalgebrom ako je zatvoren na komutator.*

Definicija 1.1.5. *Neka su L_1, L_2 Liejeve algebre. Na vektorskom prostoru $L_1 \oplus L_2$ možemo definirati strukturu Liejeve algebre na sljedeći način:*

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = ([x_1, x_2], [y_1, y_2]) \ .$$

Tada $L_1 \oplus L_2$ zovemo direktnom sumom Liejevih algebri L_1 i L_2.

Definicija 1.1.6. *Neka je L Liejeva algebra. Podalgebru $I \leq L$ zovemo idealom ako je:*

$$[a, x] \in I, \ \forall a \in I, x \in L \ .$$

Neki primjeri ideala:

- Centar Liejeve algebre: $Z(L) := \{x \in L : [x, y] = 0, \forall y \in L\}$.
- Derivirani ideal: $[L, L] := \{[x, y] : x, y \in L\}$.
- Neka su L_1, L_2 Liejeve algebre. Tada su $L_1 \oplus 0, 0 \oplus L_2$ ideali u Liejevoj algebri $L_1 \oplus L_2$.

Također, lako se vidi da je za svaki homomorfizam Liejevih algebri $A : L_1 \to L_2$, Ker A ideal od L_1. Vrijedi i obratna tvrdnja: svaki ideal od L_1 je jezgra nekog homomorfizma Liejevih algebri. Da bi to pokazali, trebamo definirati kvocijentnu Liejevu algebru:

Propozicija 1.1.7. *Neka je L Liejeva algebra i I njen ideal. Tada je relacija $a \sim b \iff a - b \in I, a, b \in L$ relacija ekvivalencije. $L/\sim$ ćemo označavati sa L/I. Tada je L/I Liejeva algebra sa komutatorom danim s:*

$$[a + I, b + I] = [a, b] + I, a, b \in L \ .$$

L/I zovemo kvocijentna Liejeva algebra.

Sada slijedi da je svaki ideal I od L_1 jezgra prirodnog epimorfizma $L \to L/I, x \to x + I$. Vrijedi i prvi teorem o izomorfizmu za Liejeve algebre:

Teorem 1.1.8. *Neka su L_1, L_2 Liejeve algebre i $A : L_1 \to L_2$ homomorfizam Liejevih algebri. Tada je:*

$$L_1/Ker\, A \simeq Im\, A\ .$$

Dokazi ova dva teorema su standardni i mogu se naći u [4].

Ovdje ćemo definirati i jedan pojam koji će se koristiti u drugom poglavlju.

Definicija 1.1.9. *Neka je L Liejeva algebra. (Anti)linearna involucija na L je (anti)linearno preslikavanje $\omega : L \to L$ za koje vrijedi*

$$\omega([x, y]) = [\omega(y), \omega(x)],\ \ x, y \in L$$

te $\omega \circ \omega = id_L$.

Reprezentacije Liejevih algebri

Želimo promatrati djelovanja Liejevih algebri na vektorske prostore. Postoje dva ekvivalentna jezika za to: jezik reprezentacija i jezik modula.

Definicija 1.1.10. *Neka je L Liejeva algebra, a V vektorski prostor. Reprezentacija Liejeve algebre L na V je homomorfizam $\rho : L \to End\ V$.*

Svaka Liejeva algebra L ima prirodnu reprezentaciju $\mathrm{ad} : L \to \mathrm{End}\ L$ definiranu s:

$$\mathrm{ad}(x)(y) = [x, y],\ \ x, y \in L\ .$$

Da je ad uistinu homomorfizam Liejevih algebri slijedi iz Jacobijevog identiteta:

$$\begin{aligned}
[\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y)](z) &= \mathrm{ad}(x)(\mathrm{ad}(y)(z)) - \mathrm{ad}(y)(\mathrm{ad}(x)(z)) \\
&= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \\
&= [x, [y, z]] + [y, [z, x]] \\
&= -[z, [x, y]] \\
&= [[x, y], z] \\
&= \mathrm{ad}([x, y])(z)
\end{aligned}$$

Definicija 1.1.11. *Neka je L Liejeva algebra. L-modul je vektorski prostor V skupa s operacijom $L \times V \to V$ koju ćemo označavati $(x, v) \to x.v$ koja zadovoljava:*

$$\begin{aligned}
x.(\lambda v + \mu w) &= \lambda x.v + \mu x.w \\
(\lambda x + \mu y).v &= \lambda x.v + \mu y.v \\
[x, y].v &= x.(y.v) - y.(x.v)
\end{aligned}$$

za $x, y \in L, v, w \in V, \lambda, \mu \in k$.

Ova dva pojma su ekvivalentna: Neka je $\rho : L \to \operatorname{End} V$ reprezentacija, tada možemo V shvatiti kao L-modul sa djelovanjem

$$x.v = \rho(x)v, \ x \in L, v \in V \ .$$

Da ovako definirano djelovanje zadovoljava definiciona svojstva L-modula slijedi zbog toga što je ρ homomorfizam Liejevih algebri. Obratno, ako je V L-modul, definiramo $\rho : L \to \operatorname{End} V$ s:

$$\rho(x)v = x.v, \ x \in L, v \in V \ .$$

Odsada ćemo radi sažetosti davati definicije samo u jeziku modula Liejevih algebri. Pomoću gornje ekvivalencije se lako vide njihovi analogoni u jeziku reprezentacija.

Definicija 1.1.12. *Neka je L Liejeva algebra i V, W L-moduli. Linearan operator $A : V \to W$ zovemo homomorfizmom L-modula ako vrijedi:*

$$A(x.v) = x.(Av), \ x \in L, v \in V \ .$$

Definicija 1.1.13. *Neka je L Liejeva algebra, te V, W njeni moduli. Tada na $V \oplus W$ možemo uvesti strukturu L-modula na sljedeći način:*

$$x.(v, w) = (x.v, x.w) \ .$$

Taj L-modul zovemo direktnom sumom modula V i W.

Definicija 1.1.14. *Neka je L Liejeva algebra i V njen modul. Neka je $W \leq V$ potprostor od V invarijantan na djelovanje od L, to jest:*

$$x.w \in W, \ \forall x \in L, w \in W \ .$$

Tada W zovemo L-podmodulom od V i na njemu imamo prirodnu strukturu L-modula.

Primjeri:

- 0 i V zovemo trivijalnim podmodulima od V.
- Ako su V, W L-moduli, te $A : V \to W$ homomorfizam modula, tada je $\operatorname{Ker} A$ L-podmodul od V i $\operatorname{Im} A$ L-podmodul od W.
- $V \oplus 0$ i $0 \oplus W$ su podmoduli od $V \oplus W$.
- Kad Liejevu algebru L shvatimo kao modul nad samim sobom preko reprezentacije $\operatorname{ad} : L \to \operatorname{End} L$, podmoduli upravo odgovaraju idealima u L.

Definicija 1.1.15. *Neka je L Liejeva algebra. L-modul zovemo prostim ako su njegovi jedini podmoduli trivijalni.*

Napomena 1.1.16. *Reprezentaciju čije su jedine podreprezentacije trivijalne zovemo ireducibilnom reprezentacijom. Za reprezentaciju koja nije ireducibilna (tj. ima bar jednu netrivijalnu podreprezentaciju) kažemo da je reducibilna.*

Definicija 1.1.17. *Neka je L Liejeva algebra. L-modul V zovemo poluprostim ako je ispunjen jedan od ova dva ekvivalentna uvjeta:*

- *V se može prikazati kao direktna suma svojih podmodula.*
- *Za svaki podmodul W od V postoji njegov komplement: podmodul W' takav da je $V = W \oplus W'$.*

Napomena 1.1.18. *Reprezentaciju koju je direktna suma svojih ireducibilnih podreprezentacija zovemo potpuno reducibilnom.*

1.2 Univerzalna omotačka algebra

Neka je L Liejeva algebra. Glavni cilj ove cjeline je konstrukcija univerzalnog objekta u kategoriji svih homomorfizama Liejevih algebri sa L u neku asocijativnu algebru s jedinicom. Taj objekt ćemo označavati s $U(L)$ i zvati univerzalnom omotačkom algebrom od L. Prvi korak u konstrukciji će biti definicija tenzorskog produkta dvaju vektorskih prostora.

Tenzorski produkt

Neka su V, W vektorski prostori. Promatrajmo kategoriju $\mathrm{Bil}_{V\times W}$ u kojoj su objekti bilinearna preslikavanja sa $V \times W$ u neki vektorski prostor. Morfizmi u toj kategoriji su komutativni trokuti. Preciznije, ako su M, N neki vektorski prostori, te $\phi : V \times W \to M$, $\psi : V \times W \to N$ bilinearna preslikavanja, morfizam $F : \phi \to \psi$ je linearan operator $F : M \to N$ takav da je $F \circ \phi = \psi$.

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & M \arrow[d, "F"] \\ & N \end{tikzcd}$$

Definicija 1.2.1. *Tenzorski produkt vektorskih prostora V i W je inicijalni objekt u kategoriji $Bil_{V\times W}$.*

Teorem 1.2.2. *Neka su V, W vektorski prostori. Tada tenzorski produkt vektorskih prostora postoji i jedinstven je do na izomorfizam.*

Dokaz. Promatrajmo vektorski prostor X kojem je baza $V \times W$, te u njemu potprostor N koji je generiran s:

$$(\lambda x_1 + \mu x_2, y) - \lambda(x_1, y) - \mu(x_2, y),\ x_1, x_2 \in V, y \in W, \lambda, \mu \in k$$

$$(x, \lambda y_1 + \mu y_2) - \lambda(x, y_1) - \mu(x, y_2),\ x \in V, y_1, y_2 \in W, \lambda, \mu \in k\ .$$

Označimo sa T kvocijent X/N i sa $\pi : X \to T$ kanonski epimorfizam. Definirajmo preslikavanje $\phi : V \times W \to T$ s

$$\phi(x, y) = \pi(x, y)\ .$$

Tvrdim da je ϕ tenzorski produkt od V i W. Pokažimo prvo da je ϕ uistinu bilinearno preslikavanje. Iz definicije potprostora N slijedi

$$\begin{aligned}\phi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) &= \pi(\lambda x_1 + \mu x_2, y)\\ &= \lambda\pi(x_1, y) + \mu\pi(x_2, y)\\ &= \lambda\phi(x_1, y) + \mu\phi(x_2, y)\end{aligned}$$

za proizvoljne $x_1, x_2 \in V,\ y \in W,\ \lambda, \mu \in k$. Slično se pokaže i za drugu varijablu. Sada, neka je M neki proizvoljni vektorski prostor, i $\alpha : V \times W \to Z$ neko bilinearno preslikavanje. Tada možemo definirati linearan operator $\alpha' : X \to Z$ na bazi od X s

$$\alpha'(x, y) = \alpha(x, y),\ x \in V, y \in W\ .$$

Zbog bilinearnosti od α, N se nalazi unutar jezgre tog operatora, pa je zato linearan operator $\tilde{\alpha} : T \to Z$ definiran s:

$$\tilde{\alpha}(\pi(x, y)) = \alpha(x, y),\ x \in V, y \in W$$

dobro definiran. Iz definicije je očito da vrijedi $\alpha = \tilde{\alpha} \circ \phi$, i ostaje pokazati da je $\tilde{\alpha}$ jedinstven linearan operator koji zadovoljava taj uvjet. No to je gotovo očito: budući da je $\{(x, y) : x \in V, y \in W\}$ baza od X, skup $\{\pi(x, y) : x \in V, y \in W\}$ razapinje T, pa je $\tilde{\alpha}$ u potpunosti određen tim uvjetom.

Jedinstvenost do na izomorfizam tenzorskog produkta slijedi iz toga što je svaki inicijalni objekt u nekoj kategoriji jedinstven do na izomorfizam. □

Napomena 1.2.3. *Iako je po gornjoj definiciji tenzorski produkt zapravo bilinearno preslikavanje, u praksi se uglavnom tenzorskim produktom zove njegova kodomena. Ona je također jedinstvena do na izomorfizam, te se za tenzorski produkt dvaju tenzorskih prostora V i W uvodi oznaka $V \otimes W$, uz koju se veže bilinearno preslikavanje $\otimes : V \times W \to V \otimes W, (x, y) \to x \otimes y$. Tada univerzalno svojstvo možemo shvatiti na sljedeći način: ako* *je M neki proizvoljan vektorski prostor, svakom bilinearnom preslikavanju* $\alpha \in B(V, W; M)$ *pridružuje se jedinstven linearan operator* $\tilde{\alpha} \in L(V \otimes W, M)$ *zadan s*

$$\tilde{\alpha}(x \otimes y) = \alpha(x, y), \;\; x \in V, y \in W \; .$$

To pridruživanje daje izomorfizam vektorskih prostora $B(V, W; M)$ *i* $L(V \otimes W, M)$.

Napomena 1.2.4. *Iz dokaza teorema 1.2.2 je očito da elementi oblika* $x \otimes y, x \in V, y \in W$ *generiraju* $V \otimes W$*, to jest da je općeniti oblik elementa od* $V \otimes W$

$$\sum_{i=0}^{n} x_i \otimes y_i, \;\; x_i \in V, y_i \in W \; .$$

Napomena 1.2.5. *Lako se vidi da je* $k \otimes V \simeq V$*, s izomorfizmom danim* $\lambda \otimes v \to \lambda v$.

Propozicija 1.2.6. *Neka su* V, W *i* M *vektorski prostori. Tada vrijedi:*

$$L(V \otimes W, M) \simeq B(V, W; M) \simeq L(V, L(W, M)) \; .$$

Dokaz. Prvi izomorfizam smo pokazali u napomeni 1.2.3. Definiramo $\phi : B(V, W; M) \to L(V, L(W, M))$ na sljedeći način:

$$\phi(\alpha)(x) = \alpha(x, \cdot), \;\; \alpha \in B(V, W; M), x \in V \; .$$

ϕ je očito dobro definiran i linearan.

Definiramo $\psi : L(V, L(W, M)) \to B(V, W; M)$ na sljedeći način:

$$\psi(A)(x, y) = (Ax)(y), \;\; A \in L(V, L(W, M)), x \in V, y \in W \; .$$

Opet, ψ je očito dobro definiran i linearan. Lako se vidi da su ϕ i ψ međusobno inverzni. □

Kao što smo za vektorske prostore V, W definirali kategoriju svih bilinearnih preslikavanja sa $V \times W$ te pokazali da ta kategorija ima inicijalni objekt, tako možemo za vektorske prostore $V_1, \ldots, V_n$ definirati kategoriju svih trilinearnih preslikavanja sa $V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$, te u njoj konstruirati inicijalni objekt na sličan način kao što smo to napravili u dokazu teorema 1.2.2. Univerzalni objekt (uzeti u obzir napomenu 1.2.3) u toj kategoriji ćemo označiti s $V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_n$. Ta dva pojma povezuje sljedeća propozicija.

Propozicija 1.2.7. *Neka su* U, V, W *vektorski prostori. Tada vrijedi:*

$$(U \otimes V) \otimes W \simeq U \otimes V \otimes W \simeq U \otimes (V \otimes W) \; .$$

Dokaz. Pokazat ćemo samo prvi izomorfizam, drugi će slijediti analogno. Očito je preslikavanje $(u, v, w) \to (u \otimes v) \otimes w$ trilinearno te zato prema univerzalnom svojstvu inducira linearan operator $\phi : U \otimes V \otimes W \to (U \otimes V) \otimes W$ za koje vrijedi

$$\phi(u \otimes v \otimes w) = (u \otimes v) \otimes w \ .$$

S druge strane, za fiksni $w \in W$, $(u, v) \to u \otimes v \otimes w$ je bilinearno preslikavanje, pa inducira linearan operator $\alpha_w \in L(U \otimes V, U \otimes V \otimes W)$ za kojeg vrijedi:

$$\alpha_w(u \otimes v) = u \otimes v \otimes w \ .$$

Sada možemo definirati bilinearno preslikavanje $(U \otimes V) \times W \to U \otimes V \otimes W$ za koje vrijedi $(u \otimes v, w) \to u \otimes v \otimes w$, pa po univerzalnom svojstvu ono inducira linearan operator $\psi : (U \otimes V) \otimes V \to U \otimes V \otimes W$ za koji vrijedi:

$$\psi((u \otimes v) \otimes w) = u \otimes v \otimes w \ .$$

Sada vidimo da vrijedi $\phi \circ \psi((u \otimes v) \otimes w) = (u \otimes v) \otimes w$. Po univerzalnom svojstvu tenzorskog produkta, slijedi da je $\phi \circ \psi = id_{(U \otimes V) \otimes W}$. Analogno se pokaže $\psi \circ \phi = id_{U \otimes V \otimes W}$. □

Iz ove propozicije se indukcijom može pokazati asocijativnost tenzorskog produkta. U daljnjem tekstu ćemo (za neki vektorski prostor V) sa $T^n V$ označavati n-tu tenzorsku potenciju $V \otimes V \otimes \ldots \otimes V$ (n puta). Uzet ćemo $T^0 V = k$.

