SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Major Šomođi

SLIČNOST I HOMOTETIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc Sanja Varošanec

Zagreb, srpanj, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Iako se učenici prvi put susreću s definicijom sličnosti u sedmom razredu osnovne škole, oni već od ranog djetinstva intuitivno znaju prepoznati slične likove. U ovom radu ćemo iskazati s kojim se sve definicijama i svojstvima sličnosti i homotetije učenici susreću tijekom cijelog svog školovanja. Sličnost ima široku primjenu ne samo u matematici, nego i u ostalim aspektima života.

Poglavlje 1

Izometrije

U ovom poglavlju ćemo definirati izometrije koje se nalaze u udžbenicima za osmi razred osnovne škole i dokazati teoreme o sukladnosti trokuta koji su iskazani u udžbenicima za šesti razred osnovne škole i ponovo u prvom razredu srednje škole, a dokazani su samo u udžbenicima prirodoslovno-matematičkih gimnazija.

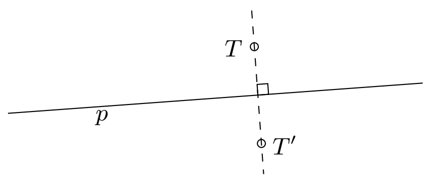
1.1 Preslikavanje

Definicija 1.1. *Preslikavanje ravnine $f : M \longrightarrow M$ nazivamo izometrija ako za sve točke A i B ravnine M vrijedi $|A'B'| = |AB|$, gdje su $A' = f(A)$ i $B' = f(B)$.*

Definicija 1.2. *Neka je $p \subset M$ pravac. Osna simetrija ravnine M obzirom na pravac p je preslikavanje $s_p : M \longrightarrow M$ definirano na sljedeći način:*

(i) Ako točka T leži na pravcu p, definira se $s_p(T) = T$.

(ii) Ako točka T ne leži na pravcu p, tada je pravac p simetrala dužine $\overline{TT'}$, gdje je $T' = s_p(T)$.

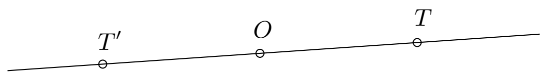


Slika 1.1

Definicija 1.3. *Neka je O čvrsta točka ravnine M. Centralna simetrija ravnine M obzirom na točku O je preslikavanje $s_o : M \longrightarrow M$ definirano na sljedeći način:*

(*i*) $s_o(O) = O$.

(*ii*) *Za svaku točku $T \neq O$ je $s_o(T) = T'$, gdje je točka O polovište dužine $\overline{TT'}$.*

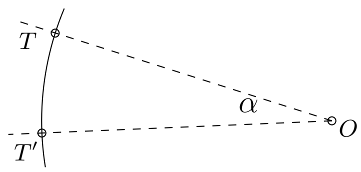


Slika 1.2

Definicija 1.4. *Rotacija ravnine M oko čvrste točke O (središta rotacije) za kut α (kut rotacije) je preslikavanje $r : M \longrightarrow M$ definirano na sljedeći način:*

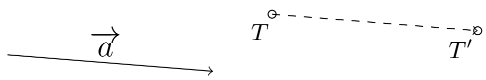
(*i*) $r(O) = O$.

(*ii*) *Za svaku točku $T \neq O$ je $r(T) = T'$ i vrijedi $|OT| = |OT'|$ i $\measuredangle T'OT = \alpha$.*



Slika 1.3

Definicija 1.5. *Neka je $\overrightarrow{a}$ vektor ravnine M. Translacija $t_{\overrightarrow{a}} : M \longrightarrow M$ je izometrija takva da vrijedi $t_{\overrightarrow{a}}(T) = T'$, $\overrightarrow{TT'} = \overrightarrow{a}$.*



Slika 1.4

1.2 Sukladnost

Sukladnost se u udžbenicima za šesti razred uvodi kroz primjere u kojima se uspoređuju likovi jednakih oblika i jednakih veličina (medvjedići, slike blizanaca, itd.).

Definicija 1.6. *Dužine su sukladne ako imaju jednake duljine.*

Definicija 1.7. *Kutovi su sukladni ako imaju jednake veličine.*

Definicija 1.8. *Trokuti su sukladni ako su im sukladne odgovarajuće stranice i sukladni odgovarajući kutovi.*

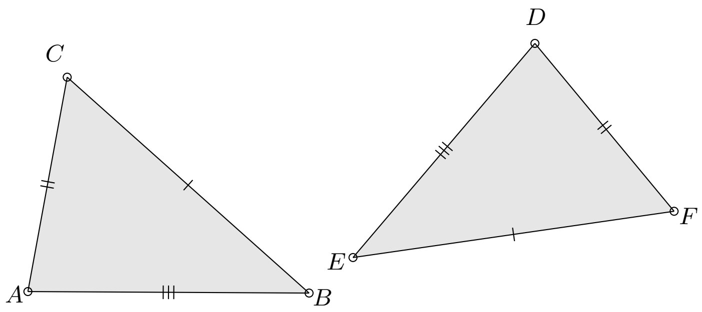
U udžbenicima za prvi razred prirodoslovno-matematičke gimnazije nakon što se definira izometrija, definira se još i sukladnost likova.

Definicija 1.9. *Lik L sukladan je liku L' ako postoji izometrija koja lik L preslikava na lik L'.*

Poučci o sukladnosti trokuta iskazani su u šestom razredu i ponovo u prvom razredu srednje škole. Dokazi su provedeni samo u udžbenicima prirodoslovno-matematičkih gimnazija.

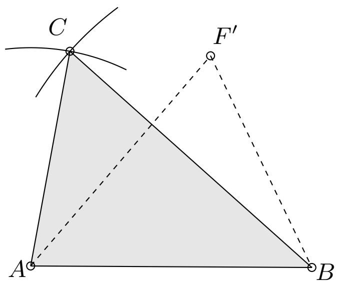
Teorem 1.10. *Poučak o sukladnosti trokuta S-S-S*

Dva su trokuta sukladna ako su im sve tri odgovarajuće stranice sukladne.



Slika 1.5

Dokaz. Neka su trokuti ABC i DEF takvi da je $|AB| = |DE|$, $|BC| = |EF|$ i $|CA| = |FD|$. Prema definiciji 1.6. dužine $\overline{AB}$ i $\overline{DE}$ su sukladne, pa postoji izometrija f za koju je $f(\triangle DEF) = \triangle ABF'$, tako da je $\triangle DEF \cong \triangle ABF'$.



Slika 1.6

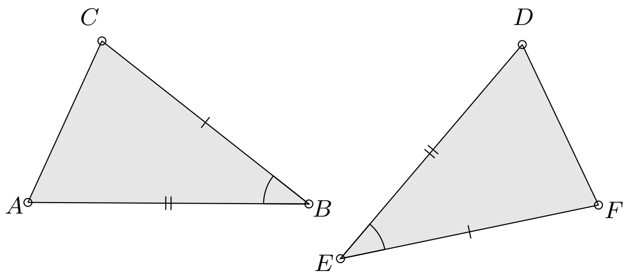
Obzirom da je $|AC| = |DF| = |AF'|$, točke C i F' leže na istom kružnom luku sa središtem u točki A. Također, zbog $|BC| = |EF| = |BF'|$, točke C i F' leže na istom kružnom luku sa središtem u točki B.

Ta dva kružna luka se u istoj poluravnini mogu sjeći samo u jednoj točki i to upravo u točki C, pa vrijedi $F' = C$, tj. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. $\square$

Teorem 1.11. *Poučak o sukladnosti trokuta S-K-S*

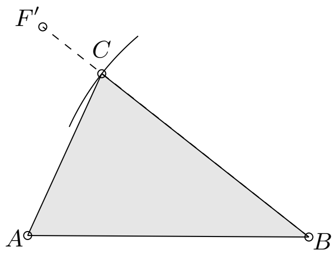
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvjema stranicama i kutu među njima.

Dokaz. Neka su trokuti ABC i DEF takvi da je $|AB| = |DE|$, $|BC| = |EF|$ i $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$.



Slika 1.7

Prema definiciji 1.6. dužine $\overline{AB}$ i $\overline{DE}$ su sukladne, pa postoji izometrija f za koju je $f(\triangle DEF) = \triangle ABF'$, te je $\triangle DEF \cong \triangle ABF'$.



Slika 1.8

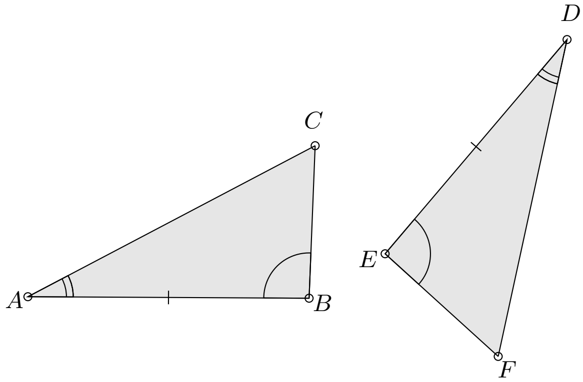
Obzirom da je $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$ i $\measuredangle DEF \cong \measuredangle ABF'$, tada je i $\measuredangle ABC \cong \measuredangle ABF'$, što povlači da je $F' \in BC$. Također, zbog $|BC| = |EF| = |BF'|$, točke F' i C leže na istom kružnom luku sa središtem u točki A.

Taj kružni luk i pravac BC se u istoj poluravnini mogu sjeći samo u jednoj točki i to upravo u točki C, zbog čega je $F' = C$, pa je i $\triangle DEF \cong \triangle ABC$. □

Teorem 1.12. *Poučak o sukladnosti trokuta K-S-K*

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u stranici i kutovima uz tu stranicu.

Dokaz. Neka su trokuti ABC i DEF takvi da je $|AB| = |DE|$, $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$ i $\measuredangle CAB \cong \measuredangle FDE$.



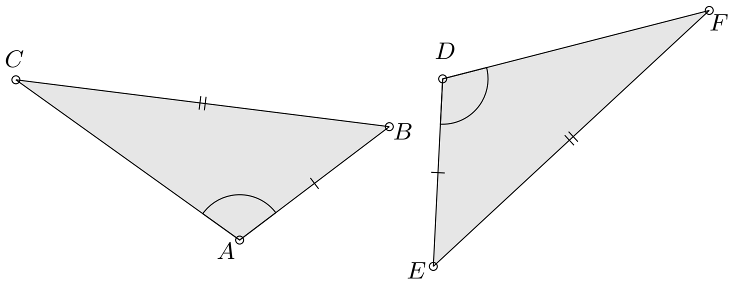
Slika 1.9

Prema definiciji 1.6. dužine $\overline{AB}$ i $\overline{DE}$ su sukladne, pa postoji izometrija f za koju je $f(\triangle DEF) = \triangle ABF'$, zbog čega je $\triangle DEF \cong \triangle ABF'$.

Zbog toga jer je $\measuredangle CAB \cong \measuredangle F'AB$, točka F' leži na pravcu AC. Isto tako je $\measuredangle ABC \cong \measuredangle ABF'$, pa točka F' leži i na pravcu BC. Pravci AC i BC sijeku se samo u jednoj točki i to točki C, pa je $F' = C$. $\square$

Teorem 1.13. *Poučak o sukladnosti trokuta S-S-K $^{>}$*

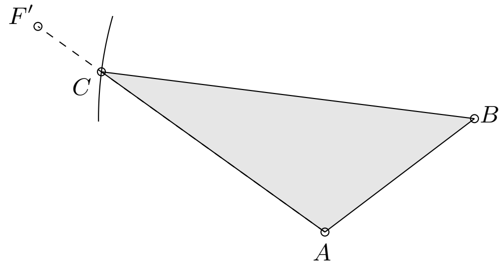
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvjema stranicama i kutom nasuprot duljoj od njih.



Slika 1.10

Dokaz. Neka su trokuti ABC i DEF takvi da vrijedi $|AB| = |DE|$, $|BC| = |EF|$, $\measuredangle CAB \cong \measuredangle FDE$ i $|BC| > |AB|$.

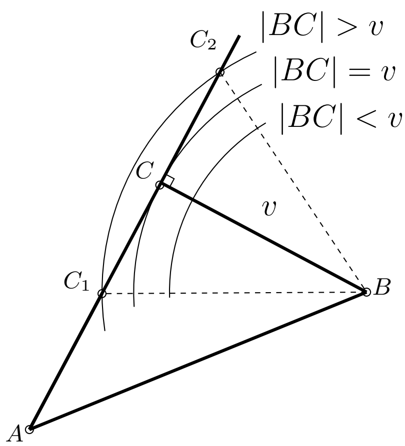
Prema definiciji 1.6. dužine $\overline{AB}$ i $\overline{DE}$ su sukladne, pa postoji izometrija f za koju je $f(\triangle DEF) = \triangle ABF'$, te je $\triangle DEF \cong \triangle ABF'$.



Slika 1.11

Zbog toga jer je $\measuredangle CAB \cong \measuredangle F'AB$, točka F' leži na pravcu AC. Isto tako se zbog $|BC| = |EF| = |BF'|$ točka F' nalazi na kružnom luku sa središtem u točki B.

