# Jordanova mjera

Čmarec, Andrea

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**

**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**

**MATEMATIČKI ODSJEK**

Andrea Čmarec

# JORDANOVA MJERA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, srpanj, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

# Sadržaj

# Uvod

U ovom diplomskom radu proučavamo Jordanovu mjeru skupa i njena svojstva.

Najprije ćemo precizno definirati pojam dužine, otvorene dužine i poluravnine. Pokazat ćemo da su to konveksni skupovi, a nakon toga ćemo definirati trokut kao konveksnu ljusku tri nekolinearne točke.

Središnji dio rada posvećen je pojmu i svojstvima trokuta te poligona u ravnini. Pokazat ćemo da svaki poligon $\Pi$ u ovoj ravnini možemo zapisati kao konačnu uniju trokuta takvu da za svaka dva različita trokuta iz te unije vrijedi da je njihov presjek prazan skup ili stranica od oba trokuta ili točka koja je vrh oba trokuta.

Na kraju uvodimo funkciju trokutne površine koju ćemo proširiti do poligonske površine $q$ kojom ćemo računati površinu svakog poligona $\Pi$ u ravnini.

Reći ćemo da je skup $S$ izmjeriv u Jordanovom smislu s obzirom na $q$, ako postoji poligon $\Pi$ takav da je $S$ sadržan u $\Pi$ i ako je infimum skupa svih $q(\Pi')$, pri čemu je $S$ sadržan u $\Pi'$, jednak supremumu skupa svih $q(\Pi'')$, pri čemu je $\Pi''$ sadržan u $S$. Taj broj označavamo s $q_J(S)$ i nazivamo Jordanova mjera od $S$ s obzirom na $q$.

# Poglavlje 1

# Ravnina

## 1.1 Elementarna ravnina

**Definicija 1.1.** *Neka je $S$ skup. Definiramo $\overline{S} = \{\{\rho_1, \rho_2\} \mid \rho_1, \rho_2$ međusobno suprotni linearni uređaji na $S\}$.*

**Definicija 1.2.** *Neka je $M$ neprazan skup, $\Psi$ familija podskupova od $M$ te $f : \Psi \to \bigcup_{p \in \Psi} \overline{p}$ funkcija takva da je za svaki $p \in \Psi$ $f(p) \in \overline{p}$. Dakle, $f(p) = \{\rho_1, \rho_2\}$, gdje su $\rho_1$ i $\rho_2$ međusobno suprotni linearni uređaji na $p$.*

*Za $(M, \Psi, f)$ kažemo da je elementarna ravnina ako vrijedi:*

*(1) Za sve $A, B \in M$, $A \neq B$ postoji jedinstveni $p \in \Psi$ takav da su $A, B \in p$.*

*(2) Za svaki $p \in \Psi$ postoje $A, B, C \in p$ takvi da je $A \neq B, A \neq C$ i $B \neq C$.*

*(3) Postoje $A, B, C \in M$ takvi da ne postoji $p \in \Psi$ t.d. $A, B, C \in p$.*

*(4) Postoje $A, B \in M$ takvi da je $A \neq B$.*

**Propozicija 1.3.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna ravnina. Neka je $p \in \Psi$ te $A, B \in p, A \neq B$. Neka je $f(p) = \{\rho_1, \rho_2\}$. Tada za točno jedan $i \in \{1, 2\}$ vrijedi $A \, \rho_i \, B$.*

*Dokaz.* Dokažimo prvo da postoji $i \in \{1, 2\}$ takav da $A \, \rho_i \, B$. Znamo da je $\rho_1$ linearni uređaj na $p$. Zbog svojstva usporedivosti $\rho_1$ na $p$ vrijedi

$$A \, \rho_1 \, B \text{ ili } B \, \rho_1 \, A.$$

Ako je $A \, \rho_1 \, B$, onda smo gotovi. Ako je $B \, \rho_1 \, A$, onda je $(B, A) \in \rho_1$.
Budući da je $\rho_2$ uređaj suprotan uređaju $\rho_1$ vrijedi $(A, B) \in \rho_2$, što povlači $A \, \rho_2 \, B$.

Pretpostavimo da je $A\,\rho_1\,B$ i $A\,\rho_2\,B$.
Budući da je $\rho_1$ uređaj suprotan uređaju $\rho_2$ vrijedi $B\,\rho_1\,A$. Dobili smo

$$A\,\rho_1\,B \text{ i } B\,\rho_1\,A \;\Rightarrow\; A = B,$$

što je u kontradikciji s pretpostavkom propozicije.
Dakle, za točno jedan $i \in \{1, 2\}$ vrijedi $A\,\rho_i\,B$. □

**Definicija 1.4.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna ravnina. Neka su $A, B \in M$. Definirajmo skup $\overline{AB}$ sa:*

*(1) Ako je $A = B$, onda je $\overline{AB} = \{A\}$.*

*(2) Ako je $A \neq B$, onda postoji jedinstveni $p \in \Psi$ takav da $A, B \in p$. Neka je $\leq_p$ jedan od dva elementa od $f(p)$. Tada je*

$$\overline{AB} = \{T \in p \,|\, A \leq_p T \leq_p B \text{ ili } B \leq_p T \leq_p A\}.$$

*Skup $\overline{AB}$ nazivamo dužina (segment) određen točkama A i B.*

Pokažimo da ova definicija ne ovisi o izboru uređaja $\leq_p$.
Neka je $\leq'_p \in f(p)$ takav da je $\leq'_p \neq \leq_p$. Dakle, $\leq'_p$ je uređaj suprotan uređaju $\leq_p$. Neka je

$$S = \{T \in p \,|\, A \leq'_p T \leq'_p B \text{ ili } B \leq'_p T \leq'_p A\}.$$

Dokažimo da je $\overline{AB} = S$.
Neka je $T \in \overline{AB}$. Tada je

$$A \leq_p T \leq_p B \text{ ili } B \leq_p T \leq_p A.$$

Ako je $A \leq_p T \leq_p B$, imamo

$$A \leq_p T \text{ i } T \leq_p B \;\Rightarrow\; T \leq'_p A \text{ i } B \leq'_p T \;\Rightarrow\; B \leq'_p T \leq'_p A \;\Rightarrow\; T \in S.$$

Analogno dobivamo da $B \leq_p T \leq_p A$ povlači $T \in S$.
Dakle, $\overline{AB} \subseteq S$. Analogno dobivamo $S \subseteq \overline{AB}$. Dakle, $\overline{AB} = S$.
Zaključak: definicija ne ovisi o izboru uređaja na $p$.

**Uočimo:** Ako su $A, B \in p$ t.d. $A \leq_p B$, gdje je $\leq_p$ jedan od dva uređaja na $p$ (tj. jedan od dva elementa od $f(p)$), onda je

$$\overline{AB} = \{T \in p \,|\, A \leq_p T \leq_p B\}.$$

**Uočimo:** Neka je $\overline{AB}$ dužina. Onda su $A, B \in \overline{AB}$. Nadalje, uočimo da je $\overline{AB} = \overline{BA}$.

**Definicija 1.5.** *Neka je* $(M, \Psi, f)$ *elementarna ravnina. Neka je* $p \in \Psi$ *pravac te* $A \in p$. *Tada za skupove*

$$\{T \in p \,|\, A \leq_p T\} \text{ i } \{T \in p \,|\, T \leq_p A\}$$

*gdje je* $\leq_p$ *jedan od dva uređaja na p, kažemo da su polupravci s vrhom A (određeni s p).*

**Definicija 1.6.** *Neka je* $(M, \Psi, f)$ *elementarna ravnina. Neka su* $A, B, T \in M$. *Za točku T kažemo da leži između A i B ako je*

$$T \in \overline{AB}.$$

**Definicija 1.7.** *Neka je* $(M, \Psi, f)$ *elementarna ravnina. Neka je* $p \in \Psi$ *pravac i* $\leq_p$ *jedan od dva uređaja na p. Za točke* $A, B \in p$ *pišemo*

$$A \prec_p B \text{ ako je } A \leq_p B \text{ i } A \neq B.$$

**Lema 1.8.** *Neka je* $(M, \Psi, f)$ *elementarna ravnina. Neka je* $p \in \Psi$ *pravac i* $\leq_p$ *jedan od dva uređaja na p. Neka su* $A, B, C \in p$ *takve da je* $A \prec_p B$ *i* $B \leq_p C$. *Tada je*

$$A \prec_p C.$$

*Dokaz.* Želimo pokazati da je $A \leq_p C$ i $A \neq C$. Znamo da je $A \prec_p B$ i $B \leq_p C$, tj.

$$A \leq_p B,\ B \leq_p C \text{ i } A \neq B \Rightarrow A \leq_p C$$

Pokažimo još da je $A \neq C$. Pretpostavimo suprotno, tj. $A = C$. Budući da je

$$A \prec_p B \Rightarrow C \prec_p B \Rightarrow C \leq_p B \text{ i } C \neq B$$

Dakle, $C \leq_p B$ i $B \leq_p C$ što povlači da je $C = B$. No, to je kontradikcija jer je $C \neq B$. Stoga je $A \neq C$. □

Analogno vidimo da

$$A \leq_p B \text{ i } B \prec_p C \Rightarrow A \prec_p C.$$

**Napomena 1.9.** *Neka je* $(M, \Psi, f)$ *elementarna ravnina. Neka je p pravac, te* $A, B \in p$ *takve da* $A \neq B$. *Tada je*

$$A \prec_p B \text{ ili } B \prec_p A.$$

**Propozicija 1.10.** *Neka je* $(M, \Psi, f)$ *elementarna ravnina. Neka su* $A, B, C, D \in M$ *točke takve da je* $\overline{AB} = \overline{CD}$. *Tada je*

$$\{A, B\} = \{C, D\}.$$

*Dokaz.* Pretpostavimo prvo da je $A = B$. Po definiciji dužine slijedi $\overline{AB} = \{A\}$. Tada je $\overline{CD} = \{A\}$, pa je $\overline{CD}$ jednočlan skup. To znači da je $C = D$. Prema definiciji dužine vrijedi $\overline{CD} = \{C\}$. Dakle,

$$\{A\} = \{C\} \Rightarrow A = C \Rightarrow A = B = C = D.$$

Pretpostavimo sada da je $A \neq B$. Odaberimo na $p = AB$ uređaj $\leq_p$ (tj. element od $f(p)$) takav da je $A \leq_p B$. Tada je $\overline{AB} = \{T \in p \,|\, A \leq_p T \leq_p B\}$. Znamo da je

$$C, D \in \overline{CD} = \overline{AB} \Rightarrow C, D \in \overline{AB} \Rightarrow A \leq_p C \leq_p B \text{ i } A \leq_p D \leq_p B.$$

Znamo da su $C, D \in p$, pa je $C \leq_p D$ ili $D \leq_p C$. Ako je $C \leq_p D$ onda je prema definiciji dužine $\overline{CD} = \{T \in p \,|\, C \leq_p T \leq_p D\}$. Budući da su $A, B \in \overline{AB} = \overline{CD}$ slijedi da je

$$A, B \in \overline{CD} \Rightarrow C \leq_p A \leq_p D \text{ i } C \leq_p B \leq_p D.$$

Iz $A \leq_p C$ i $C \leq_p A$ slijedi da je $A = C$. Analogno je $B = D$.
Ako je $D \leq_p C$ analogno se dobije da je $A = D$ i $B = C$. □

**Lema 1.11.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna ravnina. Neka su $A, B, T \in M$ točke takve da je $T \in \overline{AB}$ i $T \neq A$. Tada*

$$A \notin \overline{BT}.$$

*Dokaz.* Neka je $p \in \Psi$ takav da $A, B \in p$. Neka je $\leq_p \in f(p)$ takav da je $A \leq_p B$. Tada je $A \leq_p T$ i $T \leq_p B$.
Pretpostavimo da je $A \in \overline{BT}$. Budući da je $T \leq_p B$ slijedi da je $T \leq_p A$ i $A \leq_p B$. Dobivamo

$$A \leq_p T \text{ i } T \leq_p A \Rightarrow A = T.$$

To je u kontradikciji s pretpostavkom leme.
Dakle, $A \notin \overline{BT}$. □

**Lema 1.12.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna ravnina. Neka su $A, B \in M$, te neka je $T \in \overline{AB}$. Tada je*

$$\overline{AT} \cap \overline{TB} = \{T\}.$$

*Dokaz.* Neka je $p$ pravac takav da su $A, B \in p$. Neka je $\leq \in f(p)$ t.d. $A \leq B$. Tada je $A \leq T \leq B$.
Pretpostavimo da je $P \in \overline{AT} \cap \overline{TB}$.
Iz $P \in \overline{AT}$ slijedi $P \leq T$, a iz $P \in \overline{TB}$ slijedi $T \leq P$. Stoga je $T = P$. □

**Definicija 1.13.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna ravnina. Neka je $S \subseteq M$. Za $S$ kažemo da je konveksan skup u $(M, \Psi, f)$ ako za sve $A, B \in S$ vrijedi*

$$\overline{AB} \subseteq S.$$

**Uočimo:** Svaki pravac je konveksan skup.

**Propozicija 1.14.** *Neka je* $(M, \Psi, f)$ *elementarna ravnina. Neka su* $A, B \in M$. *Tada je segment* $\overline{AB}$ *konveksan skup.*

*Dokaz.* Neka je $p$ pravac takav da $A, B \in p$. Neka je $\leq_p \in f(p)$ takav da je $A \leq_p B$.
Želimo dokazati da je $\overline{AB}$ konveksan skup.
Neka su $C, D \in \overline{AB}$. Tada je

$$A \leq_p C \leq_p B \text{ i } A \leq_p D \leq_p B.$$

Budući da su $C, D \in p$, slijedi da je $C \leq_p D$ ili $D \leq_p C$.

1. $C \leq_p D$

   Neka je $T \in \overline{CD}$. Tada je $C \leq_p T \leq_p D$, pa je $A \leq_p T$ i također $T \leq_p B$. Slijedi da je

   $$T \in \overline{AB} \Rightarrow \overline{CD} \subseteq \overline{AB}.$$

2. $D \leq_p C$

   Analogno dobivamo $\overline{DC} \subseteq \overline{AB}$.

U oba slučaja imamo $\overline{CD} \subseteq \overline{AB}$, pa zaključujemo da je $\overline{AB}$ konveksan skup. □

**Lema 1.15.** *Neka je* $(M, \Psi, f)$ *elementarna ravnina. Neka su* $A, B \in M$*, te neka je* $C \in \overline{AB}$. *Tada je*

$$\overline{AB} = \overline{AC} \cup \overline{CB}$$

*Dokaz.* Budući da je $\overline{AB}$ konveksan skup, vrijedi

$$\overline{AC} \subseteq \overline{AB} \text{ i } \overline{CB} \subseteq \overline{AB} \ \Rightarrow \ \overline{AC} \cup \overline{CB} \subseteq \overline{AB}.$$

Neka je $p$ pravac koji prolazi točkama $A$ i $B$, te neka je $\leq \in f(p)$ t.d. je $A \leq B$. Tada je

$$\overline{AB} = \{T \in p \mid A \leq T \leq B\} \ \Rightarrow \ A \leq C \leq B.$$

Neka je $T \in \overline{AB}$. Tada je $A \leq T \leq B$. Nadalje, vrijedi $T \leq C$ ili $C \leq T$. U prvom slučaju dobivamo $T \in \overline{AC}$, a u drugom $T \in \overline{CB}$.
Zaključak: $\overline{AB} \subseteq \overline{AC} \cup \overline{CB}$. □

**Propozicija 1.16.** *Neka je* $(M, \Psi, f)$ *elementarna ravnina. Neka je* $p$ *pravac u toj ravnini, te* $\leq \in f(p)$. *Neka je* $k \in \mathbb{N}$ *te neka su* $x_0, ..., x_k \in p$ *točke takve da je* $x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_k$. *Tada je*

$$\overline{x_0 x_k} = \bigcup_{i=0}^{k-1} \overline{x_i x_{i+1}}.$$

*Dokaz.* Dokažimo ovu tvrdnju indukcijom po $k$.

Za $k = 1$ tvrdnja je jasna. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$. Neka su $x_0, ..., x_{k+1} \in p$ točke takve da je $x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_k \leq x_{k+1}$. Koristeći Lemu 1.15 i induktivnu pretpostavku dobivamo:

$$\overline{x_0 x_{k+1}} = \overline{x_0 x_k} \cup \overline{x_k x_{k+1}} = [\bigcup_{i=0}^{k-1} \overline{x_i x_{i+1}}] \cup \overline{x_k x_{k+1}} = \bigcup_{i=0}^{k} \overline{x_i x_{i+1}}.$$

Prema tome tvrdnja vrijedi za $k + 1$.

Time smo dokazali tvrdnju propozicije. □

**Lema 1.17.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna ravnina. Neka su $I, J$ segmenti t.d. je $I \cap J \neq \emptyset$. Tada je $I \cap J$ segment.*

*Dokaz.* Ako je $I \cap J$ jednočlan skup, onda je tvrdnja jasna.
Pretpostavimo da $I \cap J$ ima barem dvije točke. Tada $I$ i $J$ leže na istom pravcu. Označimo ga s $p$. Neka su $A, B \in p$ t.d. je $I = \overline{AB}$. Odaberimo $\preceq \in f(p)$ t.d. $A \preceq B$.
Nadalje, neka su $C, D \in p$ t.d. je $J = \overline{CD}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $C \preceq D$.
Neka je $T_0 \in I \cap J$. Tada je

$$A \preceq T_0 \preceq B \text{ i } C \preceq T_0 \preceq D.$$

Neka je $E = A$ ako je $C \preceq A$, inače $E = C$. Uočimo da je tada $A \preceq E$ i $C \preceq E$.
Nadalje, neka je $F = B$ ako je $B \preceq D$, inače $F = D$. Uočimo da je tada $F \preceq B$ i $F \preceq D$.

Tvrdimo da je $I \cap J = \overline{EF}$.
Uočimo da je $E \preceq T_0 \preceq F$. Stoga je $E \preceq F$. Neka je $T \in I \cap J$. Tada je

$$A \preceq T \preceq B \text{ i } C \preceq T \preceq D \;\Rightarrow\; E \preceq T \preceq F \;\Rightarrow\; T \in \overline{EF}.$$

Obratno, neka je $T \in \overline{EF}$. Stoga je $E \preceq T \preceq F$. Iz definicije točaka $E$ i $F$ slijedi da je $T \in \overline{AB}$ i $T \in \overline{CD}$, odnosno $T \in I \cap J$. □

**Definicija 1.18.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna ravnina. Za $(M, \Psi, f)$ ćemo reći da je elementarna P-ravnina ako vrijedi tzv. Pashov aksiom.*

***Pashov aksiom:***
*ako su $A, B, C \in M$ i $p \in \Psi$ te ako $p$ siječe $\overline{AB}$ (tj. $p \cap \overline{AB} \neq \emptyset$), onda $p$ siječe $\overline{AC}$ ili $\overline{BC}$.*

**Lema 1.19.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna ravnina, neka je $p \in \Psi$, te neka su $A, B, C \in p$. Tada jedna od ove tri točke leži između preostale dvije.*

*Dokaz.* Neka je $\preceq_p$ uređaj na $p$ takav da je $A \preceq_p B$.

1. $C \leq_p A$

   Jasno je tada da je $A \in \overline{CB}$.

2. $A \leq_p C$

   Ako je $C \leq_p B$ slijedi da je $C \in \overline{AB}$. Ako je $B \leq_p C$ slijedi da je $B \in \overline{AC}$.

□

**Definicija 1.20.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna ravnina. Za točke $A, B, C \in M$ kažemo da su kolinearne ako postoji $p \in \Psi$ takav da su $A, B, C \in p$. Ako točke $A, B, C$ nisu kolinearne, tada kažemo da su nekolinearne.*

**Napomena 1.21.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna ravnina. Neka su $A, B \in M$, $A \neq B$. Sa $AB$ označavamo jedinstveni $p \in \Psi$ t.d. je $A, B \in p$.*

**Lema 1.22.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna ravnina. Neka su $A, B, C$ nekolinearne točke. Neka je $D \in \overline{AB}, D \neq B$. Tada je*

$$BC \cap \overline{AD} = \emptyset.$$

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno, dakle, $BC \cap \overline{AD} \neq \emptyset$. Neka je $E \in BC \cap \overline{AD}$. Iz $D \in AB$ slijedi

$$\overline{AD} \subseteq AB \Rightarrow E \in AB.$$

Dakle, $E \in BC$ i $E \in AB$. Prema Lemi 1.11 slijedi $B \notin \overline{AD}$. Dakle, $B \neq E$, pa su $B$ i $E$ dvije različite točke i obje pripadaju pravcima $AB$ i $BC$, pa je $AB = BC$. Ovo je u kontradikciji s pretpostavkom da su $A, B, C$ nekolinearne.

Dakle, $BC \cap \overline{AD} = \emptyset$. □

**Lema 1.23.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna ravnina, neka su $A, B \in M$, te neka je $I$ segment t.d. je*

$$I \subseteq \overline{AB} \text{ i } A \in I.$$

*Tada je $A$ krajnja točka od $I$.*

*Dokaz.* Neka je $p$ pravac t.d. $A, B \in p$. Odaberimo $\leq \in f(p)$ t.d. je $A \leq B$.
Imamo $I = \overline{CD}$ gdje su $C, D \in M$. Iz

$$I \subseteq \overline{AB} \Rightarrow C, D \in \overline{AB}.$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $C \leq D$. Iz

$$C \in \overline{AB} \Rightarrow A \leq C.$$

S druge strane iz

$$A \in I \Rightarrow A \in \overline{CD} \Rightarrow C \leq A.$$

Iz ovoga zaključujemo da je $A = C$. □

**Teorem 1.24.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna P-ravnina, neka su $A, B, C \in M$, te $p \in \Psi$ pravac koji ne prolazi ni jednom od ovih točaka. Tada $p$ ne može sjeći sva tri segmenta $\overline{AB}, \overline{BC}$ i $\overline{AC}$.*

*Dokaz.* 1. slučaj: Točke $A, B$ i $C$ su kolinearne.

Neka je $q$ pravac takav da su $A, B, C \in q$. Prema Lemi 1.19 jedna od ove tri točke leži između preostale dvije. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da $B$ leži između $A$ i $C$. Neka je $\preceq_q \in f(q)$ takav da je $A \preceq_q C$. Tada je $A \preceq_q B$ i $B \preceq_q C$.

Pretpostavimo da pravac $p$ siječe sva tri segmenta $\overline{AB}, \overline{BC}$ i $\overline{AC}$. Dakle, postoji $T_1 \in \overline{AB}$ t.d. $T_1 \in p$ te postoji $T_2 \in \overline{BC}$ t.d. $T_2 \in p$. Iz $T \in \overline{AB}$ slijedi $T_1 \preceq_q B$, a iz $T_2 \in \overline{BC}$ slijedi $B \preceq_q T_2$. Kada bi $T_1 = T_2$ to bi povlačilo da je

$$B = T_1 \Rightarrow B \in p.$$

To je nemoguće pa je $T_1 \neq T_2$.

Dakle, $T_1$ i $T_2$ su dvije različite točke koje leže na pravcima $p$ i $q$. Stoga je $p = q$. No, to povlači da $p$ prolazi točkama $A, B$ i $C$, što je u kontradikciji s pretpostavkom teorema. Dakle, $p$ ne siječe sva tri segmenta $\overline{AB}, \overline{BC}$ i $\overline{AC}$.

2. slučaj: Točke $A, B$ i $C$ su nekolinearne.

Pretpostavimo da pravac $p$ siječe sva tri segmenta $\overline{AB}, \overline{BC}$ i $\overline{AC}$. Neka su $T_1, T_2, T_3 \in p$ točke takve da je $T_1 \in \overline{AB}, T_2 \in \overline{BC}$ i $T_3 \in \overline{AC}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da $T_2$ leži između $T_1$ i $T_3$, dakle $T_2 \in \overline{T_1T_3}$.

Prema tome pravac $BC$ siječe segment $\overline{T_1T_3}$. Stoga, prema Pashovom aksiomu slijedi da $BC$ siječe $\overline{AT_1}$ ili $\overline{AT_3}$. Uočimo da je $T_1 \neq B$ ($T_1 \in p, B$ nije element $p$), stoga prema Lemi 1.22 $BC$ ne siječe segment $\overline{AT_1}$. Isto tako, $C \neq T_3$, pa prema Lemi 1.22 slijedi $BC \cap \overline{AT_3} = \emptyset$, što je kontradikcija.

Dakle, $p$ ne siječe sva tri segmenta $\overline{AB}, \overline{BC}$ i $\overline{AC}$. □

## 1.2 Ravnina

**Definicija 1.25.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna P-ravnina. Za $(M, \Psi, f)$ kažemo da je ravnina ako*

*(1) Za svaki $p \in \Psi$ i sve $A, B \in p$ postoji točka $C \in p, C \neq B$ takva da je $B \in \overline{AC}$.*

*(2) Za svaki $p \in \Psi$ i sve $A, B \in p$, $A \neq B$ postoji točka $C \in \overline{AB}$ takva da je $C \neq A$ i $C \neq B$.*

**Teorem 1.26.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka je $p$ pravac u ravnini. Definirajmo relaciju $\psi$ na skupu $M \setminus p$ sa*

$$A\psi B \text{ ako je } \overline{AB} \cap p = \emptyset.$$

*Tada je $\psi$ relacija ekvivalencije na $M \setminus p$ koja rastavlja $M \setminus p$ na dvije klase ekvivalencije.*

*Dokaz.* Očito je da je relacija $\psi$ refleksivna i simetrična.

Dokažimo da je $\psi$ tranzitivna.
Neka su $A, B, C \in M \setminus p$ takve da je $A\psi B$, $B\psi C$. Pretpostavimo da $(A, C) \notin \psi$. Tada je $\overline{AC} \cap p \neq \emptyset$. Prema Pashovom aksiomu slijedi da $p$ siječe $\overline{AB}$ ili $\overline{BC}$. No, to je u kontradikciji sa $A\psi B$ i $B\psi C$. Dakle, $A\psi C$. Prema tome relacija $\psi$ je tranzitivna, odnosno $\psi$ je relacija ekvivalencije na $M \setminus p$.

Dokažimo sada da $\psi$ rastavlja $M \setminus p$ na dvije klase ekvivalencije.
Odaberimo neku točku $O \in p$. Nadalje, odaberimo neku točku $A \in M \setminus p$. Neka je $q$ pravac koji sadrži točke $O$ i $A$. Budući da je $(M, \Psi, f)$ $P^+$- ravnina postoji točka $B \in q$, $B \neq O$ takva da je $O \in \overline{AB}$. Uočimo da $B \notin p$. Naime, u suprotnom bi $O$ i $B$ bile dvije različite točke koje leže na pravcima $p$ i $q$, pa bi slijedilo $p = q$, što je nemoguće jer je $A \in q$ i $A \notin p$.
Dakle, $B \notin p$ i pravac $p$ siječe segment $\overline{AB}$. Stoga $(A, B) \notin \psi$.
Neka je $C \in M \setminus p$. Tvrdimo da je tada $A\psi C$ ili $B\psi C$. Pretpostavimo suprotno

$$(A, C) \notin \psi \text{ i } (B, C) \notin \psi$$

odnosno $p$ siječe segmente $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Ovo je u kontradikciji s Teoremom 1.24.
Dakle, $A\psi C$ ili $B\psi C$.

Zaključak: $[A] \neq [B]$ i za svaki $C \in M \setminus p$ vrijedi $[A] = [C]$ ili $[B] = [C]$.

Pri tome za $P \in M \setminus p$ sa $[P]$ označavamo klasu od $P$ pri relaciji $\psi$ □

**Definicija 1.27.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina, neka je $p$ pravac u ravnini te neka je $P \in M \setminus p$. Za $[P]$ kažemo da je poluravnina određena pravcem $p$, pri čemu je $[P]$ klasa točke $P$ pri relaciji $\psi$ na $M \setminus p$ definiranoj sa $A\psi B$ ako je $\overline{AB} \cap p = \emptyset$.*

**Napomena 1.28.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna ravnina, te neka je $K_\alpha, \alpha \in A$ (indeksirana) familija konveksnih skupova u ovoj ravnini. Tada je*

$$\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha$$

*konveksan skup.*

Naime, ako su $P, Q \in \bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha$, onda je $P, Q \in K_\alpha, \forall \alpha \in A$. Stoga je

$$\overline{PQ} \subseteq K_\alpha, \forall \alpha \in A \Rightarrow \overline{PQ} \subseteq \bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha$$

Dakle, $\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha$ je konveksan skup.

**Definicija 1.29.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna ravnina, te $S \subseteq M$. Neka je*

$$\mathrm{Conv}\,(S) = \bigcap_{K konveksan,\, S \subseteq K} K.$$

*Dakle,* $\mathrm{Conv}\,(S)$ *je presjek svih konveksnih skupova u $(M, \Psi, f)$ koji sadrže $S$. Za* $\mathrm{Conv}\,(S)$ *kažemo da je konveksna ljuska skupa $S$ (u ravnini $(M, \Psi, f)$).*

**Uočimo:** $\mathrm{Conv}\,(S)$ je konveksan skup, te $S \subseteq \mathrm{Conv}\,(S)$. Nadalje, uočimo da vrijedi sljedeće:

$$K \text{ konveksan skup t.d. } S \subseteq K \Rightarrow \mathrm{Conv}\,(S) \subseteq K$$

($\mathrm{Conv}\,(S)$ je presjek svih konveksnih nadskupova od $S$, a $K$ je jedan od tih skupova).