Na $TV := \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n V$ možemo uvesti strukturu asocijativne algebre s jedinicom pomoću izomorfizma $T^n V \otimes T^k V \simeq T^{n+k} V$. Prema propoziciji 1.2.6, on inducira bilinearno preslikavanje:

$$(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n, v_{n+1} \otimes \ldots \otimes v_{n+k}) \to v_1 \otimes \ldots \otimes v_{n+k} \ .$$

koje ćemo nazvati množenjem na TV. (Iz napomene 1.2.5 slijedi da je za svaki $\lambda \in K$, $\lambda \otimes v = \lambda v$).

Uz ovako definirano množenje, TV nazivamo tenzorskom algebrom nad V.

Budući da je $V = T^1 V$, imamo prirodnu inkluziju $i : V \to TV$.

Promatrajmo kategoriju svih linearnih operatora sa V u neku asocijativnu algebru s jedinicom. Objekti u toj kategoriji su linearni operatori $\alpha : V \to A$, gdje je A neka asocijativna algebra s jedinicom. Morfizmi u toj kategoriji su opet komutativni trokuti. Preciznije, ako su A, B neke asocijativne algebre s jedinicom i $\alpha : V \to A, \beta : V \to B$ neki linearni operatori, tada je morfizam $F : \alpha \to \beta$ zapravo homomorfizam algebri s jedinicom $F : A \to B$ za kojeg vrijedi $F \circ \alpha = \beta$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & A \arrow[d, "F"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Označimo tu kategoriju sa C_V. Vrijedi sljedeće univerzalno svojstvo:

Teorem 1.2.8. *Neka je V vektorski prostor. Tada je $i : V \to TV$ inicijalna u kategoriji C_V.*

Dokaz. Neka je A asocijativna algebra s jedinicom i $\alpha : V \to A$ linearan operator. Neka su $v_1, \ldots, v_n \in V$. Tada je

$$(v_1, \ldots, v_n) \to \alpha(v_1) \ldots \alpha(v_n)$$

n-linearno preslikavanje pa time po univerzalnom svojstvu tenzorskog produkta postoji linearan operator $\tilde{\alpha}_n : T^nV \to A$ za kojeg vrijedi

$$\tilde{\alpha}_n(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = \alpha(v_1) \ldots \alpha(v_n) \ .$$

Stavimo $\tilde{\alpha}_0 : k \to A, \tilde{\alpha}_0(x) = x1_A$. Sada po univerzalnom svojstvu direktne sume postoji linearan operator $\tilde{\alpha} : TV \to A$ takav da je $\tilde{\alpha}|_{T^nV} = \tilde{\alpha}_n$. Po konstrukciji je očito da je $\tilde{\alpha}$ ujedno i homomorfizam asocijativnih algebri s jedinicom, te da vrijedi $\tilde{\alpha} \circ i = \alpha$. Svaki drugi homomorfizam algebri koji zadovoljava to svojstvo mora djelovati kao i $\tilde{\alpha}$ na elemente od TV oblika $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$, koji generiraju TV kao vektorski prostor. Zbog toga je $\tilde{\alpha}$ jedinstven homomorfizam algebri koji zadovoljava to svojstvo. □

Korolar 1.2.9. *Svaka asocijativna algebra s jedinicom koja je generirana s V (kao algebra) je homomorfna slika od TV.*

Sada smo spremni za definiciju univerzalne omotačke algebre.

Univerzalna omotačka algebra

Prvo ćemo definirati univerzalnu omotačku algebru preko univerzalnog svojstva, a potom pokazati da taj objekt zbilja postoji.

Neka je L Liejeva algebra. Promatrajmo kategoriju $\mathcal{D}_L$ svih homorfizama Liejevih algebri sa L u neku asocijativnu algebru s jedinicom. Objekti u toj kategoriji su homomorfizmi Liejevih algebri $\alpha : L \to A$ gdje je A neka asocijativna algebra s jedinicom (kao što smo ranije vidjeli, njoj možemo dati strukturu Liejeve algebre s $[x, y] = xy - yx$). Morfizmi su opet komutativni trokuti

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & A \arrow[d, "F"] \\ & B \end{tikzcd}$$

(α,β su homomorfizmi Liejevih algebri, a F homomorfizam algebri s jedinicom)

Definicija 1.2.10. *Neka je L neka Liejeva algebra. Univerzalna omotačka algebra od L je inicijalan objekt u kategoriji $\mathcal{D}_L$.*

Napomena 1.2.11. *Iako je formalno inicijalni objekt u $\mathcal{D}_L$ homomorfizam Lijevih algebri, mi ćemo njegovu kodomenu zvati univerzalna omotačka algebra i označavati sa $U(L)$.*

Teorem 1.2.12. *Neka je L Liejeva algebra i TL njena tenzorska algebra. Neka je I ideal u TL generiran s:*

$$[x, y] - (x \otimes y - y \otimes x), \ \ x, y \in L \, .$$

Tada je TL/I univerzalna omotačka algebra od L.

Dokaz. Neka je A neka asocijativna algebra s jedinicom , te $\alpha : L \to A$ homomorfizam Liejevih algebri. Tada prema univerzalnom svojstvu tenzorske algebre postoji jedinstven homomorfizam algebri $\tilde{\alpha} : TL \to A$ takav da je $\tilde{\alpha} \circ i = \alpha$. Budući da je α homomorfizam Liejevih algebri, slijedi da je $I \leq \operatorname{Ker} \tilde{\alpha}$. Tada postoji $\hat{\alpha} : TL/I \to A$ takav da

$$\hat{\alpha}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n + I) = \alpha(x_1) \ldots \alpha(x_n) \, .$$

Ako označimo sa $\pi : TL \to TL/I$ kanonski epimorfizam sada imamo:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi\circ i"'] & A \\ TL/I \arrow[ur, "\hat{\alpha}"'] & \end{tikzcd}$$

Iz definicije od I slijedi da je $\pi \circ i$ uistinu homomorfizam Liejevih algebri. Preostaje pokazati jedino da je $\hat{\alpha} : TL/I \to A$ jedinstveni homomorfizam algebri koji zadovoljava $\hat{\alpha} \circ (\pi \circ i) = \alpha$.

Pretpostavimo da je $\beta : TL/I \to A$ homomorfizam algebri koji zadovoljava $\beta \circ (\pi \circ i) = \alpha$, to jest, za svaki $x \in L$ vrijedi $\beta(x + I) = \alpha(x)$. Iz pretpostavke da je β homomorfizam algebri slijedi da za svaki $n \in \mathbb{N}$, i za sve $x_1, \ldots, x_n \in L$ imamo:

$$\beta(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n + I) = \alpha(x_1) \ldots \alpha(x_n) = \hat{\alpha}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n + I) \, .$$

No kako $\{x_1 \otimes \ldots \otimes x_n : n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in L\}$ razapinje TL, slijedi da se β i $\hat{\alpha}$ podudaraju na skupu koji razapinje TL/I, dakle $\beta = \hat{\alpha}$. □

Napomena 1.2.13. *U daljnjem tekstu ćemo za $x \in L$, $(\pi \circ i)(x) \in U(L)$ označavati jednostavno sa x. Također, množenje u $U(L)$ ćemo pisati kao $(y, z) \to yz, \ y, z \in U(L)$.*

Primijetimo da iz gornjeg dokaza ne možemo ustvrditi da je $L \to U(L), \ x \to x$ monomorfizam Liejevih algebri. No to možemo dobiti kao korolar Poincaré-Birkhoff-Wittovog teorema, kojeg navodimo bez dokaza:

Teorem 1.2.14. *Neka je $\{e_j : j \in J\}$ uređena baza od L (to jest, J je totalno uređen skup sa uređajem kojeg ćemo označavati sa $\leq$). Tada je*

$$\{e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_k} : k \in \mathbb{N}, j_1, \dots, j_k \in J, j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k\} \cup \{1_{U(L)}\}$$

baza od $U(L)$.

Iz univerzalnog svojstva univerzalne omotačke algebre slijedi da se svaki L-modul može na jedinstven način shvatiti kao $U(L)$-modul, i obratno.

Kasnije će nam trebati sljedeća činjenica o omotačkoj algebri koju navodimo bez dokaza:

Propozicija 1.2.15. *Neka je L Liejeva algebra. Tada je $U(L)$ integralna domena.*

Dokaz se može naći u [1].

1.3 Centralna proširenja Liejevih algebri

U ovom dijelu ćemo definirati centralna proširenja neke Liejeve algebre L i pokazati korespondenciju između njih i određenih bilinearnih funkcija na L (tzv. 2-kociklusa). Glavni izvor za ovu cjelinu je [3]. Odsad nadalje ćemo podrazumijevati da je svaka Liejeva algebra s kojom radimo nad poljem $\mathbb{C}$.

Definicija 1.3.1. *Centralno proširenje Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je kratki egzaktni niz Liejevih algebri:*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \hat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

takav da je $\iota(\mathfrak{a}) \subseteq Z(\hat{\mathfrak{g}})$.

Primijetimo da $\iota(\mathfrak{a}) \subseteq Z(\hat{\mathfrak{g}})$ povlači da je $\iota(\mathfrak{a})$ ideal u $\hat{\mathfrak{g}}$. Tada je $\mathfrak{g} \simeq \hat{\mathfrak{g}}/\iota(a)$.

Napomena 1.3.2. *Često se za $\hat{\mathfrak{g}}$ kaže da je centralno proširenje od $\mathfrak{g}$ s $\mathfrak{a}$.*

Definicija 1.3.3. *Neka su $\hat{\mathfrak{g}}_1$ i $\hat{\mathfrak{g}}_2$ centralna proširenja od $\mathfrak{g}$ s $\mathfrak{a}$. Kažemo da su ona ekvivalentna ako postoji izomorfizam $\phi : \hat{\mathfrak{g}}_1 \to \hat{\mathfrak{g}}_2$ takav da sljedeći dijagram komutira:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \hat{\mathfrak{g}}_1 \arrow[r] \arrow[d, "\phi", "\simeq"'] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[r] & \hat{\mathfrak{g}}_2 \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r] & 0\,. \end{tikzcd}$$

Najjednostavniji primjer centralnog proširenja je direktna suma Liejevih algebri $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$. Centralna proširenja ekvivalentna direktnoj sumi zvati ćemo trivijalna centralna proširenja.

Neka je

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \hat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

neko centralno proširenje. Želimo vidjeti u kakvoj su vezi komutator iz $\hat{\mathfrak{g}}$ i komutator iz $\mathfrak{g}$. Gornji kratki egzaktni niz se cijepa kao niz vektorskih prostora, pa je tada $\hat{\mathfrak{g}}$ izomorfan s $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$ kao vektorski prostor (no ne nužno kao Liejeva algebra). Preciznije, imamo linearno preslikavanje $\sigma : \mathfrak{g} \to \hat{\mathfrak{g}}$ takvo da je $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ i vrijedi $\hat{\mathfrak{g}} = \iota(\mathfrak{a}) \oplus \sigma(\mathfrak{g})$ (primijetimo da prva činjenica prisiljava σ da bude monomorfizam). Tada je izomorfizam sa $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$ u $\hat{\mathfrak{g}}$ dan s $(g, a) \to (\sigma(g), \iota(a))$. Budući da je $\iota(\mathfrak{a}) \subseteq Z(\hat{\mathfrak{g}})$, dovoljno je promatrati kako komutator djeluje na elemente iz $\sigma(\mathfrak{g})$. Vrijedi

$$\pi[\sigma(x), \sigma(y)] = [\pi(\sigma(x)), \pi(\sigma(y))] = [x, y],$$

pa slijedi da rastav od $[\sigma(x), \sigma(y)]$ po direktnoj sumi izgleda kao

$$[\sigma(x), \sigma(y)] = (\sigma([x, y]), c(x, y))$$

Iz svojstava komutatora slijedi da $c : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ mora biti bilinearna i zadovoljavati sljedeća svojstva:

$$\begin{aligned} c(x, y) + c(y, x) &= 0 \\ c([x, y], z) + c([z, x], y) + c([y, z], x) &= 0 \end{aligned}$$

za sve $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Definicija 1.3.4. *Bilinearnu funkciju sa gornjim svojstvima zovemo 2-kociklus.*
Sa $C^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{a})$ *označavamo vektorski prostor svih 2-kociklusa sa* $\mathfrak{g}$ *u* $\mathfrak{a}$.

Vidjeli smo da svako centralno proširenje od $\mathfrak{g}$ s $\mathfrak{a}$ daje neki 2-kociklus $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$. Obratno, ako imamo neki 2-kociklus $c : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$, pomoću njega možemo definirati Liejevu algebru na vektorskom prostoru $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$ na sljedeći način:

$$[(x_1, a_1), (x_2, a_2)] = ([x_1, x_2], c(x_1, x_2)) .$$

Ovu Liejevu algebru ćemo označavati sa $\hat{\mathfrak{g}}_c$. Iz definicije je očito da će $\hat{\mathfrak{g}}_c$ biti centralno proširenje od $\mathfrak{g}$ s $\mathfrak{a}$. Lako se vidi da je svako centralno proširenje od $\mathfrak{g}$ s $\mathfrak{a}$, kod kojeg je c 2-kociklus izomorfno $\hat{\mathfrak{g}}_c$. Dakle, centralna proširenja su u potpunosti određena svojim 2-kociklusima. Direktnim računom se dobiva:

Propozicija 1.3.5. *Neka je $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ linearni operator. Tada je $d\theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ definiran s*

$$d\theta(x, y) = \theta([x, y])$$

u $C^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{a})$.

Uočimo da svi 2-kociklusi dobiveni od linearnih funkcija $\mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ na gornji način čine vektorski potprostor od $C^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{a})$. Označavat ćemo ga s $dB^1(\mathfrak{g}; \mathfrak{a})$

Prirodno je pitati se koji će 2-kociklusi davati ekvivalentna centralna proširenja. Potpun odgovor na to pitanje daje sljedeći teorem:

Teorem 1.3.6. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra, a $\mathfrak{a}$ abelova Liejeva algebra. Neka su $\alpha, \beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ 2-kociklusi. Tada su centralna proširenja $\hat{\mathfrak{g}}_\alpha$ i $\hat{\mathfrak{g}}_\beta$ ekvivalentna ako i samo ako je $\alpha - \beta \in dB^1(\mathfrak{g}; \mathfrak{a})$.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da su centralna proširenja $\hat{\mathfrak{g}}_\alpha$ i $\hat{\mathfrak{g}}_\beta$ ekvivalentna:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathfrak{g}_c \arrow[r] \arrow[d, "\phi"', "\simeq"] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[r] & \mathfrak{g}_d \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Podsjetimo se da su Liejeve algebre $\hat{\mathfrak{g}}_\alpha$ i $\hat{\mathfrak{g}}_\beta$ kao vektorski prostori jednaki $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$. Iz komutirajućih kvadrata u gornjem dijagramu slijedi da je $\phi((g, a)) = (g, a + \theta(g))$, za neki linearan operator $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$. Budući da je ϕ izomorfizam Liejevih algebri, slijedi:

$$\begin{aligned}
([g_1, g_2], \alpha(g_1, g_2) + \theta([g_1, g_2])) &= \phi(([g_1, g_2], \alpha(g_1, g_2)) \\
&= \phi([(g_1, a_1), (g_2, a_2)]_\alpha) \\
&= [(g_1, a_1 + \theta(g_1)), (g_2, a_2 + \theta(g_2))]_\beta \\
&= ([g_1, g_2], \beta(g_1, g_2))
\end{aligned}$$

za proizvoljne $g_1, g_2 \in \mathfrak{g},\ a_1, a_2 \in \mathfrak{a}$. Dakle, $\beta - \alpha = d\theta \in B^1(\mathfrak{g}; \mathfrak{a})$, što je i trebalo pokazati.

Obratno, neka su $\alpha, \beta \in C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ takvi da postoji neki linearan operator $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ takav da je $\alpha = \beta + d\theta$. Ako definiramo $\phi : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} \to \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$ kao $\phi((g, a)) = (g, a + \theta(g))$, istim računom kao gore se vidi da je ϕ izomorfizam Liejevih algebri $\hat{\mathfrak{g}}_\alpha$ i $\hat{\mathfrak{g}}_\beta$. Iz njegove definicije je očito da zadovoljava komutativni dijagram za ekvivalenciju centralnih proširenja.

□

Sada vidimo da postoji bijektivna korespondencija između centralnih proširenja od $\mathfrak{g}$ sa $\mathfrak{a}$ i elemenata vektorskog prostora

$$H^2(\mathfrak{g};\mathfrak{a}) := C^2(\mathfrak{g};\mathfrak{a})/dB^1(\mathfrak{g};\mathfrak{a})$$

Također, lako se vidi da su sva proširenja generirana sa elementima od $dB^1(\mathfrak{g};\mathfrak{a})$ trivijalna.

Poglavlje 2

Virasorova algebra

U ovom poglavlju ćemo definirati Wittovu, Virasorovu i Heisenbergovu algebru. Glavni rezultat je univerzalnost Virasorove algebre kao centralnog proširenja Wittove algebre. Sadržaj poglavlja prati [3] i [6].

