SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Tina Čulina

CJELOBROJNO PROGRAMIRANJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Marko Vrdoljak

Zagreb, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Svojoj majci

Sadržaj

Uvod

Prizvođač želi odrediti kako iskoristiti ograničene količine sirovina uz najveći profit, poslovođa kako rasporediti zadani posao između svojih zaposlenika tako da posao bude napravljen u najkraćem mogućem vremenskom roku, aviokompanije žele pokriti sve zahtjeve tržišta uz što manje troškove (što manji broj zrakoplova, što manje praznih letova, što manje čekanje između dva leta), kod investiranja bitno je uz određena ulaganja prema više opcija postići uz određeni profit minimalan rizik ... Cilj ovih problema je optimizacija, maksimiziranje korisnosti, minimiziranje troškova i minimiziranje rizika uz zadana ograničenja i svi ovi problemi se mogu svesti na zadaće linearnog programiranja. Područje primjene linearnog programiranja je široko: proizvodnja, transport i distribucija, marketing, telekomunikacije, financijsko ulaganje i planiranje, raspored zaposlenika...

Linearno programiranje (skraćeno LP) se bavi problemom optimizacije linearnog funkcionala uz linearne uvjete tipa jednakosti i nejednakosti. Cjelobrojno programiranje dodatno uvodi zahtjev cjelobrojnosti na neke (ili sve) varijable.

Standardni problem cjelobrojnog programiranja ima slijedeći oblik

$$
\begin{aligned}
z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \\
\text{Uz uvjete:} \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i; i = 1, ..., m \\
x_j \geq 0; j = 1, ..., n \\
x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Posljednji uvjet se zove cjelobrojno ograničenje. Gornji problem bez tog ograničenja zovemo relaksirani problem linearnog programiranja ili kraće relaksirani LP problem. Najčešći pristup rješavanju problema linearnog programiranja je ignoriranje cjelobrojnog ograničenja i zaokruživanje dobivenog optimalnog rješenja. Također nije jasno na koji način zaokruživanje treba sprovesti. Pogledajmo sljedeći primjer kao ilustraciju spomenutih teškoća.

Primjer 1. *Promotrimo sljedeći problem*

$$\begin{aligned} \textit{Maksimizirajte} \quad & z = 35x + 100y \\ \textit{uz uvjete} \quad & 25x + 100y \le 343.75 \\ & 1375x + 100y \le 4056.25 \\ & 100y \le 325 \\ & x, y \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

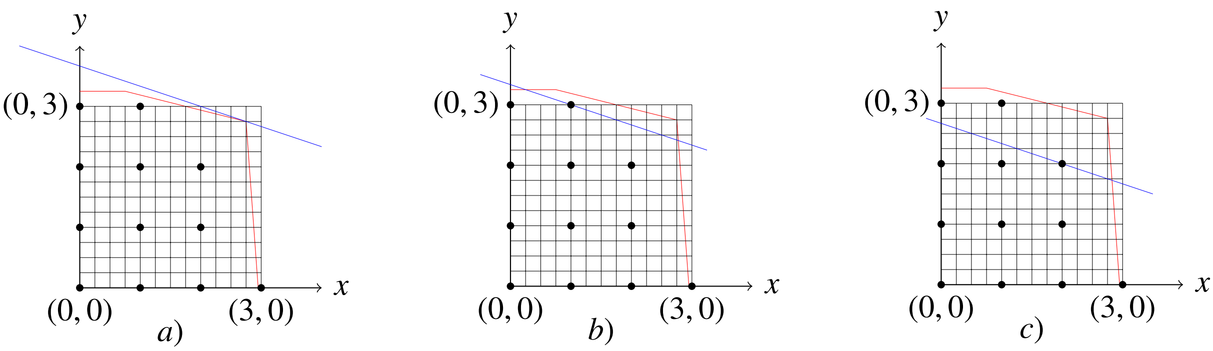
Optimalno rješenje gornjeg problema bez cjelobrojnog ograničenja nalazimo simpleks metodom.

	x	y	b
w_1	-25	-100	343.75
w_2	0	-100	325
w_3	-1375	-100	4056.25
z	35	100	0

	w_3	y	b
w_1	0.01818	-98.18182	270
w_2	0	-100	325
x	-7.3E-4	-0.07273	2.95
z	-0.02546	97.45454	103.25

	w_3	w_1	b
y	1.8E-4	-0.01019	2.75
w_2	-0.01852	1.01851	50
x	-7.5E-4	7.4E-4	2.75
z	-0.00741	-0.9926	371.25

Njegovo rješenje postiže se za $x^* = (2.75, 2.75)^T$*, a vrijednost funkcije cilja je* $z^* = 371.25$ *vidi sliku 0.1 pod a. Međutim, ako bi zahtjev bio pronaći maksimum iste funkcije cilja, ali uz uvjet da varijable smiju primiti samo nenegativne cjelobrojne vrijednosti* $x, y \in \mathbb{Z}_+$*, onda se dopustivo područje sastoji samo od 11 točaka, a maksimalna vrijednost funkcije cilja postiže se u točki* $x^* = (1, 3)^T$*, pri čemu je* $z_I^* = 335$*, što je prikazano na slici 0.1 pod b. Odmah bi nam moglo pasti na pamet ako želimo cjelobrojno rješenje da potražimo optimalnu točku, kao rješenje klasičnog LP problema i onda odaberemo najbližu* *dopustivu cjelobrojnu točku. U našem je primjeru najbliža točka s cjelobrojnim koordinatama* $x = (2, 2)$ *i vrijednost funkcije cilja* $z = 270$*, vidi sliku 0.1 pod c.*



Slika 0.1

Jedna od najpoznatijih metoda za riješavanje cjelobrojnog lineranog programiranja je metoda grananja i ograđivanja. Metoda se sastoji od uzastopnog rješavanja relaksiranog problema (od kojeg se ne zahtjeva da varijable imaju cjelobrojne vrijednosti), tako da se u svakom koraku dodaju nova ograničenja koja pojedine varijable prisiljavaju da poprime cjelobrojne vrijednosti.

Npr. u prvom koraku rješava se zadani problem cjelobrojnog programiranja, ali se ne zahtjeva da varijable imaju cjelobrojne vrijednosti. Dobiveno rješenje općenito nije rješenje problema cjelobrojnog programiranja. Zato se odabire jedna varijabla x_1 na koju imamo zahtjev cjelobrojnosti koja u rješenju poprima necjelobrojnu vrijednost (npr. 3.6). Zatim se stvaraju dva nova linearna programa dodajući orginalnom linearnom programu po jedno ograničenje:

- za prvi linearni program dodaje se ograničenje $x_1 \leq 3$
- za drugi linearni program dodaje se ograničenje $x_1 \geq 4$

Iz opisanog postupka se jasno vidi da za jedan problem cjelobrojnog programiranja trebamo rješiti niz problema linearnog programiranja što cjelobrojno programiranje čini višestruko složenijim.

Metoda grananja i ograđivanja jednako se primjenjuje na zadaće cjelobrojnog i mješovitog cjelobrojnog programiranja, dok je primjena metode odsijecajućih ravnina ograničena na zadaće cjelobrojnog programiranja.

Metoda odsijecajućih ravnina (engl. cutting plane method) rješava cjelobrojni linearni problem kao problem linearnog programiranja, pri čemu odsijeca necjelobrojna rješenja dodavanjem novog ograničenja (ravnine) ne dirajući pritom cjelobrojne dopustive točke.

U ovom radu ćemo se baviti rješavanjem problema cjelobrojnog programiranja metodom odsijecajućih ravnina. Upoznat ćemo se matematičkom teorijom koja stoji iza te metode.

Poglavlje 1

Poliedarski skup

Problem cjelobrojnog programiranja možemo formulirati kao

$$z = \min\{c^\tau x : Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}_+^n\} \tag{1.1}$$

ili kao mješovito cjelobrojno programiranje

$$z = \min\{c^\tau x + f^\tau y : Ax + By \leq b, x \in \mathbb{R}_+^n, y \in \mathbb{Z}_+^p\} \tag{1.2}$$

Skup $X = \{x \in \mathbb{Z}_+^n : Ax \leq b\}$ je skup dopustivih točaka zadaće 1.1.

1.1 Prikaz poliedarskog skupa

Definicija 1. *Za matricu ili vektor kažemo da su racionalni (cjelobrojni) ako su elementi matrice ili vektora racionalni (cijeli) brojevi.*

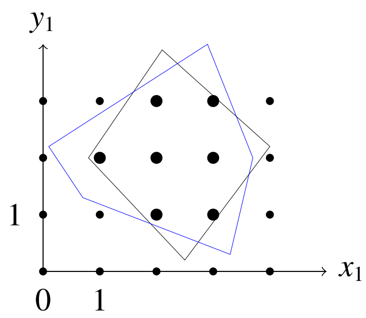
Definicija 2. *Skup svih točaka koji zadovoljava skup $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ nazivamo poliedarski skup.*

Kažemo da je poliedarski skup racionalan ako su A i b racionalni, preciznije ako postoje racionalni A i b takvi da je $P = \{x \in R^n : Ax \leq b\}$.

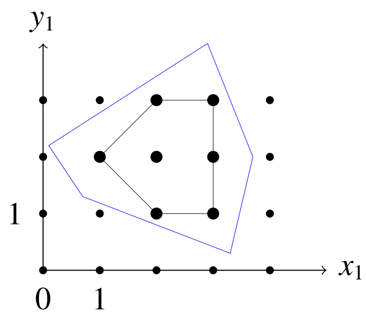
Definicija 3. *Kažemo da poliedarski skup P reprezentira skup točaka X s cjelobrojnim koordinatama ako je $X = P \bigcap Z^n$ tj. X je upravo skup cijelih točaka u skupu P.*
Ograničeni poliedarski skup zovemo politop.

Primjetimo da skup X može biti beskonačan. Na slici 1.1 je reprezentacija skupa X na dva načina. Označimo prvi prikaz skupa X sa P^1, a drugi sa P^2, P^1 je bolji nego P^2 ako je $P^1 \subset P^2$. To ima smisla jer za bilo koju ciljnu funkciju $c \in R^n$ vrijedi,

$$\min\{c^\tau x : x \in X\} \geq \min\{c^\tau x : x \in P^1\} \geq \min\{c^\tau x : x \in P^2\}. \tag{1.3}$$



Slika 1.1



Slika 1.2

Definicija 4. *Konveksna ljuska skupa X, pišemo conv*(X)*, je skup svih konveksnih kombinacija točaka iz X za koje vrijedi conv*$(X) = \{\sum_{i=1}^{T} \lambda_i x^i : T \in \mathbb{N}, \lambda_1, \ldots \lambda_T \geq 0, \sum \lambda_i = 1, x^1, \ldots, x^T \in X\}$.

Iz čega slijedi da je conv(X) najbolja(najmanja) moguća reprezentacija od X (vidi sliku 1.2) i

$$z = \min\{c^\tau x : x \in \text{conv}(X)\} \geq \min\{c^\tau x : x \in P\}, \tag{1.4}$$

za svaki prikaz P skupa X.

U ovoj točki P je poliedarski skup koji reprezentira X, $X = P \bigcap Z^n$.