**Uočimo:**

$$S = \mathrm{Conv}\,(S) \Leftrightarrow S \text{ konveksan skup}$$

Naime, ako je $S = \mathrm{Conv}\,(S)$, onda je jasno da je $S$ konveksan skup. S druge strane, ako je $S$ konveksan onda iz prethodne činjenice zaključujemo $\mathrm{Conv}\,(S) \subseteq S$. Ovo zajedno s $S \subseteq \mathrm{Conv}\,(S)$ povlači da je $S = \mathrm{Conv}\,(S)$.

**Primjer 1.30.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna ravnina, te neka su $A, B \in M$. Tada je*

$$\mathrm{Conv}\,\{A, B\} = \overline{AB}.$$

Dokažimo to. Jasno da su $A, B \in \mathrm{Conv}\,\{A, B\}$, iz čega slijedi $\overline{AB} \subseteq \mathrm{Conv}\,\{A, B\}$ jer je $\mathrm{Conv}\,\{A, B\}$ konveksan skup.
S druge strane, $\{A, B\} \subseteq \overline{AB}$, pa je $\mathrm{Conv}\,\{A, B\} \subseteq \overline{AB}$ jer je segment $\overline{AB}$ konveksan skup.

**Propozicija 1.31.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina. Neka je $p \in \Psi$, te neka je $K$ poluravnina određena pravcem $p$. Tada je $K$ konveksan skup.*

*Dokaz.* Neka su $A, B \in K$. Dokažimo da je $\overline{AB} \subseteq K$.
Iz definicije poluravnine slijedi da je $K = [Q]$, gdje je $Q \in M \setminus p$, a $[Q]$ klasa točke $Q$ pri relaciji $\psi$ na $M \setminus p$ definiranoj sa

$$T_1 \psi T_2 \Leftrightarrow \overline{T_1 T_2} \cap p = \emptyset.$$

No, iz $A \in K$ slijedi $K = [A]$. Stoga je

$$K = \{C \in M \setminus p \mid \overline{AC} \cap p = \emptyset\}$$

Sada iz $B \in K$ slijedi $\overline{AB} \cap p = \emptyset$, pa za svaku točku $T \in \overline{AB}$ slijedi $\overline{AT} \cap p = \emptyset$ jer je $\overline{AT} \subseteq \overline{AB}$, što povlači $T \in K$. Zaključak $\overline{AB} \subseteq K$.
Dakle, $K$ je konveksan skup. □

**Uočimo:** Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka je $p$ pravac u toj ravnini. Tada postoje točno dvije poluravnine $K_1$ i $K_2$ određene s $p$ te da je

$$K_1 \cap K_2 = \emptyset, \; M \setminus p = K_1 \cup K_2.$$

Dakle, svaka točka iz $M \setminus p$ se nalazi u točno jednom od skupova $K_1$ i $K_2$. Nadalje, ako su $A, B \in M \setminus p$ te ako je $\overline{AB} \cap p = \emptyset$, onda se $A$ i $B$ nalaze u istoj poluravnini. Ako je $\overline{AB} \cap p \neq \emptyset$, onda se $A$ i $B$ nalaze u različitim poluravninama.

**Definicija 1.32.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina, neka je $p$ pravac u toj ravnini te neka je $K$ poluravnina određena pravcem $p$. Za skup*

$$K \cup p$$

*kažemo da je zatvorena poluravnina određena pravcem $p$.*

**Uočimo:** Postoje točno dvije zatvorene poluravnine $L_1$ i $L_2$ određene pravcem $p$, t.d. je

$$L_1 \cap L_2 = p \text{ i } L_1 \cup L_2 = M.$$

**Lema 1.33.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna ravnina i $p$ pravac u toj ravnini. Neka je $B \in p$ te $A \in M \setminus p$. Neka je $T \in \overline{AB}$ t.d. $T \neq B$. Tada $T \notin p$.*

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno. Dakle, $T \in p$.
Tada su $T$ i $B$ dvije različite točke koje leže na pravcu $p$ te ujedno leže na pravcu $AB$ (jer je $\overline{AB} \subseteq AB$).
Stoga je $p = AB$, pa je $A \in p$, što je nemoguće.
Dakle, $T \notin p$. □

**Propozicija 1.34.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina, te neka je $L$ zatvorena poluravnina u $(M, \Psi, f)$. Tada je $L$ konveksan skup.*

*Dokaz.* Neka je $p$ pravac takav da je

$$L = K \cup p,$$

pri čemu je $K$ poluravnina određena pravcem $p$. Neka su $A, B \in L$. Želimo dokazati da je $\overline{AB} \subseteq L$.

1. slučaj: $A, B \in K$

   Onda je $\overline{AB} \subseteq K$ jer je $K$ konveksan skup, pa je $\overline{AB} \subseteq L$.

2. slučaj: $A, B \in p$

   Onda je $\overline{AB} \subseteq p$, pa je $\overline{AB} \subseteq L$.

3. slučaj: $A \in K$, $B \in p$

   Neka je $T \in \overline{AB}$. Ako je $T = B$ onda je $T \in p$, tj. $T \in L$.

   Pretpostavimo $T \neq B$. Tada za svaki $P \in \overline{TA}$ vrijedi $P \neq B$ i $P \in \overline{AB}$. Prema Lemi 1.33 imamo $P \notin p$. Zaključak: $\overline{TA} \cap p = \emptyset$.

   Iz ovoga slijedi da točke $T$ i $A$ leže u istoj poluravnini određenoj s $P$. No,

   $$A \in K \;\Rightarrow\; T \in K \;\Rightarrow\; T \in L.$$

   Ovime smo pokazali da je $\overline{AB} \subseteq L$ u slučaju $A \in K$, $B \in p$.

4. slučaj: $A \in p$, $B \in K$

   Analogno kao i u prethodnom slučaju dolazimo do zaključka da je $\overline{AB} \subseteq L$.

□

**Definicija 1.35.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna ravnina, te neka su $A, B \in M$. Definiramo*

$$\langle AB \rangle = \overline{AB} \setminus \{A, B\}.$$

*Za $\langle AB \rangle$ kažemo da je otvorena dužina određena točkama $A$ i $B$.*

**Uočimo:** Jasno je $\langle AB \rangle = \langle BA \rangle$. Nadalje, očito je $\langle AA \rangle = \emptyset$.
**Uočimo:** U ravnini $(M, \Psi, f)$ vrijedi $\langle AB \rangle \neq \emptyset$ za sve $A, B \in M$, $A \neq B$.

**Lema 1.36.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna ravnina, te neka su $A, B, C, D \in M$ t.d. je $\overline{AB} \subseteq \overline{CD}$. Tada je*

$$\langle AB \rangle \subseteq \langle CD \rangle.$$

*Dokaz.* Neka je $p$ pravac na kojem leže točke $C$ i $D$. Odaberimo $\leq \in f(p)$ t.d. $C \leq D$.
Iz $A, B \in \overline{CD}$ slijedi $A, B \in p$.
Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $A \leq B$. Nadalje,

$$A, B \in \overline{CD} \;\Rightarrow\; C \leq A \leq B \leq D.$$

Ako je $T \in \langle AB \rangle$, onda je $A \prec T \prec B$, pa slijedi $C \prec T \prec D$, tj. $T \in \langle CD \rangle$. □

**Lema 1.37.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina, neka je $p$ pravac, te neka su $A, B, C, D \in p$ točke takve da je $\overline{AB} \cap \overline{CD} \neq \emptyset$. Tada je*

$$A \in \overline{CD} \text{ ili } B \in \overline{CD} \text{ ili } C \in \overline{AB} \text{ ili } D \in \overline{AB}.$$

*Dokaz.* Neka je $T \in \overline{AB} \cap \overline{CD}$. Odaberimo $\leq \in f(p)$ t.d. je $A \leq B$.
Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $C \leq D$. Imamo $A \leq T \leq B$ i $C \leq T \leq D$. Razlikujemo dva slučaja:

1. $A \leq C$

   Tada je $A \leq C \leq T \leq B$, pa je $C \in \overline{AB}$

2. $C \leq A$

   Tada je $C \leq A \leq T \leq D$, pa je $A \in \overline{CD}$

□

**Lema 1.38.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina, neka je $p$ pravac, te neka su $A, B, C, D \in p$ točke takve da je*

$$\langle AB \rangle \cap \langle CD \rangle \neq \emptyset.$$

*Tada $\langle AB \rangle \cap \langle CD \rangle$ sadrži barem dvije točke.*

*Dokaz.* Neka je $T \in \langle AB \rangle \cap \langle CD \rangle$. Odaberimo $\leq \in f(p)$ t.d. je $A \leq B$.
Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $C \leq D$. Imamo

$$A \leq T \leq B \text{ i } C \leq T \leq D.$$

Razlikujemo dva slučaja:

1. $A \leq C$

   Tada je $A \leq C \leq T \leq B$, pa prema Lemi 1.36 slijedi da je $\langle CT \rangle \subseteq \langle AB \rangle$. Iz $C \leq T \leq D$ isto tako slijedi da je $\langle CT \rangle \subseteq \langle CD \rangle$. No $C \neq T$ jer je $T \in \langle CD \rangle$, pa je $\langle CT \rangle \neq \emptyset$.

   Prema tome, postoji $P \in \langle CT \rangle$. Imamo $P \in \langle AB \rangle \cap \langle CD \rangle$ i $P \neq T$.

2. $C \leq A$

   Analogno dobivamo $\langle AT \rangle \subseteq \langle AB \rangle \cap \langle CD \rangle$, pa zaključujemo da $\langle AB \rangle \cap \langle CD \rangle$ sadrži točku različitu od $T$.

□

# Poglavlje 2

# Trokuti

**Definicija 2.1.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna ravnina te neka su $A, B, C \in M$ nekolinearne točke u ovoj ravnini. Tada za*

$$\mathrm{Conv}\{A, B, C\}$$

*kažemo da je trokut.*

**Lema 2.2.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna P-ravnina te neka su $A, B, C \in M$ nekolinearne točke u ovoj ravnini. Neka je $P \in \overline{BC}$ i $T \in \overline{AP}$. Tada postoji $D \in \overline{AB}$ t.d. je $T \in \overline{CD}$.*

*Dokaz.* Ako je $P = C$, onda uzmemo $D = A$.
Pretpostavimo stoga da je $P \neq C$.
Ako je $T = P$ onda uzmemo $D = B$ i imamo $T \in \overline{DC}$.
Pretpostavimo sada da je $T \neq P$. Neka je $p$ pravac t.d. $C, T \in p$. Pravac $p$ siječe segment $\overline{AP}$. Prema Pashovom aksiomu $p$ siječe $\overline{PB}$ ili $\overline{AB}$.
Kada bi $p$ sijekao $\overline{PB}$ postojala bi točka $Q$ t.d. je $Q \in p$ i $Q \in \overline{PB}$. Prema Lemi 1.11 imali bismo $C \neq Q$ što bi značilo da pravci $p$ i $CB$ sadrže dvije različite točke. Dakle, $p = BC$. No, to bi povlačilo da je $T \in BC$, a to je nemoguće jer su $AP$ i $BC$ različiti pravci, pa je jedina točka iz njihovog presjeka $P$.
Stoga $p$ siječe $\overline{AB}$. Neka je $D \in p \cap \overline{AB}$. Pravac $AP$ siječe segment $\overline{BC}$ pa prema Pashovom aksiomu $AP$ siječe $\overline{DC}$ ili $\overline{DB}$.

1. slučaj: Pretpostavimo da $AP$ siječe $\overline{DB}$.

   Ako je $P = B$ onda je $T \in \overline{AB}$, pa je tvrdnja leme jasna.

   Pretpostavimo sada da je $P \neq B$. Tada su pravci $AB$ i $AP$ različiti (u suprotnom bi točka $P$ pripadala pravcima $AB$ i $BC$, no jedina točka koja leži na ta dva pravca je $B$). Stoga je $A$ jedina točka u presjeku ta dva pravca.

   S obzirom da $AP$ siječe $\overline{DB}$, a $\overline{DB} \subseteq AB$, imamo $A \in \overline{DB}$. No, prema Lemi 1.11 ovo nije moguće ako je $A \neq D$. Stoga je $A = D$.

Ovo povlači da je $A \in p$, pa je $p = AC$. Stoga je $T \in AC$, ali i $T \in AP$. Budući da je $AP \neq AC$ slijedi $A = T$, pa tvrdnja leme slijedi. (Znamo da je $AC = AP$ što povlači $P \in AC$. No, $P \in BC$, a jedina točka iz $AC \cap BC$ je $C$.)

2. slučaj: Pretpostavimo sada da $AP$ siječe $\overline{DC}$.

   Neka je $Q \in AP \cap \overline{DC}$. Pravci $AP$ i $DC$ su različiti i oba sadrže točku $T$. Slijedi da je $T = Q$ tj. $T \in \overline{DC}$. (Naime, ako je $AP = DC$, onda je $C \in AP$ i $P \in AC$ iz čega slijedi da je $P \in AC \cap BC$, odnosno $P = C$, što je nemoguće.)

□

**Lema 2.3.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna P-ravnina te neka su $A, B, C \in M$ nekolinearne točke u ovoj ravnini. Neka je $P \in \overline{BC}$ i $Q \in \overline{AC}$. Neka je $T \in \overline{PQ}$. Tada postoji $D \in \overline{AB}$ t.d. je $T \in \overline{CD}$.*

*Dokaz.* Ako je $P = C$, onda je $T \in \overline{QC}$, pa je $T \in \overline{AC}$. Tada možemo uzeti $D = A$.
Pretpostavimo sada da je $P \neq C$. Tada su točke $A, P$ i $C$ nekolinearne (u suprotnom bismo imali $P \in AC$, pa bi vrijedilo $P \in AC \cap BC$, no $AC \cap BC = \{C\}$).
Prema Lemi 2.2 postoji $D_1 \in \overline{AP}$ t.d. $T \in \overline{D_1 C}$. Nadalje, prema istoj lemi postoji $D_2 \in \overline{AB}$ t.d.

$$D_1 \in \overline{D_2 C}$$

što povlači $\overline{CD_1} \subseteq \overline{CD_2}$ pa je $T \in \overline{CD_2}$. □

**Propozicija 2.4.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna P-ravnina te neka su $A, B, C \in M$ nekolinearne točke u ovoj ravnini. Neka je*

$$S = \bigcup_{P \in \overline{AB}} \overline{CP}$$

*Tada je $S$ konveksan skup.*

*Dokaz.* Neka su $T_1, T_2 \in S$. Želimo dokazati da je $\overline{T_1 T_2} \subseteq S$.
Neka je $T \in \overline{T_1 T_2}$. Budući da su $T_1, T_2 \in S$ postoje $P_1, P_2 \in \overline{AB}$ t.d.

$$T_1 \in \overline{CP_1} \text{ i } T_2 \in \overline{CP_2} \text{ (Lema 2.3).}$$

Ako je $P_1 = P_2$, onda su

$$T_1, T_2 \in \overline{CP_1} \Rightarrow \overline{T_1 T_2} \subseteq \overline{CP_1} \Rightarrow T \in \overline{CP_1} \Rightarrow T \in S.$$

Pretpostavimo sada da je $P_1 \neq P_2$. Tada su točke $P_1, P_2$ i $C$ nekolinearne jer $P_1 P_2 = AB$, a $C \notin AB$. Prema Lemi 2.3 postoji $D \in \overline{P_1 P_2}$ t.d. je $T \in \overline{CD}$. Iz $\overline{P_1 P_2} \subseteq \overline{AB}$ slijedi $D \in \overline{AB}$.
Ovo znači da je $T \in S$.
Zaključak: $\overline{T_1 T_2} \subseteq S$.

Prema tome $S$ je konveksan skup. □

**Teorem 2.5.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna P-ravnina te neka su $A, B, C \in M$ nekolinearne točke u ovoj ravnini. Neka je $\Delta = \mathrm{Conv}\,\{A, B, C\}$. Tada je*

$$\Delta = \bigcup_{P \in \overline{AB}} \overline{CP}$$

*Dokaz.* Neka je $S = \bigcup_{P \in \overline{AB}} \overline{CP}$. Želimo dokazati da je $\Delta = S$.
Uočimo da je $\Delta$ konveksan skup, te da su $A, B, C \in \Delta$. Iz ovoga slijedi da je $\overline{AB} \subseteq \Delta$. Stoga za svaki $P \in \overline{AB}$ imamo

$$P \in \Delta \;\Rightarrow\; \overline{CP} \subseteq \Delta.$$

Iz definicije od $S$ slijedi $S \subseteq \Delta$.
S druge strane, prema Propoziciji 2.4 $S$ je konveksan skup. Iz definicije od $S$ je jasno da su $\overline{CA}, \overline{CB} \subseteq S$. Dakle, $A, B, C \in S$. Prema tome, imamo

$$\{A, B, C\} \subseteq S \;\Rightarrow\; \mathrm{Conv}\,\{A, B, C\} \subseteq S \;\Rightarrow\; \Delta \subseteq S.$$

Zaključujemo da je $\Delta = S$. □

**Teorem 2.6.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina, te neka su $A$, $B$ i $C$ nekolinearne točke u toj ravnini. Neka je $\Delta = \mathrm{Conv}\,\{A, B, C\}$. Neka je $K_A$ zatvorena poluravnina određena pravcem $BC$ koja sadrži točku $A$, neka je $K_B$ zatvorena poluravnina određena pravcem $AC$ koja sadrži točku $B$ i $K_C$ zatvorena poluravnina određena pravcem $AB$ koja sadrži točku $C$. Tada je*

$$\Delta = K_A \cap K_B \cap K_C.$$

*Dokaz.* Jasno je da vrijedi

$$A, B, C \in K_A, \;\; A, B, C \in K_B \text{ i } A, B, C \in K_C.$$

Prema tome, $\{A, B, C\} \subseteq K_A \cap K_B \cap K_C$. Skup $K_A \cap K_B \cap K_C$ je konveksan kao presjek konveksnih skupova (prema Propoziciji 1.34). Stoga je $\mathrm{Conv}\,\{A, B, C\} \subseteq K_A \cap K_B \cap K_C$. Dakle,

$$\Delta \subseteq K_A \cap K_B \cap K_C.$$

Dokažimo sada da je $K_A \cap K_B \cap K_C \subseteq \Delta$. Neka je $T \in K_A \cap K_B \cap K_C$.

1. slučaj: $T \in AB$

   Tada je $T \in \overline{AB}$ ili $B \in \overline{AT}$ ili $A \in \overline{TB}$.

   Ako je $T \in \overline{AB}$ onda je $T \in \Delta$.

   Pretpostavimo da je $B \in \overline{AT}$. Uzmimo da je $B \neq T$. Tada $T \notin BC$ (u suprotnom bi točke $B$ i $T$ ležale na pravcima $AB$ i $BC$). Dakle, imamo $\overline{AT} \cap BC \neq \emptyset$, pa slijedi da su točke $A$ i $T$ u različitim poluravninama koje su određene pravcem $BC$. To je nemoguće jer je $T \in K_A$. Dakle, $B = T$ pa je $T \in \Delta$.

Pretpostavimo sada da je $A \in \overline{TB}$. Analogno dobivamo da $T \neq A$ vodi na kontradikciju. Stoga je $T = A$ i $T \in \Delta$.

2. slučaj: $T \notin AB$

Neka je $D \in \overline{AB}$, $D \neq A$ i $D \neq B$. Pravac $TD$ siječe $\overline{AB}$, pa prema Pashovom aksiomu $TD$ siječe $\overline{AC}$ ili $\overline{BC}$. Pretpostavimo da je $TD \cap \overline{AC} \neq \emptyset$. Neka je $P \in \overline{AC}$ t.d. $P \in DT$. Razlikujemo tri slučaja:

1. $T \in \overline{PD}$

   Budući da su $P, D \in \Delta$ imamo $T \in \Delta$.

2. $D \in \overline{PT}$

   Uočimo da $P \notin AB$. (U suprotnom bismo imali $P \in AC \cap AB$ što povlači $P = A$. No, to bi značilo da su $P$ i $D$ dvije različite točke koje leže na pravcima $AB$ i $DT$. To je nemoguće jer je $AB \neq DT$ jer $T \notin AB$.)

   Dakle, imamo $P \notin AB$, $T \notin AB$ i $\overline{PT} \cap AB \neq \emptyset$. Iz ovoga slijedi da točke $P$ i $T$ leže u različitim poluravninama koje su određene pravcem $AB$. Stoga točke $P$ i $T$ ne leže u istoj zatvorenoj poluravnini određenom pravcem $AB$. Međutim, imamo

   $$P \in \overline{AC} \subseteq \Delta \subseteq K_A \cap K_B \cap K_C$$

   pa je $P \in K_C$. S druge strane, $T \in K_A \cap K_B \cap K_C$ što povlači $T \in K_C$.

3. $P \in \overline{TD}$

   Pretpostavimo da je $P \neq T$. Uočimo da $D \notin AC$ (u suprotnom bismo imali $D \in AC \cap AB = \{A\}$). Stoga je $DT \neq AC$, pa je $DT \cap AC = \{P\}$. Iz ovoga slijedi da $T \notin AC$. Imamo

   $$D \notin AC,\ T \notin AC \text{ i } \overline{TD} \cap AC \neq \emptyset$$

   pa točke $T$ i $D$ ne leže u istoj poluravnini određenoj s $AC$, što znači da ne leže ni u istoj zatvorenoj poluravnini određenoj s $AC$. No, $D \in \Delta$ pa je $D \in K_B$, a $T \in K_B$ jer je $T \in K_A \cap K_B \cap K_C$. Ovo dovodi do kontradikcije.

   Dakle, $P = T$ pa je $T \in \overline{AC}$, tj. $T \in \Delta$.

Zaključujemo da ako $TD$ siječe $\overline{AC}$ onda je $T \in \Delta$. Analogno dobivamo da je $T \in \Delta$ ako $TD$ siječe $\overline{BC}$.

Dakle, ako $T \notin AB$, onda je $T \in \Delta$.

Prema tome $K_A \cap K_B \cap K_C \subseteq \Delta$. Zaključujemo da je $\Delta = K_A \cap K_B \cap K_C$. □

**Propozicija 2.7.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina, te neka su $A, B$ i $C$ tri nekolinearne točke u ovoj ravnini. Neka je*

$$\Delta = \operatorname{Conv}\{A, B, C\} \text{ i } T \in \Delta \setminus \{A, B, C\}.$$

*Tada postoje $P, Q \in \Delta$ t.d. $T \in \langle PQ \rangle$.*

*Dokaz.* Znamo da je

$$\Delta = \bigcup_{P \in \overline{AB}} \overline{CP}$$

stoga je $T \in \overline{CP}$ za $P \in \overline{AB}$.
Ako je $T \neq P$, onda je $T \in \langle CP \rangle$ (jer znamo da je $T \neq C$).
Ako je $T = P$, onda je $T \in \overline{AB}$. No, $T \neq A$ i $T \neq B$, pa je $T \in \langle AB \rangle$. □

**Propozicija 2.8.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina, neka su $A, B$ i $C$ tri nekolinearne točke u ovoj ravnini te neka je $\Delta = \operatorname{Conv}\{A, B, C\}$. Neka su $P, Q \in \Delta$ te neka je $T \in \langle PQ \rangle$. Tada je*

$$T \in \Delta \setminus \{A, B, C\}$$

*Dokaz.* Imamo

$$T \in \langle PQ \rangle \subseteq \overline{PQ} \subseteq \Delta.$$

Dakle, $T \in \Delta$. Dokažimo da je $T \neq A$, $T \neq B$ i $T \neq C$.
Pretpostavimo da je $T = A$. Dakle,

$$A \in \langle PQ \rangle \;\Rightarrow\; A \neq P \text{ i } A \neq Q.$$

Budući da je $AB \cap AC = \{A\}$, imamo da $P \notin AB$ ili $P \notin AC$.
Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da $P \notin AC$. No, tada imamo $Q \notin AC$. Naime, jasno je da je $P \neq Q$ te da je $A \in PQ$. Kada bi vrijedilo $Q \in AC$ onda bismo imali da su $A$ i $Q$ različite točke koje leže na pravcima $AC$ i $PQ$, a to bi povlačilo $AC = PQ$, što je nemoguće jer $P \notin AC$.
Dakle,

$$P \notin AC\;,\; Q \notin AC \text{ i } \overline{PQ} \cap AC \neq \emptyset.$$

Ovo znači da se točke $P$ i $Q$ ne nalaze u istoj zatvorenoj poluravnini određenoj pravcem $AC$. No, to je nemoguće jer su $P, Q \in \Delta$, pa se prema Teoremu 2.6 $P$ i $Q$ nalaze u istoj zatvorenoj poluravnini određenoj s pravcem $AC$. Dakle,

$$T \neq A.$$

Analogno dobivamo $T \neq B$ i $T \neq C$.
Dakle, $T \in \Delta \setminus \{A, B, C\}$. □

**Teorem 2.9.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina, neka su $A, B$ i $C$ tri nekolinearne točke u ovoj ravnini te neka je $\Delta = \operatorname{Conv}\{A, B, C\}$. Nadalje, neka su $A', B'$ i $C'$ nekolinearne točke te neka je $\Delta' = \operatorname{Conv}\{A', B', C'\}$. Pretpostavimo da je $\Delta = \Delta'$. Tada je*

$$\{A, B, C\} = \{A', B', C'\}$$

*Dokaz.* Prema Propoziciji 2.7 i Propoziciji 2.8 imamo

$$\Delta \setminus \{A, B, C\} = \{T \in \Delta \mid \text{postoje } P, Q \in \Delta \text{ t.d. je } T \in \langle PQ \rangle\}.$$

Isto tako

$$\Delta' \setminus \{A', B', C'\} = \{T \in \Delta' \mid \text{postoje } P, Q \in \Delta' \text{ t.d. je } T \in \langle PQ \rangle\}.$$

Iz $\Delta = \Delta'$ sada zaključujemo da je

$$\Delta \setminus \{A, B, C\} = \Delta' \setminus \{A', B', C'\}.$$

Općenito, ako je $S$ nekakav skup te ako su $S_1, S_2 \subseteq S$ t.d je $S \setminus S_1 = S \setminus S_2$, onda je $S_1 = S_2$.
Stoga je $\{A, B, C\} = \{A', B', C'\}$. □

**Definicija 2.10.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka su $A, B$ i $C$ tri nekolinearne točke u ovoj ravnini. Neka je $\Delta = \operatorname{Conv}\{A, B, C\}$. Za točke $A, B$ i $C$ kažemo da su vrhovi trokuta $\Delta$. Za dužine $\overline{AB}, \overline{BC}$ i $\overline{AC}$ kažemo da su stranice trokuta $\Delta$. Definiramo:*

$$\partial\Delta = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$$

*Za $\partial\Delta$ kažemo da je rub trokuta $\Delta$. Nadalje, za skup*

$$\overset{\circ}{\Delta} = \Delta \setminus \partial\Delta$$

*kažemo da je interior (unutrašnjost) trokuta $\Delta$.*

**Propozicija 2.11.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka je $\Delta$ trokut s vrhovima $A, B$ i $C$. Tada je*

$$\overset{\circ}{\Delta} = \bigcup_{P \in \langle AB \rangle} \langle CP \rangle.$$

*Dokaz.* Neka je $P \in \langle AB \rangle$. Dokažimo da je $\langle CP \rangle \subseteq \overset{\circ}{\Delta}$.
Neka je $T \in \langle CP \rangle$. Jasno je da je $T \in \Delta$.
Pretpostavimo da je $T \in \overline{AC}$. Tada je

$$CT = CA \;\Rightarrow\; CP = CA \;\Rightarrow\; P \in CA.$$

No, $P \in AB$. Dakle,

$$P \in CA \cap AB \text{ i } CA \cap AB = \{A\} \Rightarrow P = A,$$

što je nemoguće jer je $P \in \langle AB \rangle$. Prema tome $T \notin \overline{AC}$. Isto tako dobivamo $T \notin \overline{BC}$.
Pretpostavimo da je $T \in \overline{AB}$. Tada je $T \in AB$. Dakle,

$$T \in AB \cap CP \text{ i } AB \cap CP = \{P\} \Rightarrow T = P,$$

što je nemoguće jer je $T \in \langle CP \rangle$. Prema tome $T \notin \overline{AB}$.
Zaključujemo da je

$$T \in \Delta \setminus \partial\Delta \Rightarrow T \in \overset{\circ}{\Delta}.$$

Dakle, $\langle CP \rangle \subseteq \overset{\circ}{\Delta}$. Prema tome, $\bigcup_{P \in \langle AB \rangle} \langle CP \rangle \subseteq \overset{\circ}{\Delta}$.
Obratno,

$$T \in \overset{\circ}{\Delta} \Rightarrow T \in \Delta \text{ i } T \notin \partial\Delta$$

Znamo da je $\Delta = \bigcup_{P \in \overline{AB}} \overline{CP}$, stoga postoji $P \in \overline{AB}$ t.d. $T \in \overline{CP}$.
Ako je $P = A$, onda je $T \in \overline{CA}$, pa je $T \in \partial\Delta$, što je nemoguće. Dakle, $P \neq A$. Isto tako dobivamo da je $P \neq B$. Dakle, $P \in \langle AB \rangle$.
Nadalje, $T \neq C$ jer $T \notin \partial\Delta$ i $T \neq P$ jer je $P \in \partial\Delta$. Prema tome, $T \in \langle CP \rangle$.
Dakle, $\overset{\circ}{\Delta} = \bigcup_{P \in \langle AB \rangle} \langle CP \rangle$. □

