SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marija Đukić

RAZNI ASPEKTI KOMPAKTNOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Rad posvećujem svojim roditeljima.

Sadržaj

Uvod

Pojam kompaktnosti javlja se u raznim oblicima i okolnostima. Postoje kompaktnost skupa, metričkog i topološkog prostora, sekvencijalna te lokalna kompaktnost koje ćemo upoznati kroz ovaj rad. Da bismo uopće došli do pojma kompaktnosti moramo najprije definirati neke osnovne pojmove i vidjeti njihova svojstva kao što su sam pojam metrike i topologije te otvoreni skupovi i pokrivači. Zanimljiva je veza potpunosti, koju promatramo samo u kontekstu metričkih prostora, i kompaktnosti koja kaže da je metrički prostor kompaktan ako i samo ako je potpun i potpuno omeđen.

U ovom radu vidjet ćemo i koja je veza neprekidnih funkcija i kompaktnosti. Zanimljivo je napomenuti sljedeću tvrdnju: Ako su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori, $f : X \to Y$ funkcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$ i K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$, onda je i $f(K)$ kompaktan u $(Y, \mathcal{S})$.

Sekvencijalna kompaktnost, također ima razna zanimljiva svojstva. Tako ćemo vidjeti da je metrički prostor sekvencijalno kompaktan ako i samo ako je kompaktan, a put do te tvrdnje je malo složeniji. Nadalje, proučavat ćemo i potprostore metričkih (i topoloških) prostora te u kojoj su međusobnoj vezi sa kompaktnošću. Tako je jedan od važnijih rezultata ovog rada sljedeći: Ako je K kompaktan skup u Hausdorffovom topološkom prostoru, onda je K zatvoren.

Pod kompaktnošću u $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, podrazumjevamo kompaktnost u metričkom prostoru $(\mathbb{R}^n, d)$, gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. I tu imamo razna svojstva, a istaknut ćemo da je K kompaktan skup u $\mathbb{R}^n$ ako i samo ako je K zatvoren i omeđen, što općenito u metričkim prostorima ne vrijedi.

Kompaktnost možemo primijeniti i u dokazima nekih činjenica iz analize kao što je npr. činjenica da neprekidna funkcija na segmentu poprima minimum i maksimum. Nadalje, vidjet ćemo kako kompaktnost možemo iskoristiti u dokazu činjenice da je svaka neprekidna funkcija na segmentu integrabilna. Tu će ključna biti tvrdnja da je svaka neprekidna funkcija između metričkih prostora uniformno neprekidna ako je domena kompaktna.

Kao jedan od primjera lokalne kompaktnosti navest ćemo metrički prostor s diskretnom metrikom. Vidjet ćemo da metrički prostor (I^∞, d_∞) nije lokalno kompaktan. Ovdje I^∞ označava skup svih nizova u $[0, 1]$, a $d_\infty : I^\infty \times I^\infty \to \mathbb{R}$ funkciju definiranu sa

$$d_\infty((x_i), (y_i)) = \sup\{|x_i - y_i| \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Nadalje, pokazat ćemo i da je metrički prostor $(\mathbb{R}^n, d)$, gde je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$, lokalno kompaktan.

Na kraju rada proučit ćemo jedan od važnih pojmova, a to je Hilbertova kocka. Hilbertovu kocku (oznaka $\mathcal{H}$) definirali smo kao skup svih nizova $(x_i) \in I^\infty$ takvih da je

$$x_i \leq \frac{1}{i}$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$. Pokazat ćemo da je metrički prostor $(\mathcal{H}, d_\infty)$ kompaktan.

Na kraju treba reći da je kompaktnost jedan važan pojam u matematici te da postoje mnogi aspekti kompaktnosti koji ovim radom nisu obuhvaćeni.

Poglavlje 1

Metrički i topološki prostori

1.1 Metrički prostori

Definicija 1.1.1. *Neka je X neprazan skup te $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija takva da vrijedi:*

1) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$
$d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y, \forall x, y \in X$

2) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$

3) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z), \forall x, y, z \in X$

Tada za d kažemo da je metrika na skupu X, a za (X, d) kažemo da je metrički prostor.

Primjer 1.1.2. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Tada za d kažemo da je euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$.

Dokažimo da je to zaista metrika na $\mathbb{R}^n$. Provjeravamo sljedeća svojstva:
1) Neka su $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Budući da vrijedi

$$(x_1 - y_1)^2 \geq 0, \dots, (x_n - y_n)^2 \geq 0$$

za sve $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ imamo

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \geq 0$$

iz čega slijedi

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \geq 0.$$

Uočimo,

$$\begin{aligned} & d((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x_1-y_1)^2 = 0,\dots,(x_n-y_n)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x_1 = y_1,\dots,x_n = y_n \\ \Leftrightarrow\ & (x_1,\dots,x_n) = (y_1,\dots,y_n). \end{aligned}$$

2) Za sve $(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned} d((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2} \\ &= \sqrt{(-(y_1-x_1))^2+(-(y_2-x_2))^2+\cdots+(-(y_n-x_n))^2} \\ &= \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2} \\ &= d((y_1,\dots,y_n),(x_1,\dots,x_n)). \end{aligned}$$

Dakle,

$$d((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = d((y_1,\dots,y_n),(x_1,\dots,x_n))$$

za sve $(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$.
3) Definirajmo funkciju $\|\ \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tako da za $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1,\dots,x_n)$ stavimo

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Može se pokazati da vrijedi sljedeće

$$\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$$

za sve $u, v \in \mathbb{R}^n$. Stoga za $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\|x-y\| = \|x-z+z-y\| \le \|x-z\| + \|z-y\|. \tag{1.1}$$

Neka su $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1,\dots,x_n)$, $y = (y_1,\dots,y_n)$. Imamo

$$d((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2} = \|x-y\|,$$

odnosno

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

Iz nejednakosti (1.1) slijedi da za sve $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y).$$

Primjer 1.1.3. *Neka je X neprazan skup. Neka je $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Tada za d kažemo da je diskretna metrika na X. Lako se vidi da je d zaista metrika.

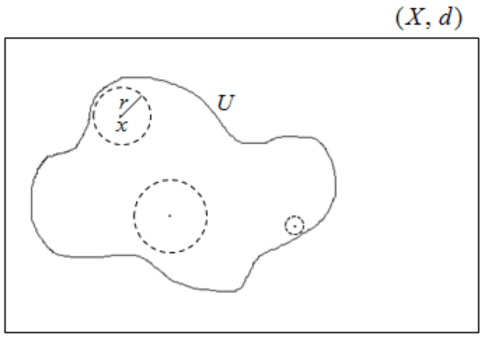
Otvoreni skupovi

Definicija 1.1.4. *Neka je (X,d) metrički prostor, $x_0 \in X$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Definiramo skup*

$$K(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}.$$

Za skup $K(x_0, r)$ kažemo da je otvorena kugla oko x_0 radijusa r u metričkom prostoru (X, d). Ako želimo naglasiti o kojoj se metrici radi, pišemo $K(x_0, r; d)$.

Neka je (X, d) metrički prostor te $U \subseteq X$. Kažemo da je U otvoren skup u (X, d) ako za svaki $x \in U$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U$.



Slika 1.1: U je otvoren skup u metričkom prostoru (X, d)

Primjer 1.1.5. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ te $r > 0$. Tada je $K(x_0, r) = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle$.*

Naime,

$$\begin{aligned} x \in K(x_0, r) &\Leftrightarrow d(x, x_0) < r \Leftrightarrow |x - x_0| < r \\ &\Leftrightarrow -r < x - x_0 \;\; i \;\; x - x_0 < r \\ &\Leftrightarrow x_0 - r < x \;\; i \;\; x < x_0 + r \\ &\Leftrightarrow x \in \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle. \end{aligned}$$

Dakle, $K(x_0, r; d) = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle$ gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$.

S druge strane, ako su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, onda je

$$\langle a, b\rangle = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle,$$

gdje su

$$x_0 = \frac{a+b}{2}, \;\; r = \frac{b-a}{2}.$$

Zaključak: Otvorene kugle u $(\mathbb{R}, d)$ su upravo skupovi oblika $\langle a, b\rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Propozicija 1.1.6. *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada je svaka otvorena kugla u (X, d) otvoren skup u (X, d).*

Dokaz. Neka je $x_0 \in X, r > 0$. Želimo dokazati da je $K(x_0, r)$ otvoren skup u (X, d). Neka je $x \in K(x_0, r)$ i neka je

$$s = r - d(x_0, x).$$

Uočimo da je $s > 0$. Tvrdimo da je

$$K(x, s) \subseteq K(x_0, r).$$

Neka je $y \in K(x, s)$. Tada je $d(y, x) < s$. Vrijedi

$$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < d(x_0, x) + s = d(x_0, x) + r - d(x_0, x) = r,$$

odnosno

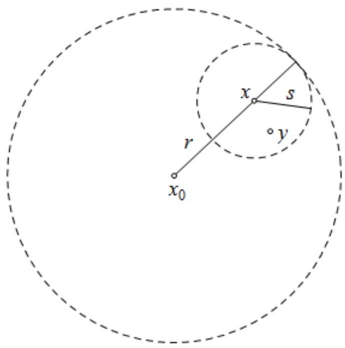
$$d(x_0, y) < r.$$

Slijedi da je $y \in K(x_0, r)$. Pokazali smo da je

$$K(x, s) \subseteq K(x_0, r)$$

pa zaključujemo da je $K(x_0, r)$ otvoren skup. □

Slika 1.2. nam slikovito prikazuje prethodnu propoziciju.



Slika 1.2: Svaka otvorena kugla je otvoren skup

Propozicija 1.1.7. *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada vrijedi:*

1) $\emptyset$ i X su otvoreni skupovi u metričkom prostoru (X, d);

2) Ako je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija otvorenih skupova u (X, d), onda je $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ otvoren skup u (X, d);

3) Ako su U i V otvoreni skupovi u (X, d), onda je i $U \cap V$ otvoren skup u (X, d).

Dokaz. 1) Očito, ako je $x \in X$, onda za bilo koji $r > 0$ je $K(x, r) \subseteq X$. Dakle, X je otvoren skup u (X, d). Očito je $\emptyset$ otvoren u (X, d).

2) Neka je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija otvorenih skupova u (X, d). Neka je $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$. Tada postoji $\alpha_0 \in A$ takav da je $x \in U_{\alpha_0}$. Budući da je U_{α_0} otvoren skup u (X, d) postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U_{\alpha_0}$. Slijedi da je

$$K(x, r) \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Dakle, $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ je otvoren skup u (X, d).

3) Neka su U i V otvoreni skupovi u (X, d). Neka je $x \in U \cap V$. Tada je $x \in U$ i $x \in V$. Budući da su U i V otvoreni skupovi postoje $r_1, r_2 > 0$ takvi da je

$$K(x, r_1) \subseteq U \ \text{ i } \ K(x, r_2) \subseteq V.$$

Neka je $r = \min\{r_1, r_2\}$. Tada je $r > 0$, $r \leq r_1$ i $r \leq r_2$, pa je

$$K(x, r) \subseteq K(x, r_1) \ \text{ i } \ K(x, r) \subseteq K(x, r_2).$$

Slijedi da je

$$K(x, r) \subseteq U \cap V.$$

Dakle, $U \cap V$ je otvoren skup u metričkom prostoru (X, d). □

Propozicija 1.1.8. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $V \subseteq X$. Tada je V otvoren skup u (X, d) ako i samo ako je V unija otvorenih kugli.*

Dokaz. Neka je V otvoren skup u (X, d), tj. za svaki $x \in V$ postoji $r_x > 0$ takav da je

$$K(x, r_x) \subseteq V.$$

Tada je

$$V = \bigcup_{x \in V} K(x, r_x).$$

Obratno, neka je V unija otvorenih kugli, tj.postoji skup A i funkcije $x : A \to X$ i $r : A \to \langle 0, \infty \rangle$ takve da je

$$V = \bigcup_{\alpha \in A} K(x_\alpha, r_\alpha).$$

Iz propozicije 1.1.7 slijedi da je V otvoren skup. □

Propozicija 1.1.9. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $a, b \in X$ takvi da je $a \neq b$. Tada postoje otvoreni skupovi U i V u (X, d) takvi da je $a \in U$, $b \in V$ i $U \cap V = \emptyset$.*

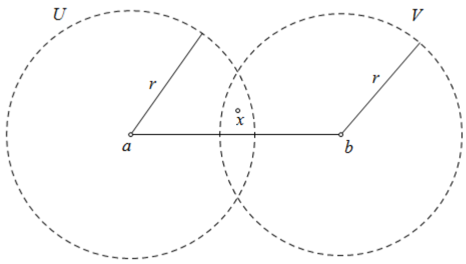
Dokaz. Neka je
$$r = \frac{d(a, b)}{2}.$$
Jasno je da je $r > 0$ (jer je $a \neq b$ pa je $d(a, b) > 0$). Definiramo

$$U = K(a, r) \text{ i } V = K(b, r).$$

Tvrdimo da je $U \cap V = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, tj. $U \cap V \neq \emptyset$. To znači da postoji $x \in U \cap V$. Tada je $x \in U$ i $x \in V$. Vrijedi da je

$$d(x, a) < r \text{ i } d(x, b) < r.$$

Pogledajmo sliku 1.3. Imamo sljedeće:



Slika 1.3:

$$d(a, b) \leq d(x, a) + d(x, b) < 2r = d(a, b),$$

odnosno
$$d(a, b) < d(a, b).$$

Slijedi da je $U \cap V = \emptyset$. Jasno je da su U i V otvoreni skupovi u (X, d) te da je $a \in U$ i $b \in V$. □

Potprostor metričkog prostora

Definicija 1.1.10. *Neka su (Y, p) i (X, d) metrički prostori. Kažemo da je (Y, p) potprostor metričkog prostora (X, d) ako je $Y \subseteq X$ te ako je $p(a, b) = d(a, b)$, $\forall a, b \in Y$.*

Uočimo sljedeće, ako je (X, d) metrički prostor te $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$, onda postoji jedinstvena metrika p na Y takva da je (Y, p) potprostor metričkog prostora (X, d). Jasno je da takva metrika p mora biti jedinstvena što slijedi iz uvjeta

$$p(a, b) = d(a, b), \ \forall a, b \in Y.$$

S druge strane, ako definiramo funkciju

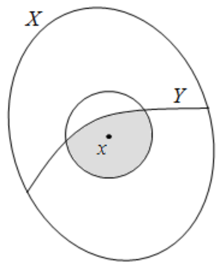
$$p : Y \times Y \to \mathbb{R}, \quad p(a, b) = d(a, b),$$

onda je jasno da je p metrika na Y te da je (Y, p) potprostor metričkog prostora (X, d).