Definicija 5. *Nejednakost $ax \geq \beta$ iz $Ax \geq b$ (gdje je a redak matrice) zove se implicitna jednakost ako je $ax = \beta$ za sve x koji zadovoljavaju $Ax \geq b$.*

Definicija 6. *Matrica punog ranga po retcima je u Hermitskoj normalnoj formi ako ima oblik $\begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix}$, gdje je B regularna, donjetrokutasta matrica sa nenegativnim elementima u kojoj svaki redak ima jedinstveni maksimalni element koji se nalazi na glavnoj dijagonali od B.*

Korolar 1. *Sustav $Ax = b$ ima rješenje ako i samo ako je $yb = 0$ za svaki vektor y za koji je $yA = 0$.*

Korolar 2. *Neka je A racionalna matrica i neka je b racionalni vektor stupac. Tada sustav $Ax = b$ ima cjelobrojno rješenje x ako i samo ako je yb cijeli broj za svaki racionalni vektor y za koji je yA cjelobrojan.*

Dokaz. Nužnost je trivijalna: ako su x i yA cjelobrojni vektori i $Ax = b$ tada je $yb = yAx$ cijeli broj.
Da bi bismo dokazali dovoljnost pretpostavimo da je yb cijeli broj za svaki racionalni y za koji je yA cjelobrojan.
Prvo dokažimo da sustav $Ax = b$ ima rješenje.
Neka je $yA = 0$ i y racionalni vektor. Tada je po pretpostavci yb neki cijeli broj npr. yb=k. Nužno je yb=0 jer bi za npr. $\bar{y} = \frac{1}{2k}y$ imali $\bar{y}b = \frac{1}{2}$ što je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom. Prema korolaru 1.1 time smo dokazali da sustav Ax=b ima rješenje.
U sustavu Ax=b označimo sa $A_0x = b_0$ onaj podsustav koji sadrži sve linearno nezavisne retke. Kako se rješenja sustava Ax=b i pripadnog podsustava $A_0x = b_0$ jednaka, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su retci A linearno nezavisni. Nadalje, kako se svaka matrica punog ranga po retcima može prevesti u Hermitsku normalnu formu nizom elementarnih transformacija po stupcima možemo pretpostaviti da je $\begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix}$ Hermitska normalna forma od A. Neka je y bilo koji redak od B^{-1}. Budući da je $B^{-1} \begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$ cjelobrojna matrica, iz polazne pretpostavke zaključujemo da je i $B^{-1}b$ cjelobrojni vektor. Kako je

$$\begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} = b, \text{vektor } x = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} \text{ je cjelobrojno rješenje od } Ax = b. \tag{1.5}$$

□

Drugim riječima zanima nas da li je nova nejednakost suvišna za opis poliedarskog skupa P. Prirodni kandidati su nejednakosti koje su nužne da bi dobili poliedarski skup P. Da bismo mogli razlikovati nejednakosti uvest ćemo još neke pojmove.

Definicija 7. *Skup točaka $x^0, x^1, ..., x^k$ afinog prostora je afino nezavisan ako je jedinstveno riješnje od*

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^i = 0, \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0 \tag{1.6}$$

jednako $\alpha_i = 0$ za $i = 0, ..., k$ ili ekvivalentno ako su vektori $x^1 - x^0, \ldots, x^k - x^0$ linearno nezavisni.

Definicija 8. *Skup $P \subseteq R^n$ je dimenzije k ako je maksimalan broj afino nezavisnih točaka u P k+1. Pišemo* $\dim P = k$.

Definicija 9. *Cjelobrojna ljuska poliedra P je konveksna ljuska cjelobrojnih vektora iz P, oznaka P_1.*

Definicija 10. *Za skup $C \subset R^n$ reći ćemo da je konus ako*

$$x \in C \Rightarrow tx \in C, \forall t \geq 0.$$

Drugim riječima, ako konus sadrži točku x tada sadrži i čitavu zraku s početkom u ishodištu smjerom x.

Definicija 11. *Recesivni konus poliedarskog skupa $P = \{x \in R^n : Ax \leq b\}$ definira se kao konus*

$$C = \{x \in R^n : Ax \leq 0\}.$$

Konus C je racionalani poliedarski konus ako je A racionalna matrica.

Napomena 1. *P je poliedarski skup ako i samo ako je $P = Q + C$, gdje je Q politop, a C recesivni konus od P, pišemo C=Rec(P). (vidi teorem 1.4)*

Teorem 1. *Ako je P racionalni poliedarski skup, tada je P_1 također poliedarski skup. Ako je P_1 neprazan, tada je Rec(P_1)=Rec(P).*

Dokaz. Koristit ćemo $[\lfloor x \rfloor = \max\{m \in Z : m \leq x\}]$.

Neka je $P = Q + C$ gdje je Q politop, a C recesivni konus do P. Neka je C konačno generiran konus generiran cjelobrojnim vektorima $y_1, y_2, \ldots, y_s$ tj. neka je $C = \{y : y = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i y_i; s \geq 0; \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, s\}$, a B politop definiran s $B = \{\sum_{i=1}^{s} \mu_i y_i : 0 \leq \mu_i \leq 1, i = 1, 2, \ldots, s\}$. Pokazati ćemo da je $P_1 = (Q + B)_1 + C$. Prvo provjerimo da je $P_1 \subseteq (Q + B)_1 + C$. Neka je $p \in P$ i p cjelobrojan. Kako je $P = Q + C$, tada postoje $q \in Q$ i $c \in C$ takvi da je $p = q + c$. Prema definiciji skupa C znamo da je

$c = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i y_i, \lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, s$. Definiramo $c' = \sum_{i=1}^{s} \lfloor \lambda_i \rfloor y_i, \lambda_i \geq 0$. Očigledno je $c' \in C$. Neka je $b = c - c'$, tada je $b \in B$ pa c možemo prikazati kao $c = b + c'$, $b \in B$, $c' \in C$ pa je $p = q + b + c'$. Kako su p i c' cjelobrojni i $q + b = p - c'$ je također cjelobrojan vektor iz $Q + B$. Dakle, $q + b \in (Q + B)_1$ što zajedno s $c' \in C$ znači da je $p \in (Q + B)_1 + C$.

Trebamo još pokazati da je $(Q+B)_1+C \subseteq P_1$. Kako je $B \subseteq C$ onda je i $Q+B \subseteq Q+C = P$ pa je i $(Q + B)_1 \subseteq P_1$. Nadalje imamo: $(Q + B)_1 + C \subseteq P_1 + C = P_1 + C_1 \subseteq (P + C)_1 = P_1$. Time smo dokazali da je $P_1 = (Q + B)_1 + C$. Kako je $(Q + B)_1$ politop, slijedi da je C recesivni konus od P_1. □

Direktna posljedica teorema 1.1 je da se svaki problem cjelobrojnog programiranja može napisati kao $\max\{cx : x \in P_1\}$, a kako je po gore dokazanom P_1 poliedarski skup, problem cjelobrojnog linearnog programiranja nije ništa drugo neko problem linearnog programiranja.

Da bi se primijenile tehnike linearnog programiranja moramo prikazati P_1 preko linearnih nejednakosti. Kasnije u radu ćemo vidjeti metodu odsijecajućih ravnina za nalaženje nejednakosti koje definiraju P_1.

Lema 1. *Neka je C racionalni poliedarski konus. Tada je $C = C_1$.*

Teorem 2. *Za svaku racionalnu matricu A postoji cjelobrojna matrica M takva da za svaki vektor stupac b postoji vektor stupac d takav da je*

$$\{x : Ax \leq b\}_1 = \{x : Mx \leq d\}.$$

Štoviše, ako je A cjelobrojna i svaka njena minora je najviše $\triangle$ po apsolutnoj vrijednosti, možemo uzeti sve elemente od M najviše $n^{2n}\triangle^n$ po apsolutnoj vrijednosti, gdje je n broj stupaca od A.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je A cjelobrojna. Neka je $\triangle$ maksimalna apsolutna vrijednost poddeterminanti od A. Neka je M matrica sa svim cjelobrojnim vektorima iz skupa
$L = \{w : \exists y \geq 0 : yA = w; w \text{ cjelobrojan}; \|w\|_\infty \leq n^{2n}\triangle^n\}$ kao retcima.

Tvrdimo da je to tražena matrica. Neka je b vektor stupac. Očito se retci od A pojavljuju u L, npr. za $y = (1, 0, 0, \ldots, 0)$ imamo $yA = (a_{11}, \ldots, a_{1n})$ prvi redak od A i on je cjelobrojan jer je A cjelobrojna matrica, također je $\|a_1\|_\infty \leq \triangle \leq n^{2n}\triangle^n$. Neka je b vektor stupac. Postoje tri slučaja.

PRVI SLUČAJ : Ako $Ax \leq b$ nema rješenja, tada je jasno da možemo naći vektor d takav da $Mx \leq d$ nema rješenja (jer se retci od A pojavljuju u L).

DRUGI SLUČAJ : Ako $Ax \leq b$ ima rješenje, ali ono nije cjelobrojno, tada konus $\{x : Ax \leq 0\}$ nije pune dimenzije pa $Ax \leq 0$ ima implicitnu jednakost, npr. $a_i x \leq 0$. Zbog toga su a_i i $-a_i$ iz L pa možemo odabrati d takav da je $\{x : Mx \leq d\} = \emptyset$.

TREĆI SLUČAJ : Pretpostavimo da $Ax \leq b$ ima cjelobrojno rješenje. Neka je $\delta_c = \max\{cx : Ax \leq b; x \text{ cjelobrojan}\}$, za svaki redak vektor c. Dovoljno je dokazati $\{x : Ax \leq b\}_1 = \{x : wx \leq \delta_w$ za svaki $w \in L\}$. Prvo dokazujemo da je $\{x : Ax \leq b\}_1 \subseteq \{x : wx \leq \delta_w$, za svaki $w \in L\}$. Neka je $x \in \{x : Ax \leq b\}_1$. tada za svake $w \in L$ i $y \geq 0$ vrijedi $w = yA$ dakle $wx = yAx \leq yb$. Prema tome je

$$wx \leq \min\{yb : y \geq 0, yA = w\} = \max\{wx : Ax \leq b\}. \tag{1.7}$$

Kako je $x \in \{x : Ax \leq b\}_1$, on je cjelobrojan što uz definiciju od δ_w i relaciju 1.7 daje $wx \leq \delta_w$, b za svaki $w \in L$. Još trebamo dokazati da je $\{x : Ax \leq b\}_1 \supseteq \{x : wx \leq \delta_w$, za svaki $w \in L\}$. Neka je x_0 takav da je $wx \leq \delta_w$, za svaki $w \in L$. Specijalno, neka je $w = a_k$, gdje je a_k k-ti redak matrice A. Tada imamo: $a_k x_0 \leq \delta_{a_k} = \max\{a_k x : Ax \leq b, x \text{ cjelobrojni}\}$, što povlači da je $\delta_{a_k} \leq b_k$, gdje je b_k k-ta komponenta vektora b. Time smo pokazali da je $Ax_0 \leq b$. Još treba vidjeti da je x_0 konveksna kombinacija cjelobrojnih vektora iz $\{x : Ax \leq b\}$.

Za vektor c, označimo sa z rješenje problema $\max\{cx : Ax \leq b; x \text{ cjelobrojan}\}$, tada je $\delta_c = cz$. Promatrajmo $\hat{C}(c, z) = cone\{x - z : Ax \leq b\}$. Očito je $x_0 - z \in \hat{C}(c, z)$. Međutim, prema lemi 1.1 vrijedi $\hat{C}(c, z) = \hat{C}_1(c, z)$ tj. $cone\{x - z : Ax \leq b\} = cone\{x - z : Ax \leq b; x \text{ cjelobrojan}\}$ jer je z cjelobrojan. Ako umjesto z promatramo svaki vrh v poliedarskog skupa $K = \{x : Ax \leq b\}$ tada smo dokazali teorem jer je $K = \cap_{v \in V} \hat{C}(c, v)$, gdje je V skup svih vrhova od K. □

Definicija 12. *Nejednakost $\pi x \geq \pi_0$ gdje je $(\pi, \pi_0) \in R^n \times R^1$ je valjana za $P \subseteq R^n$ ukoliko svaka točka iz P zadovoljava nejednakost, to jest, ako $\pi x \geq \pi_0$ vrijedi za sve $x \in P$.*

Definicija 13. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ i $y_0 \in S$. Za hiperravninu H kažemo da je potporna hiperravnina na skup S u točki $y_0 \in S$ ako je $y_0 \in H$ i ako S leži s jedne strane hiperravnine H, tj. ako je $S \subseteq H^-$ ili $S \subseteq H^+$. Pri tome i za odgovarajući zatvoreni poluprostor koji sadrži skup S također kažemo da je potporni poluprostor.*

Definicija 14. *Podskup $F \subseteq P$ zove se strana od P (engl. face) ako je $F = P$ ili ako je F presjek od P s potpornom hiperravninom od P. Ekvivalentno, F je strana od P ako je F neprazan skup i $F = \{x \in P : A'x = b'\}$ za neki podsistem $A'x \leq b'$ od $Ax \leq b$.*

Napomena 2. *Vrijedi:*

- *P ima samo konačan broj strana*
- *svaka strana je neprazan poliedarski skup*
- *ako je F strana od P i $F' \subseteq F$, onda je F' strana od P ako i samo ako je F' strana od F.*

Definicija 15. *Hiperstrana (engl. facet) od P je maksimalna strana u P kojoj je dimenzija* $\dim P - 1$.