**Lema 2.12.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka je $\Delta$ trokut s vrhovima $A, B$ i $C$. Tada je*

$$\Delta \cap AB = \overline{AB}$$

*Dokaz.* Očito je da je $\overline{AB} \subseteq \Delta \cap AB$.
Neka je $T \in \Delta \cap AB$. Budući da je $T \in \Delta$ postoji $P \in \overline{AB}$ t.d. $T \in \overline{CP}$ (prema Teoremu 2.5). Stoga je $T \in CP$. Imamo

$$T \in AB \cap CP \text{ i } AB \cap CP = \{P\} \Rightarrow T = P.$$

Dakle, $T \in \overline{AB}$.
Zaključak: $\overline{AB} = \Delta \cap AB$. □

**Teorem 2.13.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka je $\Delta$ trokut s vrhovima $A, B$ i $C$. Neka je $L_A$ poluravnina određena pravcem $BC$ t.d. je $A \in L_A$, $L_B$ poluravnina određena pravcem $AC$ t.d. je $B \in L_B$ i $L_C$ poluravnina određena pravcem $AB$ t.d. je $C \in L_C$. Tada je*

$$\overset{\circ}{\Delta} = L_A \cap L_B \cap L_C.$$

*Dokaz.* Neka je

$$K_A = L_A \cup BC\ ,\ K_B = L_B \cup AC \text{ i } K_C = L_C \cup AB.$$

Iz Teorema 2.6 slijedi da je $\Delta = K_A \cap K_B \cap K_C$.
Tvrdimo da je $\overset{\circ}{\Delta} = \Delta \setminus (AB \cup BC \cup AC)$ tj. da je

$$\Delta \setminus (\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}) = \Delta \setminus (AB \cup BC \cup AC) \tag{2.1}$$

Ako je $T \in \Delta \setminus (AB \cup BC \cup AC)$, onda je jasno da je $T \in \Delta \setminus (\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC})$.
S druge strane, pretpostavimo da je $T \in \Delta \setminus (\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC})$ te da je $T \in AB \cup BC \cup AC$. Tada je $T \in AB$ ili $T \in BC$ ili $T \in AC$, pa zbog $T \in \Delta$ imamo

$$T \in AB \cap \Delta \text{ ili } T \in BC \cap \Delta \text{ ili } T \in AC \cap \Delta.$$

Prema Lemi 2.12 sada slijedi $T \in \overline{AB}$ ili $T \in \overline{BC}$ ili $T \in \overline{AC}$, što je nemoguće jer je $T \in \Delta \setminus (\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC})$. Dakle, (2.1) vrijedi. Sada imamo

$$\overset{\circ}{\Delta} = \Delta \setminus (AB \cup BC \cup AC) = \Delta \cap (AB \cup BC \cup AC)^C = \Delta \cap AB^C \cap BC^C \cap AC^C =$$

$$= K_A \cap K_B \cap K_C \cap AB^C \cap BC^C \cap AC^C = (K_A \cap BC^C) \cap (K_B \cap AC^C) \cap (K_C \cap AB^C).$$

Imamo

$$K_A \cap BC^C = (L_A \cup BC) \cap BC^C = (L_A \cup BC^C) \cup (BC \cap BC^C) = L_A \cup \emptyset = L_A.$$

Analogno dobivamo $K_B \cap AC^C = L_B$ i $K_C \cap AB^C = L_C$.
Prema tome, $\overset{\circ}{\Delta} = L_A \cap L_B \cap L_C$. □

**Lema 2.14.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina, neka je $p \in \Psi$ pravac, $L$ poluravnina određena s $p$ te neka je $K$ pripadna zatvorena poluravnina određena s $p$, tj. $K = L \cup p$. Neka je $\Delta$ trokut takav da je $\Delta \subseteq K$. Tada je*

$$\overset{\circ}{\Delta} \subseteq L.$$

*Dokaz.* Znamo da sigurno jedan od vrhova trokuta $\Delta$ ne leži na $p$. Označimo taj vrh s $C$ te neka su $A$ i $B$ preostala dva vrha. Neka je $T \in \overset{\circ}{\Delta}$.
Želimo dokazati da je $T \in L$. Pretpostavimo suprotno: $T \notin L$. Budući da je

$$\overset{\circ}{\Delta} \subseteq \Delta \subseteq K$$

imamo da je $T \in K$, pa iz $T \notin L$ slijedi $T \in p$.
S druge strane, prema Propoziciji 2.11

$$T \in \overset{\circ}{\Delta} \Rightarrow T \in \langle CP \rangle$$

gdje je $P \in \langle AB \rangle$. Kada bismo imali $P \in p$ onda bi slijedilo $TP = p$, pa bi vrijedilo $CP = p$, što je nemoguće jer $C \notin p$. Dakle, $P \notin p$, tj. $P \in M \setminus p$. No,

$$T \in \overline{CP} \cap p \;\Rightarrow\; \overline{CP} \cap p \neq \emptyset,$$

što znači da se točke $C$ i $P$ ne nalaze u istoj poluravnini određenoj s pravcem $p$. Očito su $C, P \in \Delta$, pa su $C, P \in K$. Ali $C, P \notin p$, pa imamo $C, P \in L$, što je nemoguće.
Prema tome $T \in L$.
Zaključak: $\overset{\circ}{\Delta} \subseteq L$. □

**Korolar 2.15.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka su $\Delta_1$ i $\Delta_2$ trokuti takvi da je $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$. Tada je*

$$\overset{\circ}{\Delta}_1 \subseteq \overset{\circ}{\Delta}_2$$

*Dokaz.* Neka su $A, B$ i $C$ vrhovi trokuta $\Delta_2$. Neka je $L_A$ poluravnina određena pravcem $BC$ takva da je $A \in L_A$, $L_B$ poluravnina određena pravcem $AC$ takva da je $B \in L_B$ i $L_C$ poluravnina određena pravcem $AB$ takva da je $C \in L_C$. Neka je

$$K_A = L_A \cup BC\ ,\ K_B = L_B \cup AC \text{ i } K_C = L_C \cup AB.$$

Znamo da je $\Delta_2 = K_A \cap K_B \cap K_C$ i $\overset{\circ}{\Delta}_2 = L_A \cap L_B \cap L_C$. Iz $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$ slijedi

$$\Delta_1 \subseteq K_A \cap K_B \cap K_C \;\Rightarrow\; \Delta_1 \subseteq K_A\ ,\ \Delta_1 \subseteq K_B\ ,\ \Delta_1 \subseteq K_C.$$

Prema Lemi 2.14 slijedi da je $\overset{\circ}{\Delta}_1 \subseteq L_A$, $\overset{\circ}{\Delta}_1 \subseteq L_B$ i $\overset{\circ}{\Delta}_1 \subseteq L_C$, pa je $\overset{\circ}{\Delta}_1 \subseteq L_A \cap L_B \cap L_C$.

Prema tome, $\overset{\circ}{\Delta}_1 \subseteq \overset{\circ}{\Delta}_2$. □

**Propozicija 2.16.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka su $A, B$ i $C$ tri nekolinearne točke u ovoj ravnini. Neka je $D \in \langle AB \rangle$. Neka je*

$$\Delta = \operatorname{Conv}\{A, B, C\}\ ,\ \Delta_1 = \operatorname{Conv}\{A, D, C\}\ ,\ \Delta_2 = \operatorname{Conv}\{D, B, C\}.$$

*Tada je*

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \ i\ \overset{\circ}{\Delta}_1 \cap \overset{\circ}{\Delta}_2 = \emptyset.$$

*Dokaz.* Imamo

$$\Delta = \bigcup_{P \in \overline{AB}} \overline{CP} = \bigcup_{P \in \overline{AD} \text{ ili } P \in \overline{DB}} \overline{CP} = \bigcup_{P \in \overline{AD}} \overline{CP} \cup \bigcup_{P \in \overline{DB}} \overline{CP} = \Delta_1 \cup \Delta_2$$

Neka je $p = CD$. Imamo $A, B \in M \setminus p$ i $\overline{AB} \cap p \neq \emptyset$.
Neka su $K$ i $L$ poluravnine određene s pravcem $p$ takve da je $A \in K$ i $B \in L$. Jasno je da $K \neq L$. Neka je

$$\overline{K} = K \cup p \text{ i } \overline{L} = L \cup p.$$

Imamo $A, D, C \in \overline{K}$, pa je stoga $\Delta_1 \subseteq \overline{K}$.
Analogno dobivamo $\Delta_2 \subseteq \overline{L}$.
Iz Leme 2.14 slijedi $\overset{\circ}{\Delta}_1 \subseteq K$ i $\overset{\circ}{\Delta}_2 \subseteq L$. Iz $K \cap L = \emptyset$ slijedi $\overset{\circ}{\Delta}_1 \cap \overset{\circ}{\Delta}_2 = \emptyset$. □

**Teorem 2.17.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina. Neka je $\Delta$ trokut u toj ravnini te neka je $p$ pravac. Tada je $\Delta$ unija konačno mnogo trokuta s međusobno dijunktnim interiorima od kojih svaki leži u jednoj zatvorenoj poluravnini određenoj s $p$.*

*Dokaz.* Neka su $A, B$ i $C$ vrhovi trokuta $\Delta$.

1. slučaj: sva tri vrha $A, B$ i $C$ nalaze se u istoj zatvorenoj poluravnini određenoj s $p$

   Označimo tu poluravninu s $K$. Budući da je $K$ konveksan skup i $\{A, B, C\} \subseteq K$ imamo
$$\operatorname{Conv}\{A, B, C\} \subseteq K \;\Rightarrow\; \Delta \subseteq K.$$

2. slučaj: nisu sva tri vrha u istoj zatvorenoj poluravnini određenoj s $p$

   Tada postoje dva vrha od $\Delta$ koja ne leže na $p$ te ujedno ne leže u istoj poluravnini određenoj s $p$. (Naime, sva tri vrha ne leže na $p$, dakle, jedan od vrhova leži u poluravnini $K$ određenoj s $p$. Kada bi druga dva vrha ležala u $K \cup p$ onda bi sva tri vrha ležala u istoj zatvorenoj poluravnini. Stoga jedan od ta dva vrha leži u poluravnini određenoj s $p$ koja je različita od $K$.)

   Neka su to vrhovi $A$ i $B$. Neka su $K$ i $L$ poluravnine od $p$ takve da je $A \in K$, $B \in L$, $K \neq L$. Neka je $D \in \overline{AB}$ t.d. je $D \in p$. Označimo
$$\overline{K} = K \cup p \text{ i } \overline{L} = L \cup p.$$

   Promotrimo prvo slučaj kada je $C \in p$. Neka je $\Delta_1$ trokut s vrhovima $A, D$ i $C$ te neka je $\Delta_2$ trokut s vrhovima $D, C$ i $B$. Iz $A, D, C \in \overline{K}$ slijedi $\Delta_1 \subseteq \overline{K}$ te analogno $\Delta_2 \subseteq \overline{L}$. Iz Propozicije 2.16 slijedi da je
$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \text{ i } \overset{\circ}{\Delta}_1 \cap \overset{\circ}{\Delta}_2 = \emptyset.$$

   Promotrimo sada slučaj kada $C \notin p$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $C \in K$. Imamo
$$B \in L\,,\; C \in K \;\Rightarrow\; \overline{BC} \cap p \neq \emptyset.$$

   Neka je $E \in \overline{BC}$ t.d. $E \in p$. Jasno je da je $E \in \langle BC \rangle$. Neka je
$$\Delta_1 = \operatorname{Conv}\{A, E, C\} \text{ i } \Delta_2 = \operatorname{Conv}\{A, B, E\}.$$

Iz Propozicije 2.16 slijedi $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ te $\overset{\circ}{\Delta_1} \cap \overset{\circ}{\Delta_2} = \emptyset$. Neka je

$$\Delta_3 = \text{Conv}\,\{A, D, E\} \text{ i } \Delta_4 = \text{Conv}\,\{D, B, E\}.$$

Opet iz Propozicije 2.16 slijedi $\Delta_2 = \Delta_3 \cup \Delta_4$ te $\overset{\circ}{\Delta_3} \cap \overset{\circ}{\Delta_4} = \emptyset$. Stoga je

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_3 \cup \Delta_4$$

Dokažimo još da trokuti $\Delta_1, \Delta_3$ i $\Delta_4$ imaju međusobno disjunktne interiore. Znamo da je $\overset{\circ}{\Delta_3} \cap \overset{\circ}{\Delta_4} = \emptyset$. Nadalje, prema Korolaru 2.15

$$\Delta_3 \subseteq \Delta_2 \Rightarrow \overset{\circ}{\Delta_3} \subseteq \overset{\circ}{\Delta_2}$$

pa iz $\overset{\circ}{\Delta_1} \cap \overset{\circ}{\Delta_2} = \emptyset$ slijedi $\overset{\circ}{\Delta_3} \cap \overset{\circ}{\Delta_1} = \emptyset$. Analogno dobivamo $\overset{\circ}{\Delta_4} \cap \overset{\circ}{\Delta_1} = \emptyset$.
Iz $A, E, C \in \overline{K}$ slijedi $\Delta_1 \subseteq \overline{K}$. Iz $A, D, E \in \overline{K}$ slijedi $\Delta_3 \subseteq \overline{K}$. Iz $D, B, E \in \overline{L}$ slijedi $\Delta_4 \subseteq \overline{L}$.

□

**Teorem 2.18.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina, neka je $\Delta$ trokut, te neka su $p_1, ..., p_n,\ n \in \mathbb{N}$ pravci. Tada postoje trokuti $\Delta_1, ..., \Delta_m,\ m \in \mathbb{N}$ s međusobno disjunktnim interiorima takvi da je*

$$\Delta = \Delta_1 \cup ... \cup \Delta_m$$

*te takvi da se za svaki $i \in \{1, ..., m\}$ i svaki $j \in \{1, ..., n\}$ trokut $\Delta_i$ nalazi u jednoj od dvije zatvorene poluravnine određene s $p_j$.*

*Dokaz.* Dokažimo ovu tvrdnju indukcijom po $n$.
Za $n = 1$ tvrdnja slijedi iz Teorema 2.17. Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ te da tvrdnja vrijedi za $n$.
Neka su $p_1, ..., p_{n+1}$ pravci. Iz induktivne pretpostavke slijedi da postoje trokuti $\Delta_1, ..., \Delta_m$, $m \in \mathbb{N}$ s međusobno disjunktnim interiorima takvi da je

$$\Delta = \Delta_1 \cup ... \cup \Delta_m$$

te takvi da se za svaki $i \in \{1, ..., m\}$ i svaki $j \in \{1, ..., n\}$ trokut $\Delta_i$ nalazi u jednoj od dvije zatvorene poluravnine određene s $p_j$.
Neka je $i \in \{1, ..., m\}$. Iz Terorema 2.17 slijedi da postoje trokuti $\sigma^i_1, ...\sigma^i_{k_i}$ s međusobno disjunktnim interiorima čija je unija jednaka $\Delta_i$ te takvi da se svaki od tih trokuta nalazi u zatvorenoj poluravnini određenoj s $p_{n+1}$. Promotrimo trokute:

$$\sigma^1_1, ...\sigma^1_{k_1},\ \sigma^2_1, ...\sigma^2_{k_2}, ...\sigma^m_1, ...,\ \sigma^m_{k_m} \tag{2.2}$$

Njihova unija je jednaka $\Delta$. Nadalje, ovi trokuti imaju međusobno disjunktne interiore. Naime, za $i \in \{1, ..., m\}$ i $p, q \in \{1, ..., k_i\}$, $p \neq q$ jasno je da trokuti $\sigma_p^i$ i $\sigma_q^i$ imaju disjunktne interiore.
S druge strane, ako su $i, j \in \{1, ..., m\}$, $i \neq j$ te $p \in \{1, ..., k_i\}$, $q \in \{1, ..., k_j\}$ onda je

$$\sigma_p^i \subseteq \Delta_i,\ \sigma_q^j \subseteq \Delta_j \ \Rightarrow \overset{\circ}{\sigma_p^i} \subseteq \overset{\circ}{\Delta}_i,\ \overset{\circ}{\sigma_q^j} \subseteq \overset{\circ}{\Delta}_j$$

iz čega slijedi da $\sigma_p^i$ i $\sigma_q^j$ imaju disjunktne interiore.
Neka je $i \in \{1, ..., m\}$ i $p \in \{1, ..., k_i\}$. Tvrdimo da se $\sigma_p^i$ nalazi u zatvorenoj poluravnini određenoj s $p_j$ za svaki $j \in \{1, ..., n+1\}$.
Za $j = n+1$ ovo slijedi iz toga kako smo konstruirali trokute (2.2).
Ako je $j \leq n$ onda se $\Delta_i$ nalazi u zatvorenoj poluravnini određenoj s $p_j$ pa je jasno da se i $\sigma_p^i$ nalazi u istoj zatvorenoj poluravnini. □

**Lema 2.19.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka je $\Delta$ trokut u ovoj ravnini s vrhovima $A, B$ i $C$. Neka je $S \subseteq M$ takav da se za svaki $p \in \{AB,\ BC,\ AC\}$ $S$ nalazi u jednoj od dvije zatvorene poluravnine određene s $p$. Tada je*

$$S \subseteq \Delta \ ili\ S \cap \overset{\circ}{\Delta} = \emptyset.$$

*Dokaz.* Neka je $K_A$ poluravnina određena pravcem $BC$ koja sadrži točku $A$, te neka je $\overline{K_A} = K_A \cup BC$. Analogno definiramo $K_B,\ K_C,\ \overline{K_B}$ i $\overline{K_C}$.
Znamo da je

$$\Delta = \overline{K_A} \cap \overline{K_B} \cap \overline{K_C}.$$

Ako je $S \subseteq \overline{K_A}$, $S \subseteq \overline{K_B}$ i $S \subseteq \overline{K_C}$, onda je $S \subseteq \Delta$. Ako $S \nsubseteq \overline{K_A}$, onda je $S \cap K_A = \emptyset$. No,

$$\Delta \subseteq \overline{K_A} \ \Rightarrow \overset{\circ}{\Delta} \subseteq K_A \ \Rightarrow \ S \cap \overset{\circ}{\Delta} = \emptyset$$

Do istog zaključka dolazimo ako $S \nsubseteq \overline{K_B}$ ili $S \nsubseteq \overline{K_C}$. □

**Propozicija 2.20.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka su $\sigma, \Delta_1, ..., \Delta_n,\ n \in \mathbb{N}$ trokuti. Tada postoje trokuti $\tau_1, ..., \tau_m,\ m \in \mathbb{N}$ s međusobno disjunktnim interiorima čija je unija jednaka $\sigma$ te takvi da za svaki $i \in \{1, ..., m\}$ i svaki $j \in \{1, ..., n\}$ vrijedi*

$$\tau_i \subseteq \Delta_j \ ili\ \tau_i \cap \overset{\circ}{\Delta}_j = \emptyset$$

*Dokaz.* Za $j \in \{1, ..., n\}$ neka su $A_j, B_j$ i $C_j$ vrhovi trokuta $\Delta_j$. Promotrimo pravce

$$A_1B_1,\ A_1C_1,\ B_1C_1\ A_2B_2,\ A_2C_2,\ B_2C_2\ ..., A_nB_n,\ A_nC_n,\ B_nC_n \tag{2.3}$$

Prema Teoremu 2.18 postoje trokuti $\tau_1, ..., \tau_m,\ m \in \mathbb{N}$ s međusobno disjunktnim interiorima čija je unija jednaka $\sigma$ te takvi da se za svaki $i \in \{1, ..., m\}$ i svaki pravac $p$ iz (2.3) $\tau_i$ nalazi u jednoj od dvije zatvorene poluravnine određene s $p$.
Neka je $i \in \{1, ..., m\}$ te neka je $j \in \{1, ..., n\}$. Tada za svaki $p \in \{A_jB_j,\ A_jC_j,\ B_jC_j\}$ vrijedi da se $\tau_i$ nalazi u jednoj od dvije zatvorene poluravnine određene s $p$.
Prema tome, iz Leme 2.19 slijedi da je

$$\tau_i \subseteq \Delta_j \text{ ili } \tau_i \cap \overset{\circ}{\Delta}_j = \emptyset.$$

□

**Propozicija 2.21.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina. Neka su $\Delta_1$ i $\Delta_2$ trokuti. Tada postoji konačna familija trokuta $\mathcal{F}$ koji su sadržani u $\Delta_1$, koji ne sijeku $\overset{\circ}{\Delta}_2$, čiji su interiori međusobno disjunktni takva da je*

$$\Delta_1 \cup \Delta_2 = \bigcup_{\Delta \in \mathcal{F} \cup \{\Delta_2\}} \Delta.$$

*Dokaz.* Prema Propoziciji 2.20 postoje trokuti $\tau_1, ..., \tau_m,\ m \in \mathbb{N}$ s međusobno disjunktnim interiorima takvi da je $\Delta_1 = \tau_1 \cup ... \cup \tau_m$ i za svaki $i \in \{1, ..., m\}$ vrijedi $\tau_i \subseteq \Delta_2$ *ili* $\tau_i \cap \overset{\circ}{\Delta}_2 = \emptyset$.
Neka je $\mathcal{F}$ skup svih $\tau_i$, $i \in \{1, ..., m\}$ takvih da je $\tau_i \cap \overset{\circ}{\Delta}_2 = \emptyset$. Neka je

$$\mathcal{A} = \mathcal{F} \cup \{\Delta_2\}$$

Tada je $\mathcal{A}$ konačna familija trokuta s međusobno disjunktnim interiorima. Tvrdimo da je unija svih trokuta iz $\mathcal{A}$ jednaka $\Delta_1 \cup \Delta_2$, tj.

$$\bigcup_{\Delta \in \mathcal{A}} \Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2.$$

Očito je $\bigcup_{\Delta \in \mathcal{A}} \Delta \subseteq \Delta_1 \cup \Delta_2$.
Obratno, ako je $T \in \Delta_1 \cup \Delta_2$, onda je $T \in \Delta_2$ ili $T \in \Delta_1 \setminus \Delta_2$.

1. Ako je $T \in \Delta_2$, onda je jasno da je $T \in \bigcup_{\Delta \in \mathcal{A}} \Delta$.
2. Ako je $T \in \Delta_1 \setminus \Delta_2$, onda je $T \in \tau_i$, $i \in \{1, ..., m\}$.

Znamo da je $\tau_i \subseteq \Delta_2$ ili $\tau_i \cap \overset{\circ}{\Delta}_2 = \emptyset$. No, $\tau_i \subseteq \Delta_2$ ne može vrijediti jer $T \notin \Delta_2$. Dakle,

$$\tau_i \cap \overset{\circ}{\Delta}_2 = \emptyset \Rightarrow \tau_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \tau_i \in \mathcal{A}.$$

Dakle, $T \in \bigcup_{\Delta \in \mathcal{A}} \Delta$.
Prema tome $\Delta_1 \cup \Delta_2 = \bigcup_{\Delta \in \mathcal{F} \cup \{\Delta_2\}} \Delta$. □

**Definicija 2.22.** *Neka je* $(M, \Psi, f)$ *elementarna ravnina. Neka je* $\Pi \subseteq M$. *Za* $\Pi$ *kažemo da je poligon u* $(M, \Psi, f)$ *ako postoji* $n \in \mathbb{N}$ *i trokuti* $\Delta_1, ..., \Delta_n$ *t.d. je*

$$\Pi = \Delta_1 \cup ... \cup \Delta_n.$$

**Primjer 2.23.** *Svaki trokut je očito poligon (za* $n = 1$*).*

**Uočimo:** Ako je $(M, \Psi, f)$ elementarna ravnina te ako su $\Pi_1$ i $\Pi_2$ poligoni, onda je $\Pi_1 \cup \Pi_2$ poligon.

**Teorem 2.24.** *Neka je* $(M, \Psi, f)$ *ravnina. Tada se svaki poligon u ovoj ravnini može napisati kao unija konačno mnogo trokuta s međusobno disjunktnim interiorima.*

*Dokaz.* Dokažimo indukcijom po $n$ sljedeće: ako su $\Delta_1, ..., \Delta_n$ trokuti, onda se $\Delta_1 \cup ... \cup \Delta_n$ može napisati kao unija konačno mnogo trokuta s međusobno disjnktnim interiorima.
Za $n = 1$ tvrdnja je jasna.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.
Neka su $\Delta_1, ..., \Delta_{n+1}$ trokuti. Prema induktivnoj pretpostavci postoje trokuti $\sigma_1, ..., \sigma_m$, $m \in \mathbb{N}$ s međusobno disjunktnim interiorima takvi da je

$$\Delta_1 \cup ... \cup \Delta_n = \sigma_1 \cup ... \cup \sigma_m.$$

Stoga je

$$\begin{aligned} \Delta_1 \cup ... \cup \Delta_{n+1} &= (\Delta_1 \cup ... \cup \Delta_n) \cup \Delta_{n+1} = (\sigma_1 \cup ... \cup \sigma_m) \cup \Delta_{n+1} \\ &= (\sigma_1 \cup \Delta_{n+1}) \cup ... \cup (\sigma_m \cup \Delta_{n+1}) \end{aligned}$$

Neka je $i \in \{1, ..., m\}$. Prema Propoziciji 2.21 postoji konačna familija trokuta $\mathcal{F}_i$ s međusobno disjunktnim interiorima takva da je $\Delta \subseteq \sigma_i$ za svaki $\Delta \in \mathcal{F}_i$ te

$$\Delta \cap \overset{\circ}{\Delta}_{n+1} = \emptyset \quad \text{i} \quad \bigcup_{\Delta \in \mathcal{F}_i \cup \{\Delta_{n+1}\}} \Delta = \sigma_i \cup \Delta_{n+1}$$

Neka je

$$\mathcal{A} = \mathcal{F}_1 \cup ... \cup \mathcal{F}_m \cup \{\Delta_{n+1}\}.$$

Tada je $\mathcal{A}$ konačna familija trokuta. Neka su $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{A}$, $\tau_1 \neq \tau_2$. Razlikujemo 3 slučaja:

1. $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}_i$ za $i \in \{1, ..., m\}$

   Tada očito $\tau_1$ i $\tau_2$ imaju disjunktne interiore.

2. $\tau_1 \in \mathcal{F}_i$, $\tau_2 \in \mathcal{F}_j$ za $i, j \in \{1, ..., m\}$, $i \neq j$

   Tada je $\tau_1 \subseteq \sigma_i$ i $\tau_2 \subseteq \sigma_j$, pa iz $\overset{\circ}{\sigma}_i \cap \overset{\circ}{\sigma}_j = \emptyset$ slijedi $\overset{\circ}{\tau}_i \cap \overset{\circ}{\tau}_j = \emptyset$.

3. $\tau_1 \in \mathcal{F}_i$ za $i \in \{1, ..., m\}$ i $\tau_2 = \Delta_{n+1}$ ili $\tau_1 = \Delta_{n+1}$ i $\tau_2 \in \mathcal{F}_i$ za $i \in \{1, ..., m\}$

   Tada je $\overset{\circ}{\tau}_i \cap \overset{\circ}{\tau}_j = \emptyset$.

Imamo:

$$\begin{aligned} \bigcup \mathcal{A} &= (\bigcup \mathcal{F}_1) \cup (\bigcup \mathcal{F}_2) \cup ... \cup (\bigcup \mathcal{F}_n) \cup \Delta_{n+1} = \\ &= (\bigcup \mathcal{F}_1 \cup \Delta_{n+1}) \cup (\bigcup \mathcal{F}_2 \cup \Delta_{n+1}) \cup ... \cup (\bigcup \mathcal{F}_n \cup \Delta_{n+1}) = \\ &= (\sigma_1 \cup \Delta_{n+1}) \cup (\sigma_1 \cup \Delta_{n+1}) \cup ... \cup (\sigma_n \cup \Delta_{n+1}) \\ &= \Delta_1 \cup ... \cup \Delta_{n+1} \end{aligned}$$

□

**Propozicija 2.25.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina, neka je $\Delta$ trokut u ovoj ravnini te $p$ pravac. Tada je*

$$\Delta \cap p = \emptyset \text{ ili } \Delta \cap p = \{V\} \text{ ili } \Delta \cap p = \overline{PQ}$$

*gdje je $V$ vrh trokuta $\Delta$, a $P, Q \in \partial\Delta$, $P \neq Q$.*

*Dokaz.* Neka su $A, B$ i $C$ vrhovi trokuta $\Delta$. Pretpostavimo da je $\Delta \cap p \neq \emptyset$. Tada postoji $T \in \Delta$ t.d. $T \in p$. Tvrdimo da je

$$\partial\Delta \cap p \neq \emptyset.$$

Budući da je $T \in \Delta$ postoji $P \in \overline{AB}$ t.d. $T \in \overline{CP}$. Pravac $p$ siječe $\overline{CP}$ pa prema Pashovom aksiomu $p$ siječe $\overline{AC}$ ili $\overline{AP}$. Ovo znači da $p$ siječe $\overline{AC}$ ili $\overline{AB}$ (jer je $\overline{AP} \subseteq \overline{AB}$). Dakle, $p$ siječe $\partial\Delta$. Razlikujemo dva slučaja:

1. $p$ ne siječe niti jednu od otvorenih dužina $\langle AB\rangle$, $\langle AC\rangle$ i $\langle BC\rangle$

   Tada je $p \cap \partial\Delta$ neprazan skup koji sadrži samo vrhove trokuta $\Delta$. Kada bi $p$ sadržavao dva različita vrha trokuta $\Delta$, onda bi sadržavao čitavu dužinu određenu tim vrhovima, što je nemoguće prema pretpostavci (1) slučaja. Stoga $p$ sadrži samo jedan vrh trokuta.