Primjer 1.1.11. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $X \neq \emptyset$ te $p : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $p(x, y) = d(x, y)$, za svaki $x, y \in X$. Tada je p metrika na X i (X, p) je potprostor od $(\mathbb{R}^n, d)$. Za p kažemo da je euklidska metrika na X.*

Lako se provjeri da vrijedi sljedeće:

Propozicija 1.1.12. *Neka je (Y, p) potprostor metričkog prostora (X, d). Tada za svaki $x \in Y$ i $r > 0$ vrijedi $K(x, r; p) = Y \cap K(x, r; d)$.*



Slika 1.4: Prikaz propozicije 1.1.12

Propozicija 1.1.13. *Neka je (Y, p) potprostor metričkog prostora (X, d). Neka je $V \subseteq Y$. Tada je V otvoreni skup u (Y, p) ako i samo ako postoji U otvoren skup u (X, d) takav da je $V = U \cap Y$.*

Dokaz. Neka je V otvoren skup u metričkom prostoru (Y, p). Tada je V unija otvorenih kugli, tj. postoji skup A i funkcije $y : A \to Y$ i $r : A \to \langle 0, \infty \rangle$ takve da je

$$V = \bigcup_{\alpha \in A} K(y_\alpha, r_\alpha; p).$$

Slijedi, koristeći propoziciju 1.1.12, da je

$$V = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \cap K(y_\alpha, r_\alpha; d)) = Y \cap (\bigcup_{\alpha \in A} K(y_\alpha, r_\alpha; d)).$$

Dakle, $V = Y \cap U$, gdje je $U = \bigcup_{\alpha \in A} K(y_\alpha, r_\alpha; d)$. Očito je U otvoren skup u metričkom prostoru (X, d).

Obratno, pretpostavimo da je $V = Y \cap U$, gdje je U otvoren skup u metričkom prostoru (X, d). Dokažimo da je V otvoren u metričkom prostoru (Y, p). Neka je $y \in V$ proizvoljan element. Tada je $y \in Y \cap U$ pa je $y \in Y$ i $y \in U$. Budući da je U otvoren skup u metričkom prostoru (X, d), postoji $r > 0$ takav da je

$$K(y, r; d) \subseteq U.$$

No, tada je

$$Y \cap K(y, r; d) \subseteq Y \cap U,$$

odnosno

$$K(y, r; p) \subseteq V.$$

Prema tome, V je otvoren skup u metričkom prostoru (Y, p). □

1.2 Topološki prostori

Definicija 1.2.1. *Neka je X neprazan skup te neka je $\mathcal{T}$ familija podskupova od X (tj. $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$) koja ima sljedeća svojstva:*

1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

2) *Ako je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{T}$ (tj. $U : A \to \mathcal{T}$) onda je i* $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$

3) $U \cap V \in \mathcal{T}$ *za sve* $U, V \in \mathcal{T}$.

Tada za $\mathcal{T}$ kažemo da je topologija na skupu X, a za uređeni par $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je topološki prostor.

Definicija 1.2.2. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Za skup U kažemo da je otvoren u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako je $U \in \mathcal{T}$.*

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Lako se indukcijom dokaže sljedeće:
Ako je $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}$, onda je

$$U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{T}.$$

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Za $\mathcal{U}$ kažemo da je otvoreni pokrivač topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$ ako je $\mathcal{U}$ pokrivač skupa X te ako je svaki element od $\mathcal{U}$ otvoren skup u $(X, \mathcal{T})$, tj. $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ i

$$\bigcup_{A \in \mathcal{U}} A = X.$$

Neka je X neprazan skup. Tada je $\mathcal{P}(X)$ topologija na X (očito vrijede sva svojstva topologije). Za $\mathcal{P}(X)$ kažemo da je diskretna topologija na X, a za topološki prostor $(X, \mathcal{P}(X))$ kažemo da je diskretan topološki prostor.

Primjer 1.2.3. *Neka je X bilo koji neprazan skup. Tada je $\{\emptyset, X\}$ topologija na X. Za $\{\emptyset, X\}$ kažemo da je indiskretna topologija na X, a za topološki prostor $(X, \{\emptyset, X\})$ da je indiskretan topološki prostor.*

Primjer 1.2.4. *Neka je $X = \{1, 2, 3\}$ i $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ topologija na X. Neka je $\mathcal{U} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$. Je li $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$?*
Nije, jer $\{2\} \in \mathcal{U}$, ali $\{2\}$ nije element topologije $\mathcal{T}$.

Neka je (X, d) metrički prostor. Označimo sa $\mathcal{T}_d$ familiju svih otvorenih skupova u metričkom prostoru (X, d).

Primjer 1.2.5. *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada je $\mathcal{T}_d$ topologija na X, dakle $(X, \mathcal{T}_d)$ je topološki prostor. Za $\mathcal{T}_d$ kažemo da je topologija inducirana metrikom d.*

Definicija 1.2.6. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Tada za $\mathcal{T}_d$ kažemo da je euklidska topologija na $\mathbb{R}^n$. Općenitije, ako je X neprazan podskup od $\mathbb{R}^n$ i p euklidska metrika na X, onda za $\mathcal{T}_p$ kažemo da je euklidska topologija na X.*

Primjer 1.2.7. *Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$ i neka je $\mathcal{V} = \{\langle -\infty, 1\rangle, \langle 0, +\infty\rangle\}$. Je li $\mathcal{V}$ otvoreni pokrivač od $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$?*

$\mathcal{V}$ je prekrio sve brojeve od $\mathbb{R}$ pa je pokrivač i oba elementa od $\mathcal{V}$ su otvorena, tj.

$$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E} \;\; i \;\; \langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle = \mathbb{R}.$$

Dakle, $\mathcal{V}$ je otvoreni pokrivač od $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$.

1.3 Kompaktnost

Definicija 1.3.1. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je kompaktan ako svaki otvoreni pokrivač od $(X, \mathcal{T})$ ima konačan potpokrivač.*

Dakle, $(X, \mathcal{T})$ je kompaktan ako vrijedi sljedeće: kad god je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $(X, \mathcal{T})$ onda postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n = X$.

Primjer 1.3.2. *Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$. Tada topološki prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ nije kompaktan.*

Neka je $\mathcal{U} = \{\langle a, b\rangle \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$. Pretpostavimo suprotno, tj. $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ kompaktan topološki prostor. Tada svaki otvoreni pokrivač od $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ ima konačan potpokrivač. Posebno, $\mathcal{U}$ ima konačan potpokrivač, tj. postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je

$$\mathbb{R} \subseteq U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n.$$

Imamo da je $U_1 \in \mathcal{U}$ pa je

$$U_1 = \langle a_1, b_1\rangle, \quad a_1, b_1 \in \mathbb{R}, \quad a_1 < b_1.$$

Analogno

$$U_2 = \langle a_2, b_2\rangle, \ldots, U_n = \langle a_n, b_n\rangle.$$

Dakle,

$$\mathbb{R} \subseteq \langle a_1, b_1\rangle \cup \langle a_2, b_2\rangle \cup, \ldots, \cup \langle a_n, b_n\rangle.$$

Sigurno postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je

$$x < a_1, \ldots, x < a_n.$$

Tada

$$x \notin \langle a_1, b_1\rangle \cup, \ldots, \cup \langle a_n, b_n\rangle$$

što je kontradikcija. Dakle, $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ nije kompaktan topološki prostor.

Primjer 1.3.3. *Neka je $X = \{1, 2, 3\}$. Tada je $(X, \mathcal{P}(X))$ kompaktan topološki prostor. Zapravo, kad god je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor takav da je $\mathcal{T}$ konačan skup, onda je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan. Naime, očito je svaki otvoreni pokrivač od $(X, \mathcal{T})$ konačan.*

Primjer 1.3.4. *Neka je $\mathcal{S}$ euklidska topologija na $[0, 1\rangle$. Topološki prostor $([0, 1\rangle, \mathcal{S})$ nije kompaktan.*

Neka je $\mathcal{U} = \{[0, a\rangle \mid a \in \langle 0, 1\rangle\}$. *Zašto je* $\mathcal{U}$ *otvoreni pokrivač od* $([0, 1\rangle, \mathcal{S})$? *Jasno,* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$. *Trebamo još vidjeti da je*

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = [0, 1\rangle,$$

odnosno

$$\bigcup_{a \in \langle 0,1\rangle} [0, a\rangle = [0, 1\rangle.$$

Neka je $x \in \bigcup_{a \in \langle 0,1\rangle} [0, a\rangle$. *Postoji* $a \in \langle 0, 1\rangle$ *takav da je* $x \in [0, a\rangle$. *Dakle,* $x \in [0, 1\rangle$.

Obratno, neka je $x \in [0, 1\rangle$. *Tada postoji* $a \in \langle 0, 1\rangle$ *takav da je* $x \in [0, a\rangle$. *Zašto postoji takav a? Budući da je* $x < 1$ *postoji* $a \in \mathbb{R}$ *takav da je*

$$x < a < 1.$$

Imamo

$$0 \leq x < a.$$

Dakle, $a \in \langle 0, 1\rangle$. *Očito je* $x \in [0, a\rangle$. *Zaključujemo,* $\mathcal{U}$ *je otvoreni pokrivač od* $([0, 1\rangle, \mathcal{S})$. *Pretpostavimo da postoje* $n \in \mathbb{N}$ *i* $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ *takvi da je*

$$U_1 \cup \cdots \cup U_n = [0, 1\rangle.$$

Imamo da za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ *postoji* $a_i \in \langle 0, 1\rangle$ *takav da je*

$$U_i = [0, a_i\rangle.$$

Dakle,

$$[0, a_1\rangle \cup \cdots \cup [0, a_n\rangle = [0, 1\rangle.$$

Neka je $M = \max\{a_1, \ldots, a_n\}$. *Tada je*

$$a_1 \leq M, \ldots, a_n \leq M.$$

Dakle,

$$M \notin [0, a_1\rangle \cup \cdots \cup [0, a_n\rangle.$$

No, očito je $M \in \langle 0, 1\rangle$.

Topologija Zariskog i zatvoreni skupovi

Primjer 1.3.5. *Neka je* $\mathcal{T} = \{\mathbb{R} \setminus K \mid K$ *konačan podskup od* $\mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$. *Tada je* $\mathcal{T}$ *topologija na* $\mathbb{R}$. *Nazivamo ju topologija Zariskog.*

Provjeravamo svojstva:
1) Jasno, $\emptyset \in \mathcal{T}$ *i* $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$ *jer je* $\mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \emptyset$.

2) Neka je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ *indeksirana familija elemenata od* $\mathcal{T}$. *Dakle,* $U_\alpha \in \mathcal{T}$, *za svaki* $\alpha \in A$. *Ako je* $U_\alpha = \emptyset$, *za svaki* $\alpha \in A$, *onda je jasno*

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \emptyset$$

pa je

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}.$$

Ako je $U_\alpha \neq \emptyset$ *za neki* $\alpha_0 \in A$ *onda je*

$$U_{\alpha_0} = \mathbb{R} \setminus K$$

za neki K *koji je konačan podskup od* $\mathbb{R}$. *Imamo*

$$U_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

pa je

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \subseteq \mathbb{R} \setminus U_{\alpha_0}.$$

No $\mathbb{R} \setminus U_{\alpha_0} = K$, *dakle*

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \subseteq K$$

pa je $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ *konačan skup. Označimo*

$$K' = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Dakle, K' *je konačan podskup od* $\mathbb{R}$ *i*

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \mathbb{R} \setminus K'.$$

Stoga je $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

3) Neka su $U, V \in \mathcal{T}$. *Ako je* $U = \emptyset$ *ili* $V = \emptyset$, *onda je* $U \cap V = \emptyset$ *pa je* $U \cap V \in \mathcal{T}$. *Ako je* $U \neq \emptyset$ *i* $V \neq \emptyset$, *onda je*

$$U = \mathbb{R} \setminus K_1, \quad V = \mathbb{R} \setminus K_2,$$

gdje su $K_1,\ K_2$ *konačni podskupovi od* $\mathbb{R}$. *Tada je*

$$U \cap V = (\mathbb{R} \setminus K_1) \cap (\mathbb{R} \setminus K_2) = K_1^C \cap K_2^C = (K_1 \cup K_2)^C = \mathbb{R} \setminus (K_1 \cup K_2),$$

$K_1 \cup K_2$ *konačan podskup od* $\mathbb{R}$, *pa je* $U \cap V \in \mathcal{T}$. *Prema tome* $\mathcal{T}$ *je topologija na* $\mathbb{R}$.

Definicija 1.3.6. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor te* $F \subseteq X$. *Za* F *kažemo da je zatvoren skup u topološkom prostoru* $(X, \mathcal{T})$ *ako je* F^C *otvoren skup u topološkom prostoru* $(X, \mathcal{T})$ *(*$F^C = X \setminus F$*).*

Propozicija 1.3.7. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor. Tada vrijedi sljedeće:*

1) $\emptyset$ *i* X *su zatvoreni skupovi u* $(X, \mathcal{T})$*;*
2) *Ako je* $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ *indeksirana familija zatvorenih skupova u* $(X, \mathcal{T})$, *onda je* $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$ *zatvoren skup u* $(X, \mathcal{T})$*;*
3) *Ako su* F *i* G *zatvoreni u* $(X, \mathcal{T})$, *onda je* $F \cup G$ *zatvoren u* $(X, \mathcal{T})$.

Dokaz. 1) $\emptyset$ i X su očito zatvoreni u $(X, \mathcal{T})$ (jer su im komplementi otvoreni).

2) Vrijedi

$$\Big(\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha\Big)^C = \bigcup_{\alpha\in A} F_\alpha^C$$

iz čega slijedi da je $(\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha)^C$ otvoren skup, tj. $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$ je zatvoren u $(X, \mathcal{T})$.

3) Vrijedi sljedeće

$$(F \cup G)^C = F^C \cap G^C.$$

Dakle, $(F \cup G)^C$ je otvoren skup kao presjek dva otvorena skupa pa je $F \cup G$ zatvoren u $(X, \mathcal{T})$. □

Definicija 1.3.8. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka je* $F \subseteq X$. *Za* F *kažemo da je zatvoren u* (X, d) *ako je zatvoren u topološkom prostoru* $(X, \mathcal{T}_d)$. *Drugim riječima,* F *je zatvoren u* (X, d) *ako je* F^C *otvoren u* (X, d).

Primjer 1.3.9. *Neka je $\mathcal{T}$ topologija Zariskog na $\mathbb{R}$. Tada $\langle 0,1\rangle$ nije otvoren u $(\mathbb{R},\mathcal{T})$.*

Pretpostavimo da je $\langle 0,1\rangle$ otvoren, tj. $\langle 0,1\rangle \in \mathcal{T}$. Tada postoji konačan skup K takav da je

$$\langle 0,1\rangle = \mathbb{R}\setminus K = K^C /^C$$

$$\langle 0,1\rangle^C = K$$

$$\langle -\infty, 0] \cup [1,+\infty\rangle = K$$

Skupovi $\langle -\infty, 0]$ i $[1,+\infty\rangle$ nisu konačni, pa ni njihova unija nije konačan skup. Budući da je K konačan došli smo do kontradikcije. Dakle, $\langle 0,1\rangle \notin \mathcal{T}$, tj. $\langle 0,1\rangle$ nije otvoren u topološkom prostoru $(\mathbb{R},\mathcal{T})$.

Primjer 1.3.10. *Neka je $\mathcal{T}$ topologija Zariskog na $\mathbb{R}$. Tada $\langle 0,1\rangle$ nije zatvoren u $(\mathbb{R},\mathcal{T})$. Skup je zatvoren u topološkom prostoru $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ ako je njegov komplement otvoren u tom topološkom prostoru. Prema tome, promotrit ćemo komplement skupa $\langle 0,1\rangle$. Jasno,*

$$\langle 0,1\rangle^C = \mathbb{R}\setminus\langle 0,1\rangle = \langle -\infty, 0] \cup [1,+\infty\rangle.$$

Budući da $K = \langle 0,1\rangle$ nije konačan, $\langle 0,1\rangle^C$ nije otvoren u topološkom prostoru $(\mathbb{R},\mathcal{T})$. Dakle, $\langle 0,1\rangle$ nije zatvoren u topološkom prostoru $(\mathbb{R},\mathcal{T})$.