2.1 Definicija Wittove algebre

Neka je $A := \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ algebra Laurentovih polinoma u jednoj varijabli z. Promatramo $\mathrm{Der}\ A$ kao Liejevu algebru.

Propozicija 2.1.1. *Skup* $\{L_j := -z^{j+1}\frac{d}{dz} : j \in \mathbb{Z}\}$ *je baza za* $\mathrm{Der}\ A$.

Dokaz. Lako se provjeri da uistinu vrijedi $L_j \in \mathrm{Der}\ A$, za svaki $j \in \mathbb{Z}$. Linearna nezavisnost slijedi iz nezavisnosti elemenata z^j u $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$. Da bi dokazali da L_j-ovi uistinu razapinju $\mathrm{Der}\ A$, primijetimo da je svaki $D \in \mathrm{Der}\ A$ u potpunosti određen sa svojim djelovanjem na polinom z, budući da vrijedi $D(z^j) = jD(z^{j-1})$ za svaki $j \in \mathbb{Z}$. Sada ako $D \in \mathrm{Der}\ A$ na z djeluje kao $D(z) = \sum_j \lambda_j z^j$ slijedi $D = -\sum_j \lambda_j L_{j-1}$. □

Sada možemo izračunati:

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n].z &= [z^{m+1}\frac{d}{dz}, z^{n+1}\frac{d}{dz}].z \\
&= z^{m+1}(\frac{d}{dz}(z^{n+1})) - z^{n+1}(\frac{d}{dz}(z^{m+1})) \\
&= (n-m)z^{n+m+1} \\
&= (m-n)L_{n+m}.z\ .
\end{aligned}$$

Definicija 2.1.2. *Liejevu algebru zadanu sa bazom* $\{L_j : j \in \mathbb{Z}\}$ *i relacijama*

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}$$

zovemo Wittova algebra i označavamo sa Witt.

2.2 Centralna proširenja Wittove algebre; Virasorova algebra

Propozicija 2.2.1.

$$H^2(\mathrm{Witt}, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$$

Dokaz. Neka je $c \in C^2(\mathrm{Witt}, \mathbb{C})$. Ako definiramo $\theta \in \mathrm{Witt}^*$, $\theta(L_m) = c(0, L_m)/m$ i umjesto c promatramo $c' = c - d\theta$, prema teoremu 1.3.6 c i c' daju isto centralno proširenje Wittove algebre. Tada bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $c(0, L_m) = 0$, za svaki $m \in \mathbb{Z}$. Iz Jacobijevog svojstva 2-kociklusa imamo:

$$(m-n)c(L_l, L_{m+n}) + (n-l)c(L_m, L_{n+l}) + (l-m)c(L_n, L_{l+m}) = 0 \; . \tag{2.1}$$

Ako stavimo $l = 0$:

$$(m+n)c(L_m, L_n) = 0$$

Ostaje izračunati $c(L_m, L_{-m}) := c(m)$. Uvrstimo u jednadžbu (2.1) $n = 1, l + m = -1$ i dobijemo rekurziju:

$$(1-m)c(m+1) + (m+2)c(m) - (2m+1)c(1) = 0$$

koja ima dvodimenzionalni prostor rješenja. Uvrštavanjem vidimo da su $c(m) = m, c(m) = m^3$ rješenja, pa slijedi da je općenito rješenje:

$$c(L_m, L_n) = \delta_{m+n,0}(\alpha m + \beta m^3), \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{C} \; .$$

Primijetimo da ako stavimo $\beta = 0$, vrijedi $c = d\theta$ za $\theta \in \mathrm{Witt}^*, \theta(L_m) = \delta_{m,0}\ \alpha/2$, pa je proširenje zadano s takvim c trivijalno. Također, vidimo da i za slučajeve gdje je $\beta \neq 0$ s gornjim θ možemo "maknuti" linearni član u c, pa je $H^2(\mathrm{Witt}, \mathbb{C})$ najviše jednodimenzionalan.

Ostaje pokazati da $H^2(\mathrm{Witt}, \mathbb{C})$ nije trivijalan, to jest da c zadan s $c(L_m, L_n) = \delta_{m+n,0}\,\beta m^3$ nije u $dB^1(\mathrm{Witt}, \mathbb{C})$ za β različit od nule. Pretpostavimo suprotno. Tada bi slijedilo da mora postojati $\theta \in \mathrm{Witt}^*$ takav da je

$$\theta(2mL_0) = \theta([L_m, L_{-m}] = \beta m^3, \forall m \in \mathbb{Z}$$

što je očito nemoguće. $\square$

Po konvenciji biramo $c(L_m, L_n) = \frac{1}{12}(m^3 - m)$ (kasnije ćemo vidjeti razlog iza takvog izbora).

Definicija 2.2.2. *Virasorova algebra (u oznaci* Vir*) je Liejeva algebra na vektorskom prostoru s bazom*

$$\{L_m : m \in \mathbb{Z}\} \cup \{C\}$$

zadana relacijama

$$[L_m, C] = 0; [L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \delta_{m+n,0}\frac{1}{12}(m^3 - m)C$$

Propozicija 2.2.1 nam govori da je Virasorova algebra do na izomorfizam jedinstveno netrivijalno centralno proširenje Wittove algebre.

Definicija 2.2.3. *Uvest ćemo neke oznake za podalgebre Virasorove algebre:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &= \mathrm{span}\{C, L_0\} \\ \mathrm{Vir}_> &= \mathrm{span}\{L_n : n > 0\} \\ \mathrm{Vir}_< &= \mathrm{span}\{L_n : n < 0\} \\ \mathrm{Vir}_\geq &= \mathrm{span}(\{L_n : n \geq 0\} \cup \{C\}) \\ \mathrm{Vir}_\leq &= \mathrm{span}(\{L_n : n \leq 0\} \cup \{C\})\,. \end{aligned}$$

2.3 Heisenbergova algebra

Heisenbergova algebra nas zanima jer ćemo preko nje kasnije definirati jednu važnu reprezentaciju Virasorove algebre.

Definicija 2.3.1. *Heisenbergova algebra (u oznaci $\mathcal{H}$) je Liejeva algebra na vektorskom prostoru s bazom*

$$\{a_n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{K\}$$

zadana relacijama

$$[a_n, K] = 0;\ [a_m, a_n] = \delta_{m+n,0}\, mK$$

Neka su $\mu, h \in \mathbb{C}$.
Algebri $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$ možemo dati strukturu $\mathcal{H}$-modula na sljedeći način:

$$a_n.p = \begin{cases} n\frac{\partial}{\partial x_n}p, & \text{ako je } n > 0 \\ hx_{-n}p, & \text{ako je } n < 0 \\ \mu p, & \text{ako je } n = 0 \end{cases}$$

$$K.p = hp,$$

za $p \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$.

Ovakav modul zadan s parametrima $\mu, h \in \mathbb{C}$ označava se s $B(\mu, h)$ i zove Fockov (bozonski) modul.

Propozicija 2.3.2. *Reprezentacija $B(\mu, h)$ je ireducibilna ako i samo ako je $h \neq 0$.*

Dokaz. Lako se vidi da je $\mathbb{C} \leq \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$ podreprezentacija od $B(\mu, 0)$ za svaki $\mu \in \mathbb{C}$.

Primijetimo da u $B(\mu, h), h \neq 0$ vrijedi

$$x_{j_1}^{n_1} x_{j_2}^{n_2} \ldots x_{j_k}^{n_k} = \frac{1}{h^{\sum n_i}} a_{-j_1}^{n_1} a_{-j_2}^{n_2} \ldots a_{-j_k}^{n_k}.1$$

Pretpostavimo da $B(\mu, h), h \neq 0$ ima nenul podreprezentaciju M, neka je $p \in M$ nenul. Kada bi p bio monom, mogli bi ga uzastopnim deriviranjem svesti na skalar te bi potom upotrebom gornje formule slijedilo da svaki monom mora biti u M, tj. da je $M = B(\mu, h)$. No, općenito p nije monom već neka linearna kombinacija monoma.

Definirajmo duljinu monoma sa

$$l(x_{j_1}^{n_1} x_{j_2}^{n_2} \ldots x_{j_k}^{n_k}) = \sum_{i=1}^{k} n_i \ .$$

Svaki polinom $p \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$ možemo prikazati kao linearnu kombinaciju monoma m_i:

$$p = \sum_i \alpha_i m_i, \ \alpha_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \ .$$

Stavimo $l(p) = \max l(m_i)$. Indukcijom po $l(p)$ ćemo pokazati da se svaki nenul $p \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$ može uzastopnim deriviranjem svesti na skalar.

Ako je $l(p) = 1$, p je oblika $\sum_i \alpha_i x_{j_i}$. Izaberimo i takav da je $\alpha_i \neq 0$, tada je $a_{j_i}.p = j_i \alpha_i$.

Pretpostavimo sada da je $l(p) = n$ i da tvrdnja vrijedi za sve polinome q s $l(q) = n - 1$. Izaberimo neki $j \in \mathbb{N}$ takav da je $a_j.p \neq 0$ (to jest, x_j se pojavljuje u zapisu p). Tada je $l(a_j.p) = n - 1$ i tvrdnja vrijedi po induktivnoj pretpostavci.

□

Iz dokaza je očito da je za $h \neq 0$, $B(\mu, h)$ generiran jedinicom kao $\mathcal{H}$-modul.

Sada ćemo uvesti gradaciju na $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$ i pokazati da $\mathcal{H}$ poštuje tu gradaciju.

Definicija 2.3.3. *Neka je $x_{j_1}^{n_1} \ldots x_{j_k}^{n_k}$ monom u $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$. Definiramo*

$$\deg(x_{j_1}^{n_1} \ldots x_{j_k}^{n_k}) = \sum_k j_k n_k \ .$$

Za skalare ćemo reći da su stupnja 0.

Sa $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]_d$ ćemo označavati vektorski potprostor od $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$ razapet s monomima stupnja d.

Napomena 2.3.4. *1. Kad gledamo na $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$ kao $\mathcal{H}$-modul $B(\mu, h)$, koristit ćemo oznaku $B(\mu, h)_d$.*

2. *Za $d < 0$, smatramo $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]_d = 0$ i $B(\mu, h)_d = 0$.*

Lako se vidi da ova gradacija poštuje množenje polinoma, to jest da je umnožak dva monoma stupnja d_1, odnosno d_2, monom stupnja $d_1 + d_2$. Gradacija također poštuje i djelovanje Heisenbergove algebre, preciznije, vrijedi:

Propozicija 2.3.5. *Neka su $\mu, h \in \mathbb{C}$ i neka je $p \in B(\mu, h)_d$. Tada je $a_n.p \in B(\mu, h)_{d-n}$.*

Definiramo antilinearnu anti-involuciju ω na $\mathcal{H}$ s $\omega(a_n) = a_{-n},\ \omega(K) = K$.

$$\begin{aligned}
\omega([a_m, a_n]) &= \omega(\delta_{m+n,0}\, mK) \\
&= \delta_{m+n,0}\, mK \\
&= \delta_{-m-n,0}\ -nK \\
&= [a_{-n}, a_{-m}] \\
&= [\omega(a_n), \omega(a_m)]
\end{aligned}$$

Definicija 2.3.6. *Reprezentaciju $\rho : \mathcal{H} \to \mathfrak{gl}(V)$ zovemo unitarnom ako je $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ unitaran prostor i vrijedi:*

$$\rho(x)^* = \rho(\omega(x)),\ x \in \mathcal{H}$$

Želimo na $B(\mu, h), h \neq 0$ definirati skalarni produkt uz koji će to biti unitarna reprezentacija. Stavimo da monomi čine ortogonalnu bazu, pa ostaje dodijeliti normu monomima u skladu s ω. Stavimo $\langle 1,\ 1\rangle = 1$. Da bi naš skalarni produkt bio u skladu s ω, treba biti:

$$\langle a^{n_1}_{-j_1} \ldots a^{n_k}_{-j_k}.1, a^{n_1}_{-j_1} \ldots a^{n_k}_{-j_k}.1\rangle = \langle 1, a^{n_k}_{j_k} a^{n_{k-1}}_{j_{k-1}} \ldots a^{n_1}_{j_1} a^{n_1}_{-j_1} a^{n_2}_{-j_2} \ldots a^{n_k}_{-j_k}.1\rangle \,.$$

Budući da a_n, a_m komutiraju za $n + m \neq 0$, dovoljno je izračunati $a^k_j.(a^k_{-j}).1$.

Lema 2.3.7. *U $B(\mu, h)$ vrijedi:*

$$a^k_j a^k_{-j} = k!\, j^k h^k$$

za sve $j, k \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Neka je $j \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Dokaz ide indukcijom po k. U slučaju $k = 1$, iz definicija $\mathcal{H}$ i $B(\mu, h)$ imamo:

$$a_j a_{-j}.1 = [a_j, a_{-j}].1 + a_{-j}a_j.1 = jh\,.$$

Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
a^{k+1}_j a^{k+1}_{-j}.1 &= a^k_j(a_j a_{-j})a^k_{-j}.1 \\
&= a^k_j(a_{-j}a_j + jh)a^k_{-j}.1 \\
&= a^k_j a_{-j} a_j a^k_{-j}.1 + (hj)^{k+1} k!
\end{aligned}$$

$a_j^k a_{-j} a_j a_{-j}^k.1$ računamo tako da a_j iz sredine pomaknemo k puta prema desno. Pogledajmo prvi korak:

$$a_j^k a_{-j} a_j a_{-j}^k.1 = a_j^k a_{-j} a_{-j} a_j a_{-j}^{k-1}.1 + (hj) a_j^k a_{-j}^k.1 = a_j^k a_{-j} a_{-j} a_j a_{-j}^{k-1}.1 + (hj)^{k+1} k!$$

Ponovimo to još $k-1$ puta, i budući da je $a_j.1 = 0$ imamo:

$$a_j^k a_{-j} a_j a_{-j}^k.1 = k(hj)^{k+1} k!\ .$$

Dakle, $a_j^{k+1}.(a_{-j}^{k+1}.1) = (k+1)!(hj)^k$, što je i trebalo pokazati. □

Sada slijedi da trebamo staviti:

$$\langle a_{-j_1}^{n_1} \dots a_{-j_k}^{n_k}.1, a_{-j_1}^{n_1} \dots a_{-j_k}^{n_k}.1 \rangle = \prod_{i=1}^{k} n_i!(hj_i)^{n_i}\ .$$

Vidimo da ovakav skalarni produkt možemo zadati samo kada je $h > 0$ (inače ta bilinearna forma nije pozitivna, pa nije skalarni produkt). Također, trebamo imati i $\mu \in \mathbb{R}$ zbog:

$$\mu = \langle a_0.1, 1 \rangle = \langle 1, a_0.1 \rangle = \overline{\mu}$$

Pokazali smo:

Propozicija 2.3.8. *Neka su $\mu, h \in \mathbb{R}, h > 0$. Tada je uz gore zadani skalarni produkt na $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$ $B(\mu, h)$ unitarna reprezentacija od $\mathcal{H}$.*

Poglavlje 3

Reprezentacije Virasorove algebre

3.1 Općenito o reprezentacijama Virasorove algebre

U ovoj cjelini ćemo dati par općenitih definicija i rezultata vezanih uz reprezentacije Virasorove algebre.

Prvo ćemo definirati unitarnu reprezentaciju Virasorove algebre. Kao i kod Heisenbergove algebre, za to ćemo prvo trebati definirati antilinearnu anti-involuciju ω na Vir.

Definicija 3.1.1. $\omega : \mathrm{Vir} \to \mathrm{Vir}$ *definiramo na bazi na sljedeći način:*

$$\begin{aligned} \omega(L_n) &= L_{-n} \\ \omega(C) &= C\,. \end{aligned}$$

Pokažimo da je ovako definirana ω uistinu anti-involucija:

$$\begin{aligned} [\omega(L_m), \omega(L_n)] &= [L_{-m}, L_{-n}] \\ &= (n-m)L_{-m-n} + \delta_{-m-n,0}\frac{1}{12}(-m^3+m)C \\ &= -(m-n)\omega(L_{m+n}) - \delta_{m+n,0}\frac{1}{12}(m^3-m)\omega(C) \\ &= \omega([L_n, L_m]) \end{aligned}$$

Definicija 3.1.2. *Reprezentaciju* $\rho : \mathrm{Vir} \to \mathfrak{gl}(V)$ *Virasorove algebre zovemo unitarnom ako je* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *unitaran prostor i vrijedi*

$$\rho(x)^* = \rho(\omega(x)),\ x \in \mathrm{Vir}$$

Sada definiramo težinski rastav reprezentacije Virasorove algebre.

Definicija 3.1.3. *Neka je* $\rho : \mathrm{Vir} \to \mathfrak{gl}(V)$ *reprezentacija Virasorove algebre. Kažemo da* V *ima težinski rastav ako vrijedi:*

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$$

gdje je $V_\lambda = \{v \in V : \rho(x)(v) = \lambda(x)v, x \in \mathfrak{h}\}$.