Taj kružni luk i pravac AC se zbog toga što je $|BC| > |AB|$ u istoj poluravnini mogu sjeći samo u jednoj točki i to upravo u točki C, zbog čega je $F' = C$, pa je $\triangle DEF \cong \triangle ABC$. U slučaju da je $|BC| < |AB|$ trokut ne mora biti jednoznačno



Slika 1.12

određen, a čak ne mora uopće imati rješenje. Neka je v visina iz vrha B na pravac AC kao na slici 1.12, tada vrijedi:

- ako je $|BC| < v$ kružni luk ne siječe pravac AC, pa trokut s takvim podatcima ne postoji,
- ako je $|BC| = v$ kružni luk siječe pravac AC u jednoj točki i to upravo u točki C i trokut s takvim podatcima je pravokutan,
- ako je $|BC| > v$ kružni luk siječe pravac AC u dvije točke C_1 i C_2, pa postoje dva rješenja koja nisu sukladna.

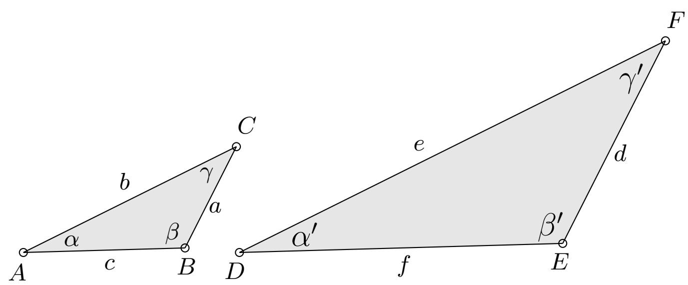
$\square$

Poglavlje 2

Sličnost trokuta

U sedmom razredu osnovne škole sličnost se uvodi usporedbom raznih likova istih oblika i različitih veličina. Zatim se definira sličnost, ali samo kao sličnost trokuta, te se samo iskazuju svojsta sličnih trokuta. U prvom razredu srednje škole ponovno se definira sličnost i iskazuju svojstva sličnih trokuta, a u prirodoslovno-matematičkim gimnazijama se i dokazuju.

Definicija 2.1. *Kažemo da su trokuti ABC i DEF slični ako se podudaraju u sva tri kuta, tj. ako vrijedi $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ i $\gamma = \gamma'$. Pišemo $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.*

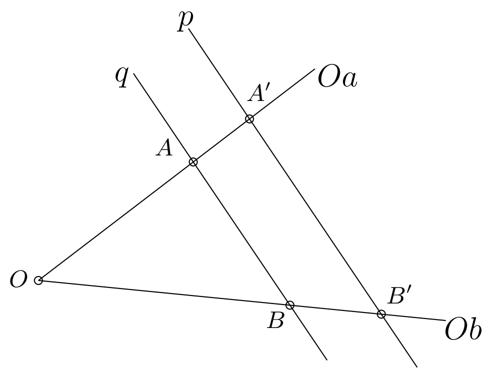


Slika 2.1

U sljedećim teoremima veliku važnost ima Talesov teorem pa ga ovdje i dokažimo.

Teorem 2.2. *Talesov teorem o proporcionalnosti*

Paralelni pravci na krakovima kuta odsijecaju proporcionalne dužine.



Slika 2.2

Dokaz. Uz oznake kao na slici 2.2, neka je $p \parallel q$, tada su $\overrightarrow{A'B'}$ i $\overrightarrow{AB}$ vektori istog smjera, pa postoji $k > 0$ takav da je $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$. Vektori $\overrightarrow{OA'}$ i $\overrightarrow{OA}$ leže na istom pravcu, tj. istog su smjera, pa postoji $s > 0$ takav da je $\overrightarrow{OA'} = s\overrightarrow{OA}$. Isto tako vektori $\overrightarrow{OB'}$ i $\overrightarrow{OB}$ leže na istom pravcu, tj. istog su smjera, pa postoji $l > 0$ takav da je $\overrightarrow{OB'} = l\overrightarrow{OB}$.

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = s\overrightarrow{AO} + l\overrightarrow{OB} \tag{2.1}$$

Neka je BSO $s > l$, tada postoji $r \geq 0$ takav da je $s = l + r$.

Tada je,

$$\overrightarrow{A'B'} = (l + r)\overrightarrow{AO} + l\overrightarrow{OB} = r\overrightarrow{AO} + l\overrightarrow{AB}. \tag{2.2}$$

Obzirom da je $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, vrijedi jednakost $r\overrightarrow{AO} = (k - l)\overrightarrow{AB}$.

Pošto vektori $\overrightarrow{AO}$ i $\overrightarrow{AB}$ nisu kolinearni, gornja jednakost vrijedi samo ako su $r = 0$ i $k = l$. Dakle,

$$k = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OB|}. \tag{2.3}$$

$\square$

Teorem 2.3. *Obrat Talesova teorema o proporcionalnosti*

Ako dva pravca odsijecaju na krakovima kuta proporcionalne dužine, onda su ti pravci paralelni.

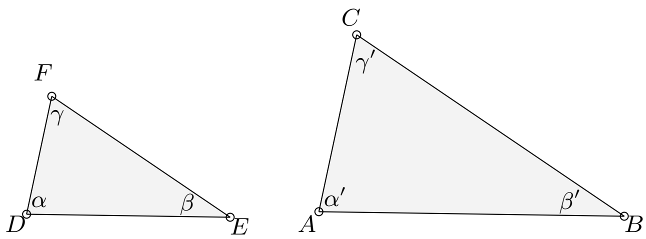
Dokaz. Uz oznake kao na slici 2.2, neka su $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$. Vektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OA'}$ leže na istom pravcu, pa vrijedi $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$. Isto tako vektori $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OB'}$ leže na istom pravcu, pa vrijedi $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$.

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{AO} + k\overrightarrow{OB} = k(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = k\overrightarrow{AB} \tag{2.4}$$

Vektori $\overrightarrow{A'B'}$ i $\overrightarrow{AB}$ su kolinearni, pa leže na paralelnim pravcima. □

Teorem 2.4. *Temeljno svojstvo sličnih trokuta*

Ako su dva trokuta slična, onda su im duljine odgovarajućih stranica proporcionalne.

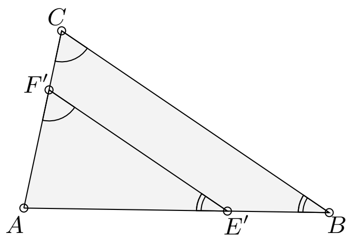


Slika 2.3

Dokaz. Neka je $\triangle DEF \sim \triangle ABC$, tada po definiciji 2.1. vrijedi $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ i $\gamma = \gamma'$. Uzmimo još da je $|AB| > |DE|$. Obzirom da je $\alpha = \alpha'$, tada je prema definiciji 1.7. $\measuredangle CAB \cong \measuredangle FDE$, pa prema definiciji 1.9. postoji izometrija f za koju je $f(\triangle DEF) = \triangle AE'F'$, pa se točke F' i E' nalaze na dužinama $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$.

Pravac AB siječe pravce BC i $E'F'$ pod istim kutom, pa su oni prema poučku o kutovima uz transverzalu usporedni. Prema Talesovu teoremu o proporcionalnosti vrijedi

$$\frac{|BC|}{|E'F'|} = \frac{|AC|}{|AF'|} = \frac{|AB|}{|AE'|}, \tag{2.5}$$



Slika 2.4

a zbog $\triangle DEF \cong \triangle AE'F'$ je,

$$\frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|AB|}{|DE|} = k. \tag{2.6}$$

k nazivamo koeficijent sličnosti. $\square$

Teorem 2.5. *Poučak o sličnosti trokuta S-S-S*

Ako su duljine odgovarajućih stranica dvaju trokuta proporcionalne, onda su ti trokuti slični.

Dokaz. Ovaj poučak je obrat prethodnog poučka.

Neka su trokuti ABC i DEF takvi da je $|AB| = k|DE|$, $|BC| = k|EF|$ i $|AC| = k|DF|$ i neka su točke $E' \in \overline{AB}$ i $F' \in \overline{AC}$ takve da je $|AB| = k|AE'|$ i $|AC| = k|AF'|$.

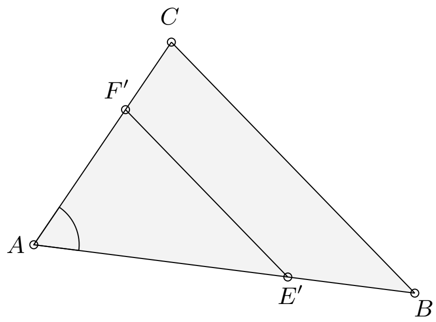
Prema obratu Talesovog teorema o proporcionalnosti je $E'F' \parallel BC$, a pa prema poučku o kutovima uz transverzalu, pravac AC siječe pravce BC i $E'F'$ pod istim kutom i pravac AB siječe pravce BC i $E'F'$ pod istim kutom. Dakle, trokuti ABC i $AE'F'$ imaju sukladne kutove, pa su prema definiciji oni slični.

Prema Talesovom poučku o proporcionalnosti vrijedi $|BC| = k|E'F'|$, pa su prema poučku o sukladnosti trokuta S-S-S trokuti DEF i $AE'F'$ sukladni.

Dakle, onda je $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. $\square$

Teorem 2.6. *Poučak o sličnosti trokuta S-K-S*

Ako se dva trokuta podudaraju u jednom kutu, a duljine odgovarajućih stranica uz taj kut su proporcionalne, onda su ti trokuti slični.

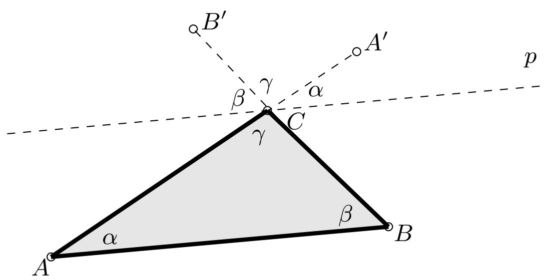


Slika 2.5

Dokaz. Neka su trokuti ABC i DEF takvi da vrijedi $|AB| = k|DE|$, $|AC| = k|DF|$ i $\measuredangle CAB \cong \measuredangle FDE$. Neka su točke $E' \in \overline{AB}$ i $F' \in \overline{AC}$ takve da vrijedi $|AB| = k|AE'|$ i $|AC| = k|AF'|$, tada su prema poučku o sukladnosti S-K-S, trokuti $AE'F'$ i DEF sukladni.

Prema obratu Talesovog teorema o proporcionalnosti pravci $E'F'$ i BC su paralelni. Tada je prema Talesovom poučku o proporcionalnosti $|BC| = k|E'F'| = k|EF|$, pa su trokuti ABC i DEF slični. □

Teorem 2.7. *Zbroj unutarnjih kutova svakog trokuta iznosi 180 °.*



Slika 2.6

Dokaz. Uz oznake kao na slici 2.6., neka je pravac p usporedan s dužinom $\overline{AB}$ i neka su dužine $\overline{CA'}$ i $\overline{CB'}$ produžetci dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Prema poučku o kutovima uz transverzalu, pravac AC siječe pravce AB i p pod istim kutom i pravac BC siječe pravce AB i p pod istim kutom. Kutovi $\measuredangle BCA$ i $\measuredangle B'CA'$ su vršni kutovi, pa su sukladni. Kutovi $\measuredangle(Cp, CB')$, $\measuredangle B'CA'$ i $\measuredangle(CA', Cp)$ zajedno čine ispruženi kut, pa je $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. □

Teorem 2.8. *Poučak o sličnosti trokuta K-K*

Ako se dva kuta dvaju trokuta podudaraju, onda su ti trokuti slični.

Dokaz. Ako se trokuti podudaraju u dva kuta, onda se prema prethodnom teoremu podudaraju i u trećem, pa su prema definiciji ti trokuti slični. □

Teorem 2.9. *Poučak o sličnosti trokuta S-S-K* $^{>}$

Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot duljoj od njih.

Dokaz. Neka su trokuti ABC i DEF takvi da vrijedi $|BC| = k|EF|$, $|AC| = k|DF|$ i $\measuredangle CAB \cong \measuredangle FDE$ i $|BC| > |AB|$.

Neka je trokut $AE'F'$ takav da je $\measuredangle CAB \cong \measuredangle F'AE'$, gdje su točke $E' \in \overline{AB}$ i $F' \in \overline{AC}$ takve da je $|AC| = k|AF'|$ i $BC \parallel E'F'$. Tada prema Talesovom poučku o proporcionalnosti pravci BC i $E'F'$ na krakovima kuta CAB odsjecaju proporcionalne dužine, pa je $|AC| = k|AF'|$ i $|BC| = k|E'F'|$. Tada su prema poučku o sličnosti S-S-S trokuti ABC i $AE'F'$ slični, a zbog $|AC| = k|DF| = k|AF'|$, $|BC| = k|EF| = k|E'F'|$ i $|AB| = k|DE| = k|AE'|$ su prema poučku o sukladnosti S-S-S trokuti $AE'F'$ i DEF sukladni, pa su trokuti ABC i DEF slični. □

Poglavlje 3

Preslikavanja sličnosti

3.1 Homotetija

U prethodnom poglavlju razmatrali smo samo sličnost trokuta. Kako definirati sličnost drugih likova? U tu svrhu uvedimo pojam homotetije.