Teorem 1.3.11. *Neka je $\mathcal{T}$ topologija Zariskog na $\mathbb{R}$. Tada je $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ kompaktan topološki prostor.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $(\mathbb{R},\mathcal{T})$. Tvrdimo da $\mathcal{U}$ ima konačan potpokrivač. Sigurno postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $U \neq \emptyset$. Stoga je (jer je $U \in \mathcal{T}$)

$$U = \mathbb{R}\setminus K$$

gdje je

$$K = \{x_1,\dots,x_n\}$$

za neke $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$ (ako je $U = \mathbb{R}$, onda tvrdnja očito vrijedi). Za svaki $i \in \{1,\dots,n\}$ je $x_i \in \mathbb{R}$ pa stoga postoji $V_i \in \mathcal{U}$ takav da je $x_i \in V_i$ (jer je $\mathcal{U}$ pokrivač). Tada je $\{U, V_1,\dots,V_n\}$ konačan potpokrivač od $\mathcal{U}$ na $\mathbb{R}$. Dakle, $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ je kompaktan topološki prostor. □

Definicija 1.3.12. *Neka je $(X,\mathcal{T})$ topološki prostor. Neka je $K \subseteq X$ te $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$, $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Za $\mathcal{U}$ kažemo da je otvoreni pokrivač od K u $(X,\mathcal{T})$ ako je $K \subseteq \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$.*

Definicija 1.3.13. *Neka je $(X,\mathcal{T})$ topološki prostor te $K \subseteq X$. Kažemo da je K kompaktan skup u topološkom prostoru $(X,\mathcal{T})$ ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ skupa K u $(X,\mathcal{T})$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1,\dots,U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $K \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n$.*

Uočimo, topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ je kompaktan ako i samo ako je skup X kompaktan u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$.

Propozicija 1.3.14. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan topološki prostor, te neka je F zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. Tada je F kompaktan u $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od F u $(X, \mathcal{T})$. Neka je

$$\mathcal{U}' = \mathcal{U} \cup \{F^C\}.$$

$\mathcal{U}'$ je otvoreni pokrivač od $(X, \mathcal{T})$. Jer je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan topološki prostor $\mathcal{U}'$ se može reducirati na konačan potpokrivač. Iz ovoga zaključujemo da postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je

$$X = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n \cup F^C.$$

Slijedi da je

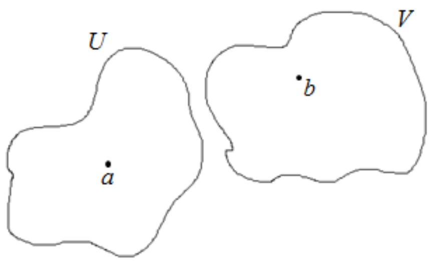
$$F \subseteq U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n.$$

Dakle, F je kompaktan skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$. □

Hausdorffov topološki prostor

Definicija 1.3.15. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Za $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je metrizabilan topološki prostor ako postoji metrika d na X takva da je $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$.*

Definicija 1.3.16. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Za $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je Hausdorffov topološki prostor ako za sve $a, b \in X$, $a \neq b$ postoje $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da je $a \in U$, $b \in V$, $U \cap V = \emptyset$.*



Slika 1.5: Hausdorffov topološki prostor

Propozicija 1.3.17. *Svaki metrizabilan topološki prostor je Hausdorffov.*

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{T})$ metrizabilan topološki prostor. Tada postoji metrika d na X takva da je $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$. Neka su $a, b \in X, a \neq b$. Iz propozicije (1.1.9) slijedi da postoje U, V otvoreni skupovi u (X, d) takvi da je

$$a \in U,\ b \in V \ \text{ i } \ U \cap V = \emptyset.$$

Slijedi $U, V \in \mathcal{T}_d$, tj. $U, V \in \mathcal{T}$. Dakle, topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ je Hausdorffov. □

Primjer 1.3.18. *Neka je X neprazan skup. Neka je $\mathcal{T}$ indiskretna topologija na X, tj. $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Ako X ima barem dva elementa, onda topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ nije Hausdorffov, a iz propozicije (1.3.17) slijedi da nije ni metrizabilan.*

Primjer 1.3.19. *Neka je X neprazan skup. Tada je $(X, \mathcal{P}(X))$ metrizabilan topološki prostor.*

Naime, vrijedi $\mathcal{P}(X) = \mathcal{T}_d$, gdje je d diskretna metrika na X. Jasno,

$$\mathcal{P}(X) \supseteq \mathcal{T}_d.$$

S druge strane

$$\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{T}_d$$

jer je svaki podskup od X otvoren u (X, d). Zašto je to tako? Neka je $S \subseteq X$ i neka je $s \in S$. Neka je $r = \frac{1}{2}$. Tada iz definicije diskretne metrike slijedi da je

$$K(s, r) = \{s\}.$$

Dakle,

$$K(s, r) \subseteq S$$

pa je S otvoren skup u (X, d).

Lema 1.3.20. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $S \subseteq X$ takav da za svaki $s \in S$ postoji $U \in \mathcal{T}$ takav da je $s \in U \subseteq S$. Tada je $S \in \mathcal{T}$.*

Dokaz. Za $s \in S$ neka je $U_s \in \mathcal{T}$ takav da je

$$s \in U_s \subseteq S.$$

Tada je $(U_s)_{s \in S}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{T}$. Stoga je

$$\bigcup_{s \in S} U_s \in \mathcal{T}.$$

No,

$$S = \bigcup_{s \in S} U_s.$$

Dakle, $S \in \mathcal{T}$. □

Ako je $(X,\mathcal{T})$ topološki prostor i K kompaktan skup u $(X,\mathcal{T})$, mora li K biti zatvoren? Ne mora.

Neka je $(X,\{\emptyset,X\})$ topološki prostor i $K\subseteq X$ takav da je

$$\emptyset \neq K \neq X.$$

Otvoreni pokrivač od K može imati samo $\emptyset$ i X. K je kompaktan jer je svaki otvoreni pokrivač od K konačan (samo $\emptyset$ i X). Budući da je

$$\emptyset \neq K^C \neq X,$$

K^C nije otvoren skup u topološkom prostoru $(X,\{\emptyset,X\})$. Dakle, K nije zatvoren u topološkom prostoru $(X,\{\emptyset,X\})$.

Teorem 1.3.21. *Neka je $(X,\mathcal{T})$ Hausdorffov topološki prostor, te neka je K kompaktan skup u $(X,\mathcal{T})$. Tada je K zatvoren u $(X,\mathcal{T})$.*

Dokaz. Ako je $K=\emptyset$ onda je tvrdnja jasna. Pretpostavimo da je $K\neq\emptyset$. Neka je $x\in K^C$. Želimo dokazati da postoji otvoren skup U takav da je

$$x\in U\subseteq K^C.$$

Ako to pokažemo, iz leme 1.3.20 će slijediti da je $K^C\in\mathcal{T}$ (tj. da je K^C otvoren skup). Neka je $y\in K$. Tada je $x\neq y$, pa budući da je topološki prostor $(X,\mathcal{T})$ Hausdorffov postoje $U_y, V_y\in\mathcal{T}$ takvi da je

$$x\in U_y,\ y\in V_y,\ U_y\cap V_y=\emptyset.$$

Neka je

$$\mathcal{U}=\{V_y \mid y\in K\}.$$

Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač skupa K u topološkom prostoru $(X,\mathcal{T})$ pa postoji $n\in\mathbb{N}$ i $y_1,\dots,y_n$ takvi da je

$$K\subseteq V_{y_1}\cup\dots\cup V_{y_n}.$$

Neka je

$$W=U_{y_1}\cap\dots\cap U_{y_n}.$$

Tada je očito $x\in W$ (jer je x iz svakog U_y) te je očito da je $W\in\mathcal{T}$.

Dokažimo da je $W\subseteq K^C$. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $z\in W$ takav je $z\in K$ (negirali smo tvrdnju "Za svaki $z\in W$ je $z\in K^C$"). No, tada je

$$z\in V_{y_1}\cup\dots\cup V_{y_n}$$

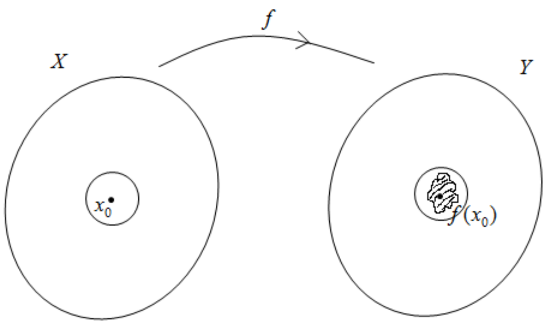
pa je $z\in V_{y_i}$ za neki $i\in\{1,\dots,n\}$. Ali $z\in W$ povlači da je $z\in U_{y_i}$. Dakle,

$$z\in U_{y_i}\ \text{ i }\ z\in V_{y_i}$$

no to je nemoguće jer je
$$U_{y_i} \cap V_{y_i} = \emptyset.$$
Slijedi da je $W \subseteq K^C$.
Zaključak: Za svaki $x \in K^C$ postoji $W \in \mathcal{T}$ takav da je
$$x \in W \subseteq K^C.$$
Prema lemi 1.3.20 imamo da je $K^C \in \mathcal{T}$. Dakle, K^C je otvoren skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ pa je K zatvoren u $(X, \mathcal{T})$. □

1.4 Neprekidne funkcije

Definicija 1.4.1. *Neka su (X, p) i (Y, q) metrički prostori te $f : X \to Y$ i $x_0 \in X$. Kažemo da je f neprekidna u x_0 s obzirom na metrike p i q ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $f(K(x_0, \delta; p)) \subseteq K(f(x_0), \epsilon; q)$. Funkcija f je neprekidna ako je neprekidna u svakoj točki svoje domene.*



Slika 1.6: Neprekidna funkcija s obzirom na metrike p i q

Napomena 1.4.2. *Uz oznake iz prethodne definicije vrijedi:*
$$f(K(x_0, \delta; p)) \subseteq K(f(x_0), \epsilon; q) \Leftrightarrow \{f(x) \mid x \in K(x_0, \delta; p)\} \subseteq K(f(x_0), \epsilon; q)$$
$$\Updownarrow$$
$$(x \in K(x_0, \delta; p) \Rightarrow f(x) \in K(f(x_0), \epsilon; q)) \Leftrightarrow (p(x, x_0) < \delta \Rightarrow q(f(x), f(x_0)) < \epsilon)$$
Dakle, f je neprekidna u x_0 ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je
$$p(x, x_0) < \delta \Rightarrow q(f(x), f(x_0)) < \epsilon).$$

Definicija 1.4.3. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$. Za f kažemo da je neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$ ako je $f^{\leftarrow}(V) \in \mathcal{T}$, za svaki $V \in \mathcal{S}$.*

Propozicija 1.4.4. *Neka su $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ i $(Z, \mathcal{V})$ topološki prostori te $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ funkcije takve da je f neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$ i g neprekidna s obzirom na $\mathcal{S}$, $\mathcal{V}$. Tada je kompozicija $g \circ f : X \to Z$ neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$, $\mathcal{V}$.*

Dokaz. Neka je $V \in \mathcal{V}$. Želimo dokazati da je

$$(g \circ f)^{\leftarrow}(V) \in \mathcal{T}.$$

Tvrdimo da vrijedi

$$(g \circ f)^{\leftarrow}(V) = f^{\leftarrow}(g^{\leftarrow}(V)). \tag{1.2}$$

Naime, vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$x \in (g \circ f)^{\leftarrow}(V) \Leftrightarrow (g \circ f)(x) \in V$$

$$\Leftrightarrow g(f(x)) \in V \Leftrightarrow f(x) \in g^{\leftarrow}(V)$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{\leftarrow}(g^{\leftarrow}(V)).$$

Dakle, (1.2) vrijedi. No, budući da je g neprekidna s obzirom na $\mathcal{S}$, $\mathcal{V}$ slijedi da je $g^{\leftarrow}(V) \in \mathcal{S}$ pa je $f^{\leftarrow}(g^{\leftarrow}(V)) \in \mathcal{T}$ (jer je f neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$).
Zaključak: $g \circ f$ je neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$, $\mathcal{V}$. □

Propozicija 1.4.5. *Neka su (X, p) i (Y, q) metrički prostori te neka je $f : X \to Y$. Tada je f neprekidna s obzirom na metrike p, q ako i samo ako je $f^{\leftarrow}(V)$ otvoren skup u metričkom prostoru (X, p) za svaki otvoren skup V u (Y, q).*

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna s obzirom na metrike p i q. Neka je V proizvoljan otvoren skup u metričkom prostoru (Y, q). Želimo dokazati da je $f^{\leftarrow}(V)$ otvoren skup u metričkom prostoru (X, p). Neka je

$$x \in f^{\leftarrow}(V).$$

Tada je $f(x) \in V$ pa budući da je V otvoren u metričkom prostoru (Y, q), postoji $r > 0$ takav da je

$$K(f(x), r; q) \subseteq V.$$

No, budući da je f neprekidna u točki x postoji $\delta > 0$ takav da je

$$f(K(x, \delta; p)) \subseteq K(f(x), r; q).$$

Stoga je

$$f(K(x, \delta; p)) \subseteq V$$

pa je
$$K(x, \delta; p) \subseteq f^{\leftarrow}(V).$$

Dakle, $f^{\leftarrow}(V)$ je otvoren skup u metričkom prostoru (X, p).
Obrat.
Pretpostavimo sada da je $f^{\leftarrow}(V)$ otvoren skup u metričkom prostoru (X, p) za svaki otvoren skup V u metričkom prostoru (Y, q). Dokažimo da je f neprekidna s obzirom na metrike p i q. Neka je $x_0 \in X$ i neka je $\epsilon > 0$.Tada je

$$K(f(x_0), \epsilon; q)$$

otvoren skup u metričkom prostoru (Y, q) (prema propoziciji 1.1.6) pa je

$$f^{\leftarrow}(K(f(x_0), \epsilon; q))$$

otvoren skup u (X, p). Jasno je da je

$$x_0 \in f^{\leftarrow}(K(f(x_0), \epsilon; q))$$

pa stoga postoji $r > 0$ takav da je

$$K(x_0, r; p) \subseteq f^{\leftarrow}(K(f(x_0), \epsilon; q)).$$

Stoga je
$$f(K(x_0, r; p)) \subseteq K(f(x_0), \epsilon; q).$$

Slijedi da je f neprekidna u x_0 s obzirom na metrike p i q. Dakle, f je neprekidna s obzirom na metrike p i q. □

Uočimo, ako su (X, p) i (Y, q) metrički prostori te $f : X \to Y$, onda je f neprekidna s obzirom na metrike p i q ako i samo ako je f neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}_p$ i $\mathcal{T}_q$.