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ za koje je $V_\lambda \neq 0$ zovemo težinama, a te V_λ težinskim potprostorima. Budući da je $\mathfrak{h}$ dvodimenzionalan, često identificiramo težine $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ s uređenim parovima $(\lambda(C), \lambda(L_0))$. Neka je $L_0^\vee \in \mathfrak{h}^*$ dualan L_0, tj. zadan s $L_0^\vee(L_0) = 1;\ L_0^\vee(C) = 0$.

Propozicija 3.1.4.

$$L_n.V_\lambda \subseteq V_{\lambda - nL_0^\vee}$$

Dokaz. Budući da L_0 po definiciji djeluje dijagonalno na V_λ, tada je za $n = 0$ rezultat očit. Neka je sada $n \neq 0, v \in V_\lambda$. Tada imamo:

$$\begin{aligned} L_0 L_n.v &= L_n L_0.v + [L_0, L_n].v \\ &= \lambda(L_0) L_n.v - nL_n.v \\ &= (\lambda(L_0) - n) L_n.v \\ C L_n.v &= L_n C.v = \lambda(C) L_n.v \end{aligned}$$

□

Ako reprezentacija Virasorove algebre ima težinski rastav, tada se njene podreprezentacije ponašaju dobro u odnosu na njega:

Lema 3.1.5. *Neka je* L *Liejeva algebra i* A *konačnodimenzionalna abelova podalgebra. Neka je* V *reprezentacija od* L *koja ima težinski rastav po* A*:*

$$V = \bigoplus_{\lambda \in A^*} V_\lambda$$

Tada se svaka podreprezentacija U *od* V *rastavlja kao:*

$$U = \bigoplus_{\lambda \in A^*} U \cap V_\lambda$$

Dokaz. Neka je $v \in U$. Tada ga možemo pisati u obliku

$$v = \sum_{i=1}^{m} v_j,\ v_j \in V_{\lambda_j}$$

Tada za svaki $a \in A$ vrijedi $a.(v_j) = \lambda_j(a)v_j$. Možemo izabrati $a \in A$ takav da $\lambda_j(a) \neq \lambda_k(a)$ za $k, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ međusobno različite. Sada imamo:

$$\begin{aligned}
v &= v_1 + v_2 + \ldots + v_m \\
a.v &= \lambda_1(a)v_1 + \lambda_2(a)v_2 + \ldots + \lambda_m(a)v_m \\
a^2.v &= \lambda_1(a)^2 v_1 + \lambda_2(a)^2 v_2 + \ldots + \lambda_m(a)^2 v_m \\
&\ldots \\
a^m.v &= \lambda_1(a)^m v_1 + \lambda_2(a)^m v_2 + \ldots + \lambda_m(a)^m v_m
\end{aligned}$$

Zbog toga što je U podreprezentacija, $v, a.v, \ldots, a^m.v \in U$, pa ovo možemo promatrati kao sustav jednadžbi u nepoznanicama $v_1, v_2, \ldots, v_m$ u U. Vidimo da je matrica sustava $(\lambda_i(a)^j)_{ij}$ Vandermondeova, pa zbog izbora a slijedi da joj determinanta nije 0. Slijedi da se svi v_i mogu izraziti kao linearna kombinacija vektora iz U. □

Pogledajmo sada što nam težinski rastav i unitarnost neke reprezentacije Virasorove algebre mogu reći o njoj.

Propozicija 3.1.6. *Neka je V unitarna reprezentacija Virasorove algebre u kojoj C djeluje kao množenje nekim skalarom, te imamo težinski rastav:*

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$$

u kojem su dimenzije V_λ konačne.
Tada je V potpuno reducibilna.

Dokaz. Neka je U podreprezentacija od V.Iz leme 3.1.5 slijedi da vrijedi

$$U = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} U \cap V_\lambda$$

Stavimo $U_\lambda := U \cap V_\lambda$. Budući da su težinski potprostori V_λ konačnodimenzionalni, možemo u svakom od njih naći $U_\lambda^\perp$, ortogonalni komplement od U_λ. Tvrdnja: težinski potprostori su međusobno okomiti.

Neka je $v \in V_\lambda$ za neki $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Tada je zbog $\omega(L_0) = L_0$:

$$\lambda(L_0)\langle v, v\rangle = \langle L_0.v, v\rangle = \langle v, L_0.v\rangle = \overline{\lambda(L_0)}\langle v, v\rangle$$

pa slijedi da je $\lambda(L_0) \in \mathbb{R}$. Sada uzmimo $w \in V_\mu$ za neki $\mu \in \mathfrak{h}^*$ različit od λ. Sada je

$$\lambda(L_0)\langle v, w\rangle = \langle L_0.v, w\rangle = \langle v, L_0.v\rangle = \mu(L_0)\langle v, w\rangle\ .$$

Budući da c djeluje na V kao množenje nekim skalarom, slijedi da je $\lambda(C) = \mu(C)$, pa tada zbog njihove različitosti moramo imati $\lambda(L_0) \neq \mu(L_0)$ iz čega slijedi $\langle v, w\rangle = 0$.

Zbog okomitosti težinskih potprostora imamo

$$U^\perp = \bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} U_\lambda^\perp$$

pa je $V = U \oplus U^\perp$.

Da bi pokazali potpunu reducibilnost od V, ostaje pokazati da je $U^\perp$ uistinu podreprezentacija od V.

Budući da C djeluje kao množenje skalarom, to se svodi na pokazivanje da je za svaki $n \in \mathbb{Z}$ i svaki $x \in U^\perp$, $L_n.x \in U^\perp$. Neka je $u \in U$. Tada imamo

$$\langle L_n.x, u\rangle = \langle x, L_{-n}.u\rangle = 0$$

zbog toga što je $L_{-n}.u \in U$. Zbog proizvoljnosti u slijedi da je $L_n.x \in U^\perp$.

□

3.2 Primjeri reprezentacija Virasorove algebre

Međuserije

Svaka reprezentacija Wittove algebre se može shvatiti i kao reprezentacija Virasorove algebre (na kojoj centralni element C djeluje kao nul- operator). Sama definicija Wittove algebre Witt $= \operatorname{Der}\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ nam daje reprezentaciju Wittove algebre na $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$. Ta reprezentacija se može značajno generalizirati.

Neka je u ovom dijelu $V = \operatorname{span}\{v_k : k \in \mathbb{Z}\}$. Na tom vektorskom prostoru definiramo djelovanje Wittove algebre, uz parametre $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, na sljedeći način:

$$L_n.v_k = -(k + \alpha + \beta(n + 1))v_{n+k}$$

Računski se provjeri da ovako definirani L_n uistinu zadovoljavaju strukturne relacije Wittove algebre. Gore definiranu reprezentaciju ćemo označavati sa $V_{\alpha,\beta}$. (Primijetimo da $V_{0,0}$ odgovara djelovanju Wittove algebre na $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$) ako stavimo $v_k = z^k$.)

U svakoj reprezentaciji $V_{\alpha,\beta}$ $\mathfrak{h}$ djeluje dijagonalno:

$$L_0.v_k = -(k + \alpha + \beta)v_k, c.v_k = 0\ .$$

Tada je

$$V_{\alpha,\beta} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}v_k$$

težinski rastav od $V_{\alpha,\beta}$.

Neka je U netrivijalna podreprezentacija od $V_{\alpha,\beta}$. Prema lemi 3.1.5 slijedi da tada postoji barem jedan $v_k \in U$. Kada bi vrijedilo $k+\alpha+\beta(n+1) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, tada bi $\mathrm{span}\{v_k\}$ bio podreprezentacija od V. Vidimo da se to ostvaruje u slučaju $\beta = 0$, $\alpha = -k$.

Pretpostavimo sada da je U barem dvodimenzionalan. Tada postoje različiti $v_m, v_l \in U$. Budući da U nije cijeli V slijedi da postoji neki $v_k \notin U$, $k \neq m$, $k \neq l$. Tada:

$$\begin{aligned} U \ni L_{m-k}.v_m &= -(m+\alpha+\beta(m-k+1))v_k \\ U \ni L_{l-k}.v_l &= -(l+\alpha+\beta(l-k+1))v_k \end{aligned}$$

pa obadva koeficijenta ispred v_k moraju biti 0. Oduzimanjem imamo $(m-l)(\beta+1) = 0$, što povlači $\beta = -1, \alpha = 1-k$. Vidimo da je sada $U = V \setminus \mathrm{span}\{v_k\}$. Pokazali smo:

Teorem 3.2.1. *Reprezentacija $V_{\alpha,\beta}$ je reducibilna ako i samo ako je $\beta = 0, \alpha \in \mathbb{Z}$ ili $\beta = -1, \alpha \in \mathbb{Z}$. U prvom slučaju, netrivijalna podreprezentacija od $V_{\alpha,\beta}$ je $\mathrm{span}\{v_{-\alpha}\}$, a u drugom $\mathrm{span}\{v_k : k \in \mathbb{Z}, k \neq 1-\alpha\}$.*

Iz gornje rasprave je očito da u oba slučaja $V_{\alpha,\beta}$ nije potpuno reducibilna, te da su netrivijalne podreprezentacije od $V_{\alpha,\beta}$ (kada postoje) ireducibilne. Dakle, $V_{\alpha,\beta}$ ima najviše jednu netrivijalnu podreprezentaciju. Tada možemo definirati:

Definicija 3.2.2. *Ako $V_{\alpha,\beta}$ ima netrivijalnu podreprezentaciju, označimo je s $V'_{\alpha,\beta}$. U suprotnom, stavimo $V_{\alpha,\beta} = V'_{\alpha,\beta}$.*
Ireducibilne reprezentacije $V'_{\alpha,\beta}$ zovemo međuserije.

Pogledajmo sada za koje je $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ reprezentacija $V_{\alpha,\beta}$ unitarna.

Propozicija 3.2.3. *$V_{\alpha,\beta}$ je unitarna reprezentacija ako i samo ako je $\alpha+\beta \in \mathbb{R}, \mathrm{Re}(\beta) = \frac{1}{2}$.*

Dokaz. Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Pretpostavimo prvo da je $V_{\alpha,\beta}$ unitarna. Za svaki $k \in \mathbb{Z}$ imamo

$$-(k+\alpha+\beta)\langle v_k, v_k\rangle = \langle L_0.v_k, v_k\rangle = \langle v_k, L_0.v_k\rangle = -(k+\overline{\alpha+\beta})\langle v_k, v_k\rangle$$

pa slijedi da moramo imati $\alpha+\beta \in \mathbb{R}$.

Također, za svaki $k \in \mathbb{Z}$ imamo:

$$-(k+\alpha) = \langle L_{-1}.v_k, v_{k-1}\rangle = \langle v_k, L_1.v_{k-1}\rangle = -(k-1+\overline{\alpha+2\beta})\,.$$

Budući da je $\alpha+\beta \in \mathbb{R}$ imamo $\overline{\alpha+2\beta} = \alpha+\beta+\overline{\beta}$, pa iz gornje jednakosti slijedi $\beta+\overline{\beta} = 1$.

Ostaje pokazati da za $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ takve da vrijedi $\alpha+\beta \in \mathbb{R}, \mathrm{Re}(\beta) = \frac{1}{2}$ uistinu postoji invarijantni skalarni produkt na $V_{\alpha,\beta}$. Definirajmo $\langle v_k, v_m\rangle = \delta_{km}$. Računajmo:

$$\begin{aligned} \langle L_n.v_k, v_m\rangle &= -(k+\alpha+\beta(n+1))\delta_{n+k,m} \\ \langle v_k, L_{-n}.v_m\rangle &= -(m+\overline{\alpha}+\overline{\beta}(1-n)\delta_{k,m-n} \end{aligned}$$

Vidimo da su obadva produkta jednaka nuli osim u slučaju $m = n + k$. No tada je

$$\begin{aligned} m + \overline{\alpha} + \overline{\beta}(1-n) &= n + k + \overline{\alpha + \beta} - n\overline{\beta} \\ &= k + \alpha + \beta + n(1 - \overline{\beta}) \\ &= k + \alpha + \beta + n\beta \\ &= k + \alpha + \beta(n+1) \end{aligned}$$

□

Djelovanje Virasorove algebre na Fockovom modulu

Neka je $\mu \in \mathbb{C}$ fiksan, te $B(\mu, 1)$ $\mathcal{H}$-modul definiran ranije. Za $n \in \mathbb{Z}$ definiramo operator:

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} : a_{-j} a_{j+n} :$$

gdje je oznaka $: a_{-j} a_{j+n} :$ (tzv. *normalan uređaj*) definirana s:

$$: a_l a_k := \begin{cases} a_l a_k & \text{ako je } l \le k \\ a_k a_l & \text{ako je } k \le l \end{cases}$$

Propozicija 3.2.4. *Neka je $p \in B(\mu, 1)_d$ za neki $d \in \mathbb{N}_0$. Tada je $L_n.p \in B(\mu, 1)_{d-n}$, za svaki $n \in \mathbb{Z}$.*

Dokaz. Prvo pokažimo da su L_n uistinu dobro definirani operatori. Za svaki $p \in B(\mu, 1)$ postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je za sve $n \ge N$, $a_n.p = n\frac{\partial}{\partial x_n} p = 0$.
Budući da normalan uređaj uvijek "gura" operator s većim indeksom da djeluje prvi, slijedi da će $L_n.p$ biti konačna suma za svaki $p \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$.

Neka je sada $p \in B(\mu, 1)_d$. Tada je prema propoziciji 2.3.5 $: a_{-j} a_{j+n} : .p \in B(\mu, 1)_{d-n}$ za svako $j \in \mathbb{Z}$, pa rezultat slijedi. □

Prema komutacijskim relacijama Heisenbergove algebre slijedi da $a_l a_k$ komutiraju uvijek osim u slučaju $l + k = 0$. Zato možemo pisati:

$$L_n = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{-j} a_{j+n}, & \text{ako je } n \ne 0 \\ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{-j} a_j, & \text{ako je } n = 0 \end{cases}$$

Napomena 3.2.5. *Normalan uređaj je uistinu potreban u slučaju L_0:*

$$(\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{-j} a_j).1 = \mu^2 + \sum_{j \in \mathbb{N}} j \frac{\partial}{\partial x_j}(x_j) = \mu^2 + \sum_{j \in \mathbb{N}} j$$

Pokazat ćemo:

Teorem 3.2.6. *Operatori $L_n, n \in \mathbb{Z}$ zadovoljavaju komutatorske relacije Virasorove algebre.*

pa ako stavimo da $C \in \mathrm{Vir}$ djeluje na $B(\mu, 1)$ kao identiteta, moći ćemo shvatiti $B(\mu, 1)$ i kao Vir-modul.

U dokazu teorema pomoći će nam sljedeća lema:

Lema 3.2.7. *U $B(\mu, 1)$ vrijedi:*

$$[a_n, L_k] = na_{n+k}$$

Dokaz. Neka je $p \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$. Vidjeli smo da je tada za dovoljno velike $n \in \mathbb{N}$, $a_n.p = 0$, pa će u sljedećem računu sve sume biti konačne.
Prvi slučaj: $k \neq 0$

$$\begin{aligned}
[a_n, L_k].p &= \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}}[a_n, a_{-j}a_{k+j}].p \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}}[a_n, a_{-j}]a_{k+j}.p + a_{-j}[a_n, a_{k+j}].p \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\delta_{n-j,0}\, na_{k+j}.p + \delta_{n+k+j,0}\, na_{-j}.p \\
&= \frac{1}{2}na_{n+k}.p + \frac{1}{2}na_{n+k}.p \\
&= na_{n+k}.p
\end{aligned}$$

Drugi slučaj: $k = 0$
Budući da a_0 komutira sa svim a_j, $j \in \mathbb{Z}$ za njega lema vrijedi trivijalno. Pretpostavimo sada da je $n \neq 0$.

$$\begin{aligned}
[a_n, L_0].p &= \frac{1}{2}[a_n, a_0^2].p + \sum_{j\in\mathbb{N}}[a_n, a_{-j}]a_j.p + a_{-j}[a_n, a_j].p \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}}\delta_{n-j,0}\, na_j.p + \delta_{n+j,0}\, na_j.p \\
&= na_n.p
\end{aligned}$$

□

Pređimo na dokaz teorema.

Dokaz. Kao i u dokazu leme, pokazujemo da relacija vrijedi pri djelovanju na proizvoljni $p \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$. Radi jednostavnosti, nećemo zapisivati djelovanje na p u računima.
Prvi slučaj: Pretpostavimo da je $m + n \neq 0$ i da je $m \neq 0$.