Definicija 16. *Minimalna strana od P je strana koja ne sadrži niti jednu drugu stranu.*

Na slici 1.2 je $P = \text{conv}(X)$. Imamo $n = 2, k = 0$ i $\dim(P) = \dim(X) = 2$. Ne postoji jednadža $\pi_1 x_1 + \pi_2 x_2 = \pi_0$ koju zadovoljavaju sve točke iz X. Skup conv(X) je opisan sa 5 hiperstrana, svaka je dimenzije $n - k - 1 = 1$. Hiperstrana $F = \text{conv}(X) \bigcap \{x : x_2 = 1\}$ je generirana s valjanom nejednadžbom $x_2 \geq 1$ i sadrži afino nezavisne točke $(2, 1)$ i $(3, 1)$.

Teorem 3. *Neka je* $P = \{x \in R^n_+ : Ax \leq b\}$ *sa* $\dim(P) = n - k$*, poliedarski skup P je potpuno opisan za k hiperravnina i s jednom od nejednakosti hiperstrane za svaku hiperstranu od P.*

Ako imamo kompletan linearan opis od $P = \text{conv}(X)$ tada svaki problem linearnog cjelobrojnog programiranja $\max\{c^T x : x \in P\}$ se može riješiti kao linearan program $\max\{c^T x : x \in \text{conv}(X)\}$. Naša hipoteza je da je bolja nova formulacija našeg cjelobrojnog programiranja i da će algoritam za rješavanje problema biti mnogo efikasniji

1.2 Ekstremne točke poliedarskog skupa

Osim opisa poliedarskog skupa pomoću valjanih nejednakosti, poliedarski skup možemo opisati pomoću točaka i zraka.

Definicija 17. *Vektor* $x \in P$ *je ekstremna točka poliedarskog skupa P ako ne postoje dvije točke* $x^1, x^2 \in P, x^1 \neq x^2$ *takve da vrijedi* $x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$.

Drugim riječima, ekstremna točka poliedarskog skupa P je točka u P koja se ne može napisati kao linearna kombinacija drugih dviju različitih točaka iz P. Ukoliko postoji, ekstremna točka je minimalna strana za P (dimenzije 0).

Definicija 18. *Vektor* $r \neq 0$ *je recesivni smjer u* $P \neq \emptyset$ *ako za svaki* $x \in P$ *vrijedi* $x + \lambda r \in P$ *za sve* $\lambda \geq 0$.
Recesivni smjer r poliedarskog skupa P je ekstremna zraka ako ne postoje dva recesivna smjera r^1, r^2 *iz P,* $r^1 \neq \lambda r^2$ *za neki* $\lambda > 0$ *da vrijedi* $r = \frac{1}{2}r^1 + \frac{1}{2}r^2$.

Skup svih recesivnih smjerova poliedarskog skupa P zovemo recesivni konus.

Teorem 4. *Svaki poliedarski skup $P = \{x \in R^n : Ax \leq b\} \neq \emptyset$ pri čemu je $r(A) = n$ možemo prikazati kao konveksnu kombinaciju ekstremnih točaka $\{x^t\}_{t=1}^T$ i konusnu kombinaciju ekstremnih zraka $\{r^s\}_{s=1}^S$:*

$$P = \{x : x = \sum_{t=1}^{T} \lambda_t x^t + \sum_{s=1}^{S} \mu_s r^s, \sum_{t=1}^{T} \lambda_t = 1, \lambda \in R_+^T, \mu \in R_+^S\} \tag{1.8}$$

Uvjet na rang nam osigurava da P ima barem jednu ekstremnu točku i da nema recesivnog smjera r u P za koju je -r takoder recesivni smjer u P.

Primjer 1. *Neka je P poliedarski skup, vidi 1.3:*

$$\begin{aligned} s + y &\geq 2.7 \\ 2s + y &\geq 2 \\ 3s + y &\geq 3 \\ s \quad &\geq 0 \\ s + 0.7y &\geq 2.1. \end{aligned}$$

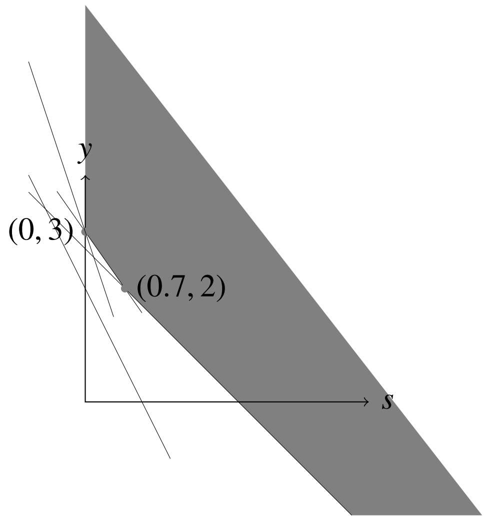
Točke (6,0), (7,0), (0,5) u P su nezavisne, $\dim(P) = 2$. *Izbacivanjem dviju nejednadžbi* $2s + y \geq 2$ *i* $3s + y \geq 3$ *koje nisu nužne za opisivanje poliedra P, dobivamo minimalan broj uvjeta za opis poliedra P:*

$$\begin{aligned} s + y &\geq 2.7 \\ s &\geq 0 \\ s + 0.7y &\geq 2.1. \end{aligned}$$

Ovaj zapis poliedarskog skupa P lako vodi do reprezentacije iz teorema 1.4, vidimo da P sadrži dvije ekstremne točke (0.7,2) i (0,3) i dvije ekstremne zrake (1,-1) i (0,1). Tako dobivamo alternativan opis:

$$P = \{(s, y) \in R^2 : \begin{pmatrix} s \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 0.7 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mu_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mu_2, \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda \in R_+^2, \mu \in R_+^2\}$$

.



Slika 1.3

1.3 Cjelobrojni poliedarski skup

Definicija 19. *Poliedarski skup P je cjelobrojan ako za svaki* $c \in Q^n, x \in P$ $c^\tau x \to \max$ *ima cjelobrojno rješenje.*

Definicija 20. *Sustav racionalnih nejednadžbi* $Ax \leq b$ *je TDI (totalno dualno cjelobrojan) ukoliko za sve cjelobrojne vektore c takve da je* $\max\{c^\tau x | Ax \leq b\}$ *konačan, dualni problem* $\min\{y^\tau b | y^\tau A = c, y \geq 0\}$ *ima cjelobrojno optimalno rješenje.*

Teorem 5. *Racionalan poliedarski skup P je cjelobrojan ako i samo ako svaka racionalna potporna hiperravnina od P sadrži cjelobrojne vektore.*

Dokaz. Kako je presjek potporne hiperravnine sa P strana od P, nužan uvjet je trivijalno zadovoljen.

Da bismo dokazali dovoljnost, pretpostavimo da svaka potporna hiperravnina od P sadrži cjelobrojni vektor. Neka je $P = \{x : Ax \leq b\}$ za neku matricu A i vektor b. Kako je P racionalan možemo pretpostaviti da su A i b cjelobrojni. Neka je $F = \{x \in P : A'x = b'\}$ minimalna strana od P, gdje je $A'x \leq b'$ podsistem od $Ax \leq b$. Ako F ne sadrži niti jedan cjelobrojan vektor, onda postoji vektor y takav da je $c = y^\tau A'$ cjelobrojan i $\sigma = y^\tau b'$ nije cjelobrojan. Možemo pretpostaviti da su sve komponente od y pozitivne (možemo dodati cijele brojeve komponentama od y). Sada je $H = \{x | c^\tau x = \sigma\}$ potporna hiperravnina od P i $F = P \cap H$, što se može lako provijeriti. Kako σ nije cjelobrojan dok je c cjelobrojan, H ne sadrži cjelobrojan vektor, što daje kontradikciju. $\square$

Sljedeće je ekvivalentno prethodnom teoremu.

Korolar 3. *Neka je $Ax \leq b$ sistem linearnih nejednadžbi. Maksimum* $\max\{c^\tau x|Ax \leq b\}$ *se postiže u cjelobrojnom vektoru x za vektor c koji je cjelobrojan ako i samo ako je* $\max\{c^\tau x|Ax \leq b\}$ *cjelobrojan .*

Dokaz. Ako je c cjelobrojan i $\max\{c^\tau x|Ax \leq b\}$ ima cjelobrojno optimalno rješenje x, tada je maksimum cjelobrojan. Što daje nužnost.
Dokažimo dovoljnost. Prepostavimo da za svaki cjelobrojan vektor c $\max\{c^\tau x|Ax \leq b\}$ cjelobrojan ako je konačan. Neka je $H = \{x|cx = \sigma\}$ racionalna potporna hiperravnina poliedra $P = \{x|Ax \leq b\}$. Možemo pretpostaviti da su komponente od c relativno prosti brojevi. Kako je $\sigma = \max\{c^\tau x|Ax \leq b\}$ cjelobrojan, jednadžba $c^\tau x = \sigma$ ima cjelobrojno rješenje x. Pa slijedi da H sadrži cjelobrojan vektor.
Znači svaka potporna hiperravnina od P sadrži cjelobrojne vektore i stoga iz teorema 1.1 slijedi da je P cjelobrojan. □

Teorem 6. *Neka je $Ax \leq b;a^\tau x \leq \beta$ TDI- sistem. Onda je sistem $Ax \leq b;a^\tau x = \beta$ također TDI.*

Dokaz. Neka je c cjelobrojan vektor i neka je

$$\max\{cx|Ax \leq b; ax = \beta\} = \min\{yb + (\lambda - \mu)\beta|y \geq 0; \lambda,\mu \geq 0; yA + (\lambda - \mu)a = c\} \quad (1.9)$$

konačan. Neka se $x^*, y^*, \lambda^*, \mu^*$ postiže u optimalnoj vrijednosti (postoji mogućnost da su razlomci). Neka je $c' = c + Na$ gdje je N cjelobrojan koji zadovoljava $N \geq N^*$ i Na je cjelobrojan. Tada je optimum

$$\max\{c'x|Ax \leq b; ax \leq \beta\} = \min\{yb + \lambda\beta|y \geq 0; \lambda \geq 0; yA + \lambda a = c'\} \quad (1.10)$$

konačan, kako je $x = x^*$ riješenje za maksimum, i $y = y^*$, $\lambda = \lambda^* + N - \mu^*$ je minimum.
Kako su $Ax \leq b$;$ax \leq \beta$ TDI, minimum 1.10 ima cjeobrojno optimalno rješenje, $\tilde{y}, \tilde{\lambda}$. Onda je $y = \tilde{y}$,$\lambda = \tilde{\lambda}, \mu = N$ cjelobrojno optimalno rješenje za minimum 1.10 : optimalno rješenje se postiže u 1.9 i to je optimalno kao:

$$\tilde{y}b + (\tilde{\lambda} - N)\beta = \tilde{y}b + \tilde{\lambda}\beta - N\beta \leq y^*b + (\lambda^* + N - \mu^*)\beta - N\beta = y^*b + (\lambda^* - \mu^*)\beta. \quad (1.11)$$

(Ovdje $\leq$ slijedi iz činjenice da je $y^*, \lambda^* + N - \mu^*$ rješenje koje se postiže za minimum 1.10 i $\tilde{y}, \tilde{\lambda}$ je optimalno rješenje za ovaj minimum.) Znači zadaća minimuma iz 1.9 ima cjelobrojno optimalno rješenje. □

Poglavlje 2

Odsijecajuće ravnine i cjelobrojna ljuska

U principu bi se mogle dodati sve jednadžbe hiperstrane (facet-defining) za opis poliedra. No kako postoji beskonačno valjanih nejednakosti pa čak i broj facet-defining može biti jako velik, tako da nije poželjno dodati sve nejednakosti za opis poliedra.

Druga mogućnost je dodati valjane nejednadžbe ili odsijecajuće ravnine (cutting planes) koje odrezuju točku x^* koja nije cijela i dio je trenutne formulacije. Takve točke su tipično dobivene kao optimalno rješenje linearnog prgramiranja, dobivene su optimiziranjem trenutne formulacije P od X : vidi sliku 1.2.

Problem pronalaženja valjane nejednadžbe za X odrezivanjem x^* je jako važno.