Propozicija 1.4.6. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te $f : X \to Y$ funkcija. Tada je f neprekidna (s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$) ako i samo ako za svaki zatvoren skup F u $(Y, \mathcal{S})$ vrijedi da je $f^{\leftarrow}(F)$ zatvoren u $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Neka je $F \subseteq Y$. Tvrdimo da je

$$X \setminus f^{\leftarrow}(F) = f^{\leftarrow}(Y \setminus F). \tag{1.3}$$

Naime, vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$x \in X \setminus f^{\leftarrow}(F) \Leftrightarrow x \in X \ \ \& \ \ x \notin f^{\leftarrow}(F)$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow f(x) \in Y \ \& \ f(x) \notin F\\ &\Leftrightarrow f(x) \in Y \backslash F\\ &\Leftrightarrow x \in f^{\leftarrow}(Y \backslash F).\end{aligned}$$

Dakle, (1.3) vrijedi. Pretpostavimo da je f neprekidna. Neka je F zatvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$. Budući da je f neprekidna, $f^{\leftarrow}(Y \backslash F)$ je otvoren skup. Iz (1.3) slijedi da je $f^{\leftarrow}(F)$ zatvoren skup.

Obratno, pretpostavimo da je $f^{\leftarrow}(F)$ zatvoren u $(X, \mathcal{T})$ za svaki zatvoren skup F u $(Y, \mathcal{S})$. Želimo dokazati da je f neprekidna. Neka je V otvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$. Neka je

$$F = V^C.$$

Tada je

$$V = F^C$$

što povlači da je F zatvoren. Koristeći (1.3) imamo

$$f^{\leftarrow}(V) = f^{\leftarrow}(Y \backslash F) = X \backslash f^{\leftarrow}(F).$$

Budući da je $f^{\leftarrow}(F)$ zatvoren skup, $X \backslash f^{\leftarrow}(F)$ je otvoren, dakle, $f^{\leftarrow}(V)$ je otvoren u $(X, \mathcal{T})$. Time smo dokazali da je f neprekidna. □

Propozicija 1.4.7. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori, neka je $f : X \to Y$ funkcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ te neka je K kompaktan skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$. Tada je $f(K)$ kompaktan u topološkom prostoru $(Y, \mathcal{S})$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{V}$ otvoren pokrivač skupa $f(K)$ u topološkom prostoru $(Y, \mathcal{S})$. Neka je

$$\mathcal{U} = \{f^{\leftarrow}(V) \mid V \in \mathcal{V}\}.$$

Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač skupa K u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ (svaki $x \in K$ preslika se u $f(x) \in f(K)$). Budući da je K kompaktan skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$, postoje $n \in \mathbb{N}$ i $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ takvi da je

$$K \subseteq f^{\leftarrow}(V_1) \cup \cdots \cup f^{\leftarrow}(V_n).$$

Iz ovoga slijedi da je

$$f(K) \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_n.$$

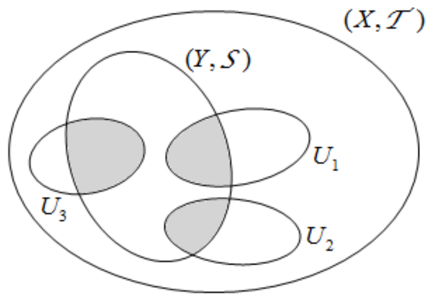
Zaključak: $f(K)$ je kompaktan skup u topološkom prostoru $(Y, \mathcal{S})$. □

Propozicija 1.4.8. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori i $f : X \to Y$ neprekidna funkcija s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$. Neka je f surjekcija i $(X, \mathcal{T})$ kompaktan topološki prostor. Tada je topološki prostor $(Y, \mathcal{S})$ kompaktan.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz propozicije 1.4.7. □

1.5 Relativna topologija

Definicija 1.5.1. *Neka su $(Y, \mathcal{S})$ i $(X, \mathcal{T})$ topološki prostori. Kažemo da je $(Y, \mathcal{S})$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$ ako je $Y \subseteq X$ te ako je $\mathcal{S} = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$. Za $\mathcal{S}$ još kažemo da je relativna topologija.*



Slika 1.7: $(Y, \mathcal{S})$ je potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$

Dakle, topološki prostor $(Y, \mathcal{S})$ je potprostor od $(X, \mathcal{T})$ ako i samo ako je $Y \subseteq X$ te za svaki $V \in Y$ vrijedi sljedeće:

$$V \in \mathcal{S} \Leftrightarrow (\exists U \in \mathcal{T})(V = U \cap Y).$$

Uočimo da nas gornji zapis podsjeća na potprostor metričkog prostora.

Pokažimo da je je relativna topologija zaista topologija.

Propozicija 1.5.2. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$. Tada postoji jedinstvena topologija $\mathcal{S}$ na Y takva da je $(Y, \mathcal{S})$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Pretpostavimo da su $\mathcal{S}'$ i $\mathcal{S}''$ dvije topologije na Y takve da je $(Y, \mathcal{S}')$ potprostor od $(X, \mathcal{T})$ te da je $(Y, \mathcal{S}'')$ potprostor od $(X, \mathcal{T})$. Tada je

$$\mathcal{S}' = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\} \text{ i } \mathcal{S}'' = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$$

pa je $\mathcal{S}' = \mathcal{S}''$. Dakle, topologija $\mathcal{S}$ na Y takva da je $(Y, \mathcal{S})$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$ je jedinstvena (ako postoji).

Dokažimo sada da takva topologija $\mathcal{S}$ postoji. Definirajmo

$$\mathcal{S} = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}.$$

Ako je $\mathcal{S}$ topologija na Y onda je jasno da je $(Y, \mathcal{S})$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$ (po definiciji). Stoga, jedino što još moramo dokazati je to da je $\mathcal{S}$ topologija na Y. Provjeravamo svojstva:
1) Jasno, $\emptyset$ možemo zapisati kao

$$\emptyset = \emptyset \cap Y, \quad \emptyset \in \mathcal{T}$$

pa je $\emptyset \in \mathcal{S}$. Nadalje, $Y = X \cap Y$ jer je $Y \subseteq X$ i $X \in \mathcal{T}$ pa je $Y \in \mathcal{S}$.

2) Neka je $(V_\alpha)_{\alpha\in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{S}$. Želimo dokazati da je

$$\bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha \in \mathcal{S}.$$

Za svaki $\alpha \in A$ je $V_\alpha \in \mathcal{S}$ pa postoji $U_\alpha \in \mathcal{T}$ takav da je

$$V_\alpha = U_\alpha \cap Y.$$

Tvrdimo da je

$$\bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A}(U_\alpha \cap Y) = (\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha) \cap Y, \quad \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{T}. \tag{1.4}$$

Uočimo, budući da su svi $U_\alpha \in \mathcal{T}$, a $\mathcal{T}$ je topologija, onda je i

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{T}.$$

Neka je

$$x \in \bigcup_{\alpha\in A}(U_\alpha \cap Y).$$

Tada postoji $\alpha_0 \in A$ takav da je $x \in U_{\alpha_0} \cap Y$. Dakle,

$$x \in U_{\alpha_0} \text{ i } x \in Y.$$

Budući da je $x \in U_{\alpha_0}$ onda je

$$x \in \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \text{ i } x \in Y.$$

Slijedi da je

$$x \in (\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha) \cap Y.$$

Obratno, neka je

$$x \in (\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha) \cap Y.$$

Tada je
$$x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \ \text{ i } \ x \in Y.$$
Budući da je
$$x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha,$$
postoji $\alpha_0 \in A$ takav da je $x \in U_{\alpha_0}$ i $x \in Y$. Slijedi da je
$$x \in U_{\alpha_0} \cap Y$$
pa je
$$x \in \bigcup_{\alpha \in A} (U_\alpha \cap Y).$$
Dakle, jednakost (1.4) vrijedi. Zaključujemo da je
$$\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \in \mathcal{S}.$$

3) Neka su $V_1, V_2 \in \mathcal{S}$. Tada je
$$V_1 = U_1 \cap Y \ \text{ i } \ V_2 = U_2 \cap Y,$$
gdje su $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$. Tada je
$$V_1 \cap V_2 = (U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) = (U_1 \cap U_2) \cap Y, \quad U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T},$$
pa je $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{S}$.
Zaključak: $\mathcal{S}$ je topologija na Y. □

Propozicija 1.5.3. *Neka je (Y, p) potprostor metričkog prostora (X, d). Tada je $(Y, \mathcal{T}_p)$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T}_d)$, tj. $\mathcal{T}_p = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}_d\}$.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz propozicije 1.1.13. □

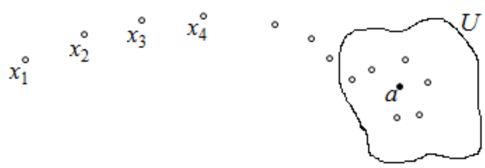
Poglavlje 2

Nizovi i podnizovi

2.1 Konvergencija niza

Definicija 2.1.1. *Neka je X skup. Niz u X je bilo koja funkcija kojoj je domena $\mathbb{N}$, a čija je slika sadržana u X.*
Ako je x niz u X, onda za $n \in \mathbb{N}$ vrijednost $x(n)$ označavamo sa x_n.
Pišemo $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definicija 2.1.2. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u X te $a \in X$. Za niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kažemo da konvergira prema točki a ako za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ takav da je $a \in U$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in U$ za svaki $n \geq n_0$.*
Pišemo: $x_n \longrightarrow a$.



Slika 2.1: Konvergentan niz u metričkom prostoru

Propozicija 2.1.3. *Neka je (X, d) metrički prostor, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u X te $a \in X$. Tada niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema a u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(a, x_n) < \epsilon$ za svaki $n \geq n_0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema a u metričkom prostoru (X, d). Neka je $\epsilon > 0$. Jasno, $K(a, \epsilon)$ je otvoren skup u metričkom prostoru (X, d) i sadrži a, pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$x_n \in K(a, \epsilon), \ \forall n \geq n_0.$$

To povlači da je

$$d(a, x_n) < \epsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

Obratno, pretpostavimo da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(a, x_n) < \epsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

Dokažimo da (x_n) konvergira prema a u metričkom prostoru (X, d). Neka je U otvoren skup u metričkom prostoru (X, d) takav da je $a \in U$. Tada postoji $\epsilon > 0$ takav da je

$$K(a, \epsilon) \subseteq U.$$

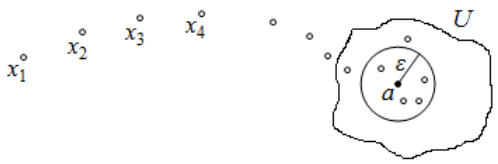
Znamo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(a, x_n) < \epsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

No tada je

$$x_n \in K(a, \epsilon), \ \forall n \geq n_0,$$

pa je $x_n \in U$, $\forall n \geq n_0$.
Zaključak: niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema a u metričkom prostoru (X, d). □



Slika 2.2: Prikaz propozicije 2.1.3

Definicija 2.1.4. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, (x_n) niz u X i $a \in X$. Za niz (x_n) kažemo da konvergira prema a u $(X, \mathcal{T})$ ako za svaki $U \in \mathcal{T}$ takav da je $a \in U$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in U$ za svaki $n \geq n_0$.*

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $a \in X$ te $U \subseteq X$. Za U kažemo da je otvorena okolina točke a u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako je U otvoren i $a \in U$.

Propozicija 2.1.5. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, F zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$, $a \in X$ te (x_n) niz u X koji konvergira prema a. Pretpostavimo da je $x_n \in F$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je $a \in F$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. $a \notin F$. Tada je $a \in F^C$. Budući da je F^C otvoren u $(X, \mathcal{T})$ i (x_n) konvergira prema a postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in F^C$ za svaki $n \geq n_0$ što je u kontradikciji s pretpostavkom propozicije.
Zaključak: $a \in F$. □

Ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $a \in X$ i (x_n) niz u X takav da (x_n) konvergira prema a, onda za a kažemo da je limes niza (x_n).

Uočimo: Ako je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X te $a \in X$, onda (x_n) konvergira prema a u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako (x_n) konvergira prema a u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.

Primjer 2.1.6. *Neka je X neprazan skup, $a \in X$ te (x_n) niz u X. Tada niz (x_n) teži prema a u topološkom prostoru $(X, \{\emptyset, X\})$.*

Naime, jedina otvorena okolina točke a u topološkom prostoru $(X, \{\emptyset, X\})$ je X. Ovo pokazuje da limes niza u topološkom prostoru općenito nije jedinstven. Dakle, svaki niz u X teži prema svakoj točki u X u topološkom prostoru $(X, \{\emptyset, X\})$.

Primjer 2.1.7. *Neka je $X = \{1, 2, 3\}$ te neka je $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, X\}$. Jasno, $\mathcal{T}$ je topologija na X.*

Jedina otvorena okolina točke 2 u ovom topološkom prostoru je X. Iz ovoga zaključujemo da svaki niz u X konvergira prema točki 2 u tom topološkom prostoru (npr. $x_n = 1$, $x_n = 3$ za svaki $n \in \mathbb{N}$). Isto tako zaključujemo da svaki niz u X konvergira prema točki 3 u tom topološkom prostoru. Prema tome, limes niza nije jedinstven u topološkom prostoru $(X, \{\emptyset, \{1\}, X\})$.

Neka je (x_n) niz definiran sa

$$x_n = 3, \ n \in \mathbb{N}.$$

Tada 1 nije limes ovog niza u $(X, \{\emptyset, \{1\}, X\})$ jer je $\{1\}$ otvorena okolina točke 1 u $(X, \{\emptyset, \{1\}, X\})$, a $x_n \notin \{1\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Propozicija 2.1.8. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov topološki prostor, neka je (x_n) niz u X te neka su $a, b \in X$. Pretpostavimo da (x_n) konvergira prema a i (x_n) konvergira prema b. Tada je $a = b$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. $a \neq b$. Budući da je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov topološki prostor postoje $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da je

$$a \in U \ \text{ i } \ b \in V, \ \ U \cap V = \emptyset.$$

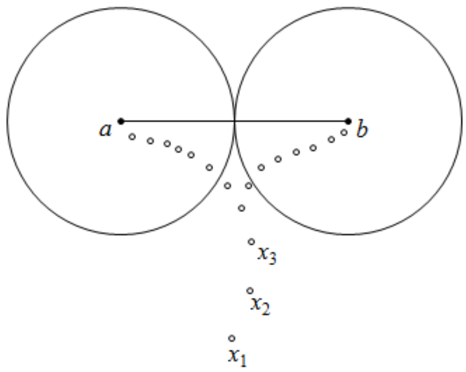
Iz činjenice da (x_n) konvergira prema a slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in U$ za svaki $n \geq n_0$. Analogno, iz činjenice da (x_n) konvergira prema b slijedi da postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in V$ za svaki $n \geq m_0$. Neka je $n = \max\{n_0, m_0\}$. Slijedi da je

$$x_n \in U \text{ i } x_n \in V,$$

odnosno

$$x_n \in U \cap V,$$

ali $U \cap V = \emptyset$. Dakle, došli smo do kontradikcije. Zaključak: $a = b$ $\square$



Slika 2.3: Limes niza je jedinstven u metričkom prostoru

Prethodna propozicija nam kaže da je limes niza jedinstven u Hausdorffovom topološkom prostoru. Kao posljedicu imamo da je limes niza u metričkom prostoru jedinstven.