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}}[a_{-j}a_{j+m}, L_n] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}}[a_{-j}, L_n]a_{j+m} + a_{-j}[a_{j+m}, L_n] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}} -ja_{n-j}a_{j+m} + (j+m)a_{-j}a_{n+m+j}
\end{aligned}$$

Zbog $m + n \neq 0$ operatori u gornjoj sumi komutiraju, pa možemo razdvojiti sumu na dvije sume. Promjenom indeksa $(j \to n + j)$ u prvoj sumi imamo:

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-n-j)a_{-j}a_{n+m+j} + \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}}(j+m)a_{-j}a_{n+m+j} \\
&= (m-n)\frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{-j}a_{n+m+j} \\
&= (m-n)L_{m+n}
\end{aligned}$$

Drugi slučaj: Pretpostavimo da je $m + n = 0$.
Slučaj kada su i m i n jednaki nuli je trivijalan, pa pretpostavimo da je $m > 0$.

$$\begin{aligned}
[L_m, L_{-m}] &= \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}}[a_{-j}a_{j+m}, L_{-m}] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}}[a_{-j}, L_{-m}]a_{j+m} + a_{-j}[a_{j+m}, L_{-m}] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}} -ja_{-m-j}a_{j+m} + (j+m)a_{-j}a_j
\end{aligned}$$

Primijetimo da sada ne možemo razdvojiti sumu kao u prvom slučaju jer operatori unutar sume ne komutiraju. Pokušat ćemo normalno urediti član unutar sume koristeći komutator.

Za to treba gledati tri slučaja:

1) $j < -m$ (Nijedan član nije normalno uređen)

$$\begin{aligned}
-ja_{-m-j}a_{j+m} + (j+m)a_{-j}a_j &= -j : a_{-m-j}a_{j+m} : +(j+m) : a_{-j}a_j : -j(-m-j) + (j+m)(-j) \\
&= -j : a_{-m-j}a_{j+m} : +(j+m) : a_{-j}a_j :
\end{aligned}$$

2) $-m < j < 0$ (Prvi član je normalno uređen, a drugi ne)

$$-ja_{-m-j}a_{j+m} + (j+m)a_{-j}a_j = -j : a_{-m-j}a_{j+m} : +(j+m) : a_{-j}a_j : -j(j+m)$$

3) $j > 0$ (Oba člana su normalno uređena) Ništa ne treba mijenjati.
U obadva rubna slučaja $j = -m, j = 0$ iz svakog od njih dobivamo ma_0^2.
Sada vidimo da slaganjem ovih suma dobivamo:

$$[L_m, L_{-m}] = \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}} -j : a_{-m-j}a_{j+m} : +(j+m) : a_{-j}a_j : +\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} j(m-j)$$

Istom zamjenom varijabli kao i prije:

$$[L_m, L-m] = 2mL_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} j(m-j)$$

Korištenjem formula za zbroj prvih $m-1$ brojeva i prvih $m-1$ kvadrata dobivamo Virasorove relacije. □

Napomena 3.2.8. *Ovaj teorem se može generalizirati na sljedeći način: Za neki $\lambda \in \mathbb{R}$, možemo definirati sljedeće operatore na $B(\mu, 1)$:*

$$\begin{aligned} \tilde{L}_0 &= \frac{a_0^2 + \lambda^2}{2} + \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{-j}a_j \\ \tilde{L}_n &= \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{-j}a_{j+n} + i\lambda n a_n, \ \textit{za } n \neq 0 \end{aligned}$$

Sličnim računom kao u prethodnom teoremu se može pokazati da operatori $\tilde{L}_n$ zadovoljavaju:

$$[\tilde{L}_m, \tilde{L}_n] = (m-n)\tilde{L}_{m+n} + \delta_{m,-n}\frac{m^3 - m}{12}(1 + 12\lambda^2)\,.$$

pa ako stavimo da C djeluje na $B(\mu, 1)$ kao množenje s $1 + 12\lambda^2$, možemo shvatiti $B(\mu, 1)$ kao Vir*-modul. (Dakle, prethodni teorem je posebni slučaj ove konstrukcije za $\lambda = 0$.) Za ostatak poglavlja, fiksirajmo neki $\lambda \in \mathbb{R}$ i pišimo L_n umjesto $\tilde{L}_n$*

U cjelini o Heisenbergovoj algebri smo pokazali da je za $\mu \in \mathbb{R}$, $B(\mu, 1)$ unitarna kao reprezentacija Heisenbergove algebre.

Propozicija 3.2.9. *$B(\mu, 1)$ je za $\mu \in \mathbb{R}$ unitarna reprezentacija Virasorove algebre.*

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
L_n^* &= \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}}(a_{-j}a_{j+n})^* + (i\lambda n a_n)^* \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{-n-j}a_j - i\lambda n a_{-n} \\
&= [k = n + j] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{-k}a_{k-n} + i\lambda(-n)a_{-n} \\
&= L_{-n}
\end{aligned}
$$

$L_0^* = L_0$ je očito iz definicije tog operatora. □

Sada ćemo vidjeti ima li i ova reprezentacija težinski rastav. U tome će nam pomoći sljedeća lema:

Lema 3.2.10. *Neka je $p \in B(\mu, 1)_d$ za neki $d \in \mathbb{N}_0$. Tada je*

$$L_0.p = (\frac{\mu^2 + \lambda^2}{2} + d)p\ .$$

Dokaz. Dovoljno je pokazati da L_0 tako djeluje na monomima.
Neka je $j \in \mathbb{N}$. Tada je

$$a_{-j}a_j.(x_{j_1}^{n_1}x_{j_2}^{n_2}\dots x_{j_k}^{n_k}) = \begin{cases} j_i n_i(x_{j_1}^{n_1}x_{j_2}^{n_2}\dots x_{j_k}^{n_k}), & \text{ako je } j = j_i \text{ za neki } i = 1, 2, \dots, k \\ 0, & \text{ako } j \notin \{j_1, j_2, \dots, j_k\} \end{cases}$$

Tada imamo:

$$
\begin{aligned}
L_0.(x_{j_1}^{n_1}x_{j_2}^{n_2}\dots x_{j_k}^{n_k}) &= \frac{\mu^2+\lambda^2}{2}(x_{j_1}^{n_1}x_{j_2}^{n_2}\dots x_{j_k}^{n_k}) + \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{-j}a_j.(x_{j_1}^{n_1}x_{j_2}^{n_2}\dots x_{j_k}^{n_k}) \\
&= (\frac{\mu^2+\lambda^2}{2} + \sum_{i=1}^{k} j_i n_i)(x_{j_1}^{n_1}x_{j_2}^{n_2}\dots x_{j_k}^{n_k})\ .
\end{aligned}
$$

□

Budući da C djeluje na $B(\mu, 1)$ množenjem s $1 + 12\lambda^2$ slijedi da je upravo

$$B(\mu, 1) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} B(\mu, 1)_d$$

težinski rastav od $B(\mu, 1)$.

Prema propoziciji 3.1.6 imamo

Korolar 3.2.11. *Za $\mu \in \mathbb{R}$, $B(\mu, 1)$ je potpuno reducibilna kao reprezentacija Virasorove algebre.*

3.3 Reprezentacije najveće težine

Definicija i osnovna svojstva

Definicija 3.3.1. *Neka su $c, h \in \mathbb{C}$. Vir-modul V zovemo modulom najveće težine ako postoji $v \in V$ takav da:*

1. $C.v = cv$
2. $L_0.v = hv$
3. *V je razapet s elementima oblika $L_{-i_k} \dots L_{-i_2} L_{-i_1}.v$, $0 \le i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k, i_j \in \mathbb{Z}$.*

(c, h) zovemo najvećom težinom modula, a v vektorom najveće težine.

Primijetimo da je zbog PBW teorema, treći uvjet ekvivalentan sa time da vrijedi $U(\mathrm{Vir}_{\le}).v = V$.

Teorem 3.3.2. *Ako je V Vir-modul najveće težine s najvećom težinom (c, h), tada ima težinski rastav:*

$$V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_{h+n}$$

gdje je $V_{h+n} = \{x \in V : L_0.x = (h+n)x\}$. Također, V_{h+n} je razapet s

$$\{L_{-i_k} \dots L_{i-2} L_{-i_1}.v : i_j \in \mathbb{Z}, 0 \le i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k, \sum_{j=1}^{k} i_j = n\}\ .$$

pa vrijedi $\dim V_{h+n} \le p(n)$.

Dokaz. Budući da C komutira sa svim operatorima, prvo i treće svojstvo daju da djeluje kao množenje kompleksnim skalarom c na cijelom V.

Neka su $0 \le i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k, i_j \in \mathbb{Z}$. Indukcijom se lako može pokazati sljedeća jednakost u $U(\mathrm{Vir})$:

$$[L_0, L_{-i_k} \dots L_{-i_2} L_{-i_1}] = (i_1 + i_2 + \dots + i_k) L_{-i_k} \dots L_{-i_2} L_{-i_1}$$

pa slijedi da je

$$\begin{aligned} L_0 L_{-i_k} \dots L_{-i_2} L_{-i_1}.v &= L_{-i_k} \dots L_{-i_2} L_{-i_1} L_0.v + [L_0, L_{-i_k} \dots L_{-i_2} L_{-i_1}].v \\ &= (h + i_1 + i_2 + \dots + i_k) L_{-i_k} \dots L_{-i_2} L_{-i_1}.v \end{aligned}$$

Dakle, C, L_0 djeluju dijagonalno na V. Sada vidimo da imamo rastav:

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$$

u kojem su V_λ različiti od 0 samo ako je $\lambda(C) = c, \lambda(L_0) = h + n$, za neki $n \in \mathbb{N}$, i u tom slučaju je V_λ razapet s

$$\{L_{-i_k} \dots L_{i-2} L_{-i_1}.v : i_j \in \mathbb{Z}, 0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k, \sum_{j=1}^{k} = n\} .$$

Budući da se funkcionali iz $\mathfrak{h}^*$ razlikuju jedino u djelovanju na L_0, označavat ćemo $V_\lambda = V_{\lambda(L_0)} = V_{h+n}$. □

Napomena 3.3.3. *Prema propoziciji 3.1.4,* $L_m.V_{h+n} \subseteq V_{h+n-m}$.

Korolar 3.3.4. *Neka je V modul najveće težine s vektorom najveće težine v. Tada je za $k > 0$*

$$L_k.v = 0 .$$

Dokaz. Zbog $L_0.v = hv$, $v \in V_h$. Prema gornjoj napomeni, za $k > 0$, $L_k.v \in V_{h-k} = 0$, pa je $L_k.v = 0$. □

Sada smo u prilici iskazati jedan važan teorem koji klasificira određenu podfamiliju prostih Vir-modula.

Teorem 3.3.5. *(O. Mathieu)*
Svaki prosti Vir*-modul koji ima težinski rastav sa konačnodimenzionalnim težinskim potprostorima je jedno od sljedećeg: modul najveće težine, modul najmanje težine ili međuserija.*

Dokaz teorema se može naći u [7]. Sada ćemo vidjeti neke načine na koje možemo dobiti module najveće težine.

Definicija 3.3.6. *Neka je V* Vir*-modul. Nenul $v \in V$ za kojeg vrijedi:*

$$U(\mathrm{Vir}_>).v = 0$$

ćemo zvati singularnim vektorom.

Sljedeće dvije propozicije će pokazati važnost singularnih vektora.

Propozicija 3.3.7. *Neka je V* Vir*-modul koji ima težinski rastav, te $v \in V$ singularni vektor. Tada je $U(\mathrm{Vir}).v$ podmodul najveće težine.*

Dokaz. Prema PBW teoremu, $U(\mathrm{Vir}).v = U(\mathrm{Vir}_{\leq}).v$, pa je treći uvjet ispunjen. Prvi i drugi uvjet su ispunjeni jer $\mathfrak{h}$ djeluje dijagonalno na V. □

Propozicija 3.3.8. *Neka je V Vir-modul najveće težine s vektorom najveće težine v. Tada je V ireducibilan ako i samo ako u V nema singularnih vektora osim $\mu v, \mu \in \mathbb{C}$.*

Dokaz. Neka su $(c, h) \in \mathbb{C}^2$ najveće težine od V. Pretpostavimo da postoji singularni vektor $w \in V$ koji nije u $\mathbb{C}v = V_h$, to jest $w \in V_{h+N}$ za neki $N > 0$. Tada je $U(\mathrm{Vir}).w$ pravi podmodul od V, budući da je

$$U(\mathrm{Vir}).w = U(\mathrm{Vir}_{\leq}).w \subseteq \bigoplus_{n=N}^{\infty} .$$

Obratno, pretpostavimo da postoji pravi podmodul U od V. Tada $v \notin U$, jer bi inače imali $V = U(\mathrm{Vir}).v \subseteq U$. Izaberimo nenul vektor $w \in U$ koji se nalazi na minimalnom nivou V_{h+N}. Budući da $v \notin U$, N je strogo veći od nule. No tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo $L_n.w \in U \cap V_{h+N-n}$, pa zbog minimalnosti imamo $L_n.w = 0$. Dakle, w je singularni vektor koji nije u $\mathbb{C}v$. □

Sad ćemo pokazati neke konkretne primjere modula najveće težine.

Promatrajmo $B(\mu, 1)$ kao Vir-modul na način opisan u napomeni 3.2.8 za neki $\lambda \in \mathbb{R}$. Lako se vidi da je 1 singularan vektor u $B(\mu, 1)$. Budući da imamo

$$\begin{aligned} C.1 &= (1 + 12\lambda^2)1 \\ L_0.1 &= \frac{\mu^2 + \lambda^2}{2} 1 \end{aligned}$$

slijedi da je $U(\mathrm{Vir}).1$ modul najveće težine s najvećom težinom $(1 + 12\lambda^2, \frac{\mu^2+\lambda^2}{2})$.

Pokažimo da je za $\mu \in \mathbb{R}$, $U(\mathrm{Vir}).1$ prost modul. Ako je $\mu \in \mathbb{R}$ tada je $U(\mathrm{Vir}).1$ unitaran, pa je i poluprost. Dakle, kad ne bi bio prost, mogli bi ga rastaviti na dva netrivijalna podmodula $U(\mathrm{Vir}).1 = U \oplus U^{\perp}$ i 1 bi morao biti u jednom od njih. Tada bi taj modul morao biti cijeli $U(\mathrm{Vir}).1$ i rastav $U \oplus U^{\perp}$ bi bio trivijalan.

Stavimo sada $\lambda = 0$ i nađimo još neke singularne vektore u $B(\mu, 1)$ ovisno o μ.

Promatrajmo $x_1 \in B(\mu, 1)_1$. Budući da djelovanje Virasorove algebre na $B(\mu, 1)$ poštuje gradaciju, slijedi da je za $n > 1, L_n.x_1 = 0$. Za $n = 1$ imamo $L_1.x_1 = \mu$. Dakle, x_1 je singularan u $B(0, 1)$.

Može se pokazati da nema singularnih vektora stupnja 2 i 3 niti za jedan $\mu \in \mathbb{C}$, te da je na stupnju 4 za $\mu = 0$, $x_1^4 + 6x_2^2 - 6x_1x_3$ jedini singularni vektor (do na množenje skalarom). Za $\mu \neq 0$ na stupnju 4 nema singularnih vektora.

U sljedećoj cjelini definirati ćemo univerzalne Vir-module najveće težine.

Vermaov modul

Neka su $c, h \in \mathbb{C}$. Definiramo djelovanje $\mathrm{Vir}_{\geq}$ na $\mathbb{C}$ s

$$\begin{aligned} L_0.1 &= h \\ C.1 &= c \\ x.1 &= 0, \forall x \in \mathrm{Vir}_{>} \end{aligned}$$

Definicija 3.3.9.
$$M(c,h) := \mathrm{Ind}_{\mathrm{Vir}_{\geq}}^{\mathrm{Vir}} \mathbb{C} = U(\mathrm{Vir}) \otimes_{U(\mathrm{Vir}_{\geq})} \mathbb{C}$$
$M(c,h)$ zovemo Vermaov modul s najvećom težinom (c,h).

Pokažimo neka osnovna svojstva Vermaova modula:

Propozicija 3.3.10. *Neka je $M(c,h)$ Vermaov modul težine (c,h). Tada vrijedi:*

1. *$M(c,h)$ je modul najveće težine s najvećom težinom (c,h) (uz $v := 1 \otimes 1$).*

2. *$M(c,h)$ ima težinski rastav*
$$M(c,h) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} M(c,h)_{h+n}$$
gdje su $M(c,h)_{h+n}$ svojstveni potprostori od L_0 koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $h+n$.
Baza od $M(c,h)_{h+n}$ je
$$\{L_{-i_k} \dots L_{-i_1}.v : 0 < i_1 \leq \dots \leq i_k, \ \sum_j i_j = n\}.$$
Slijedi $\dim M(c,h)_{h+n} = p(n)$.

3. *$M(c,h)$ nije poluprost.*

4. *$M(c,h)$ ima jedinstveni maksimalni pravi podmodul $J(c,h)$, i on je graduiran s obzirom na graduaciju iz druge točke.*

Dokaz. 1. Slijedi direktno iz definicije Vermaovog modula.

2. Prema teoremu 3.3.2 slijedi da $M(c,h)$ ima taj težinski rastav, te da su $M(c,h)_{h+n}$ razapeti s
$$\{L_{-i_k} \dots L_{-i_1}.v : 0 < i_1 \leq \dots \leq i_k, \ \sum_j i_j = n\}.$$

Ostaje pokazati da je taj skup linearno nezavisan. Kad bi bio linearno zavisan, slijedilo bi da je

$$\{L_{-i_k} \dots L_{-i_1} : 0 < i_1 \leq \dots \leq i_k, \ \sum_j i_j = n\}$$

linearno zavisan u $U(\mathrm{Vir})$ što je u kontradikciji s PBW teoremom.