Definicija 3.1. *Neka je O točka ravnine i $k \neq 0$ realan broj. Homotetija je preslikavanje h ravnine, koje svakoj točki T pridružuje točku $T' = h(T)$ tako da vrijedi:*

(i) točke O, T i T' leže na istom pravcu;

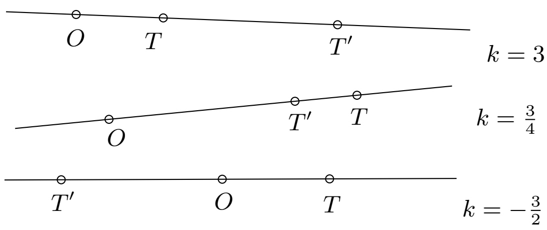
(ii) a) ako je $k > 0$, onda T' leži na polupravcu OT;

b) ako je $k < 0$, onda T' ne leži na polupravcu OT;

(iii) $|OT'| = |k|\,|OT|$.

Točku O nazivamo središte (centar) homotetije, a broj k koeficijent homotetije.

Definicija 3.1. pojavljuje se u udžbenicima za prvi razred, za opće i prirodoslovno-matematičke gimnazije. Ukoliko je osoba koja proučava homotetiju već upoznata s jezikom vektora (usmjerenih dužina), tada pribjegavamo mnogo elegantnijoj definiciji.



Slika 3.1

Definicija 3.2. *Preslikavanje* $h : M \longrightarrow M$ *je homotetija ravnine* M *s koeficijentom homotetije* $k \neq 0$ *i središtem* $O \in M$*, ako za svaku točku* $T \in M$ *postoji točka* $h(T) = T'$ *takva da je* $\overrightarrow{OT'} = k\overrightarrow{OT}$.

Iz definicije slijedi da su točke O, T i T' kolinearne, tj. leže na istom pravcu koji nazivamo *zraka homotetije*. Uobičajena oznaka za homotetiju je h, ali ako želimo naglasiti središte i koeficijent homotetije tada ćemo koristiti oznaku $h(O, k)$.

Teorem 3.3. *Homotetija s koeficijentom* $k = 1$ *preslikava svaku točku ravnine u tu istu točku, pa takvo preslikavanje nazivamo identiteta.*

Dokaz. Neka je h homotetija sa središtem u točki O s koeficijentom homotetije $k = 1$, tada je za proizvoljnu točku T, $\overrightarrow{Oh(T)} = \overrightarrow{OT}$.
Zbog toga što su vektori $\overrightarrow{Oh(T)}$ i $\overrightarrow{OT}$ jednaki i imaju istu početnu točku, tada su im i krajnje točke jednake. Dakle, $h(T) = T$ za svaku točku T, pa je homotetija s koeficijentom homotetije 1 identiteta. □

Centralna simetrija je homotetija s koeficijentom s koeficijentom $k = -1$.

Teorem 3.4. *Homotetija* h *ravnine* M *je bijekcija.*

Dokaz. Prvo ćemo dokazati injektivnost.

Neka su $A, B \in M$, $A \neq B$ i $A' = h(A)$, $B' = h(B)$. Tada je

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A'B'} &= \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA} \\ &= k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = k\overrightarrow{AB}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Budući da je $k \neq 0$ i da su točke A i B različite, tada vektor $\overrightarrow{AB}$ nije nulvektor. Iz jednakosti $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ slijedi da ni $\overrightarrow{A'B'}$ nije nulvektor, tj. A' i B' su različite točke.

Kako bi dokazali da je h bijekcija moramo još dokazati da je i surjekcija. Označimo li $D' = h(D)$, imamo $\overrightarrow{OD'} = k\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC}$. Dakle, $\overrightarrow{OD'}$ i $\overrightarrow{OC}$ su dva jednaka vektora s istom početnom točkom, pa slijedi da im je i završna točka ista, tj. $D' = C$. □

Teorem 3.5. *Neka je $h : M \longrightarrow M$ homotetija ravnine M, tada vrijedi:*

(i) h bijektivno preslikava svaku dužinu $\overline{AB}$ na njoj paralelnu dužinu $\overline{A'B'}$,

(ii) h bijektivno preslikava svaki pravac $p \subset M$ na pravac $p' \subset M$ paralelan sa p,

(iii) ako p sadrži središte homotetije, onda je $h(p) = p$.

Dokaz. Neka je h homotetija sa središtem O i koeficijentom k.

(iii) Neka je p pravac kroz O. Homotetija svaku točku T pravca p preslikava u točku T' tako da su T, O i T' kolinearne. Drugim riječima i točka T' leži na pravcu p, tj. $h(p) \subseteq p$.

Dokažimo i drugu inkluziju, tj. da je svaka točka $A \in p$ slika svake točke s tog istog pravca. Za po volji odabranu točku $A \in p$ definiramo točku B, kao završnu točku vektora $\frac{1}{k}\overrightarrow{OA}$, tj. $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OA}$.

Točke O, A i B su kolinearne, tj. $B \in OA = p$. $\overrightarrow{Oh(B)} = k\overrightarrow{OB} = k \cdot \frac{1}{k}\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}$, tj. $h(B) = A$. Dakle, orginal točke A je točka B, tj. $p \subseteq h(p)$. Zajedno s prvo dokazanim svojstvom imamo da je $p = h(p)$.

(ii) Neka p ne prolazi kroz O i neka su $A, B \in p$ proizvoljne točke takve da je $A' = h(A)$ i $B' = h(B)$.

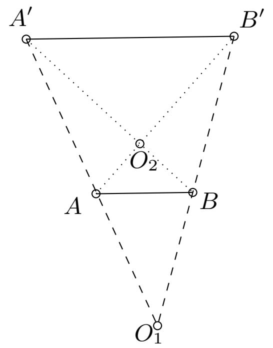
Za svaku točku $C \in p$ postoji $s \in \mathbb{R}$ takav da je $\overrightarrow{AB} = s\overrightarrow{AC}$. Prema teoremu 3.5. vrijede jednakosti $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{AC}$, pa je

$$\overrightarrow{A'B'} = ks\overrightarrow{AC} = ks \cdot \frac{1}{k}\overrightarrow{A'C'} = s\overrightarrow{A'C'}. \tag{3.2}$$

Vektori $\overrightarrow{A'B'}$ i $\overrightarrow{A'C'}$ su kolinearni i imaju istu početnu točku, pa oni leže na istom pravcu $h(p) = p'$, tj. točke A', B' i C' su kolinearne. Dakle, pravci p i p' su paralelni.

(i) Prema *(ii)*, dužine $\overline{A'B'}$ i $\overline{AB}$ leže na paralelnim pravcima, pa je $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$. □

Teorem 3.6. *Neka su dužine $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ paralelne, tada postoje točno dvije homotetije koje dužinu $\overline{AB}$ preslikavaju na dužinu $\overline{A'B'}$.*

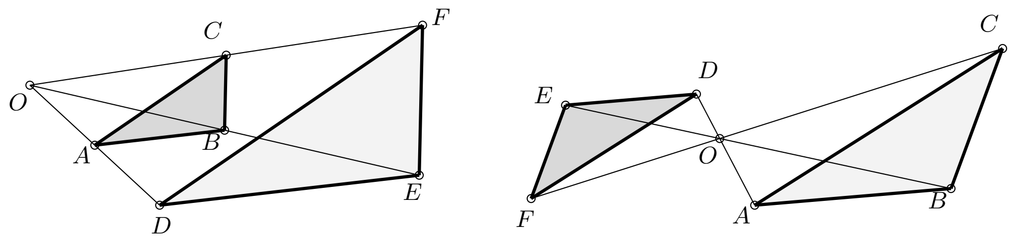


Slika 3.2

Dokaz. Neka su točke A, $B \in p$ i A', $B' \in p'$ takve da $|AB| \neq |A'B'|$. Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{A'B'}$ leže na paralelnim pravcima pa postoji homotetija h_1 sa središtem u točki O_1 i koeficijentom $k > 0$ takva da je $h_1(A) = A'$ i $h_1(B) = B'$. Isto tako postoji homotetija h_2 sa središtem u točki O_2 i koeficijentom $s = -k$ takva da je $h_2(A) = B'$ i $h_2(B) = A'$. □

Teorem 3.7. *Ako trokuti ABC i DEF nisu sukladni i ako im odgovarajuće stranice leže na paralelnim pravcima, tada postoji točno jedna homotetija koja preslikava jedan u drugi.*

Dokaz. Neka su trokuti ABC i DEF takvi da je $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{EF}$ i $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{DF}$, za $k \neq 0, 1$. Neka se pravci AD i BE sijeku u točki O, a pravci AD i CF sijeku u točki S.



(a) $k > 0$ (b) $k < 0$

Slika 3.3

Prema teoremu 3.6. postoje homotetije h, g sa središtima u točkama O, S i koeficijentom k za koje su $h(\overline{AB}) = \overline{DE}$, $g(\overline{AC}) = \overline{DF}$. Odakle slijedi da je $h(A) = g(A) = D$, pa je $h(\overline{AC}) = DF'$, zbog čega je $\overrightarrow{DF'} = k\overrightarrow{AC}$. Ali kako je $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{DF}$, tada je $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DF'}$, pa je $F = F'$. Iz toga slijedi da je $h(\overline{AC}) = g(\overline{AC}) = DF$, pa je $h = g$. Dakle, postoji točno jedna homotetija s danim svojstvima. □

Teorem 3.8. *Ako trokuti ABC, $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ nisu u parovima sukladni i ako im odgovarajuće stranice leže na paralelnim pravcima, tada za svaki par trokuta postoji točno jedna homotetija koja preslikava jedan u drugi i središta tih homotetija su kolinearne točke.*

Dokaz. Neka su $h_1(O_1, k_1)$, $h_2(O_2, k_2)$ i $h(O, k)$ homotetije za koje je $h_1(ABC) = A_1B_1C_1$, $h_2(A_1B_1C_1) = A_2B_2C_2$ i $h(ABC) = A_2B_2C_2$.

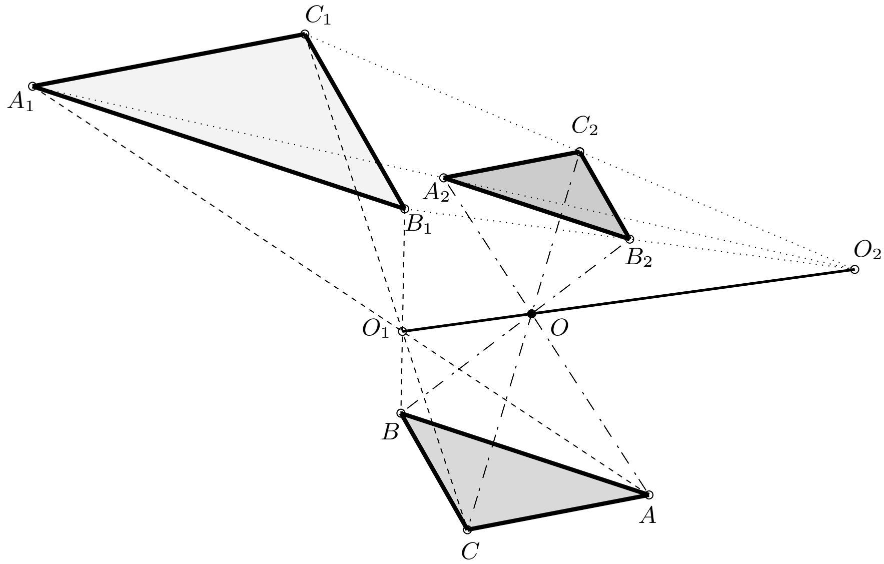
Prema definiciji homotetije vrijedi

$$\overrightarrow{A_2B_2} = k_2\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB} \text{ i } \overrightarrow{A_1B_1} = k_1\overrightarrow{AB} = \frac{k}{k_2}\overrightarrow{AB},$$

iz čega slijedi da je $k = k_1k_2$.

Isto tako prema definiciji homotetije vrijedi

$$\overrightarrow{O_1A_1} = k_1\overrightarrow{O_1A}, \ \overrightarrow{O_2A_2} = k_2\overrightarrow{O_2A_1} \text{ i } \overrightarrow{OA_2} = k\overrightarrow{OA} = k_1k_2\overrightarrow{OA}.$$



Slika 3.4

Zapišimo sada vektore $\overrightarrow{O_1O}$, $\overrightarrow{OO_2}$ i $\overrightarrow{O_1O_2}$ na sljedeći način

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O_1O} &= \overrightarrow{O_1A} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{k_1}\overrightarrow{O_1A_1} - \overrightarrow{OA}\\ \overrightarrow{OO_2} &= \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{O_2A_2} = k_1k_2\overrightarrow{OA} - k_2\overrightarrow{O_2A_1}\\ \overrightarrow{O_1O_2} &= \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OO_2} = \overrightarrow{O_1A_1} - \overrightarrow{O_2A_1}.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem prve i druge jednakosti u treću dobivamo

$$\overrightarrow{OA} = \frac{k_1-1}{k_1(k_1k_2-1)}\overrightarrow{O_1A_1} + \frac{k_2-1}{k_1k_2-1}\overrightarrow{O_2A_1}, \ \ k_1k_2 \neq 1.$$

Sada možemo zapisati vektor $\overrightarrow{O_1O}$ na sljedeći način

$$\overrightarrow{O_1O} = \frac{k_2-1}{k_1k_2-1}(\overrightarrow{O_1A_1} - \overrightarrow{O_2A_1}) = \frac{k_2-1}{k_1k_2-1}\overrightarrow{O_1O_2}, \ \ k_1k_2 \neq 1,$$

odakle vidimo da su za $k_1k_2 \neq 1$ točke O_1, O_2 i O kolinearne.

