DEA - slabosti i poboljšanja

Dukanović, Kristina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Kristina Dukanović

DEA - SLABOSTI I POBOLJŠANJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc Lavoslav Čaklović

Zagreb, veljača, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se svom mentoru doc.dr.sc Lavoslavu Čakloviću na velikoj pomoći i trudu oko izrade ovog diplomskog rada.

Hvala i mojim roditeljima, bratu i prijateljima što su vjerovali u mene i što su mi pružili veliku pomoć i podršku tijekom cijelog studiranja.

Sadržaj

Uvod

Analiza omeđivanja podataka (AOMP, engl. DEA) obuhvaća skup metoda i modela koji pripadaju području matematičkog programiranja. Glavna svrha je mjerenje odnosno ocjena proizvodnih učinkovitosti različitih donositelja odluke (engl. Decision making units = DMU). AOMP je relativno mlado područje s tendencijom brzoga širenja, ono povezuje nekoliko znanstvenih područja, uključujući menadžment, operacijska istraživanja, ekonomiju i matematiku. AOMP se prvi puta spomenula i krenula primjenjivati 1978.godine u obliku CCR modela (Charnes, Cooper i Rhodes). U svega tridesetak godina od svoga nastanka, postala je središnja tehnika u čitavome nizu analiza proizvodnosti i efikasnosti korištenih pri uspoređivanju organizacija, tvrtki, regija i zemalja. Iz tog je područja napisano više od četiri tisuće znanstvenih radova i razvijeno je više modela koji se razlikuju po izboru prinosa na opseg djelovanja (konstantni ili varijabilni), po usmjerenosti modela na inpute ili outpute i dr.
Metoda AOMP-a se koristi u profitnome i neprofitnome sektoru posljednja tri desetljeća s tendencijom širenja primjene. Prema Emrouznejadu,(2008.) Parkeru i Tavaresu do 2001. godine je obranjeno ukupno 196 doktorskih disertacija koje su u osnovi razmatranja imale primjenu analize omeđivanja podataka u mjerenju performansi.
AOMP se primjenjuje u industriji, poljoprivredi, trgovini, turizmu, bankarstvu, ekonomiji, zdravstvu ali i drugim područjima što dokazuje njenu važnost i različite mogućnosti primjene. Donositelji odluke (skraćeno DO) mogu biti tvrtke, banke, javne ili zdravstvene institucije i sl.

Svaki DO koristi jedan ili više inputa za proizvodnju jednog ili više outputa. Podaci o izabranim inputima i outputima uvrštavaju se za sve analizirane DO u linearni program koji predstavlja odabrani model AOMP-a. Na taj se način ocjenjuje efikasnost pojedinog DO unutar skupa usporedivih DO. Budući da se efikasnost pojedinog DO mjeri u odnosu na druge DO, govorimo o relativnoj efikasnosti čija se vrijednost nalazi između 0 i 1, a njegova se odstupanja od jedinice pripisuju višku inputa ili manjku outputa. Najuspješniji je onaj DO koji uz što manji input proizvodi što veći output. Najuspješnije DO povezujemo granicom efikasnosti. AOMP određuje empirijsku granicu efikasnosti (granicu proizvodnih mogućnosti) omeđujući inpute odozdo a outpute odozgo. Granica efikasnosti predstavlja ostvariv cilj kojemu trebaju težiti neefikasni DO. Oni efikasnost postižu projekcijom na efikasnu granicu. Tako se, za razliku od tipičnih statističkih pristupa koji se zasnivaju na prosječnim vrijednostima, AOMP bazira na ekstremnim opažanjima, uspoređujući svaki DO samo s onim najboljima.

Za razliku od prijašnjih mjera efikasnosti kao što je ukupni trošak po jedinici proizvodnje, AOMP kreće od najjednostavnije definicije efikasnosti, omjer outputa i inputa. Efikasnost se maksimizira za svakog DO uz neka ograničenja, pa se problem svodi na problem optimizacije. Na temelju poznatih empirijskih podataka o razini inputa i outputa AOMP za svaku jedinicu računa njezinu relativnu efikasnost u odnosu na ostale jedinice. Također se iz podataka određuju i težine pojedinih inputa i outputa.

Težine inputa i outputa određuju se na način da se svakom DO pridružuje skup najpovoljnijih težina. Pojam najpovoljniji znači da je rezultirajući omjer outputa i inputa za svakog DO maksimiziran u odnosu na sve ostale DO kada su te težine pridružene pripadnim inputima i outputima za svakog DO. Potrebno je odrediti relativnu efikasnost svakoga pojedinoga od n promatranih DO_j $(j = 1, ..., n)$ koji se koriste m inputom i ostvaruju s outputa.

Treba imati na umu da su optimalne težine određene pomoću AOMP objektivno utvrđene težine koje ne moraju odgovarati relativnim vrijednosti koje DO dodijeljuju svojim inputima i outputima. To je zapravo snaga, a ne slabost AOMP. Upotrebom linearnog programiranja smanjuju se tehničke poteškoće u modelima. Na taj način možemo koristiti veliki broj DO i ograničiti se na samo nekoliko inputa i outputa.

Najosnovniji modeli AOMP-a su BCC(Banker-Charnes-Cooper) i CCR(Charnes-Cooper-Rhodes) modeli. Osnovna se razlika između tih dvaju modela sastoji u pretpostavljenoj transformaciji inputa u outpute. Ti modeli su relativno jednostavni i odnose se na jedan vremenski period.

U prvom se poglavlju proučavat će se CCR model. Prvo ćemo vidjeti i interpretirati linearni problem. U nastavku prvog poglavlja interpretirat ćemo dualni problem, te na kraju vidjeti moguća poboljšanja efikasnosti DO.

U drugom poglavlju će se proučavati dvostupanjska AOMP (engl. Two-stage DEA). Kod "two-stage" AOMP, svi outputi prve faze nazivaju se srednja (odn. intermedijarna) mjera koja predstavlja inpute u drugoj fazi.

Pogledat ćemo usporedbu dva modela, relacijskog i nezavisnog i pokazati koji od ta dva modela daje bolje rezultate.

U nedavnim studijama o dvostupanjskim proizvodnim procesima, autori koriste radijalne AOMP modele za mjerenje efikasnosti cijelog procesa i efikasnosti svake od dvije faze zasebno.

Poglavlje 1

Analiza omeđivanja podataka

U ovom poglavlju proučavat ćemo najosnovniji model AOMP, CCR model. Prvo ćemo vidjeti geometrijsku interpretaciju CCR modela, a zatim kroz primjer objasniti i svođenje na zadaću linearnog programiranja te interpretirati dobivene rezultate. Najčešći način određivanja i mjerenja efikasnosti je omjer outputa i inputa. Za outpute možemo koristiti ostvarenu dobit, prihode od prodaje, broj dana bolničkog liječenja, broj noćenja, broj dolazaka itd.,dok input može biti broj poslovnica, kapital, broj zaposlenika, broj kreveta, rashodi vezani uz poslovanje, površina objekata. Odabir inputa i outputa jedan je od najvažnijih i ujedno najtežih koraka u analizi koji mora odražavati interes analitičara i menadžera, odnosno opravdati cilj provođenja analize. Inputi i outputi trebaju biti izabrani tako da inputi obuhvate sve resurse, a outputi sve relevantne aktivnosti ili ishode za određenu analizu efikasnosti. Među njima treba izdvojiti one koji najbolje prikazuju proces koji ocjenjujemo i koji daju pravu sliku ukupnog poslovanja. Uz navedeno, treba voditi računa i o odnosu broja varijabli inputa i outputa i broja jedinica koje se analiziraju kako bi rezultati analize bili što bliži stvarnosti. Uz odabir modela, to je skoro jedini element unošenja subjektivnosti u AOMP.

Također, odabir modela AOMP-a može ovisiti o strategiji koju donositelji odluke, analitičari itd. definiraju. Ako je cilj minimizirati inpute uz ostvarenje (barem) zadane razine outputa, koristi se model usmjeren na inpute, dok se za maksimiziranje outputa uz istodobno korištenje (najviše) zadane količine inputa odabire model usmjeren na outpute. S obzirom na različita obilježja modela usmjerenih na inpute, odnosno outpute, razlikuju se i putanje, pa tako i vrijednosti projekcija neefikasnih DO na granicu efikasnosti.

1.1 Geometrijska interpretacija

Primjer 1.1.1. *Pretpostavimo da imamo 5 poslovnica banaka i da svaka od njih obrađuje 1000 transakcija (npr.depoziti) tijekom jednog zajedničkog razdoblja (npr. tjedan, mjesec, godina) zajedničkim korištenjem dva inputa rad bankovnih službenika mjereno u satima rada i materijalnim troškovima mjerenim u dolarima te jednog outputa obrađene transakcije.*

Iz AOMP analize neposredno će slijediti korisne informacije za menadžment banke poput npr. što se treba učiniti da bi se povećala efikasnost neefikasne(poslovnice) te u kojoj mjeri i uz koju cijenu je to moguće postići.

	Service Units	B1	B2	B3	B4	B5
Input 1	Tellers Hours (H)*	20	30	40	20	10
Input 2	Supply Dollars (S)**	300	200	100	200	400
Output	Transactions Processed (T)***	1000	1000	1000	1000	1000

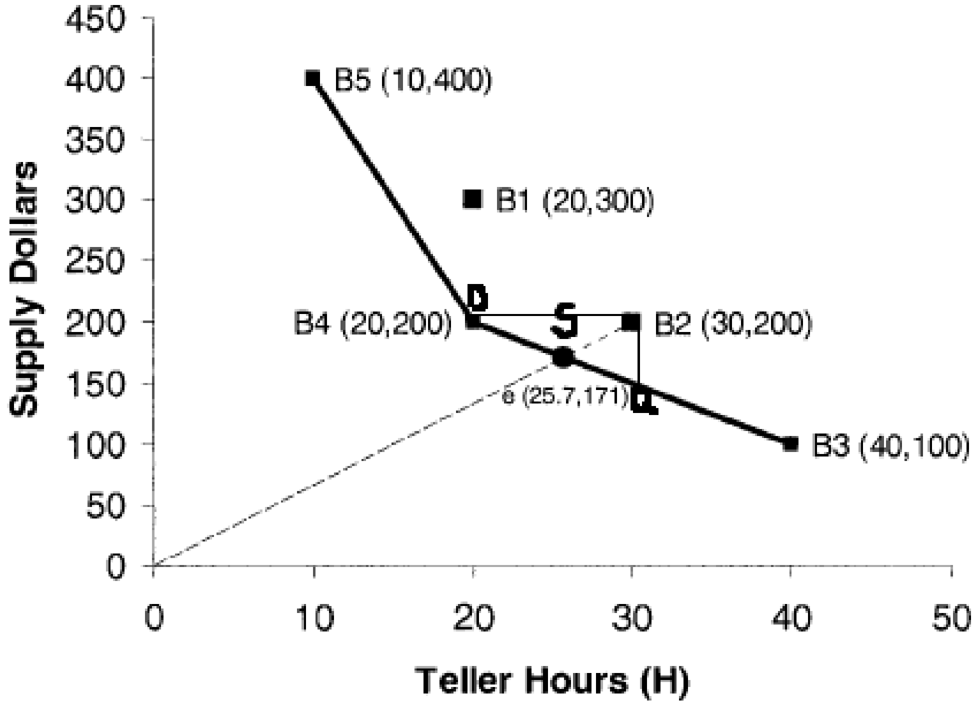
Tablica 1.1: Prvi primjer

*Tellers Hours - sati rada službenika,
**Supply Dollars - materijalni troškovi mjereni u dolarima,
***Transactions Processed - obrađene transakcije

Gledajući dani primjer postavlja se pitanje koja od poslovnica je neefikasna i kolika je veličina te neefikasnosti, te kako i na koji način poboljšati neefikasne poslovnice.
Možemo vidjeti da su poslovnice B1 i B2 relativno neefikasne. B1 proizvodi jednak output kao i poslovnica B4, ali koristi više drugog inputa od B4. B2 također proizvodi jednak output kao i B4 ali i koristi više prvog inputa od B4.
Dakle, poslovnice B3, B4 i B5 su efikasne.
Te tri efikasne poslovnice možemo spojiti linijom koja predstavlja granicu efikasnosti. Na toj liniji, ni jedna poslovnica ne može smanjiti jedan od svojih inputa ili povećati output, a da ne poveća drugi input ili smanji neki od svojih outputa.
Poslovnice koje se nalaze na granici efikasnosti smatramo efikasnima, s koeficijentom efikasnosti jednakim 1.

Ako se za analiziranog DO provjerava njegova mogućnost postizanja istih outputa s manjom količinom inputa, tada govorimo o omeđivanju inputa „odozdo“, imajući u vidu vrijednosti inputa ostalih jedinica uključenih u analizu, a ako se provjerava mogućnost postizanja boljih rezultata s istim ulazima tada govorimo o omeđivanju outputa „odozgo“ na osnovi vrijednosti rezultata ostalih jedinica.

Granica efikasnosti je ostvarivi cilj kojemu bi trebali težiti neefikasni DO, oni koji se ne nalaze na granici. Za svakog neefikasnog DO određuje se i najbolji virtualni DO na granici efikasnosti koji predstavlja moguće poboljšanje promatranog DO. Oni se nalaze na granici efikasnosti, uz pretpostavku je skup proizvodnih mogućnosti konveksan.
Efikasnost pojedinog DO ocjenjuje se u odnosu na DO iz skupa usporedivih DO. Na taj način dobivamo numerički koeficijent koji definira relativnu efikasnost DO.
Povlačenjem vertikalne linije kroz točku B5 i horizontalne linije kroz točku B3, omeđili smo sve točke u područje koje zovemo skup proizvodnih mogućnosti. Neefikasnosti ostalih poslovnica, koje nisu na granici efikasnosti, mjere se u odnosu na efikasnosti poslovnica na granici efikasnosti.