Korolar 2.1.9. *Neka je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X te $a, b \in X$ takvi da (x_n) konvergira prema a i (x_n) konvergira prema b. Tada je $a = b$.*

Dokaz. Iz pretpostavke korolara slijedi da (x_n) konvergira prema a i (x_n) konvergira prema b u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$. Topološki prostor $(X, \mathcal{T}_d)$ je metrizabilan pa prema propoziciji 1.3.17 slijedi da je i Hausdorffov. Iz propozicije 2.1.8 slijedi da je $a = b$. $\square$

Definicija 2.1.10. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, (x_n) niz u X te $a \in X$. Za a kažemo da je gomilište niza (x_n) u $(X, \mathcal{T})$ ako za svaku okolinu U točke a i svaki $N \in \mathbb{N}$ postoji $n \geq N$ takav da je $x_n \in U$.*

Uočimo, ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, (x_n) niz u X, $a \in X$ te ako je a limes niza (x_n), onda je a gomilište niza (x_n).
Naime, neka je U otvorena okolina točke a te $N \in \mathbb{N}$. Budući da $x_n \longrightarrow a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$

takav da je $x_n \in U$ za svaki $n \geq n_0$. Uzmimo $n = \max\{n_0, N\}$. Tada je $n \geq N$ i $n \geq n_0$ iz čega slijedi da je $x_n \in U$. Dakle, a je gomilište niza (x_n).

Definicija 2.1.11. *Neka je (X, d) metrički prostor i (x_n) niz u X. Za niz (x_n) kažemo da je konvergentan ako postoji $a \in X$ takav da (x_n) konvergira prema a.*

2.2 Gomilište niza

Definicija 2.2.1. *Neka je (X, d) metrički prostor, $a \in X$ te (x_n) niz u X. Za a kažemo da je gomilište niza (x_n) u (X, d) ako je a gomilište niza (x_n) u pripradnom topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.*

Primjer 2.2.2. *Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ definiran sa $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada niz (x_n) nema gomilišta u $\mathbb{R}$, tj. ne postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je a gomilište od (x_n) (u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$, gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$).*

Pretpostavimo suprotno, tj. postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je a gomilište od (x_n). Neka je

$$U = K(a, 1) = \langle a - 1, a + 1 \rangle.$$

Odaberimo $N \in \mathbb{N}$ takav da je

$$N > a + 1.$$

Budući da je a gomilište postoji $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ takav da je $x_n \in U$, tj.

$$x_n \in \langle a - 1, a + 1 \rangle.$$

Dakle,

$$n = x_n < a + 1 < N \leq n$$

što je kontradikcija.
Zaključak: Niz (x_n) nema gomilišta u $\mathbb{R}$.

Teorem 2.2.3. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan topološki prostor te (x_n) niz u X. Tada niz (x_n) ima gomilište u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da niz (x_n) nema gomilište u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$. Dakle, za svaki $a \in X$ vrijedi da a nije gomilište od (x_n) pa postoje okolina U_a od a i $N_a \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq N_\alpha$ vrijedi $x_n \notin U$. Neka je

$$\mathcal{U} = \{U_a \mid a \in X\}.$$

Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $(X, \mathcal{T})$. To očito vrijedi. Budući da je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan topološki prostor postoje $n \in \mathbb{N}$ i $a_1, \ldots, a_n \in X$ takvi da je

$$X = U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_n}. \tag{2.1}$$

Neka je $m = \max\{N_{a_1}, \dots, N_{a_n}\}$. Tada je

$$m \geq N_{a_1}, \dots, m \geq N_{a_n}$$

pa

$$x_m \notin U_{a_1}, \dots, x_m \notin U_{a_n}$$

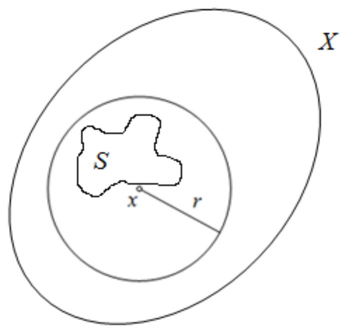
iz čega slijedi da

$$x_m \notin U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_n}.$$

Iz jednakosti (2.1) slijedi da $x_m \notin X$ što je kontradikcija. Dakle, niz (x_n) ima gomilište u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$. □

2.3 Potpuno omeđen metrički prostor

Definicija 2.3.1. *Neka je (X, d) metrički prostor te $S \subseteq X$. Za skup S kažemo da je omeđen u (X, d) ako postoje $x \in X$ i $r > 0$ takvi da je $S \subseteq K(x, r)$.*



Slika 2.4: S je omeđen skup u metričkom prostoru (X, d)

Vrijedi sljedeće: Ako je S omeđen skup u metričkom prostoru (X, d) onda za svaki $x \in X$ postoji $r > 0$ takav da je

$$S \subseteq K(x, r).$$

Naime, iz činjenice da je S omeđen slijedi da postoje $x_0 \in X$ i $r_0 > 0$ takvi da je

$$S \subseteq K(x_0, r_0).$$

Neka je $x \in X$ proizvoljan i neka je

$$r = d(x, x_0) + r_0.$$

Za svaki $s \in S$ vrijedi

$$d(x, s) \leq d(x, x_0) + d(x_0, s) < d(x, x_0) + r_0 = r.$$

Dakle,

$$d(x, s) < r$$

što znači da je $s \in K(x, r)$. Dakle, $S \subseteq K(x, r)$.

Propozicija 2.3.2. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su S i T omeđeni skupovi u (X, d). Tada je $S \cup T$ omeđen skup u metričkom prostoru (X, d).*

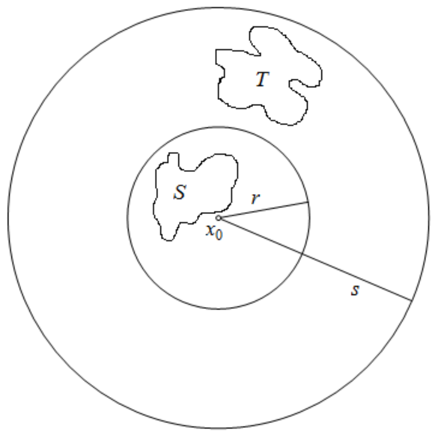
Dokaz. Uzmimo $x_0 \in X$. Tada postoje $r, s > 0$ takvi da je

$$S \subseteq K(x_0, r) \text{ i } T \subseteq K(x_0, s)$$

(jer su S i T omeđeni skupovi). Neka je $t = \max\{r, s\}$. Tada je očito

$$S \cup T \subseteq K(x_0, t).$$

Dakle, $S \cup T$ je omeđen skup u (X, d) (vidi sliku 3.5). □



Slika 2.5: Unija dva omeđena skupa je omeđen skup u metričkom prostoru

Iz propozicije 2.3.2 lako se indukcijom dokaže sljedeće:

Korolar 2.3.3. *Neka je (X, d) metrički prostor, $n \in \mathbb{N}$ te $S_1, \ldots, S_n$ omeđeni skupovi u (X, d). Tada je $S_1 \cup \cdots \cup S_n$ omeđen skup u (X, d).*

Za metrički prostor (X, d) kažemo da je omeđen ako je X omeđen skup u (X, d).

Sada idemo korak dalje.

Definicija 2.3.4. *Neka je (X, d) metrički prostor. Za (X, d) kažemo da je potpuno omeđen metrički prostor ako za svaki $\epsilon > 0$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \dots, x_n \in X$ takvi da je*

$$X = K(x_1, \epsilon) \cup \cdots \cup K(x_n, \epsilon). \tag{2.2}$$

Uočimo sljedeće: Ako je (X, d) potpuno omeđen metrički prostor, onda je (X, d) omeđen. Naime, odaberimo $\epsilon > 0$ (npr. $\epsilon = 1$). Tada postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \dots, x_n \in X$ takvi da vrijedi jednakost (2.2). Svaki od skupova

$$K(x_1, \epsilon), \dots, K(x_n, \epsilon)$$

je očito omeđen skup u (X, d) pa iz korolara 2.3.3 slijedi da je i

$$K(x_1, \epsilon) \cup \cdots \cup K(x_n, \epsilon)$$

omeđen u (X, d), tj. X je omeđen u (X, d). Dakle, (X, d) je omeđen metrički prostor.

Primjer 2.3.5. *Neka je X beskonačan skup te neka je d diskretna metrika na X. Tada je (X, d) omeđen metrički prostor ali nije potpuno omeđen. Naime, za bilo koji $x \in X$ i bilo koji $r > 1$ vrijedi da je $K(x, r) = X$. Slijedi da je X omeđen pa je (X, d) omeđen metrički prostor.*

Pretpostavimo da je potpuno omeđen. Uzmimo $\epsilon = \frac{1}{2}$. Tada postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \dots, x_n \in X$ takvi da je

$$X = K(x_1, \epsilon) \cup \cdots \cup K(x_n, \epsilon).$$

No, za svaki $i = 1, \dots, n$ vrijedi

$$K(x_i, \epsilon) = \{x_i\}.$$

Stoga je

$$X = \{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_n\},$$

odnosno

$$X = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je X beskonačan skup.

2.4 Podnizovi

Za funkciju $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ kažemo da je strogo rastuća ako je $a_n < a_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Lako se indukcijom pokaže sljedeće: Ako je $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija, onda je $n \leq a_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Definicija 2.4.1. *Neka je (x_n) niz u skupu X te neka je $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija. Za niz $(x_{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ kažemo da je podniz niza (x_n).*

Primjer 2.4.2. *Neka su (x_n) i (y_n) nizovi u $\mathbb{R}$ definirani sa $x_n = (-1)^n$ i $y_n = 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je (y_n) podniz od (x_n). Naime, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $y_n = x_{a_n}$ gdje je $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $a_n = 2n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Propozicija 2.4.3. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, (x_n) niz u X te $a \in X$. Pretpostavimo da postoji podniz niza (x_n) koji teži prema a u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$. Tada je a gomilište od (x_n).*

Dokaz. Neka je U otvorena okolina točke a u $(X, \mathcal{T})$ te neka je $N \in \mathbb{N}$. Znamo da postoji strogo rastuća funkcija $b : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ takva da niz $(x_{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema a. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ je $x_{b_n} \in U$. Neka je $n = \max\{n_0, N\}$. Tada je $n \geq n_0$ pa je $x_{b_n} \in U$. S druge strane imamo

$$N \leq n \leq b_n.$$

Dakle, $N \leq b_n$. Prema tome, za broj $k = b_n$ vrijedi

$$k \geq N \;\text{ i }\; x_k \in U.$$

Zaključak: a je gomilište niza (x_n). □

Propozicija 2.4.4. *Ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te ako je (x_n) niz koji konvergira prema a u $(X, \mathcal{T})$, onda i svaki podniz od (x_n) konvergira prema a u $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Neka je U otvorena okolina točke a. Neka je $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija. Trebamo naći $n_0' \in \mathbb{N}$ takav da je $x_{b_n} \in U$ za svaki $n \geq n_0'$. Znamo da vrijedi

$$n \leq b_n$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$ (jer je b strogo rastuća funkcija). Budući da $x_n \longrightarrow a$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in U$ za svaki $n \geq n_0$. Uzmimo da je

$$n_0' = n_0.$$

Za svaki $n \geq n_0$ imamo

$$n_0 \leq n \leq b_n.$$

Znamo da je $x_n \in U$ za svaki $n \geq n_0$ pa je $x_{b_n} \in U$ za svaki $n \geq n_0$. Dakle, $x_{b_n} \longrightarrow a$. □

Lema 2.4.5. *Neka je (X, d) metrički prostor, $a \in X$ te (x_n) niz u X takav da je $x_n \in K(a, \frac{2}{n})$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada niz (x_n) konvergira prema a.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Odaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\frac{2}{n_0} \leq \epsilon.$$

Tada za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$\frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} \leq \epsilon$$

pa je stoga

$$K(a, \frac{2}{n}) \subseteq K(a, \epsilon).$$

Slijedi da je $x_n \in K(a, \epsilon)$ za svaki $n \geq n_0$. Zaključak: niz (x_n) konvergira prema a u metričkom prostoru (X, d). □

Primjer 2.4.6. *Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ definiran sa $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ u $\mathbb{R}$.*

Očito je

$$\frac{1}{n} \in \langle -\frac{2}{n}, \frac{2}{n} \rangle = K(0, \frac{2}{n}).$$

Iz leme 2.4.5 slijedi da $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$.

Prethodna lema trebat će nam za dokaz sljedeće propozicije.

Propozicija 2.4.7. *Neka je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X te neka je a gomilište od (x_n) u (X, d). Tada postoji podniz niza (x_n) koji konvergira prema a u metričkom prostoru (X, d).*

Dokaz. Definirajmo niz prirodnih brojeva induktivno na sljedeći način: neka je $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_{n_1} \in K(a, 1)$ (takav broj sigurno postoji jer je a gomilište niza (x_n)). Pretpostavimo da je $k \in \mathbb{N}$ te da smo definirali $n_k \in \mathbb{N}$. Budući da je a gomilište niza (x_n) postoji broj

$$m \geq n_k + 1$$

takav da je

$$x_m \in K(a, \frac{1}{k+1}).$$

Definirajmo $n_{k+1} = m$. Dakle,

$$n_{k+1} \geq n_k + 1 > n_k$$

i

$$x_{n_{k+1}} \in K(a, \frac{1}{k+1}).$$

Na ovaj način smo definirali strogo rastući niz $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ za koji vrijedi

$$x_{n_k} \in K(a, \frac{1}{k})$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Prema tome, (x_{n_k}) je podniz od (x_n). Iz leme 2.4.5 slijedi da niz (x_{n_k}) teži prema a. $\square$

Poglavlje 3

Kompaktnost u raznim oblicima

3.1 Sekvencijalna kompaktnost

Definicija 3.1.1. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor. Za* $(X, \mathcal{T})$ *kažemo da je sekvencijalno kompaktan topološki prostor ako svaki niz u* X *ima podniz koji je konvergentan u* $(X, \mathcal{T})$*.*

Naravno, za metrički prostor kažemo da je sekvencijalno kompaktan ako mu je pripadni topološki prostor sekvencijalno kompaktan.

Propozicija 3.1.2. *Neka je* (X, d) *metrički prostor. Tada je* (X, d) *sekvencijalno kompaktan ako i samo ako svaki niz u* X *ima gomilište u* (X, d)*.*

Dokaz. Pretpostavimo da je (X, d) sekvencijalno kompaktan. Neka je (x_n) niz u X. Tada (x_n) ima konvergentan podniz, tj. postoje $a \in X$ i podniz od (x_n) koji konvergira prema a. Iz propozicije 2.4.3 slijedi da je a gomilište niza (x_n).