Metodu odsijecajućih ravnina je razvio Gomory 1950. godine da bi riješio problem linearnog programiranja pomoću simpleks metode. Gomory pretpostavlja da su u definiciji poliedarskog skupa A i b racionalni ili cijeli.

Označimo s P_1 cjelobrojnu ljusku od P, konveksnu ljusku skupa cjelobrojnih točaka u P. Neka je $H = \{x|c^\tau x \leq \sigma\}$ potporni poluprostor gdje je c nenul vektor čije su komponente relativno prosti cijeli brojevi, neka je $H_1 = \{x|c^\tau x \leq \lfloor\sigma\rfloor\}$. Geometrijski, H_1 dobivamo iz H paralelnim pomakom, tako definirana sadrži sve točke iz P_1. Također, hiperravnine koje određuju H_1 sadrži točke iz Z^n.
Za svaki poliedarski skup P vrijedi:

$$P' = \bigcap_{H^- \supseteq P} H_1^- \tag{2.1}$$

gdje presjek ide po svim poluprostorima H za koje vrijedi $H \supseteq P$ i čiji je vektor normale iz Z^n.

Napomena 1. *Ukoliko je $Ax \leq b$ TDI i b cjelobrojan, tada je $P = \{x|Ax \leq b\}$ cjelobrojni poliedarski skup (tj. sve ekstremne točke u poliedru su cjelobrojne)*

Lema 1. *Ako je H racionalni afini poluprostor tj.* $H = \{x|cx \leq \delta\}$ *gdje je* $c \neq 0$ *i komponente su relativno prosti cijeli brojevi (svaki racionalni poluprostor se može tako prikazati), tada je* $H_1 = \{x|cx \leq \lfloor\delta\rfloor\}$.

Dokaz. Definiramo $H_0 = \{x|cx \leq \lfloor\delta\rfloor\}$. Prvo dokažimo da je $H_1 \subseteq H_0$. Neka je $x \in H_1$. Prema definiciji cjelobrojne ljuske imamo $x = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i x_i, t \geq 1, \sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1, x_i \in H, x_i$ cjelobrojni, $\lambda_i \geq 0, i = 1, ..., t$. Kako je $x_i \in H$, vrijedi da je $cx_i \leq \delta$. Štoviše , budući su c i x_i cjelobrojni vektori, vrijedi $cx_i \leq \lfloor\delta\rfloor$. Prema tome je

$$cx = c\sum_{i=1}^{t} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i c x_i \leq \lfloor\delta\rfloor \sum_{i=1}^{t} \lambda_i = \lfloor\delta\rfloor, \text{ tj. } x \in \{x|cx \leq \lfloor\delta\rfloor\}, H_1 \subseteq H_0.$$

Ostaje za pokazati $H_1 \supseteq H_0$.

PRVI KORAK:Neka je k cijeli broj takav da je $k = \lfloor\delta\rfloor$, tj. $H_0 = \{x|cx \leq k\}$. Tvrdimo da postoji bar jedna točka $\hat{x} \in \mathbb{Z}^n$ takva da je $\hat{x} \in \partial H_0(\partial H_0$ označava rub od $H_0)$ tj. da vrijedi $c_1\hat{x}_1 + c_2\hat{x}_2 + ... + c_n\hat{x}_n = k$. Bez smanjenja općenitosti dokazujemo za k=1 matematičkom indukcijom po n.

Provjerimo bazu indukcije za n=2. Neka je $c_1\hat{x}_1 + c_2\hat{x}_2 = 1$. Možemo pretpostaviti da je $c_1 < c_2$. Tada postoje t_1 i r_1 takvi da je $c_2 = c_1 t_1 + r_1, 0 < r_1 < c_1$. Ako je $r_1 = 1$ za rješenje možemo uzeti $x_1 = -t_1, x_2 = 1$ pa smo gotovi.

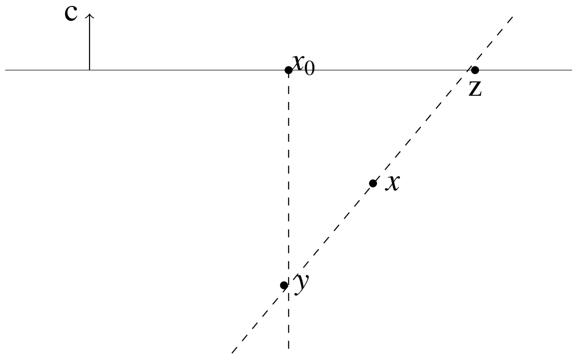
Ako je $r_1 > 1$, onda postoji t_2 i r_2 takvi da je $c_1 = r_1 t_2 + r_2, 0 < r_2 < r_1$ i postupak se ponavlja. Nakon konačno koraka, npr. m koraka, doći ćemo do ostatka $r_m = 1$ i za rješenje možemo uzeti $x_1 = -t_m, x_2 = 1$. Time je provjerena baza indukcije.

KORAK INDUKCIJE: Neka tvrdnja vrijedi za svaki k, $2 \leq k \leq n$. Pokazujemo da vrijedi za n+1.
Neka je $c_1\hat{x}_1 + c_2\hat{x}_2 + ... + c_n\hat{x}_n + c_{n+1}\hat{x_{n+1}} = 1(*)$.
Neka je $d = NZD(c_1, c_2, ..., c_n)$. (NZD je najveći zajednički djelitelj)
Definiramo $c_i' = \frac{c_i}{d}, i = 1, 2, ..., n$ i $z = c_1' x_1 + ... + c_n' x_n$. Tada su $c_1', ...c_n'$ relativno prosti, a (*) prelazi u $dz + c_{n+1}\hat{x_{n+1}} = 1.(**)$
Kako su d i c_{n+1} relativno prosti, po pretpostavci postoje z i x_{n+1} cjelobrojni takvi da vrijedi (**).Z je cijeli broj pa i za njega postoje cijeli brojevi takvi da je $c_1' x_1 + ... + c_n' x_n = z$. Time je pokazan korak indukcije.

Pokazujemo da postoji cijela rešetka x-ova. Promatramo $c_1 x_1 + ... + c_n x_n = 0$. Za rješenja te jednadžbe možemo uzeti vektore oblika $(c_2, -c_1, 0, ..., 0), (c_3, -0, -c_1, 0..., 0), ...$ To su linearno nezavisni cjelobrojni vektori i s tim rješenjima generiramo rešetku koja je očito na rubu.

DRUGI KORAK:Neka je $x \in \text{Int}H_0$. Tada postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $y = x_0 - jc$ i y cjelobrojan, cy=c$x_0 - jc^2 < cx_0$ pa je $y \in \text{Int}H_0$. Spojimo y sa x i nađemo $z \in \partial H_0$.

Kako je x konveksna kombinacija od y i z, a z je konveksna kombinacija nekih cjelobrojnih vektora, slijedi da je x konveksna kombinacija nekih cjelobrojnih vektora.



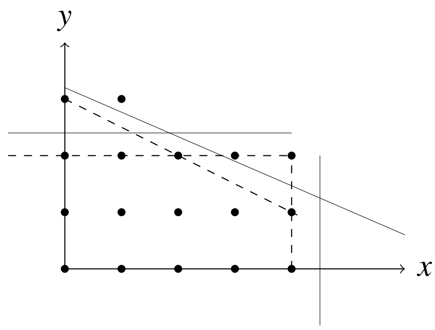
$\square$

Primjer 1. *Neka je skup ograničenja* $P = \cap_{i=1}^{3} H_i^- \cap \{x | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ *gdje su*

$$H_1 : x_1 = 4.5;$$
$$H_2 : x_2 = 2.4;$$
$$H_3 : 16x_1 + 37x_2 = 118.4$$

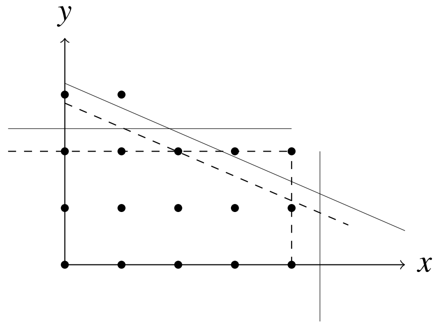
Sa slike 2.1 jasno je da je $P_1 = \cap_{i=6}^{8} H_i^- \cap \{x | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ *gdje su*

$$H_6 : x_1 = 4;$$
$$H_7 : x_2 = 2;$$
$$H_8 : x_1 + 2x_2 = 6.$$



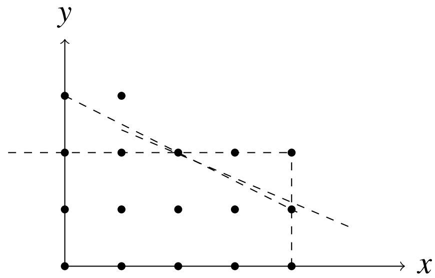
Slika 2.1

Prema definiciji je $P' = \cap_{H \supseteq P} H_1$*, za naš primjer* P' *je pokazan na slici 3.4. Da bismo pokazali da je* $P' \neq P_1$*, vidjeti ćemo da se hiperravnina* H_8 *koja određuje* P_1 *ne može dobiti u definiciji od* P'*.*



Slika 2.2

Iz geometrijskih razloga, jedine hiperravnine $H \supseteq P$ *koje bi mogle dati* H_8 *su one koje su paralelne s njom i prolaze točkom* $T = \left(\frac{9}{2}, \frac{5}{4}\right)$. *Ta hiperravnina, označimo ju sa H, imala bi jednadžbu* $x_1 + 2x_2 = 7$ *pa bi ona sadržavala cjelobrojnu točku, npr.* $(3, 2)$. *Kako se, geometrijski gledano* H_1 *dobiva pomicanjem hiperravnine H dok u nju ne padne prva cjelobrojna točka, znači da je u ovom slučaju* $H = H_1$. *Dakle, ne postoji hiperravnina koja bi dala* H_8. *Prema tome* $P' \neq P_1$.
Daljnim odsjecanjem dobivamo $P'' = P_1$, *vidi 3.5.*



Slika 2.3

Gornja razmatranja su teorijska pozadina Gomoryjeve metode sjekućih ravnina za rješavanje ILP-a.

Teorem 1. *Neka je* $P = \{x | Ax \leq b\}$ *poliedarski skup i neka je* $Ax \leq b$ *TDI i A cjelobrojna. Tada je i* $P^{'} = \{x | Ax \leq \lfloor b \rfloor\}$ *poliedarski skup. Posebno, za neki racionalni poliedarski skup P vrijedi da je* P' *poliedarski skup. Posebno, za neki racionalni poliedarski skup P vrijedi da je* P' *poliedarski skup.*

Dokaz. Dokaz je trivijalan za $P = \emptyset$, pretpostavimo da je $P \neq \emptyset$. Prvo uočimo $P^{'} \subseteq \{x | Ax \leq \lfloor b \rfloor\}$, nejednakosti $Ax \leq b$ su među nejednakostima koje definiraju P'. Dokažimo obrnuto, neka je $H = \{x|c^{\tau}x \leq \delta\}$ racionalan afin poluprostor takav da je $H \supseteq P$. Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da su komponente od c relativno prosti cijeli brojevi. Kao ranije označimo $H_1 = \{x|c^{\tau}x \leq \lfloor\delta\rfloor\}$. Imamo

$$\delta \geq \max\{c^{\tau}x|Ax \leq b\} = \min\{y^{\tau}b|y \geq 0; yA = c\}. \tag{2.2}$$

Kako je $Ax \leq b$ TDI, znamo da se minimum u 2.2 može postići za vektor cijelih brojeva, recimo y_0 . Sada $Ax \leq \lfloor b\rfloor$ povlači

$$c^{\tau}x = y_0Ax \leq y_0\lfloor b\rfloor \leq \lfloor y_0b\rfloor \leq \lfloor\delta\rfloor. \tag{2.3}$$

Dakle, $\{x|Ax \leq \lfloor b\rfloor\} \subseteq H_1$. Kako ovo vrijedi za svaki racionalan afin poluprostor $H \supseteq P$, pokazali smo da vrijedi $\{x|Ax \leq \lfloor b\rfloor\} \subseteq P^{'}$ □

Lema 2. *Neka je F strana racionalnog poliedra. Tada je* $F^{'} = P^{'} \cap F$.