Slika 1.1: Grafički prikaz pet poslovnica banaka

Povucimo liniju iz ishodišta do točke B2. Točka S je sjecište te linije i granice efikasnosti. Sada efikasnost poslovnice B2 možemo procjeniti kao

$$\frac{OS}{OB2} = 0.8571$$

Gdje je *d(0,B2)=202.237*, dok koordinate točke P dobijemo kao sjecište pravaca, korištenjem formule za jednadžbu pravca kroz dvije točke, $x_1 = \frac{200}{30}x_2$ i $5x_1 + x_2 = 200$ iz čega dobijemo da je $x_1 = 25.71$, $x_2 = 171.4$, pa je *d(0,S)* = 173.318.

Otuda slijedi gornji omjer

$$\frac{OS}{OB2} = \frac{173.318}{202.237} = 0.857$$

Vrijednost omjera udaljenosti uvijek će biti između 0 i 1, neovisno o odabiru točke. On zapravo predstavlja kolika je proporcija neefikasnosti inputa za poslovnicu B1 što zapravo znači da se višak svakog od inputa može smanjiti bez promjene u njihovim proporcijama. Drugim riječima, kako se točka S nalazi na pravcu između točaka B3 i B4, efikasnost poslovnice B2 možemo procijeniti kao linearnu kombinaciju efikasnosti poslovnica B3 i B4. B3 i B4 predstavljaju referentni skup poslovnice B2. Jedan od načina da B2 postane efikasna je da reducira svoje inpute na 85.71 % od trenutnih razina inputa. To će pomaknuti B2 do točke e=(25.7,171.4) na granici efikasnosti.
Bilo koja točka na segmentu DQ predstavlja kandidata za poboljšanje efikasnosti poslovnice B1. Ako B1 poboljšavamo prema točki D ili Q, tada smanjujemo samo jedan input i mijenjaju se proporcije inputa.

1.2 CCR model i primarna zadaća

CCR model je vjerojatno najčešće korišteni i najpoznatiji AOMP model koji je zasnovan na pretpostavci o konstantnim prinosima, što znači da svaka izvedivost aktivnosti (x,y) povlači izvedivost aktivnosti (xt, yt) za svaki pozitivan broj t.

Svaka poslovnica banke nam predstavlja jednog donositelja odluke. Za svakog od 5 DO formiraju se, pomoću težina outputa u_r, r=1,...,s i težina inputa v_i, i=1,...,m virtualni input i virtualni output.

$$\textit{virtualni input} = v_1x_{10} + ... + v_mx_{m0}$$
$$\textit{virtualni output} = u_1y_{10} + ... + u_sy_{s0}$$

Cilj je određivanje težina koje maksimiziraju njihov omjer

$$\frac{\textit{virtualni output}}{\textit{virtualni input}}$$

Taj razlomak predstavlja efikasnost. Potrebno je odrediti relativnu efikasnost svakoga pojedinoga od n promatranih DO_j, j=1,...,n. Svaki donositelj odluke koristi m inputa i ostvaruju s outputa. Optimalne težine se mogu razlikovati od jednog do drugog DO i one se izvode iz podataka. Vrlo je važno i da optimalne vrijednosti ne ovise o mjernoj jedinici. Težine inputa i outputa određuju se na način da se svakom DO pridružuje skup najpovoljnijih težina. Pojam najpovoljniji znači da je rezultirajući omjer outputa i inputa za svakog DO maksimiziran u odnosu na sve ostale DO kada su te težine pridružene pripadnim inputima i outputima za svakog DO. S obzirom da efikasnost poprima vrijednosti između 0 i 1, taj uvjet nam daje ograničenja kod maksimizacije.

Dakle, CCR model za DO_0 je

$$(FP_0) \qquad max\ \theta = \frac{u_1y_{10}+u_2y_{20}+...+u_sy_{s0}}{v_1x_{10}+v_2x_{20}+...+v_mx_{m0}} \tag{1.1}$$

uz uvjete

$$\frac{u_1y_{1j}+u_2y_{2j}+...+u_sy_{sj}}{v_1x_{1j}+v_2x_{2j}+...+v_mx_{mj}} <= 1, j=1,...,n$$

$$v_1, ..., v_m >= 0$$
$$u_1, ..., u_s >= 0$$

uz ograničenja da omjer virtualnog outputa i virtualnog inputa ne smije prelaziti 1 za svakog DO. Cilj je dobivanje težina v_i i u_r koje maksimiziraju omjer promatranog DO. Na temelju ograničenja, optimalna objektiva vrijednost θ^* je najviše 1.

DO se može smatrati efikasnim ako ni jedan drugi DO iz skupa s njegovim optimalnim težinskim koeficijentima ne može ostvariti veću vrijednost outputa za danu razinu inputa i takve jedinice definiraju granicu efikasnosti. Drugim riječima efikasnost svakog DO-a je maksimizirana odabirom optimalnih težinskih koeficijenata za svaku varijablu, a DO je efikasan ako ne postoji ni jedan drugi DO iz promatranog skupa, koji sa svojim optimalnim težinskim koeficijentima i njegovim inputima postiže bolje outpute.

Efikasni DO definiraju granicu efikasnosti koja se u CCR modelu zbog pretpostavke konstantnih prinosa prikazuje konveksnom linijom.

Gornji razlomljeni program može se zamijeniti sljedećim ekvivalentnim linearnim programom u obliku multiplikatora

$$(FP_0) \qquad max\ \theta = \mu_1 y_{10} + ... + \mu_s y_{s0} \tag{1.2}$$

uz uvjete

$$\begin{aligned}
&v_1 x_{10} + ... + v_m x_{m0} = 1\\
&\mu_1 y_{1j} + ... + \mu_s y_{sj} <= v_1 x_{1j} + ... + v_m x_{mj}\ ,\ j=1,...,n\\
&v_1, ..., v_m >= 0\\
&\mu_1, ..., \mu_s >= 0
\end{aligned}$$

Gdje smo koristili Charnes-Cooperove transformacije:
Prvo smo odabrali novu varijablu t tako da je

$$t(v_1 x_{10} + ... + v_m x_{m0}) = 1$$

Odakle slijedi da je $t>0$. Ako pomnožimo i brojnik i nazivnik sa t ne mijenja se vrijednost nijednog razlomka. Zato možemo uvesti transformacije oblika

$$\begin{aligned}
\mu_r &= t u_r\ ,\ r = 1,\dots,s\\
v_i &= t v_i\ ,\ i = 1,\dots,m
\end{aligned}$$

Optimalno rješenje ovog linearnog problema je (θ^*, v^*, u^*), gdje su u i v vektori težina inputa i težina outputa.

Definicija 1.2.1. ***(CCR - efikasnost)***

1. DO_0 je CCR-efikasan ako je θ^*=1 i postoji barem jedan optimalan (v^*, u^*) sa v^* >0 i u^* >0.

2. Inače je DO_0 CCR-neefiksan.
Neka je $E'_0 = \left\{DO_j : \sum_{r=1}^{s} u_r^* y_{rj} = \sum_{i=1}^{m} v_i^* x_{ij}\right\}$. Tada se podskup E_0 skup E'_0 koji se sastoji od CCR-efikasnih DO naziva referentni skup za DO_0. Skup koji je razapet sa E_0 naziva se efikasna granica od DO_0.

Drugim riječima, skup svih poslovnica, donositelja odluke, za koje se postiže jednakost nakon uvrštavanja optimalnih težina nazivamo referentni skup. Iz definicije možemo zaključiti da je DO neefikasan ako je $\theta^* < 1$ ili je jedna od vrijednosti v^*, u^*=0.

Usmjerenost modela

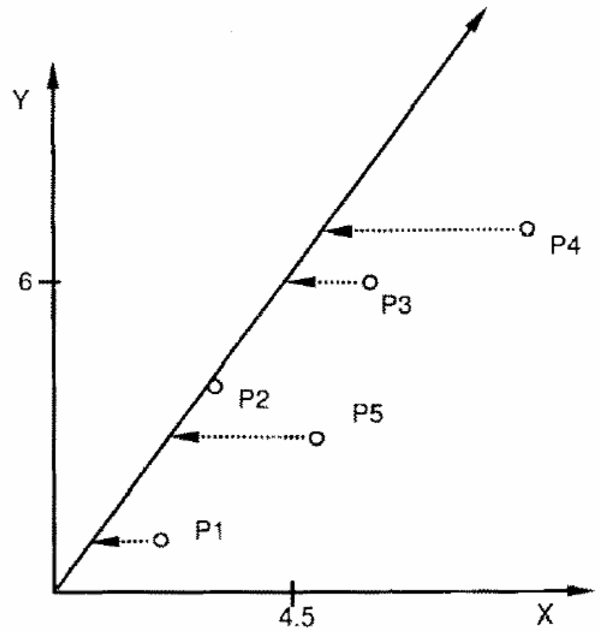
Ako je cilj minimizirati inpute uz ostvarenje (barem) zadane razine outputa, koristi se model usmjeren na inpute, u kojem se virtualni input izjednači s 1, dok se za maksimiziranje outputa uz istodobno korištenje (najviše) zadane količine inputa odabire model usmjeren na outpute, u kojem se virtualni output izjednači s 1.

Modeli analize omeđivanja podataka BCC i CCR mogu biti izlazno usmjereni(IU) ili ulazno usmjereni(UU). Izlazno usmjerenje potiče ostvarivanje većih outputa (odnosno maksimizacija outputa) s ograničenim inputima, a ulazno usmjerenje racionalno korištenje inputa (odnosno minimizacija inputa) za postizanje iste razine outputa.
Dakle u izlazno orjentiranim modelima je neefikasan svaki DO kojem se može povećati bilo koji output bez povećanja bilo kojeg inputa i smanjenja nekoga od preostalih outputa. U ulazno usmjerenim modelima je neefikasan svaki DO obuhvaćen analizom kojoj je moguće smanjiti bilo koji input bez smanjenja bilo kojeg outputa i bez uvećanja bilo kojeg preostalog inputa.

Ulazno usmjereni	**Izlazno usmjereni**
max $\theta = \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{r0}$ uz uvjete $\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = 1$ $\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} <= 0$ *j=1,...,n* $\mu_r, v_i, \theta >=0$	min $\theta = \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0}$ uz uvjete $\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{r0} = 1$ $\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} >= 0$ *j=1,...,n* $\mu_r, v_i, \theta >=0$

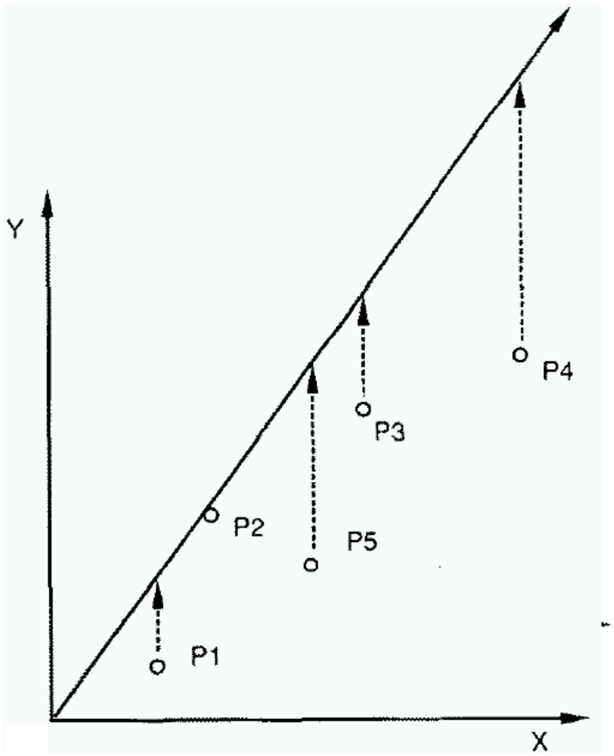
Tablica 1.2: CCR AOMP Modeli

Druga bitna razlika između ova dva modela je u projekciji neefikasnih DO na granicu efikasnosti. U slučaju ulazno usmjerenog modela, projekcija je



Slika 1.2: Ulazno usmjereni model

dok je u slučaju izlazno usmjerenog modela projekcija



Slika 1.3: Izlazno usmjereni model

Svođenje na linearni problem

U ovom primjeru koristit ćemo se sa CCR modelom usmjerenim na inpute.

Poslovnica B1

$$\textit{virtualni input}=20v_1+300v_2$$
$$\textit{virtualni output}=1000u$$

Težine određujemo pomoću linearnog programiranja maksimizirajući

$$\frac{1000u}{20v_1+300v_2}$$

Zadaća linearnog programiranja glasi

$$\max \theta=\frac{1000u}{20v_1+300v_2}$$

Uz ograničenja

$$\frac{1000u}{20v_1+300v_2} <= 1 \text{ (B1)} \qquad \frac{1000u}{30v_1+200v_2} <= 1 \text{ (B2)}$$
$$\frac{1000u}{40v_1+100v_2} <= 1 \text{ (B3)} \qquad \frac{1000u}{20v_1+200v_2} <= 1 \text{ (B4)}$$
$$\frac{1000u}{10v_1+400v_2} <= 1 \text{ (B5)}$$

$$u, v_1, v_2 >= 0$$

Odakle slijedi linearni problem

$\max \theta = 1000u$
$1=20v_1+300v_2$
$1000u <= 20v_1+300v_2$ (B1) $\quad 1000u <= 30v_1+200v_2$ (B2)
$1000u <= 40v_1+100v_2$ (B3) $\quad 1000u <= 20v_1+200v_2$ (B4)
$1000u <= 10v_1+400v_2$ (B5)
$u, v_1, v_2 >= 0$

Rješenje linearnog problema za poslovnicu B1, dobiveno simpleks metodom je

v_1^*= 0,028571429 ,v_2^*=0,001428571,u^*=0,000857143,θ^*= 0,857142857

Kako je u^*=0.8571 <= 1 slijedi da je B1 CCR-neefikasan.