Obratno, pretpostavimo da svaki niz u X ima gomilište. Neka je (x_n) niz u X. Tada postoji $a \in X$ takav da je a gomilište od (x_n). Prema propoziciji 2.4.7 postoji podniz od niza (x_n) koji konvergira prema a, dakle (x_n) ima konvergentan podniz. Zaključak: (X, d) je sekvencijalno kompaktan. □

Propozicija 3.1.3. *Svaki kompaktan metrički prostor je sekvencijalno kompaktan.*

Dokaz. Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor. Iz teorema 2.2.3 slijedi da svaki niz u X ima gomilište. Sada prethodna propozicija povlači da je (X, d) sekvencijalno kompaktan. □

Propozicija 3.1.4. *Neka je* (X, d) *sekvencijalno kompaktan metrički prostor. Tada je* (X, d) *potpuno omeđen.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. (X, d) nije potpuno omeđen. Tada postoji $\epsilon > 0$ za kojeg ne možemo naći $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \ldots, x_n \in X$ takve da je

$$X = K(x_1, \epsilon) \cup \cdots \cup K(x_n, \epsilon).$$

Odaberimo $a \in X$. Definiramo niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ induktivno na sljedeći način: Stavimo $x_1 = a$. Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ te da smo definirali $x_1, \ldots, x_n$. Znamo da je

$$X \neq K(x_1, \epsilon) \cup \cdots \cup K(x_n, \epsilon)$$

pa postoji točka iz X koja nije element od $K(x_1, \epsilon) \cup \cdots \cup K(x_n, \epsilon)$. Odaberimo jednu takvu točku i označimo ju s x_{n+1}. Na ovaj način imamo definiran niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Po konstrukciji niza jasno je da

$$x_{n+1} \notin K(x_1, \epsilon) \cup \cdots \cup K(x_n, \epsilon), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Slijedi da je

$$d(x_i, x_{n+1}) \geq \epsilon$$

za svaki $i = 1, \ldots, n$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ovo povlači da je

$$d(x_i, x_j) \geq \epsilon$$

za sve $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $i \neq j$. Budući da je (X, d) sekvencijalno kompaktan propozicija 3.1.2 povlači da postoji $b \in X$ takav da je b gomilište niza (x_n). Iz činjenice da je b gomilište slijedi da postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$x_i \in K(b, \frac{\epsilon}{2}).$$

Nadalje, iz istog razloga postoji $j \geq i + 1$ takav da je

$$x_j \in K(b, \frac{\epsilon}{2}).$$

Tada je

$$d(x_i, b) < \frac{\epsilon}{2} \ \text{ i } \ d(x_j, b) < \frac{\epsilon}{2}$$

pa iz $i \neq j$ slijedi

$$\epsilon \leq d(x_i, x_j) \leq d(x_i, b) + d(x_j, b) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dakle $\epsilon < \epsilon$ što je kontradikcija. Zaključak: (X, d) je potpuno omeđen metrički prostor. □

Lebesgueov broj

Definicija 3.1.5. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od (X, d). Neka je $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Kažemo da je λ Lebesgueov broj pokrivača $\mathcal{U}$ od (X, d) ako je za svaki $x \in X$ kugla $K(x, \lambda)$ sadržana u nekom članu od $\mathcal{U}$ (tj. postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $K(x, \lambda) \subseteq U$).*

Primjer 3.1.6. *Neka je d euklidska metrika na $[0, 1]$ te neka je $\mathcal{U} = \{[0, \frac{1}{2}\rangle, \langle\frac{1}{3}, 1]\}$. Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $([0, 1], d)$. Neka je $\lambda = \frac{1}{12}$. Tvrdimo da je λ Lebesgueov broj od $\mathcal{U}$. Neka je $x \in [0, 1]$. Razlikujemo dva slučaja:*

1) $x < \frac{5}{12}$

Tvrdimo da je

$$K(x, \frac{1}{12}) \subseteq [0, \frac{1}{2}\rangle.$$

Neka je $y \in K(x, \frac{1}{12})$. Tada je

$$d(x, y) < \frac{1}{12}$$

pa je

$$y = d(0, y) \leq d(0, x) + d(x, y) < \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}.$$

Dakle, $y < \frac{1}{2}$ pa je $y \in [0, \frac{1}{2}\rangle$.

2) $x \geq \frac{5}{12}$

Tvrdimo da je

$$K(x, \frac{1}{12}) \subseteq \langle\frac{1}{3}, 1].$$

Neka je $y \in K(x, \frac{1}{12})$. Tada je

$$d(x, y) < \frac{1}{12}.$$

Pretpostavimo da $y \notin \langle\frac{1}{3}, 1]$. Tada je $y \leq \frac{1}{3}$. Imamo

$$\frac{5}{12} \leq x = d(0, x) \leq d(0, y) + d(y, x) < \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

što je kontradikcija. Dakle, $y \in \langle\frac{1}{3}, 1]$.

Primjer 3.1.7. *Neka je d euklidska metrika na $[0, 1\rangle$. Neka je $\mathcal{U} = \{[0, a\rangle \mid a \in \langle 0, 1\rangle\}$. Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $([0, 1\rangle, d)$. Ovaj pokrivač nema Lebesgueov broj.*

Pretpostavimo da $\mathcal{U}$ ima Lebesgueov broj, označimo ga s λ. Znamo da je $\lambda > 0$. Razlikujemo dva slučaja:

1) $\lambda > 1$

Tada je

$$K(0, \lambda) = [0, 1\rangle.$$

Naime, iz $a < 1$ *slijedi da postoji* $y \in \mathbb{R}$ *takav da je*

$$a < y < 1,$$

a iz ovoga slijedi da je

$$y \in [0, 1\rangle \;\; i \;\; y \notin [0, a\rangle.$$

Očito,

$$K(0, \lambda) \nsubseteq [0, a\rangle$$

za svaki $a \in \langle 0, 1\rangle$*. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je* λ *Lebesgueov broj.*

2) $\lambda \leq 1$

Neka je $x = 1 - \lambda$*. Tada je*

$$0 \leq x < 1$$

pa je $x \in [0, 1\rangle$*. Budući da je* λ *Lebesgueov broj od* $\mathcal{U}$ *postoji* $a \in \langle 0, 1\rangle$ *takav da je*

$$K(x, \lambda) \subseteq [0, a\rangle.$$

Iz $a \in \langle 0, 1\rangle$ *slijedi da postoji* $y \in \mathbb{R}$ *takav da je*

$$a < y < 1. \tag{3.1}$$

Očito je $x \in K(x, \lambda)$ *pa je* $x \in [0, a\rangle$*. Stoga je* $x < a$*. Imamo*

$$0 \leq x < a < y < 1$$

iz čega slijedi

$$0 < y - x < 1 - x = \lambda.$$

Stoga je

$$|y - x| < \lambda.$$

Zaključujemo da je $y \in K(x, \lambda)$ *što znači da je* $y \in [0, a\rangle$*, tj.* $y < a$*. To je u kontradikciji s (3.1).*

Dakle, $\mathcal{U}$ *nema Lebesgueov broj.*

Teorem 3.1.8. *Neka je* (X, d) *sekvencionalno kompaktan metrički prostor. Tada svaki otvoreni pokrivač od* (X, d) *ima Lebesgueov broj.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od (X, d). Pretpostavimo da $\mathcal{U}$ nema Lebesgueov broj. Tada niti jedan $\lambda > 0$ nije Lebesgueov broj od $\mathcal{U}$ pa stoga za svaki $\lambda > 0$ postoji $x \in X$ takav da je
$$K(x, \lambda) \nsubseteq V$$
za svaki $V \in \mathcal{U}$. Posebno, za $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in X$ takav da je
$$K(x_n, \frac{1}{n}) \nsubseteq V \text{ za svaki } V \in \mathcal{U}. \tag{3.2}$$
Budući da je (X, d) sekvencijalno kompaktan metrički prostor niz (x_n) ima gomilište, označimo ga s a. Budući da je $a \in X$, postoji $V \in \mathcal{U}$ takav da je $a \in V$. Skup V je otvoren u (X, d) pa postoji $r > 0$ takav da je
$$K(a, r) \subseteq V.$$
Neka je $m \in \mathbb{N}$ takav da je
$$m > \frac{2}{r}.$$
Budući da je a gomilište niza (x_n) postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je
$$x_n \in K(a, \frac{r}{2}) \text{ i } n \geq m.$$
Slijedi da je
$$\frac{2}{r} < n$$
pa je
$$\frac{1}{n} < \frac{r}{2}.$$
Tvrdimo da je
$$K(x_n, \frac{1}{n}) \subseteq K(a, r). \tag{3.3}$$
Uzmimo $y \in K(x_n, \frac{1}{n})$. To znači da je
$$d(y, x_n) < \frac{1}{n}.$$
Vrijedi sljedeće
$$d(y, a) \leq d(y, x_n) + d(x_n, a) < \frac{1}{n} + \frac{r}{2} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$
Dakle,
$$d(y, a) < r$$

što znači da je $y \in K(a, r)$. Time smo pokazali da vrijedi (3.3). Iz (3.3) slijedi da je

$$K(x_n, \frac{1}{n}) \subseteq V$$

što je u kontradikciji s (3.2). Zaključak: $\mathcal{U}$ ima Lebesgueov broj. $\square$

Teorem 3.1.9. *Neka je (X, d) sekvencijalno kompaktan metrički prostor. Tada je (X, d) kompaktan.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od (X, d). Iz prethodnog teorema slijedi da postoji $\lambda > 0$ takav da je λ Lebesgueov broj od $\mathcal{U}$. S druge strane, kako je (X, d) sekvencijalno kompaktan onda je i potpuno omeđen (prema propoziciji 3.1.4). Postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \dots, x_n \in X$ takvi da je

$$X = K(x_1, \lambda) \cup \cdots \cup K(x_n, \lambda). \tag{3.4}$$

Za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ postoji $V_i \in \mathcal{U}$ takav da je

$$K(x_i, \lambda) \subseteq V_i$$

(jer je λ Lebesgueov broj). Stoga je

$$\bigcup_{i=1}^{n} K(x_i, \lambda) \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_n.$$

Iz (3.4) slijedi da je

$$X \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_n.$$

Očito je

$$V_1 \cup \cdots \cup V_n \subseteq X$$

pa je

$$X = V_1 \cup \cdots \cup V_n.$$

Zaključak: (X, d) je kompaktan metrički prostor. $\square$

Ovaj teorem i propozicija 3.1.3 zajedno daju sljedeće:

Korolar 3.1.10. *Metrički prostor je sekvencijalno kompaktan ako i samo ako je kompaktan.*
$\square$

3.2 Kompaktnost potprostora

Propozicija 3.2.1. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor. Neka je* $K \subseteq X$, $K \neq \emptyset$. *Neka je* $\mathcal{S}$ *relativna topologija na* K *(s obzirom na* $\mathcal{T}$*). Tada je* K *kompaktan skup u* $(X, \mathcal{T})$ *ako i samo ako je* $(K, \mathcal{S})$ *kompaktan topološki prostor.*

Dokaz. Neka je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. Dokažimo da je $(K, \mathcal{S})$ kompaktan topološki prostor. Neka je $\mathcal{V}$ otvoreni pokrivač topološkog prostora $(K, \mathcal{S})$. Za svaki $V \in \mathcal{V}$ vrijedi da je $V \in \mathcal{S}$ pa postoji $U_V \in \mathcal{T}$ takav da je

$$V = K \cap U_V.$$

Neka je

$$\mathcal{U} = \{U_V \mid V \in \mathcal{V}\}.$$

Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od K u $(X, \mathcal{T})$ (očito je $V \subseteq U_V$). Budući da je K kompaktan u $(X, \mathcal{T})$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $V_1, \dots, V_n$ takvi da je

$$K \subseteq U_{V_1} \cup \cdots \cup U_{V_n}.$$

Stoga je

$$K = K \cap (U_{V_1} \cup \cdots \cup U_{V_n}) = (K \cap U_{V_1}) \cup \cdots \cup (K \cap U_{V_n}) = V_1 \cup \cdots \cup V_n.$$

Zaključak: $(K, \mathcal{S})$ je kompaktan topološki prostor.

Obratno, pretpostavimo da je $(K, \mathcal{S})$ kompaktan topološki prostor. Želimo dokazati da je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. Neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od K u $(X, \mathcal{T})$. Neka je

$$\mathcal{V} = \{K \cap U \mid U \in \mathcal{U}\}.$$

Očito je $\mathcal{V}$ otvoreni pokrivač od $(K, \mathcal{S})$. Budući da je $(K, \mathcal{S})$ kompaktan topološki prostor postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je

$$K = (K \cap U_1) \cup \cdots \cup (K \cap U_n).$$

Imamo da je

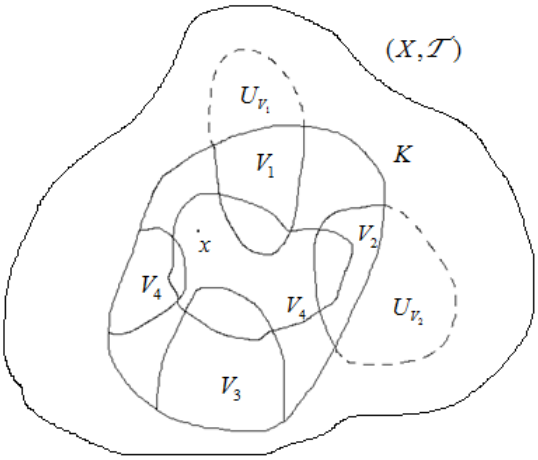
$$K = K \cap (U_1 \cup \cdots \cup U_n)$$

pa je

$$K \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n.$$

Zaključak: K je kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. □

Za $K \subseteq X$ kažemo da je kompaktan skup u metričkom prostoru (X, d) ako je K kompaktan u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.

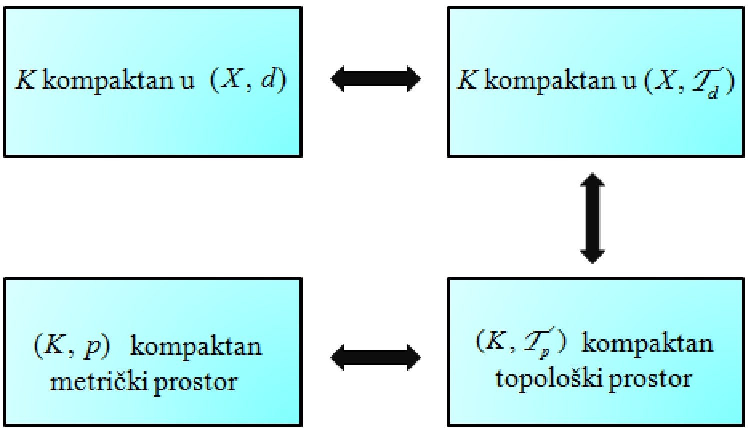


Slika 3.1: K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T}) \Leftrightarrow (K, \mathcal{S})$ kompaktan topološki prostor

Korolar 3.2.2. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $K \subseteq X$, $K \neq \emptyset$. Neka je $p = d\,|_{K\times K}$. Tada je K kompaktan skup u (X, d) ako i samo ako je (K, p) kompaktan metrički prostor.*

Dokaz. Prema propoziciji 1.5.3 $\mathcal{T}_p$ je relativna topologija na K u odnosu na $\mathcal{T}_d$. Stoga je prema prethodnoj propoziciji K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T}_d)$ ako i samo ako je $(K, \mathcal{T}_p)$ kompaktan topološki prostor. Iz ovoga slijedi tvrdnja korolara. □

Prethodni korolar možemo prikazati shematski kao na slici 3.2.