3. Kada bi imali netrivijalne podmodule V, W i rastav $M(c,h) = V \oplus W$, slijedilo bi da se u jednom od ta dva podmodula mora nalaziti v. Budući da je $M(c,h)$ kao Vir-modul generiran s v, slijedi da su V, W trivijalni.

4. Sada smo vidjeli da nijedan pravi podmodul od $M(c,h)$ ne može sadržavati v. Jedinstveni maksimalni pravi podmodul od $M(c,h)$ dobivamo kao sumu svih pravih podmodula od $M(c,h)$ (ona je sigurno prava jer nijedan od njih ne sadrži v). $J(c,h)$ je graduiran po lemi 3.1.5.

□

Korolar 3.3.11. *Prosti* Vir *modul najveće težine s najvećom težinom* (c,h) *postoji i jedinstven je do na izomorfizam.*
Označavat ćemo ga s $V(c,h)$.

Dokaz. Definirajmo $V(c,h) := M(c,h)/J(c,h)$. Odmah se vidi da je to prosti modul najveće težine s težinom najvećom (c,h). Jedinstvenost slijedi iz jedinstvenosti od $J(c,h)$.

□

Iz teorema 3.3.2 i propozicije 3.3.10 slijedi:

Korolar 3.3.12. $M(c,h)$ *je inicijalan objekt u kategoriji svih* Vir*-modula najveće težine s najvećom težinom* (c,h).

Pokažimo na primjeru da $M(c,h)$ uistinu može sadržavati netrivijalne podmodule.

U prošloj cjelini smo vidjeli da će za svaki singularni vektor $w \in M(c,h)$, $U(\mathrm{Vir}).w$ biti netrivijalni podmodul od $M(c,h)$. Potražimo singularne vektore u $M(c,h)_{h+1}$ i $M(c,h)_{h+2}$:

Budući da je $M(c,h)_{h+1} = \mathrm{span}(L_{-1}.v)$, dosta je promatrati djelovanje $\mathrm{Vir}_>$ na taj vektor. Zbog toga što djelovanje Vir na $M(c,h)$ poštuje gradaciju, $L_n.M(c,h)_{h+1} = 0$ za $n > 1$.

$$L_1 L_{-1}.v = [L_1, L_{-1}].v + L_{-1} L_1.v = 2L_0.v = 2hv\ .$$

Iz ovoga slijedi da je $L_{-1}.v$ singularni vektor ako i samo ako je $h = 0$. Tada je $U(\mathrm{Vir}\ .(L_{-1}.v)$ modul najveće težine s najvećim težinama $(c, h+1)$. Općenito, singularni vektor na ntom nivou će generirati modul najveće težine s najvećim težinama $(c, h+n)$.

$M(c,h)_{h+2} = \mathrm{span}(L_{-1}L_{-1}.v, L_{-2}.v)$ Promatramo djelovanje L_1, L_2 na te vektore.

Izračuna se:

$$L_nL_{-2}.v = [L_n, L_{-2}].v = \begin{cases} 3L_{-1}.v, & n = 1 \\ (4h + \frac{1}{2}c)v, & n = 2 \end{cases}$$

$$L_nL_{-1}L_{-1}.v = \begin{cases} 4hL_{-1}.v, & n = 1 \\ 6hv, & n = 2 \end{cases}$$

Dakle, za $h = 0$, $L_{-1}L_{-1}.v$ je singularan vektor i on je jedini takav do na množenje skalarom (zbog $L_1L_{-2}.v = 3L_{-1}.v$)).

Ako je $h \neq 0$, stavimo $w = L_{-1}L_{-1}.v + \lambda L_{-2}.v, \lambda \in \mathbb{C}$. Tada je $\mathrm{Vir}_{>}.v = 0$ ako i samo ako su $L_1.w = L_2.w = 0$, a to vrijedi ako i samo ako je sljedeći sustav linearnih jednadžbi zadovoljen:

$$\begin{aligned} 4h + 3\lambda &= 0 \\ 8h + c &= 9 \end{aligned}$$

Dakle, za $h \neq 0$ se na drugom nivou pojavljuje singularni vektor ako i samo ako je $c = 9 - 8h$ i on je $w = L_{-1}L_{-1}.v - \frac{4h}{3}L_{-2}.v$ te je jedinstven do na množenje skalarom.

Pokušajmo definirati skalarni produkt na $M(c, h)$ uz koji bi on bio unitarni Vir-modul. Radi kompaktnosti, pisat ću elemente iz $M(c, h)$ kao $P.v$, gdje P predstavlja neki sortirani polinom u $L_{-1}, L_{-2}, \ldots$ Zbog unitarnosti, skalarni produkt bi trebao zadovoljavati:

$$\langle P.v,\ Q.v\rangle = \langle v, (\omega(P)Q).v\rangle$$

Sad, ako stavimo da je $\langle v, v\rangle = 1,\ v \perp \mathrm{Vir}_{<}.v$, definiramo:

$$\langle P.v,\ Q.v\rangle = [v]\omega(P)Q.v$$

skalar uz v u gradaciji od $M(c, h)$ danom sa propozicijom 3.3.10. Iz svojstava ω vidi se da je ovakva forma hermitska. No ne znamo je li tako zadana bilinearna forma nedegenerirana i pozitivna. Sljedeća propozicija pokazuje vezu nedegeneriranosti i $J(c, h)$:

Propozicija 3.3.13. $J(c, h) = Rad(\langle\cdot, \cdot\rangle)$

Dokaz. Pokažimo prvo da je *Rad* uistinu podmodul od Vir. Neka je $P.v$ takav da $\langle P.v, Q.v\rangle = 0, \forall Q.v \in M(c, h)$. Neka je $L_n \in \mathrm{Vir}$, tada imamo:

$$\langle L_n.(P.v), Q.v\rangle = \langle P.v, L_{-n}(Q.v)\rangle = 0$$

za proizvoljan $Q.v \in M(c, h)$. *Rad* očito ne sadrži v, pa je unutar $J(c, h)$.

Neka je sada $P.v \in J(c, h)$. Tada je i $\omega(Q)P.v \in J(c, h)$. Budući da je $J(c, h)$ graduiran podmodul, tada je nužno $[v]\omega(Q)P.v = 0$. □

Vidimo da se forma prirodno prenosi na $V(c, h)$ i da je na njemu nedegenerirana.

Kao i u dokazu propozicije 3.1.6, pokaže se da su težinski potprostori međusobno okomiti u odnosu na formu. Dakle, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je nedegenerirana ako i samo ako je $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{M(c,h)_{h+n}}$ nedegenerirana za svaki $n \in \mathbb{N}_0$. Sa $\det(c, h)_n$ ćemo označiti determinantu matrice forme restriktirane na $M(c, h)_{h+n}$. Primijetimo da su koeficijenti te matrice polinomi u c, h, pa će i $\det(c, h)_n$ biti polinom u c, h. Iz opće teorije bilinearnih formi slijedi sljedeća propozicija:

Propozicija 3.3.14. *Bilinearna forma $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je nedegenerirana ako i samo ako je* $\det(c, h)_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Kombinirajući propozicije 3.3.13 i 3.3.14 dobivamo

Korolar 3.3.15. *$M(c, h) = V(c, h)$ ako i samo ako je* $\det(c, h)_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Sljedeći važan teorem navodimo bez dokaza.

Teorem 3.3.16. *(Kacova formula za determinantu)*

$$det(c, h)_n = A \prod_{\substack{r,s\in\mathbb{N} \\ 1\le rs\le n}} (h - h_{r,s}(c))^{p(n-rs)}$$

gdje je A neka pozitivna konstanta, a

$$h_{r,s} = \frac{1}{48}[(13 - c)(r^2 + s^2) + \sqrt{(c - 1)(c - 25)}(r^2 - s^2) - 24rs + 2(c - 1)] .$$

Pomoću Kacove formule možemo lako vidjeti kada je $M(c, h)$ prost. za neke jednostavne c.

Korolar 3.3.17.

1. *$M(1, h) = V(1, h)$ ako i samo ako je $h \neq \frac{m^2}{4}, m \in \mathbb{Z}$.*
2. *$M(0, h) = V(0, h)$ ako i samo ako je $h \neq \frac{m^2-1}{24}, m \in \mathbb{Z}$.*

Dokaz.

$$h_{r,s}(1) = \frac{1}{48}[12(r^2 + s^2) - 24rs] = \frac{1}{4}(r - s)^2$$

pa zato imamo

$$det(1, h)_n = C \prod_{\substack{r,s\in\mathbb{N} \\ 1\le rs\le n}} (h - \frac{1}{4}(r - s)^2)^{p(n-rs)}$$

iz čega odmah slijedi da je $det(1, h)_n \neq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$ ako i samo ako je $h \neq \frac{m^2}{4}, m \in \mathbb{Z}$.

Za drugi dio,

$$\begin{aligned} h_{r,s}(0) &= \frac{1}{48}[13(r^2+s^2)+5(r^2-s^2)-24rs-2] \\ &= \frac{1}{48}[18r^2-24rs+8s^2-2] \\ &= \frac{1}{24}[(3r-2s)^2-1] \end{aligned}$$

a ostatak argumenta je analogan onom iz prvog dijela. □

Opisat ćemo $V(c,h)$ i za puno veći skup parametara $(c,h) \in \mathbb{R}^2$.

Teorem 3.3.18. *1. $M(c,h) = V(c,h)$ za $c > 1, h > 0$.*

2. $V(c,h)$ je unitarna za $c \geq 1, h \geq 0$.

Dokaz. Pokazat ćemo da je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $det(c,h)_n > 0$ za $c > 1, h > 0$. Prvo ćemo zapisati $det(c,h)_n$ na drugi način. Stavimo

$$\phi_{r,r}(c,h) = h - h_{r,r} = h + \frac{1}{24}(r^2-1)(c-1)$$

i za $r \neq s$

$$\phi_{r,s}(c,h) = (h-h_{r,s})(h-h_{s,r}) \; .$$

Tada prema Kacovoj formuli možemo pisati:

$$det(c,h)_n = C \prod_{\substack{r,s \in \mathbb{N} \\ s \leq r \\ 1 \leq rs \leq n}} \phi_{r,s}(c,h)^{p(n-rs)} \; .$$

Očito je $\phi_{r,r} > 0$ za $c > 1, r \in \mathbb{N}$. Računom se može pokazati da za $r \neq s$ vrijedi:

$$\phi_{r,s}(c,h) = (h - \frac{(r-s)^2}{4})^2 + \frac{h}{24}(r^2+s^2-2)(c-1) + \frac{1}{576}(r^2-1)(s^2-1)(c-1)^2 + \frac{1}{48}(c-1)(r-s)^2(rs+1)$$

pa je i $\phi_{r,s}(c,h) > 0$ za $h > 0, c > 1, r, s \in \mathbb{N}$. Time je prvi dio pokazan.

Da bi pokazali drugi dio, treba pokazati da je za svaki $n \in \mathbb{N}$, matrica bilinearne forme ograničene na $M(c,h)_{h+n}$ pozitivno semidefinitna za $c \geq 1, h \geq 0$. Budući da su koeficijenti te matrice polinomi u c, h, ona neprekidno ovisi o c, h. Svojstvene vrijednosti matrice neprekidno ovise o njoj, a $det(c,h)_n > 0$ za $c > 1, h > 0$, pa je dovoljno naći jedan fiksan $(c_0, h_0), c_0 > 1, h_0 > 0$ za koji je reprezentacija $V(c_0,h_0)$ unitarna. No našli smo i više takvih primjera u prošloj cjelini. □

3.4 Struktura Vermaovih modula

Izlaganje u ovom poglavlju slijedi [5]. Dokazi svih teorema koji su ovdje navedeni bez dokaza mogu se tamo naći.

Klasifikacija najvećih težina

U dokazu teorema 3.3.18 smo definirali $\phi_{r,s} \in \mathbb{C}[c,h]$ za $r,s \in \mathbb{N}$ i pokazali da se Kacova formula može pisati u obliku

$$det(c,h)_n = A \prod_{\substack{r,s\in\mathbb{N} \\ s\le r \\ 1\le rs\le n}} \phi_{r,s}(c,h)^{p(n-rs)} .$$

Stavimo

$$\begin{aligned} D(c,h) &= \{(r,s) \in \mathbb{N}^2 : r \geq s, \phi_{r,s}(c,h) = 0\} \\ V_{r,s} &= \{(c,h) \in \mathbb{C}^2 : \phi_{r,s}(c,h) = 0\} . \end{aligned}$$

Uvodimo jednu korisnu parametrizaciju (c,h). Neka su $P,Q \in \mathbb{C}^\times, m \in \mathbb{C}$. Definiramo

$$c_{P,Q} = 13 - 6(\frac{P}{Q} + \frac{Q}{P}), \quad h_{P,Q:m} = \frac{m^2 - (P-Q)^2}{4PQ} .$$

Može se pokazati:

Lema 3.4.1. *Za svaki $(c,h) \in \mathbb{C}$ postoje $P,Q \in \mathbb{C}^\times$, $m \in \mathbb{C}$ takvi da vrijedi $(c,h) = (c_{P,Q}, h_{P,Q:m})$.*
$(c_{P,Q}, h_{P,Q:m}) = (c_{P',Q'}, h_{P',Q':m'})$ ako i samo ako je

$$(P',Q',m') = \lambda(P,Q,\pm m) \text{ ili } (P',Q',m') = \lambda(Q,P,\pm m)$$

za neki $\lambda \in \mathbb{C}^\times$.

Direktnim računom se vidi da vrijedi

$$\phi_{r,r}(c_{P,Q}, h_{P,Q:m}) = \frac{1}{4PQ}(m - Pr + Qr)(m + Pr - Qr)$$

te za $r \neq s$

$$\phi_{r,s}(c_{P,Q}, h_{P,Q:m}) = \frac{1}{(4PQ)^2}(m - Pr + Qs)(m + Pr - Qs)(m - Qr + Ps)(m + Qr - Ps) .$$

Sada vidimo da je $D(c_{P,Q}, h_{P,Q:m})$ sadržan u uniji pravaca $Pr - Qs = \pm m$, $Qr - Ps = \pm m$. Budući da je $D(c,h) \subseteq \mathbb{Z}^2$ pomoći će nam sljedeća lema:

Lema 3.4.2. *Neka je $y = kx + l$ pravac u $\mathbb{C}^2$. Ako je $k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, tada pravac sadrži najviše jednu cjelobrojnu točku. Ako je $k \in \mathbb{Q}$ i pravac sadrži cjelobrojnu točku, tada mora sadržavati njih beskonačno mnogo.*

Dokaz. Neka je $k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$. Kad bi na pravcu ležale dvije različite cjelobrojne točke $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ imali bi $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \in \mathbb{Q}$.

Neka je sada $k \in \mathbb{Q}$ i (x, y) cjelobrojna točka koja leži na pravcu. Zapišimo $k = \frac{p}{q}$ za neke $p, q \in \mathbb{Z}$. Tada je za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $(x + nq, y + n)$ cjelobrojna točka na pravcu. □

Zbog ove leme, najveće težine (c, h) ćemo podijeliti u tri klase:

$$
\begin{aligned}
V &= \{(c,h) \in \mathbb{C}^2 : D(c,h) = \emptyset\} \\
I &= \{(c,h) \in \mathbb{C}^2 : D(c,h) \neq \emptyset, \frac{P}{Q} \notin \mathbb{Q}\} \\
R &= \{(c,h) \in \mathbb{C}^2 : D(c,h) \neq \emptyset, \frac{P}{Q} \in \mathbb{Q}\} .
\end{aligned}
$$

Prema prethodnoj lemi za $(c, h) \in I$, $D(c, h)$ je beskonačan, a za $(c, h) \in R$, $D(c, h)$ je jednočlan.

Klasa R se rastavlja na dva dijela:

$$
\begin{aligned}
R^+ &= \{(c,h) \in R : \frac{P}{Q} > 0\} \\
R^- &= \{(c,h) \in R : \frac{P}{Q} < 0\} .
\end{aligned}
$$

od kojih ćemo svaki još finije particionirati.

Može se pokazati da se krivulja $V_{r,s}$, $r, s \in \mathbb{Z}$ može parametrizirati s:

$$
\begin{aligned}
c(t) &= 13 - 6(t + t^{-1}) \\
h_{r,s}(t) &= \frac{1}{4}(r^2 - 1)t - \frac{1}{2}(rs - 1) + \frac{1}{4}(s^2 - 1)t^{-1}
\end{aligned}
$$

Tu parametrizaciju možemo iskoristiti da parametriziramo težine iz R^+.