Referentni skup poslovnice B1 je $\{B4, B5\}$. Uvjeti, odnosno nejednakosti, za poslovnice iz referentnog skupa su aktivni, tj. uvrštavanjem optimalnih rješenja tu se postižu jednakosti. S obzirom da je θ^* <1, mora postojati barem jedna nejednakost iz uvjeta kojoj su obje strane jednake nakon uvrštavanja optimalnih težina. U suprotnom bi mogli povećati θ^*. Skup svih poslovnica, donositelja odluke, za koje se postiže jednakosti nakon uvrštavanja optimalnih težina nazivamo referentni skup.

Vrijednosti v_1^*= 0,028571429, v_2^*=0,001428571, u^*=0,000857143 znače da smanjenjem prvog inputa (Teller hour), efikasnost poslovnice B1 će se povećati za 2.86 %, odnosno smanjenjem drugog inputa (supply dollar), efikasnost će se povećati za 0.143 %, a da bi B1 postao relativno efikasan, mora povećati razinu efikasnosti za 14.3 % (100-85.7%). Drugim riječima, B1 može postati efikasan ako smanji sate H za 5 (5*2.86 = 14.3) ili ako smanji S za 100 (100*0.143 = 14.3) ili nekom od kombinacija smanjenja H i S.

Analognim svođenjem na zadaću linearnog problema i njegovim rješavanjem dobivamo rješenja i za preostale 4 poslovnice.

Virtualni input i output poslovnice B2 dani su sa:

$$\textit{virtualni input}=30v_1+200v_2$$
$$\textit{virtualni output}=1000u$$

Rješenje linearnog problema za B2, dobiveno simpleks metodom je

v_1^*=0,0142857, v_2^*=0,002857, u^*=0,00085714,θ^*=0,857142857.

Kako je u^*=0.8571 <= 1 slijedi da je B2 CCR-neefikasan.
Referentni skup poslovnice B2 je $\{B3, B4\}$.

Virtualni input i output poslovnice B3 dani su sa:

$$\textit{virtualni input}=40v_1+100v_2$$
$$\textit{virtualni output}=1000u$$

Rješenje linearnog problema za B3, dobiveno simpleks metodom je
v_1^*=0, v_2^*=0,01, u^*=0,001,θ^*=1.

Kako je u^*=1 slijedi da je B3 CCR-efikasan,a referentni skup poslovnice B3 je $\{B3\}$.

Virtualni input i output poslovnice B4 dani su sa:

*virtualni input=20*v_1*+200*v_2
virtualni output=1000u

Rješenje linearnog problema za B4, dobiveno simpleks metodom je
v_1^*=0,016667, v_2^*=0,00333, u^*=0,001,θ^*=1.

Kako je u^*=1 slijedi da je B4 CCR-efikasan,a referentni skup poslovnice B4 je $\{B4\}$.

Virtualni input i output poslovnice B5 dani su sa:

*virtualni input=10*v_1*+400*v_2
virtualni output=1000u

Rješenje linearnog problema za B5, dobiveno simpleks metodom je
v_1^*=0,0333, v_2^*=0,001667, u^*=0,001,θ^*=1.

Kako je u^*=1 slijedi da je B5 CCR-efikasan,a referentni skup poslovnice B5 je $\{B5\}$.

1.3 CCR model i dualna zadaća

U ovom poglavlju uvodimo novu pretpostavku da su podaci semipozitivni (tj. nenegativni). Osim toga, uvodimo skup proizvodnih mogućnosti sastavljen od podataka o inputu i outputu (X,Y). Pokazat ćemo da i u slučaju dualnog problema dolazimo do istih efikasnosti kao i kod linearnog problema primjenjenog na skup podataka (X,Y). Dualni problem podrazumijeva minimizaciju inputa zadržavanjem output varijabli na danoj razini.

Skup proizvodnih mogućnosti

Kao što smo već spomenuli, napustit ćemo pretpostavku da su svi podaci pozitivni i uvesti novu pretpostavku da su podaci semipozitivni. Preciznije, nenegativnost (tj. semipozitivnost) podrazumijeva da svaki DO ima barem jednu pozitivnu komponentu inputa i outputa $x_j >= 0, x_j \neq 0$ i $y_j >= 0, y_j \neq 0$ za *j=1,...,n*. Par semipozitivnog inputa $x \in \mathbb{R}^m$ i outputa $y \in \mathbb{R}^s$ zvat ćemo djelatnost i izraziti notacijom *(x,y)*. Skup izvedivih aktivnosti(djelatnosti) nazivat ćemo skupom proizvodnih mogućnosti i označavati s *P*.

Pretpostavke za P (skup proizvodnih mogućnosti):
(A1) Promatrane aktivnosti (x_j, y_j)*(j=1,...,n)* pripadaju P
(A2) Ako aktivnost *(x,y)* pripada P, tada će i *(tx,ty)* pripadati P, za bilo koji pozitivni skalar *t>0*.
(A3) Za aktivnost *(x,y)* iz P, bilo koja semipozitivna aktivnost $(\tilde{x}, \tilde{y})$ za koju je $\tilde{x} >= x$ i $\tilde{y} <= y$ pripada P. Drugim riječima, svaka aktivnost čiji input, u bilo kojoj komponenti, nije manji od x, te čiji output, u bilo kojoj komponenti, nije veći od y, je izvediva aktivnost.
(A4) Svaki semipozitivna linearna kombinacija aktivnosti iz P pripada P.

Uređivanjem skupova podataka u matice $X=(x_j)$ i $Y=(y_j)$ možemo definirati skup proizvodnih mogućnosti P koji zadovoljava pretpostavke (A1)-(A4) sa

$$\mathrm{P} = \{(x, y) : x >= X\lambda, y <= Y\lambda, \lambda >= 0\}$$

gdje je λ nenegativni vektor u $\in \mathbb{R}^n$

U primarnom problemu nepoznate varijable su nam bile težine inputa i outputa*(u,v)*, te koeficijent efikasnosti θ. Uzimajući u obzir matricu *(X,Y)* primarni problem dan je sa

(FP_0) $\quad max\ \theta = uy_0$

uz uvjete

$$
\begin{aligned}
&vx_0 = 1\\
&-vX + uY <= 0\\
&v >= 0, u >= 0
\end{aligned}
$$

U dualnom problemu linearne zadaće uvodimo novu realnu varijablu θ i nenegativni vektor $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)^T$, pa dualni problem glasi

$$(DLP_0) \quad min\ \theta \tag{1.3}$$

uz uvjete

$$
\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} <= \lambda x_{i0}\ ,\ i=1,...,m\\
&\textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} >= y_{r0}\ ,\ r=1,...,s\\
&\textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1\\
&\lambda_j >= 0,\ j=1,...,n
\end{aligned}
$$

(DLP_0) ima dopustivo rješenje $\theta = 1, \lambda_o = 1, \lambda_j = 0$ za $j \neq 0$. Iz toga proizlazi da optimalni θ, označen s θ^* nije veći od 1. S druge strane, zbog pretpostavke o nenegativnim podacima, druga nejednakost u gornjim uvjetima, zahtjeva da je $\lambda > 0$ jer je $y_0 >= 0$ i $y_o \neq 0$. To sve zajedno povlači da mora biti $\theta > 0$ odnosno $0 < \theta^* <= 1$. Sada pogledajmo vezu između skupa proizvodnih mogućnosti P i (DLP_0). Ograničenja u (DLP_0) zahtijevaju da je $(\theta x_0; y_0)$ u području P, dok je cilj tražiti optimalnu vrijednost θ koja smanjuje input vektor x_0 radijalno na θx_0 ostajući u P. U (DLP_0) tražimo točku u P koja jamči najmanji output y_0 za (DO_0) u svim komponentama, istovremeno proporcionalno smanjenjujući input vektora x_0 što je više moguće.
Iz svih gornjih pretpostavki je vidljivo da, u slučaju kada je $\theta^* < 1$, $(X\lambda, Y\lambda)$ pokazuje bolje rezultate nego $(\theta x_0, y_0)$. U skladu s time se definiraju dopunske varijable (tzv. „slack“ vektori)

$$
\begin{aligned}
&s^+ = \theta x_0 - X\lambda\\
&s^- = Y\lambda - y_0\\
&s^- >= 0, s^+ >= 0
\end{aligned}
$$

koje se interpretiraju kao višak inputa $s^- \in \mathbb{R}^m$ i manjak outputa $s^+ \in \mathbb{R}^s$.
Za njihovo otkrivanje rješava se dvofazni postupak.

FAZA 1: Minimizacija θ, odnosno rješavanje dualnog problema i dobivanje optimalne vrijednosti θ^*.

FAZA 2: Maksimizira se zbroj viškova inputa i manjkova outputa uz korštenje optimalne vrijednosti θ^* funkcije cilja iz prve faze, odnosno rješava se dualni problem korištenjem (λ, s^-, s^+) i optimalne vrijednosti θ^*

$$\max \omega = es^- + es^+$$

uz uvjete

$$\begin{gathered} s^+ = \theta x_0 - X\lambda \\ s^- = Y\lambda - y_0 \\ \lambda >= 0, s^- >= 0, s^+ >= 0 \end{gathered}$$

gdje je *e=(1,...,1)* pa je $es^- = \sum_{i=1}^m s_i^-$ i $es^+ = \sum_{r=1}^s s_r^+$

odnosno imamo:

$$\max \sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \tag{1.4}$$

uz uvjete

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta^* x_{i0},\ i=1,...,m \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0},\ r=1,...,s \\ \sum_{j=1}^n y_j = 1 \\ \lambda_j >= 0, j=1,...,n \end{gathered}$$

U stvari, gornji modeli (1.3) i (1.4) zajedno predstavljaju dvofazni AOMP model uključen u sljedećem modelu AOMP:

$$\min \theta - \epsilon(\textstyle\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+) \tag{1.5}$$

uz uvjete

$$\begin{gathered} \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta^* x_{i0},\ i=1,...,m \\ \textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0},\ r=1,...,s \\ \textstyle\sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ \lambda_j >= 0, j=1,...,n \end{gathered}$$

gdje je $\epsilon > 0$ definiran da bude manji od bilo kojeg pozitivnog realnog broja.

Definicija 1.3.1. *(Maksimalno „slack" rješenje, Nul-„slack" vektor)*
Optimalno rješenje $(\lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ druge faze se naziva maksimalno „slack" rješenje. Ako maksimalno „slack" rješenje zadovoljava $s^{+*} = 0$ i $s^{+*} = 0$, tada se naziva nul-„slack" vektor.

Definicija 1.3.2. ***(CCR - efikasnost)***
Ako optimalno rješenje $(\theta^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ gornjih linearnih problema zadovoljava $\theta^* = 1$ te $s^+ = 0, s^- = 0$, tada je DO_0 CCR-efiksan. U suprotnom, kažemo da je DO_0 CCR-neefiksan jer oba uvijeta
- *$\theta^* = 1$*
- *Svi "slack" vektori su 0*

moraju biti zadovoljena da bi bila zadovoljena potpuna efikasnost.

Prvi od gornja dva uvijeta naziva se "radijalna efikasnost" odnosno „tehnička efikasnost" jer vrijednost $\theta^* < 0$ znači da se sve vrijednosti inputa istovremeno mogu smanjiti bez promjena omjera outputa ili inputa. Ta neefikasnost je prisutna kod poslovnice B1. Kako je $(1 - \theta^*)$ maksimalno proporcionalno smanjenje koje skup proizvodnih mogućnosti dopušta, svako daljnje smanjenje povezano sa "slackovima" različitim od 0 će promijeniti omjere inputa. Drugim riječima, to je neefikasnost kod koje su samo neki (ali ne svi) outputi ili inputi neefikasni. Ta vrsta neefikasnosti se naziva „mix neefikasnost". Njezinom eliminacijom mijenja se omjer inputa (ili outputa) koji su bili neefikasni.

Definicija 1.3.3. *(Slaba efikasnost)*
Za DO_0 kažemo da je slabo-efiksan ako je $\theta^* = 1$ te $s_i^+ \neq 0$ i/ili $s_r^- \neq 0$ za neki i i/ili r

Treba napomenuti da razvrstavanje efikasnosti na CCR-efikasnost i slabu efikasnost ima različite implikacije.
Slabo efikasne DO, iako su efikasni, ne uvrštavamo u referentne skupove drugih DO, kada radimo postupak računanja efikasnosti u dvije gore navedene faze. Ako se provede samo prva faza slabo efikasni DO mogu se uvrstiti u referentne skupove drugih DO jer je njihova efikasnost u tom slučaju jednaka 1. U svakom slučaju, slabo efikasni DO ne utječu sami na ocjene efikasnost drugih DO. Ako te DO izbacimo iz početne tablice podataka, svi ostali analitički podaci za ostale DO ostat će nepromijenjeni.
Proces analiziranja podataka dobivenih AOMP zahtjeva uzimanje u obzir da li je referentni skup DO točno određen. To je izuzetno važno jer referentni skup DO definira stupanj neefikasnosti svakog pojedinog DO.