Uočimo još da je $h(A_1B_1C_1) = h_2(h_1(ABC)) = A_2B_2C_2$, tj. h je kompozicija dviju homotetija h_2 i h_1 s koeficijentom homotetije $k_1k_2 \neq 1$ i središtem u točki $O \in \overline{O_1O_2}$. $\square$

Sad možemo promotriti što se dešava pri uzastupnom izvođenju homotetija kada je $k_1k_2 = 1$.

Teorem 3.9. *Ako je $k_1k_2 = 1$, tada je kompozicija dvije homotetije $h_1(O_1, k_1)$ i $h_2(O_2, k_2)$ translacija.*

Dokaz. Neka je $k_1k_2 = 1$ i neka je točka T po volji odabrana točka za koju je $h_1(T) = T'$ i $h_2(T') = T''$, tada je

$$\begin{aligned}\overrightarrow{TT''} &= \overrightarrow{TO_2} + \overrightarrow{O_2T''} = \overrightarrow{TO_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + k_2\overrightarrow{O_2T'} \\ &= \frac{1}{k_1}\overrightarrow{O_1T'} + \overrightarrow{O_1O_2} + k_2\overrightarrow{O_2T'} = k_2\overrightarrow{T'O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + k_2\overrightarrow{O_2T'} \\ &= k_2(\overrightarrow{O_2T'} + \overrightarrow{T'O_1}) + \overrightarrow{O_1O_2} = k_2\overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} = (1-k_2)\overrightarrow{O_1O_2}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Vektori $\overrightarrow{TT''}$ i $\overrightarrow{O_1O_2}$ su kolinearni pa f preslikava točku T u T'' u smjeru vektora $\overrightarrow{O_1O_2}$, tj. translatira je za vektor $(1-k_2)\overrightarrow{O_1O_2}$.

Ako je $O_1 = O_2$, tada su h_1 i h_2 homotetije s istim središtem i recipročnim koeficijentima, pa je $f = 1_M$ identiteta na M. □

Promotrimo što se dešava pri uzastopnom izvođenju dviju homotetija s istim središtem.

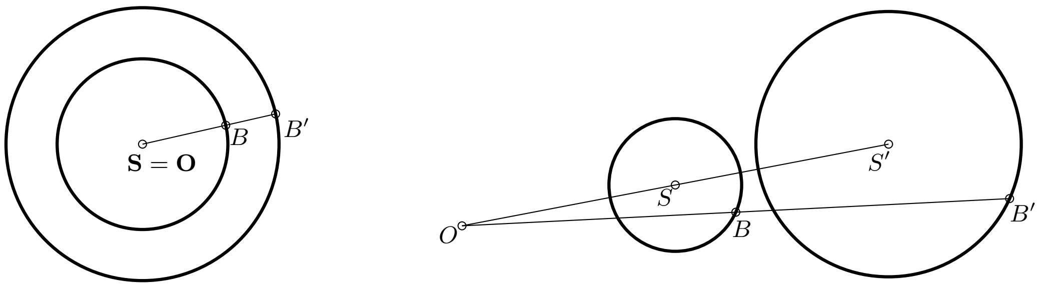
Teorem 3.10. *Kompozicija dviju homotetija s istim središtem je komutativna i to je homotetija s istim središtem i koeficijentom koji je jednak umnošku koeficijenata danih homotetija.*

Dokaz. Neka su $h_1 = h(O, k_1)$ i $h_2 = h(O, k_2)$ dvije homotetije i neka su $f = h_1 \circ h_2$ i $g = h_2 \circ h_1$. Neka je $T \in M$ proizvoljna točka i neka je $h_2(T) = T'$, tada je prema definiciji homotetije $\overrightarrow{OT'} = k_1\overrightarrow{OT}$. Isto tako neka je $h_1(T') = T''$, tada je $\overrightarrow{OT''} = k_2\overrightarrow{OT'}$. Iz toga slijedi da je $\overrightarrow{OT''} = k_2\overrightarrow{OT'} = k_2k_1\overrightarrow{OT}$, pa je f homotetija sa središtem u točki O i koeficijentom k_1k_2.

Neka je $A \in M$ proizvoljna točka i neka je $h_1(A) = A'$, tada je $\overrightarrow{OA'} = k_1\overrightarrow{OA}$. Isto tako neka je $h_2(A') = A''$, tada je $\overrightarrow{OA''} = k_1\overrightarrow{OA'} = k_1k_2\overrightarrow{OA}$, pa je i g homotetija sa središtem u točki O i koeficijentom k_1k_2.

Dakle, $f = g$ je homotetija. $\square$

Teorem 3.11. *Homotetija $h(O, a) : M \longrightarrow M$ preslikava kružnicu $k(S, r)$ u kružnicu $k'(S', |a|r)$. Ako je $O = S$, tada su kružnice k i k' koncentrične kružnice sa središtem u točki S.*



(a) $O = S$ (b) $O \neq S$

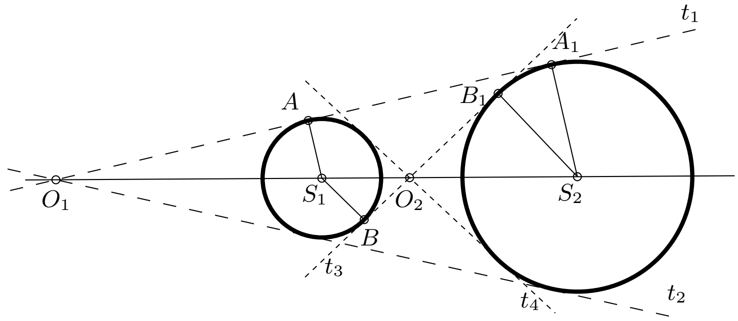
Slika 3.5

Dokaz. Neka je $O = S$. Za proizvoljnu točku $A \in k(S, r)$, za koju je $h(A) = A'$, prema definiciji homotetije vrijedi $|OA'| = |a||OA|$. Znamo da je $|OA| = r$, pa je $|OA'| = |a|r$.

Za $O \neq S$ i $B \in k(S, r)$, h preslikava točke S i B u S' i B'. Prema definiciji homotetije vrijedi $|OS'| = |a||OS|$ i $|OB'| = |a||OB|$. Prema teoremu 3.8. vrijedi $|S'B'| = |a||SB|$. Znamo da je $|SB| = r$, pa je $|S'B'| = |a|r$. $\square$

Teorem 3.12. *Ako su $k_1(S_1, r_1)$ i $k_2(S_2, r_2)$ dvije kružnice takve da je $S_1 \neq S_2$ i $r_1 \neq r_2$, tada postoje točno dvije homotetije sa središtima O_1, $O_2 \in S_1S_2$ koje preslikavaju kružnicu k_1 u kružnicu k_2.*

Dokaz. Neka su $k_1(S_1, r_1)$ i $k_2(S_2, r_2)$ dvije kružnice i neka su pravci t_1, t_2 njihove zajedničke tangente iz točke O_1, a pravci t_3 i t_4 tangente iz točke O_2. Točke S_1 i S_2 su jednako udaljene od tangenti t_1 i t_2, pa one leže na njihovoj simetrali, tj. točke S_1, S_2 i O_1. Isto tako točke S_1 i S_2 su jednako udaljene od tangenti t_3 i t_4, pa su i točke S_1, S_2 i O_2 kolinearne.



Slika 3.6

Neka tangeta t_1 dira kružnice k_1 i k_2 u točkama A i A_1 i to tako da je $\overrightarrow{O_1A_1} = l_1\overrightarrow{O_1}$, gdje je $l_1 > 0$. Prema poučku o sličnosti K-K trokuti $O_1S_1A_1$ i $O_1S_2A_2$ su slični i dva para odgovarajućih stranica leži na istim, a treći par na paralelnim pravcima, pa prema teoremu 3.8. postoji homotetija h_1 sa središtem u točki O_1 i koeficijentom homotetije l_1 za koju je $h_1(k_1(S_1, r_1)) = k_2(S_2, r_2)$.

Neka tangenta t_3 dira kružnice k_1 i k_2 u točkama B i B_1 i to tako da je $\overrightarrow{O_2B_1} = l_2\overrightarrow{O_2B}$, gdje je $l_2 < 0$. Prema poučku o sličnosti K-K trokuti $O_2S_2B_1$ i S_2O_2B su slični i dva para odgovarajućih stranica leži na istim, a treći par na paralelnim pravcima, pa prema teoremu 3.8. postoji homotetija h_2 sa središtem u točki O_2 i koeficijentom homotetije $l_2 < 0$ za koju je $h_2(k_1(S_1, r_1)) = k_2(S_2, r_2)$. □

3.2 Sličnost

Definicija 3.13. *Kompozicija homotetije h_k i izometrije je preslikavanje sličnosti s koeficijentom $s = |k|$.*

Znamo da homotetija preslikava pravac u njemu paralelan pravac, kut u njemu sukladan kut i dužinu u njoj paralelnu dužinu. Pitanje je preslikava li i trokut u njemu sličan trokut.

Teorem 3.14. *Homotetija preslikava trokut u njemu sličan trokut.*

Dokaz. Neka je h homotetija sa središtem u točki O i koeficijentom homotetije $k \neq 0$ i neka je ABC trokut. Prema teoremu 3.6. h preslikava dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ u njima paralelne dužine $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ i $\overline{C'A'}$, pa vrijedi $|A'B'| = |k||AB|$, $|B'C'| = |k||BC|$ i $|A'C'| = |k||AC|$. Prema poučku o sličnosti trokuta S-S-S trokuti ABC i $A'B'C'$ su slični. $\square$

Trokuti moraju zadovoljavati tri uvjeta da bi bili slični i oni su opisani u teoremima o sličnosti trokuta. Kod mnogokuta tako nešto nije moguće. Dva su mnogokuta slična ako su im odgovarajuće stranice proporcionalne i odgovarajući kutovi sukladni. Niti jedan od ovih uvjeta ne može se isključiti a da mnogokuti ostanu i dalje slični. Na primjer, kad bismo razmatrali analogon teorema K-K za poligone, tada bi taj analogon glasio:

Dva su n-terokuta slična ako se podudaraju u $(n-1)$ kutu. No uzmimo pravokutnik koji nije kvadrat i kvadrat. Njihovi kutovi zadovoljavaju teorem K-K za poligone, ali oni nisu slični.

Ako bi razmatrali analogon teorema S-S-S za poligone, on bi glasio:

Dva su poligona slična ako su im odgovarajuće stranice međusobno proporcionalne. Promotrimo li kvadrat i romb, njima su uvijek odgovarajuće stranice međusobno proporcionalne, ali oni nisu slični.

Poglavlje 4

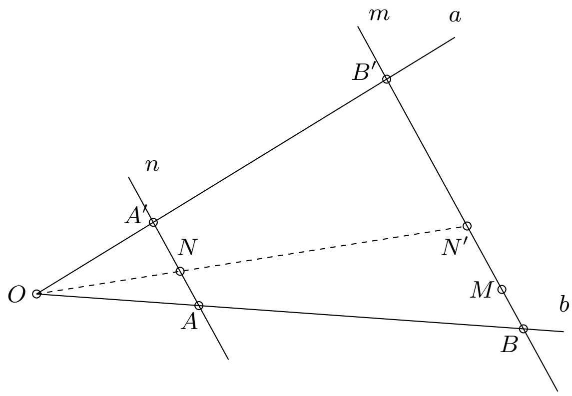
Konstruktivni zadatci

Metoda sličnosti pripada skupini metoda geometrijskih transformacija pomoću kojih konstruiramo neki geometrijski lik. Bit te metode je da se traženi lik ili dio lika podvrgne preslikavanju sličnosti i na taj način dobije figura koju znamo konstruirati, a koja pomaže pri konstrukciji traženog lika.

U nastavi se ova metoda pojavljuje u prvom razredu srednje škole kad se uvodi homotetija i korektno definira sličnost. Ilustrirajmo ovu metodu s nekoliko konstruktivnih zadataka.

Ponekad se u literaturi spominje i metoda homotetije, ali budući da je homotetija ujedno i sličnost, tada je dovoljno govoriti samo o metodi sličnosti.

Zadatak 4.1. *Dan je kut s krakovima a i b i unutar njega dvije točke M i N. Kroz te dvije točke povucite dva paralelna pravca m i n tako da njihovi odresci između pravaca a i b budu u omjeru* $1 : 3$.