Slika 3.2: K kompaktan skup u $(X, d) \Leftrightarrow (K, p)$ kompaktan metrički prostor

Korolar 3.2.3. *Neka je (X, d) metrički prostor te $K \subseteq X$. Tada je K kompaktan skup u (X, d) ako i samo ako svaki niz u K ima podniz koji konvergira nekoj točki iz K.*

Dokaz. Pretpostavimo da je K kompaktan skup u metričkom prostoru (X, d). Neka je (x_n) niz u K. Iz korolara 3.2.2 slijedi da je (K, p) kompaktan metrički prostor gdje je $p = d \mid_{K \times K}$. Prema propoziciji 3.1.3 niz (x_n) ima konvergentan podniz u metričkom prostoru (K, p). Dakle, postoje podniz (y_n) od (x_n) i $a \in K$ takvi da

$$y_n \longrightarrow a$$

u metričkom prostoru (K, p). No, tada vrijedi da

$$y_n \longrightarrow a$$

u metričkom prostoru (X, d).

Obratno, pretpostavimo da svaki niz u K ima podniz koji konvergira nekoj točki iz K. Želimo dokazati da je K kompaktan skup u metričkom prostoru (X, d). Ako je $K = \emptyset$ tvrdnja je jasna. Pretpostavimo $K \neq \emptyset$. Neka je $p = d \mid_{K \times K}$. Neka je (x_n) niz u K. Prema pretpostavci postoje podniz (y_n) od (x_n) i $a \in K$ takvi da

$$y_n \longrightarrow a$$

u metričkom prostoru (K, p). Ovime smo pokazali da je (K, p) sekvencijalno kompaktan metrički prostor. Iz teorema 3.1.9 slijedi da je (K, p) kompaktan metrički prostor. Prema korolaru 3.2.2 skup K je kompaktan u metričkom prostoru (X, d). □

Propozicija 3.2.4. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je K kompaktan skup u (X, d). Tada je K zatvoren i omeđen.*

Dokaz. Budući da je K kompaktan u (X, d) vrijedi da je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T}_d)$. Očito je $(X, \mathcal{T}_d)$ metrizabilan topološki prostor pa je i Hausdorffov. Iz teorema 1.3.21 slijedi da je K zatvoren skup u $(X, \mathcal{T}_d)$. Dakle, K je zatvoren skup u metričkom prostoru (X, d).

Dokažimo sada da je K omeđen u (X, d). Ako je $K = \emptyset$, onda je očito omeđen. Pretpostavimo da K neprazan skup, tj. $K \neq \emptyset$. Neka je $p = d \mid_{K \times K}$. Prema korolaru 3.2.2 metrički prostor (K, p) je kompaktan. Iz propozicije 3.1.4 slijedi da je (K, p) potpuno omeđen metrički prostor. Stoga je i omeđen, pa postoje $x \in X$ i $r > 0$ takvi da je

$$K \subseteq K(x, r; p). \tag{3.5}$$

Budući da je p restrikcija od d slijedi da je

$$K(x, r; p) \subseteq K(x, r; d). \tag{3.6}$$

Iz (3.5) i (3.6) slijedi da je

$$K \subseteq K(x, r; d).$$

Dakle, K je omeđen skup u metričkom prostoru (X, d). □

Primjer 3.2.5. *Neka je X neprazan skup te neka je d diskretna metrika na X. Tada je X omeđen.*

Naime, za svaki $x \in X$ vrijedi

$$K(x, 2) = X.$$

Nadalje, očito je X zatvoren u (X, d). Dakle, X je zatvoren i omeđen u (X, d). No, X ne mora biti kompaktan u (X, d). Naime, ako je X beskonačan skup, onda je $\{\{x\} \mid x \in X\}$ otvoreni pokrivač od X u (X, d), a očito ne postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \dots, x_n \in X$ takvi da je

$$X = \{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_n\}.$$

Alternativno, možemo ovako rezonirati: ako je X beskonačan, onda metrički prostor (X, d) nije kompaktan jer bi u suprotnom bio potpuno omeđen što je nemoguće prema propoziciji 3.2.4.

Propozicija 3.2.6. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $(Y, \mathcal{S})$ potprostor od $(X, \mathcal{T})$. Neka je $G \subseteq Y$. Tada je G zatvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$ ako i samo ako postoji F zatvoren u $(X, \mathcal{T})$ takav da je $G = Y \cap F$.*

Dokaz. Pretpostavimo da su $V \subseteq Y$ i $U \subseteq X$ takvi da je

$$V = Y \cap U. \tag{3.7}$$

Tvrdimo da je

$$Y \backslash V = Y \cap (X \backslash U). \tag{3.8}$$

Neka je $x \in Y \backslash V$. Očito je $x \in Y$ pa je $x \in X$. Pretpostavimo da je $x \in U$. Tada iz (3.7) slijedi da je $x \in V$ što je nemoguće jer je $x \in Y \backslash V$. Dakle, $x \notin U$ pa slijedi da je

$$x \in Y \cap (X \backslash U).$$

Obratno, neka je

$$x \in Y \cap (X \backslash U).$$

Pretpostavimo da je $x \in V$. Tada iz (3.7) slijedi da je $x \in U$ što je u kontradikciji sa $x \in X \backslash U$. Dakle, $x \notin V$, tj. $x \in Y \backslash V$. Time je (3.8) dokazano.

Neka je G zatvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$. Neka je

$$V = Y \backslash G.$$

Tada je V otvoren u $(Y, \mathcal{S})$ pa postoji $U \in \mathcal{T}$ takav da je

$$V = Y \cap U.$$

Prema (3.8) tada vrijedi
$$G = Y \cap (X \backslash U).$$
Definirajmo
$$F = X \backslash U.$$
Tada je F zatvoren u $(X, \mathcal{T})$ i
$$G = Y \cap F.$$
Obratno, pretpostavimo da je F zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$ takav da je
$$G = Y \cap F.$$
Prema (3.8) (za $V = G$ i $U = F$) vrijedi
$$Y \backslash G = Y \cap (X \backslash F).$$
Budući da je $X \backslash F$ otvoren u $(X, \mathcal{T})$ imamo da je $Y \backslash G$ otvoren u $(Y, \mathcal{S})$ pa je G zatvoren u $(Y, \mathcal{S})$. □

Propozicija 3.2.7. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $(Y, \mathcal{S})$ potprostor od $(X, \mathcal{T})$. Neka je Z neprazan podskup od Y. Neka je $\mathcal{U}$ relativna topologija na Z s obzirom na $\mathcal{T}$ te neka je $\mathcal{V}$ relativna topologija na Z s obzirom na $\mathcal{S}$. Tada je $\mathcal{U} = \mathcal{V}$.*

Dokaz. Imamo (prema definiciji relativne topologije) da je
$$\mathcal{U} = \{U \cap Z \mid U \in \mathcal{T}\}$$
i
$$\mathcal{V} = \{V \cap Z \mid V \in \mathcal{S}\}.$$
Neka je $U \in \mathcal{T}$. Tada je $U \cap Y \in \mathcal{S}$. Označimo
$$V = U \cap Y.$$
Imamo
$$U \cap Z = U \cap (Y \cap Z) = (U \cap Y) \cap Z = V \cap Z.$$
Dakle,
$$U \cap Z \in \mathcal{V}.$$
Prema tome, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Neka je $V \in \mathcal{S}$. Tada postoji $U \in \mathcal{T}$ takav da je
$$V = U \cap Y.$$
Stoga je
$$V \cap Z = (U \cap Y) \cap Z = U \cap (Y \cap Z) = U \cap Z.$$

Slijedi da je

$$V \cap Z \in \mathcal{U}.$$

Time smo pokazali da je $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$.
Zaključak: $\mathcal{U} = \mathcal{V}$. □

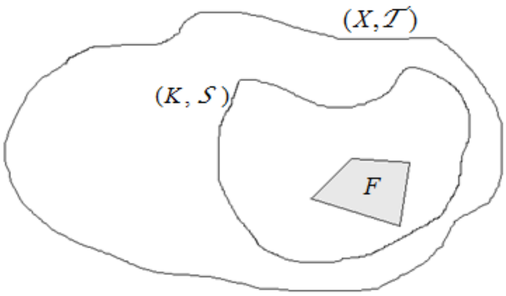
Korolar 3.2.8. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $(Y, \mathcal{S})$ potprostor od $(X, \mathcal{T})$. Neka je $K \subseteq Y$. Tada je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$ ako i samo ako je K kompaktan u $(Y, \mathcal{S})$.*

Dokaz. Ako je $K = \emptyset$, tvrdnja je jasna. Uzmimo da je K neprazan. Neka je $\mathcal{T}_K$ relativna topologija na K s obzirom na $\mathcal{T}$, te $\mathcal{S}_K$ relativna topologija na K s obzirom na $\mathcal{S}$. Prema propoziciji 3.2.1 K je kompaktan u $(X, \mathcal{T})$ ako i samo ako je $(K, \mathcal{T}_K)$ kompaktan topološki prostor te je prema istoj propoziciji K kompaktan u $(Y, \mathcal{S})$ ako i samo ako je $(K, \mathcal{S}_K)$ kompaktan topološki prostor. No, iz prethodne propozicije slijedi da je

$$\mathcal{T}_K = \mathcal{S}_K$$

pa slijedi tvrdnja korolara. □

Propozicija 3.2.9. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Neka je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$ te F zatvoren u $(X, \mathcal{T})$ takav da je $F \subseteq K$. Tada je F kompaktan u $(X, \mathcal{T})$.*



Slika 3.3: Prikaz propozicije 3.2.9.

Dokaz. Ako je $F = \emptyset$ tvrdnja je jasna. Uzmimo da je F neprazan. Tada je i K neprazan (jer je $F \subseteq K$). Neka je $\mathcal{S}$ relativna topologija na K s obzirom na $\mathcal{T}$. Iz propozicije 3.2.6 slijedi da je $F \cap K$ zatvoren skup u $(K, \mathcal{S})$. No,

$$F \cap K = F$$

pa je F zatvoren skup u $(K, \mathcal{S})$. Znamo da je $(K, \mathcal{S})$ kompaktan topološki prostor (propozicija 3.2.1). Prema propoziciji 1.3.14 F je kompaktan skup u $(K, \mathcal{S})$. Prema prethodnom korolaru vrijedi da je F kompaktan u $(X, \mathcal{T})$. □

3.3 Omeđenost u $\mathbb{R}$

Minimum i maksimum skupa

Definicija 3.3.1. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $x \in \mathbb{R}$. Za x kažemo da je gornja međa skupa A ako je $a \leq x$ za svaki $a \in A$. Za skup A kažemo da je odozgo omeđen ako ima barem jednu gornju među.*

Definicija 3.3.2. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ te $x \in \mathbb{R}$. Za x kažemo da je supremum skupa A ako je x najmanja gornja međa skupa A, tj.*

1) x je gornja međa od A;

2) ako je y bilo koja gornja međa od A onda je $x \leq y$.

Uočimo: Ako su x_1 i x_2 supremumi od A onda je $x_1 = x_2$. Naime, vrijedi

$$x_1 \leq x_2$$

jer je x_1 supremum, a x_2 gornja međa. Analogno,

$$x_2 \leq x_1$$

jer je x_2 supremum, a x_1 gornja međa. Slijedi da je $x_1 = x_2$.

Supremum skupa A označavamo sa $\sup A$.

Definicija 3.3.3. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ i $a_0 \in A$. Za a_0 kažemo da je maksimum skupa A ako je $a \leq a_0$ za svaki $a \in A$, tj. ako je a_0 gornja međa od A.*

Uočimo: Ako je a_0 maksimum od A, onda je a_0 i supremum od A. Naime, po definiciji maksimuma a_0 je gornja međa. Nadalje, iz $a_0 \in A$ slijedi da je

$$a_0 \leq y$$

za svaku gornju među y.

Primjer 3.3.4. *Broj* 0 *je supremum skupa* $\langle -\infty, 0\rangle$.

Zaista, 0 *je očito gornja međa ovog skupa. S druge strane, neka je* y *bilo koja gornja međa skupa* $\langle -\infty, 0\rangle$ *i pretpostavimo da je* $y < 0$. *Tada postoji realan broj* a *takav da je*

$$y < a < 0.$$

Iz ovoga slijedi da je a *element skupa* $\langle -\infty, 0\rangle$ *veći od gornje međe* y *što je nemoguće. Stoga je* 0 *najmanja gornja međa od* $\langle -\infty, 0\rangle$. *Nadalje, ovaj skup nema maksimum (maksimum ovog skupa bi bio i njegov supremum pa bi bio jednak* 0, *a* 0 *nije element skupa* $\langle -\infty, 0\rangle$*).*

Uočimo sljedeće: Ako skup A ima supremum, onda je on i odozgo omeđen. Nadalje, skup A također mora biti neprazan jer $\emptyset$ nema supremum (svaki realan broj je gornja međa od $\emptyset$ pa nema najmanje gornje međe).

AKSIOM POTPUNOSTI: Neka su A i B neprazni podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da je $a \le b$ za sve $a \in A$ i $b \in B$. Tada postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je $a \le c \le b$ za sve $a \in A$ i $b \in B$.

Propozicija 3.3.5. *Svaki neprazan odozgo omeđen podskup od* $\mathbb{R}$ *ima supremum.*

Dokaz. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ odozgo omeđen skup. Neka je B skup svih gornjih međa od A. Imamo $A \neq \emptyset$ i $B \neq \emptyset$ i $a \le b$ za sve $a \in A$ i $b \in B$. Prema aksiomu potpunosti postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je

$$a \le c \le b \tag{3.9}$$

za sve $a \in A$ i $b \in B$. Iz (3.9) slijedi da je c gornja međa od A te da je manji ili jednak od svake gornje međe od A. Dakle, c je supremum od A. □

Definicija 3.3.6. *Neka je* $A \subseteq \mathbb{R}$ *te* $x \in \mathbb{R}$. *Za* x *kažemo da je donja međa skupa* A *ako je* $x \le a$ *za svaki* $a \in A$.

Definicija 3.3.7. *Neka je* $A \subseteq \mathbb{R}$. *Za skup* A *kažemo da je odozdo omeđen ako ima barem jednu donju među.*

Definicija 3.3.8. *Neka je* $A \subseteq \mathbb{R}$ *te* $x \in \mathbb{R}$. *Za* x *kažemo da je infimum skupa* A *ako je* x *najveća donja međa skupa* A, *tj. ako vrijedi sljedeće:*

1) *x je donja međa od A;*

2) *ako je y bilo koja donja međa od A onda je $x \ge y$.*

Uočimo: Ako su x_1 i x_2 infimumi od A, onda je $x_1 = x_2$.

Infimum skupa A označavamo sa $\inf A$.

Definicija 3.3.9. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ i $a_0 \in A$. Za a_0 kažemo da je minimum od A ako je $a_0 \leq a$ za svaki $a \in A$.*

Uočimo: Ako je a_0 minimum od A, onda je a_0 infimum od A.