Vratimo se nazad na dani primjer s 5 poslovnica banke

	Service Units	B1	B2	B3	B4	B5
Input 1	Tellers Hours (H)*	20	30	40	20	10
Input 2	Supply Dollars (S)**	300	200	100	200	400
Output	Transactions Processed (T)***	1000	1000	1000	1000	1000

Tablica 1.3: Prvi primjer

*Tellers Hours - sati rada službenika,
**Supply Dollars - materijalni troškovi mjereni u dolarima,
***Transactions Processed - obrađene transakcije

Poslovnica B1-dualna zadaća

FAZA 1: *min* θ

$$20\lambda_1 + 30\lambda_2 + 40\lambda_3 + 20\lambda_4 + 10\lambda_5 <= 20\theta$$
$$300\lambda_1 + 200\lambda_2 + 100\lambda_3 + 200\lambda_4 + 400\lambda_5 <= 300\theta$$
$$1000\lambda_1 + 1000\lambda_2 + 1000\lambda_3 + 1000\lambda_4 + 1000\lambda_5 >= 1000$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 >= 0$$

FAZA 2: $max\ s_1^- + s_2^- + s_1^+$

$$20\lambda_1 + 30\lambda_2 + 40\lambda_3 + 20\lambda_4 + 10\lambda_5 + s_1^- = 20\theta^*$$
$$300\lambda_1 + 200\lambda_2 + 100\lambda_3 + 200\lambda_4 + 400\lambda_5 + s_2^- = 300\theta^*$$
$$1000\lambda_1 + 1000\lambda_2 + 1000\lambda_3 + 1000\lambda_4 + 1000\lambda_5 - s_1^+ = 1000$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, s_1^+, s_1^-, s_2^- >= 0$$

Rješavanjem prve faze simpleks metodom dobivamo optimalna rješenja
$\theta^* = 0.8571$, $\lambda_{B4}^* = 0.71428$, $\lambda_{B5}^* = 0.28571$, dok su ostali $\lambda_j = 0$.

Uvrštavanjem $\theta^* = 0.8571$ u drugoj fazi slijedi da je optimalno rješenje za (DLP_{B1})
$\theta^* = 0.8571$
$\lambda_{B4}^* = 0.71428$, $\lambda_{B5}^* = 0.28571$, dok su ostali $\lambda_j = 0$.
$s_1^- = 0$, $s_2^- = 0$, $s^+ = 0$,

te je referentni skup poslovnice B1 $\{B4, B5\}$.

Na isti način, za poslovnicu B2 dobivamo:
Rješavanjem prve faze simpleks metodom dobivamo optimalna rješenja
$\theta^* = 0.8571$, $\lambda_{B3}^* = 0.28571$, $\lambda_{B5}^* = 0.71428$, dok su ostali $\lambda_j = 0$.

Uvrštavanjem $\theta^* = 0.8571$ u drugoj fazi slijedi da je optimalno rješenje za (DLP_{B2})
$\theta^* = 0.8571$
$\lambda_{B3}^* = 0.28571$, $\lambda_{B4}^* = 0.71428$, dok su ostali $\lambda_j = 0$.
$s_1^- = 0$, $s_2^- = 0$, $s^+ = 0$,

te je referentni skup poslovnice B2 $\{B3, B4\}$.

Za poslovnicu B3 dobivamo
Rješavanjem prve faze simpleks metodom dobivamo optimalna rješenja
$\theta^* = 1$, $\lambda_{B3}^* = 1$, dok su ostali $\lambda_j = 0$.

Uvrštavanjem $\theta^* = 1$ u drugoj fazi slijedi da je optimalno rješenje za (DLP_{B3})
$\theta^* = 1$
$\lambda_{B3}^* = 1$, dok su ostali $\lambda_j = 0$.
$s_1^- = 0$, $s_2^- = 0$, $s^+ = 0$,

te je referentni skup poslovnice B3 $\{B3\}$.

Za poslovnicu B4 dobivamo
Rješavanjem prve faze simpleks metodom dobivamo optimalna rješenja
$\theta^* = 1$, $\lambda^*_{B4} = 1$, dok su ostali $\lambda_j = 0$.

Uvrštavanjem $\theta^* = 1$ u drugoj fazi slijedi da je optimalno rješenje za (DLP_{B4})
$\theta^* = 1$
$\lambda^*_{B4} = 1$, dok su ostali $\lambda_j = 0$.
$s_1^- = 0$, $s_2^- = 0$, $s^+ = 0$,
te je referentni skup poslovnice B4 $\{B4\}$.

Za poslovnicu B5 dobivamo
Rješavanjem prve faze simpleks metodom dobivamo optimalna rješenja
$\theta^* = 1$, $\lambda^*_{B5} = 1$, dok su ostali $\lambda_j = 0$.

Uvrštavanjem $\theta^* = 1$ u drugoj fazi slijedi da je optimalno rješenje za (DLP_{B5})
$\theta^* = 1$
$\lambda^*_{B5} = 1$, dok su ostali $\lambda_j = 0$.
$s_1^- = 0$, $s_2^- = 0$, $s^+ = 0$,
te je referentni skup poslovnice B5 $\{B5\}$.

1.4 Referentni skup i poboljšanja u efikasnosti

Definicija 1.4.1. *Za neefikasnog DO_0 definira se njegov referentni skup E_0 baziran na rješenju dobivenom nakon prve i druge faze sa*

$$E_0 = \left\{DO_j : \lambda_j^* > 0\right\}, (j \in \{1, ..., n\})$$

Optimalno rješenje izražava se kao:

$$\theta^* x_0 = \sum_{j\in E_0} x_j\lambda_j^* + s^{-*}$$
$$y_0 = \sum_{j\in E_0} y_j\lambda_j^* - s^{+*}$$

To se može protumačiti na sljedeći način

$$x_0 >= \theta^* x_0 - s^{-*} = \sum_{j\in E_0} x_j\lambda_j^*$$

što znači

$$x_0 >= \text{tehnička - mix neefikasnost}$$
$$= \text{pozitivna kombinacija promatranih ulaznih vrijednosti}$$

Također

$$y_0 <= y_0 + s^{+*} = \sum_{j\in E_0} y_j\lambda_j^*$$

znači

$$y_0 <= \text{dobiveni rezultati + manjak}$$
$$= \text{pozitivna kombinacija promatranih izlaznih vrijednosti}$$

Navedene relacije sugeriraju da efikasnost od (x_0, y_0) za DO_0 može biti postignuta ako se vrijednosti inputa smanje proporcionalno s omjerom θ^* i ako se uklone viškovi inputa zabilježeni u s^{-*}, a vrijednosti outputa povećaju manjkovima outputa u s^{+*}. Opisano poboljšanje može se izraziti slijedećom formulom poznatom pod nazivom CCR-projekcija:

$$\hat{x}_0 = \theta^* x_0 - s^{-*} <= x_0$$
$$\hat{y}_0 = y_0 + s^{+*} >= y_0$$

Treba primijetiti da poboljšanje gornjim formulama treba postići pomoću maksimalnog „slack" rješenja. Ako to poboljšanje učinimo na neki drugi način, poboljšano rješenje $(\hat{x}_0, \hat{y}_0)$ neće nužno biti CCR-efikasno.

Vratimo se nazad na primjer i pogledajmo moguće poboljšanja za neefikasne poslovnice.

Dobili smo da je optimalno rješenje za (DLP_{B1}) je $\theta^* = 0.8571$, te da je $\lambda^*_{B4} = 0.71428$ i $\lambda^*_{B5} = 0.28571$. Te vrijednosti λ predstavljaju omjere u kojima bi se poslovnice B4 i B5 trebale koristiti za poboljšanje efikasnosti poslovnice B1. Stoga je poslovnica B1 tehnički neefikasna, te nema mix neefikasnosti jer su svi ”slackovi” jednaki 0.
Da bi se uklonila ta neefikasnost sve inpute bi trebalo smanjiti za 15 % (odnosno, preciznije za 1-θ^* = 1 - 0.8571 = 0.1429).

Sada vrijednosti inputa i outputa koje su potrebne da bi B1 postala efikasna možemo izraziti kao

0.8571 x (Input od B1) = 0.71428 x (Input od B4) + 0.28571 x (Input od B5)
(Output od B1) = 0.71428 x (Output od B4) + 0.28571 x (Output od B5)

Odnosno, preciznije kao

$$\begin{gathered}\theta^* x_{B1} = \lambda^*_{B4} x_{B4} + \lambda^*_{B5} x_{B5}\\ \theta^* y_{B1} = \lambda^*_{B4} y_{B4} + \lambda^*_{B5} y_{B5}\\ \hat{x}_{B1} \leftarrow 0.8571 x_{B1} = 0.71248 x_{B4} + 0.2851 x_{B5}\\ \hat{y}_{B1} \leftarrow y_{B1} = 0.71248 y_{B4} + 0.2851 y_{B5}\end{gathered}$$

Ovaj način računanja mogućeg poboljšanja može se provesti jedino kada su slack vektori jednaki 0. U protivnom bi trebali uzeti u obzir i njihove vrijednosti.

S obzirom na veličinu koeficijenata na desnoj strani, odnosno vrijednosti, B1 ima više sličnosti sa B4 nego sa B5. Dakle, B1 može postati efikasan ili korištenjem tih koeficijenata $\lambda^*_{B4} = 0.71428$ i $\lambda^*_{B5} = 0.28571$ ili smanjivanjem oba svoja inputa, radijalnim smanjenjem vrijednosti inputa u omjeru 0.8571.

$$\begin{gathered}\hat{x}_{B1,1} \leftarrow \theta^* x_{B1,1} = 0.8571 \text{ x } 20 = 17.142 \text{ (14.29 \% smanjenje)}\\ \hat{x}_{B1,2} \leftarrow \theta^* x_{B1,2} = 0.8571 \text{ x } 300 = 257.13 \text{ (14.29 \% smanjenje)}\\ \hat{y_{B1}} \leftarrow y_{B1} = 1000 \text{ (bez promjene)}\end{gathered}$$

gdje $\hat{x}_{B1,1}$ i $\hat{x}_{B1,2}$ predstavljaju koordinate koje bi poslovnica B1 trebala poprimiti ako želi postati efikasna. Drugim riječima, poslovnica B1 bi trebala smanjiti Teller hours za 2.858 jedinice (20 - 17.142 = 2.858), te Supply dollars za 42.87 jedinica (300 - 257.13 = 42.87) bez da se mijenja vrijednost outputa.

Na sličan način se odrede moguća poboljšana neefikasne poslovnice B2.
Dobili smo da je optimalno rješenje za (DLP_{B2}) je $\theta^* = 0.8571$, te da je $\lambda^*_{B3} = 0.28571$ i $\lambda^*_{B4} = 0.71428$. Te vrijednosti λ predstavljaju omjere u kojima bi se poslovnice B3 i B4 trebale koristiti za poboljšanje efikasnosti poslovnice B2. Stoga je poslovnica B2 tehnički neefikasna, te nema mix neefikasnosti jer su svi "slackovi" jednaki 0.
Da bi se uklonila ta neefikasnost sve inpute bi trebalo smanjiti za 15 % (odnosno, preciznije za 1-θ^* = 1 - 0.8571 = 0.1429).

Sada vrijednosti inputa i outputa koje su potrebne da bi B2 postala efikasna možemo izraziti kao

0.8571 x (Input od B2) = 0.28571 x (Input od B3) + 0.71428 x (Input od B4)
(Output od B2) = 0.28571 x (Output od B3) + 0.71428 x (Output od B4)

S obzirom na veličinu koeficijenata na desnoj strani, odnosno vrijednosti, B2 ima više sličnosti sa B4 nego sa B3. Dakle, B2 može postati efikasan ili korištenjem tih koeficijenata $\lambda^*_{B4} = 0.71428$ i $\lambda^*_{B3} = 0.28571$ ili smanjivanjem oba svoja inputa, radijalnim smanjenjem vrijednosti inputa u omjeru 0.8571.

$$\hat{x}_1 \leftarrow \theta^* x_1 = 0.8571 \text{ x } 30 = 25.713 \text{ (14.29 \% smanjenje)}$$
$$\hat{x}_2 \leftarrow \theta^* x_2 = 0.8571 \text{ x } 200 = 171.42 \text{ (14.29 \% smanjenje)}$$
$$\hat{y} \leftarrow y = 1000 \text{ (bez promjene)}$$

gdje $\hat{x}_1$ i $\hat{x}_2$ predstavljaju koordinate koje bi poslovnica B2 trebala poprimiti ako želi postati efikasna. Poslovnica B2 bi trebala smanjiti Teller hours za 4.287 jedinicA (30 - 25.713 = 4.287), te Supply dollars za 28.58 jedinica (200 - 171.42 = 28.58) bez da se mijenja vrijednost outputa.

Pošto u danom primjeru nije prisutna mix neefikasnost, proširit ćemo dani primjer sa još poslovnica banaka i pogledati što se u tom slučaju dobije.

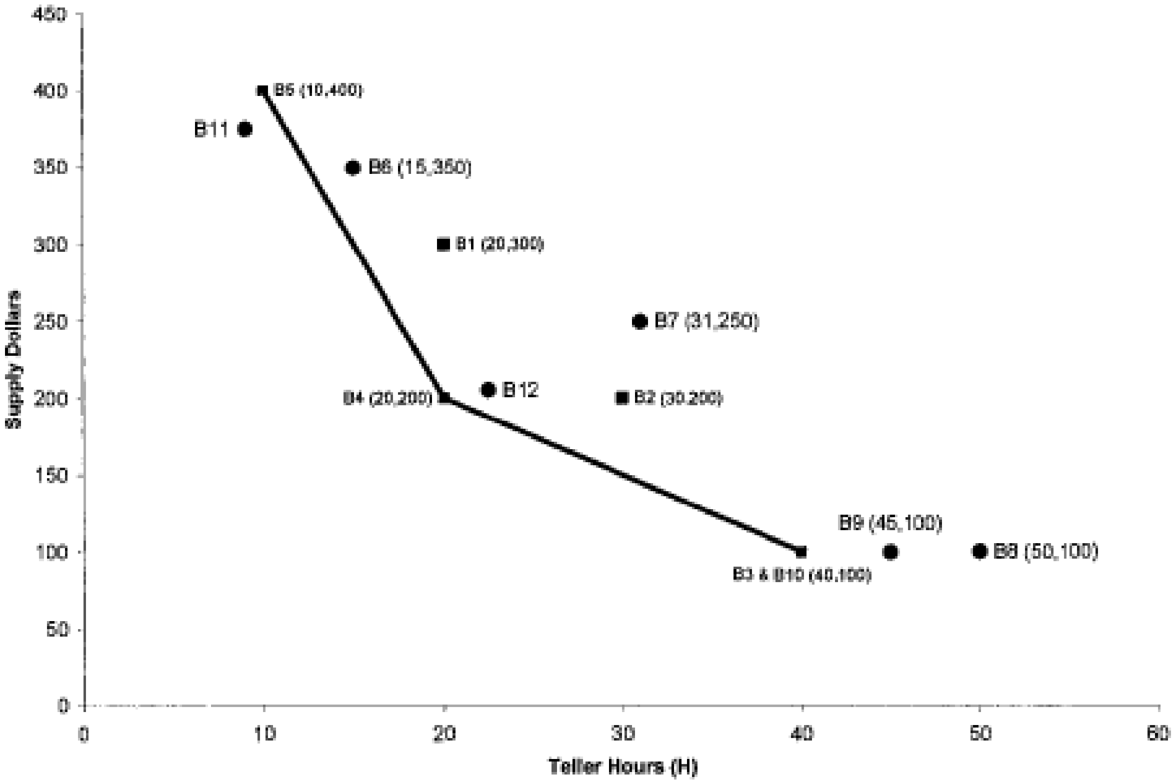
Primjer 1.4.2.