Slika 4.1

Rješenje:

(i) *Analiza*

Neka su Oa i Ob dva polupravca i neka su točke M i N unutar manjeg kuta kojeg oni zatvaraju. Neka je točka N' homotetična slika točke N obzirom na točku O i s koeficijentom homotetije $k = 3$, tada je pravac MN jedan od traženih pravaca, a pravac paralelan s njim kroz točku N je drugi traženi pravac.

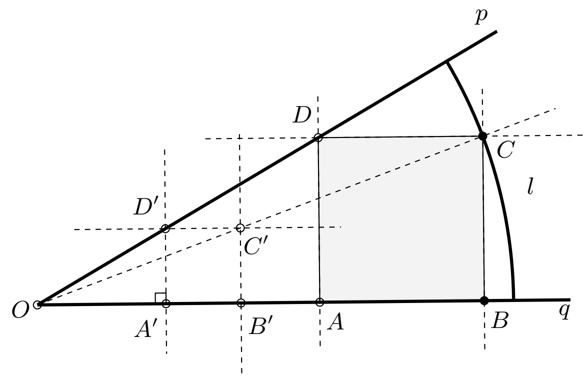
(ii) *Konstrukcija*

1. $h(O, k = 3)$ je homotetija i $\overrightarrow{ON'} = 3\overrightarrow{ON}$
2. pravac kroz točke M i N' je pravac m
3. pravac paralelan s pravcem m kroz točku N je pravac n

(iii) *Dokaz*

Točka N leži na pravcu n, pa njezina homotetična slika N' mora ležati na pravcu m na kojem ujedno leži i točka M. Dakle, pravac MN' je jedan od traženih pravaca.

Zadatak 4.2. *Konstruirajte kvadrat kojemu je jedna stranica na jednom polumjeru danog kružnog isječka, a druga dva vrha na drugom polumjeru odnosno na kružnom luku.*



Slika 4.2

Rješenje:

Ideja je konstruirati kvadrat koji će zadovoljavati dva od tri zadana uvjeta, a onda pogodnom homotetijom taj kvadrat preslikati u traženi kvadrat.

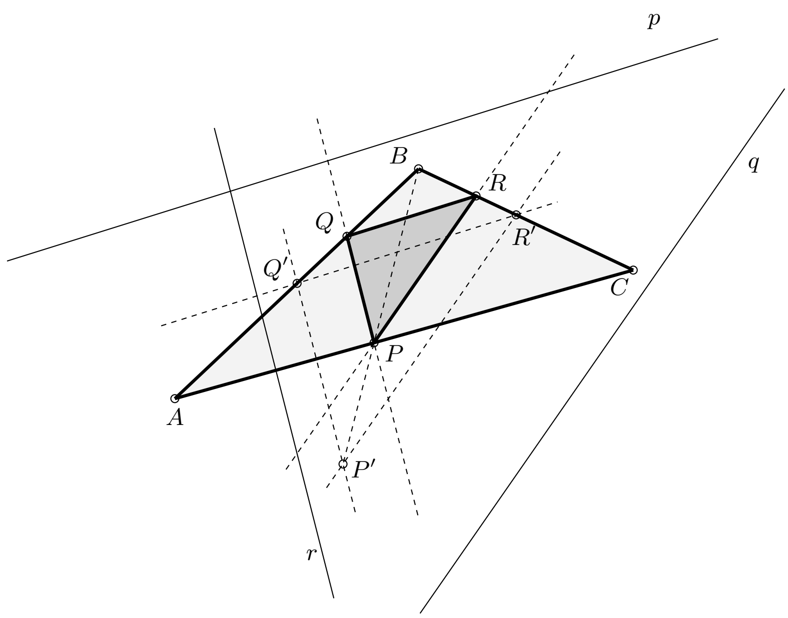
Prvo konstruiramo kvadrat takav da mu jedna stranica leži $A'B'$ na jednom kraku kružnog isječka i jedan vrh D' na drugom kraku. Sjecište paralele s pravcem $A'B'$ kroz točku D' i okomice s istim pravcem kroz točku B' je točka C'. Sjecište pravca OC' s lukom l je točka C koja je ujedno homotetična slika točke C' obzirom na točku O. Sjecište paralele s pravcem $A'B'$ kroz točku C i pravca OD' je točka D. Sjecište okomica na pravac $A'B'$ kroz točke C i D su točke A i B.

Zadatak 4.3. *Dan je trokut ABC i tri neparalelna pravca p, q i r. Konstruirajte trokut PQR koji je upisan trokutu ABC i kojemu su stranice paralelne s danim pravcima.*

Rješenje:

Ideja je konstruirati trokut $P'Q'R'$ kojemu točke Q' i R' leže na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ i to tako da su $P'Q' \parallel r$, $Q'R' \parallel p$ i $R'P' \parallel q$.

Izaberemo proizvoljnu točku $R' \in \overline{BC}$. Presjek paralele s pravcem p kroz točku R' i dužine $\overline{AB}$ je točka Q'. Presjek paralele s pravcem r kroz točku Q' i paralele s pravcem q kroz točku R' je točka P'.



Slika 4.3

Presjek pravaca BP' i AC je točka P, koja je ujedno homotetična slika točke P' obzirom na točku B. Presjek paralele s pravcem q kroz točku P i dužine $\overline{BC}$ je točka R, a presjek paralele s pravcem r kroz točku P i dužine $\overline{AB}$ je točka Q.

Uočimo karakteristiku rješenja ovih zadataka. U zadatku 4.2. traženi kvadrat je morao zadovoljavati 3 svojstva:

a) jedna stranica mu je na polumjeru kružnog isječka,

b) jedan od preostalih vrhova je na drugom polumjeru,

c) posljednji vrh je na kružnom luku.

Ideja je bila konstruirati kvadrat koji će zadovoljavati dva od ta tri uvjeta, a onda pogodnom homotetijom taj kvadrat preslikati u traženi kvadrat.

Riješimo još dva zadatka koji se temelje na ovoj ideji.

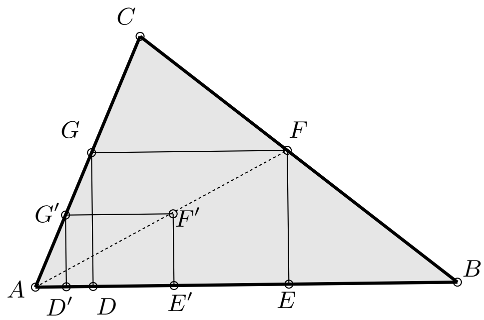
Zadatak 4.4. *U zadani trokut* $\triangle ABC$ *upiši pravokutnik* $DEFG$ *kojemu je* $|DE| : |EF| = 3 : 2$*, tako da vrijedi* $D, E \in \overline{AB}$*.*

Rješenje: Konstrukcija se provodi u četiri etape:

(i) *Analiza:*

Prvo treba konstruirati pravokutnik $D'E'F'G'$ za koji je $|D'E'| = 3$, $|E'F'| = 2$, $D', E' \in \overline{AB}$ i $G' \in \overline{AD}$.

Točka u kojoj pravac AF' siječe dužinu $\overline{BC}$ je upravo vrh F. Pravokutnik $DEFG$ je homotetična slika pravokutnika $D'E'F'G'$, gdje je A središte homotetije, a $k = \frac{|AF|}{|AF'|}$ koeficijent homotetije.

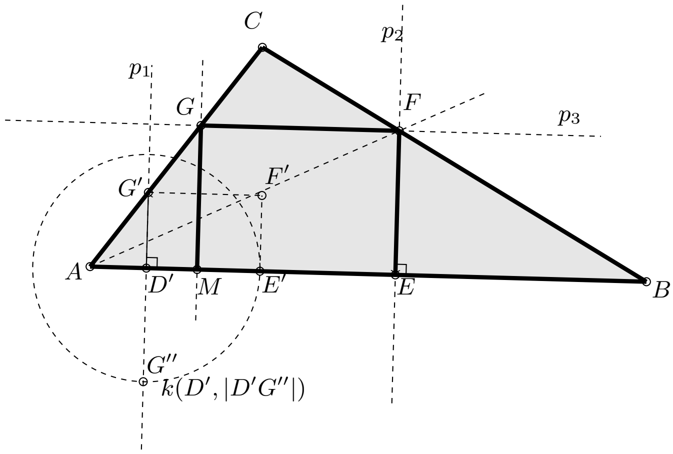


Slika 4.4

(ii) *Konstrukcija:*

1. $G' \in \overline{AC}$
2. p_1 je okomica kroz G' na AB
3. $p_1 \cap AB = \{D'\}$
4. $h(D', -\frac{3}{2})$ je homotetija
5. $h(G') = G''$
6. $k(D', |D'G''|) \cap \overline{AB} = \{E'\}$
7. $t_1(E') = F'$, t_1 je translacija za vektor $\overrightarrow{D'G'}$
8. $AF' \cap \overline{BC} = \{F\}$
9. p_2 je okomica kroz F na AB

10. $p_2 \cap \overline{AB} = \{E\}$
11. p_3 je paralela kroz F s AB
12. $p_3 \cap \overline{AC} = \{G\}$
13. $t_2(G) = D$, t_2 je translacija za vektor $\overrightarrow{FE}$



Slika 4.5

(iii) *Dokaz:*

Znamo da je $h(F') = F$, gdje je h homotetija sa središtem A i koeficijentom homotetije k.

$\overline{F'E'} \parallel \overline{FE} \Rightarrow \triangle AE'F' \sim \triangle AEF \Rightarrow k = \frac{|AF|}{|AF'|} = \frac{|AE|}{|AE'|}$

$\overline{F'G'} \parallel \overline{FG} \Rightarrow \triangle AG'F' \sim \triangle AGF \Rightarrow k = \frac{|AF|}{|AF'|} = \frac{|AG|}{|AG'|}$

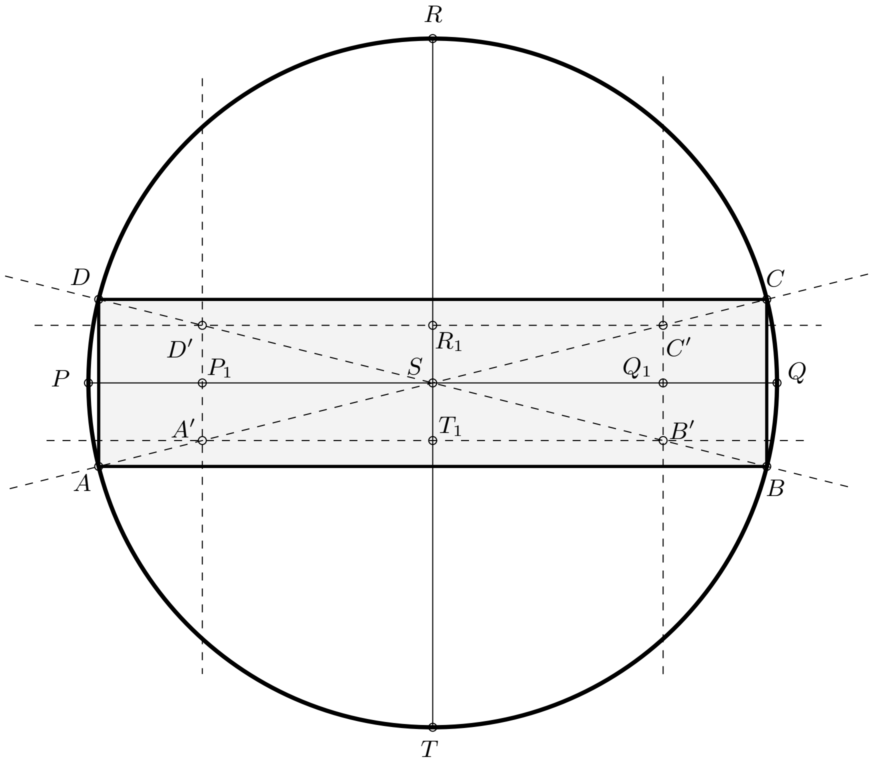
$\overline{G'D'} \parallel \overline{GD} \Rightarrow \triangle AG'D' \sim \triangle AGD \Rightarrow k = \frac{|AG|}{|AG'|} = \frac{|AD|}{|AD'|}$

Četverokut $DEFG$ je homotetična slika četverokuta $D'E'F'G'$.

(iv) *Diskusija:*

Zadatak ima jedinstveno rješenje.

Zadatak 4.5. *U danu kružnicu upišite pravokutnik kojemu se duljine stranica odnose kao* $1:4$.



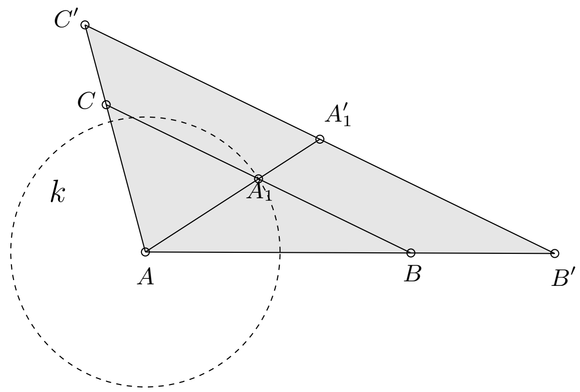
Slika 4.6

Rješenje:

Ideja je konstruirati pravokutnik $A'B'C'D'$ kojemu su stranice u zadanom omjeru i sjecište dijagonala se poklapa sa središtem kružnice. Sjecišta dijagonala tako dobivenog pravokutnika i dane kružnice su vrhovi traženog pravokutnika, i one su ujedno homotetične slike točaka $A'B'C'D'$ obzirom na točku središte kružnice.