Dokaz. Neka je $P = \{x|Ax \leq b\}$, A cjelobrojna i $Ax \leq b$ TDI. Neka je $F = \{x|Ax \leq b; ax = \beta\}$ strana od P, gdje su $ax \leq \beta$ valjane nejedankosti za P,a cjelobrojan vektor i β cijeli broj. Kako je $Ax \leq b$; $ax \leq \beta$ TDI slijedi po teoremu 2.6 da je $Ax \leq b; ax = \beta$ je TDI. Imamo, kako je β cijeli broj

$$P^{'} \cap F = \{x|Ax \leq \lfloor b\rfloor; ax = \beta\} = \{x|Ax \leq \lfloor b\rfloor, ax \leq \lfloor\beta\rfloor; ax \geq \lceil\beta\rceil\} = F^{'}.$$

□

Znači ako je $F^{'}$ neprazan skup, tada je $F^{'}$ strana od $P^{'}$. Lema povlači da za svaku stranu F od P i za svaki t vrijedi:

$$F^{(t)} = P^{(t)} \cap F \tag{2.4}$$

Definicija 1. *Neka je U regularna matrica. Tada je U unimodularna ako je U cjelobrojna i ima determinantu* ± 1.

Teorem 2. *Za svaki poliedarski skup P postoji broj t takav da vrijedi* $P^{(t)} = P_1$.

Dokaz. Neka je $P \subseteq \mathbb{R}^n$ racionalan poliedarski skup. Dokazat ćemo teorem indukcijom po dimenziji d od P, za slučaj kada je d=-1 (tj. $P = \emptyset$) i d=0(tj. P je jednočlan skup) je trivijalno.

Ako afina ljuska P ne sadrži cjelobrojan vektor tada postoji cjelobrojan vektor c i necjelobrojan vektor δ takav da je afina ljuska $P \subseteq \{x|cx = \delta\}$. Stoga

$$P^{'} \subseteq \{x|cx \leq \lfloor\delta\rfloor; cx \geq \lceil\delta\rceil\} = \emptyset \tag{2.5}$$

što povlači $P^{'} = P_1$. Ako afina ljuska P sadrži cjelobrojni vektor, možemo pretpostaviti da vrijedi $P = \{0^{n-d}\}xR^d$. Doista, možemo pretpostaviti da pripada afinoj ljusci P. Stoga postoji racionalna matrica C punog ranga po recima tako da je afina ljuska Aff$P = \{x|Cx = 0\}$. Dakle, postoji unimodularna matrica U koja prenosi C u Hermitsku normalnu formu:$CU = [B\ 0]$, gdje je B regularna matrica.Kako je teorem invarijantan na operator $x \to U^{-1}$, možemo pretpostaviti da je $C = [B\ 0]$. Stoga je afina ljuska $P = \{0^{n-d}\}x\mathbb{R}^n$. Kako za svaki afin poluprostor H od R^d imamo $(\mathbb{R}^{n-d}xH_1) \cap (\{0\}^{n-d}x\mathbb{R}^d) = \{0^{n-d}\}xH_1$, možemo pretpostaviti da je n-d=0.
Znamo i da postoji cjelobrojna matrica A i racionalni vektori stupci b, $b^{'}$ takvi da je $P = \{x|Ax \leq b\}, P_1 = \{x|Ax \leq b^{'}\}$. Neka je $ax \leq \beta^{'}$ nejednakost iz $Ax \leq b^{'}$ i neka je $H = \{x|ax \leq \beta^{'}\}$ .Pokazali smo da je $P^{(s)} \subseteq H$ za neki s. Ako ovo vrijedi za svaku nejednakost iz $Ax \leq b^{'}$, to će dokazati teorem.

Neka je $ax \leq \beta$ odgovarajuća nejednakost od $Ax \leq b$.Pretpostavimo da je $P^{(s)} \nsubseteq H$ za svaki s. Kako $P^{'} \subseteq \{x|ax \leq \lfloor\beta\rfloor\}$, postoji cijeli broj $\beta^{''}$ i cijeli broj r takav da :

$$\begin{aligned} \beta^{'} < \beta^{''} \leq \lfloor\beta\rfloor, P^{(s)} \subseteq \{x|ax \leq \beta^{''}\} \text{ za svaki } s \geq r, \\ P^{(s)} \nsubseteq \{x|ax \leq \beta^{''} - 1\} \text{ za svaki } s \geq r. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Neka je $F = P^{(s)} \cap \{x|ax = \beta^{''}\}$. Onda $\dim(F) < \dim(P)$. Štoviše, F ne sadrži cjelobrojne vektore. Stoga, za našu hipotezu indukcije, $F^{(u)} = \emptyset$ za neki u.

Dakle, iz (1.9)

$$\emptyset = F^{(s)} = P^{(r+u)} \cap F = P^{(r+u)} \cap \{x|ax = \beta^{''}\}. \tag{2.7}$$

Pa imamo $P^{(r+u)} \subseteq \{x|ax < \beta^{''}$ i stoga $P^{(r+u+1)} \subseteq \{x|ax \leq \beta^{''} - 1\}$, šta je kontradikcija sa (3.6) . □

Direktna posljedica ovog teorema je:ako svaki racionalna potporna hiperravnina racionalnog poliedra P sarži cjelobrojne vektore tada je $P = P^{'}$ i stoga je $P = P_1$. Teorem podrazumijeva rezultate za ne nužno racionalne politope:

Korolar 1. *Za svaki politop P postoji broj t takav da vrijedi $P^{(t)} = P_1$.*

Dokaz. Kad je P omeđen, postoji racionalan politop $Q \supseteq P$ takav da je $Q_1 = P_1$ (kao $P \subseteq \{x|||x||_\infty \leq M\}$ za neki cijeli M i što se tiče svakog integralnog vektora z on je iz $\{x|||x||_\infty \leq M\}$, postoji i afin poluprostor koji sadrži P ali ne sadrži z onda možemo uzeti Q kao presjek skupa $\{x|||x||_\infty \leq M\}$ sa svim tim poluprostorima). Stoga iz teorema 3.4 slijedi $Q^{(t)} = Q_1$ za neki t. Dakle, $P_1 \subseteq P^{(t)} \subseteq Q^{(t)} = Q_1 = P_1$. □

Napomena 2. *Jednostavne posljedice definicije 2.1 su:*

$$\begin{aligned}
&\textit{ako je } P = \{x|Ax \le b\}, \ \textit{ona je } P' = \{x|uAx \le \lfloor ub \rfloor \textit{ za svaki } u \ge 0 \textit{ kad je } uA \textit{ cjelobrojan } \}: \\
&\textit{ako je } P = \{x|x \ge 0 : Ax \le b\}, \ \textit{tada je } P' = \{x|x \ge 0 : \lfloor uA \rfloor x \le \lfloor ub \rfloor \textit{ za svaki } u \ge 0\}: \\
&\textit{ako je } P = \{x|x \ge 0 : Ax = b\}, \ \textit{tada je } P' = \{x|x \ge 0 : \lfloor uA \rfloor x \le \lfloor ub \rfloor \textit{ za svaki } u\}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

2.1 Izvod nove nejednakosti odsijecanjem

Neka je $Ax \le b$ sistem linearnih nejednakosti i neka je $cx \le \delta$ nejednakost. Kažemo da je slijed linearnih nejednakosti $c_1x \le \delta_1, c_2x \le \delta_2, ..., c_mx \le \delta_m$ dokaz odsijecanjem za $cx \le \delta$(iz $Ax \le b$) ako je svaki od vektora $c_1, ..., c_m$ cjelobrojan, ako je $c_m = c$, $\delta_m = \delta$ i ako je za svaki $i = 1, ..., m$:

$$\begin{aligned}
&c_ix \le \delta_i^{'} \text{ je konusna kombinacija nejednakosti} \\
&Ax \le b, c_1x \le \delta_1, ..., c_{i-1}x \le \delta_{i-1} \text{za neki } \delta_i^{'} \text{ sa } \lfloor \delta_i^{'} \rfloor \le \delta_i.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Broj m ćemo zvati duljina dokaza odsjecajućim ravninama.
Očito, ako $cx \le \delta$ dobijemo odsijecanjem ravnine od $Ax \le b$, onda je $cx \le \delta$ valjana za svako cjelobrojno riješenje od $Ax \le b$. Ovo tvrdnju možemo promatrati i na drugi način ako pretpostavimo da $Ax \le b$ ima barem jedno cjelobrojno riješenje. To je posljedica teorema 3.4.

Korolar 2. *Neka je $P = \{x|Ax \le b\}$ neprazan poliedarski skup koji je racionalan ili ograničen.*

i) Ako je $P_1 \neq \emptyset$ i $cx \le \delta$ vrijedi za P_1 (c je cijeli broj), onda postoji dokaz odsijecanjem za $cx \le \delta$ od $Ax \le b$.

ii) Ako je $P_1 = \emptyset$ tada postoji dokaz odsijecanjem za $0x \le -1$ od $Ax \le b$.

Dokaz. Neka je t takav da vrijedi $P^{(t)} = P_1$ (t postoji , prema teoremu 3.4 i korolaru 3.1). Za svaki $i = 1, ..., t$ za $P^{(i)}$ postoji sistem $A_ix \le b_i$ koji definira P^i tako da je $A_0 = A, b_0 = b$ i tako da je za svaku nejednakost $ax \le \beta$ u $A_ix \le b_i$,a cijeli broj i postoji vektor $y \ge 0$ takav da je $yA_{i-1} = a, \lfloor yb_{i-1} \rfloor = \beta$. Stoga, ako je $P_1 \neq \emptyset$ i $cx \le \delta$ je valjana nejednakost za P_1 (c je cjelobrojan) onda je $yA_t = c$. $\delta \ge \lfloor yb_t \rfloor$ vrijedi za neki $y \ge 0$. Stoga

$$A_1x \le b_1, A_2x \le b_2, ..., A_tx \le b_t, cx \le \delta \tag{2.10}$$

daje dokaz odsjecanjem za $cx \le \delta$ od $Ax \le b$. Ako je $P_1 = \emptyset$, onda je $yA_t = 0, yb_t = -1$ za neki $y \ge 0$ .Stoga

$$A_1x \le b_1, A_2x \le b_2, ...A_tx \le b_t, 0x \le -1 \tag{2.11}$$

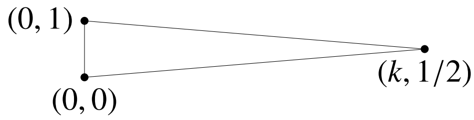
je prikaz dokaza odsijecanja za $0x \le -1$ od $Ax \le b$. □

2.2 Izvod cjelobrojne ljuske odsijecanjem

Teoremi 3.1 i 3.2 nam daju proceduru za nalaženje P_1 (pretpostavljamo da je P_1 pune dimenzije). Počinjemo sa P, nalazimo minimalan TDI-sistem $Ax \leq b$, takav da je A cjelobrojna matrica, koji definira P. Neka je $P' = \{x|Ax \leq \lfloor b \rfloor\}$. Zatim nalazimo minimalan TDI-sistem $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$, takav da je $\tilde{A}$ cjelobrojna matrica, koji definira P'. Neka je $P'' = \{x|\tilde{A}x \leq \lfloor \tilde{b} \rfloor\}$. I tako dalje. Na kraju dobivamo polidarski skup, recimo, $P^{(t)}$, za koji minimalan TDI-sistem (sa cjelobrojnom lijevom stranom) ima i cjelobrojnu desnu stranu .Onda uzimanje najvećeg cijelog neće promijeniti sistem, stoga je $P^{(t)} = P_1$.
Najmanji t za koji $P^{(t)} = P_1$ daje određenu mjeru složenosti odgovarajućeg ILP-problema. Ne postoji gornja granica za t naspram dimenzije poliedra.
Za primjer, neka je:

$$P = \text{conv}(\{(0,0),(0,1),(k,\frac{1}{2})\}) \tag{2.12}$$

u dvodimenzionalnom Euklidskom prostoru (slika 2.4). Tada je $P_1 = conv(\{(0,0),(0,1)\})$. Sada P' sadrži vektor $(k-1,\frac{1}{2})$. Induktivno slijedi $(k-t,\frac{1}{2})$ je u $P^{(t)}$ za t<k i stoga je $P^{(t)} \neq P_1$ za t<k. Ovo također pokazuje da t nije polinomijalno ograničen s veličinom sistema koji definira poliedarski skup. Znači broj odsjecajućih ravnina i duljina nalaženja odsjecajućih ravnina može biti velik.