	Service Units	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Input 1	Tellers Hours (H)	20	30	40	20	10	15	31	50	45	80	18	45
Input 2	Supply Dollars(S)	300	200	100	200	400	350	250	100	100	200	750	410
Output	Transactions Processed (T)	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	2000	2000	2000

Tablica 1.4: Drugi primjer

*Tellers Hours - sati rada službenika,
**Supply Dollars - materijalni troškovi mjereni u dolarima,
***Transactions Processed - obrađene transakcije

Grafički prikaz



Slika 1.4: Grafički prikaz proširenog primjera poslovnica banaka

Rješavanjem dualne zadaće dobijemo sljedeća rješenja:

DO.	Imena	Efikasnosti ulazno usmjerenog modela	Optimalne lambde s referentnim skupovima			
1	B1	0,83824	0,706	B4	0,147	B11
2	B2	0,85714	0,286	B3	0,714	B4
3	B3	1,00000	1,000	B3		
4	B4	1,00000	1,000	B4		
5	B5	0,92683	0,024	B4	0,488	B11
6	B6	0,88031	0,382	B4	0,309	B11
7	B7	0,74074	0,148	B3	0,852	B4
8	B8	1,00000	1,000	B3		
9	B9	1,00000	1,000	B3		
10	B10	1,00000	2,000	B3		
11	B11	1,00000	1,000	B11		
12	B12	0,94488	0,126	B3	1,874	B4

Tablica 1.5: Rješenja dualne zadaće

		Input "Slack" vektori		Output "Slack" vektori
DMU No.	**DMU Name**	***Teller Hours(H)****	***Supply Dollars (S)*****	**Transactions Processed(T)*****
1	B1	0,00000	0,00000	0,00000
2	B2	0,00000	0,00000	0,00000
3	B3	0,00000	0,00000	0,00000
4	B4	0,00000	0,00000	0,00000
5	B5	0,00000	0,00000	0,00000
6	B6	0,00000	0,00000	0,00000
7	B7	0,00000	0,00000	0,00000
8	B8	10,00000	0,00000	0,00000
9	B9	5,00000	0,00000	0,00000
10	B10	0,00000	0,00000	0,00000
11	B11	0,00000	0,00000	0,00000
12	B12	0,00000	0,00000	0,00000

Tablica 1.6: "Slacks" rješenja

*Tellers Hours - sati rada službenika,
**Supply Dollars - materijalni troškovi mjereni u dolarima,
***Transactions Processed - obrađene transakcije

Rješavanjem linearnog problema simpleks metodom za poslovnicu B8 dobijemo:

v_1^*=0, v_2^*=0,01, u^*=0,001,θ^*=1.

Kako je u^*=1 slijedi da je B8 CCR-efikasan, no s druge strane je v_1^*=0 što ukazuje da je B8 zapravo neefikasan.
Ako pogledamo poslovnicu B3 kojoj je prvi input jednak 40, a drugi jednak 100 s outputom jednakim 1000, vidimo da B8 proizvodi jednaki output kao i B3, s istom razinom drugog inputa jednakog 100, no prvi input je za 10 jedinica veći i jednak je 50, odnosno B8 ima viška 10 jedinica prvog inputa. Zbog toga je taj nedostatak skriven postavljanjem težine prvog inputa , u optimalnom rješenju, na nulu. Takvu neefikasnost nazvali smo mix neefikasnost.

Slično vrijedi i za poslovnicu B9, kojoj su rješenja dobivena simpleks metodom:

v_1^*=0, v_2^*=0,01, u^*=0,001,θ^*=1.

Ako opet pogledamo poslovnicu B3 vidimo da B9 proizvodi jednaki output kao i B3, s istom razinom drugog inputa jednakog 100, no prvi input je za 5 jedinica veći i jednak je 40, odnosno B9 ima viška 5 jedinica prvog inputa. Zbog toga je taj nedostatak skriven postavljanjem težine prvog inputa na nulu.

S druge strane, rješavanjem dualnog problema za poslovnice B8 i B9 imamo:

Poslovnica B8:

FAZA 1: *min* θ

$$
\begin{aligned}
&20\lambda_1 + 30\lambda_2 + ... + 45\lambda_{12} <= 50\theta\\
&300\lambda_1 + 200\lambda_2 + ... + 410\lambda_{12} <= 100\theta\\
&1000\lambda_1 + 1000\lambda_2 + ... + 2000\lambda_{12} >= 1000\\
&\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_{12} = 1\\
&\lambda_1, ..., \lambda_{12} >= 0
\end{aligned}
$$

FAZA 2: *max* $s_1^- + s_2^- + s_1^+$

$$20\lambda_1 + 30\lambda_2 + ... + 45\lambda_{12} + s_1^- = 50\theta^*$$
$$300\lambda_1 + 200\lambda_2 + ... + 410\lambda_{12} + s_2^- = 410\theta^*$$
$$1000\lambda_1 + 1000\lambda_2 + ... + 2000\lambda_{12} - s_1^+ = 1000$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_{12} = 1$$
$$\lambda_1, ..., \lambda_{12}, s_1^+, s_1^-, s_2^- >= 0$$

Rješavanjem prve faze simpleks metodom dobivamo optimalna rješenja
$\theta^* = 1$, $\lambda_{B3}^* = 1$, dok su ostali $\lambda_j = 0$.

Uvrštavanjem $\theta^* = 1$ u drugoj fazi slijedi da je optimalno rješenje za (DLP_{B8})
$\theta^* = 1$
$\lambda_{B3}^* = 1$, dok su ostali $\lambda_j = 0$.
$s_1^- = 10$, $s_2^- = 0$, $s^+ = 0$,

te je referentni skup poslovnice B8 $\{B3\}$.

Poslovnica B9:

FAZA 1: *min* θ

$$20\lambda_1 + 30\lambda_2 + ... + 45\lambda_{12} <= 45\theta$$
$$300\lambda_1 + 200\lambda_2 + ... + 410\lambda_{12} <= 100\theta$$
$$1000\lambda_1 + 1000\lambda_2 + ... + 2000\lambda_{12} >= 1000$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_{12} = 1$$
$$\lambda_1, ..., \lambda_{12} >= 0$$

FAZA 2: *max* $s_1^- + s_2^- + s_1^+$

$$20\lambda_1 + 30\lambda_2 + ... + 45\lambda_{12} + s_1^- = 45\theta^*$$
$$300\lambda_1 + 200\lambda_2 + ... + 410\lambda_{12} + s_2^- = 410\theta^*$$
$$1000\lambda_1 + 1000\lambda_2 + ... + 2000\lambda_{12} - s_1^+ = 1000$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_{12} = 1$$
$$\lambda_1, ..., \lambda_{12}, s_1^+, s_1^-, s_2^- >= 0$$

Rješavanjem prve faze simpleks metodom dobivamo optimalna rješenja
$\theta^* = 1$, $\lambda^*_{B3} = 1$, dok su ostali $\lambda_j = 0$.

Uvrštavanjem $\theta^* = 1$ u drugoj fazi slijedi da je optimalno rješenje za (DLP_{B9})
$\theta^* = 1$
$\lambda^*_{B3} = 1$, dok su ostali $\lambda_j = 0$.
$s_1^- = 5$, $s_2^- = 0$, $s^+ = 0$,

te je referentni skup poslovnice B9 $\{B3\}$.

Vidimo da se kod poslovnice B8 višak u prvog inputu x1 jer je $s_1 = 10$. Zbog toga inpute i outpute poslovnice B8 možemo zapisati kao:

$$\begin{aligned} x_{B8,1} &= x_{B3,1} + s_1^{-*} = x_{B3,1} + 10 \\ x_{B8,2} &= x_{B3,2} + s_2^{-*} = x_{B3,2} \\ y_{B8} &= y_{B3} + s^{+*} = y_{B3} \end{aligned}$$

Dakle, da bi poslovnica B8 postala efikasna, mora smanjiti prvi inputa za deset jedinica. Tako ćemo dobiti da je $s_1^{-*} = 0$ bez pogoršanja ostalih inputa i outputa, te tako poslovnica B8 postaje efikasna.
Smanjenjem prvog inputa poslovnica B8 imat će iste vrijednosti inputa i outputa kao i poslovnica B3.

Na isti način se postigne efikasnost poslovnice B9, kod koje je $s_1 = 5$, dakle smanjenjem prvog inputa za 5 jedinica poslovnica B9 također postaje efikasna.

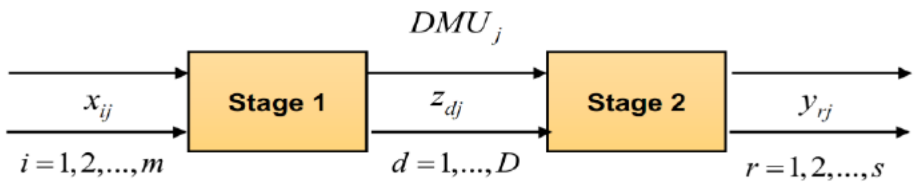
Poglavlje 2

”Two-stage” analiza omeđivanja podataka

Analiza omeđivanja podataka je metoda za određivanje najboljeg donositelja odluke između različitih i međusobno usporedivih donositelja odluke, te se pritom koristi veći broj inputa i outputa. U mnogim slučajevima, DO mogu imati dvostupanjsku strukturu s intermerdijarnom mjerom. Drugim riječima, DO može imati dvostupanjsku strukturu u kojoj se u prvoj fazi koriste inputi za proizvodnju outputa (tzv intermedijarne, odnosno srednje mjere) koji onda postaju inputi u drugoj fazi. Ključna činjenica je da su outputi prve faze jedini inputi u drugoj fazi, odnosno, osim intermedijarnih mjera, prva faza nema vlastite outpute i druga faza nema vlastite inpute.
U ovom poglavlju proučavat ćemo uobičajeni put za dvostupanjsku strukturu, a to je primjena standardnog AOMP modela zasebno u svakoj fazi. Tim pristupom dvostupanjskoj strukturi najviše su se bavili Kao i Hwang(2008). Ti su autori promijenili standardni AOMP model uzimajući u obzir odnose dviju faza unutar cjelokupne strukture. U njihovim radovima, efikasnost cjelokupne strukture može se rastaviti u produkt efikasnosti svake faze. Treba imati na umu da takav dekompozicija efikasnost nije dostupna u standardnom AOMP pristupu.

2.1 Relacijski "Two-stage" AOMP model

Pretpostavimo da imamo n DO i da svaki DO_j j=1,...,n ima m inputa u prvoj fazi, x_{ij}, i=1,...,m i D outputa z_{dj}, d=1,...,D. Svaki donositelj odluke koristi m inputa i ostvaruju s outputa. Outpute u drugoj fazi označavat ćemo s y_{rj}, r=1,...,s. Ovih D outputa (tzv. intermedijarne mjere) zatim postaju inputi u drugoj fazi.



Slika 2.1: Two stage proces

Temeljeno na CCR modelu (Charnes et al., 1978) efikasnosti za DO_{j0} u prvoj i drugoj fazi mogu se odrediti kao dva zasebna CCR ulazno orjentirana modela, odnosno:

$$
\begin{aligned}
e^1_{j0} &= max \frac{\sum_{d=1}^{D} w_d z_{dj_0}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij_0}} \\
&\text{uz uvjete} \\
&\frac{\sum_{d=1}^{D} w_d z_{dj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} <= 1, j=1,...,n \\
&w_d, v_i >= 0 \\
e^2_{j0} &= max \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj_0}}{\sum_{d=1}^{D} \widetilde{w_d} z_{dj_0}} \\
&\text{uz uvjete} \\
&\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{d=1}^{D} \widetilde{w_d} z_{dj}} <= 1, j=1,...,n
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

$\widetilde{w_d}, u_r >= 0$

gdje su $v_i, u_r, w_d, \widetilde{w_d}$ nenegativne težine.

Liang et al.(2006) pokazuje da se korištenjem koncepta kooperativne teorije igara, odnosno centraliziranog modela kontrole dvostupanjski proces može promatrati kao jedan gdje faze zajednički određuju optimalne težine na intermedijarne mjere kako bi se povećala njihova efikasnost. Drugim riječima, kooperativni ili centralizirani pristup je okarakteriziran s $w_d = \widetilde{w_d}$ u modelu (2.1), te činjenicom da su efikasnosti obje faze optimizirane istovremeno.
Kao i Hwang (2008) su predložili dvostupanjsku AOMP u kojem se zahtjevalo da težine povezane sa z_{dj} $w_d, \widetilde{w_d}$ budu jednake.