   Bez smanjenja općenitosti neka je to vrh $A$. Tvrdimo da je

   $$p \cap \Delta = \{A\}$$

   U suprotnom bi postojala točka $T \in \overset{\circ}{\Delta}$ t.d. je $T \in p$. Iz Propozicije 2.11 slijedi da je $T \in \langle AP\rangle$ gdje je $P \in \langle BC\rangle$. Iz ovoga slijedi

   $$AT = AP \;\Rightarrow\; p = AP \;\Rightarrow\; P \in p.$$

   Dakle, $p$ siječe $\langle BC\rangle$, što je nemoguće.

2 $p$ siječe neku od otvorenih dužina $\langle AB\rangle$, $\langle AC\rangle$ i $\langle BC\rangle$

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da $p$ siječe $\langle AB\rangle$.

Ako je $A \in p$ ili $B \in p$, onda je $p = AB$, pa je po Lemi 2.12

$$p \cap \Delta = \overline{AB}.$$

Pretpostavimo da $A \notin p$ i $B \notin p$. Prema Pashovom aksiomu $p$ siječe $\overline{BC}$ ili $\overline{AC}$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da $p$ siječe $\overline{BC}$.

Neka je $Q \in \overline{BC}$ t.d. $Q \in p$. Tada $Q \notin AB$. Naime, u suprotnom bismo imali $Q \in AB \cap BC$, pa bi slijedilo $Q = B$, što je nemoguće jer $B \notin p$. Tvrdimo da je

$$p \cap \Delta = \overline{PQ}.$$

Jasno je da je $\overline{PQ} \subseteq p \cap \Delta$.

Pretpostavimo da postoji $T \in p \cap \Delta$ t.d $T \notin \overline{PQ}$. Budući da je $T \in p$ i $T \notin \overline{PQ}$ prema Lemi 1.19 slijedi da je

$$P \in \overline{TQ} \text{ ili } Q \in \overline{PT}.$$

Pretpostavimo da je $P \in \overline{TQ}$. Uočimo da je $T \neq P$, stoga $T \notin AB$ (u suprotnom imamo $TP = AB$, tj. $p = AB$ pa je $Q \in AB$, što je nemoguće).

Dakle, $\overline{TQ} \cap AB \neq \emptyset$ pa $T$ i $Q$ ne leže u istoj poluravnini određenoj s $AB$. No. to je nemoguće prema Teoremu 2.6 jer su $T, Q \in \Delta$. Analogno dobivamo da $Q \in \overline{PT}$ vodi na kontradikciju.

Dakle, $\Delta \cap p = \overline{PQ}$.

□

**Lema 2.26.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka su $\Delta$ trokut i $I$ segment takvi da je $I \cap \Delta \neq \emptyset$. Tada je $I \cap \Delta$ segment.*

*Dokaz.* Neka je $p$ pravac na kojem leži $I$. Očito je tada $p \cap \Delta \neq \emptyset$. Prema Propoziciji 2.25 vrijedi da je $p \cap \Delta$ segment. Imamo

$$I \cap \Delta = (I \cap p) \cap \Delta = I \cap (p \cap \Delta).$$

Prema Lemi 1.17 skup $I \cap (p \cap \Delta)$ je segment.
Dakle, $I \cap \Delta$ je segment. □

**Propozicija 2.27.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina, neka je $\Delta$ trokut te $P \in \Delta$. Tada je*

$$\Delta = \bigcup_{Q \in \partial\Delta} \overline{PQ}$$

*Dokaz.* Očito je $\bigcup_{Q\in\partial\Delta}\overline{PQ}\subseteq\Delta$.
Neka je $T\in\Delta$. Ako je $T=P$ onda je $T\in\bigcup_{Q\in\partial\Delta}\overline{PQ}$.
Pretpostavimo da je $T\neq P$. Neka je $p=TP$. Imamo $T,P\in p\cap\Delta$. Iz Propozicije 2.25 slijedi da je

$$p\cap\Delta=\overline{Q_1Q_2}$$

gdje su $Q_1,Q_2\in\partial\Delta$. Stoga imamo $T,P\in\overline{Q_1Q_2}$. Prema Lemi 1.15 vrijedi

$$\overline{Q_1Q_2}=\overline{Q_1P}\cup\overline{PQ_2}$$

Stoga je $T\in\overline{Q_1P}$ ili $T\in\overline{PQ_2}$. Dakle, $T\in\bigcup_{Q\in\partial\Delta}\overline{PQ}$.
Zaključak: $\bigcup_{Q\in\partial\Delta}\overline{PQ}=\Delta$. □

**Propozicija 2.28.** *Neka je $(M,\Psi,f)$ ravnina, neka je $\Delta$ trokut te $P\in\overset{\circ}{\Delta}$. Ako je $p$ pravac koji prolazi točkom $P$, onda $p$ ne može sadržavati tri različite točke iz $\partial\Delta$.*

*Dokaz.* Neka su $A,B$ i $C$ vrhovi trokuta $\Delta$. Pretpostavimo suprotno. Razlikujemo dva slučaja:

1. Dvije od tih točaka leže na istoj stranici.

   Tada je ta stranica podskup od $p$, pa je prema Lemi 2.12 $p\cap\Delta$ upravo ta stranica, što je nemoguće jer je $P\in p\cap\Delta$ i $P\in\overset{\circ}{\Delta}$.

2. Nikoje dvije od tih točaka ne leže na istoj stranici.

   Iz ovoga slijedi da se te točke nalaze na različitim otvorenim dužinama $\langle AB\rangle$, $\langle BC\rangle$ i $\langle AC\rangle$. Iz ovoga zaključujemo da $p$ ne prolazi niti jednom od točaka $A,B$ i $C$. No sada smo u kontradikciji s Teoremom 1.24.

□

**Propozicija 2.29.** *Neka je $(M,\Psi,f)$ ravnina, neka je $\Delta$ trokut s vrhovima $A,B$ i $C$ te neka je $T\in\langle AB\rangle$. Neka su $D$ i $E$ točke takve da je $\langle DE\rangle\cap\langle AB\rangle=\{T\}$. Tada je*

$$\langle DE\rangle\cap\overset{\circ}{\Delta}\neq\emptyset.$$

*Dokaz.* Pretpostavimo da je $D\in AB$. Tada je $AB$ pravac koji sadrži točke $D$ i $T$, no i $DE$ je takav pravac. Stoga je

$$AB=DE\ \Rightarrow\ D,E\in AB.$$

Znamo da je $\langle DE\rangle\cap\langle AB\rangle=\{T\}$, pa prema Lemi 1.38 slijedi da $\langle DE\rangle\cap\langle AB\rangle$ sadrži barem dvije točke, što je nemoguće.
Dakle, $D\notin AB$. Ovo povlači da $E\notin AB$. Prema Pashovom aksiomu pravac $DE$ siječe

dužinu $\overline{AC}$ ili $\overline{BC}$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da siječe $\overline{BC}$.
Neka je

$$Q \in DE \cap \overline{BC}.$$

Pretpostavimo da je $\overline{TQ} \subseteq \partial\Delta$. Prema Propoziciji 2.32 slijedi da je $\overline{TQ}$ podskup neke stranice od $\partial\Delta$. No

$$T \in \langle AB \rangle \Rightarrow T \notin \overline{AC} \text{ i } T \notin \overline{BC}.$$

Stoga je $\overline{TQ} \subseteq \overline{AB}$. Također iz $Q \in BC$ slijedi $T \neq Q$. Sada su $T$ i $Q$ različite točke koje leže na pravcima $DE$ i $AB$, pa je $DE = AB$, što je nemoguće. Dakle,

$$\overline{TQ} \not\subseteq \partial\Delta.$$

No, očito je $\overline{TQ} \subseteq \Delta$. Iz ovoga slijedi da postoji točka $P \in \langle TQ \rangle$ t.d. je $P \in \overset{\circ}{\Delta}$. Iz Leme 2.28 slijedi da je

$$\langle TQ \rangle \subseteq \overset{\circ}{\Delta}.$$

Neka je $p = DE$. Odaberimo $\leq \in f(p)$ t.d. $T \leq Q$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $D \leq E$. Tada imamo da je $D \leq T \leq E$. Razlikujemo dva slučaja:

1. $E \leq Q$

   Imamo da je $D \leq T \leq E \leq Q$. Znamo da je $T \neq E$. Odaberimo točku $F \in \langle TE \rangle$. Tada je $F \in \langle DE \rangle$ i $F \in \langle TQ \rangle$, pa je $F \in \overset{\circ}{\Delta}$. Dakle, $\langle DE \rangle \cap \overset{\circ}{\Delta} \neq \emptyset$.

2. $Q \leq F$

   Imamo da je $D \leq T \leq Q \leq E$. Tada je $\langle TQ \rangle \subseteq \langle DE \rangle$. Odaberimo točku $F \in \langle TQ \rangle$. Tada je $F \in \overset{\circ}{\Delta}$ i $T \in \langle DE \rangle$. Dakle, $\langle DE \rangle \cap \overset{\circ}{\Delta} \neq \emptyset$.

□

**Propozicija 2.30.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina, neka je $\Delta$ trokut te $P \in \overset{\circ}{\Delta}$. Neka su $Q_1, Q_2 \in \partial\Delta$, $Q_1 \neq Q_2$. Tada je*

$$\overline{PQ_1} \cap \overline{PQ_2} = \{P\}$$

*Dokaz.* Jasno je da je $\{P\} \subseteq \overline{PQ_1} \cap \overline{PQ_2}$.
Pretpostavimo da postoji

$$T \in \overline{PQ_1} \cap \overline{PQ_2}\,,\ T \neq P.$$

Iz $T \in \overline{PQ_1}$ i $T \in \overline{PQ_2}$ slijedi

$$Q_1, Q_2 \in TP \Rightarrow Q_1, Q_2 \in TP \cap \Delta.$$

Prema Propoziciji 2.25 imamo $TP \cap \Delta = \overline{Q_3Q_4}$ gdje su $Q_3Q_4 \in \partial\Delta$, $Q_3 \neq Q_4$.
Dakle, $Q_1, Q_2, Q_3$ i $Q_4$ su točke iz $\partial\Delta$ koje pripadaju pravcu $TP$. Prema Propoziciji 2.28 slijedi da je

$$Q_1 = Q_3, Q_2 = Q_4 \text{ ili } Q_1 = Q_4,\ Q_2 = Q_3.$$

U svakom slučaju $TP \cap \Delta = \overline{Q_1Q_2}$, tj. $T, P \in \overline{Q_1Q_2}$.
Iz $P \in \overline{Q_1Q_2}$ i Leme 1.15 zaključujemo da je

$$\overline{PQ_1} \cap \overline{PQ_2} = \{P\}.$$

No, $T \in \overline{PQ_1} \cap \overline{PQ_2}$ i $T \neq P$, što je nemoguće.
Dakle, zaključujemo da je $\overline{PQ_1} \cap \overline{PQ_2} = \{P\}$. □

**Propozicija 2.31.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka su $\Delta_1$ i $\Delta_2$ trokuti takvi da je $\mathring{\Delta}_1 \cap \mathring{\Delta}_2 = \emptyset$. Tada je*

$$\Delta_1 \cap \mathring{\Delta}_2 = \emptyset$$

*Dokaz.* Prema Propoziciji 2.20 postoje trokuti $\tau_1, ..., \tau_m$, $m \in \mathbb{N}$ čija je unija jednaka $\Delta_1$ te takvi da za svaki $i \in \{1, ..., m\}$ vrijedi

$$\tau_i \subseteq \Delta_2 \text{ ili } \tau_i \cap \mathring{\Delta}_2 = \emptyset.$$

No, $\tau_i \subseteq \Delta_2$ ne može vrijediti.
Pretpostavimo suprotno. Tada je $\mathring{\tau}_i \subseteq \mathring{\Delta}_2$. No,

$$\tau_i \subseteq \Delta_1 \ \Rightarrow \mathring{\tau}_i \subseteq \mathring{\Delta}_1$$

Dakle, $\mathring{\tau}_i \subseteq \mathring{\Delta}_1 \cap \mathring{\Delta}_2$. što je nemoguće jer je $\mathring{\tau}_i \neq \emptyset$, a $\mathring{\Delta}_1 \cap \mathring{\Delta}_2 = \emptyset$.
Zaključak: $\tau_i \cap \mathring{\Delta}_2 = \emptyset$ pa je $\Delta_1 \cap \mathring{\Delta}_2 = \emptyset$. □

**Propozicija 2.32.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka je $\Delta$ trokut. Neka je $S$ konveksan podskup od $\partial\Delta$. Tada je $S$ sadržan u nekoj stranici od $\Delta$.*

*Dokaz.* Neka su $A, B$ i $C$ vrhovi trokuta $\Delta$. Imamo dva slučaja.

1. $S$ siječe neku od otvorenih dužina $\langle AB\rangle$, $\langle CB\rangle$, $\langle CA\rangle$

   Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da $S$ siječe $\langle AB\rangle$. Neka je

   $$P \in S \cap \langle AB\rangle.$$

   Tvrdimo da je tada $S \subseteq \overline{AB}$.

Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $Q \in S$ t.d. $Q \notin \overline{AB}$. Slijedi da je

$$Q \in \overline{AC} \text{ ili } Q \in \overline{BC}.$$

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $Q \in \overline{AC}$. Dakle, $P, Q \in S$, pa budući da je $S$ konveksan skup vrijedi $\overline{PQ} \subseteq S$. Jasno je da je $Q \neq A$ (jer $Q \notin \overline{AB}$).

Pretpostavimo da je $Q = C$. Tada je $\langle CP \rangle \subseteq \overline{CP} \subseteq S$. No, prema Propoziciji 2.11 $\langle CP \rangle \subseteq \mathring{\Delta}$, što je nemoguće jer je $\emptyset \neq \langle CP \rangle \subseteq S \cap \mathring{\Delta} = \emptyset$.

Stoga je $Q \neq C$, pa je $Q \in \langle AC \rangle$. Uočimo da su točke $A, C$ i $P$ nekolinearne. Neka je $\sigma$ trokut s vrhovima $A, C$ i $P$. Očito je

$$\sigma \subseteq \Delta \Rightarrow \mathring{\sigma} \subseteq \mathring{\Delta} \Rightarrow \langle PQ \rangle \subseteq \mathring{\sigma} \subseteq \mathring{\Delta}$$

pa slijedi da je $\langle PQ \rangle \subseteq \mathring{\Delta}$, što je nemoguće jer je $\langle PQ \rangle \subseteq S$.

Dakle, $S \subseteq \overline{AB}$.

2. $S \subseteq \{A, B, C\}$

   Tada $S$ ne sadrži dva vrha trokuta $\Delta$ jer bi u suprotnom sadržavao i sve točke na otvorenoj dužini određenoj s ta dva vrha, što je nemoguće zbog $S \subseteq \{A, B, C\}$. Dakle,

$$S = \{A\} \text{ ili } S = \{B\} \text{ ili } S = \{C\}.$$

□

**Propozicija 2.33.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina. Neka su $A, B \in M$, $A \neq B$ te $n \in \mathbb{N}$ i $\sigma_1, ..., \sigma_n$ trokuti takvi da je $\langle AB \rangle \subseteq \sigma_1 \cup ... \cup \sigma_n$. Tada je*

$$\overline{AB} \subseteq \sigma_1 \cup ... \cup \sigma_n.$$

*Dokaz.* Dokažimo prvo tvrdnju propozicije uz pretpostavku da je $\sigma_i \cap \langle AB \rangle \neq \emptyset$ za svaki $i \in \{1, ..., n\}$.

Neka je $p$ pravac na kojemu leže točke $A$ i $B$, te neka je $\leq \in f(p)$ t.d. $A \leq B$. Prema Lemi 2.26 $\sigma_i \cap \overline{AB}$ je segment.

Neka su $C_i, D_i \in \overline{AB}$ t.d. je $\sigma_i \cap \overline{AB} = \overline{C_i D_i}$ te $C_i \leq D_i$. Za svaki $i \in \{1, ..., n\}$ vrijedi $A \leq C_i$ i $D_i \leq B$. Dokažimo da je

$$A \in \sigma_1 \cup ... \cup \sigma_n.$$

Pretpostavimo suprotno. Tada $A \notin \sigma_i$ za svaki $i \in \{1, ..., n\}$ iz čega slijedi da za svaki $i \in \{1, ..., n\}$ vrijedi $A \neq C_i$ (jer je $C_i \in \sigma_i$), pa je $A \prec C_i$.

Neka je $i_0 \in \{1, ..., n\}$ t.d. je $C_{i_0} \preceq C_i$ za svaki $i \in \{1, ..., n\}$. Budući da je $A \prec C_{i_0}$ vrijedi $\langle AC_{i_0}\rangle \neq \emptyset$. Neka je $T \in \langle AC_{i_0}\rangle$. Jasno je da je

$$\langle AC_{i_0}\rangle \subseteq \langle AB\rangle \Rightarrow T \in \langle AB\rangle,$$

pa postoji $i \in \{1, ..., n\}$ t.d. $T \in \sigma_i$.
Stoga je

$$T \in \sigma_i \cap \overline{AB} \ \Rightarrow \ T \in \overline{C_i D_i} \ \Rightarrow \ C_i \preceq T.$$

S druge strane, $T \in \langle AC_{i_0}\rangle$ povlači $T \prec C_{i_0}$, pa zbog $C_{i_0} \preceq C_i$ imamo $T \prec C_i$. Ovo je u kontradikciji s $C_i \preceq T$.
Zaključak: $A \in \sigma_1 \cup ... \cup \sigma_n$. Isto tako dobivamo $B \in \sigma_1 \cup ... \cup \sigma_n$. Iz toga slijedi tvrdnja propozicije u slučaju kada svaki $\sigma_i$ siječe $\langle AB\rangle$.
Pretpostavimo sada da neki $\sigma_i$ ne sijeku $\langle AB\rangle$. Neka je

$$S = \{\, i \in \{1, ..., n\} \,|\, \sigma_i \cap \langle AB\rangle \neq \emptyset\}.$$

Tada je $S \neq \emptyset$, pa postoji $k \in \mathbb{N}$ t.d. je $S = \{i_1, ..., i_k\}$ za neke $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$. Tada je

$$\langle AB\rangle \subseteq \sigma_{i_1} \cup ... \cup \sigma_{i_k},$$

pa iz dokazanog slijedi da je $\overline{AB} \subseteq \sigma_{i_1} \cup ... \cup \sigma_{i_k}$.
Stoga je $\overline{AB} \subseteq \sigma_1 \cup ... \cup \sigma_n$. □

**Propozicija 2.34.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka su $\Delta$ i $\sigma_1, ..., \sigma_n$, $n \in \mathbb{N}$ trokuti t.d. je $\overset{\circ}{\Delta} \subseteq \sigma_1 \cup ... \cup \sigma_n$. Tada je*

$$\Delta \subseteq \sigma_1 \cup ... \cup \sigma_n.$$

*Dokaz.* Neka su $A, B$ i $C$ vrhovi trokuta $\Delta$. Neka je $T \in \partial\Delta$.

1. slučaj: $T \in \langle AB\rangle$ ili $T \in \langle AC\rangle$ ili $T \in \langle BC\rangle$

   Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $T \in \langle AB\rangle$.

   Prema Propoziciji 2.11 vrijedi $\langle CT\rangle \subseteq \overset{\circ}{\Delta}$. Stoga je

   $$\langle CT\rangle \subseteq \sigma_1 \cup ... \cup \sigma_n.$$

   Iz Propozicije 2.33 slijedi da je

   $$\overline{CT} \subseteq \sigma_1 \cup ... \cup \sigma_n.$$

   Stoga je $T \in \sigma_1 \cup ... \cup \sigma_n$.

2. slučaj: $T = A$ ili $T = B$ ili $T = C$

   Bez smanjenja općenitosti uzmimo da je $T = C$. Odaberimo točku $T_1 \in \langle AB \rangle$.

   Prema Propoziciji 2.11 vrijedi $\langle CT_1 \rangle \subseteq \overset{\circ}{\Delta}$. Analogno kao i u prethodnom slučaju dobivamo $\overline{CT_1} \subseteq \sigma_1 \cup ... \cup \sigma_n$. Stoga je

$$C \in \sigma_1 \cup ... \cup \sigma_n \;\Rightarrow\; T \in \sigma_1 \cup ... \cup \sigma_n.$$

Zaključujemo da je $\partial\Delta \subseteq \sigma_1 \cup ... \cup \sigma_n$. Stoga je $\Delta \subseteq \sigma_1 \cup ... \cup \sigma_n$. □

**Lema 2.35.** *Neka je* $(M, \Psi, f)$ *ravnina. Neka je* $\sigma$ *trokut s vrhovima* $A, B$ *i* $C$, *te neka je* $\tau$ *trokut s vrhovima* $A, B$ *i* $D$, *pri čemu se točke* $C$ *i* $D$ *nalaze u istoj poluravnini određenoj s pravcem* $AB$. *Tada je*

$$\overset{\circ}{\sigma} \cap \overset{\circ}{\tau} \neq \emptyset.$$

*Dokaz.* Odaberimo $T \in \langle AB \rangle$. Neka je $E$ točka t.d. je $T \in \langle ED \rangle$. (Takva točka sigurno postoji prema definiciji $P^+$-ravnine.) Imamo

$$\langle AB \rangle \cap \langle ED \rangle = \{T\}.$$

Iz Propozicije 2.29 slijedi da je $\langle ED \rangle \cap \overset{\circ}{\sigma} \neq \emptyset$.
Neka su $K$ i $L$ poluravnine određene pravcem $AB$, pri čemu je $D \in K$. Znamo da je tada i $C \in K$. Iz Leme 2.14 slijedi da je $\overset{\circ}{\sigma} \subseteq K$. Očito je

$$\overline{DE} \cap AB \neq \emptyset \text{ i } E \notin AB.$$

U suprotnom bi $E, T \in AB$ povlačilo $D \in AB$, što je nemoguće.
Dobivamo da je $E \in L$. Imamo

$$T \in AB \;\Rightarrow\; \langle TE \rangle \subseteq L.$$

Zašto? Sigurno je $\overline{TE} \subseteq L \cup p$ (jer je zatvorena poluravnina konveksan skup), pa je posebno $\langle TE \rangle \subseteq L \cup p$. Ako bi za točku $T' \in \langle TE \rangle$ vrijedilo $T' \in p$, onda bismo imali

$$T', T \in p \;\Rightarrow\; E \in p,$$

što je nemoguće. To znači da je $\langle TE \rangle \subseteq L$.
Zbog $\overset{\circ}{\sigma} \subseteq K$ sada imamo $\overset{\circ}{\sigma} \cap \langle TE \rangle = \emptyset$. Vrijedi

$$\langle DE \rangle = \langle DT \rangle \cup \{T\} \cup \langle TE \rangle,$$

pa $\langle DE \rangle \cap \overset{\circ}{\sigma} \neq \emptyset$ povlači $\langle DT \rangle \cap \overset{\circ}{\sigma} \neq \emptyset$.
S druge strane prema Propoziciji 2.11 vrijedi $\langle DT \rangle \subseteq \overset{\circ}{\tau}$.
Zaključak: $\overset{\circ}{\sigma} \cap \overset{\circ}{\tau} \neq \emptyset$. □

# Poglavlje 3

# Kompleksi trokuta

## 3.1 Kompleksi dužina

**Definicija 3.1.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna ravnina. Za konačnu familiju podskupova $\mathcal{D}$ od $M$ kažemo da je kompleks dužina ako vrijedi sljedeće:*

*(1) Svaki element od $\mathcal{D}$ je dužina koja sadrži barem dvije točke.*

*(2) Ako su $I, J \in \mathcal{D}$ t.d. $I \neq J$ onda je $I \cap J = \emptyset$ ili $I \cap J = \{A\}$ gdje je $A$ krajnja točka i od $I$ i od $J$.*

*Ako je $\mathcal{D}$ kompleks dužina u ravnini $(M, \Psi, f)$ onda sa $\mathcal{D}^0$ označavamo skup svih $A \in M$ takvih da je $A$ krajnja točka nekog segmenta iz $\mathcal{D}$.*

**Propozicija 3.2.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna ravnina. Neka su $A, B \in M$, $A \neq B$, te neka je $S$ konačan podskup dužine $\overline{AB}$ takav da su $A, B \in S$. Tada postoji kompleks dužina $\mathcal{D}$ takav da je*

$$\bigcup_{I \in \mathcal{D}} I = \overline{AB} \text{ i } \mathcal{D}^0 = S.$$

*Dokaz.* Skup $S$ je konačan i ima barem dva elementa jer su $A, B \in S$.
Neka je $p = AB$, te neka je $\preceq \in f(p)$ t.d. je $A \preceq B$. Budući da je $S \subseteq p$ te da je $\preceq$ uređaj na $p$, $S$ možemo zapisati u obliku $\{s_0, s_1, ..., s_n\}$ gdje je $n \in \mathbb{N}$ i $s_0 \prec s_1 \prec ... \prec s_{n-1} \prec s_n$.
Iz $S \subseteq \overline{AB}$ slijedi $A \preceq s_0$ i $s_n \preceq B$ pa zbog $A, B \in S$ imamo $A = s_0$ i $B = s_n$.
Neka je

$$\mathcal{D} = \{\overline{s_i s_{i+1}} \mid i \in \{0, ...n-1\}\}.$$

Koristeći Propoziciju 1.16 dobivamo

$$\bigcup_{I\in\mathcal{D}} I = \bigcup_{i=0}^{n-1} \overline{s_i s_{i+1}} = \overline{s_0 s_n} = \overline{AB}.$$

Neka su $I, J \in \mathcal{D}, I \neq J$. Tada je

$$I = \overline{s_i s_{i+1}} \text{ i } J = \overline{s_j s_{j+1}}$$

za neke $i, j \in \{0, ...n-1\}$ takve da je $i \neq j$.
Želimo pokazati da je $I \cap J = \emptyset$ ili $I \cap J = \{V\}$ gdje je $V$ krajnja točka i od $I$ i od $J$. U tu svrhu bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $i < j$. Tada je $i + 1 \leq j$, pa razlikujemo dva slučaja:

1. $i + 1 < j$

   Tada je $s_{i+1} \prec s_j$. Tvrdimo da je tada $I \cap J = \emptyset$.

   Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $X \in I \cap J$, pa slijedi $X \preceq s_{i+1} \prec s_j \preceq X$, tj. $X \prec X$, što je kontradikcija.

2. $i + 1 = j$

   Imamo
   $$I \cap J = \overline{s_i s_{i+1}} \cap \overline{s_{i+1} s_{i+2}},$$
   pa prema Lemi 1.12 zaključujemo da je $I \cap J = \{s_{i+1}\}$.