Slika 2.4

S druge strane,ako je $P_1 = \emptyset$, postoji ograničenje na broj odsjecajućih ravnina terminima dimenzije.

Teorem 3. *Za svaki prirodan broj d postoji broj t(d) takav da ako je P racionalan poliedarski skup dimenzije d koji ne sadrži cjelobrojne vektore, onda je* $P^{(t(d))} = \emptyset$.

Dokaz. Provest ćemo dokaz indukcijom po d, slučaj kada je d=-1 i d=0 je trivijalno. Kao u toremu 3.2 možemo pretpostaviti da je P pune dimenzije.
Znamo da ako je P racionalan poliedarski skup u $\mathbb{R}^d$ i ako ne sadrži cjelobrojne vektore, tada postoji vektor c takav da vrijedi:

$$\max\{cx|x \in P\} - \min\{cx|x \in P\} \leq l(d) \tag{2.13}$$

gdje konstanta $l(d) \in N$ ovisi samo o d, tako da su komponente od c relativno prosti cijeli brojevi. Neka je $\delta = \lfloor \max\{cx | x \in P\} \rfloor$. Sada za svaki $k = 0, 1, \ldots, l(d) + 1$ imamo:

$$P^{(k+1+kt(d-1))} \subseteq \{x | cx \leq \delta - k\}. \tag{2.14}$$

Za k=0 to slijedi iz definicije P'.Pretpostavimo da znamo 2.14 za neki k. Onda slijedi iz pretpostavke indukcije :

$$P^{k+1+(k+1)t(d-1)} \subseteq \{x | cx \leq \delta - k\}. \tag{2.15}$$

Doista, razmotrimo stranu

$$F = P^{(k+1+kt(d-1))} \cap \{x | cx = \delta - k\}. \tag{2.16}$$

Iz pretpostavke indukcije, da je $\dim(F) < d$, $F^{t(d-1)} = \emptyset$(možemo pretpostaviti bez smanjenja općenitosti t(d-1)≥ t(d') za svaki d'≤ d-1).Stoga, slijedi

$$(P^{k+1+kt(d-1)})^{t(d-1)} \cap \{x | cx = \delta - k\} = F^{(t(d-1))} = \emptyset. \tag{2.17}$$

Dakle, imamo iz 2.15

$$(P^{(k+1)+(k+1)t(d-1)})' \subseteq \{x | cx \leq \delta - k - 1\}, \tag{2.18}$$

što je 2.14 za slučaj k+1.
Uzmimo da je k=l(d)+1 u 2.14, tada imamo

$$P^{(l(d)+2+(l(d)+1)t(d-1))} \subseteq \{x | cx \leq \delta - l(d) - 1\}. \tag{2.19}$$

Kako je

$$P \subseteq \{x | cx > \delta - l(d) - 1\} \tag{2.20}$$

slijedi za t(d)=l(d)+2+(l(d)+1)t(d-1) $P^{(t(d))} = \emptyset$. □

Teorem 4. *Za svaku racionalnu matricu A postoji broj t takav da za svaki vektor b vrijedi:* $\{x | Ax \leq b\}^{(t)} = \{x | Ax \leq b\}_1$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti, A je cjelobrojna matrica. Neka A ima n stupaca i neka je $\triangle$ gornje ograničenje apsolutne vrijednosti od subdeterminante od A.Pokazati ćemo da možemo koristiti u teoremu:

$$t = \max\{t(n)n^{2n+2}\triangle^{n+1} + 1 + n^{2n+2}\triangle^{n+1}t(n-1)\} \tag{2.21}$$

(gdje je t(n) isti kao u teoremu 3.3).
Neka je b vektor stupac i neka je $P = \{x|Ax \leq b\}$. Ako je $P_1 = \emptyset$, onda je $P^{(t)} = P_1$, slijedi iz teorema 3.3. Pa pretpostavimo $P_1 \neq \emptyset$. Znamo da je $P_1 = \{x|Mx \leq d\}$, gdje je M cjelobrojna matrica kojoj su svi elementi većinom apsolutne vrijednosti od $n^{2n}\triangle^n$. Neka je $mx \leq \delta$ nejednakost iz $Mx \leq d$. Bez smanjenja općenitosti, $\delta = \max\{mx|x \in P_1\}$. Neka je $\delta' = \lfloor \max\{mx|x \in P\} \rfloor$. Pa imamo $\delta' - \delta \leq ||m||_1 n\triangle \leq n^{2n+2}\triangle^{n+1}$. Sada za svaki $k = 0, 1, ..., \delta' - \delta$ imamo,

$$P^{(k+1+kt(n-1))} \subseteq \{x|mx \leq \delta' - k\} \tag{2.22}$$

što se može dokazati kao u teoremu 3.3. Stoga, ako uzmemo $k = \delta' - \delta$ i zbog 2.21, imamo:

$$P^{(t)} \subseteq \{x|mx \leq \delta\}. \tag{2.23}$$

Kako je ovo istina za svaku nejednakost u $Mx \leq d$, slijedi da je $P^{(t)} = P_1$. □

Korolar 3. *Za svaku racionalnu matricu A postoji broj t(A) takav da:ako je $Ax \leq b$ racionalan sistem linearnih nejednakosti sa bar jednim cjelobrojnim rješenjem i ako je $cx \leq \delta$ vrijedi za svako cjelobrojno rješenje iz $Ax \leq b$ (c je cjelobrojan), onda $cx \leq \delta$ ima dokaz odsjecanjem za $Ax \leq b$, sa duljinom najvećom $t(A)$.*

Dokaz. Slijedi direktno iz teorema 3.4 □

Korolar 4. *Za svaku racionalnu matricu m×n-matricu A i vektor redak $c \in \mathbb{Q}^n$ sa konačnim* $\min\{cx|x \geq 0; Ax = 0\}$, *postoji Gomoryjeva funkcija $f, g : \mathbb{Q}^m -> \mathbb{Q}$ takva da za svaki $b \in \mathbb{Q}^m$ ima:*

$$\begin{aligned} &i)\ f(b) \leq 0 \text{ ako i samo ako } \{x|x \geq 0; Ax = b : x \text{ cijeli broj }\} \text{ je neprazan };\\ &ii)\ g(b) = \min\{cx|x \geq 0; Ax = b; x \text{ cijeli broj }\} \text{ ako } f(b) \leq 0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Dokaz. Uzmimo A i c, iz teorema 2.6 slijedi da postoje matrice $P_1, ...P_t$ takve da su $P_2, ...P_t$ nenegativne i to za svaki $b \in \mathbb{Q}^m$;

$$\{x|x \geq 0; Ax = b\}_1 = \{x|x \geq 0; \lceil P_t \lceil \cdots P_2 \lceil P_1 A \rceil \rceil \cdots \rceil \rceil x \geq \lceil P_t \lceil \cdots \lceil P_2 \lceil P_1 b \rceil \rceil \cdots \rceil \rceil\} \tag{2.25}$$

Stoga, sa LP-dualnosti,

$$\begin{aligned} &\min\{cx|x \geq 0; Ax = b; \text{x cijeli broj}\} =\\ &\min\{cx|x \geq 0; \lceil P_t \lceil \cdots P_2 \lceil P_1 A \rceil \rceil \cdots \rceil \rceil x \geq \lceil P_t \lceil \cdots \lceil P_2 \lceil P_1 b \rceil \rceil \cdots \rceil \rceil\} =\\ &\max\{y\lceil P_t \cdots \lceil P_2 \lceil P_1 b \rceil \cdots \rceil \rceil\} y \geq 0; y\lceil P_t \lceil \cdots \lceil P_2 \lceil P_1 A \rceil \rceil \cdots \rceil \rceil \leq c\}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Neka je M matrica čiji su retci vrhovi poliedra $\{y \geq 0 | y\lceil P_t \lceil \cdots \lceil\lceil P_2 \lceil P_1 A \rceil\rceil \cdots \rceil\rceil \leq c\}$, i neka je N matrica čiji su retci ekstremne zrake od poliedra. Onda je maksimum iz 2.26 jednak:

$$\begin{aligned} \max\{&uN\lceil P_t \lceil \cdots \lceil P_2 \lceil P_1 b \rceil\rceil \cdots \rceil\rceil \\ &+ vM\lceil P_t \lceil P_2 \lceil P_1 b \rceil\rceil \cdots \rceil\rceil | u \geq 0; v \geq 0; v\mathbf{1} = 1\}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Stoga definiramo za $b \in \mathbb{Q}^m$

$$\begin{aligned} f(b) &= \max_j (N\lceil P_t \lceil \cdots \lceil P_2 \lceil P_1 b \rceil\rceil \cdots \rceil\rceil)_j, \\ g(b) &= \max_j (M\lceil P_t \lceil \cdots \lceil P_2 \lceil P_1 b \rceil\rceil \cdots \rceil\rceil)_j \end{aligned} \tag{2.28}$$

što daje zadovoljavajuću Gomoryjevu funkciju 2.24. □

Poglavlje 3

Metoda odsijecajućih ravnina

3.1 Algoritam

Postoje razni algoritmi za rješavanje problema cjelobrojnog programiranja. Najpoznatiji su

- Gomoryjev algoritam odsijecajućih ravnina
- Chvatalova procedura zaokruživanja
- Schrijverova procedura zaokruživanja.

Razlog tom obilju jest činjenica da se niti jedan algoritam nije pokazao učinkovitim za sve vrste problema. U ovom paragrafu opisat ćemo jednu verziju Gomoryjevog algoritma odsijecanjem.

Osnovna ideja tog algoritma je da se dodaju uvjeti jedan po jedan, tako da se na kraju dobije cjelobrojno rješenje problema linearnog programiranja.

ALGORITAM:

1. Rješava se problem linearnog programiranja zanemarujući cjelobrojna ograničenja.Ako rješenje ima sve cjelobrojne vrijednosti, ono je i optimalno rješenje i algoritam završava.
2. Ako rješenje ima barem jednu necjelobrojnu koordinatu, dodaje se novi uvjet problemu. Taj novi uvjet ima dva temeljna svojstva
   - necjelobrojno optimalno rješenje problema linearnog programiranja ne zadovoljava ovaj uvjet
   - sva moguća cjelobrojna rješenja zadovoljavaju novi uvjet.

Na taj način novi uvjet smanjuje skup svih rješenja tako da odbačeni dio skupa ne sadrži cjelobrojna rješenja. Sada se rješava novi problem linearnog programiranja i postupak se ponavlja.