Neka je dana kružnica $k(S, r)$. Dužine $\overline{PQ}$ i $\overline{RT}$ su međusobno okomiti promjeri dane kružnice. Točke R_1 i T_1 leže na dužini $\overline{RT}$ sa suprotnih strana točke S tako da je $|R_1S| = |ST_1| = 1$. Isto tako točke P_1 i Q_1 leže na dužini $\overline{PQ}$ sa suprotnih strana točke S tako da je $|P_1S| = |SQ_1| = 4$. Sjecište paralele s pravcem PQ kroz točku R_1 i njihovih okomica kroz točke P_1 i Q_1 su točke D' i C'. Isto tako sjecište paralele s pravcem PQ kroz točku T_1 i njihovih okomica kroz točke P_1 i Q_1 su točke A' i B'. Tako dobiveni četverokut $A'B'C'D'$ je pravokutnik kojemu su stranice u omjeru $1 : 4$, a dijagonale mu se sijeku u središtu dane kružnice. Presjek pravca $A'C'$ i kružnice k su točke A i C, a presjek pravca $B'D'$ i kružnice k su točke B i D. Četverokut $ABCD$ je pravokutnik koji zadvoljava sve zadane uvjete.

Zadatak 4.6. *Konstruirajte trokut* ABC *ako je zadano* $a : b : c = 2 : 3 : 5$ *i* $t_a = 3$ *cm.*



Slika 4.7

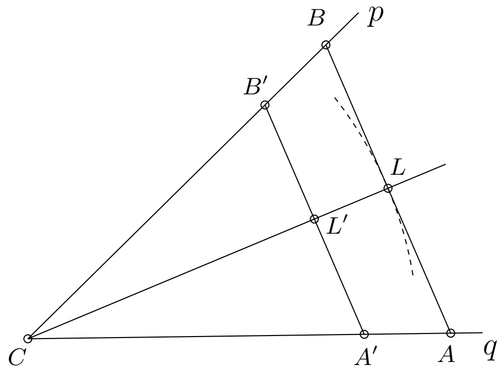
Rješenje:

Prvo ćemo konstruirati trokut $AB'C'$ kojemu su stranice $a' = 2$ cm, $b' = 3$ cm i $c' = 5$ cm. Prema poučku o sličnosti trokuta S-S-S, trokuti ABC i $AB'C'$ su slični. Neka je točka A_1' polovište dužine $\overline{B'C'}$, tada je dužina $\overline{AA_1'}$ težišnica trokuta $AB'C'$ iz vrha A. Presjek kružnice sa središtem u točki A i radijusom t_a i dužine $\overline{AA_1'}$ je upravo točka A_1. Presjek paralele s pravcem $B'C'$ kroz točku A_1 s dužinama AC' i AB' su točke C i B.

Zadatak 4.7. *Konstruirajte trokut* ABC *ako je zadano* $a : b = 3 : 4$*, kut* γ *i* $s_\gamma = 5$ *cm.*

Rješenje:

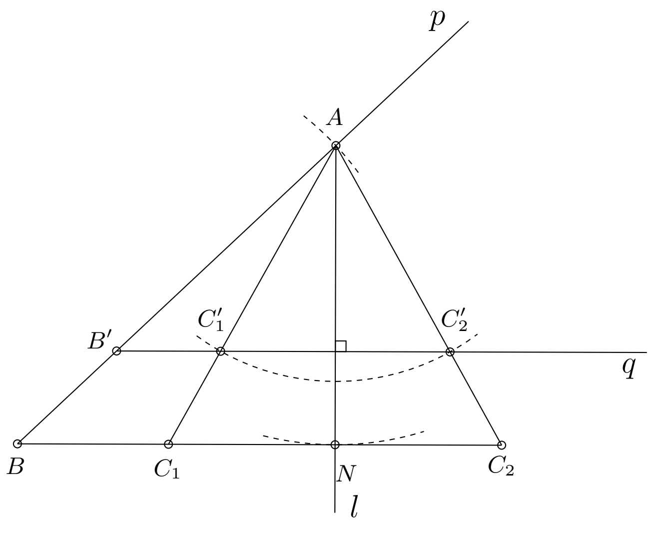
Prvo ćemo konstruirati trokut $A'B'C$ kojemu su stranice $a' = 3$ cm, $b' = 4$ cm i $\measuredangle B'CA' = \gamma$ cm. Prema poučku o sličnosti trokuta S-K-S trokuti $A'B'C$ i ABC su slični. Neka polupravci Cp i Cq zatvaraju kut γ.



Slika 4.8

Na polupravce Cp i Cq nanesemo točke B' i A' tako da je $|CB'| = a'$ i $|CA'| = b'$. Simetrala kuta γ siječe dužinu $A'B'$ u točki L'. Sjecište pravca CL' i kružnog luka sa središtem u točki C polumjera s_γ je točka L. Paralela s $A'B'$ u točki L s polupravcima Cp i Cq su točke B i A.

Zadatak 4.8. *Konstruirajte trokut ABC ako je zadano $b : c = 3 : 5$, kut β i visina $v_a = 4cm$.*



Slika 4.9

Rješenje:

Prvo ćemo konstruirati trokut $AB'C'$ kojemu su stranice $b' = 3$ cm i $c' = 5$ cm i $\measuredangle A'BC' = \beta$. Neka polupravci $B'p$ i $B'q$ zatvaraju kut β. Na polupravac $B'p$ nanesemo točku A tako da je $|B'A| = c'$.

Iz vrha A povučemo polupravac Al koji je okomit na polupravac $B'p$ i presječemo ga kružnim lukom sa središtem u vrhu A i polumjerom v_a u točki N. Kružni luk sa središtem u točki A polumjera b' presjeca polupravac $B'p$ u dvije točke C_1' i C_2' iz čega slijedi da postoje dva rješenja. Paralela s polupravcem $B'p$ siječe pravce AB', AC_1' i AC_2' u točkama B, C_1 i C_2. Općenito kada je zadan omjer stranica i kut nasuprot manje stranice mogu se pojaviti dva rješenja.

Poglavlje 5

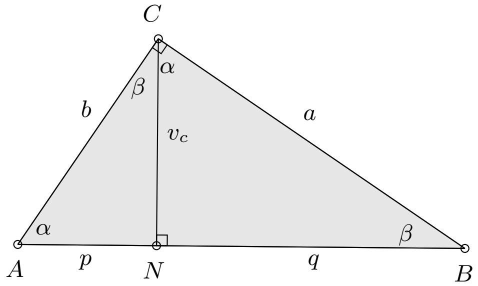
Primjene

Primjena sličnosti u školskoj matematici je vrlo široka, sličnost se koristi ne samo u rješavanju konstruktnih zadataka, već i u dokazima nekih teorema. U ovom ćemo poglavlju istaknuti neka mjesta u nastavi matematike gdje se koristi sličnost.

Teorem 5.1. *Euklidov poučak*

(i) *Visina na hipotenuzu pravokutnog trokuta je geometrijska sredina njenih odsječaka na hipotenuzi.*

(ii) *Kateta pravokutnog trokuta je geometrijska sredina hipotenuze i svoje ortogonalne projekcije na hipotenuzu.*



Slika 5.1

Dokaz. Neka su a, b i c duljine stranica pravokutnog trokuta ABC kutom u vrhu C i neka je točka N ortogonalna projekcija točke C na stranicu $\overline{AB}$, gdje je $v_c = |NC|$. Dužina $\overline{CN}$ dijeli trokut ABC na dva pravokutna trokuta ANC i CNB. Uočimo da je $\measuredangle NBC \cong \measuredangle BCN = \alpha$ i $\measuredangle NCA \cong \measuredangle BCN = \beta$, pa su prema poučku K-K o sličnosti trokuti ABC, ACN i CBN slični.

Iz toga slijedi da je

(*i*) $\frac{p}{v_c} = \frac{v_c}{q}$, pa je $v_c = \sqrt{pq}$, čime je dokazana prva tvrdnja,

(*ii*) $\frac{p}{b} = \frac{b}{c}$ i $\frac{a}{c} = \frac{q}{a}$, pa je $b = \sqrt{pc}$ i $a = \sqrt{qc}$, čime je dokazana i druga tvrdnja.

Lako se može uočiti da iz druge tvrdnje slijedi Pitagorin poučak, tj. trokut ABC je pravokutan s pravim kutom u vrhu C, pa je

$$b^2 + a^2 = pc + qc = c(p+q) = c^2.$$

□

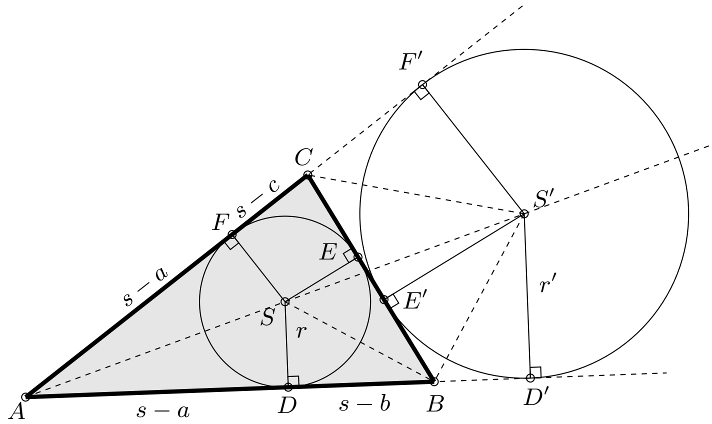
Teorem 5.2. *Heronova formula*

Neka su a, b i c duljine stranica trokuta ABC i neka je s njegov poluopseg, tada je površina tog trokuta dana sa

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Dokaz. Upišimo u trokut ABC kružnicu i označimo njezin polumjer s r i dirališta kružnice s dužinama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ točkama D, E i F. Neka je S' sjecište simetrala kuta $\measuredangle CAB$, vanjskog kuta pri vrhu B i vanjskog kuta pri vrhu C i neka kružnica sa središtem u točki S' i polumjerom r' dira pravce AB, BC i AC u točkama D', E' i F'.

Prema poučku o sukladnosti trokuta S-S-K trokuti $BD'S'$ i $BE'S'$ su sukladni, pa je $|BE'| = |BD'|$. Isto tako trokuti $CE'S'$ i $CF'S'$ su sukladni, pa je $|CE'| = |CF'|$.



Slika 5.2

Sada imamo

$$\begin{aligned}|AD'| + |AF'| &= s - a + s - b + |BD'| + s - a + s - c + |CF'| \\ &= 4s - 2a - b - c + |BD'| + |CF'| \\ &= 4s - a - b - c = 4s - (a + b + c) \\ &= 4s - 2s = 2s.\end{aligned}$$

Obzirom da je $|S'D'| = |S'F'|$, $\measuredangle S'F'A \cong \measuredangle S'D'A$ i S' se nalazi na simetrali kuta $\measuredangle CAB$, trokuti $AF'S'$ i $AD'S'$ su sukladni, pa je $|AE'| = |AF'| = s$. $|AD'|$ možemo zapisati i na ovaj način $|AD'| = |AB| + |BD'|$, pa je $|BD'| = |AD'| - |AB| = s - c$. Prema poučku o sličnosti trokuta K-K trokuti ADS i $AD'S'$ su slični, iz čega slijedi

$$\frac{s-a}{r} = \frac{s}{r'}, \text{ pa je } r' = \frac{sr}{s-a}. \tag{5.1}$$

Isto tako trokuti BSD i $S'BD'$ su slični, iz čega slijedi

$$\frac{r'}{s-c} = \frac{s-b}{r}, \text{ pa je } r' = \frac{(s-b)(s-c)}{r}. \tag{5.2}$$

Izjednačavanjem jednakosti (5.1) i (5.2) dobivamo

$$r^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}, \text{ pa je } r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

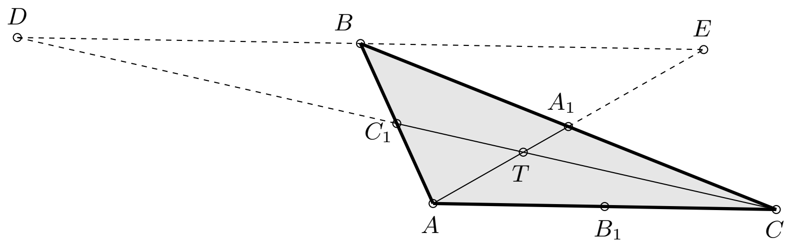
Uvrštavanjem zadnje jednakosti u formulu za površinu trokuta $P = rs$ dobivamo

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}s \\ &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}s^2} \\ &= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}. \end{aligned}$$

□

Teorem 5.3. *Teorem o težištu*

Težišnice trokuta ABC se sijeku u jednoj točki T koju nazivamo težište trokuta i koja dijeli svaku težišnicu u omjeru $2:1$ računajući od vrha.