Ovime smo dokazali da je $\mathcal{D}$ kompleks dužina.
Iz definicije od $\mathcal{D}$ je jasno da vrijedi $\mathcal{D}^0 = S$. □

**Lema 3.3.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna ravnina. Neka je $\mathcal{D}$ kompleks dužina te neka je $I \in \mathcal{D}$, $I = \overline{AB}$. Tada je*

$$\mathcal{D}^0 \cap I = \{A, B\}.$$

*Dokaz.* Jasno je da je

$$\{A, B\} \subseteq \mathcal{D}^0 \cap I.$$

S druge strane pretpostavimo da postoji $C \in \mathcal{D}^0 \cap I$ t.d. je $C \neq A$ i $C \neq B$.
Iz $C \in \mathcal{D}^0$ slijedi da postoji $J \in \mathcal{D}$ t.d. je $J = \overline{CD}$ za neki $D \in M$.
Prema Propoziciji 1.10 imamo $I \neq J$. Ovo zajedno s $I, J \in \mathcal{D}$ i $I \cap J \neq \emptyset$ povlači $I \cap J = \{V\}$ gdje je $V$ krajnja točka i od $I$ i od $J$.
Jasno je da je

$$C \in I \cap J \;\Rightarrow\; C = V.$$

Dakle, $C$ je krajnja točka od $I$, što je nemoguće.
Zaključak: $\mathcal{D}^0 \cap I = \{A, B\}$. □

**Definicija 3.4.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna ravnina te $A \subseteq M$. Za kompleks dužina $\mathcal{D}$ kažemo da je segmentacija skupa A ako je*

$$\bigcup_{I \in \mathcal{D}} I = A.$$

**Propozicija 3.5.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ elementarna ravnina, te neka je $\Delta$ trokut s vrhovima $A, B$ i $C$. Neka je $S$ konačan podskup od $\partial\Delta$ takav da je $A, B, C \in S$. Tada postoji segmentacija $\mathcal{D}$ skupa $\partial\Delta$ takva da je*

$$\mathcal{D}^0 = S.$$

*Dokaz.* Iz Propozicije 3.2 slijedi da postoji segmentacija $\mathcal{D}_{\overline{AB}}$ segmenta $\overline{AB}$ takva da je

$$\mathcal{D}^0_{\overline{AB}} = S \cap \overline{AB}.$$

Isto tako zaključujemo da postoje segmentacije $\mathcal{D}_{\overline{AC}}$ i $\mathcal{D}_{\overline{BC}}$ segmenata $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ takve da je

$$\mathcal{D}^0_{\overline{AC}} = S \cap \overline{AC} \text{ i } \mathcal{D}^0_{\overline{BC}} = S \cap \overline{BC}.$$

Definirajmo

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\overline{AB}} \cup \mathcal{D}_{\overline{AC}} \cup \mathcal{D}_{\overline{BC}}.$$

Dokažimo prvo da je $\mathcal{D}$ kompleks dužina.
Očito je da su elementi od $\mathcal{D}$ dužine koje sadrže barem dvije točke.
Neka su $I, J \in \mathcal{D}$ t.d. je $I \neq J$. Želimo dokazati da je $I \cap J = \emptyset$ ili $I \cap J = \{V\}$ gdje je $V$ krajnja točka i od $I$ i od $J$.
Ovo je jasno ako su

$$I, J \in \mathcal{D}_{\overline{AB}} \text{ ili } I, J \in \mathcal{D}_{\overline{AC}} \text{ ili } I, J \in \mathcal{D}_{\overline{BC}}.$$

Inače, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $I \in \mathcal{D}_{\overline{AB}}$ i $J \in \mathcal{D}_{\overline{AC}}$. Pretpostavimo da je $I \cap J \neq \emptyset$. Imamo $I \subseteq \overline{AB}$ i $J \subseteq \overline{AC}$, pa je

$$I \cap J \subseteq \overline{AB} \cap \overline{AC} \subseteq AB \cap AC = \{A\}.$$

Dakle,

$$I \cap J \subseteq \{A\} \text{ i } I \cap J \neq \emptyset \;\Rightarrow\; I \cap J = \{A\}.$$

Stoga je $A \in I$ i $A \in J$, pa iz Leme 1.23 slijedi da je $A$ krajnja točka i od $I$ i od $J$.
Prema tome $\mathcal{D}$ je kompleks dužina.
Vrijedi:

$$\bigcup_{I \in \mathcal{D}} I = \bigcup_{I \in \mathcal{D}_{\overline{AB}}} I \cup \bigcup_{I \in \mathcal{D}_{\overline{AC}}} I \cup \bigcup_{I \in \mathcal{D}_{\overline{BC}}} I = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC} = \partial\Delta.$$

Dakle, $\mathcal{D}$ je segmentacija od $\partial\Delta$.
Nadalje,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^0 &= \mathcal{D}^0_{\overline{AB}} \cup \mathcal{D}^0_{\overline{AC}} \cup \mathcal{D}^0_{\overline{BC}} = (S \cap \overline{AB}) \cup (S \cap \overline{AC}) \cup (S \cap \overline{BC}) \\ &= S \cap (\overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}) = S \cap \partial\Delta = S.\end{aligned}$$

□

## 3.2 Kompleksi trokuta

**Definicija 3.6.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina, te neka je $\mathcal{K}$ konačna familija trokuta takva da za sve $\sigma, \tau \in \mathcal{K}$ takve da je $\sigma \neq \tau$ vrijedi jedno od sljedećeg:*

*(1)* $\sigma \cap \tau = \emptyset$

*(2)* $\sigma \cap \tau$ *je stranica i od* $\sigma$ *i od* $\tau$

*(3)* $\sigma \cap \tau = \{V\}$ *gdje je $V$ vrh i od $\sigma$ i od $\tau$.*

*Tada za $\mathcal{K}$ kažemo da je kompleks trokuta u $(M, \Psi, f)$.*

**Definicija 3.7.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina, $A \subseteq M$ te $\mathcal{K}$ kompleks trokuta takav da je*

$$\bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma = A.$$

*Tada za $\mathcal{K}$ kažemo da je triangulacija skupa $A$.*

**Propozicija 3.8.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina. Neka je $\Delta$ trokut, te neka je $\mathcal{D}$ segmentacija od $\partial\Delta$. Tada postoji triangulacija $\mathcal{K}$ od $\Delta$ takva da je za svaki $\sigma \in \mathcal{K}$ $\sigma \cap \partial\Delta$ stranica od $\sigma$, te takva da je*

$$\{\sigma \cap \partial\Delta \mid \sigma \in \mathcal{K}\} = \mathcal{D}.$$

*Kažemo da je $\mathcal{K}$ triangulacija od $\Delta$ podređena segmentaciji $\mathcal{D}$.*

*Dokaz.* Odaberimo točku $P \in \overset{\circ}{\Delta}$. Za $I \in \mathcal{D}$ označimo sa

$$P * I$$

trokut s vrhovima $P, C$ i $D$ gdje su $C$ i $D$ krajnje točke od $I$. Uočimo da je ova definicija dobra, tj. da su točke $P, C$ i $D$ nekolinearne.
Naime, prema Propoziciji 2.32 segment $I$ je podskup neke stranice trokuta $\Delta$. Neka je to $\overline{AB}$, gdje su $A$ i $B$ vrhovi od $\Delta$. Tada $C$ i $D$ leže na pravcu $AB$, pa kada bi $P, C$ i $D$ bile kolinearne točke onda bi i $P$ ležala na $AB$, što bi povlačilo $P \in AB \cap \Delta = \overline{AB}$. To je

nemoguće jer je $P \in \overset{\circ}{\Delta}$.
Neka je

$$\mathcal{K} = \{P * I \mid I \in \mathcal{D}\}.$$

Dokažimo da je $\mathcal{K}$ kompleks trokuta.
Neka su $\sigma, \tau \in \mathcal{K}$, $\sigma \neq \tau$. Tada je

$$\sigma = P * I \text{ i } \tau = P * J,$$

gdje su $I, J \in \mathcal{D}$, $I \neq J$. Budući da je $\mathcal{D}$ kompleks dužina vrijedi $I \cap J = \emptyset$ ili $I \cap J = \{V\}$ gdje je $V$ krajnja točka i od $I$ i od $J$.

1. slučaj: $I \cap J = \emptyset$

   Koristeći Propoziciju 2.30 dobivamo

   $$\sigma \cap \tau = (P * I) \cap (P * J) = \bigcup_{T_1 \in I} \overline{PT_1} \cap \bigcup_{T_2 \in J} \overline{PT_2} = \bigcup_{T_1 \in I,\, T_2 \in J} \overline{PT_1} \cap \overline{PT_2} = \bigcup_{T_1 \in I,\, T_2 \in J} \{P\} = \{P\}.$$

   Dakle, $\sigma \cap \tau = \{P\}$, a očito je $P$ vrh i od $\sigma$ i od $\tau$.

2. slučaj: $I \cap J = \{V\}$ gdje je $V$ krajnja točka i od $I$ i od $J$

   Prema Propoziciji 2.30

   $$\sigma \cap \tau = (P * I) \cap (P * J) = \bigcup_{T_1 \in I} \overline{PT_1} \cap \bigcup_{T_2 \in J} \overline{PT_2} = \bigcup_{T_1 \in I,\, T_2 \in J} \overline{PT_1} \cap \overline{PT_2}$$

   $$= \Big( \bigcup_{T_1 \in I,\, T_2 \in J,\, T_1 \neq T_2} \overline{PT_1} \cap \overline{PT_2} \Big) \cup \overline{PV} = \{P\} \cup \overline{PV} = \overline{PV}.$$

   Budući da su $P$ i $V$ vrhovi trokuta $\sigma$, $\overline{PV}$ je stranica od $\sigma$.

   Isto tako $\overline{PV}$ je stranica od $J$.

Ovime smo pokazali da je $\mathcal{K}$ kompleks trokuta.
Dokažimo sada da je

$$\bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma = \Delta.$$

Za svaki $\sigma \in \mathcal{K}$ vrijedi da je $\sigma$ trokut čiji su vrhovi iz $\Delta$. Stoga je i $\sigma \subseteq \Delta$.
Prema tome, $\bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma \subseteq \Delta$.
S druge strane neka je $T \in \Delta$. Prema Propoziciji 2.27 postoji $Q \in \partial\Delta$ t.d. $T \in \overline{PQ}$. Budući da je $\mathcal{D}$ segmentacija od $\partial\Delta$ postoji $I \in \mathcal{D}$ t.d. je $Q \in I$. Tada je

$$\overline{PQ} \subseteq P * I \;\Rightarrow\; T \in P * I.$$

Dakle, $\Delta \subseteq \bigcup_{\sigma\in\mathcal{K}} \sigma$.
Zaključujemo da je $\bigcup_{\sigma\in\mathcal{K}} \sigma = \Delta$. Ovime smo dokazali da je $\mathcal{K}$ triangulacija od $\Delta$.
Dokažimo sada: ako je $T \in \partial\Delta$ onda je $\overline{PT} \cap \partial\Delta = \{T\}$.
Pretpostavimo da postoji točka $Q \in \overline{PT} \cap \partial\Delta$ t.d. je $Q \neq T$. Imamo

$$Q \in \overline{PT} \;\Rightarrow\; \overline{PQ} \subseteq \overline{PT} \;\Rightarrow\; \overline{PQ} \cap \overline{PT} = \overline{PQ}$$

S druge strane, prema Propoziciji 2.30 $\overline{PQ} \cap \overline{PT} = \{P\}$. Dakle, $\overline{PQ} = \{P\}$, tj. $P = Q$, a to je nemoguće jer je $P \in \overset{\circ}{\Delta}$.
Neka je $\sigma \in \mathcal{K}$. Tada postoji $I \in \mathcal{D}$ t.d. je $\sigma = P * I$. Uočimo da je tada $\sigma = \bigcup_{T\in I} \overline{PT}$.Prema prethodnoj tvrdnji imamo

$$\sigma \cap \partial\Delta = (\bigcup_{T\in I} \overline{PT}) \cap \partial\Delta = \bigcup_{T\in I} (\overline{PT} \cap \partial\Delta) = \bigcup_{T\in I} \{T\} = I.$$

Dakle, $\sigma \cap \partial\Delta$ je stranica od $\sigma$. Ovime smo ujedno pokazali da je $\sigma \cap \partial\Delta \in \mathcal{D}$, te da za svaki $I \in \mathcal{D}$ vrijedi $I = \sigma \cap \partial\Delta$ za neki $\sigma \in \mathcal{K}$ (tj. za $\sigma = P * I$). Prema tome

$$\{\sigma \cap \partial\Delta \mid \sigma \in \mathcal{K}\} = \mathcal{D}.$$

□

**Teorem 3.9.** *Neka je* $(M, \Psi, f)$ *ravnina. Neka je* $\mathcal{F}$ *konačna familija trokuta s međusobno disjunktnim interiorima. Neka je*

$$\Pi = \bigcup_{\Delta\in\mathcal{F}} \Delta.$$

*Tada postoji triangulacija* $\mathcal{K}$ *od* $\Pi$ *takva da za svaki* $\sigma \in \mathcal{K}$ *postoji* $\Delta \in \mathcal{F}$ *t.d. je* $\sigma \subseteq \Delta$.

*Dokaz.* Neka je $S$ skup svih točaka koje su vrh nekog trokuta iz $\mathcal{F}$. Skup $S$ je očito konačan. Neka je $\Delta \in \mathcal{F}$. Promotrimo skup $\partial\Delta \cap S$. Taj skup je konačan podskup od $\partial\Delta$ i sadrži vrhove od $\Delta$. Prema Propoziciji 3.5 postoji segmentacija $\mathcal{D}_\Delta$ od $\partial\Delta$ t.d. je

$$\mathcal{D}^0_\Delta = S \cap \partial\Delta.$$

Prema Propoziciji 3.8 postoji triangulacija $\mathcal{K}_\Delta$ od $\Delta$ podređena $\mathcal{D}_\Delta$.
Dokažimo prvo da je $\bigcup_{\Delta\in\mathcal{F}} \mathcal{D}_\Delta$ kompleks dužina. Dovoljno je dokazati da ako su $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{F}$ t.d. je $\Delta_1 \neq \Delta_2$ te $I \in \mathcal{D}_{\Delta_1}$ i $J \in \mathcal{D}_{\Delta_2}$ t.d. je $I \neq J$, onda je $I \cap J = \emptyset$ ili $I \cap J = \{V\}$ gdje je $V$ krajnja točka i od $I$ i od $J$. Pretpostavimo da je $I \cap J \neq \emptyset$.

1. slučaj: $I, J$ leže na istom pravcu

   Neka je $I = \overline{AB}$, $J = \overline{CD}$, gdje su $A, B, C, D \in M$. Prema Lemi 1.37 slijedi da je

   $$A \in \overline{CD} \text{ ili } B \in \overline{CD} \text{ ili } C \in \overline{AB} \text{ ili } D \in \overline{AB}.$$

Bez smanjenja općenitosti uzmimo da je $A \in \overline{CD}$. Uočimo sljedeće:

$$I \in \mathcal{D}_{\Delta_1} \Rightarrow A \in \mathcal{D}^0_{\Delta_1} \Rightarrow A \in S.$$

Nadalje,

$$J \in \mathcal{D}_{\Delta_2} \Rightarrow J \subseteq \partial\Delta_2 \Rightarrow \overline{CD} \subseteq \partial\Delta_2 \Rightarrow A \in \partial\Delta_2.$$

Dakle,

$$A \in \partial\Delta_2 \cap S \;\Rightarrow\; A \in \mathcal{D}^0_{\Delta_2} \;\Rightarrow\; A \in \mathcal{D}^0_{\Delta_2} \cap J.$$

Prema Lemi 3.3 slijedi da je $\mathcal{D}^0_{\Delta_2} \cap J = \{C, D\}$. Dakle, $A \in \{C, D\}$. Bez smanjenja općenitosti uzmimo da je $A = C$.

1. $A \in \overline{BD}$

   Iz Leme 1.12 slijedi da je $\overline{BA} \cap \overline{AD} = \{A\}$, tj. $I \cap J = \{A\}$.

2. $B \in \overline{AD}$, tj. $B \in \overline{CD}$

   Analogno kao što smo zaključili da je $A \in \{C, D\}$ dobivamo $B \in \{C, D\}$, tj. $B \in \{A, D\}$. Stoga je $B = D$. Prema tome $I = J$, što je kontradikcija.

3. $D \in \overline{AB}$

   Imamo $D \in \mathcal{D}^0_{\Delta_2}$ jer je $J \in \mathcal{D}_{\Delta_2}$. Stoga je $D \in S$.

   S druge strane

   $$D \in \overline{AB} \;\Rightarrow\; D \in \partial\Delta_1 \;\Rightarrow\; D \in \partial\Delta_1 \cap S \;\Rightarrow\; D \in \mathcal{D}^0_{\Delta_1}.$$

   No, $D \in \overline{AB}$, a $\overline{AB} \cap \mathcal{D}^0_{\Delta_1} = \{A, B\}$. Dakle, $D \in \{A, B\}$, pa je $D = B$ (jer je $A = C$). Stoga je $I = J$, što je kontradikcija.

2. slučaj $I$ i $J$ ne leže na istom pravcu

   Tvrdimo da je $I \cap J$ jednočlan skup. Pretpostavimo suprotno.

   Tada zbog $I \cap J \neq \emptyset$ postoje $E, F \in I \cap J$ t.d. $E \neq F$. Ako je $p$ pravac na kojem leži $I$ (takav sigurno postoji) onda su $E, F \in p$, pa je $p = EF$. Dakle, $I \subseteq EF$. Isto tako dobivamo i $J \subseteq EF$. Ovo je sada u kontradikciji s činjenicom da $I$ i $J$ ne leže na istom pravcu.

   Dakle, $I \cap J = \{V\}$. Tvrdimo da je $V$ krajnja točka i od $I$ i od $J$. Pretpostavimo suprotno.

   Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da $V$ nije krajnja točka od $I$.

   Imamo

   $$I = \overline{AB} \text{ i } J = \overline{CD},$$

gdje su $A, B, C, D \in M$. Dakle, $V \in \langle AB\rangle$. Iz ovoga slijedi da je $V \in \langle CD\rangle$. U suprotnom bismo imali $V = C$ ili $V = D$, a to bi značilo da $\langle AB\rangle$ sadrži točku iz $S \cap \partial\Delta_1$ $(C, D \in S)$, dakle, točku iz $\mathcal{D}^0_{\Delta_1}$. Ovo je nemoguće jer je $\mathcal{D}^0_{\Delta_1} \cap \overline{AB} = \{A, B\}$ (prema Lemi 3.3).

Dakle, $V \in \langle AB\rangle$ i $V \in \langle CD\rangle$. Budući da je $I \in \mathcal{D}_{\Delta_1}$ imamo $I \subseteq \partial\Delta_1$, pa prema Propoziciji 2.32 slijedi da $I$ leži na nekoj stranici od $\Delta_1$. Označimo s $A', B', C'$ vrhove trokuta $\Delta_1$ t.d. je $I \subseteq \overline{A'B'}$. Dakle, $\overline{AB} \subseteq \overline{A'B'}$ pa iz Leme 1.36 slijedi da je $\langle AB\rangle \subseteq \langle A'B'\rangle$.

Stoga

$$V \in \langle CD\rangle \cap \langle A'B'\rangle \;\Rightarrow\; \langle CD\rangle \cap \langle A'B'\rangle = \{V\}.$$

Naime, kada bi u $\langle CD\rangle \cap \langle A'B'\rangle$ postojala točka $W \neq V$ onda bi vrijedilo $\overline{CD} \subseteq VW$ i $\overline{A'B'} \subseteq VW$, što je u kontradikciji s činjenicom da $I$ i $J$ ne leže na istom pravcu.

Iz Propozicije 2.29 slijedi da je $\langle CD\rangle \cap \overset{\circ}{\Delta}_1 \neq \emptyset$. No,

$$\langle CD\rangle \subseteq \partial\Delta_2 \subseteq \Delta_2 \;\Rightarrow\; \Delta_2 \cap \overset{\circ}{\Delta}_1 \neq \emptyset.$$

S druge strane, znamo da je $\overset{\circ}{\Delta}_2 \cap \overset{\circ}{\Delta}_1 = \emptyset$ pa prema Propoziciji 2.31 slijedi da je $\Delta_2 \cap \overset{\circ}{\Delta}_1 = \emptyset$, što je nemoguće. Dakle, $V$ je krajnja točka i od $I$ i od $J$.

Zaključak: $\bigcup_{\Delta\in\mathcal{F}} \mathcal{D}_\Delta$ je kompleks dužina.
Dokažimo sada da je $\bigcup_{\Delta\in\mathcal{F}} \mathcal{K}_\Delta$ kompleks trokuta.
U tu svrhu dovoljno je pokazati sljedeće: ako su $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{F}$, $\Delta_1 \neq \Delta_2$ te $\sigma \in \mathcal{K}_{\Delta_1}$ i $\tau \in \mathcal{K}_{\Delta_2}$, takvi da je $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, onda je $\sigma \cap \tau$ stranica i od $\sigma$ i od $\tau$ ili $\sigma \cap \tau = \{V\}$ gdje je $V$ vrh i od $\sigma$ i od $\tau$.
Imamo

$$\sigma \subseteq \Delta_1 \text{ i } \tau \subseteq \Delta_2 \;\Rightarrow\; \sigma \cap \tau \subseteq \Delta_1 \cap \Delta_2.$$

Budući da je $\Delta_1 \cap \overset{\circ}{\Delta}_2 = \emptyset$ i $\overset{\circ}{\Delta}_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ prema Propoziciji 2.31 vrijedi

$$\Delta_1 \cap \Delta_2 = (\overset{\circ}{\Delta}_1 \cup \partial\Delta_1) \cap \Delta_2 = (\overset{\circ}{\Delta}_1 \cap \Delta_2) \cup (\partial\Delta_1 \cap \Delta_2) = \partial\Delta_1 \cap \Delta_2$$

$$= \partial\Delta_1 \cap (\overset{\circ}{\Delta}_2 \cup \partial\Delta_2) = (\partial\Delta_1 \cap \overset{\circ}{\Delta}_2) \cup (\partial\Delta_1 \cap \partial\Delta_2) = \partial\Delta_1 \cap \partial\Delta_2.$$

Dakle, $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \partial\Delta_1 \cap \partial\Delta_2$, pa zaključujemo da je $\sigma \cap \tau \subseteq \partial\Delta_1 \cap \partial\Delta_2$. Stoga je

$$\sigma \cap \tau = (\sigma \cap \tau) \cap (\partial\Delta_1 \cap \partial\Delta_2) = (\sigma \cap \partial\Delta_1) \cap (\tau \cap \partial\Delta_2).$$

Dakle, $\sigma \cap \tau = I \cap J$ gdje je $I = \sigma \cap \partial\Delta_1$ i $J = \tau \cap \partial\Delta_2$. Po konstrukciji od $\mathcal{K}_{\Delta_1}$ imamo $I$ je stranica od $\sigma$ te da je $I \in \mathcal{D}_{\Delta_1}$. Isto tako $J$ je stranica od $\tau$ i $J \in \mathcal{D}_{\Delta_2}$.

1. $I = J$

   Tada je $\sigma \cap \tau = I = J$. Dakle, $\sigma \cap \tau$ je stranica i od $\sigma$ i od $\tau$.

2. $I \neq J$

   Budući da su $I$ i $J$ elementi familije $\bigcup_{\Delta \in \mathcal{F}} \mathcal{D}_\Delta$ te da je ta familija kompleks dužina imamo $I \cap J = \emptyset$ ili $I \cap J = \{V\}$ gdje je $V$ krajnja točka i od $I$ i od $J$. No,

   $$I \cap J = \sigma \cap \tau \neq \emptyset.$$

   Stoga je $I \cap J = \{V\}$ gdje je $V$ krajnja točka i od $I$ i od $J$. Slijedi da je $V$ vrh i od $\sigma$ i od $\tau$, a imamo $\sigma \cap \tau = \{V\}$.

Zaključak: $\bigcup_{\Delta \in \mathcal{F}} \mathcal{K}_\Delta$ je kompleks trokuta. Imamo:

$$\bigcup_{\sigma \in \bigcup_{\Delta \in \mathcal{F}} \mathcal{K}_\Delta} \sigma = \bigcup_{\Delta \in \mathcal{F}} \Big( \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}_\Delta} \sigma \Big) = \bigcup_{\Delta \in \mathcal{F}} \Delta = \Pi.$$

Dakle, $\bigcup_{\Delta \in \mathcal{F}} \mathcal{K}_\Delta$ je triangulacija od $\Pi$.
Očito za svaki $\sigma \in \bigcup_{\Delta \in \mathcal{F}} \mathcal{K}_\Delta$ postoji $\Delta \in \mathcal{F}$ t.d. $\sigma \subseteq \Delta$. □

**Teorem 3.10.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina. Tada svaki poligon u ovoj ravnini ima triangulaciju.*

*Dokaz.* Ovo slijedi direktno iz Teorema 2.24 i Teorema 3.9. □

**Definicija 3.11.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka je $\mathcal{K}$ konačna familija trokuta takva da za sve $\sigma, \tau \in \mathcal{K}$, $\sigma \neq \tau$ vrijedi*

$$\mathring{\sigma} \cap \mathring{\tau} = \emptyset.$$

*Tada za $\mathcal{K}$ kažemo da je polukompleks trokuta u $(M, \Psi, f)$.*

**Napomena 3.12.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka je $\mathcal{K}$ kompleks trokuta u toj ravnini. Tada je $\mathcal{K}$ polukompleks trokuta.*

Ovo slijedi direktno iz definicije kompleksa trokuta.

**Definicija 3.13.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka su $\mathcal{K}$ i $\mathcal{L}$ polukompleksi trokuta. Kažemo da je $\mathcal{L}$ subdivizija od $\mathcal{K}$ ako je*

$$\bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma = \bigcup_{\tau \in \mathcal{L}} \tau$$

*te ako za svaki $\tau \in \mathcal{L}$ postoji $\sigma \in \mathcal{K}$ t.d. je $\tau \subseteq \sigma$.*

**Propozicija 3.14.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka su $\mathcal{K}$ i $\mathcal{L}$ polukompleksi trokuta t.d. je $\mathcal{L}$ subdivizija od $\mathcal{K}$. Neka je $\sigma_0 \in \mathcal{K}$. Neka je $\mathcal{A} = \{\tau \in \mathcal{L} \mid \tau \subseteq \sigma_0\}$. Tada je*

$$\bigcup_{\tau \in \mathcal{A}} \tau = \sigma_0.$$

*Dokaz.* Očito je $\bigcup_{\tau \in \mathcal{A}} \tau \subseteq \sigma_0$.
Obratno, neka je $T \in \overset{\circ}{\sigma}_0$. Tada je

$$T \in \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma \;\Rightarrow\; T \in \bigcup_{\tau \in \mathcal{L}} \tau$$

jer je $\mathcal{L}$ subdivizija od $\mathcal{K}$.
To znači da je $T \in \tau$ za neki $\tau \in \mathcal{L}$. Postoji $\sigma \in \mathcal{K}$ t.d je $\tau \subseteq \sigma$. Uočimo da je

$$T \in \overset{\circ}{\sigma}_0 \cap \sigma \;\Rightarrow\; \overset{\circ}{\sigma}_0 \cap \sigma \neq \emptyset.$$

Pretpostavimo da je $\sigma_0 \neq \sigma$. Budući da je $\mathcal{K}$ polukompleks trokuta vrijedi

$$\overset{\circ}{\sigma}_0 \cap \overset{\circ}{\sigma} = \emptyset,$$

pa iz Propozicije 2.31 slijedi da je $\overset{\circ}{\sigma}_0 \cap \sigma = \emptyset$, što je nemoguće.
Dakle, $\sigma_0 = \sigma$. Prema tome,

$$\tau \subseteq \sigma_0 \;\Rightarrow\; \tau \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; T \in \bigcup_{\tau \in \mathcal{A}} \tau.$$

Ovime smo dokazali da je $\overset{\circ}{\sigma}_0 \subseteq \bigcup_{\tau \in \mathcal{A}} \tau$.
Iz Propozicije 2.34 slijedi da je $\sigma_0 \subseteq \bigcup_{\tau \in \mathcal{A}} \tau$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

**Korolar 3.15.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka je $\mathcal{F}$ polukompleks trokuta. Tada postoji kompleks trokuta $\mathcal{K}$ t.d. je $\mathcal{K}$ subdivizija od $\mathcal{F}$.*

*Dokaz.* Ovo slijedi direktno iz Teorema 3.9. □

**Propozicija 3.16.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka su $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ i $\mathcal{G}$ polukompleksi trokuta t.d. je $\mathcal{K}$ subdivizija od $\mathcal{L}$ te $\mathcal{L}$ subdivizija od $\mathcal{G}$. Tada je $\mathcal{K}$ subdivizija od $\mathcal{G}$*

*Dokaz.* Ovo slijedi direktno iz definicije subdivizije. □

**Teorem 3.17.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka su $\mathcal{K}$ i $\mathcal{L}$ kompleksi trokuta t.d. je*

$$\bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma = \bigcup_{\tau \in \mathcal{L}} \tau.$$

*Tada postoji kompleks trokuta $\mathcal{G}$ takav da je $\mathcal{G}$ subdivizija i od $\mathcal{K}$ i od $\mathcal{L}$.*

*Dokaz.* Neka je $\sigma \in \mathcal{K}$. Prema Propoziciji 2.20 postoji polukompleks trokuta $\mathcal{F}_\sigma$ takav da je

$$\bigcup_{\tau \in \mathcal{F}_\sigma} \tau = \sigma$$

i takav da za svaki $\tau \in \mathcal{F}_\sigma$ i svaki $\Delta \in \mathcal{L}$ vrijedi $\tau \subseteq \Delta$ ili $\tau \cap \overset{\circ}{\Delta} = \emptyset$. Neka je

$$\mathcal{G}' = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \mathcal{F}_\sigma.$$

Tada je $\mathcal{G}'$ polukompleks trokuta. Naime, ako su $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{G}'$, $\tau_1 \neq \tau_2$, onda imamo dva slučaja:

1. Postoji $\sigma \in \mathcal{K}$ t.d. su $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}_\sigma$.

   Jasno je da je $\overset{\circ}{\tau}_1 \cap \overset{\circ}{\tau}_2 = \emptyset$ jer je $\mathcal{F}_\sigma$ polukompleks trokuta.

2. Postoje $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{K}$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$ t.d. su $\tau_1 \in \mathcal{F}_{\sigma_1}$ i $\tau_2 \in \mathcal{F}_{\sigma_2}$.
   Imamo
   $$\tau_1 \subseteq \sigma_1 \text{ i } \tau_2 \subseteq \sigma_2 \Rightarrow \overset{\circ}{\tau}_1 \subseteq \overset{\circ}{\sigma}_1 \text{ i } \overset{\circ}{\tau}_2 \subseteq \overset{\circ}{\sigma}_2 .$$
   Budući da je $\mathcal{K}$ kompleks trokuta imamo $\overset{\circ}{\sigma}_1 \cap \overset{\circ}{\sigma}_2 = \emptyset$, pa je
   $$\overset{\circ}{\tau}_1 \cap \overset{\circ}{\tau}_2 \subseteq \overset{\circ}{\sigma}_1 \cap \overset{\circ}{\sigma}_2 \Rightarrow \overset{\circ}{\tau}_1 \cap \overset{\circ}{\tau}_2 = \emptyset.$$

Dakle, $\mathcal{G}'$ je polukompleks trokuta.
Tvrdimo da je $\mathcal{G}'$ subdivizija i od $\mathcal{K}$ i od $\mathcal{L}$. Imamo

$$\bigcup_{\tau \in \mathcal{G}'} \tau = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} (\bigcup_{\tau \in \mathcal{F}_\sigma} \tau) = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma$$

pa vrijedi i

$$\bigcup_{\tau \in \mathcal{G}'} \tau = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{L}} \sigma. \tag{3.1}$$

Očito je svaki $\tau \in \mathcal{G}'$ podskup nekog $\sigma \in \mathcal{K}$. Ovo znači da je $\mathcal{G}'$ subdivizija od $\mathcal{K}$.
Neka je $\tau \in \mathcal{G}'$. Tvrdimo da postoji $\Delta \in \mathcal{L}$ t.d. je $\tau \subseteq \Delta$.
Pretpostavimo suprotno. Znamo da je $\tau \in \mathcal{F}_\sigma$ za neki $\sigma \in \mathcal{K}$. Iz konstrukcije $\mathcal{F}_\sigma$ slijedi da je

$$\tau \cap \overset{\circ}{\Delta} = \emptyset$$

za svaki $\Delta \in \mathcal{L}$. Iz Propozicije 2.31 slijedi da je

$$\overset{\circ}{\tau} \cap \Delta = \emptyset$$

za svaki $\Delta \in \mathcal{L}$. Odaberimo $T \in \overset{\circ}{\tau}$ (takva sigurno postoji). Tada je $T \in \tau$, pa je prema (3.1)

$$T \in \bigcup_{\sigma \in \mathcal{L}} \sigma,$$

što znači da postoji $\Delta \in \mathcal{L}$ t.d. je $T \in \Delta$. Dakle, $T \in \overset{\circ}{\tau} \cap \Delta$, što je nemoguće jer je $\overset{\circ}{\tau} \cap \Delta = \emptyset$.