Napomena 1. *Gomoryjev algoritam pretpostavlja da su u definiciji cjelobrojnog linearnog problema 1, a onda i u definiciji linearne relaksacije matrica A i vektor b cjelobrojni ili racionalni.*

Primjer 1.

$$\begin{aligned}
&x_1 + 4x_2 \to \max \\
&\textit{s ograničenjem} \\
&2x_1 + 4x_2 \leq 7 \\
&5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\
&x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}$$

Rješenje: Rješavajući gornji problem simpleks metodom dobivamo:

	x_1	x_2	b
x_3	-2	-4	7
x_4	-5	-3	15
z	1	4	0

	x_1	x_3	b
x_2	-1/2	-1/4	7/4
x_4	-7/2	3/4	39/4
z	-1	-1	7

Maksimum ciljne funkcije, ako zanemarimo cjelobrojna ograničenja dostiže se u $x_1 = 0$ *i* $x_2 = \frac{7}{4}$. *Budući da to rješenje nije cjelobrojno, generira se novi uvjet preko bilo koje jednadžbe iz finalne tablice koja ima necjelobrojnu desnu stranu, dakle u ovom slučaju bilo koje jednadžbe. Promotrimo jednadžbu definiranu prvim retkom finalne tablice.*

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{7}{4}$$

ili

$$-x_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_3 - 2 + \frac{3}{4}$$

Uočimo, kako su dopustive točke cjelobrojne i nenegativne u gornjoj jednakosti možemo članove podijeliti na racionalne i na cjelobrojne. Prebacimo sve cjelobrojne članove na lijevu stranu, a sve racionalne na desnu stranu. Dobivamo $-x_2 + 2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}$. *Lijeva strana je cjelobrojna pa mora biti i desna, kako je desna strana veća od* 0*, slijedi da je desna strana veća ili jednaka* 1, $\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4} \geq 1$
Ustvari imamo:

$$-(\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_3) \leq -\tfrac{3}{4}$$

To je novi uvjet koji dodajemo početnom problemu i dobivamo:

$$z = -x_1 - x_2 - 7 \to \max$$
s ograničenjem
$$\frac{1}{2}x_1 + 1x_2 + \frac{1}{4}x_3 = \frac{7}{4}$$
$$\frac{7}{2}x_1 - \frac{3}{4}x_3 + 1x_4 = \frac{39}{4}$$
$$-\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_3 + x_5 = -\frac{3}{4}$$
$x_i \in \mathbb{Z}$ *i* $x_i \geq 0$ *za svaki i=1,...,5*

Sada se rješava novodefinirani problem.

	x_1	x_3	b
x_2	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{7}{4}$
x_4	$\frac{-7}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{39}{4}$
x_5	$\frac{1}{2}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-3}{4}$
z	-1	-1	7

	x_5	x_3	b
x_2	-1	0	1
x_4	-7	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{2}$
x_1	2	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$
z	-2	$\frac{-1}{2}$	$\frac{11}{2}$

Optimalno rješenje koje dobivamo je ($\frac{3}{2}$,1) *što opet nije cjelobrojno pa ćemo ponovit postupak generiranja novog uvjeta. Cjelobrojni koeficijenti nisu u drugom redu tako da ćemo*

novi uvjet generirati iz jednadžbe u drugom retku.
Imamo:

$$x_4 = 4 + \frac{1}{2} + (2 + \frac{1}{2})x_3 - 7x_5$$
$$x_4 - 4 - 2x_3 + 7x_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_3$$

Razmišljajući jednako kao maloprije dobivamo:

$$\frac{-1}{2}x_3 \leq \frac{-1}{2}$$

iz čega slijedi novi uvjet.

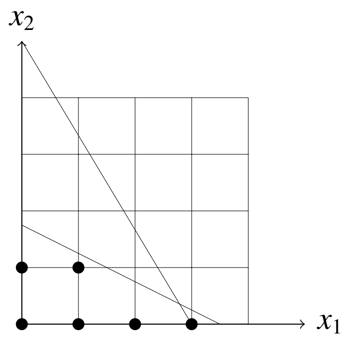
$$\frac{-1}{2}x_3 + x_6 = \frac{-1}{2}$$

Dobivamo novu tablicu s novim uvjetom:

	x_5	x_3	b
x_2	-1	0	1
x_4	-7	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{2}$
x_1	2	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_6	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$
z	-2	$\frac{-1}{2}$	$\frac{11}{2}$

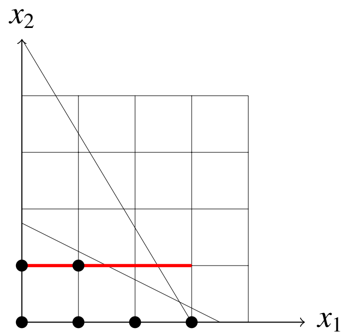
	x_5	x_6	b
x_2	-1	0	1
x_4	-7	5	7
x_1	2	-1	1
x_3	0	2	1
z	-2	-1	5

Kako su sve vrijednosti varijabla cjelobrojne, našli smo rješenje. Maksimum se dostiže u točki $(1, 1)$ *i iznosi* 5.
Geometrijski se dogodilo sljedeće. Moguća rješenja početnog sustava uvjeta su točke istaknute na slici 3.1.



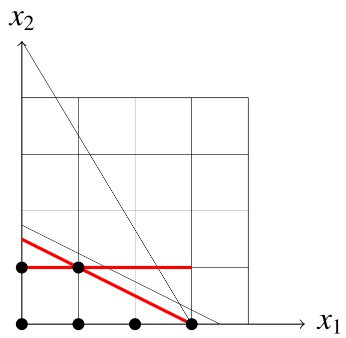
Slika 3.1

Prvi novododani uvjet se može interpretirati kao $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_3 \geq \frac{3}{4}$. *Kako je* $x_3 = 7 - 2x_1 - 4x_2$, *dobivamo da je novi uvjet* $x_2 \leq 1$. *Kao što vidimo iz slike 3.2 novi uvjet je ekvivalentan nejednakosti koja "odrezuje" iz skupa mogućih rješenja necjelobrojnu optimalnu točku* $(0, \frac{7}{4})$*, ali ne isključuje ni jedno cjelobrojno moguće rješenje.*



Slika 3.2

Drugi novi uvjet je ekvivalentan nejednadžbi $-2x_1 - 4x_2 \geq -6$.



Slika 3.3

Na slici 3.3 također možemo primijetiti da novi uvjet "odrezuje" iz skupa dopustivih točaka optimalnu točku ($\frac{3}{2}, 1$), ali ne isključuje niti jedno cjelobrojnu dopustivu točku.

Sada ćemo detaljno opisati kako se općenito generiraju novi uvjeti. Pretpostavimo da želimo riješiti ILP-problem

$$\max\{cx | x \geq 0; Ax \leq b; x \in \mathbb{Z}\}, \tag{3.1}$$

Gdje je A $m \times n$ matrica, A, b, c cjelobrojni.
Prvo riješimo relaksirani LP problem

$$\max\{cx | x \geq 0; Ax \leq b\}. \tag{3.2}$$

Koristiti ćemo novi (prošireni) zapis simpleks tablice.

	x	w	
w	A	I	b
	-c	0	0

Tablica 3.1

Simpleks metodom dobivamo optimalnu tablicu 3.2, u kojoj je w' kombinacija od m varijabli x_i i w_i.

	x	w	
w'	D		f
	d_0		φ_0

Tablica 3.2

Dakle, $d_0 \geq 0$ i $f \geq 0$. Označimo $f = (\varphi_1, ..., \varphi_m)^T$. Ako su kordinate vektora f cjelobrojne, odgovarajuća moguća rješenja su cjelobrojna pa je zato optimalno rješenje ILP-problema 3.1 cjelobrojno. Ako φ_0 ili f nije cjelobrojan, odabiremo indeks $i_0 \in \{0, 1, \ldots, m\}$ takav da φ_{i_0} nije cijeli broj.
Neka je

$$\begin{aligned} &\sigma_{i_0,1} \ldots \sigma_{i_0,n+m}\ \varphi_{i_0}\ i_0\text{-ti redak u optimalnoj tablici tj.} \\ &\sigma_{i_0,1}x_1 + \ldots + \sigma_{i_0,n+m}x_{n+m} = \varphi_{i_0}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Neka je $\{w\} \in [0, 1\rangle$ decimalni dio broja w, tj. $\{w\} = w - \lfloor w \rfloor$.
Tada imamo:

$$(\{\sigma_{i_0,1}\}) + \lfloor \sigma_{i_0,1} \rfloor)x_1 + ... + (\{\sigma_{i_0,n+m}\}) + \lfloor \sigma_{i_0,n+m} \rfloor)x_{n+m} = \{\varphi_{i_0}\} + \lfloor \varphi_{i_0} \rfloor \tag{3.4}$$

Primjetite da kako je pretpostavka da su rješenja nenegativna i cjelobrojna, nepoznanice sa cjelobrojnim koeficijentima s lijeve strane daju cjelobrojne brojeve s desne strane. Tada nepoznanice sa racionalnim koeficijentima s lijeve strane daju racionalan dio s desne strane Kako su koeficijenti pozitivni nikako ne može racionalni dio s lijeve strane biti manji od racionalnog dijela s desne strane, ali može biti veći pa slijedi nejednakost.

$$\{\sigma_{i_0,1}\}x_1 + ... + \{\sigma_{i_0,n+m}\}x_{n+m} \geq \{\varphi_{i_0}\}. \tag{3.5}$$

Posljednja nejednadžba zove se Gomoryjeva odsijecajuća ravnina dobivena retkom i_0. Iz konstrukcije je jasno da dodavanjem novog uvjeta 3.5 ne odbacujemo niti jednu cjelobrojnu dopustivu točku, ali odbacujemo optimalno rješenje dobiveno simpleks metodom. (Ako je $(\hat{x_1}, ..., \hat{x_{n+m}})^T$ optimalno rješenje, tada za svaki j imamo $\hat{x}_j = 0$ ili $\sigma_{i_0,j} \in \{0, 1\}$ pa je lijeva strana u 3.5 0 dok je desna po pretpostavci $\neq 0$.)
Dakle, možemo u 3.1 dodati novi uvjet

$$\{\sigma_{i_0,1}\}x_1 + ... + \{\sigma_{i_0,n+m}\}x_{n+m} - x_{n+m+1} = \{\varphi_{i_0}\}, \tag{3.6}$$

gdje je x_{n+m+1} nova varijabla za koju, zbog 3.4 možemo zahtjevati da je cjelobrojna.
Nakon što dodamo redak koji odgovara uvjetu 3.6 u optimalnu tabelu, primjenimo dualnu simpleks metodu. Kada nađemo optimum za taj novi LP-problem, provjerimo da li je zadnji stupac f cjelobrojan. Ako jest, došli smo do cjelobrojnog rješenja relaksiranog LP-problema 3.2 pa dakle i do optimalnog rješenja ILP-problema 3.1. Ako f nije cjelobrojna, ponavljamo gornji postupak. Dodavanjem odsijecajućih ravnina se ponavlja dok ne nađemo optimalnu tabelu za koju je zadnji stupac cjelobrojan. To je ujedno i rješenje polaznog ILP-problema.

3.2 Konačnost algoritma

Definicija 1. *Vektor stupac $x = (x_0, ..., x_m)^T$ je leksikografski manji od vektora $y = (y_0, ..., y_m)^T$ ako je $y_0 = x_0, ..., y_{i-1} = x_{i-1}, x_i < y_i$ za neki $i = 1, 2, ..., m$. Vektor x je leksikografski pozitivan ako je leksikografski veći od nul-vektora, tj. $x \neq 0$ i najviši ne-nul element je pozitivan.*

Može se dokazati da gornje opisana metoda završava u konačno koraka ako se kroz algoritam zadovoljavaju sljedeći uvjeti:

i) svaki stupac u svakoj tablici je leksikografski pozitivan;

ii) najdesniji stupac tablice pada leksikografski svakom transformacijom;

iii) uvijek uzimamo najviši mogući redak tablice kao ključni redak za odsjecanje.

Neka je tablica T_0 dobivena rješavanjem LP-problema 3.2, gdje je nulti redak ustvari c i φ_0 (vrijednost funkcije cilja). Uvjet i) može se postići dodavanjem uvjeta

$$\sum_{i=1}^{n+m} x_i \leq M \tag{3.7}$$

gdje je M odabran tako da je 3.7 vrijedi za neko optimalno rješenje ILP-problema 3.1. Takav broj M u praksi se lako nalazi. Ako dodamo novu varijablu definiranu s 3.7 kao prvi redak tablice T_0 dobivamo uvjet i).
Da bi zadovoljili uvjet(i) i (ii)kroz daljnje iteracije odabiremo ključni element kao što slijedi. Varijabla x_{i_0} koja ulazi u bazu odabire se iz onih redaka za koje je $\varphi_i < 0$. Indeks j_0 varijable x_{j_0} koja izlazi iz baze bira se tako da je

$$-\frac{1}{\sigma_{i_0,j}} \begin{pmatrix} \sigma_{0,j} \\ \sigma_{1,j} \\ \vdots \\ \sigma_{m,j} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

leksikografski minimalan za svaki j takav da je $\sigma_{i_0,j} < 0$.

Teorem 1. *Uz uvjete i), ii), iii), metoda odsijecanjem završava u konačno mnogo koraka.*

Dokaz. Za bilo koju tablicu T definiramo:
s(T)=broj stupaca u T;
r(T)=broj redaka u T ;
v(T)=r(T)-s(T).

Primijetimo da se v(T) ne mijenja ako dodamo Gomoryjevo odsjecanje. Neka je T_0 optimalna tablica relaksiranog LP-problema 3.2, gdje T_0 zadovoljava i). Dokaz provodimo indukcijom po v(T).