Njihov model za mjerenje ukupne efikasnosti DO jednak je:

$$e_0 = max\ e_0^1\ e_0^2 = \frac{\sum_{d=1}^{D} w_d z_{dj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{d=1}^{D} \widetilde{w_d} z_{dj}} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r_0}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i_0}}$$

uz uvjete: $e_j^1 < 1, e_j^2 < 1$

$$\text{odnosno: } \frac{\sum_{d=1}^{D} w_d z_{dj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} <= 1, j=1,...,n$$

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{d=1}^{D} \widetilde{w_d} z_{dj}} <= 1, j=1,...,n$$

$$v_i, u_r >=0,\ w_d = \widetilde{w_d}$$

gdje $\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{d=1}^{D} \widetilde{w_d} z_{dj}} <= 1$ i $\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{d=1}^{D} \widetilde{w_d} z_{dj}} <= 1$ impliciraju $\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} <= 1.$

odnosno model za računanje ukupne efikasnosti dvostupanjskog procesa je jednak:

$$e_0 = max \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0}} \tag{2.2}$$

uz uvjete:

$$\frac{\sum_{d=1}^{D} w_d z_{dj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} <= 1, j=1,...,n$$

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{d=1}^{D} \widetilde{w_d} z_{dj}} <= 1, j=1,...,n$$

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} <= 1, j=1,...,n$$

$$v_i, u_r >=0, w_d = \widetilde{w_d}$$

Pretpostavka da je $w_d = \widetilde{w_d}$ je ključna i racionalna pretpostavka. Bez te pretpostavke, model (2.2) postaje nelinearan, također bez ove pretpostavke rješavanje modela (2.2) se svodi na dva neovisna CCR modela za svaku fazu posebno, te za ukupnu efikasnost gledamo geometrijsku sredinu ta dva CCR modela.

Svođenjem gornjeg modela na zadaću linearnog programiranja dobijemo:

$$e_0 = max \sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0} \tag{2.3}$$

uz uvjete

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} <= 0, j=1,...,n$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{d=1}^{D} w_d z_{dj} <= 0, j=1,...,n$$

$$\sum_{d=1}^{D} w_d z_{dj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} <= 0, j=1,...,n$$

$$w_d >= 0, d=1,...,D; v_i >= 0, i=1,...,m; u_r >= 0, r=1,...,s$$

Nakon što smo izačunali sve vrijednosti u_r^*, v_i^*, w_d^* efikasnosti se dobivaju naknadno kao:

$$e_0 = \sum_{r=1}^{s} u_r^* y_{rj},$$
$$e_{j0}^1 = \frac{\sum_{d=1}^{D} w_d^* z_{dj_0}}{\sum_{i=1}^{m} v_i^* x_{ij_0}},$$
$$e_{j0}^2 = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r^* y_{rj_0}}{\sum_{d=1}^{D} w_d^* z_{dj_0}}$$

Očigledno, vrijedi $e_0 = e_0^1 e_0^2$

Vrlo vjerojatno, optimalne vrijednosti dobivene iz gornjeg modela (2.3) možda neće biti jedinstvena rješenja, pa prema tome i dekompozicija $e_0 = e_0^1 e_0^2$ također neće biti jedinstvena. Zbog toga, za usporedbu e_0^1 ili e_0^2 među svim DO nedostaje zajednički temelj usporedbe. Jedno od rješenja ovog problema je pronaći skup vrijednosti koje proizvode najveći e_0^1 zadržavajući pritom ukupnu efikasnost na razini e_0 izračunatoj u modelu (2.3). Maksimalna vrijednost e_0^1 može se odrediti na sljedeći način:

$$e_0^{1,+} = max \sum_{d=1}^{D} w_d z_{dj_0} \tag{2.4}$$

uz uvjete

$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = 1$

$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj_0}$ - $e_0 \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij_0} = 0$

$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}$ - $\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}$ <= 0, j=1,...,n

$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}$ - $\sum_{d=1}^{D} w_d z_{dj}$ <= 0, j=1,...,n

$\sum_{d=1}^{D} w_d z_{dj}$ - $\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}$ <= 0, j=1,...,n

w_d >= 0, d=1,...,D; v_i >= 0, i=1,...,m; u_r >= 0, r=1,...,s

Kada se izračuna $e_0^{1,+}$ iz gornjeg modela (2.4), minimum druge faze odredi se kao $e_0^{2,-} = \frac{e_0}{e_0^{1,+}}$.

Alternativno, ako je efikasnost druge faze od većeg interesa za DO, tada se maksimum od e_0^2 može odrediti na sličan način kao i e_0^1 u modelu (2.4):

$$e_0^{2,+} = max \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj_0} \tag{2.5}$$

uz uvjete

$\sum_{d=1}^{D} w_d z_{d0} = 1$

$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj_0}$ - $e_0 \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij_0} = 0$

$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}$ - $\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}$ <= 0, j=1,...,n

$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}$ - $\sum_{d=1}^{D} w_d z_{dj}$ <= 0, j=1,...,n

$\sum_{d=1}^{D} w_d z_{dj}$ - $\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}$ <= 0, j=1,...,n

w_d >= 0, d=1,...,D; v_i >= 0, i=1,...,m; u_r >= 0, r=1,...,s

odakle se minimum od e_0^1 odredi kao $e_0^1 = \frac{e_0}{e_0^{2,+}}$.

Iz modela (2.4) i (2.5) slijedi da je $e_0^{1,-} = e_0^{1,+}$ ako i samo ako je $e_0^{2,-} = e_0^{2,+}$, te ako je $e_0^{1,-} = e_0^{1,+}$ ili $e_0^{2,-} = e_0^{2,+}$, tada su e_0^1 i e_0^2 jedinstveno određeni modelom (2.3).

Teorem 2.1.1. *Za DO_k kažemo da je ukupno efikasan ako i samo ako je efikasan u svakom od potprocesa*

Primjer 2.1.2. *Promatrat ćemo 24 neživotna osiguravajuća društva na Taiwan-u sa 2 inputa, 2 outputa i 2 intermedijarne mjere.*
Inputi, koji su ujedno inputi prve faze, su:
Troškovi rada (X_1) - plaće zaposlenika, te razne vrste troškova nastale u svakodnevnom radu
Troškovi osiguranja (X_2) - troškovi plaćeni agencijama, brokerima, odvjetnicima i ostali troškovi vezani za marketing u osiguranju.
Outputi, koji su ujedno outputi druge faze, su:
Poslovna dobit (Y_1) - dobit poslovanja osiguranja
Investicijska dobit (Y_2) - dobit iz investicijskih portfelja
Tu su i dva intermedijarna proizvoda koji su outputi u prvoj fazi, te inputi u drugoj fazi:
Izravne premije (Z_1) - premije primljenje od osiguranih klijenata
Premije reosiguranja (Z_2) - premije primljene od drugih osiguravajućih društava

U tablici 2.1 danu su podaci o inputima, outputima i intermedijarnim mjerama.

Tablica 2.1: 24 neživotna osiguravajuća društva na Taiwan-u

		Operation expenses	Insurance expenses	Direct written premiums	Reinsurance premiums	Underwriting profit	Investment profit
DO	Imena	X1	X2	Z1	Z2	Y1	Y2
1	Taiwan Fire	1178744	673512	7451757	856735	984143	681687
2	Chung Kuo	1381822	1352755	10020274	1812894	1228502	834754
3	Tai Ping	1177494	592790	4776548	560244	293613	658428
4	China Mariners	601320	594259	3174851	371863	248709	177331
5	Fubon	6699063	3531614	37392862	1753794	7851229	3925272
6	Zurich	2627707	668363	9747908	952326	1713598	415058
7	Taian	1942833	1443100	10685457	643412	2239593	439039
8	Ming Tai	3789001	1873530	17267266	1134600	3899530	622868
9	Central	1567746	950432	11473162	546337	1043778	24098
10	The First	1303249	1298470	8210389	504528	1697941	554806
11	Kuo Hua	1962448	672414	7222378	643178	1486014	18259
12	Union	2592790	650952	9434406	1118489	1574191	909295
13	Shingkong	2609941	1368802	13921464	811343	3609236	223047
14	South China	1396002	988888	7396396	465509	1401200	332283
15	Cathay Century	2184944	651063	10422297	749893	3355197	555482
16	Allianz President	1211716	415071	5606013	402881	854054	197947
17	Newa	1453797	1085019	7695461	342489	3144484	371984
18	AIU	757515	547997	3631484	995620	692731	163927
19	North America	159422	182338	1141951	483291	519121	46857
20	Federal	145442	53518	316829	131920	355624	26537
21	Royal&Sunalliance	84171	26224	225888	40542	51950	6491
22	Asia	15993	10502	52063	14574	82141	4181
23	AXA	54693	28408	245910	49864	0,1	18980
24	Mitsui Sumitomo	163297	235094	476419	644816	142370	16976

Troškovi rada (X_1)
Troškovi osiguranja (X_2)
Poslovna dobit (Y_1)
Investicijska dobit (Y_2)
Izravne premije (Z_1)
Premije reosiguranja (Z_2)

Kao i sve ostale uslužne djelatnosti, tako i industrija neživotnih osiguranja pruža usluge svojim klijentima s ciljem ostvarivanja što veće dobiti. Dosad je provedeno nekoliko studija u kojima su se koristile AOMP modeli za mjerenje menađerskih performansi u ovoj industriji. Naime, dobit osiguravajućih društava se ne ostvaruje samo od prodaje. Neživotna osiguravajuća društva koriste premije osiguranja prikupljene kroz sustave agencija, brokera, odvjetnika itd. kao kapital za ulaganje. Dakle, cijeli proces proizvodnje u industriji neživotnih osiguranja može se podijeliti na dva potprocesa. Prvi potproces karakterizira marketing osiguranja kojim se nastoji privuči klijente da plate izravne pisane premije, te premije reosiguranja koje se primaju od drugih osiguravajućih društava. Drugi potproces karakteriziraju investicije gdje se premije ulažu u investicijske portfelje s ciljem ostvarivanja dobiti. Područja ulaganja tih premija su ograničena. Od tih, bankovni depoziti čine najveći udio, nakon čega slijede utržive vrijednosnice, nekretnine, hipoteke i krediti. Industrija neživotnih osiguranja ima tipičnu dvostupanjsku strukturu proizvodnog procesa, stoga, metodologija razvijena na prethodnim stranicama se može primijeniti za mjerenje efikasnosti cijelog procesa i dva potprocesa.

Odredimo sada efikasnosti za svako osiguravajuće društvo.

Pogledajmo najprije DO_1 Taiwan Fire.
Ukupna efikasnost određuje se pomoću modela (2.3).
S obzirom da $\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}$ - $\sum_{d=1}^{D} w_d z_{dj}$ <= 0 i $\sum_{d=1}^{D} w_d z_{dj}$ - $\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}$ <= 0 impliciraju $\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}$ - $\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}$ <= 0, $\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}$ - $\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}$ <= 0 nećemo uzimati u obzir u modelu.

Dakle, linearni model za DO_1 je jednak:

$e_0 = max\ u_1 y_{1,1} + u_2 y_{2,1}$
uz uvjete

$v_1 x_{1,1} + v_2 x_{2,1} = 1$

$u_1 y_{1,1} + u_2 y_{2,1} <= w_1 z_{1,1} + w_2 z_{2,1}$

...

$u_1 y_{1,24} + u_2 y_{2,24} <= w_1 z_{1,24} + w_2 z_{2,24}$

$w_1 z_{1,1} + w_2 z_{2,1} <= v_1 x_{1,1} + v_2 x_{2,1}$

...

$w_1 z_{1,24} + w_2 z_{2,24} <= v_1 x_{1,24} + v_2 x_{2,24}$

$w_d >= 0,\ d=1,2;\ v_i >= 0,\ i=1,2;\ u_r >= 0,\ r=1,2$

odnosno

$e_0 = max\ 984143u_1 + 681687u_2$
uz uvjete

$1178744v_1 + 673512v_2 = 1$

$984143u_1 + 681687u_2 <= 7451757w_1 + 856735w_2$

...

$142370u_1 + 16976u_2 <= 476419w_1 + 644816w_2$

$7451757w_1 + 856735w_2 <= 984143v_1 + 673512v_2$

...

$476419w_1 + 644816w_2 <= 163297v_1 + 235094v_2$

$w_d >= 0,\ d=1,2;\ v_i >= 0,\ i=1,2;\ u_r >= 0,\ r=1,2$

odakle slijedi da je za DO_1 ukupna efikasnost cijelog procesa jednaka $e_0 = 0,699$, te je

$e^1_{j0} = \frac{w^*_1 z_{1,1} + w^*_2 z_{2,1}}{v^*_1 x_{1,1} + v^*_2 x_{2,1}} = \frac{0,992574589}{1} = 0,993$ i

$e^2_{j0} = \frac{u^*_1 y_{1,1} + u^*_2 y_{2,1}}{w^*_1 z_{1,1} + w^*_2 z_{2,1}} = \frac{0,69923448}{0,992574589} = 0,704.$

Provjerimo sada jedinstvenost gornjih efikasnosti e_0, e_0^1, e_0^2. Odredit ćemo efikasnost prve, odnosno druge faze pomoću modela (2.4) i (2.5):

Prva faza:

$e_0^{2,+} = max\ u_1 y_{1,1} + u_2 y_{2,1}$
uz uvjete

$w_1 z_{1,1} + w_2 z_{2,1} = 1$

$u_1 y_{1,1} + u_2 y_{2,1} - e_0(v_1 x_{1,1} + v_2 x_{2,1}) = 0$

$u_1 y_{1,1} + u_2 y_{2,1} <= w_1 z_{1,1} + w_2 z_{2,1},$
$w_1 z_{1,1} + w_2 z_{2,1} <= v_1 x_{1,1} + v_2 x_{2,1}$
$w_d >= 0,\ d=1,2;\ v_i >= 0,\ i=1,2;\ u_r >= 0,\ r=1,2$

odnosno

$e_0^{1,+} = max\ 984143 u_1 + 681687 u_2$
uz uvjete

$7451757 w_1 + 856735 w_2 = 1$

$984143 u_1 + 681687 u_2 - 0,699(1178744 v_1 + 673512 v_2) = 0$

$984143 u_1 + 681687 u_2 <= 7451757 w_1 + 856735 w_2$

...