Slika 5.3

Dokaz. Neka su točke C_1, A_1 i B_1 polovišta dužina $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ redom. Vrhom B povucimo paralelu s AC. Neka su točke D i E sjecišta te paralele i pravaca CC_1 i AA_1 redom. Prema poučku o sličnosti S-K-S trokuti DC_1B i CC_1A su slični, pa je

$$\frac{|DB|}{|AC|} = \frac{|BC_1|}{|AC_1|} = 1.$$

Prema poučku o sličnosti S-K-S trokuti BA_1E i CA_1A su slični, pa je

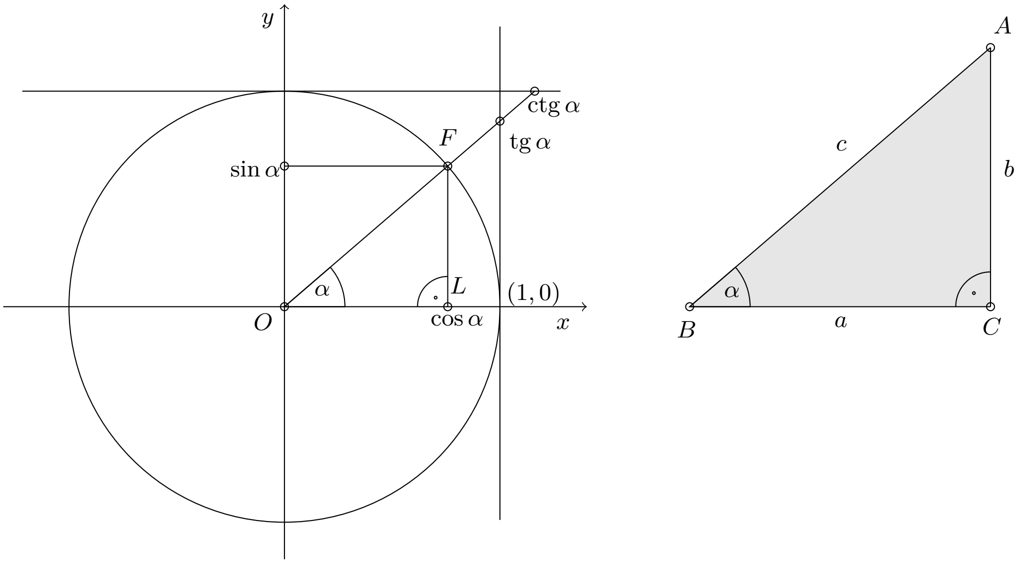
$$\frac{|BE|}{|AC|} = \frac{|BA_1|}{|CA_1|} = 1.$$

Iz sličnosti trokuta DET i CAT i dviju gornjih jednakosti slijedi

$$\frac{|BT|}{|TB_1|} = \frac{|DE|}{|AC|} = \frac{|DB| + |BE|}{|AC|} = \frac{|DB|}{|AC|} + \frac{|BE|}{|AC|} = 1 + 1 = 2.$$

Dokaz je analogan za preostale dvije težišnice. □

Promotrimo vezu trigonometrije i sličnosti kod pravokutnog trokuta.



Slika 5.4

Neka je k jedinična kružnica sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava, tada proizvoljna točka F koja se nalazi na toj kružnici ima koordinate $F(\cos\alpha, \sin\alpha)$, gdje je α kut koji pravac OF zatvara s pozitivnim dijelom osi apscisa. Točka L je ortogonalna projekcija točke F na os apscisa, pa su njezine koordinate $L(\cos\alpha, 0)$. Trokut OLF je pravokutan s katetama duljine $cos\alpha$ i $sin\alpha$ i hipotenuzom duljine 1, pa je prema Pitagorinom poučku $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

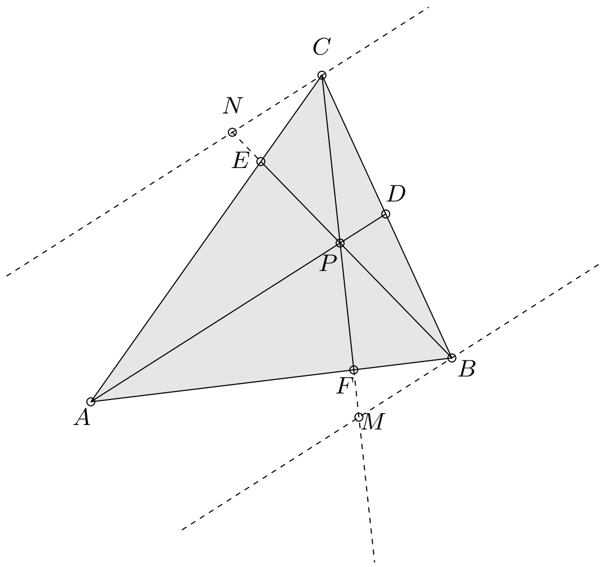
Neka je trokut ABC pravokutan s pravim kutom kod vrha C, i neka je kut $\measuredangle ABC = \alpha$, tada su prema poučku o sličnosti K-K, trokuti OLF i ABC slični. Neka su a i b duljine kateta trokuta, a c duljina hipotenuze ABC, tada vrijede slijedeće jednakosti

$$\cos\alpha = \frac{a}{c} \ \text{ i } \ \sin\alpha = \frac{b}{c}.$$

Teorem 5.4. *Cevin poučak*

Neka se točke D, E i F nalaze na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC. Pravci AD, BE i CF prolaze jednom točkom ako i samo ako vrijedi

$$\frac{|AF|}{|FB|}\frac{|BD|}{|DC|}\frac{|CE|}{|EA|} = 1.$$



Slika 5.5

Dokaz. Neka se točke D, E i F nalaze na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC i neka se pravci AD, BE i CF sijeku u točki P. Točkama B i C povucimo paralele s AD. Neka su točke M i N sjecišta tih dviju paralela s pravcima CP i BP. Prema teoremu s sličnosti S-K-S trokuti AFP i FMB su slični, pa je

$$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|AP|}{|MB|}. \tag{5.3}$$

Isto tako prema teoremu s sličnosti S-K-S trokuti NEC i APE su slični, pa je

$$\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|CN|}{|AP|}. \tag{5.4}$$

Prema teoremu o sličnosti S-S-S trokuti PDC i MBC su slični i trokuti PBD i NBC su slični, pa je

$$\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|MB|}{|PD|} \text{ i } \frac{|BD|}{|BC|} = \frac{|DP|}{|CN|}.$$

Iz posljednje dvije jednakosti dobivamo

$$|BC| = \frac{|MB||CD|}{|PD|} = \frac{|BD||CN|}{|PD|},$$

iz čega slijedi

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|MB|}{|CN|}.$$

Množenjem zadnje jednakosti s (5.1) i (5.2) dobivamo

$$\frac{|AF|}{|FB|}\frac{|BD|}{|DC|}\frac{|CE|}{|EA|} = 1.$$

Dokažimo i obrat.

Neka su točke D, E i F takve da vrijedi

$$\frac{|AF|}{|FB|}\frac{|BD|}{|DC|}\frac{|CE|}{|EA|} = 1.$$

Sa S označimo sjecište pravaca AD i BE. Povucimo pravac CS i neka on u točki F' siječe stranicu $\overline{AB}$. Kako pravci AD, BE i CF' prolaze točkom S, tada vrijedi

$$\frac{|AF'|}{|F'B|}\frac{|BD|}{|DC|}\frac{|CE|}{|EA|} = 1.$$

Izjednačavanjem dobijemo

$$\frac{|AF'|}{|F'B|}\frac{|BD|}{|DC|}\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|AF|}{|FB|}\frac{|BD|}{|DC|}\frac{|CE|}{|EA|},$$

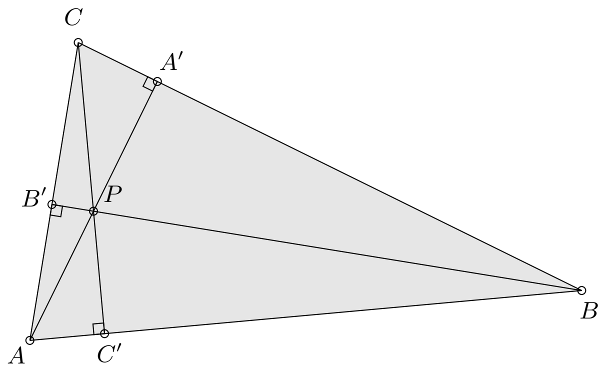
iz čega slijedi

$$\frac{|AF'|}{|F'B|} = \frac{|AF|}{|FB|}.$$

Točke F i F' se nalaze na dužini $\overline{AB}$ i dijele je u istom omjeru, pa je stoga $F = F'$. □

Teorem 5.5. *Teorem o ortocentru*

Pravci na kojima leže visine sijeku se u jednoj točki.



Slika 5.6

Dokaz. Neka su točke A', B' i C' nožišta visina šiljastokutnog trokuta ABC povučenih iz vrhova A, B i C. Dokažemo li da vrijedi jednakost

$$\frac{|AC'|}{|C'B|}\frac{|BA'|}{|A'C|}\frac{|CB'|}{|B'A|} = 1,$$

tada se prema Cevinom teoremu pravci na kojima leže visine trokuta sijeku u jednoj točki. Možemo uočiti sličnost prema K-K poučku o sličnosti između sljedećih parova trokuta:

Trokuti $AA'C$ i $BB'C$ su slični, pa je

$$\frac{|AC'|}{|B'A|} = \frac{|CC'|}{|BB'|}. \tag{5.5}$$

Trokuti $AA'B$ i $CC'B$ su slični, pa je

$$\frac{|BA'|}{|C'B|} = \frac{|AA'|}{|CC'|}. \tag{5.6}$$

Trokuti $AB'B$ i $CC'A$ su slični, pa je

$$\frac{|CB'|}{|CA'|} = \frac{|BB'|}{|AA'|}. \tag{5.7}$$

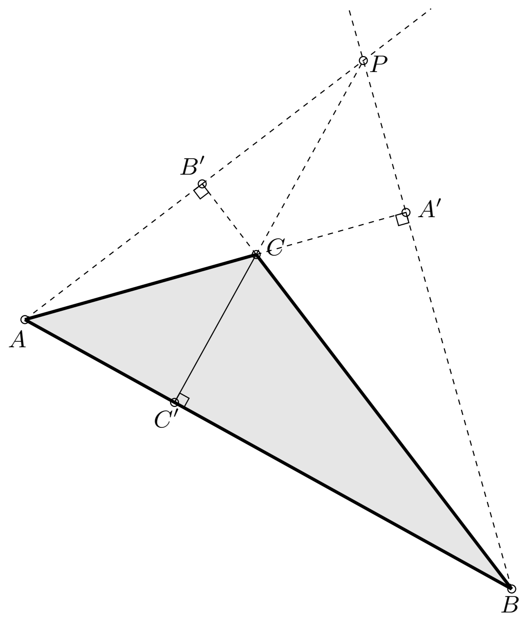
Kada pomnožimo lijeve i desne strane jednakosti (5.3), (5.4) i (5.5) dobivamo jednakost

$$\frac{|AC'|}{|C'B|}\frac{|BA'|}{|A'C|}\frac{|CB'|}{|B'A|} = 1,$$

pa prema Cevinom teoremu možemo zaključiti da se pravci na kojima leže visine šiljastokutnog trokuta sijeku u jednoj točki.

U pravokutnom trokutu katete su međusobno okomite, pa su ujedno jedna drugoj visine i nožišta se nalaze na stranicama trokuta, pa se prema Cevinom teoremu pravci na kojima leže visine trokuta sijeku u jednoj točki, i to upravo u vrhu nasuprot hipotenuze.

Dokažimo sad da tvrdnja teorema vrijedi i za tupokutan trokut.



Slika 5.7

Neka je trokut ABC tupokutan s tupim kutom kod vrha C i neka su točke A' i B' nožišta visina iz vrhova A i B. Neka se pravci AA' i BB' sijeku u točki P. Trokut ABP je šiljastokutan i dužine $\overline{AA'}$ i $\overline{BB'}$ su njegove visine i one se sijeku u vrhu C, pa prema dokazu za šiljastokutan trokut i visina koja leži na pravcu PC prolazi točkom C i siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki C'. Dužina $\overline{CC'}$ je ujedno i visina trokuta ABC iz vrha C, pa je time tvrdnja dokazana. $\square$

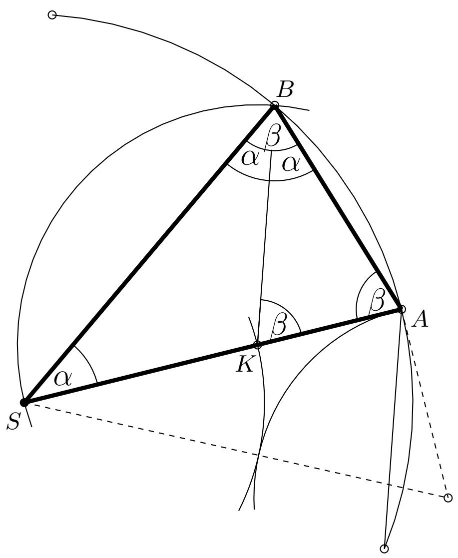
Za dokaze idućih teorema potrebno je definirati pojam zlatnog reza.