Pretpostavimo da je $v(T) = 0$, ako su svi φ_i cjelobrojni tada imamo cjelobrojno rješenje i gotovi smo, u suprotnom je ILP nerješiv, što ćemo odmah uočiti ako izaberemo redak koji sadrži necjelobrojan φ_i, koji je redak kandidat za odsijecanje i pokušavamo primijeniti dualnu simpleks metodu.

Pretpostavimo da je $v(T_0) > 0$. Koristimo kao unutarnju indukciju po $s(T_0)$.

a) Pretpostavimo da je najviši redak u T_0 nul-redak, tj. $c = 0$. Neka j_0-stupac izgleda ovako (takav stupac sigurno postoji):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ - \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Tada možemo precrtati nulti redak i j_0-ti stupac jer se nulti redak neće mijenjati, a nova (manja) tablica imati će oblik isti kao i T_0 samo jedan stupac i redak manje. Tablicu koja je ostala označimo $T_0^{'}$. Tada je njen nulti redak prvi redak tablice T_0. Ako je on nul-redak, ponavljamo križanja. To činimo sve dok nulti redak ne ostane ne-nul redak. Dobivenu tablicu označimo $T_0^{''}$. Za takvu tablicu vrijedi $v(T_0^{''}) = v(T_0)$ (jer smo uvijek križali jedan stupac i jedan redak) pa je za dokaz teorema ova situacija jednaka kao i da promatramo tablicu T_0 i $c \neq 0$.

b) Pretpostavimo da je najviši redak u T_0 ne-nul redak tj. $c \neq 0$. Komponenta φ_0 u nizu tablica biti će monotono nerastuća (zbog ii)). Neka je α infimum od φ_0. Zbog toga nakon konačno koraka imamo $\varphi_0 < \lfloor \alpha \rfloor + 1$. Ako je $\varphi_0 > \lfloor \alpha \rfloor$, tada za ključni redak uzimamo nulti redak (po iii)). Nakon primjene simpleks metode dobivamo $\varphi_0 = \lfloor \alpha \rfloor$ (ili dobivamo da je ILP- problem nerješiv).
Dakle, mora biti $\varphi_0 = \lfloor \alpha \rfloor = \alpha$.
Neka je $\varphi_0 = \alpha$ u npr. tablici T_k. Kako je α infimum od φ_0 u svim tablicama, slijedi da se nakon T_k vrijednost od φ_0 neće više mijenjati. Dakle, kroz sljedeće transformacije ne možemo birati ključni element u stupcu j s $\sigma_{0,j} \neq 0$ jer bi se tada φ_0 smanjila, već biramo po onim stupcima za koje je $\sigma_{0,j} = 0$. Zbog toga se nulti redak više neće mijenjati.

Iz T_k i svih sljedećih tablica možemo izbrisati nulti redak (jer se on više ne mijenja), stupac j_0 i sve stupce s $\sigma_{0,j} \neq 0$ (jer se preko njih vrše transformacije). Neka je $T_0^{'}$ tablica koju iz T_k dobijemo ovim brisanjem.
Kako je $c \neq 0$ postoji bar jedan j takav da je $\sigma_{0,j} \neq 0$. Zbog toga je

$$s(T_0^{'}) \leq s(T_0) - 2 \text{ i } r(T_0^{'}) = r(T_0) - 1 \text{ pa je}$$
$$v(T_0^{'}) = r(T_0^{'}) - s(T_0^{'}) \leq s(T_0) - 2 - (r(T_0) - 1) = s(T_0) - r(T_0) - 1 < v(T_0).$$

Iz pretpostavke indukcije slijedi da niz manjih tablica dovode do cjelobrojnog rješenja u konačno koraka. Kako su sve transformacije i dodavanja Gomoryjevih odsjecanja u nizu originalnih tablica uključeni u niz malih tablica, slijedi da i niz originalnh tablica koji započinje od T_0 dolazi do optimalnog cjelobrojnog rješenja u konačno mnogo koraka.

□

Primjetite da tvrdnja teorema 3.1 ne isključuje da se uz neki drugi izbor ključnog elementa može doći do cjelobrojnog optimalnog rješenja u konačno mnogo koraka. U primjeru koji slijedi računski i grafički su prikazani efekti algoritma odsijecanja korak po korak. Korištena je simpleks metoda, a za izbor ključnog retka je biran redak s najvećim racionalnim dijelom $\{\varphi_i\}$.

Primjer 2.

$$\begin{aligned} &(x_1 - 2x_2) \to \min \\ &2x_1 + x_2 \leq 5 \\ -&4x_1 + 4x_2 \leq 5 \\ &x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Rješenje: Prvo rješavamo gornji problem bez cjelobrojnog ograničenja. Koristimo simpleks metodu.

	x_1	x_2	b
x_3	-2	-1	5
x_4	4	-4	5
z	*1*	-2	0

	x_1	x_4	b
x_3	-3	$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{4}$
x_2	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
z	*-1*	$\frac{1}{2}$	$\frac{-5}{2}$

	x_3	x_4	b
x_1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{4}$
x_2	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{5}{2}$
z	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{-15}{4}$

Dakle, dobili smo rješenje $T_1 = (\frac{5}{4}, \frac{5}{2})$ *i ono je necjelobrojno u obje koordinate. Gledamo drugi redak u posljednjoj tablici jer dobiveno rješenje ima veći racionalni dio na drugoj koordinati.*
Računamo :

$$\sigma_{21} = \frac{1}{3} - \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor = \frac{1}{3},$$
$$\sigma_{22} = \frac{1}{6} - \left\lfloor \frac{1}{6} \right\rfloor = \frac{1}{6},$$
$$\varphi_2 = \frac{5}{2} - \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}.$$

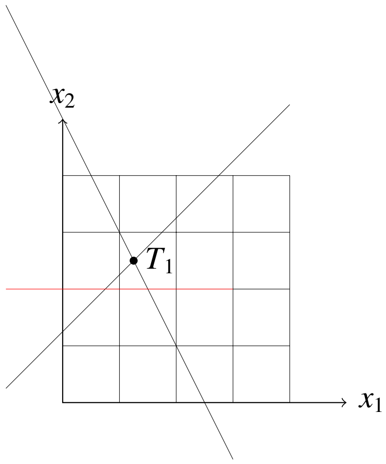
Izračunate vrijednosti definiraju nove uvjet $\frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{6}x_4 \geq \frac{1}{2}$.
Iz početne tablice znamo da je

$$x_3 = -2x_1 - x_2 + 5 \text{ } i \text{ } x_4 = 4x_1 - 4x_2 + 5.$$

Prema tomw novi uvjet je ekvivalentan uvjetu

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{3}(-2x_1 - x_2 + 5) + \frac{1}{6}(4x_1 - 4x_2 + 5) = -x_2 + \frac{5}{2}$$

tj. $x_2 \leq 2$ *što je i gemetrijska interpretacija novog uvjeta. (slika 3.4)*
Uz novi uvjet rješavajući simpleks metodom dobivamo:



Slika 3.4

	x_3	x_4	b
x_1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{4}$
x_2	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{5}{2}$
x_5	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{-1}{2}$
z	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{-15}{4}$

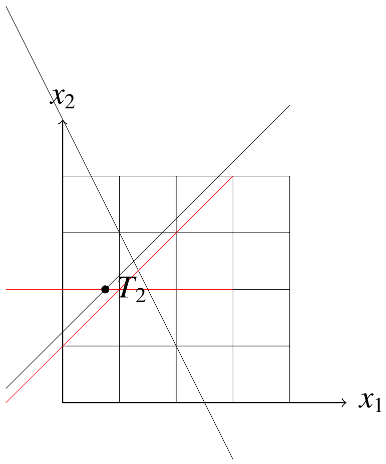
	x_5	x_4	b
x_1	-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
x_2	-1	0	2
x_3	3	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$
z	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{-13}{4}$

Dobili smo rješenje $T_2 = \left(\frac{3}{4}, 2\right)$.
Sada tražimo Gomoryjevu sjekuću ravninu:

$$\sigma_{31} = -3 - \lfloor -3 \rfloor = 0,$$
$$\sigma_{32} = \frac{1}{2} - \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = \frac{1}{2},$$
$$\varphi_3 = \frac{3}{2} - \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Dakle, novi uvjet glasi $\frac{1}{2}x_4 \geq \frac{1}{2}$ *tj.* $x_4 \geq 1$.

Kako je $x_4 = 4x_1 - 4x_2 + 5$, *novi uvjet geometrijski znači* $4x_1 - 4x_2 + 5 \geq 1$ *tj.* $x_1 - x_2 \geq -1$.



Slika 3.5

Dodavajući taj uvjet dobivamo novu tablicu

	x_5	x_4	b
x_1	-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
x_2	-1	0	2
x_3	3	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_6	0	1	-1
z	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{-13}{4}$

	x_5	x_6	b
x_1	-1	$\frac{1}{4}$	1
x_2	-1	0	2
x_3	3	$\frac{-1}{2}$	1
x_4	0	1	1
z	1	$\frac{1}{4}$	-3

Time smo došli do cjelobrojnog rješenja $T_3 = (1, 2)$, a minimum funkcije cilja iznosi -3.

Bibliografija

[1] L. Neralić i Z. Lukač, *Operacijska istraživanja*, Element, 2012.

[2] Yves Pochet i Laurence A. Wolsey, *Production planning by mixed integer programming*, Springer series in operations research and financial engineering, Springer, New York, Berlin, 2006, ISBN 0-387-29959-9, http://opac.inria.fr/record=b1125478.

[3] Alexander Schrijver, *Theory of Linear and Integer Programming*, John Wiley & Sons, Chichester, 1986.

[4] R. Scitovski, I. Vazler i M. Briš, *Kvantitativne metode za poslovno odlučivanje*, (2013), http://www.mathos.unios.hr/~scitowsk/Kvantitativne/Materijali/CP.pdf.

[5] L. Čaklović, *Geometrija linearnog programiranja*, Element, 2010.

Sažetak

Cjelobrojno linearno programiranje se bavi problemom optimizacije linearnog funkcionala uz linearne uvjete tipa jednakosti i nejednakosti gdje je dodatno uveden zahtjev cjelobrojnosti na neke (ili sve) varijable. Područje primjene cjelobrojnog linearnog programiranja je široki : proizvodnja, transport i distribucija, marketing, financijsko ulaganje i planiranje, raspored zaposlenika ... Najčešće metode pri rješavanju problema cjelobrojnog programiranja su metoda grananja i ograđivanja i metoda odsijecajućih ravnina. U ovom radu smo istražili metodu odsijecajućih ravnina.

U prvom i drugom poglavlju smo se upoznali s teorijom potrebnom da bi se dokazao glavni teorem za metodu odsijecajućih ravnina, a to je da se u konačno mnogo koraka odsijecanjem poliedarskog skupa P može dobiti njegova cjelobrojna ljuska i pokazali smo ocjenu broja tih koraka. U trećem poglavlju smo uveli algoritam za metodu odsijecajućih ravnina te smo pokazali dva primjera problema cjelobrojnog linearnog programiranja riješenih metodom odsijecajućih ravnina.

Summary

Integer linear programming deals with the optimisation problem of linear functional, concearning linear constraints of equality and inequality, where some (or all) variables are additionally restricted to be integer. Scope of integer linear programming usage is wide: production, transport and distribution, marketing, financial and investment planning, employees scheduling etc. The most common methods for solving integer programming problems are branch and bound method and cutting plane method. In this paper we studied the cutting plane method.

In the first two chapters we've met the theory necessary to prove the main cutting plane method theorem, which says that the integer hull of polyhedral set P can be obtained by cutting it's parts in finite number of times. Furthermore, we showed the rating of this finite steps numbers. In the third chapter, we've introduced the algorithm of cutting plane method and demonstrated two integer linear programming problem examples, solved with cutting plane method.

Životopis

Rođena sam 14. srpnja 1990. godine u Zagrebu. Nakon završene osnovne škole upisala sam Gimnaziju Lucijana Vranjanina, opći smjer, u kojoj sam maturirala 2009. godine. Tijekom osnovnog i srednjeg školovanja aktivno sam se bavila plesom.

Nakon završenog srednjeg školovanja upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu (2009. godine), koji sam završila 2013. godine. Iste godine upisala sam Diplomski sveučilični studij Financijska i poslovna matematika na istom fakultetu.