$142370 u_1 + 16976 u_2 <= 476419 w_1 + 644816 w_2$

$7451757 w_1 + 856735 w_2 <= 984143 v_1 + 673512 v_2$

...

$476419 w_1 + 644816 w_2 <= 163297 v_1 + 235094 v_2$

$w_d >= 0,\ d=1,2;\ v_i >= 0,\ i=1,2;\ u_r >= 0,\ r=1,2$

odakle slijedi da je za DO_1 efikasnost druge faze jednaka $e_0^{2,+} = 0,704$, te je minimum prve faze $e_0^{1,-} = \frac{e_0}{e_0^{2,+}} = \frac{0{,}699}{0{,}704} = 0{,}993$.

Druga faza:

$$e_0^{1,+} = max\ w_1 z_{1,1} + w_2 z_{2,1}$$

uz uvjete

$$v_1 x_{1,1} + v_2 x_{2,1} = 1$$

$$u_1 y_{1,1} + u_2 y_{2,1} - e_0(v_1 x_{1,1} + v_2 x_{2,1}) = 0$$

$$u_1 y_{1,1} + u_2 y_{2,1} <= w_1 z_{1,1} + w_2 z_{2,1}$$

$$w_1 z_{1,1} + w_2 z_{2,1} <= v_1 x_{1,1} + v_2 x_{2,1}$$

$$w_d >= 0,\ d=1,2;\ v_i >= 0,\ i=1,2;\ u_r >= 0,\ r=1,2$$

odnosno

$$e_0^{1,+} = max\ 7451757 w_1 + 856735 w_2$$

uz uvjete

$$1178744 v_1 + 673512 v_2 = 1$$

$$984143 u_1 + 681687 u_2 - 0,699(1178744 v_1 + 673512 v_2) = 0$$

$$984143 u_1 + 681687 u_2 <= 7451757 w_1 + 856735 w_2$$

...

$$142370 u_1 + 16976 u_2 <= 476419 w_1 + 644816 w_2$$

$7451757w_1 + 856735w_2 <= 984143v_1 + 673512v_2$

...

$476419w_1 + 644816w_2 <= 163297v_1 + 235094v_2$

w_d >= 0, d=1,2; v_i >= 0, i=1,2; u_r >= 0, r=1,2

odakle slijedi da je za DO_1 efikasnost prve faze jednaka $e_0^{1,+} = 0,993$, te je minimum druge faze $e_0^{2,-} = \frac{e_0}{e_0^{1,+}} = \frac{0{,}699}{0{,}993}$ = 0,704.

Vidimo da je $e_0^{1,-} = e_0^{1,+}$, $e_0^{2,-} = e_0^{2,+}$ što znači da su e_0^1 i e_0^2 jedinstveno određeni modelom.

U tablici 2.2 dane su ukupna efikasnost, te efikasnost prve i druge faze za svaki od 24 osiguravajućih društava.

Tablica 2.2: Rezultati relacijskog modela

DO	Imena	e_0	e_0^1	e_0^2
1	Taiwan Fire	0,699 (3)	0,993 (6)	0,704 (5)
2	Chung Kuo	0,625 (5)	0,998 (5)	0,626 (6)
3	Tai Ping	0,690 (4)	0,690 (16)	1,000 (1.5)
4	China Mariners	0,304 (15)	0,724 (15)	0,420 (13)
5	Fubon	0,767 (1)	0,831 (12)	0,923 (3)
6	Zurich	0,390 (12)	0,961 (7)	0,406 (17)
7	Taian	0,277 (17)	0,671 (18)	0,412 (15)
8	Ming Tai	0,275(18)	0,663 (20)	0,415 (14)
9	Central	0,223 (20)	1,000-ϵ (4)	0,223 (24)
10	The First	0,466 (9)	0,862 (10)	0,541 (10)
11	Kuo Hua	0,164 (23)	0,647 (21)	0,253 (23)
12	Union	0,760 (2)	1,000 (2)	0,760 (4)
13	Shingkong	0,208 (21)	0,672 (17)	0,309 (21)
14	South China	0,289 (16)	0,670 (19)	0,431 (12)
15	Cathay Century	0,614 (6)	1,000 (2)	0,614 (7)
16	Allianz President	0,320 (14)	0,886 (9)	0,362 (18)
17	Newa	0,360 (13)	0,628 (22)	0,574 (9)
18	AIU	0,259 (19)	0,794 (13)	0,326 (19)
19	North America	0,411 (11)	1,000 (2)	0,411 (16)
20	Federal	0,547 (8)	0,933 (8)	0,586 (8)
21	Royal&Sunalliance	0,201 (22)	0,732 (14)	0,274 (22)
22	Asia	0,590 (7)	0,590 (23)	1,000 (1.5)
23	AXA	0,420 (10)	0,843 (11)	0,499 (11)
24	Mitsui Sumitomo	0,135 (24)	0,429 (24)	0,314 (20)

Primjetimo da niti jedno od 24 neživotna osiguranja nije efikasno u obje faze. S druge strane DO_9, DO_{12}, DO_{15} i DO_{19} su jedini efikasni u prvoj fazi, te DO_3 i DO_{22} su jedini efikasni u drugoj fazi. Također vidimo da je najveća moguća postignuta efikasnost kod DO_5 jednaka 0,767. Kako je ukupna efikasnost produkt efikasnosti svake od faza e_0^1 i e_0^2, svaki e_0 nije veći od odgovarajućih e_0^1 i e_0^2. Drugo što trebamo primjetiti je da većina DO ima manji e_0^2 od e_0^1 iako smo prvo računali e_0^2 a potom e_0^1. Jedino DO_3, DO_5 i DO_{22} imaju manji e_0^1 od e_0^2.
Raznim testovima potvrđeno je da je efikasnost u prvoj fazi veća od druge faze u statističkom smislu. To pokazuje da je niska efikasnost cijelog procesa uglavnom posljedica niske razine efikasnost druge faze u procesu stjecanja dobiti.
S obzirom da je e_o uvijek manji ili jednak e_0^1 i e_0^2, nema prevelikog smisla gledati pojedinačne efikasnosti svake od faza. Do većih ćemo informacija doći ako pogledamo rangove efikasnosti koji se nalaze u zagradama pored svake vrijednosti.

Kada se veza pojavi, svakoj povezanoj vrijednosti je dodijeljena aritmetička sredina ranga pozicije za koju je vezana. Većina DO imaju slične rangove za e_0, e_0^1 i e_0^2 što implicira da je obavljanje cijelokupnog procesa ravnomjerno pripisano obavljanju oba potprocesa. No, i dalje postoje oni DO koji imaju velike razlike u rangovima. Velika razlika otkriva izvore koji uzrokuju neefikasnost cijelog procesa. Na primjer, ako pogledamo DO_3, DO_5, DO_{17} i DO_{22}, oni su svi neefikasni u prvoj fazi, u odnosu na drugu u kojoj su efikasni. Slično, DO_9 i DO_{19} su efikasni u prvoj fazi, a neefikasni u drugoj fazi.

S obzirom da je ukupna efikasnost produkt efikasnosti dva potprocesa, to nam omogućava da za svakog DO identificiramo potproces koji uzrokuje neefikasnost cijelog procesa.

Logično, rang efikasnosti e_0 mora se nalaziti između rangova od e_0^1 i e_0^2 ili u blizini od e_0^1 i e_0^2 jer je efikasnost cijelog procesa agregirana na dva potprocesa. Od ovih 24 DO, za njih 11 rangovi leže između rangova od e_0^1 i e_0^2, o ostali se nalaze u blizini jednog od dva ranga od e_0^1 i e_0^2.

2.2 Relacijski vs. nezavisni model

Daljni korak nam je proučavanje tzv. nezavisnog modela u kojem su efikasnosti određene kao efikasnosti nezavisnih procesa(gdje svaka od faza, te cijeli proces dijeluju nezavisno jedan od drugog) korištenjem običnog CCR modela iz prvog dijela. Korišteni su isti podaci kao i kod relacijskog modela, a rezultati tih efikasnosti su dani u tablici 2.3

Tablica 2.3: Rezultati nezavisnog modela

DO	Imena	e_0	e_0^1	e_0^2
1	Taiwan Fire	0,984 (6)	0,993 (7)	0,713 (7)
2	Chung Kuo	1,000 (2,5)	0,998 (6)	0,627 (10)
3	Tai Ping	0,988 (5)	0,690 (23)	1,000 (2,5)
4	China Mariners	0,488 (14)	0,724 (21)	0,432 (16)
5	Fubon	1,000 (2,5)	0,838 (13)	1,000 (2,5)
6	Zurich	0,594 (13)	0,964 (8)	0,406 (18)
7	Taian	0,470 (17)	0,752 (16)	0,538 (13)
8	Ming Tai	0,415 (19)	0,726 (19)	0,511 (15)
9	Central	0,327 (22)	1,000 (3)	0,292 (23)
10	The First	0,781 (10)	0,862 (11)	0,674 (9)
11	Kuo Hua	0,283 (23)	0,741 (18)	0,327 (22)
12	Union	1,000 (2,5)	1,000 (3)	0,760 (6)
13	Shingkong	0,353 (20)	0,811 (14)	0,543 (12)
14	South China	0,470 (16)	0,725 (20)	0,518 (14)
15	Cathay Century	0,979 (7)	1,000 (3)	0,705 (8)
16	Allianz President	0,472 (16)	0,907 (10)	0,385 (19)
17	Newa	0,635 (11)	0,723 (22)	1,000 (2,5)
18	AIU	0,427 (18)	0,794 (15)	0,374 (20)
19	North America	0,822 (9)	1,000 (3)	0,416 (17)
20	Federal	0,935 (8)	0,933 (9)	0,901 (5)
21	Royal&Sunalliance	0,333 (21)	0,751 (17)	0,280 (24)
22	Asia	1,000 (2,5)	0,590 (24)	1,000 (2,5)
23	AXA	0,599 (12)	0,851 (12)	0,560 (11)
24	Mitsui Sumitomo	0,257 (24)	1,000 (3)	0,335 (21)

Odredimo sada efikasnosti za DO_1 Taiwan Fire.
Ukupna efikasnost za DO_0 određuje se na sljedeći način:

virtualni input=$1178744v_1+673512v_2$
virtualni output=$984143u_1+681687u_2$

Zadaća linearnog programiranja tada glasi

max $e_0 = 984143u_1+681687u_2$

Uz ograničenja

$1178744v_1+673512v_2=1$

$984143u_1 + 681687u_2 <= 1178744v_1 + 673512v_2$

...

$142370u_1 + 16976u_2 <= 163297v_1 + 235094v_2$

$u_1,u_2,v_1,v_2 >= 0$

odakle slijedi da je za DO_1 ukupna efikasnost cijelog procesa jednaka $e_0 = 0,984$.

Pogledajmo sada efikasnost prvog potprocesa DO_0:

virtualni input=$1178744v_1+673512v_2$
virtualni output=$7451757w_1+856735w_2$

Zadaća linearnog programiranja tada glasi

max e_0 = 7451757w_1+856735w_2

Uz ograničenja

1178744v_1+673512v_2=1

7451757w_1 + 856735w_2 <= 1178744v_1 + 673512v_2

...

476419w_1 + 644816w_2 <= 163297v_1 + 235094v_2

w_1,w_2,v_1,v_2 >= 0

odakle slijedi da je za DO_1 efikasnost prvog potprocesa jednaka $e_0^1 = 0,993$.

Pogledajmo sada efikasnost drugog potprocesa DO_0:

virtualni input=7451757w_1+856735w_2
virtualni output=984143u_1+681687u_2

Zadaća linearnog programiranja tada glasi

max e_0 = 984143u_1+681687u_2
Uz ograničenja

$$7451757w_1+856735w_2=1$$

$$984143u_1 + 681687u_2 <= 7451757w_1 + 856735w_2$$

...

$$142370u_1 + 16976u_2 <= 476419w_1 + 644816w_2$$

$$w_1,w_2,u_1,u_2 >= 0$$

odakle slijedi da je za DO_1 efikasnost prvog potprocesa jednaka $e_0^1 = 0,713$.

Pogledajmo sada usporedbu efikasnosti relacijskog i nezavisnog modela. 4 DO DO_2, DO_5, DO_{12} i DO_{22} ostvaruju efikasnost cijelog procesa, dok niti jedan od njih ne ostvaruje efikasnost u oba potprocesa zasebno. I tu je glavna razlika između relacijskog i nezavisnog modela. Od ova 4 DO DO_2 ne ostvaruje efikasnost u niti jednom potprocesu, DO_{12} ostvaruje efikasnost samo u prvoj fazi, dok DO_5 i DO_{22} ostvaruju efikasnost samo u drugoj fazi. S druge strane, postoje DO koji ostvaruju efikasnost samo u prvoj fazi, DO_9, DO_{12}, DO_{15}, DO_{19} i DO_{24}, te DO koji ostvaruju efikasnost samo u drugoj fazi iako nitko od njih ne ostvaruje efikasnost u cijelom procesu.

S obzirom da su efikasnosti nezavisnog modela izračunate za svaki od procesa nezavisno jedan od drugoga, e_0 nije nužno manji ili jednak e_0^1 i e_0^2 kao u relacijskom modelu. Zapravo, prosjek od e_0 je veći od prosjeka e_0^2.