Dakle, postoji $\Delta \in \mathcal{L}$ t.d. je $\tau \subseteq \Delta$. Ovo znači da je $\mathcal{G}'$ subdivizija od $\mathcal{L}$.

Prema Korolaru 3.15 postoji kompleks trokuta $\mathcal{G}$ t.d. je $\mathcal{G}$ subdivizija od $\mathcal{G}'$. Iz Propozicije 3.16 slijedi da je $\mathcal{G}'$ subdivizija i od $\mathcal{K}$ i od $\mathcal{L}$. □

**Lema 3.18.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina, neka je $\mathcal{K}$ kompleks trokuta, te neka su $\sigma, \tau \in \mathcal{K}$. Neka su $A$ i $B$, $A \neq B$, vrhovi trokuta $\sigma$, a $T$ vrh trokuta $\tau$. Tada*

$$T \notin \langle AB \rangle.$$

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno, $T \in \langle AB \rangle$. Očito je tada $\sigma \neq \tau$ i $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$.

1. $\sigma \cap \tau$ je stranica i od $\sigma$ i od $\tau$

   Neka je $C$ treći vrh od $\sigma$. Očito $T \notin \overline{AC}$ i $T \notin \overline{BC}$. Stoga

   $$\sigma \cap \tau = \overline{AB} \Rightarrow \overline{AB} \text{ je stranica od } \tau.$$

   Ovo znači da su $A, B$ vrhovi od $\tau$, pa $T \in \langle AB \rangle$ povlači da su $A, B$ i $T$ svi vrhovi od $\tau$ i ujedno i kolinearne točke. To je nemoguće.

2. $\sigma \cap \tau = \{V\}$ gdje je $V$ vrh i od $\sigma$ i od $\tau$

   Iz $T \in \sigma \cap \tau$ slijedi da je $T = V$. Prema tome, $T$ je vrh od $\sigma$, što je nemoguće jer je točka $T$ kolinearna s $A$ i $B$.

Dakle, $T \notin \langle AB \rangle$. □

**Propozicija 3.19.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina, neka je $\Delta$ trokut te neka je $\mathcal{K}$ triangulacija od $\Delta$. Neka je $I$ stranica nekog trokuta iz $\mathcal{K}$, te neka su $A$ i $B$ točke takve da je $I = \overline{AB}$.*

*(1) Ako je $\langle AB \rangle \cap \overset{\circ}{\Delta} \neq \emptyset$, onda postoje točno dva različita trokuta $\sigma$ i $\tau$ iz $\mathcal{K}$ kojima je $I$ stranica. Ako je $C_1$ vrh od $\sigma$ koji ne leži na $I$ te $C_2$ vrh od $\tau$ koji ne leži na $I$, onda $C_1$ i $C_2$ leže u različitim poluravninama određenima s $AB$.*

*(2) Ako je $\langle AB \rangle \cap \overset{\circ}{\Delta} = \emptyset$, onda postoji točno jedan trokut iz $\mathcal{K}$ kojemu je $I$ stranica i vrijedi da je $I$ podskup neke stranice od $\Delta$.*

*Dokaz.* (1) Neka je $\langle AB\rangle \cap \overset{\circ}{\Delta} \neq \emptyset$.

Neka je $\sigma \in \mathcal{K}$ t.d. je $\overline{AB}$ stranica od $\sigma$. Tada su $A, B$ vrhovi od $\sigma$. Neka je $C$ treći vrh od $\sigma$.

Odaberimo $T \in \langle AB\rangle \cap \overset{\circ}{\Delta}$. Neka je $p = TC$. Odaberimo $\preceq \in f(p)$ t.d. je $T \preceq C$. Prema Propoziciji 2.25 imamo

$$p \cap \Delta = \overline{PQ},$$

gdje su $P, Q \in \partial\Delta$. Iz ovoga slijedi da je $P \neq T$ i $Q \neq T$.

Tvrdimo da je $P \prec T$ ili $Q \prec T$. U suprotnom bi vrijedilo

$$T \prec P \text{ i } T \prec Q \Rightarrow T \prec P \preceq Q \text{ ili } T \prec Q \preceq P \Rightarrow T \notin \overline{PQ}.$$

No, to je nemoguće jer je $T \in p \cap \Delta = \overline{PQ}$.

Dakle, $P \prec T$ ili $Q \prec T$. Bez smanjenja općenitosti uzmimo da je $P \prec T$. Iz ovoga slijedi da je $T \prec Q$. (U suprotnom bismo imali $Q \prec T$ pa bismo opet dobili da $T \notin \overline{PQ}$.) Imamo

$$P \prec T \text{ i } T \prec Q \Rightarrow P \prec Q,$$

pa zbog $C \in \overline{PQ}$ imamo $C \preceq Q$. Dakle, $P \prec T \prec C \preceq Q$.

Neka su $K$ i $L$ poluravnine određene pravcem $AB$ t.d. je $C \in K$. Imamo $\overline{PC} \cap AB = \{T\}$, što znači da se $P$ i $C$ ne nalaze u istoj poluravnini određenoj s $AB$. Dakle,

$$P \in L \Rightarrow \langle PT\rangle \subseteq L.$$

Iz Teorema 2.6 slijedi da je $\sigma \subseteq K \cup AB$. Zaključujemo

$$\langle PT\rangle \cap \sigma = \emptyset \tag{3.2}$$

S druge strane očito je $\langle PT\rangle \subseteq \Delta$. Budući da je $\Delta = \bigcup_{\tau\in\mathcal{K}} \tau$ imamo $\langle PT\rangle \subseteq \Delta \subseteq \bigcup_{\tau\in\mathcal{K}} \tau$, pa iz (3.2) slijedi

$$\langle PT\rangle \subseteq \bigcup_{\tau\in\mathcal{K}\setminus\{\sigma\}} \tau.$$

Iz Propozicije 2.33 slijedi

$$\overline{PT} \subseteq \bigcup_{\tau\in\mathcal{K}\setminus\{\sigma\}} \tau.$$

Posebno, $T \in \bigcup_{\tau\in\mathcal{K}\setminus\{\sigma\}} \tau$, pa postoji $\tau \in \mathcal{K} \setminus \{\sigma\}$ t.d. je $T \in \tau$. Dakle,

$$T \in \tau \text{ i } T \in \sigma \Rightarrow \tau \cap \sigma \neq \emptyset \text{ i } \tau \neq \sigma.$$

Budući da je $\mathcal{K}$ kompleks trokuta $\tau \cap \sigma$ je stranica i od $\tau$ i od $\sigma$ ili $\tau \cap \sigma = \{V\}$ gdje je $V$ vrh i od $\tau$ i od $\sigma$. Ovo posljednje je nemoguće jer $T$ nije vrh od $\sigma$ ($T \in \langle AB \rangle$).

Dakle, $\tau \cap \sigma$ je stranica i od $\tau$ i od $\sigma$. No,

$$T \notin \overline{AC} \text{ i } T \notin \overline{BC} \Rightarrow \tau \cap \sigma = \overline{AB}$$

što znači da je $\overline{AB}$ stranica od $\tau$.

Neka je $D$ vrh trokuta $\tau$ različit od $A$ i $B$. Pretpostavimo da je $D \in K$. Prema Lemi 2.35 slijedi da je $\mathring{\sigma} \cap \mathring{\tau} \neq \emptyset$. Ovo je nemoguće jer je $\mathcal{K}$ kompleks trokuta (pa je ujedno u polukompleks trokuta). Zaključujemo da je $D \in L$.

Pretpostavimo sada da postoji $\tau' \in \mathcal{K}$ t.d. je $\tau' \neq \sigma$, $\tau' \neq \tau$ te da je $\overline{AB}$ stranica od $\tau'$. Tada su $A, B$ vrhovi od $\tau'$. Neka je $E$ treći vrh od $\tau'$.

1. $E \in K$

   Iz Leme 2.35 slijedi da je $\mathring{\sigma} \cap \mathring{\tau}' \neq \emptyset$, što je nemoguće.

2. $E \in L$

   Iz Leme 2.35 slijedi da je $\mathring{\tau} \cap \mathring{\tau}' \neq \emptyset$, što je nemoguće.

Dakle, postoje točno dva različita trokuta iz $\mathcal{K}$ kojima je $I$ stranica.

(2) Neka je $\langle AB \rangle \cap \mathring{\Delta} = \emptyset$.

Tada je $\langle AB \rangle \subseteq \partial\Delta$. Prema Propoziciji 2.32 vrijedi da je $\langle AB \rangle \subseteq \overline{EF}$ gdje su $E$ i $F$ vrhovi od $\Delta$. Imamo

$$AB = EF \Rightarrow \overline{AB} \subseteq EF.$$

Dakle,

$$\overline{AB} \subseteq \sigma \text{ i } \overline{AB} \subseteq EF \Rightarrow \overline{AB} \subseteq \sigma \cap EF,$$

pa je prema Propoziciji 2.12 $\overline{AB} \subseteq \overline{EF}$.

Neka je $\sigma \in \mathcal{K}$ t.d. je $\overline{AB}$ stranica od $\sigma$. Neka je $C$ vrh od $\sigma$ različit od $A$ i $B$. Pretpostavimo da postoji $\tau \in \mathcal{K}$ t.d. $\sigma \neq \tau$ te da je $\overline{AB}$ stranica od $\tau$.

Neka je $D$ vrh od $\tau$ t.d. je $D \neq A$ i $D \neq B$. Imamo $C, D \in \Delta$, a prema Propoziciji 2.6 čitav $\Delta$ se nalazi u zatvorenoj poluravnini određenoj pravcem $EF$.

No, $EF = AB$, pa zaključujemo da se $C$ i $D$ nalaze u istoj poluravnini određenoj pravcem $AB$. Iz Leme 2.35 slijedi da je

$$\mathring{\sigma} \cap \mathring{\tau} \neq \emptyset,$$

što je nemoguće.

Zaključujemo da postoji točno jedan trokut iz $\mathcal{K}$ kojemu je $\overline{AB}$ stranica.

□

**Lema 3.20.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina, te neka je $\Delta$ trokut. Neka je $\mathcal{K}$ triangulacija od $\Delta$.*

*(1) Svaki vrh od $\Delta$ je vrh nekog trokuta iz $\mathcal{K}$.*

*(2) Neka su $A, B$ različiti vrhovi od $\Delta$ te neka je $p = AB$. Neka je $\preceq \in f(p)$ t.d. je $A \preceq B$. Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ te da su $T_0, ..., T_n$ sve točke iz $\overline{AB}$ koje su vrh nekog trokuta iz $\mathcal{K}$ te da je $T_0 \prec T_1 \prec ... \prec T_{n-1} \prec T_n$. Tada su $\overline{T_0T_1}, \overline{T_1T_2}, ..., \overline{T_{n-1}T_n}$ svi segmenti koji su stranice nekog trokuta iz $\mathcal{K}$ te ujedno sadržani u $\overline{AB}$.*

*Dokaz.* (1) Neka je $V$ vrh od $\Delta$. Tada je $V \in \Delta$, pa postoji $\sigma \in \mathcal{K}$ t.d. je $V \in \sigma$.

Pretpostavimo da $V$ nije vrh od $\sigma$. Prema Propoziciji 2.7 postoje $P, Q \in \sigma$ t.d. je $V \in \langle PQ \rangle$. Budući da je $\sigma \subseteq \Delta$ imamo

$$P, Q \in \Delta \text{ i } V \in \langle PQ \rangle,$$

pa prema Propoziciji 2.8 dobivamo da V nije vrh od $\Delta$, što je kontradikcija. Prema tome, $V$ je vrh od $\sigma$.

(2) Neka je $I$ segment t.d. je $I$ stranica nekog trokuta $\sigma \in \mathcal{K}$ te t.d. je $I \subseteq \overline{AB}$. Imamo da je $I = \overline{PQ}$, gdje su $P, Q \in M$. Očito vrijedi $P, Q \in \overline{AB}$.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $P \prec Q$. Očito su $P, Q$ vrhovi od $\sigma$. Iz ovoga slijedi da je $P = T_i$, a $Q = T_j$ za neke $i, j \in \{0, ..., n\}$ t.d. je $i < j$. Tvrdimo da je $j = i + 1$.

Pretpostavimo suprotno. Tada je

$$i + 1 < j \Rightarrow T_i \prec T_{i+1} \prec T_j \Rightarrow T_{i+1} \in \langle T_iT_j \rangle.$$

Ovo je u kontradikciji s Lemom 3.18

Dakle, $j = i + j$. Prema tome $I = \overline{T_iT_{i+1}}$.

Dokažimo sada da je svaki od segmenata $\overline{T_0T_1}, ..., \overline{T_{n-1}T_n}$ stranica nekog trokuta iz $\mathcal{K}$. Neka je $i \in \{0, ..., n-1\}$. Odaberimo $D \in \langle T_iT_{i+1} \rangle$. Tada je $D \in \Delta$, pa postoji $\sigma \in \mathcal{K}$ t.d. $D \in \sigma$.

Pretpostavimo da je $D \in \mathring{\sigma}$. Iz $\sigma \subseteq \Delta$ slijedi $\mathring{\sigma} \subseteq \mathring{\Delta}$, pa je $D \in \mathring{\Delta}$. No,

$$D \in \overline{T_iT_{i+1}} \Rightarrow D \in \overline{AB} \Rightarrow D \in \partial\Delta,$$

što je u kontradikciji s $D \in \mathring{\Delta}$. Dakle , $D \in \partial\sigma$.

Neka su $P, Q$ vrhovi od $\sigma$ t.d. je $D \in \overline{PQ}$. Uočimo da je $D \neq P$ i $D \neq Q$. (Naime, $D \in \langle T_iT_{i+1} \rangle$, pa bismo u suprotnom bili u kontradikciji s Lemom 3.18.) Stoga je $D \in \langle PQ \rangle$.

Uočimo da su točke $P, D, Q$ kolinearne. Pretpostavimo da $P \notin p$. Tada (zbog $D \in p$) imamo $Q \notin p$, pa budući da $\overline{PQ}$ siječe $p$ (u točki $D$) zaključujemo da se točke $P$ i $Q$ ne nalaze u istoj poluravnini (pa nisu u istoj zatvorenoj poluravnini) određenoj s $p$. No, to je nemoguće prema Teoremu 2.6 jer vrijedi $P, Q \in \sigma \subseteq \Delta$. Dakle,

$$P \in p \;\Rightarrow\; Q \in p \;\Rightarrow\; P, Q \in p \cap \Delta = \overline{AB}.$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $P \prec Q$. Imamo

$$D \in \langle PQ \rangle \;\Rightarrow\; P \prec D,\; D \in \langle T_i T_{i+1} \rangle \;\Rightarrow\; D \prec T_{i+1} \;\Rightarrow P \prec T_{i+1}.$$

Iz ovoga slijedi $P \preceq T_i$. (U suprotnom imamo $P \in \langle T_i T_{i+1} \rangle$, a to je nemoguće zbog $T_0 \prec T_1 \prec ... \prec T_{n-1} \prec T_n$.)

Analogno dobivamo $T_i \prec Q$ što povlači $T_{i+1} \preceq Q$. Dakle,

$$P \preceq T_i \prec T_{i+1} \preceq Q.$$

Pretpostavimo da je $P \prec T_i$. Tada je $T_i \in \langle PQ \rangle$, a to je nemoguće prema Lemi 3.18. Dakle, $P = T_i$.

Analogno dobivamo $Q = T_{i+1}$.

Prema tome $\overline{T_i T_{i+1}}$ je stranica nekog trokuta iz $\mathcal{K}$.

□

# Poglavlje 4

# Poligonska površina

## 4.1 Trokutna površina

**Definicija 4.1.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina. Označimo sa $\mathcal{T}$ familiju svih trokuta u toj ravnini. Za funkciju $p : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ kažemo da je trokutna površina u $(M, \Psi, f)$ ako vrijedi sljedeće:*
*Ako su $A, B, C$ nekolinearne točke, $D \in \langle AB \rangle$, $\Delta$ trokut s vrhovima $A, B$ i $C$, $\Delta_1$ trokut s vrhovima $A, D$ i $C$, $\Delta_2$ trokut s vrhovima $D, B$ i $C$, onda je*

$$p(\Delta) = p(\Delta_1) + p(\Delta_2).$$

**Definicija 4.2.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka je $p$ trokutna površina na $(M, \Psi, f)$. Neka su $A, B, C \in M$. Definiramo broj $p(ABC)$ na sljedeći način:*

*(1) Ako su $A, B, C$ nekolinearne točke, onda postoji (jedinstven) trokut $\Delta$ kojem su $A, B$ i $C$ vrhovi. U tom slučaju definiramo*

$$p(ABC) = p(\Delta).$$

*(2) Ako su $A, B$ i $C$ kolinearne točke, onda stavimo*

$$p(ABC) = 0.$$

**Lema 4.3.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka je $p$ trokutna površina na toj ravnini. Neka su $A, B$ i $C$ nekolinearne točke, te neka je $O \in \Delta$ pri čemu je $\Delta$ trokut s vrhovima $A, B$ i $C$. Tada je*

$$p(ABC) = p(OAB) + p(OAC) + p(OBC).$$

*Dokaz.* Pretpostavimo da je $O \in \overset{\circ}{\Delta}$. Znamo da je $\overset{\circ}{\Delta} = \bigcup_{P \in \langle AB \rangle} \langle CP \rangle$. Stoga postoji $P \in \langle AB \rangle$ t.d. je $O \in \langle CP \rangle$. Imamo

$$p(ABC) = p(PAC) + P(PBC).$$

S druge strane iz $O \in \langle PC \rangle$ slijedi da je

$$p(APC) = p(APO) + p(OCA) \text{ i } p(BPC) = p(PBO) + p(OCB).$$

Stoga je

$$p(ABC) = p(APO) + p(OCA) + p(PBO) + p(OCB) \tag{4.1}$$

Nadalje, iz $P \in \langle AB \rangle$ slijedi da je $p(ABO) = p(APO) + p(PBO)$. Iz ovoga i (4.1) slijedi da je $p(ABC) = P(OAB) + P(OAC) + P(OBC)$.

Uzmimo sada da je $O \in \partial\Delta$.

1. slučaj $O \in \{A, B, C\}$

   Tada je očito da tvrdnja leme vrijedi.

2. slučaj $O \notin \{A, B, C\}$

   Tada se $O$ nalazi u unutrašnjosti neke stranice od $\Delta$. Bez smanjenja općenitosti uzmimo da je $O \in \langle AB \rangle$. Tada je $p(ABC) = p(OAC) + p(OBC)$, pa tvrdnja leme vrijedi jer je $p(OAB) = 0$.

□

**Definicija 4.4.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina, neka je $q \in \Psi$ pravac te $A, B \in M$. Definiramo:*

$$\delta(A, B, q) = \begin{cases} 1, \textit{ ako je su } A \textit{ i } B \textit{ u istoj poluravnini određenoj s pravcem } q, \\ 0, \textit{ ako je } A \in q \textit{ ili } B \in q, \\ -1, \textit{ inače.} \end{cases}$$

**Propozicija 4.5.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka je $p$ trokutna površina na toj ravnini. Neka su $A, B$ i $C$ nekolinearne točke, te $O \in M$. Tada je*

$$p(ABC) = \delta(O, C, AB) \cdot p(OAB) + \delta(O, A, BC) \cdot p(OBC) + \delta(O, B, AC) \cdot p(OAC).$$

*Dokaz.* Označimo

$$x = \delta(O, C, AB) \cdot p(OAB)$$
$$y = \delta(O, A, BC) \cdot p(OBC)$$
$$z = \delta(O, B, AC) \cdot p(OAC)$$

Trebamo dokazati da je $p(ABC) = x + y + z$.
Neka je $\Delta$ trokut s vrhovima $A, B$ i $C$.

1. slučaj: $O \in \{A, B, C\}$

   Dakle, $O = A$ ili $O = B$ ili $O = C$. U svakom od ovih slučajeva tvrdnja propozicije očito vrijedi.

2. slučaj: $O$ se nalazi na nekoj stranici od $\Delta$, ali $O \notin \{A, B, C\}$

   Tada se $O$ nalazi u unutrašnjosti neke stranice trokuta $\Delta$. Bez smanjenja općenitosti uzmimo da je $O \in \langle AB \rangle$. Tada je $P(OAB) = 0$, pa je $x = 0$. Iz Leme 1.22 zaključujemo $\delta(O, A, BC) = 1$ i $\delta(O, B, AC) = 1$. Stoga imamo

   $$p(ABC) = p(OAC) + p(OBC) = y + z = x + y + z.$$

3. slučaj: $O \in \overset{\circ}{\Delta}$

   Tada iz Teorema 2.13 odmah slijedi da je $\delta(O, C, AB) = 1, \partial(O, A, BC) = 1, \partial(O, B, AC) = 1$. Sada tvrdnja propozicije slijedi iz Leme 4.3.

4. slučaj: $O \in AB$ ili $O \in BC$ ili $O \in AC$, $O \notin \Delta$

   Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $O \in AB$. Budući da $O \notin \overline{AB}$ (jer nije iz $\Delta$) prema Lemi 1.19 imamo da je $B \in \overline{OA}$ ili $A \in \overline{OB}$.

   Bez smanjenja općenitosti uzmimo da je $B \in \overline{OA}$. Tada je $B \in \langle OA \rangle$, pa

   $$P(OAC) = P(ABC) + P(BOC) \;\Rightarrow\; P(ABC) = P(OAC) - P(BOC).$$

   Budući da $\overline{OA}$ siječe $BC$ u točki $B$, imamo $\delta(O, A, BC) = -1$. Prema 1.22 imamo $\delta(O, B, AC) = 1$. Očito je $p(OAB) = 0$. Dakle,

   $$p(ABC) = p(OAC) - p(BOC) = \delta(O, B, AC) \cdot p(OAC) + \delta(O, A, BC) \cdot p(BOC)$$

   $$= z + y = x + y + z.$$

5. slučaj $O \notin \Delta$, $O \notin AB \cup BC \cup CB$.

   Neka je $K_A$ zatvorena poluravnina određena s $BC$ koja sadrži točku $A$. Analogno definiramo $K_B$ i $K_C$. Znamo da je $\Delta = K_A \cap K_B \cap K_C$.

   Budući da $O \notin \Delta$ imamo $O \notin K_A$ ili $O \notin K_B$ ili $O \notin K_C$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da $O \notin K_A$. Iz ovoga slijedi da su $O$ i $A$ u različitim poluravninama određenim s pravcem $BC$. Stoga je $\overline{AO} \cap BC \neq \emptyset$, tj. $\langle OA \rangle \cap BC \neq \emptyset$

   Neka je $D \in \langle OA \rangle \cap BC$. Imamo $D \in BC$, pa prema Lemi 1.19 slijedi da je $D \in \overline{BC}$ ili $B \in \overline{DC}$ ili $C \in \overline{BD}$.

a) $D \in \overline{BC}$

Uočimo $D \neq B$. (U suprotnom imamo $B \in \langle AO \rangle$, što je nemoguće jer $O \notin AB$). Isto tako $D \neq C$, pa je $D \in \langle BC \rangle$.

Iz $D \in \langle AO \rangle$ slijedi

$$p(OBA) = p(OBD) + p(ABD) \text{ i } p(OAC) = p(OCD) + p(ADC).$$

Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo:

$$p(OBA) + p(OAC) = (p(ABD) + p(ADC)) + (p(OBD) + p(OCD))$$
$$= p(ABC) + p(OBC).$$

Dakle,

$$p(OBA) + p(OAC) = p(ABC) + p(OBC) \Rightarrow$$
$$p(ABC) = p(OBA) + p(OAC) - p(OBC) \tag{4.2}$$

Imamo $\delta(O, C, AB) = 1$ (Prema Lemi 1.22 $D$ i $O$ se nalaze u istoj poluravnini određenoj s $AB$, a iz istog razloga se $C$ i $D$ nalaze u istoj poluravnini određenoj s $AB$, stoga se $O$ i $C$ nalaze u istoj poluravnini određenoj s $AB$).

Isto tako zaključujemo $\delta(O, B, AC) = 1$.

Nadalje, $\delta(O, A, BC) = -1$ jer su $O$ i $A$ u različitim poluravninama određenim s $BC$.

Prema tome, iz (4.2) slijedi $p(ABC) = x + y + z$.

b) $B \in \overline{DC}$ ili $C \in \overline{BD}$

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da $B \in \overline{DC}$

Kao i u prethodnom slučaju zaključujemo da je $B \neq D$, pa je $B \in \langle DC \rangle$.

Neka je $\Delta'$ trokut s vrhovima $A, O$ i $C$. Budući da je $D \in \langle AO \rangle$, te $B \in \langle CD \rangle$ prema Propoziciji 2.11 imamo da je $B \in \overset{\circ}{\Delta'}$. Prema Lemi 4.3 vrijedi:

$$p(OAC) = p(BAC) + p(BOC) + p(BOA) \Rightarrow$$

$$p(ABC) = p(OAC) - p(OBC) - p(OAB).$$

Vrijedi $\delta(O, B, AC) = 1$. (Prema Lemi 1.22 $D$ i $O$ su u istoj poluravnini određenoj s $AC$, a isto tako i točke $D$ i $B$. Stoga su $B$ i $O$ u istoj poluravnini određenoj s $AC$.)

Nadalje, $\delta(O, A, BC) = -1$. (Naime, već smo prije konstatirali da su $O$ i $A$ u različitim poluravninama određenim s $BC$.)

Naposljetku $\delta(O, C, AB) = -1$. Prema Lemi 1.22 $D$ i $O$ su u istoj poluravnini određenoj pravcem $AB$. S druge strane, $C$ i $D$ leže u različitim poluravninama s obzirom na $AB$ jer je $B \in \langle CD \rangle$. Stoga su $O$ i $C$ u različitim poluravninama određenim s $AB$.

Iz svega ovoga slijedi tvrdnja propozicije.

□

**Teorem 4.6.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka je $p$ trokutna površina na $(M, \Psi, f)$. Neka je $\Delta$ trokut te $\mathcal{K}$ triangulacija od $\Delta$. Tada je*

$$p(\Delta) = \sum_{\sigma \in \mathcal{K}} p(\sigma).$$

*Dokaz.* Imamo $\mathcal{K} = \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$ pri čemu su $\sigma_1, ..., \sigma_n$ trokuti, te $\sigma_i \neq \sigma_j$ za $i, j \in \{1..., n\}$, $i \neq j$. Za $i \in \{1..., n\}$ neka su $A_i$, $B_i$, $C_i$ vrhovi trokuta $\sigma_i$.
Neka je $I$ dužina koja ima barem dvije točke. Neka su $A$ i $B$ krajnje točke od $I$. Za $O, C \in M$ definiramo

$$\delta(O, C, I) = \delta(O, C, AB) \text{ i } p(O, I) = p(OAB).$$

Neka je $O \in M$ proizvoljno odabrana točka. Iz Propozicije 4.6 slijedi da je

$$p(A_iB_iC_i) = \delta(O, C_i, A_iB_i) \cdot p(OA_iB_i) + \delta(O, A_i, B_iC_i) \cdot p(OB_iC_i) + \delta(O, B_i, A_iC_i) \cdot p(OA_iC_i). \tag{4.3}$$

Zbrojimo sve ove jednakosti za $i \in \{1.., n\}$. Na lijevoj strani dobivamo:

$$\sum_{i=1}^{n} p(A_iB_iC_i) = \sum_{\sigma \in \mathcal{K}} p(\sigma).$$

Na desnoj strani dobivamo sumu

$$\sum \delta(O, D, I) \cdot p(O, I) \tag{4.4}$$

pri čemu sumiramo po svim $I, D$ gdje je $I$ stranica nekog trokuta iz $\mathcal{K}$, a $D$ vrh tog trokuta koji nije na $I$.
Neka je $I$ stranica nekog trokuta iz $\mathcal{K}$. Imamo $I = \overline{PQ}$.

1. slučaj: $\langle PQ \rangle \cap \overset{\circ}{\Delta} \neq \emptyset$

   Prema Propoziciji 3.19 postoje točno dva različita trokuta iz $\mathcal{K}$ kojima je $I$ stranica. Neka su to $\sigma$ i $\tau$. Očito su $P$ i $Q$ vrhovi od $\sigma$ i $\tau$. Neka je $D_1$ treći vrh od $\sigma$, a $D_2$ treći vrh od $\tau$.