Klasifikacija najvećih težina iz klase R^+

Svaki $(c, h) \in R^+$ možemo zapisati kao $(c_{p,q}, h)$ za neke $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$, $(p, q) = 1$. Za takve p, q stavimo:

$$
K^+_{p,q} = \{(r,s) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq r \leq p, 0 \leq s \leq q, \frac{r}{p} + \frac{s}{q} \leq 1\}
$$

Za $(r, s) \in K^+_{p,q}, i \in \mathbb{Z}$ definirajmo:

$$h_{p,q;r,s;i} = \begin{cases} h_{-ip+r,s}(\frac{q}{p}), & i \text{ paran} \\ h_{-(i+1)p+r,-s}(\frac{q}{p}), & i \text{ neparan} \end{cases}$$

Povremeno, kada su p, q, r, s fiksirani, pišemo h_i umjesto $h_{p,q;r,s;i}$.

Lema 3.4.3. *Za svaku najveću težinu (c, h) u klasi R^+ postoje $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}, (p, q) = 1$, $i \in \mathbb{Z}$, te jedinstveni $(r, s) \in K^+_{p,q}$ takvi da vrijedi*

$$(c, h) = (c_{p,q}, h_{p,q;r,s;i}) .$$

Da bi opisali kada se događa da $h_{p,q;r,s;i} = h_{p,q;r',s';i'}$ podijelit ćemo klasu R^+ u četiri potklase:

$$\begin{aligned} 1^+ &: \quad 0 < r < p, \ 0 < s < q \\ 2^+ &: \quad r = 0, \ 0 < s < q \\ 3^+ &: \quad 0 < r < p, \ s = 0 \\ 4^+ &: \quad (r, s) \in \{(0, 0), (0, q)\} \end{aligned}$$

Prema prethodnoj lemi, svaka najveća težina $(c_{p,q}, h) \in R^+$ jedinstveno određuje $(r, s) \in K^+_{p,q}$ pa ćemo reći da $(c_{p,q}, h)$ pripada potklasi i^+, $i = 1, 2, 3, 4$ ako (r, s) pripada potklasi i^+.

Lema 3.4.4. *Neka su $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}, (p, q) = 1, r, s \in K^+_{p,q}$ fiksni. Za svaku potklasu, degeneracija težina $\{h_{p,q;r,s;i} : i \in \mathbb{Z}\}$ je dana s:*

$$\begin{aligned} 1^+ &: \quad \textit{nema degeneracije} \\ 2^+ &: \quad h_{-i-1} = h_i, \ i \in \mathbb{Z}_{>0} \\ 3^+ &: \quad h_{2i} = h_{2i-1}, \ i \in \mathbb{Z}_{>0} \\ 4^+ &: \quad h_{-2i-1} = h_{-2i} = h_{2i-1} = h_{2i}, (r, s) = (0, 0) \\ & \quad\ \ h_{-2i-2} = h_{-2i-1} = h_{2i+1} = h_{2i}, (r, s) = (0, q), i \in \mathbb{Z}_{>0} \end{aligned}$$

Dakle, sljedeća lista iscrpljuje h takve da je $(c_{p,q}, h) \in R^+$:

$$\begin{aligned} 1^+ &: \quad h_i, \ i \in \mathbb{Z} \\ 2^+ &: \quad h_i, \ i \in \mathbb{Z}_{>0} \\ 3^+ &: \quad h_{(-1)^{i-1}i}, \ i \in \mathbb{Z}_{>0} \\ 4^+ &: \quad h_{2i}, \ i \in \mathbb{Z}_{>0} \end{aligned}$$

Klasifikacija najvećih težina iz klase R^-

Svaki $(c,h) \in R^-$ možemo zapisati kao $(c_{p,-q}, h)$ za neke $p,q \in \mathbb{Z}_{>0}, (p,q) = 1$. Za takve p,q stavimo:

$$K^-_{p,q} = \{(r,s) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq r \leq p, 0 \leq -sleqq, \frac{r}{p} - \frac{s}{q} \leq 1\} .$$

Za $(r,s) \in K^-_{p,q}, i \in \mathbb{Z}$ stavimo:

$$h_{p,q;r,s;i} = \begin{cases} h_{-ip+r,s}(-\frac{q}{p}), & i \text{ paran} \\ h_{-(i+1)p+r,-s}(-\frac{q}{p}), & i \text{ neparan} \end{cases} .$$

Analogno kao u R^+ slučaju, imamo:

Lema 3.4.5. *Za svaku najveću težinu (c,h) u klasi R^- postoje $p,q \in \mathbb{Z}_{>0}, (p,q) = 1, i \in \mathbb{Z}$ te jedinstveni $(r,s) \in K^-_{p,q}$ takvi da vrijedi:*

$$(c,h) = (c_{p,-q}, h_{p,q;r,s;i}) .$$

Opet, da bi se opisali kada se h_i degeneriraju dijelimo R^- u četiri potklase:

$$\begin{aligned} 1^- &: \quad 0 < r < p,\ 0 < -s < q \\ 2^- &: \quad r = 0,\ 0 < -s < q \\ 3^- &: \quad 0 < r < p,\ s = 0 \\ 4^- &: \quad (r,s) \in \{(0,0),(0,-q)\} \end{aligned}$$

Lema 3.4.6. *Neka su $p,q \in \mathbb{Z}_{>0}, (p,q) = 1, r,s \in K^-_{p,q}$ fiksni. Za svaku potklasu, degeneracija težina $\{h_{p,q;r,s;i} : i \in \mathbb{Z}\}$ je dana s:*

$$\begin{aligned} 1^- &: \quad \textit{nema degeneracije} \\ 2^- &: \quad h_{-i-1} = h_i,\ i \in \mathbb{Z}_{>0} \\ 3^- &: \quad h_{2i} = h_{2i-1},\ i \in \mathbb{Z}_{>0} \\ 4^- &: \quad h_{-2i-1} = h_{-2i} = h_{2i-1} = h_{2i}, (r,s) = (0,0) \\ &\quad\ \ h_{-2i-2} = h_{-2i-1} = h_{2i+1} = h_{2i}, (r,s) = (0,-q), i \in \mathbb{Z}_{>0} \end{aligned}$$

Dakle, sljedeća lista iscrpljuje h takve da je $(c_{p,-q}, h) \in R^+$:

$$\begin{aligned} 1^+ &: \quad h_i,\ i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ 2^+ &: \quad h_i,\ i \in \mathbb{Z}_{>0} \\ 3^+ &: \quad h_{(-1)^{i-1}i},\ i \in \mathbb{Z}_{>0} \\ 4^+ &: \quad h_{2i},\ i \in \mathbb{Z}_{>0} \end{aligned}$$

Napomena 3.4.7. *Može se pokazati da je $M(c_{p,q}, h_0)$ ireducibilan, pa je $(c_{p,q}, h_0)$ u klasi V.*

Jedinstvenost i postojanje singularnih vektora

Sljedeća propozicija ograničava broj singularnih vektora po nivou u $M(c, h)$:

Propozicija 3.4.8. *Neka je $n \in \mathbb{N}_0$. Tada (do na množenje skalarom) postoji najviše jedan singularni vektor u $M(c, h)_{h+n}$.*

Primijetimo da svaki homomorfizam Vir-modula mora slati singularni vektor u singularni vektor. Budući da je $M(c, h)$ generiran s $v_{c,h}$ kao Vir-modul, slijedi da je svaki homomorfizam Vir-modula sa $M(c, h)$ u potpunosti određen sa sa svojim djelovanjem na $v_{c,h}$. Za $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vir}}(M(c, h), M(c, h'))$ imamo

$$L_0.\psi(v_{c,h}) = \psi(L_0.v_{c,h}) = h\psi(v_{c,h})$$

pa mora biti $\psi(v_{c,h}) \in M(c, h')_h$. Koristeći prethodnu propoziciju, dobivamo:

Korolar 3.4.9. *Neka su $c, h, h' \in \mathbb{C}$. Tada je*

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vir}}(M(c, h), M(c, h')) \leq 1$$

Sada ćemo vidjeti kako nam poznavanje $D(c, h)$ može pomoći u nalaženju nivoa na kojima se nalaze singularni vektori.

Propozicija 3.4.10. *Neka su $r, s \in \mathbb{Z}_{>0}$. Označimo $n = rs$, $\phi = \phi_{r,s}$. Tada postoji $S_{n,\phi} \in U(\mathrm{Vir}_{\leq})_{-n}$ takav da je*

$$L_k S_{n,\phi} \in U(\mathrm{Vir})\phi(c, L_0) + U(\mathrm{Vir})\,\mathrm{Vir}_{>}\ .$$

Direktnim računom se vidi

Korolar 3.4.11. *Neka je $(c, h) \in \mathbb{C}$ takav da je $\phi_{r,s}(c, h) = 0$ za neke $r, s \in \mathbb{N}^2$. Tada je $S_{n,\phi}.v_{c,h}$ singularni vektor u $M(c, h)_{h+n}$ (uz oznake iz prethodne propozicije).*

Primijetimo da tada $v_{c,h+n} \to S_{n,\phi}.v_{c,h}$ definira jedan homomorfizam Vir-modula $M(c, h+ n) \to M(c, h)$.

Korolar 3.4.12. *Neka je $(c, h) \in \mathbb{C}$ takav da je $\phi_{r,s}(c, h) = 0$ za neke $r, s \in \mathbb{Z}_{>0}$. Tada je*

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vir}}(M(c, h + n), M(c, h)) = 1\ .$$

Propozicija 3.4.13. *Svaki netrivijalan homomorfizam Vermaovih modula je ulaganje.*

Dokaz. Neka je $\phi : M(c,h) \to M(c,h')$ netrivijalan. Tada je $\phi(v_{c,h}) = q.v_{c,h'}$ (za neki $q \in U(\mathrm{Vir}_<)$)) singularni vektor u $M(c,h')_h$. Svaki element $M(c,h)$ je oblika $p.v_{c,h}$ za neki $p \in U(\mathrm{Vir}_<)$. Prema propoziciji 1.2.15 svaka univerzalna omotačka algebra je integralna domena. Budući da je Vermaov modul je slobodan $U(\mathrm{Vir}_<)$-modul iz

$$0 = \phi(p.v_{c,h}) = p.\phi(v_{c,h}) = pq.v_{c,h'}$$

bi slijedilo $p = 0$ ili $q = 0$. No drugi slučaj je nemoguć jer smo pretpostavili da je ϕ netrivijalan. Slijedi $\mathrm{Ker}\,\phi = 0$. □

Dijagrami ulaganja

U ovom paragrafu ćemo pokazati kako izgledaju ulaganja između Vermaovih modula ovisno o tome u kojoj se klasi nalaze najveće težine.

Ulaganja $M(c,h') \hookrightarrow M(c,h)$ ćemo u dijagramima označavati s $[h'] \to [h]$. Sada ćemo promotriti koja ulaganja postoje u $M(c,h)$ ovisno o tome u kojoj se klasi nalazi (c,h).

Klasa V: $M(c,h)$ je ireducibilan.

Klasa I: Znamo da je tada $D(c,h) = \{(r,s)\}$ za neke $r, s \in \mathbb{Z}_{>0}$. Prema korolaru 3.4.12, tada imamo ulaganje $[h+rs] \to [h]$.

Klasa R^+ U paragrafu o klasifikaciji smo pokazali da se svaki $(c,h) \in R^+$ može zapisati kao $(c_{p,q}, h_{p,q;r,s;i})$, te smo ih koristeći taj zapis podijelili u četiri potklase. Ulaganja su dana sljedećim dijagramom (uz $h_{p,q;r,s;i} = h_i$):

1^+

$$\begin{tikzcd}
& {[h_0]} & \\
{[h_{-1}]} \arrow[ur] & & {[h_1]} \arrow[ul] \\
{[h_{-2}]} \arrow[u] \arrow[urr] & & {[h_2]} \arrow[u] \arrow[ull] \\
{[h_{-3}]} \arrow[u] \arrow[urr] & & {[h_3]} \arrow[u] \arrow[ull] \\
{[h_{-4}]} \arrow[u] \arrow[urr] & & {[h_4]} \arrow[u] \arrow[ull] \\
\vdots & & \vdots
\end{tikzcd}$$

2^+

$$\begin{tikzcd}
{[h_0]} \\
{[h_1]} \arrow[u] \\
{[h_2]} \arrow[u] \\
{[h_3]} \arrow[u] \\
{[h_4]} \arrow[u] \\
\vdots
\end{tikzcd}$$

3^+

$$\begin{tikzcd}
{[h_0]} \\
{[h_1]} \arrow[u] \\
{[h_{-2}]} \arrow[u] \\
{[h_3]} \arrow[u] \\
{[h_{-4}]} \arrow[u] \\
\vdots
\end{tikzcd}$$

4^+

$$\begin{tikzcd}
{[h_0]} \\
{[h_2]} \arrow[u] \\
{[h_4]} \arrow[u] \\
{[h_6]} \arrow[u] \\
{[h_8]} \arrow[u] \\
\vdots
\end{tikzcd}$$

Klasa R^- U paragrafu o klasifikaciji smo pokazali da se svaki $(c,h) \in R^-$ može zapisati kao $(c_{p,-q}, h_{p,q;r,s;i})$, te smo ih koristeći taj zapis podijelili u četiri potklase. Ulaganja su dana sljedećim dijagramom (uz $h_{p,q;r,s;i} = h_i$):

$$
\begin{array}{cccc}
1^{-} & 2^{-} & 3^{-} & 4^{-} \\
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\vdots & & \vdots \\
{[h_{-4}]} \arrow[u, phantom] & & {[h_4]} \\
{[h_{-3}]} \arrow[u] \arrow[urr] & & {[h_3]} \arrow[u] \arrow[ull] \\
{[h_{-2}]} \arrow[u] \arrow[urr] & & {[h_2]} \arrow[u] \arrow[ull] \\
{[h_{-1}]} \arrow[u] \arrow[urr] & & {[h_1]} \arrow[u] \arrow[ull] \\
& {[h_0]} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd}
\vdots \\
{[h_4]} \\
{[h_3]} \arrow[u] \\
{[h_2]} \arrow[u] \\
{[h_1]} \arrow[u] \\
{[h_0]} \arrow[u]
\end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd}
\vdots \\
{[h_{-4}]} \\
{[h_3]} \arrow[u] \\
{[h_{-2}]} \arrow[u] \\
{[h_1]} \arrow[u] \\
{[h_0]} \arrow[u]
\end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd}
\vdots \\
{[h_8]} \\
{[h_6]} \arrow[u] \\
{[h_4]} \arrow[u] \\
{[h_2]} \arrow[u] \\
{[h_0]} \arrow[u]
\end{tikzcd}
\end{array}
$$

Može se pokazati da dijagrami ulaganja iscrpljuju sve netrivijalne homomorfizme $M(c, h') \to M(c, h)$ za fiksni $(c, h) \in \mathbb{C}^2$. Dapače, dijagrami ulaganja iscrpljuju i sve podmodule od $M(c, h)$:

Teorem 3.4.14. *Neka je $(c, h) \in \mathbb{C}^2$. Svi netrivijalni podmoduli od $M(c, h)$ su sume podmodula iz dijagrama ulaganja.*

Korolar 3.4.15. *Svaki netrivijalni podmodul Vermaovog modula je generiran sa najviše dva singularna vektora.*

Poglavlje 4

Verteks algebre

U ovom kratkom poglavlju ćemo definirati verteks algebru i pokazati kako se iz "funkcija izvodnica" Heisenbergove i Virasorove algebre mogu dobiti verteks algebre. Izlaganje slijedi [2].

4.1 Definicija verteks algebre

Definicija 4.1.1. *Neka je V kompleksni vektorski prostor. Formalni red*

$$A(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} A_j z^{-j} \in \mathrm{End}\, V[[z, z^{-1}]]$$

zovemo poljem (nad V) ako za svaki $v \in V$ postoji $j_0 \in \mathbb{Z}$ tako da je $A_j v = 0$ za svaki $j \leq j_0$.

Skup svih polja očito čini vektorski potprostor od $\mathrm{End}\, V[[z, z^{-1}]]$ i označavat ćemo ga $\mathcal{F}(V)$. Ako je V $\mathbb{Z}_+$-graduiran, reći ćemo da $A(z)$ ima konformalnu dimenziju Δ ako je $degA_j = \Delta - j$ za svaki $j \in \mathbb{Z}$.

Definicija 4.1.2. *Verteks algebru čine*

- *$\mathbb{Z}_+$-graduiran vektorski prostor*

  $$V = \bigoplus_{m=0}^{\infty} V_m\ ,$$

  koji zadovoljava $\dim V_m \leq \infty$*;*

- *(vakuum) vektor $|0\rangle \in V_0$;*

- *(operator translacije) linearni operator $T : V \to V$ stupnja 1;*

- *(verteks operatori) linearni operator*

$$Y(\cdot, z) : V \to \mathcal{F}(V)$$

koji šalje svaki $A \in V_m$ u polje

$$Y(A, z) = \sum_{n \in Z} A_{(n)} z^{-n-1}$$

konformalne dimenzije m.

n Vrijede sljedeći aksiomi:

- *(aksiom vakuuma) $Y(|0\rangle, z) = I_V$. Nadalje za svaki $A \in V$ imamo*

$$A_{(-1)} |0\rangle = A, \; A_n |0\rangle = 0, \; n \geq 0 \; .$$

- *(aksiom translacije) Za svaki $A \in V$ imamo*

$$[T, Y(A, z)] = \partial_z Y(A, z)$$

i $T |0\rangle = 0$.