Kako bi se usporedile razlike u efikasnostima izračunatim u relacijskom i nezavisnom modelu, prikladnije je usporediti rangove efikasnosti nego konkretne vrijednosti efikasnosti, zbog toga što relacijski model ima još dva dodatna ograničenja koja rezultiraju manjim vrijednostima efikasnosti za svakog DO. Najveća razlika je 4.5 kod DO_{22}, druga najveća razlika je 3 kod DO_1 a treća najveća razlika je 2.5 kod DO_2. Za preostalih 21 DO razlika je manja ili jednaka 2.

Spearmanov test koeficijenta korelacije ranga upućuje na to da je e_0 iz oba modela jako koreliran, s koeficijentom korelacije 0.972. Drugim riječima, relacijski i nezavisni model daju rezultate e_0 skoro identičnog ranga.

Rangovi od E_0^2 izračunati u oba modela su prilično slični. Najveća razlika se primjećuje kod DO_{13} gdje je razlika u rangu jednaka 9. Druga najveća razlika je 6.5 kod DO_{17}, dok je treća najveća razlika 4 kod DO_2. Nadalje, dva su DO, DO_4 i DO_{20} kod kojih je razlika jednaka 3. Preostalih 19 DO imaju razliku u rangovima manju ili jednaku 2. Spearmanov koeficijenta korelacije ranga u ovom slučaju je jednak 0.918 što također upučuje na jaku korelaciju.

Rangovi od E_0^1 izračunati u oba modela, za razliku od rangova od E_0^2, nisu jako slični. Pogledajmo DO_{24}. On u relacijskom modelu ima najgori rang s vrijednosti neefikasnosti 0.429, dok u nezavisnom modelu ovaj DO je efikasan. Druga najveća razlika je 7 kod DO_3, dok je treća najveća razlika 6 kod DO_4. Tri su DO DO_{11} , DO_{13} i DO_{21} kod kojih je razlika jednaka 3. Preostalih 18 DO imaju razliku u rangovima manju ili jednaku 2. Spearmanov koeficijenta korelacije ranga u ovom slučaju je jednak 0.750 što također i dalje upučuje na jaku korelaciju između rangova E_0^1 izračunatih u oba modela.

Usporedimo sada rangove efikasnosti sva tri procesa u nezavisnom modelu. Za početak imamo 7 DO čiji su rangovi prilično različiti. Radi se o DO_9, DO_{19} i DO_{24} koji imaju puno veće rangove u potprocesu prve faze u odnosu na rangove potprocesa druge faze, te o DO_3, DO_5, DO_{17} i DO_{22} koji imaju puno manje rangove u potprocesu prve faze u odnosu na rangove potprocesa druge faze. Disperzija rangova od e_0 ,e_0^1 i e_0^2 u nezavisnom modelu je puno čudnije raspoređena nego kod relacijskog modela. Uobičajeno je da je rang od e_0 između ili u blizini e_0^1 i e_0^2. U ovom modelu, 13 je DO čiji se rang od e_0 između e_0^1 i e_0^2, te je 8 DO čiji je rang od e_0 u blizini rangova e_0^1 i e_0^2. Za preostala 3 DO DO_2, DO_{13} i DO_{24} ne vrijedi ni jedno od gornja dva pravila, e_0 se ne nalazi između niti u blizini e_0^1 i e_0^2. Kako je cijeli proces produkt svoja dva potprocesa, rezultati ova 3 DO su u potpunosti neočekivana.

Pogledajmo još jedan niz nelogičnosti koji daje nezavisni model, vezano uz težine inputa, outputa i intermedijarnih mjera. Za to pogledajmo DO_{24}.
Rangovi efikasnosti DO_{24} u relacijskom modelu su redom za e_0 24, za e_0^1 24 te za e_0^2 20, a u nezavisnom modelu rangovi su redom 24,3 i 21. I dok su rangovi za e_0 i e_0^2 jako slični, za e_0^1 je velika razlika u rangovima. Glavni razlog te razlike je razlika u dobivenim težinama u, v i w dobivenih iz oba modela. Tablica 2.4 pokazuje optimalne težine.

Za nezavisne model, kada se Y_1 i Y_2 smatraju izravnim outputima inputa X_1 i X_2, sve težine su dane u prvom redu tablice 2.4 i vidimo da je važnost od X_2 zanemariva zbog ϵ koji se može poistovijetiti s 0. Efikasnost cijelog procesa, 0,2572 je omjer ukupnog outputa uY = 0,257 i ukupnog inputa vX = 1. Kada se Y_1 i Y_2 se smatraju neizravnim ouputima inputa X_1 i X_2 preko intermedijarnih mjera Z_1 i Z_2, sve težine koje su dane u drugom redu tablice 2.4 ukazuju da je važnost od X_1 zanemariva, dok u ovom slučaju važnost od X_2 postaje značajna, te je važnost od Z_1 u ovom slučaju zanemariva. Nadalje, kada se Y_1 i Y_2 smatraju izravnim outputima inputa Z_1 i Z_2 vidimo da je važnost od Z_1 u ovom slučaju značajna, kod je važnost od Z_2 zanemariva. Sve zajedno to dovodi do niza kontradikcija vezanih za važnost pojedinih inputa, outputa i intermedijarnih mjera u nezavisnom modelu.

Što se tiče relacijskog modela, za početak treba napomenuti da su težine iz izračuna e_{24}^1 i e_{24}^2 jednake težinama za e_{24}. Gledajući ove težine možemo vidjeti da kada smo intermedijarne mjere Z_1 i Z_2 uzeli u obzir, važnosti od X_1 i X_2 su 6,124E-6 i ϵ. Važnosti od Z_1 i Z_2 su jednake 0,834E-6 i 0,048E-6, bez obzira da li one igraju uloga inputa ili outputa u cijelom modelu. Efikasnost cijelog procesa je omjer uY = 0,135 i vX = 1, za prvi potproces je eikasnost jednaka omjeru wZ=0,429 i vX = 1, a za drugi potprocesa omjeru uY=0,135 i wZ = 0,429 i jednaka je 0,314. Ovi rezultati daju puno bolja objašnjenja za proizvodni proces s intermedijarnim mjerama od nezavisnog modela.

Tablica 2.4: Težine DO_{24}

	Input (X)			**Intermedijarna mjera (Z)**			**Output (Y)**		
	v_1	v_2	vX	w_1	w_2	wZ	u_1	u_2	uY
Nezavisni model									
e_{24}	6,124E-6	ϵ	1				0,735E-6	0,981E-6	0,257
e_{24}^1	ϵ	4,254E-6	1	ϵ	1,550E-6	1			
e_{24}^2				2,099E-6	ϵ	1	0,568E-6	14,974E-6	0,335
Relacijski model									
e_{24}	6,124E-6	ϵ	1	0,834E-6	0,048E-6	0,429	0,233E-6	5,991E-6	0,135

2.3 Zaključak

Cilj mjerenja efikasnosti je otkriti slaba područja, tako da potrebno vrijeme možemo iskoristiti za poboljšanja performansi. Kada se cijeli proces može podijeliti u dva potprocesa, nekoliko studija je otkrilo da osim izračuna efikasnosti cijelog procesa pomoću konvencionalnog AOMP modela, efikasnosti dvaju potprocesa mogu se izračunati tako da se identificira izvor koji uzrokuje neefikasnost cijelog sustava. Nedostatak tih istraživanja je da su efikasnost u cijelom procesu i efikasnosti dva potprocesa izračunate nezavisno, bez uzimanja u obzir činjenice da su outputi iz prve faze inputi u drugoj fazi.

U ovom radu, serija odnosa dva potprocesa je uključena u razvoj novog modela. Da bi se izbjegla mogućnost pojavljivanja višestrukih rješenja koja će uzrokovati pristranost u usporedbi procesa, efikasnost prve faze je maksimalna u drugoj fazi pod ograničenjem da se ukupna efikasnost cijelog procesa održava na istoj razini. Prema ovoj konstrukciji, ukupna efikasnost je produkt efikasnosti dva potprocesa. Ova matematička veza između ukupne efikasnosti i sastavnih efikasnosti svakog od potprocesa prikladno opisuje ljudsko očekivanje glede fizičkog odnosa cijelog procesa i dva potprocesa.

Primjer s neživotnim osiguranjima opisano u Hwang i Kao (2006) korišten je za ilustraciju da li nezavisni dvostupanjski model ili relacijski dvostupanjski model bolje opisuje efikasnost cijelog procesa i pripadnih potprocesa. Rezultati pokazuju da nezavisni model daje neobične rezultate za nekoliko DO, dok relacijski model uvijek daje značajne rezultate za sve DO. To vodi do zaključka da relacijski model ne samo da prikladno opisuje fizičku vezu između cijelog procesa i sastavnih potprocesa, nego također daje pouzdane rezultate u mjerenju efikasnosti. Na kraju, tu su sustavi koji se sastoje od više od dva potprocesa. Formulacija relacijskog dvostupanjskog modela pokazuje da se može proširiti i na sustave s više stupnjeva spojenih u seriju, a efikasnost cijelog procesa je proizvod efikasnosti pojedinih potprocesa. Međutim, uvjet za održavanje tog odnosa je da svi outputi iz jednog potprocesa moraju biti inputi u sljedećim potprocesu. Ako postoji bilo koji output pojedinog potprocesa koji nije input u sljedećem potprocesu ili ako postoji bilo koji input potprocesa koji nije output iz njegovih prethodnih potproces, onda se taj odnos ne će moći održati.

Bibliografija

[1] Wade D Cook i Joe Zhu, *Data envelopment analysis: A handbook of modeling internal structure and network*, sv. 208, Springer, 2014.

[2] William W Cooper, Lawrence M Seiford i Kaoru Tone, *Introduction to data envelopment analysis and its uses: with DEA-solver software and references*, Springer Science & Business Media, 2006.

[3] William W Cooper, Lawrence M Seiford i Joe Zhu, *Data envelopment analysis: history, models, and interpretations*, Springer, 2011.

[4] Chiang Kao i Shiuh Nan Hwang, *Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: An application to non-life insurance companies in Taiwan*, European Journal of Operational Research **185** (2008), br. 1, 418–429.

[5] H David Sherman i Joe Zhu, *Service productivity management: Improving service performance using data envelopment analysis (DEA)*, Springer Science & Business Media, 2006.

Sažetak

Analiza omeđivanja podataka (AOMP) neparametarska je metoda koja se zasniva na linearnom programiranju, a njome se koristi za ocjenjivanje relativne efikasnosti usporedivih entiteta na osnovi empiričkih podataka o njihovim inputima i outputima. Pogodna je u slučajevima kada ostali pristupi ne daju zadovoljavajuće rezultate. U prvom poglavlju smo se upoznali sa najosnovnijim AOMP modelom, CCR modelom, te smo kroz dualnu zadaću otkrili izvore neefikasnosti koji nisu otkriveni primarnim problemom, viškove inputa i manjkove outputa. AOMP je identificirala efikasne poslovnice banaka koje predstavljaju primjere dobroga poslovanja i neefikasne poslovnice banaka. Utvrđeni su izvori i iznosi neefikasnosti u svakom inputu i outputu, i dane su smjernice za potrebna poboljšanja. U drugom poglavlju smo se upoznali s "two-stage" AOMP, modelom koji osim inputa x_i i outputa y_j koristi i intermedijarne mjere z_d. Za svakog DO se koriste inputi za proizvodnju outputa koji postaju inputi u drugoj fazi. Te outpute iz prve faze nazivamo intermedijarnim mjerama. U drugoj fazi se potom koriste intermedijarne mjere kao inputi za proizvodnju outputa. Ukupna efikasnost produkt je efikasnosti svakog danog potprocesa. Zatim smo kroz primjer s 24 neživotna osiguranja usporedili dobivene rezultate efikasnosti tzv. relacijskog model i nezavisnog modela. Nezavisni model u kojem su efikasnosti određene kao efikasnosti nezavisnih procesa korištenjem osnovnog CCR modela iz prvog dijela. Rezultati su pokazali da nezavisni model daje neobične rezultate za nekoliko DO, dok relacijski model uvijek daje značajne i pozdane rezultate za sve DO.

Summary

Data Envelopment Analysis (DEA) is a non-parametric linear programming-based technique used for evaluating the relative efficiency of homogenous operating entities on the basis of empirical data on their inputs and outputs. It is suitable in cases where other approaches do not provide satisfactory results. In the first chapter, we introduced the basic DEA model, the CCR model, and through the dual problem we discovered sources of inefficiency that were not detected through the primal problem, input and output slacks. DEA identified efficient bank branches as benchmark members and inefficient bank branches. Sources and amounts of relative inefficiency, which were identified in each input and output, establish guidelines for needed improvements. In the second chapter we introduced "two-stage" DEA, model in which, except inputs x_i and outputs y_j, we use intermediate measures z_d as well. For every DMU, the first stage uses inputs to generate outputs which become the inputs to the second stage. The first stage outputs are therefore called intermediate measures. The second stage then uses these intermediate measures to produce outputs. The efficiency of the whole process can be decomposed into the product of the efficiencies of the two sub-processes. In the example with 24 non-life insurance companies we compared efficiency of the relational model and the independent model. In the independent model efficiencies are calculated independently by using basic CCR model from the first chapter. The results show that the independent model may produce unusual results for several companies while the relational model always produces meaningful and reliable results for all companies.

Životopis

Rođena sam 31.07.1990. u Zagrebu. Pohađala sam Osnovnu školu Antun Gustav Matoš. Po završetku osnove škole, 2005. upisujem XV. gimnaziju u Zagrebu. Godine 2009. upisujem Preddiplomski sveučilišni studij matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Nakon završenog preddiplomskog studija, 2013. godine, upisujem Diplomski sveucilišni studij Financijska i poslovna matematika na istom fakultetu.