Definicija 5.6. *Neka točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ tako da vrijedi*

$$|AB| : |AC| = |AC| : |BC|.$$

Dužinu $\overline{AC}$ zovemo zlatnim rezom dužine $\overline{AB}$.

Teorem 5.7. *U nekom pravokutnom trokutu u kojemu je duljina jedne katete polovica duljine druge katete, zlatni rez veće katete jednak je razlici hipotenuze i manje katete.*



Slika 5.8

Dokaz. Neka je SAB karakteristični trokut pravilnog deseterokuta, tada su $\measuredangle BSA = \alpha = 36°$ i $\measuredangle ABS = \measuredangle SAB = \beta = 72°$ i $\alpha = 2\beta$. Neka je točka K sjecište simetrale $\measuredangle ABS$ i polumjera $\overline{SA}$, tada su $\measuredangle ABK \cong \measuredangle KAB$, pa su prema poučku o sličnosti trokuta K-K trokuti KAB i ABS slični. Iz toga slijedi da je

$$|SA| : |AB| = |AB| : |AK|,$$

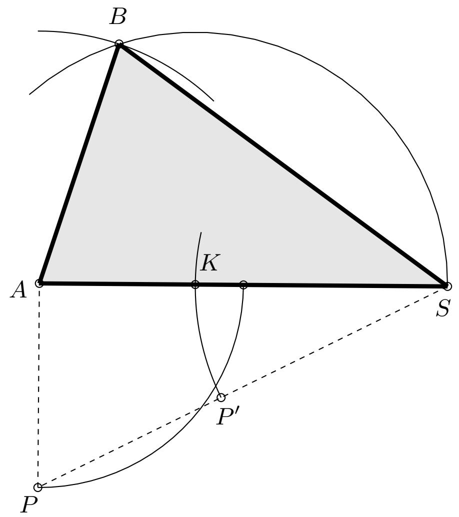
a zbog $|AB| = |BK| = |SK|$ je

$$|SA| : |SK| = |SK| : |AK|,$$

pa je $\overline{SK}$ zlatni rez dužine $\overline{SA}$. $\square$

Na temelju idućeg teorema može se s lakoćom konstruirati pravilni deseterokut kojemu je zadan polumjer opisane kružnice.

Teorem 5.8. *Stranica pravilnog deseterokuta jednaka je zlatnom rezu polumjera tom deseterokutu opisane kružnice.*



Slika 5.9

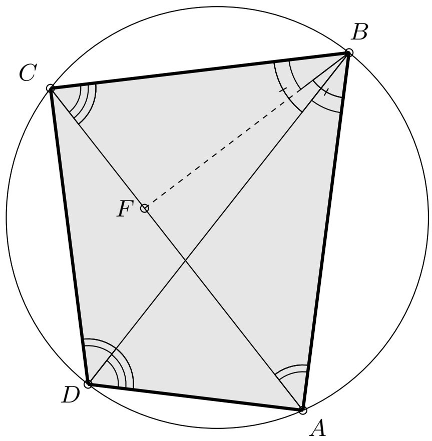
Dokaz. Neka je $\overline{SA}$ polumjer pravilnom deseterokutu opisane kružnice. Ako zarotiramo polovište dužine $\overline{SA}$ za $90°$ oko točke A dobijemo točku P. Presjek kružnog luka sa središtem u točki P i polumjera $|AP|$ i dužine $\overline{SP}$ je točka P', a presjek kružnog luka sa središtem u točki S i polumjera $|SP'|$ s dužinom $\overline{SA}$ je točka K. Prema prethodnom teoremu dužina $\overline{SK}$ je zlatni dužine $\overline{SA}$. Točku B dobijemo kao sjecište kružnog luka sa središtem u točki K i polumjerom $|SK|$ i kružnog luka sa središtem u točki A i polumjerom $|SK|$. Na taj način smo dobili karakteristični trokut pravilnog deseterokuta. $\square$

Ptolomejev teorem je koristan ako želimo odrediti stranice pravilnog peterokuta kojemu je zadan polumjer opisane kružnice.

Teorem 5.9. *Ptolomejev teorem*

Četverokut $ABCD$ je tetivan ako i samo ako vrijedi

$$|AC||BD| = |AB||CD| + |AD||BC|.$$



Slika 5.10

Dokaz. Neka je četverokut $ABCD$ tetivan i neka je točka F na dijagonali $\overline{AC}$ takva da je $\measuredangle FBC \cong \measuredangle ABD$. Kutovi $\measuredangle BCA$ i $\measuredangle BDA$ su obodni kutovi nad istim lukom, pa su sukladni. Prema poučku o sličnosti K-K trokuti BDA i BCF su slični, pa je

$$\frac{|BD|}{|BC|} = \frac{|DA|}{|CF|} \text{ i } |CF| = \frac{|DA||BC|}{|BD|}. \tag{5.8}$$

Uočimo da je $\measuredangle ABD + \measuredangle DBF = \measuredangle FBC + \measuredangle DBF = \measuredangle DBC$. Kutovi $\measuredangle DBC$ i $\measuredangle DAC$ su obodni kutovi nad istim lukom, pa su sukladni. Iz toga slijedi da su trokuti BAF i BDC slični, pa je

$$\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AF|}{|DC|} \text{ i } |AF| = \frac{|AB||DC|}{|BD|}. \tag{5.9}$$

Zbrajanjem jednakosti (5.8) i (5.9) dobivamo

$$|AF| + |CF| = |AC| = \frac{|AB||DC| + |DA||BC|}{|BD|},$$

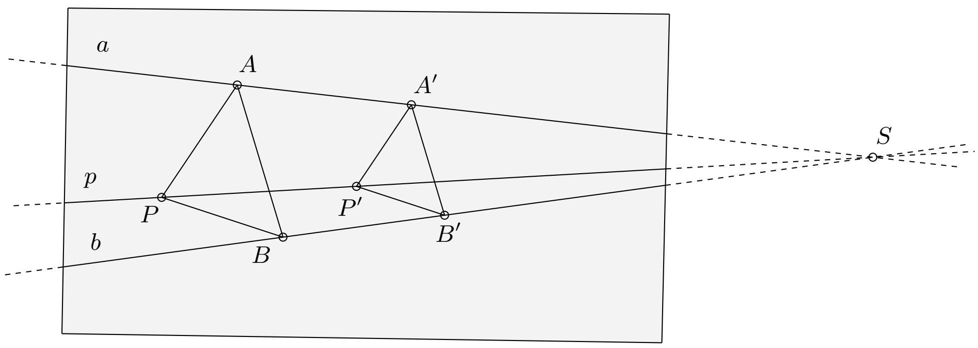
iz čega slijedi

$$|AC||BD| = |AB||DC| + |DA||BC|.$$

□

Sličnost ima primjenu i u konstrukciji s nedostupnim točkama. Riješimo jedan takav zadatak.

Zadatak 5.10. *Neka je zadana točka P. Provucimo pravac p kroz točku P i nedostupnim sjecištem S pravaca a i b.*



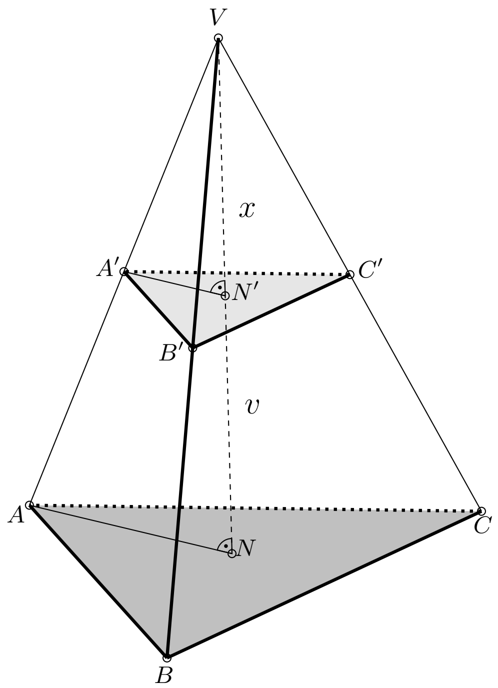
Slika 5.11

Rješenje:

Neka su pravci a i b takvi da im je točka sjecišta S izvan crtaćeg papira i neka je točka P bilo gdje na papiru. Nacrtajmo proizvoljan trokut ABP kojemu su točke A i B na pravcima a i b. Istaknimo točku A' na pravcu a i povucimo kroz nju paralele s pravcima AP i AB. Sjecište pravaca AB i b je točka B'. Povucimo točkom B' pravac paralelan s pravcem AP. Sjecište pravaca AP i BP je točka P'. Tako dobiveni trokut $A'B'P'$ je sličan trokutu ABP. Pravci AA', BB' i CC' su zrake sličnosti (zrake homotetije s pozitivnim koeficijentom) i oni se sijeku u točki S.

Promotrimo primjenu sličnosti kod trostrane piramide.

Neka je $ABCV$ trostrana piramida kojoj je osnovka trokut ABC i neka je presjek piramide ravninom paralelnom s osnovkom trokut $A'B'C'$.



Slika 5.12

Neka su točke N i N' ortogonalne projekcije vrha V na ravnine ABC i $A'B'C'$. Označimo $|NN'| = v$ i $|N'V| = x$. Pravokutni trokuti ANV i $A'N'V$ su slični prema poučku o sličnosti K-K, pa je

$$\frac{|VA'|}{|VA|} = \frac{x}{x+v}.$$

Promotrimo li druga dva para pravokutnih trokuta BNV i $B'N'V$, te CNV i $C'N'V$, dobijemo sljedeće jednakosti

$$\frac{|VB'|}{|VB|} = \frac{x}{x+v} \quad \text{i} \quad \frac{|VC'|}{|VC|} = \frac{x}{x+v}.$$

Dužine $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ leže na paralelnim ravninama ABC i $A'B'C'$ i leže na istoj trećoj ravnini ABA', pa su one paralelne i presjecaju krak AVB iz čega slijedi da su trokuti ABV i $A'B'V$ slični prema poučku K-K. Iz toga slijedi

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|VA'|}{|VA|} = \frac{x}{x+v}.$$

Analogno se dobiva

$$\frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{x}{x+v} \text{ i } \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{x}{x+v},$$

tj. trokuti ABC i $A'B'C'$ su slični prema poučku S-S-S s koeficijentom sličnosti $\frac{x}{x+v}$. Dakle, baze krnje trostrane piramide su slični trokuti.

Bibliografija

[1] A. Marić: Četverokut. Element, Zagreb, 2006.

[2] A. Marić: Planimetrija, zbirka riješenih zadataka. Element, Zagreb, 1996.

[3] D. Palman: Geometrijske konstrukcije. Element, Zagreb, 1996.

[4] B. Dakić, N. Elezović: Matematika 1, udžbenik sa zbirkom zadataka iz matematike za 4. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije 2. dio. Element, Zagreb, 2014.

[5] M. Kurnik, B. Pavković, Ž. Zorić: Matematika 1, udžbenik sa zbirkom zadataka iz matematike za 4. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije 2. dio. Školska knjiga, Zagreb, 2006.

[6] J. Đurović, I. Đurović, S. Rukavina: Matematika 1, zbirka zadataka za 1. razred gimnazije. Element, Zagreb, 1997.

[7] C.W. Dodge: Euclidean Geometry and Transformations. Courier Corporation, 2012.

[8] S. Varošanec: Constructive problems and method of similarity, Math. Comm. Vol3(1998) No2, 237-241.

[9] http://www.mathos.unios.hr/elementarna1/Vjezbe/izometrije.pdf

[10] http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf

Sažetak

U ovom diplomskom radu obrađene su teme sličnost i homotetija kroz pet poglavlja. U prvom poglavlju definirana je izometrija i dokazani su poučci o sukladnosti trokuta. U drugom poglavlju definirana je sličnost i dokazani su poučci o sličnosti trokuta. U trećem poglavlju definirana je homotetija i dokazana su razna svojstva homotetije. U četvrtom poglavlju riješeni su konstruktivni zadaci iz školskih udžbenika. U petom poglavlju su iskazani i dokazani razni teoremi koji se pojavljuju u školskoj matematici, a koji su na neki način povezani sa sličnosti.

Summary

In this thesis we describe similarity and homothety. The first chapter is devoted to isometries and to theorems of congruent triangles. In the second chapter we define the similarity and demonstrate and prove theorems of similarity of triangles. A homothety and demonstrates various properties of it are given in the third chapter, while a sequence of constructive problems related to similarity are solved in the four chapter.Finally, the fifth chapter is devoted to theorems and other parts of mathematics curriculum which involve similarity.

Životopis

Rođena sam 19. prosinca 1979. godine u Zagrebu. Završila sam Prehrambeno-tehnološku srednju školu 1998. godine. 2005. godine sam se udala i 2009. postala majka djevojčice. 2012. godine sam završila preddiplomski sveučilišni studij Matematika.