- *(aksiom lokalnosti) Za sve $A, B \in V$ postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi:*

$$(z - w)^N [A(z), B(w)] = 0 \; .$$

Neka je R prsten s jedinicom. Stavimo

$$\delta(z - w) := \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \delta_{m+n,-1} z^n w^m = \sum_{n \in Z} z^n w^{-n-1} \in R[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]] \; .$$

Primijetimo $\delta(z - w) = \delta(w - z)$. Svojstva ovog reda će nam pomoći u provjeravanju aksioma lokalnosti.

Lema 4.1.3. *Za $A(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n w^n \in R[[w, w^{-1}]]$ vrijedi:*

$$A(w)\delta(z - w) = A(z)\delta(z - w) \; .$$

Dokaz.

$$A(w)\delta(z - w) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} A_m w^m z^n w^{-n-1} = \sum_{k,n \in \mathbb{Z}} A_{k+n+1} z^n w^k$$

uz zamjenu varijabli $k = m - n - 1$. Zbog simetrije u zapisu reda rezultat slijedi. □

Specijalno, imamo

$$(z - w)\delta(z - w) = 0 \; .$$

Iz toga se indukcijom može pokazati

Lema 4.1.4.

$$(z - w)^{n+1} \partial_w^n \delta(z - w) = 0 \; .$$

4.2 Heisenbergova verteks algebra

U ovoj cjelini ćemo definirati verteks algebru nad Fockovim modulom $B(0,1)$.

U drugom poglavlju smo vidjeli da je $B(0,1)$ $\mathbb{Z}_+$-graduiran s $\deg(x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_k}) = \sum j_i$. Za vakuum-vektor stavljamo $|0\rangle = 1$. Translacijski operator T ćemo definirati sa $T|0\rangle = 0$ i $[T, a_{-i}] = ia_{-i-1},\ i > 0$. Indukcijom po stupnju monoma se može vidjeti da tada vrijedi

$$T(x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_k}) = \sum_{i=1}^{k} j_i x_{j_1}\dots x_{j_i+1}\dots x_{j_k}\,.$$

Iz te formule se vidi da je T derivacija na $B(0,1)$. Potrebno je još definirati verteks operatore na monomima. Za vakuum-vektor moramo staviti $Y(|0\rangle, z) = I$. Ključna definicija će biti definicija polja $Y(x_1, z)$ koja će na određeni način generirati verteks algebru nad $B(0,1)$. Stavimo:

$$Y(x_1, z) = a(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_j z^{-j-1}\,.$$

Budući da je $\deg a_n = -n$, $a(z)$ je uistinu polje konformalne dimenzije 1, a lako se provjere ostali uvjeti iz definicije verteks algebre.

Prije definicije operatora Y za općeniti monom trebamo proširiti definiciju normalnog produkta za više od dva člana. Neka je $a_{j_1}\dots a_{j_k}, k\in\mathbb{N}, j_1,\dots,j_k\in\mathbb{Z}$ monom u $U(\mathcal{H})$ (j_i nisu nužno različiti).

Neka su sad $i_1,\dots,i_k\in\mathbb{Z}$ takvi da vrijedi $\{i_1,\dots,i_k\} = \{j_1,\dots,j_k\}, i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k$. Definirajmo:

$$:a_{j_1}a_{j_2}\dots a_{j_k}: = a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_k}$$

(neformalno rečeno, normalni produkt "sortira" monom iz $U(\mathcal{H})$).

Sada, za općeniti monom stavimo

$$\begin{aligned} Y(x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_k}) &= \frac{1}{(j_1-1)!\dots(j_k-1!)} :\partial_z^{j_1-1}a(z)\dots\partial_z^{j_k-1}a(z): \\ &= \frac{1}{(j_1-1)!\dots(j_k-1!)} \sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m_1+\ldots+m_k=n} c_{m_1}^{j_1-1}\dots c_{m_k}^{j_k-1} :a_{m_1-j_1+1}\dots a_{m_k-j_k+1}:\Big)z^{-n-k} \end{aligned}$$

(Više o tome kako a(z) "generira" općeniti $Y(x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_k})$ može se naći u [2].)

Označimo koeficijent kraj z^{-n-k} s A_n. Zbog normalnog uređaja on je dobro definiran operator na $B(0,1)$. Vidimo da su sumandi u A_n stupnja $-\sum(m_i - j_i + 1) = -n + -k + \sum j_i$, pa je konformalna dimenzija polja $\sum j_i = \deg(x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_k})$.

Lema 4.2.1. *Aksiom vakuuma vrijedi za ovako definirane $Y(x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_k}, z)$. Preciznije,*

$$A_k|0\rangle = x_{j_1}\dots x_{j_k},\ \ A_n|0\rangle = 0, n > k\,.$$

Dokaz. Pokažimo prvo tvrdnju za A_k. Za $m_1 = m_2 = \ldots = m_k = -1$ imamo

$$c_{-1}^{j_1-1} \ldots c_{-1}^{j_k-1} = (j_1-1)! \ldots (j_k-1)!, \quad a_{-j_1} \ldots a_{-j_k}. |0\rangle = x_{j_1} \ldots x_{j_k}.$$

Primijetimo da je $c_{m_i}^{j_i-1} = (-1)^{j_i-1} m_i \ldots (m_i - j)$ jednak 0 za $0 \leq m_i \leq j_i$. Za $m_i \geq j_i$, $a_{m_i-j_i+1} |0\rangle = 0$ (a zbog normalnog uređaja će taj operator djelovati prije "negativnih"). Zbog $\sum m_i = -k$ mora vrijediti $\max m_i \geq -1$, pa na $|0\rangle$ netrivijalno djeluje samo član s $m_1 = \ldots = m_k = -1$.

Slično se provjeri i da vrijedi $A_n |0\rangle = 0$ za $n > k$. □

Da bi ustanovili lokalnost ovako definiranih verteks operatora, pomoći će nam sljedeća lema:

Lema 4.2.2. *$a(z)$ je lokalan sa samim sobom.*

Dokaz.

$$\begin{aligned}
[a(z), a(w)] &= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} [a_n, a_m] z^{-n-1} w^{-m-1} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} [a_n, a_{-n}] z^{-n-1} w^{m-1} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} n z^{-n-1} w^{m-1} \\
&= \partial_w \delta(z-w)
\end{aligned}$$

Sada iz leme 4.1.4 slijedi $(z-w)^2 [a(z), a(w)] = 0$. □

Normalan produkt se može definirati općenito na poljima i tada vrijedi

Lema 4.2.3. *(Dong) Ako su $A(z), B(z), C(z)$ međusobno lokalna polja, tada su polja $:A(z)B(z):$ i $C(z)$ također lokalna.*

Općenita definicija normalnog produkta i dokaz ove leme može se naći u [2]. Sad možemo pokazati:

Propozicija 4.2.4. *$Y : B(0,1) \to \operatorname{End} B(0,1)[[z]]$ definira na $B(0,1)$ strukturu verteks algebre.*

Dokaz. Aksiom vakuuma smo provjerili u lemi 4.2.1.

Da bi provjerili da aksiom translacije vrijedi ($[T, Y(x,z)] = \partial_z Y(x,z)$ za svaki $x \in B(0,1)$) dovoljno je provjeriti $[T, a_{j_1} \ldots a_{j_k}] = \sum_i -j_i b_{j_1} \ldots T b_{j_i} \ldots b_{j_k}$. Budući da je $[T, \cdot]$

derivacija, treba vidjeti samo $[T, a_i] = -ia_{i-1}$. Za negativne i to slijedi iz djelovanja T na monomima, a za b_0 je očito. Neka je $i > 0$.

$$[T, a_i]x_k = 0 + ka_ix_{k+1} = k(k+1)\delta_{i,k+1} = (i-1)i\delta i, k+1 = ia_{i-1}x_k$$

Budući da su i T i $a_i,\ i > 0$ derivacije, tada je i $[T, a_i]$ derivacija. Sada $[T, a_i] = ia_{i-1}$ vrijedi na monomima proizvoljne dužine, pa tako i na cijelom $B(0, 1)$.

Da bi vidjeli da aksiom lokalnosti vrijedi, zbog Dongove leme je dovoljno vidjeti da su polja $\partial_z^m a(z)$ i $\partial_w^n a(w)$ lokalna. Znamo da vrijedi $(z-w)^2[a(z), a(w)] = 0$. Deriviranjem po z dobivamo $2(z-w)[a(z), a(w)] + (z-w)^2[\partial_z a(z), a(w)] = 0$. Množenjem te jednadžbe sa $(z-w)$ slijedi $(z-w)^3[\partial_z a(z), a(w)] = 0$. Dalje nastavljamo indukcijom. □

4.3 Virasorova verteks algebra

Označimo sa D podalgebru od Vir razapetu s $\{L_n : n \geq -1\}$. Kao i kod Heisenbergove algebre, Virasorovu verteks algebru ćemo definirati na jednom Vir-modulu.

Neka je $c \in \mathbb{C}$ Označimo sa $\mathbb{C}_c$ $D \oplus \mathbb{C}C$-modul na koji D djeluje trivijalno, a C množenjem sa c. Stavimo

$$\mathrm{Vir}_c = \mathrm{Ind}_{D\oplus\mathbb{C}C}^{\mathrm{Vir}} = U(\mathrm{Vir})_{D\oplus\mathbb{C}C} \otimes \mathbb{C}_c\ .$$

Označit ćemo $v_c = 1 \otimes 1$. Prema Poincaré-Birkhoff-Witt teoremu, bazu od Vir_c čine monomi oblika:

$$L_{-j_1}L_{-j_2}\ldots L_{-j_k}.v_c,\ j_1 \geq j_2 \geq \ldots \geq j_k \geq 2\ .$$

Kao i kod Vermaovih modula, izabrat ćemo gradaciju

$$\deg v_c = 0,\ \deg L_{-j_1}L_{-j_2}\ldots L_{-j_k}.v_c = \sum j_i$$

a kao vakuum-vektor ćemo uzeti v_c. Za translacijski operator stavit ćemo $T = L_{-1}$.

Definirajmo sada verteks operatore. Slično kao kod Heisenbergove algebre, za $Y(L_{-2}.v_c, z)$ ćemo izabrati "funkciju izvodnicu" Virasorovih operatora L_n:

$$Y(L_{-2}.v_c, z) := L(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}\ .$$

Lema 4.3.1. *Polje $L(z)$ je lokalno sa samim sobom.*

Dokaz. Računamo:

$$\begin{aligned}
[L(z), L(w)] &= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} (n-m)L_{n+m} z^{-n-2} w^{-m-2} + C \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{n^3-n}{12} z^{-n-2} w^{n-2} \\
&= [j = n+m, l = n+1] \\
&= \sum_{j,l\in\mathbb{Z}} (2l-j-2)L_j z^{-l-1} w^{l-j-3} + \frac{C}{12} \sum_{l\in\mathbb{Z}} l(l-1)(l-2) z^{-l-1} w^{l-3} \\
&= \sum_{j,l\in\mathbb{Z}} 2lL_j w^{-j-2} z^{-l-1} w^{l-1} + \sum_{j,l\in\mathbb{Z}} (-j-2)L_j w^{j-3} z^{-l-1} w^{l} \\
&+ \frac{C}{12} \sum_{l\in\mathbb{Z}} l(l-1)(l-2) z^{-l-1} w^{l-3} \\
&= 2T(w)\partial_w \delta(z-w) + \partial_w T(w) \cdot \delta(z-w) + \frac{C}{12} \partial_w^3 \delta(z-w)
\end{aligned}$$

Iz leme 4.1.4 slijedi $(z-w)^4[L(z), L(w)] = 0$. □

Sada, analogno kao i kod Heisenbergove verteks algebre, za općeniti monom iz baze stavljamo:

$$Y(L_{-j_1} \dots L_{-j_k}, z) = \frac{1}{(j_1-2)!} \cdots \frac{1}{(j_k-2)!} : \partial_z^{j_1-1} L(z) \dots \partial_z^{j_k-1} L(z) : \ .$$

Analogno kao kod Heisenbergove verteks algebre, može se pokazati da ove definicije zadovoljavaju aksiome verteks algebre.

Također, po uzoru na napomenu 3.2.8 možemo generalizirati ovaj postupak definirajući za neki $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{L}(z) = \frac{1}{2} : a(z)^2 : + i\lambda \partial_z a(z) \ .$$

Kombinirajući prethodnu lemu i lemu 4.2.2 se vidi da je $\tilde{L}(z)$ lokalan sa samim sobom, pa s njime također možemo "generirati" verteks algebru nad $U(\mathrm{Vir}_<)$.

Primijetimo da se djelovanje Virasorove algebre na Fockov modul (uvedeno u trećem poglavlju) uz pomoć teorije verteks algebri može objasniti jednostavnom formulom:

$$\tilde{L}(z) = \frac{1}{2} : a(z)^2 : + i\lambda \partial_z a(z) \ .$$

Preciznije, ključ je u tome što je Virasorova verteks algebra sadržana u Heisenbergovoj verteks algebri (iako nije slučaj da je Virasorova algebra sadržana u Heisenbergovoj algebri).

Bibliografija

[1] Dixmier, J.: *Enveloping Algebras*. American Mathematical Society, 1996.

[2] Frenkel, E. i D. Ben-Zvi: *Vertex Algebras and Algebraic Curves*. American Mathematical Society, 2001.

[3] Gordon, I.: *Infinite-dimensional Lie Algebras*. `http://www.maths.ed.ac.uk/~igordon/LA1.pdf`, 2007.

[4] Humphreys, J.: *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer-Verlag New York, 1973.

[5] Iohara, K. i Y. Koga: *Representation Theory of the Virasoro Algebra*. Springer-Verlag London, 2011.

[6] Kac, V.G., A.K. Raina i N. Rozhkovskaya: *Highest-weight Representations of Infinite-dimensional Lie Algebras*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2013.

[7] Mathieu, O.: *Classification of Harish-Chandra modules over the Virasoro Lie algebra*. Inventiones mathematicae, 107:225–234, 1992.

Sažetak

U ovom radu proučavamo Virasorovu algebru i njene reprezentacije. Cilj prvog poglavlja je predstaviti osnovne definicije i rezultate teorije Liejevih algebri. Konstruiramo univerzalnu omotačku algebru, te definiramo centralna proširenja Liejeve algebre L i pokazujemo njihovu korespondenciju s određenim bilinearnim funkcijama na L.

U drugom poglavlju definiramo tri Liejeve algebre: Wittovu, Heisenbergovu i Virasorovu algebru, te pokazujemo neka njihova svojstva. Karakteriziramo Virasorovu algebru kao univerzalno centralno proširenje Wittove algebre.

U trećem poglavlju prvo dokazujemo nekoliko općenitih rezultata vezanih uz reprezentacije Virasorove algebre. Dajemo neke primjere reprezentacija Virasorove algebre te istražujemo njihova svojstva. Potom se fokusiramo na reprezentacije najveće težine. Konstruiramo univerzalnu reprezentacije najveće težine, Vermaov module, te analiziramo njihovu strukturu. Konkretnije, opisujemo kako izgledaju homomorfizmi između Vermaovih modula, te kao korolar toga dobivamo i opis strukture podmodula Vermaovih modula.

Četvrto poglavlje je kratko izlaganje teorije verteks algebri. Dajemo primjere verteks algebri koje su izgrađene nad Heisenbergovom i Virasorovom algebrom, te pokazujemo vezu s ranije definiranim reprezentacijama Virasorove algebre.

Summary

In this work, we study the Virasoro algebra and its representations. The goal of the first chapter is to introduce basic notions from the theory of Lie algebras. We construct the universal enveloping algebra, define central extensions of Lie algebra L and show their correspondence with certain bilinear functions on L.

In second chapter three Lie algebras are defined: Witt, Heisenberg and Virasoro algebra, and some of their properties shown. Virasoro algebra is characterized as a universal central extension of Witt algebra.

In third chapter we first show a few general results concerning representations of Virasoro algebra. Some examples of Virasoro algebra representations are given, and their properties analysed. From here, the focus is on the highest weight representations. We construct universal highest weight representations, the Verma modules, and analyse their structure. More concretely, homomorphisms between Verma modules are described, and as a corollary we get the description of submodules of Verma modules.

Fourth chapter is a short exposition of the theory of vertex algebras. We build vertex algebras over Heisenberg and Virasoro algebra and show their relationship with representations of Virasoro algebra.

Životopis

Ante Čeperić rođen je 18. svibnja 1992. godine u Rijeci. U Senju polazi Osnovnu školu Silvija Strahimira Kranjčevića, a zatim i Srednju školu Pavla Rittera Vitezovića. Na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu 2010. godine upisuje studij matematike. Preddiplomski studij završava 2013. godine, te studij nastavlja na smjeru Teorijska matematika. Krajem diplomskog studija je nagrađen Priznanjem za izniman uspjeh na studiju.