Nadalje, prema Propoziciji 3.19 vrijedi da se $D_1$ i $D_2$ nalaze u različitim poluravninama određenim s $PQ$. Iz ovoga zaključujemo da je jedan od brojeva $\delta(O, D_1, I)$ i $\delta(O, D_2, I)$ jednak 1, a drugi -1, ili su oba 0.

U sumi (4.4) $I$ se javlja u točno dva pribrojnika, a njihov zbroj je 0.

2. slučaj: $\langle PQ\rangle \cap \overset{\circ}{\Delta} = \emptyset$

   Tada je prema Propoziciji 3.19 $\overline{PQ}$ podskup neke stranice od $\Delta$, te postoji točno jedan trokut iz $\mathcal{K}$ kojemu je $\overline{PQ}$ stranica. Dakle, u (4.4) ostaju samo oni članovi za koje vrijedi da je $I$ podskup neke stranice od $\Delta$.

   Neka su $A, B$ i $C$ vrhovi od $\Delta$. Promotrimo sve one članove sume (4.4) za koje je $I \subseteq \overline{AB}$. Promotrimo jedan takav $I$. Imamo $I = \overline{PQ}$. Budući da postoji točno jedan trokut $\sigma \in \mathcal{K}$ kojem je $I$ stranica, $I$ se u sumi (4.4) javlja točno jednom i to kao $\delta(O, D, I) \cdot p(O, I)$ gdje je $D$ vrh od $\sigma$ koji ne leži na $I$. Imamo

$$\delta(O, D, I) = \delta(O, D, PQ) = \delta(O, D, AB) = \delta(O, C, AB).$$

   ($D \in \sigma \subseteq \Delta$ povlači $D \in \Delta$ iz čega slijedi da su $D$ i $C$ u istoj poluravnini određenoj s $AB$.)

   Odaberimo $\leq \in f(AB)$ t.d. je $A \leq B$. Neka su $T_0, ..., T_n$ sve točke iz $AB$ koje su vrh nekog trokuta iz $\mathcal{K}$ te takve da je $T_0 \prec T_1 \prec ... \prec T_{n-1} \prec T_n$. Uočimo da su prema Lemi 3.20 $A$ i $B$ među točkama $T_0, ...T_n$, što povlači da je $A = T_0$ i $B = T_n$.

   Prema Lemi 3.20 vrijedi da su $\overline{T_0T_1}, ..., \overline{T_{n-1}T_n}$ svi segmenti koji su stranice nekog trokuta iz $\mathcal{K}$ te ujedno sadržani u $\overline{AB}$.

   Zaključujemo da je suma svih članova od (4.4) za koje je $I \subseteq \overline{AB}$ jednaka

$$\sum_{i=0}^{n-1} \delta(O, C, AB) \cdot p(O, \overline{T_iT_{i+1}}) = \delta(O, C, AB) \sum_{i=0}^{n-1} p(OT_iT_{i+1}).$$

   Budući da je $T_1 \in \langle T_0T_2\rangle$ vrijedi $p(OT_0T_2) = p(OT_0T_1) + p(OT_1T_2)$ (Ako $O \notin AB$ onda ova jednakost vrijedi jer je $p$ trokutna površina , a ako je $O \in AB$ onda jednakost vrijedi jer su sva tri broja jednaka 0.)

   Nadalje, iz $T_2 \in \langle T_0T_3\rangle$ analogno dobivamo

$$p(OT_0T_3) = p(OT_2T_3) + p(OT_0T_2) \Rightarrow p(OT_0T_3) = \sum_{i=0}^{2} p(OT_iT_{i+1}).$$

   Lako indukcijom dobivamo da za svaki $k \leq n$ vrijedi $p(OT_0T_k) = \sum_{i=0}^{k-1} p(OT_iT_{i+1})$, posebno za $k = n$ dobivamo $p(OT_0T_n) = \sum_{i=0}^{n-1} p(OT_iT_{i+1})$.

Dakle, suma svih članova od (4.4) od kojih je $I \subseteq \overline{AB}$ je jednaka $\delta(O,C,AB) \cdot p(OT_0T_n)$, tj. $\delta(O,C,AB) \cdot p(OAB)$.

Analogno dobivamo da je suma svih članova od (4.4) od kojih je $I \subseteq \overline{AC}$ jednaka $\delta(O,B,AC) \cdot p(OAC)$, te da je suma svih članova od (4.4) od kojih je $I \subseteq \overline{BC}$ jednaka $\delta(O,A,BC) \cdot p(OBC)$.

Dakle, suma (4.4) je jednaka

$$\delta(O,C,AB) \cdot p(OAB) + \delta(O,B,AC) \cdot p(OAC) + \delta(O,A,BC) \cdot p(OBC).$$

Prema Propoziciji 4.6 imamo

$$\delta(O,C,AB) \cdot p(OAB) + \delta(O,B,AC) \cdot p(OAC) + \delta(O,A,BC) \cdot p(OBC) = p(ABC).$$

Zaključujemo da zbrajanjem jednakosti od (4.3) s lijeve strane dobivamo $\sum_{\sigma \in \mathcal{K}}(\sigma)$, a s desne $p(ABC) = p(\Delta)$.

Time je tvrdnja teorema dokazana. □

## 4.2 Poligonska površina

**Definicija 4.7.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka je $\Pi$ poligon u ovoj ravnini. Neka je $\overset{\circ}{\Pi}$ skup svih točaka $T \in \Pi$ za koje postoji trokut $\sigma$ t.d. je $T \in \overset{\circ}{\sigma}$ i $\sigma \subseteq \Pi$. Za $\overset{\circ}{\Pi}$ kažemo da je unutrašnjost poligona $\Pi$.*

**Uočimo:** ako su $\Pi_1$ i $\Pi_2$ poligoni t.d. $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$ tada je $\overset{\circ}{\Pi}_1 \subseteq \overset{\circ}{\Pi}_2$.

**Propozicija 4.8.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka je $\Delta$ trokut u ovoj ravnini. Tada je unutrašnjost od $\Delta$ kao trokuta jednaka unutrašnjosti od $\Delta$ kao poligona.*

*Dokaz.* Neka je $\overset{\circ}{\Delta}$ unutrašnjost od $\Delta$ kao trokuta, te neka je $\Omega$ unutrašnjost od $\Delta$ kao poligona. Želimo dokazati da je $\overset{\circ}{\Delta} = \Omega$.
Neka je $T \in \overset{\circ}{\Delta}$. Tada je očito $T \in \Omega$ $(\Delta \subseteq \Delta)$.
Neka je sada $T \in \Omega$. Tada postoji trokut $\sigma$ t.d. $T \in \overset{\circ}{\sigma}$ i $\sigma \subseteq \Delta$. Prema Korolaru 2.15 znamo da je $\overset{\circ}{\sigma} \subseteq \overset{\circ}{\Delta}$ iz čega slijedi $T \in \overset{\circ}{\Delta}$. Time smo dokazali da je $\overset{\circ}{\Delta} = \Omega$. □

**Definicija 4.9.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka je $\mathcal{P}$ skup svih poligona u toj ravnini. Neka je $q : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ funkcija koja ima sljedeće svojstvo*

$$q(\Pi_1 \cup \Pi_2) = q(\Pi_1) + q(\Pi_2)$$

*za sve poligone $\Pi_1$ i $\Pi_2$ takve da je $\overset{\circ}{\Pi}_1 \cap \overset{\circ}{\Pi}_2 = \emptyset$. Tada za $q$ kažemo da je poligonska površina na $(M, \Psi, f)$.*

**Propozicija 4.10.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka je $q$ poligonska površina na $(M, \Psi, f)$. Neka je $\mathcal{T}$ skup svih trokuta u ovoj ravnini. Tada je $q|_{\mathcal{T}}$ trokutna površina.*

*Dokaz.* Treba dokazati sljedeće: ako je $\Delta$ trokut s vrhovima $A, B$ i $C$, $D \in \langle AB \rangle$, $\Delta_1$ trokut s vrhovima $A, D$ i $C$ te $\Delta_2$ trokut s vrhovima $C, D$ i $B$, onda je $q(\Delta) = q(\Delta_1) + q(\Delta_2)$.
Prema Propoziciji 2.16 vrijedi $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ i $\mathring{\Delta}_1 \cap \mathring{\Delta}_2 = \emptyset$. Stoga je

$$q(\Delta_1 \cup \Delta_2) = q(\Delta_1) + q(\Delta_2) \Rightarrow q(\Delta) = q(\Delta_1) + q(\Delta_2).$$

□

**Propozicija 4.11.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka je $p$ trokutna površina na toj ravnini. Neka je $\mathcal{K}$ polukompleks i $\mathcal{L}$ kompleks trokuta pri čemu je $\mathcal{L}$ subdivizija od $\mathcal{K}$. Tada je*

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{K}} p(\sigma) = \sum_{\tau \in \mathcal{L}} p(\tau).$$

*Dokaz.* Neka je $\sigma \in \mathcal{K}$. Neka je

$$\mathcal{L}_\sigma = \{\tau \in \mathcal{L} \mid \tau \subseteq \sigma\}.$$

Uočimo da je $\mathcal{L}_\sigma$ kompleks trokuta. Prema Propoziciji 3.14 vrijedi $\bigcup_{\tau \in \mathcal{L}_\sigma} \tau = \sigma$. Ovo znači da je $\mathcal{L}_\sigma$ triangulacija od $\sigma$.
Prema Teoremu 4.6 vrijedi da je $p(\sigma) = \sum_{\tau \in \mathcal{L}_\sigma} p(\tau)$. Očito je $\bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \mathcal{L}_\sigma \subseteq \mathcal{L}$. S druge strane vrijedi $\mathcal{L} \subseteq \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \mathcal{L}_\sigma$ jer je $\mathcal{L}$ subdivizija od $\mathcal{K}$.
Nadalje, ako su $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{K}$ t.d. je $\sigma_1 \neq \sigma_2$, onda su $\mathcal{L}_{\sigma_1}$ i $\mathcal{L}_{\sigma_2}$ disjunktni skupovi. U suprotnom bi postojao $\tau \in \mathcal{L}$ t.d je

$$\tau \subseteq \sigma_1 \text{ i } \tau \subseteq \sigma_2 \Rightarrow \mathring{\tau} \subseteq \mathring{\sigma}_1 \text{ i } \mathring{\tau} \subseteq \mathring{\sigma}_2 \Rightarrow \mathring{\tau} \subseteq \mathring{\sigma}_1 \cap \mathring{\sigma}_2,$$

a to je u kontradikciji s činjenicom da je $\mathring{\sigma}_1 \cap \mathring{\sigma}_2 = \emptyset$.
Iz ovoga slijedi da je

$$\sum_{\tau \in \mathcal{L}} p(\tau) = \sum_{\sigma \in \mathcal{K}} \left( \sum_{\tau \in \mathcal{L}_\sigma} p(\tau) \right) \Rightarrow \sum_{\tau \in \mathcal{L}} p(\tau) = \sum_{\sigma \in \mathcal{K}} p(\sigma).$$

□

**Lema 4.12.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina, neka su $m, n \in \mathbb{N}$ te neka su $\sigma_1, ..., \sigma_m$ i $\tau_1, ..., \tau_n$ trokuti t.d. je $\mathring{\sigma}_i \cap \mathring{\tau}_j = \emptyset$ za sve $i \in \{1, ..., m\}$ i $j \in \{1, ..., n\}$. Tada poligoni*

$$\Pi_1 = \bigcup_{i=1}^{m} \sigma_i \text{ i } \Pi_2 = \bigcup_{j=1}^{n} \tau_j$$

*imaju disjunktne interiore.*

*Dokaz.* Neka je $i \in \{1, ..., m\}$. Za svaki $j \in \{1, ..., n\}$ vrijedi $\overset{\circ}{\sigma_i} \cap \overset{\circ}{\tau_j} = \emptyset$, pa je prema Propoziciji 2.31 $\overset{\circ}{\sigma_i} \cap \tau_j = \emptyset$. Stoga je

$$\overset{\circ}{\sigma_i} \cap (\tau_1 \cup ... \cup \tau_n) = \emptyset \Rightarrow \overset{\circ}{\sigma_i} \cap \Pi_2 = \emptyset.$$

Neka je $\Delta$ trokut t.d. je $\Delta \subseteq \Pi_2$. Tada je $\overset{\circ}{\sigma_i} \cap \Delta = \emptyset$, pa je $\sigma_i \cap \overset{\circ}{\Delta} = \emptyset$. Ovo vrijedi za svaki $i \in \{1, ..., m\}$ iz čega zaključujemo

$$\Pi_1 \cap \overset{\circ}{\Delta} = \emptyset.$$

Iz ovoga slijedi da je $\Pi_1 \cap \overset{\circ}{\Pi_2} = \emptyset$ (po definiciji unutrašnjosti poligona $\overset{\circ}{\Pi_2}$ je unija interiora $\overset{\circ}{\Delta}$ za sve trokute $\Delta \subseteq \Pi_2$).

Posebno $\overset{\circ}{\Pi_1} \cap \overset{\circ}{\Pi_2} = \emptyset$. □

**Teorem 4.13.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina, te neka je $p$ trokutna površina na toj ravnini. Tada postoji jedinstvena poligonska površina $q$ na $(M, \Psi, f)$ koja proširuje $p$, tj. takva da je*

$$p(\Delta) = q(\Delta)$$

*za svaki trokut $\Delta$.*

*Dokaz.* Neka je $\mathcal{P}$ skup svih poligona. Definiramo funkciju $q : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ na sljedeći način. Neka je $\Pi \in \mathcal{P}$. Odaberimo triangulaciju $\mathcal{K}$ od $\Pi$. Definirajmo

$$q(\Pi) = \sum_{\sigma \in \mathcal{K}} p(\sigma).$$

Dokažimo da ova definicija ne ovisi o izboru triangulacije $\mathcal{K}$.
Pretpostavimo da je $\mathcal{L}$ neka druga triangulacija od $\Pi$. Želimo pokazati da je

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{K}} p(\sigma) = \sum_{\sigma \in \mathcal{L}} p(\sigma). \tag{4.5}$$

Prema Teoremu 3.17 postoji kompleks $\mathcal{G}$ koji je subdivizija i od $\mathcal{K}$ i od $\mathcal{L}$. Prema Propoziciji 4.11 vrijedi

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{K}} p(\sigma) = \sum_{\tau \in \mathcal{G}} p(\tau) \text{ i } \sum_{\sigma \in \mathcal{L}} p(\sigma) = \sum_{\tau \in \mathcal{G}} p(\tau)$$

iz čega slijedi (4.5).
Iz definicije od $q$ je jasno da je $q(\Delta) = p(\Delta)$ za svaki trokut $\Delta$. (Za triangulaciju od $\Delta$ uzmemo $\mathcal{K} = \{\Delta\}$).

Dokažimo da je $q$ poligonska površina.
Uočimo prvo sljedeće. Ako je $\Pi$ poligon te $\mathcal{K}$ polukompleks trokuta t.d. je $\bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma = \Pi$,

onda je $q(\Pi) = \sum_{\sigma\in\mathcal{K}} p(\sigma)$.
Prema Korolaru 3.15 postoji kompleks trokuta $\mathcal{L}$ takav da je $\mathcal{L}$ subdivizija od $\mathcal{K}$. Tada prema Propoziciji 4.11 vrijedi $\sum_{\sigma\in\mathcal{K}} p(\sigma) = \sum_{\tau\in\mathcal{L}} p(\tau)$. Vrijedi

$$\bigcup_{\tau\in\mathcal{L}} \tau = \bigcup_{\sigma\in\mathcal{K}} \sigma = \Pi$$

što znači da je $\mathcal{L}$ triangulacija od $\Pi$, pa prema definiciji od $q$ vrijedi $q(\Pi) = \sum_{\tau\in\mathcal{L}} p(\tau)$.
Dakle, $q(\Pi) = \sum_{\sigma\in\mathcal{K}} p(\sigma)$.
Neka su $\Pi_1$ i $\Pi_2$ poligoni s disjunktnim interiorima. Neka je $\mathcal{K}_1$ triangulacija od $\Pi$, te $\mathcal{K}_2$ triangulacija od $\Pi_2$. Za svaki $\sigma_1 \in \mathcal{K}_1$ i $\sigma_2 \in \mathcal{K}_2$ vrijedi

$$\sigma_1 \subseteq \Pi_1 \text{ i } \sigma_2 \subseteq \Pi_2 \ \Rightarrow \overset{\circ}{\sigma}_1 \subseteq \overset{\circ}{\Pi}_1 \ \text{ i } \ \overset{\circ}{\sigma}_2 \subseteq \overset{\circ}{\Pi}_2 \Rightarrow \overset{\circ}{\sigma}_1 \ \cap \ \overset{\circ}{\sigma}_2 \subseteq \overset{\circ}{\Pi}_1 \ \cap \ \overset{\circ}{\Pi}_2 \ .$$

Dakle, $\overset{\circ}{\sigma}_1 \ \cap \ \overset{\circ}{\sigma}_2 = \emptyset$. Ovo posebno znači $\sigma_1 \neq \sigma_2$.
Imamo sljedeći zaključak: $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ je polukompleks trokuta i $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = \emptyset$. Nadalje,

$$\bigcup_{\sigma\in\mathcal{K}_1\cup\mathcal{K}_2} \sigma = \bigcup_{\sigma\in\mathcal{K}_1} \sigma \cup \bigcup_{\sigma\in\mathcal{K}_2} \sigma = \Pi_1 \cup \Pi_2.$$

Prema prethodnoj napomeni vrijedi

$$q(\Pi_1 \cup \Pi_2) = \sum_{\sigma\in\mathcal{K}_1\cup\mathcal{K}_2} p(\sigma) = \sum_{\sigma\in\mathcal{K}_1} p(\sigma) + \sum_{\sigma\in\mathcal{K}_2} p(\sigma) = q(\Pi_1) + q(\Pi_2).$$

Zaključak: $q$ je poligonska površina na $(M, \Psi, f)$.

Pretpostavimo da je $r$ poligonska površina na $(M, \Psi, f)$ takva da je $r(\Delta) = p(\Delta)$ za svaki trokut $\Delta$.
Dokažimo prvo sljedeće: ako je $n \in \mathbb{N}$ te ako su $\sigma_1, ..., \sigma_n$ trokuti s međusobno disjunktnim interiorima, onda je

$$r(\sigma_1 \cup ... \cup \sigma_n) = r(\sigma_1) + r(\sigma_2) + ... + r(\sigma_n).$$

Dokažimo ovo indukcijom po n. Za $n = 1$ tvrdnja je jasna.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Neka su $\sigma_1, ..., \sigma_{n+1}$ trokuti s međusobno dijsunktnim interiorima. Iz Leme 4.12 slijedi da poligoni $\sigma_1 \cup ... \cup \sigma_n$ i $\sigma_{n+1}$ imaju disjunktne interiore. Stoga je

$$r((\sigma_1 \cup ... \cup \sigma_n) \cup \sigma_{n+1}) = r(\sigma_1 \cup ... \cup \sigma_n) + r(\sigma_{n+1}) = r(\sigma_1) + ... + r(\sigma_n) + r(\sigma_{n+1}).$$

Time je tvrdnja dokazana.

Dokažimo sada da je $r = q$.
Neka je $\Pi$ poligon. Neka je $\mathcal{K}$ njegova triangulacija. Imamo $\mathcal{K} = \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$ gdje $\sigma_i \neq \sigma_j$ za $i, j \in \{1, ..., n\}$. Imamo

$$q(\Pi) = \sum_{\sigma\in\mathcal{K}} p(\sigma) = p(\sigma_1) + ... + p(\sigma_n) = r(\sigma_1) + ... + r(\sigma_n) = r(\sigma_1 \cup ... \cup \sigma_n) = r(\Pi).$$

Dakle, $q(\Pi) = r(\Pi)$ za svaki poligon $\Pi$.

Zaključak: $q = r$. Prema tome, postoji jedinstvena poligonska površina $q$ na $(M, \Psi, f)$ koja proširuje $p$. □

**Teorem 4.14.** *Neka je* $(M, \Psi, f)$ *ravnina te neka su* $\Pi_1$ *i* $\Pi_2$ *poligoni t.d. je* $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$ *i* $\Pi_1 \neq \Pi_2$. *Tada postoji poligon* $\Sigma$ *t.d. je*

$$\Pi_2 = \Pi_1 \cup \Sigma \ i \ \overset{\circ}{\Pi}_1 \cap \overset{\circ}{\Sigma} = \emptyset.$$

*Dokaz.* Neka su $n \in \mathbb{N}$ te $\Delta_1, ..., \Delta_n$ trokuti t.d. je $\Pi_1 = \Delta_1 \cup ... \cup \Delta_n$. Nadalje, neka su $m \in \mathbb{N}$ te $\sigma_1, ..., \sigma_m$ trokuti t.d. je $\Pi_2 = \sigma_1 \cup ... \cup \sigma_m$.
Neka je $i \in \{1, ..., m\}$. Tada prema Propoziciji 2.20 postoji konačna familija trokuta $\mathcal{F}_i$ takva da je $\bigcup_{\tau\in\mathcal{F}_i} \tau = \sigma_i$ te takva da za svaki $\tau \in \mathcal{F}_i$ i svaki $j \in \{1, ..., n\}$ vrijedi $\tau \subseteq \Delta_j$ ili $\tau \cap \overset{\circ}{\Delta}_j = \emptyset$.
Neka je $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{F}_i$. Neka je

$$\mathcal{G} = \{\tau \in \mathcal{F} \mid \tau \subseteq \Delta_j \text{ za neki } j \in \{1, ..., n\}\}$$

$$\mathcal{H} = \{\tau \in \mathcal{F} \mid \tau \cap \overset{\circ}{\Delta}_j = \emptyset \text{ za svaki } j \in \{1, ..., n\}\}.$$

Uočimo da je $\mathcal{G} \cup \mathcal{H} = \mathcal{F}$, stoga je $\bigcup_{\tau\in\mathcal{F}} \tau = \bigcup_{\tau\in\mathcal{G}} \tau \cup \bigcup_{\tau\in\mathcal{H}} \tau$. Imamo

$$\bigcup_{\tau\in\mathcal{F}} \tau = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{\tau\in\mathcal{F}_i} \tau = \bigcup_{i=1}^{m} \sigma_i = \Pi_2 \Rightarrow \bigcup_{\tau\in\mathcal{G}} \tau \cup \bigcup_{\tau\in\mathcal{H}} \tau = \Pi_2. \tag{4.6}$$

Dokažimo da je

$$\bigcup_{\tau\in\mathcal{G}} \tau = \Pi_1.$$

Za svaki $\tau \in \mathcal{G}$ postoji $j \in \{1, ..., n\}$ t.d. je $\tau \subseteq \Delta_j$, pa $\Delta_j \subseteq \Pi_1$ povlači $\tau \subseteq \Pi_1$. Stoga je $\bigcup_{\tau\in\mathcal{G}} \tau \subseteq \Pi_1$.

S druge strane, neka je $j \in \{1, ..., n\}$. Neka je $T \in \overset{\circ}{\Delta}_j$. Tada postoji $\tau \in \mathcal{F}$ t.d. je $T \in \tau$. Imamo

$$T \in \overset{\circ}{\Delta}_j \cap \tau \Rightarrow \overset{\circ}{\Delta}_j \cap \tau \neq \emptyset \Rightarrow \tau \subseteq \Delta_j.$$

Stoga je $\tau \in \mathcal{G}$. Dakle, $T \in \bigcup_{\tau\in\mathcal{G}} \tau$, pa zaključujemo $\mathring{\Delta}_j \subseteq \bigcup_{\tau\in\mathcal{G}} \tau$. Prema Propoziciji 2.34 slijedi da je $\Delta_j \subseteq \bigcup_{\tau\in\mathcal{G}} \tau$. Ovo vrijedi za svaki $j \in \{1, ..., m\}$ pa je stoga

$$\Delta_1 \cup ... \cup \Delta_m \subseteq \bigcup_{\tau\in\mathcal{G}} \tau \;\Rightarrow\; \Pi_1 \subseteq \bigcup_{\tau\in\mathcal{G}} \tau.$$

Neka je $\Sigma = \bigcup_{\tau\in\mathcal{H}} \tau$. Prema (4.6) vrijedi

$$\Pi_1 \cup \Sigma = \Pi_2.$$

Uočimo da ovo povlači da je $\Sigma \neq \emptyset$, pa je $\mathcal{H} \neq \emptyset$, odnosno $\Sigma$ je poligon.

Preostalo je još dokazati da poligoni $\Pi_1$ i $\Sigma$ imaju disjunktne interiore. U tu svrhu dovoljno je prema Lemi 4.12 dokazati sljedeće: ako je $\tau_1 \in \mathcal{G}$ i $\tau_2 \in \mathcal{H}$, onda je $\mathring{\tau}_1 \cap \mathring{\tau}_2 = \emptyset$. Imamo da

$$\tau_1 \in \mathcal{G} \;\Rightarrow\; \tau_1 \subseteq \Delta_j \text{ za } j \in \{1, ..., n\} \text{ i } \tau_2 \in \mathcal{H} \;\Rightarrow\; \tau_2 \cap \mathring{\Delta}_j = \emptyset.$$

Nadalje,

$$\tau_1 \subseteq \Delta_j \;\Rightarrow \mathring{\tau}_1 \subseteq \mathring{\Delta}_j \Rightarrow\; \tau_2 \cap \mathring{\tau}_1 = \emptyset \;\Rightarrow \mathring{\tau}_2 \cap \mathring{\tau}_1 = \emptyset.$$

Dakle, $\mathring{\Pi}_1 \cap \mathring{\Sigma} = \emptyset$. □

**Lema 4.15.** *Neka je* $(M, \Psi, f)$ *ravnina te neka su* $\Pi_1$ *i* $\Pi_2$ *poligoni t.d. je* $\Pi_1 \neq \Pi_1 \cup \Pi_2$. *Tada postoji poligon* $\Sigma$ *t.d. je*

$$\Pi_1 \cup \Pi_2 = \Pi_1 \cup \Sigma \;\; i \;\; \mathring{\Pi}_1 \cap \mathring{\Sigma} = \emptyset \;\; i \;\; \Sigma \subseteq \Pi_2.$$

*Dokaz.* Iz Teorema 4.14 slijedi da postoji poligon $\Sigma$ takav da je

$$\Pi_1 \cup \Pi_2 = \Pi_1 \cup \Sigma \text{ i } \mathring{\Pi}_1 \cap \mathring{\Sigma} = \emptyset.$$

Neka su $\sigma_1, ..., \sigma_n$ trokuti t.d. je $\Pi_1 = \sigma_1 \cup ... \cup \sigma_n$, te neka su $\tau_1, ..., \tau_k$ trokuti t.d. je $\Sigma = \tau_1 \cup ... \cup \tau_k$.
Neka je $i \in \{1, ..., k\}$. Tvrdimo da je $\mathring{\tau}_i \subseteq \Pi_2$.
Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $T \in \mathring{\tau}_i$ t.d. $T \notin \Pi_2$. Imamo

$$T \in \mathring{\tau}_i \subseteq \tau_i \subseteq \Sigma \subseteq \Pi_1 \cap \Sigma \;\Rightarrow\; T \in \Pi_1 \cup \Pi_2 \;\Rightarrow\; T \in \Pi_1.$$

Stoga postoji $j \in \{1, ..., n\}$ t.d. je $T \in \sigma_j$. Dobivamo da

$$\mathring{\tau}_i \cap \sigma_j \neq \emptyset \;\Rightarrow \mathring{\tau}_i \cap \mathring{\sigma}_j \neq \emptyset \;\Rightarrow \mathring{\Sigma} \cap \mathring{\Pi}_1 \neq \emptyset,$$

što je kontradikcija. Prema tome, $\overset{\circ}{\tau_i} \subseteq \Pi_2$.
Iz Propozicije 2.34 slijedi da je $\tau_i \subseteq \Pi_2$. Dakle,

$$\tau_1, ..., \tau_k \subseteq \Pi_2 \;\Rightarrow\; \Sigma \subseteq \Pi_2.$$

□

**Definicija 4.16.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina. Za trokutnu površinu $p$ na $(M, \Psi, f)$ kažemo da je nenegativna ako je*

$$p(\Delta) \geq 0$$

*za svaki trokut $\Delta$. Za poligonsku površinu $q$ na $(M, \Psi, f)$ kažemo da je nenegativna ako je*

$$q(\Pi) \geq 0$$

*za svaki poligon $\Pi$.*

**Uočimo:** Restrikcija nenegativne poligonske površine na skup svih trokuta je nenegativna trokutna površina. S druge strane, ako je $p$ nenegativna trokutna površina, onda prema Teoremu 4.13 postoji jedinstvena poligonska površina $q$ koja proširuje $p$, a iz dokaza terorema je jasno da je $q$ nenegativna poligonska površina.

**Propozicija 4.17.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka je $q$ nenegativna poligonska površina na $(M, \Psi, f)$. Neka su $\Pi_1$ i $\Pi_2$ poligoni t.d. je $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$. Tada je*

$$q(\Pi_1) \leq q(\Pi_2).$$

*Dokaz.* Prema Teoremu 4.14 znamo da postoji poligon $\Sigma$ takav da je

$$\Pi_2 = \Pi_1 \cup \Sigma \text{ i } \overset{\circ}{\Pi_1} \cap \overset{\circ}{\Sigma} = \emptyset.$$

Imamo

$$q(\Pi_2) = q(\Pi_1 \cup \Sigma) = q(\Pi_1) + q(\Sigma) \geq q(\Pi_1)$$

jer je $q(\Sigma) \geq 0$.
Dakle, $q(\Pi_1) \leq q(\Pi_2)$. □

**Propozicija 4.18.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka je $q$ nenegativna poligonska površina na $(M, \Psi, f)$. Neka su $\Pi_1$ i $\Pi_2$ poligoni. Tada je*

$$q(\Pi_1 \cup \Pi_2) \leq q(\Pi_1) + q(\Pi_2).$$

*Dokaz.* Prema Lemi 4.15 postoji poligon $\Sigma$ t.d. je

$$\Pi_1 \cup \Pi_2 = \Pi_1 \cup \Sigma \;\text{ i }\; \overset{\circ}{\Pi_1} \cap \overset{\circ}{\Sigma} = \emptyset \;\text{ i }\; \Sigma \subseteq \Pi_2.$$

Imamo:

$$q(\Pi_1 \cup \Pi_2) = q(\Pi_1 \cup \Sigma) = q(\Pi_1) + q(\Sigma) \leq q(\Pi_1) + q(\Pi_2).$$

□

# Poglavlje 5

# Jordanova mjera

**Definicija 5.1.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $a \in \mathbb{R}$. Za $a$ kažemo da je gornja međa skupa $S$ ako je $a \geq x$ za svaki $x \in S$.*

**Uočimo:** ako je $a$ gornja međa skupa $S$, te $a' \in \mathbb{R}$ broj takav da je $a' \geq a$, onda je i $a'$ gornja međa od $S$.

**Definicija 5.2.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $x_0 \in S$. Za $x_0$ kažemo da je maksimum skupa $S$ ili najveći element skupa $S$ ako je $x_0$ gornja međa od $S$, tj. ako je $x_0 \geq x$ za svaki $x \in S$.*

**Uočimo:** maksimum skupa ako postoji je jedinstven.

**Definicija 5.3.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je $S$ odozgo omeđen skup ako ima barem jednu gornju među.*

**Definicija 5.4.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $a \in \mathbb{R}$. Za $a$ kažemo da je supremum skupa $S$ ako je $a$ najmanja gornja međa skupa $S$, tj. ako vrijedi slijedeće:*

*(1) $a$ je gornja međa od $S$*

*(2) ako je $a'$ gornja međa od $S$, onda je $a \leq a'$.*

**Uočimo:** ako je $a$ maksimum skupa $S$, onda je $a$ supremum od $S$. Nadalje, supremum skupa ako postoji je jedinstven.

**Primjer 5.5.** *Broj 0 je supremum skupa $\langle -\infty, 0\rangle$.*

Naime, očito je 0 gornja međa ovog skupa. Pretpostavimo da je $a$ gornja međa skupa $\langle -\infty, 0\rangle$. Želimo dokazati da je $0 \leq a$.
Pretpostavimo suprotno. Tada je $a < 0$, a iz toga slijedi da postoji $x \in \mathbb{R}$ t.d. je $a < x < 0$. Iz $x < 0$ slijedi $x \in \langle -\infty, 0\rangle$, a budući da je $a$ gornja međa ovog skupa imamo $x \leq a$.

No, ovo je u kontradikciji s $a < x$. Dakle, $0 \leq a$, pa je 0 supremum ovog skupa.
Iz ovoga odmah zaključujemo da $\langle -\infty, 0\rangle$ nema maksimum. Naime, maksimum ovog skupa bi bio i supremum tog skupa, pa bi morao biti jednak 0, a 0 nije element $\langle -\infty, 0\rangle$.

Analogno dolazimo do općenitog zaključka: ako je $a$ supremum od $S$ i $a \notin S$ onda $S$ nema maksimum.

**AKSIOM POTPUNOSTI:** Neka su $S$ i $T$ neprazni podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da za svaki $x \in S$ i svaki $y \in T$ vrijedi $x \leq y$. Tada postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je

$$x \leq z \leq y$$

za sve $x \in S$ i $y \in T$.

**Propozicija 5.6.** *Svaki neprazan odozgo omeđen podskup od $\mathbb{R}$ ima supremum.*

*Dokaz.* Neka je $S$ neprazan odozgo omeđen podskup od $\mathbb{R}$. Neka je $T$ skup svih gornjih međa od $S$. Imamo $T \neq \emptyset$ jer je $S$ odozgo omeđen.
Nadalje, očito je da za svaki $x \in S$ i svaki $y \in T$ vrijedi $x \leq y$.
Prema aksiomu potpunosti postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je $x \leq z \leq y$ za svaki $x \in S$ i svaki $y \in T$.
Uočimo da je $z$ gornja međa od $S$ jer je $x \leq z$ za svaki $x \in S$.
S druge strane, ako je $y$ gornja međa od $S$ tada je $y \in T$ i vrijedi $z \leq y$.

Dakle, $z$ je supremum skupa $S$. □

**Definicija 5.7.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $a \in \mathbb{R}$. Za $a$ kažemo da je donja međa skupa $S$ ako je $a \leq x$ za svaki $x \in S$.*

**Definicija 5.8.** *Za podskup $S$ od $\mathbb{R}$ kažemo da je odozdo omeđen ako ima barem jednu donju među.*

**Definicija 5.9.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, te $x_0 \in S$. Za $x_0$ kažemo da je minimum skupa $S$ ili najmanji element skupa $S$ ako je $x_0$ donja međa skupa $S$.*

**Definicija 5.10.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, te $a \in \mathbb{R}$. Za $a$ kažemo da je infimum skupa $S$ ako je $a$ najveća donja međa od $S$, tj. ako vrijedi sljedeće:*

*(1) $a$ je donja međa od $S$*

*(2) ako je $a'$ donja međa od $S$ onda je $a' \leq a$.*

**Uočimo:**

(1) Ako je $a$ minimum skupa $S$, onda je $a$ infimum od $S$.

(2) Infimum skupa ako postoji je jedinstven.

**Primjer 5.11.** *Broj 0 je infimum skupa* $\langle 0, +\infty\rangle$.

Analogno kao i u Primjeru 5.5 zaključujemo da ovaj skup nema minimum.

**Propozicija 5.12.** *Svaki neprezan odozdo omeđen podskup od* $\mathbb{R}$ *ima infimum.*

*Dokaz.* Ovo dokazujemo analogno kao i Propoziciju 5.6. □

**Propozicija 5.13.** *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$ *te* $a \in \mathbb{R}$. *Tada je a supremum skupa S ako i samo ako je a gornja međa od S i* $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in S$ *t.d. je* $a - \varepsilon < x$.

*Dokaz.* Pretpostavimo da je $a$ supremum od $S$. Tada je očito $a$ gornja međa od $S$. Neka je $\varepsilon > 0$. Želimo dokazati da postoji $x \in S$ t.d. je $a - \varepsilon < x$.

Pretpostavimo suprotno. Tada $\forall x \in S$ vrijedi $a - \varepsilon \geq x$. Ovo znači da je $a - \varepsilon$ gornja međa skupa $S$. No, budući da je $a$ supremum skupa $S$ vrijedi $a \leq a - \varepsilon$. Slijedi da je $\varepsilon \leq 0$, što je kontradikcija.

Pretpostavimo sada da je $a$ gornja međa od $S$ te da $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in S$ t.d. je $a - \varepsilon < x$. Tvrdimo da je $a$ supremum od $S$. Neka je $a'$ gornja međa od $S$. Želimo dokazati da je $a \leq a'$.

Pretpostavimo suprotno. Tada je $a > a'$. Neka je $\varepsilon = a - a'$. Tada je $\varepsilon > 0$ i $a' = a - \varepsilon$. Prema pretpostavci postoji $x \in S$ t.d. je $a' < x$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $a'$ gornja međa od $S$.

Dakle, $a \leq a'$ pa zaključujemo da je $a$ supremum od $S$. □

**Propozicija 5.14.** *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$ *te* $a \in \mathbb{R}$. *Tada je a infimum skupa S ako i samo ako je a donja međa od S i* $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in S$ *t.d. je* $x < a + \varepsilon$.

*Dokaz.* Ovo se dokazuje analogno kao Propozicija 5.13. □

**Definicija 5.15.** *Neka je* $(M, \Psi, f)$ *ravnina te neka je* $S \subseteq M$. *Za skup S kažemo da je omeđen u* $(M, \Psi, f)$ *ako postoji poligon* $\Pi$ *t.d.* $S \subseteq \Pi$.

**Definicija 5.16.** *Neka je* $(M, \Psi, f)$ *ravnina te neka je q nenegativna poligonska površina na* $(M, \Psi, f)$. *Neka je S omeđen skup. Definiramo unutrašnju mjeru (površinu) od S s obzirom na q kao broj* $q_*(S)$ *definiran na sljedeći način:*

*(1) Ako ne postoji poligon* $\Pi$ *t.d. je* $\Pi \subseteq S$ *neka je*

$$q_*(S) = 0.$$

*(2) Ako postoji poligon* $\Pi$ *t.d. je* $\Pi \subseteq S$, *neka je*

$$q_*(S) = \sup \{\, q(\Pi) \mid \Pi \text{ poligon},\ \Pi \subseteq S \}. \tag{5.1}$$

**Uočimo:** Definicija (5.1) ima smisla. Naime, skup $\{ q(\Pi) \mid \Pi \text{ poligon}, \ \Pi \subseteq S\}$ ima supremum jer je neprezan odozgo omeđen. Da je taj skup odozgo omeđen vidimo na sljedeći način: znamo da postoji poligon $\Pi_0$ t.d. je $S \subseteq \Pi_0$ (jer je $S$ omeđen). Tada za svaki poligon $\Pi$ t.d. je $\Pi \subseteq S$ vrijedi $\Pi \subseteq \Pi_0$, pa je $q(\Pi) \leq q(\Pi_0)$ (Propozicija 4.17). Dakle, $q(\Pi_0)$ je gornja međa promatranog skupa.

**Definicija 5.17.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka je $q$ nenegativna poligonska površina na $(M, \Psi, f)$. Neka je $S$ omeđen skup. Definiramo vanjsku mjeru (površinu) od $S$ s obzirom na $q$ kao broj $q^*(S)$ definiran na sljedeći način:*

$$q^*(S) = \inf \{ q(\Pi) \mid \Pi \, poligon, \ S \subseteq \Pi\}.$$

**Definicija 5.18.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka je $q$ nenegativna poligonska površina na $(M, \Psi, f)$. Neka je $S$ omeđen skup. Za $S$ kažemo da je izmjeriv (u Jordanovom smislu) s obzirom na $q$ ako je:*

$$q_*(S) = q^*(S).$$

*U tom slučaju broj $q_*(S)$ označavamo $q_J(S)$ i nazivamo Jordanova mjera od $S$ s obzirom na $q$.*

**Propozicija 5.19.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina, neka je $q$ nenegativna poligonska površina na $(M, \Psi, f)$ te $S$ omeđen skup. Tada je*

$$q_*(S) \leq q^*(S).$$

*Dokaz.* Tvrdnja je jasna ako ne postoji poligon $\Pi$ t.d. je $\Pi \subseteq S$.
Pretpostavimo sada da postoji poligon $\Pi$ takav da je $\Pi \subseteq S$. Neka je

$$A = \{ q(\Pi) \mid \Pi \text{ poligon}, \ \Pi \subseteq S\}.$$

Znamo da je $q_*(S) = \sup A$. Neka je

$$B = \{ q(\Pi) \mid \Pi \text{ poligon}, \ S \subseteq \Pi\}.$$

Neka je $\Pi_1$ poligon t.d. je $S \subseteq \Pi_1$. Za svaki poligon $\Pi$ t.d. je $\Pi \subseteq S$ slijedi $\Pi \subseteq \Pi_1$, pa je $q(\Pi) \leq q(\Pi_1)$. Ovo znači da je $q(\Pi_1)$ gornja međa skupa $A$. Stoga je

$$\sup A \leq q(\Pi_1) \ \Rightarrow \ q_*(S) \leq q(\Pi_1),$$

što vrijedi za svaki poligon $\Pi_1$ t.d. je $S \subseteq \Pi_1$.
Ovo znači da je $q_*(S)$ donja međa skupa $B$, pa je $q_*(S) \leq \inf B$. No, $\inf B = q^*(S)$.
Dakle $q_*(S) \leq q^*(S)$. □

**Propozicija 5.20.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te neka je $q$ nenegativna poligonska površina na $(M, \Psi, f)$. Neka je $\Pi_0$ poligon. Tada je $\Pi_0$ izmjeriv u Jordanovom smislu s obzirom na $q$ i*

$$q_J(\Pi_0) = q(\Pi_0).$$

*Dokaz.* Očito je $\Pi_0$ omeđen skup u $(M, \Psi, f)$. Nadalje, ako je $\Pi$ poligon t.d. je $\Pi \subseteq \Pi_0$, onda je prema Propoziciji 4.17

$$q(\Pi) \leq q(\Pi_0).$$

Ovo znači da je $q(\Pi_0)$ gornja međa skupa $\{ q(\Pi) \,|\, \Pi \subseteq \Pi_0\}$. No, očito je $q(\Pi_0)$ element ovog skupa jer je $\Pi_0 \subseteq \Pi_0$, pa zaključujemo da je $q(\Pi_0)$ maksimum tog skupa, a ujedno i njegov supremum. Prema tome

$$q_*(\Pi_0) = q(\Pi_0).$$

Posve analogno zaključujemo da je

$$q^*(\Pi_0) = q(\Pi_0).$$

Iz ovoga slijedi tvrdnja propozicije. □

**Propozicija 5.21.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina, neka je $q$ nenegativna poligonska površina na $(M, \Psi, f)$ te $S$ omeđen skup.*

*(1) Pretpostavimo da ne postoji poligon koji je podskup od $S$. Tada je $S$ izmjeriv u Jordanovom smislu s obzirom na $q$ ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji poligon $\Pi$ takav da je*

$$S \subseteq \Pi \text{ i } q(\Pi) < \varepsilon.$$

*(2) Pretpostavimo da postoji poligon koji je podskup od $S$. Tada je $S$ izmjeriv u Jordanovom smislu s obzirom na $q$ ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoje poligoni $\Pi_1$ i $\Pi_2$ t.d. je*

$$\Pi_1 \subseteq S \subseteq \Pi_2 \text{ i } q(\Pi_2) - q(\Pi_1) < \varepsilon.$$

*Dokaz.* (1) Imamo da je $q_*(S) = 0$. Pretpostavimo da je $S$ izmjeriv u Jordanovom smislu. Tada je

$$q_*(S) = q^*(S) \Rightarrow q^*(S) = 0.$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Iz definicije od $q^*(S)$ i Propozicije 5.14 slijedi da postoji poligon $\Pi$ takav da je $S \subseteq \Pi$ i

$$q(\Pi) < q^*(S) + \varepsilon \Rightarrow q(\Pi) < \varepsilon.$$

Pretpostavimo sada da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji poligon $\Pi$ takav da je $S \subseteq \Pi$ i $q(\Pi) < \varepsilon$. Ovo znači da niti jedan pozitivan broj nije donja međa skupa $\{ q(\Pi) \,|\, S \subseteq \Pi\}$.

Budući da je 0 donja međa ovog skupa imamo da je 0 infimum ovog skupa. Prema tome

$$q^*(S) = 0 \Rightarrow q^*(S) = q_*(S)$$

tj. $S$ je izmjeriv u Jordanovom smislu s obzirom na $q$.

(2) Pretpostavimo da je $S$ izmjeriv u Jordanovom smislu. Tada je $q_*(S) = q^*(S)$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Kao i malo prije zaključujemo da postoji poligon $\Pi_2$ takav da je

$$S \subseteq \Pi_2 \text{ i } q(\Pi_2) < q^*(S) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

S druge strane, koristeći Propoziciju 5.13 zaključujemo da postoji poligon $\Pi_1$ t.d. je

$$\Pi_1 \subseteq S \text{ i } q_*(S) - \frac{\varepsilon}{2} < q(\Pi_1).$$

Imamo:

$$q_*(S) - \frac{\varepsilon}{2} < q(\Pi_1) \leq q(\Pi_2) < q^*(S) + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Rightarrow q(\Pi_2) - q(\Pi_1) < q^*(S) + \frac{\varepsilon}{2} - (q_*(S) - \frac{\varepsilon}{2})$$
$$\Rightarrow q(\Pi_2) - q(\Pi_1) < \varepsilon.$$

Obratno: Pretpostavimo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoje poligoni $\Pi_1$ i $\Pi_1$ t.d. je

$$\Pi_1 \subseteq S \subseteq \Pi_2 \text{ i } q(\Pi_2) - q(\Pi_1) < \varepsilon.$$

Pretpostavimo da $S$ nije izmjeriv u Jordanovom smislu. Tada je $q_*(S) \neq q^*(S)$, pa iz Propozicije 5.19 slijedi $q_*(S) < q^*(S)$. Neka su $\Pi_1$ i $\Pi_2$ poligoni takvi da je $\Pi_1 \subseteq S \subseteq \Pi_2$. Tada imamo

$$q(\Pi_1) \leq q_*(S) < q^*(S) \leq q(\Pi_2) \Rightarrow q^*(S) - q_*(S) \leq q(\Pi_2) - q(\Pi_1) \tag{5.2}$$

Neka je $\varepsilon = q^*(S) - q_*(S)$. Tada je $\varepsilon > 0$.

Prema pretpostavci postoje poligoni $\Pi_1$ i $\Pi_2$ t.d. je

$$\Pi_1 \subseteq S \subseteq \Pi_2 \text{ i } q(\Pi_2) - q(\Pi_1) < \varepsilon.$$

No, prema (5.2) vrijedi $\varepsilon \leq q(\Pi_2) - q(\Pi_1)$. Kontradikcija.

Zaključak: skup $S$ je izmjeriv u Jordanovom smislu.

□

**Teorem 5.22.** *Neka je $(M, \Psi, f)$ ravnina te $q$ nenegativna poligonska površina na $(M, \Psi, f)$. Neka su $S$ i $T$ skupovi u ovoj ravnini izmjerivi u Jordanovom smislu s obzirom na $q$. Tada je $S \cup T$ izmjeriv u Jordanovom smislu.*

*Dokaz.* 1. slučaj: Postoji poligon koji je podskup od $S$, te postoji poligon koji je podskup od $T$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Tada prema Propoziciji 5.21 postoje poligoni $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_1', \Pi_2'$ t.d. je

$$\Pi_1 \subseteq S \subseteq \Pi_2 \text{ i } \Pi_1' \subseteq T \subseteq \Pi_2', \; q(\Pi_2) - q(\Pi_1) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ i } q(\Pi_2') - q(\Pi_1') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Prema Teoremu 4.14 postoji $\Sigma \subseteq M$ t.d. je $\Pi_2 = \Pi_1 \cup \Sigma$ i pri tome je $\Sigma = \emptyset$ ili je $\Sigma$ poligon čiji je interior disjunktan s $\mathring{\Pi}_1$. Isto tako postoji $\Sigma' \subseteq M$ t.d. je $\Pi_2' = \Pi_1' \cup \Sigma'$ i pri tome je $\Sigma' = \emptyset$ ili je $\Sigma'$ poligon t.d. $\mathring{\Sigma}' \cap \mathring{\Pi}_1' = \emptyset$.

Uočimo da je tada

$$q(\Pi_2) = q(\Pi_1) + q(\Sigma) \text{ i } q(\Pi_2') = q(\Pi_1') + q(\Sigma'),$$

pri čemu uzimamo $q(\emptyset) = 0$. Stoga je

$$q(\Sigma) = q(\Pi_2) - q(\Pi_1) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ i } q(\Sigma') = q(\Pi_2') - q(\Pi_1') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vrijedi $\Pi_1 \cup \Pi_1' \subseteq S \cup T \subseteq \Pi_2 \cup \Pi_2'$. Tvrdimo da je

$$q(\Pi_2 \cup \Pi_2') - q(\Pi_1 \cup \Pi_1') < \varepsilon.$$

Ako je $\Pi_1 \cup \Pi_1' = \Pi_2 \cup \Pi_2'$, onda je tvrdnja jasna.

Pretpostavimo da je $\Pi_1 \cup \Pi_1' \neq \Pi_2 \cup \Pi_2'$.

Tada postoji poligon $\Sigma''$ t.d. $\Pi_2 \cup \Pi_2' = (\Pi_1 \cup \Pi_1') \cup \Sigma''$ pri čemu su interiori poligona $\Sigma''$ i $\Pi_1 \cup \Pi_1'$ disjunktni. Slijedi

$$q(\Pi_2 \cup \Pi_2') = q(\Pi_1 \cup \Pi_1') + q(\Sigma'') \;\Rightarrow\; q(\Sigma'') = q(\Pi_2 \cup \Pi_2') - q(\Pi_1 \cup \Pi_1').$$

Tvrdimo da je $\Sigma'' \subseteq \Sigma \cup \Sigma'$. Neka su $\tau_1, ..., \tau_n$ trokuti čija je unija jednaka $\Sigma''$. Neka je $i \in \{1, ..., k\}$. Dokažimo da je $\mathring{\tau}_i \subseteq \Sigma \cup \Sigma'$.

Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $T \in \mathring{\tau}_i$ t.d. $T \notin \Sigma \cup \Sigma'$. Imamo

$$T \in \mathring{\tau}_i \subseteq \tau_i \subseteq \Sigma'' \subseteq \Pi_2 \cup \Pi_2'.$$

Razlikujemo dva slučaja:

a) $T \in \Pi_2$

Znamo $\Pi_2 = \Pi_1 \cup \Sigma$, no $T \notin \Sigma$ jer $T \notin \Sigma \cup \Sigma'$. Stoga je $T \in \Pi_1$.

Neka su $\sigma_1, ..., \sigma_n$ trokuti koji u uniji daju $\Pi_1$. Tada postoji $j \in \{1, ..., n\}$ t.d. $T \in \sigma_j$. Stoga je $\mathring{\tau}_i \cap \sigma_j \neq \emptyset$ što povlači $\mathring{\tau}_i \cap \mathring{\sigma}_j \neq \emptyset$.

Neka je $P \in \mathring{\tau}_i \cap \mathring{\sigma}_j$. Tada iz $P \in \mathring{\tau}_i$ sljedi da je $P \in \mathring{\Sigma}''$.

S druge strane imamo

$$\sigma_j \subseteq \Pi_1 \subseteq \Pi_1 \cup \Pi_1'$$

pa slijedi da se $T$ nalazi u unutrašnjosti poligona $\Pi_1 \cup \Pi_1'$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da su interiori poligona $\Sigma''$ i $\Pi_1 \cup \Pi_1'$ disjunktni.

b) $T \in \Pi_2'$

Analogno kao i u prethodnom slučaju dobivamo kontradikciju.

Stoga je $\mathring{\tau}_i \subseteq \Sigma \cup \Sigma'$.

Prema Propoziciji 2.34 slijedi da je $\tau_i \subseteq \Sigma \cup \Sigma'$.

Zaključak: $\Sigma'' \subseteq \Sigma \cup \Sigma'$.

Iz ovoga i Propozicije 4.18 slijedi da

$$q(\Sigma'') \leq q(\Sigma \cup \Sigma') \leq q(\Sigma) + q(\Sigma') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dakle, $q(\Sigma'') < \varepsilon$ pa je $q(\Pi_2 \cup \Pi_2') - q(\Pi_1 \cup \Pi_1') < \varepsilon$.

Zaključak: za svaki $\varepsilon > 0$ postoje poligoni $\Pi_1''$ i $\Pi_2''$ t.d. je

$$\Pi_1'' \subseteq S \cup T \subseteq \Pi_2'' \text{ i } q(\Pi_2'') - q(\Pi_1'') < \varepsilon.$$

Iz Propozicije 5.21 slijedi da je skup $S \cup T$ izmjeriv u Jordanovom smislu s obzirom na $q$.

2. slučaj: Postoji poligon koji je podskup od $S$, ali ne postoji poligon koji je podskup od $T$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Tada prema Propoziciji 5.21 postoji poligon $\Pi$ t.d. je

$$T \subseteq \Pi \text{ i } q(\Pi) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nadalje, prema Propoziciji 5.21 postoje poligoni $\Pi_1$ i $\Pi_2$ t.d. je

$$\Pi_1 \subseteq S \subseteq \Pi_2 \text{ i } q(\Pi_2) - q(\Pi_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Imamo

$$\Pi_1 \subseteq S \cup T \subseteq \Pi_2 \cup \Pi \ \text{ i } \ q(\Pi_1) \leq q(\Pi_2 \cup \Pi) \leq q(\Pi_2) + q(\Pi).$$

Stoga je

$$\begin{aligned} q(\Pi_2 \cup \Pi) - q(\Pi_1) &\leq q(\Pi_2) + q(\Pi) - q(\Pi_1) \\ &= q(\Pi_2) - q(\Pi_1) + q(\Pi) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Dakle, $q(\Pi_2 \cup \Pi) - q(\Pi_1) < \varepsilon$.

Iz Propozicije 5.21 slijedi da je $S \cup T$ izmjeriv u Jordanovom smislu.

3. slučaj: Postoji poligon koji je podskup od $T$, ali ne postoji poligon koji je podskup od $S$.

   Analogno kao i u prethodnom slučaju dobivamo $S \cup T$ izmjeriv u Jordanovom smislu.

4. slučaj: Ne postoji poligon koji je podskup od $S$ i ne postoji poligon koji je podskup od $T$.

   Neka je $\varepsilon > 0$. Tada prema Propoziciji 5.21 postoje poligoni $\Pi$ i $\Pi'$ t.d. je

$$S \subseteq \Pi, \quad T \subseteq \Pi', \quad q(\Pi) < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ i } \ q(\Pi') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

   Tada je

$$S \cup T \subseteq \Pi \cup \Pi' \ \text{ i } \ q(\Pi \cup \Pi') \leq q(\Pi) + q(\Pi') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

   Iz ovoga zaključujemo sljedeće: niti jedan pozitivan broj nije donja međa skupa $\{q(\Pi'') \mid \Pi'' \text{ poligon i } S \cup T \subseteq \Pi''\}$. Očito je 0 donja međa ovog skupa pa je 0 infimum ovog skupa.

   Prema tome $q^*(S \cup T) = 0$.

   S druge strane, očito je $q_*(S \cup T) \geq 0$ (jer je $q$ nenegativna poligonska površina), pa imamo

$$0 \leq q_*(S \cup T) \leq q^*(S \cup T) = 0 \ \Rightarrow \ q^*(S \cup T) = 0.$$

   Dakle, $q_*(S \cup T) = q^*(S \cup T)$, pa je skup $S \cup T$ izmjeriv.

□

# Bibliografija


(1) B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

(2) C. O. Christenson, W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, Marcel Dekker, Inc.,New York, 1977.

(3) K. Turčinov, *Poligoni i površine, diplomski rad*, Zagreb, 2013.

# Sažetak

U ovom diplomskom radu izgrađivali smo Jordanovu mjeru i njezina svojstva. Na početku, u Poglavlju 1, aksiomatski smo zadali ravninu te definirali dužinu, konveksan skup, konveksnu ljusku i poluravnine. Dokazali smo njihova svojstva koja ćemo koristiti u daljnjim poglavljima. U Poglavlju 2 uveli smo pojam trokuta kao konveksne ljuske skupa koji sadrži tri nekolinearne točke, te pojam poligona kao uniju konačno mnogo trokuta. Definirali smo rub trokuta, unutrašnjost trokuta i promatrali što vrijedi za međusobne odnose dvaju trokuta, pravca i trokuta i njihovih unutrašnjosti. U Poglavlju 3 razradili smo pojmove kompleksa dužina, segmentacije skupa, triangulacije skupa te kompleksa i polukompleksa trokuta. Zatim smo u Poglavlju 4 uveli funkcije koje računaju površinu trokuta i poligona. U završnom dijelu, Poglavlju 5, definirali smo broj koji nazivamo Jordanova mjera skupa s obzirom na poligonsku površinu. U ovom smo poglavlju proučavali i svojstva Jordanove mjere.

# Summary

In this thesis we constructed the Jordan measure and its properties. At the beginning, in Chapter 1, we have axiomatically constructed a plane and defined the segment, convex set, convex hull and half-plane. We have proved their properties which we will be using in further chapters. In Chapter 2, we have introduced the concept of a triangle as the convex hull of a set which contains three non collinear points, and the concept of a polygon as a union of finite number of triangles. We have defined a border of the triangle, its interior, and observed what is valid for relations between line and triangle, two triangles and their interiors. In Chapter 3, we have developed concepts of complex of segments, segmentation of a set, triangulation of a set and a complex of triangles. Then in Chapter 4, we have introduced functions which calculate area of the triangle and polygon. In the final chapter, Chapter 5, we have defined a number which is called the Jordan measure of a set, considering the polygon area. In this final chapter, we have also studied the properties of the Jordan measure.

# Životopis

Rođena sam 27. 02. 1991. godine u Zaboku. 1997. godine krenula sam u Osnovnu školu Matije Gupca u Gornjoj Stubici. Nakon njenog završetka upisujem Gimnaziju Antuna Gustava Matoša u Zaboku. Maturirala sam 2009. godine, a na jesen sam upisala Prirodoslovno - matematički fakultet Matematički odsjek, nastavnički smjer. Preddiplomski studij završavam 2012. godine, te sam nastavila s istim smjerom na diplomskom studiju.