Propozicija 3.3.10. *Svaki neprazan odozdo omeđen podskup od $\mathbb{R}$ ima infimum.*

Dokaz. Neka je A neprazan odozdo omeđen podskup od $\mathbb{R}$. Neka je B skup svih donjih međa od A. Imamo $A \neq \emptyset$ i $B \neq \emptyset$ i $b \leq a$ za sve $a \in A$, $b \in B$. Prema aksiomu potpunosti postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je

$$b \leq c \leq a$$

za sve $a \in A$, $b \in B$. Odavde slijedi da je c infimum od A. □

Propozicija 3.3.11. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ te $x \in \mathbb{R}$. Tada je x supremum od A ako i samo ako je x gornja međa od A i za svaki $\epsilon > 0$ postoji $a \in A$ takav da je $x - \epsilon < a$.*

Dokaz. Neka je x supremum od A. Očito je x gornja međa od A. Uzmimo $\epsilon > 0$. Želimo dokazati da postoji $a \in A$ takav da vrijedi

$$x - \epsilon < a.$$

Pretpostavimo suprotno, tada za svaki $a \in A$ vrijedi da je

$$x - \epsilon \geq a.$$

Ovo znači da je $x - \epsilon$ gornja međa od A. Očito je

$$x - \epsilon < x$$

i to je u kontradikciji s činjenicom da je x supremum od A, tj. najmanja gornja međa od A. Zaključak: Postoji $a \in A$ takav da je $x - \epsilon < a$.

Obratno, pretpostavimo da je x gornja međa od A i da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $a \in A$ takav da je

$$x - \epsilon < a.$$

Želimo dokazati da je x supremum od A. Pretpostavimo da je y gornja međa od A takva da je $y < x$. Neka je

$$\epsilon = x - y.$$

Tada je $\epsilon > 0$ i

$$y = x - \epsilon. \tag{3.10}$$

Prema pretpostavci postoji $a \in A$ takav da je

$$x - \epsilon < a. \tag{3.11}$$

Iz (3.10) i (3.11) slijedi da je

$$y < a$$

što je u kontradikciji s činjenicom da je y gornja međa od A. Zaključak: x je najmanja gornja međa od A, tj. x je supremum od A. □

Propozicija 3.3.12. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ te $x \in \mathbb{R}$. Tada je x infimum od A ako i samo ako je x donja međa od A i za svaki $\epsilon > 0$ postoji $a \in A$ takav da je $x + \epsilon > a$.*

Dokaz. Analogno kao prethodna propozicija. □

Definicija 3.3.13. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$. Za A kažemo da je omeđen skup ako je A omeđen odozdo i odozgo.*

Napomena 3.3.14. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$ te neka je $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Pretpostavimo da je A omeđen u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$. Tada postoje $x_0 \in \mathbb{R}$ i $r > 0$ takvi da je*

$$A \subseteq K(x_0, r),$$

odnosno

$$A \subseteq \langle x_0 - r, x_0 + r \rangle.$$

Iz ovoga je jasno da je A omeđen odozgo i odozdo, tj. da je A omeđen u $\mathbb{R}$.

Obratno, neka je A omeđen u $\mathbb{R}$. Tada postoje brojevi x i y takvi da je x gornja međa od A i y donja međa od A. Slijedi da je

$$A \subseteq [y, x]$$

pa je

$$A \subseteq \langle y - 1, x + 1 \rangle.$$

Prema primjeru 1.1.5 ovo znači da je A podskup neke otvorene kugle u $(\mathbb{R}, d)$, dakle A je omeđen u $(\mathbb{R}, d)$.
Zaključak: Podskup od $\mathbb{R}$ je omeđen u $(\mathbb{R}, d)$ ako i samo ako je omeđen u $\mathbb{R}$.

Lema 3.3.15. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Tada je S omeđen ako i samo ako postoji $M > 0$ takav da je $|x| \leq M$ za svaki $x \in S$.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji $M > 0$ takav da je

$$|x| \leq M$$

za svaki $x \in S$. Tada je

$$-M \leq x \leq M$$

za svaki $x \in S$. Dakle, S je omeđen odozdo i odozgo pa je S omeđen skup u $\mathbb{R}$.

Obratno, pretpostavimo da je S omeđen. Tada je S omeđen u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$ gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$ pa postoji $r > 0$ takav da je

$$S \subseteq K(0, r; d).$$

Stoga je

$$d(x, 0) < r$$

za svaki $x \in S$, tj.

$$|x| < r$$

za svaki $x \in S$. □

Nizovi u $\mathbb{R}$

Definicija 3.3.16. *Za niz realnih brojeva (x_n) kažemo da je omeđen ako je $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ omeđen skup.*

Za niz realnih brojeva (x_n) kažemo da je rastući ako je $x_n \leq x_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Uočimo sljedeće: Ako je (x_n) rastući niz, onda je $x_n \leq x_m$ za sve $n, m \in \mathbb{N}$, $n \leq m$ (to lako slijedi indukcijom, za fiksirani n, po $m \geq n$).

Propozicija 3.3.17. *Neka je (x_n) omeđen i rastući niz realnih brojeva. Tada je (x_n) konvergentan niz i teži prema* $\sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Dokaz. Neka je $L = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Želimo dokazati da $x_n \longrightarrow L$. Uzmimo $\epsilon > 0$. Prema propoziciji 3.3.11 postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$L - \epsilon < x_{n_0}.$$

Budući da je niz (x_n) rastući vrijedi da je

$$x_{n_0} \leq x_n$$

za svaki $n \geq n_0$. Nadalje, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x_n \leq L$$

(jer je L supremum od $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$). Prema tome, za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$L - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq L < L + \epsilon.$$

Dakle, $x_n \in \langle L - \epsilon, L + \epsilon \rangle$ za svaki $n \geq n_0$. Zaključak: $x_n \longrightarrow L$. □

Definicija 3.3.18. *Za niz realnih brojeva* (x_n) *kažemo da je padajući ako je* $x_n \geq x_{n+1}$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$.

Ako je (x_n) padajući niz, onda je $x_n \geq x_m$ za sve $n, m \in \mathbb{N}$, $n \leq m$. To vidimo na analogan način kao i u slučaju rastućeg niza.

Propozicija 3.3.19. *Neka je* (x_n) *omeđen i padajući niz realnih brojeva. Tada je* (x_n) *konvergentan niz i teži prema* $\inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Dokaz. Postupamo analogno kao i u dokazu propozicije 3.3.17. Neka je $L = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Uzmimo $\epsilon > 0$. Prema propoziciji 3.3.12 postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$L + \epsilon > x_{n_0}.$$

Tada za svaki $n \geq n_0$ imamo

$$L + \epsilon > x_{n_0} \geq x_n \geq L > L - \epsilon.$$

Dakle, $x_n \in \langle L - \epsilon, L + \epsilon \rangle$ za svaki $n \geq n_0$. Zaključak: $x_n \longrightarrow L$. □

Za niz realnih brojeva kažemo da je monoton ako je rastući ili padajući.

Korolar 3.3.20. *Svaki monoton i omeđen niz realnih brojeva je konvergentan.*

Dokaz. Ovo je direktna posljedica propozicija 3.3.17 i 3.3.19. □

Teorem 3.3.21. *Svaki niz realnih brojeva ima monoton podniz.*

Dokaz. Neka je (x_n) niz realnih brojeva. Imamo dva slučaja:
1) Postoji prirodni broj k takav da za svaki prirodni broj $n > k$ postoji prirodni broj $m > n$ takav da je $x_n \leq x_m$, tj.

$$(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n > k, n \in \mathbb{N})(\exists m > n, m \in \mathbb{N})(x_n \leq x_m). \tag{3.12}$$

Definirajmo niz prirodnih brojeva $n_1, n_2, \dots$ induktivno na sljedeći način: Neka je

$$n_1 = k + 1.$$

Uočimo da je

$$n_1 > k.$$

Pretpostavimo da je $i \in \mathbb{N}$ te da smo definirali n_i i da pri tome vrijedi

$$n_i > k.$$

Prema (3.12) postoji $m \in \mathbb{N}$, $m > n_i$ takav da je

$$x_{n_i} \leq x_m.$$

Definiramo

$$n_{i+1} = m.$$

Uočimo da je

$$n_i < n_{i+1} \text{ i } x_{n_i} \leq x_{n_{i+1}}$$

(posebno, $n_{i+1} > k$). Na ovaj način smo konstruirali niz brojeva $n_1, n_2, n_3, \ldots$ koji je očito strogo rastući te imamo da je $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ rastući podniz od $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Za svaki prirodni broj k postoji prirodni broj $n > k$ takav da za svaki prirodni broj $m > n$ vrijedi $x_n > x_m$ (uočimo da smo negirali prvi slučaj), tj.

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\exists n > k, n \in \mathbb{N})(\forall m > n, m \in \mathbb{N})(x_n > x_m). \tag{3.13}$$

Definiramo niz prirodnih bojeva $n_1, n_2, n_3, \ldots$ induktivno na sljedeći način: Neka je $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$x_{n_1} > x_m$$

za svaki $m > n_1$ (takav broj sigurno postoji prema (3.13)). Pretpostavimo da je $i \in \mathbb{N}$ te da smo definirali broj n_i takav da je

$$x_{n_i} > x_m$$

za svaki $m > n_i$. Prema (3.13) postoji (za $k = n_i$) broj

$$n_{i+1} > n_i$$

takav da je

$$x_{n_{i+1}} > x_m$$

za svaki $m > n_{i+1}$. Uočimo da je

$$x_{n_i} > x_{n_{i+1}}.$$

Na ovaj način smo konstruirali strogo rastući niz $n_1, n_2, n_3, \ldots$ takav da je $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ strogo padajući niz. Dakle, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ima padajući podniz.
Zaključak: (x_n) ima monoton podniz. □

Teorem 3.3.22. *Svaki omeđen niz realnih brojeva ima konvergentan podniz.*

Dokaz. Neka je (x_n) omeđen niz realnih brojeva. Prema prethodnom teoremu postoji podniz (y_n) niza (x_n) koji je monoton. Budući da je niz (x_n) omeđen, onda je i njegov podniz (y_n) omeđen. Prema korolaru 3.3.20 niz (y_n) je konvergentan. □

3.4 Kompaktnost u $\mathbb{R}^n$

Definicija 3.4.1. *Neka je (X, d) metrički prostor te (x_n) niz u X. Za (x_n) kažemo da je omeđen niz u (X, d) ako je njegova slika omeđen skup, tj. ako je $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ omeđen skup u metričkom prostoru (X, d).*

Napomena 3.4.2. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Kada za niz u $\mathbb{R}^n$ kažemo da je omeđen, mislimo da je omeđen u metričkom prostoru $(\mathbb{R}^n, d)$ gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Nadalje, niz konvergira prema nekoj točki u $\mathbb{R}^n$ ako konvergira prema toj točki u metričkom prostoru $(\mathbb{R}^n, d)$.*

Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je (x_i) niz u $\mathbb{R}^n$. Tada očito postoje (jedinstveni) nizovi realnih brojeva

$$(x_i^1)_{i\in\mathbb{N}}, \dots, (x_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$$

takvi da je

$$x_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^n)$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$. Za nizove

$$(x_i^1), \dots, (x_i^n)$$

kažemo da su komponentni nizovi od (x_i).

Propozicija 3.4.3. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i (x_i) niz u $\mathbb{R}^n$. Neka su $(x_i^1), \dots, (x_i^n)$ komponentni nizovi od (x_i) te neka su $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ i $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Tada $x_i \longrightarrow a$ ako i samo ako $x_i^1 \longrightarrow a_1, x_i^2 \longrightarrow a_2, \dots, x_i^n \longrightarrow a_n$.*

Dokaz. Uočimo prije svega sljedeće: Ako su $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ onda za svaki $j \in \{1, \dots, n\}$ vrijedi

$$|b_j| \leq \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}.$$

Pretpostavimo da $x_i \longrightarrow a$. Neka je $j \in \{1, \dots, n\}$. Dokažimo da $x_i^j \longrightarrow a_j$. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $i \geq i_0$ vrijedi

$$d(x_i, a) < \epsilon.$$

Stoga, za svaki $i \geq i_0$ vrijedi

$$|x_i^j - a_j| \leq \sqrt{(x_i^1 - a_1)^2 + \cdots + (x_i^n - a_n)^2} = d(x_i, a) < \epsilon,$$

odnosno

$$|x_i^j - a_j| < \epsilon.$$

Zaključak: $x_i^j \longrightarrow a_j$.

Obratno, pretpostavimo da $x_i^j \longrightarrow a_j$ za svaki $j \in \{1, \dots, n\}$. Želimo dokazati da $x_i \longrightarrow a$. Neka je $\epsilon > 0$. Neka je $j \in \{1, \dots, n\}$. Tada postoji $i_j \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $i \geq i_j$ vrijedi

$$|x_i^j - a_j| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}. \tag{3.14}$$

Neka je $i_0 = \max\{i_1, \dots, i_n\}$. Tada za svaki $j \in \{1, \dots, n\}$ i za svaki $i \geq i_0$ vrijedi (3.14). Neka je $i \geq i_0$. Tada vrijedi

$$d(x_i, a) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_i^j - a_j)^2} < \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \frac{\epsilon^2}{n}} = \sqrt{n \cdot \frac{\epsilon^2}{n}} = \epsilon.$$

Dakle,

$$d(x_i, a) < \epsilon$$

za svaki $i \geq i_0$. Zaključak: $x_i \longrightarrow a$. □

Lema 3.4.4. *Neka je $n \in \mathbb{N}$, (x_i) niz u $\mathbb{R}^n$ te $(x_i^1), \dots, (x_i^n)$ komponentni nizovi od (x_i). Tada je (x_i) omeđen u $\mathbb{R}^n$ ako i samo ako su $(x_i^1), \dots, (x_i^n)$ omeđeni u $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Pretpostavimo da je (x_i) omeđen u $\mathbb{R}^n$. To znači da je $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ omeđen skup u metričkom prostoru $(\mathbb{R}^n, d)$. Stoga postoji $r > 0$ takav da je

$$\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq K((0, \dots, 0), r; d).$$

Slijedi da je

$$d(x_i, (0, \dots, 0)) < r$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$ pa je

$$\sqrt{(x_i^1)^2 + \cdots + (x_i^n)^2} < r$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$. Iz ovoga slijedi da je

$$|x_i^1| < r, \dots, |x_i^n| < r$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$ pa su prema lemi 3.3.15 komponentni nizovi omeđeni u $\mathbb{R}$.

Obratno, pretpostavimo da su $(x_i^1), \dots, (x_i^n)$ omeđeni u $\mathbb{R}$. Prema lemi 3.3.15 postoje $M_1 > 0, \dots, M_n > 0$ takvi da je

$$|x_i^1| \leq M_1, \dots, |x_i^n| \leq M_n$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$. Neka je $M = \max\{M_1, \dots, M_n\}$. Dakle,

$$|x_i^1| \leq M, \dots, |x_i^n| \leq M$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$. Za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$d(x_i, (0, \ldots, 0)) = \sqrt{(x_i^1)^2 + \cdots + (x_i^n)^2} \leq \sqrt{n \cdot M^2} = M \cdot \sqrt{n} < M \cdot \sqrt{n} + 1.$$

Prema tome

$$\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq K((0, \ldots, 0), M \cdot \sqrt{n} + 1).$$

Zaključak: (x_i) je omeđen u $\mathbb{R}^n$. □

Napomena 3.4.5. *Ako je $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija, onda za sve $i, j \in \mathbb{N}$ takve da je $i < j$ vrijedi*

$$a(i) < a(j).$$

Nadalje, ako su $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuće funkcije, onda je i

$$a \circ b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

strogo rastuća funkcija. Naime, za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$b(i) < b(i + 1)$$

što povlači

$$a(b(i)) < a(b(i + 1)),$$

tj.

$$(a \circ b)(i) < (a \circ b)(i + 1).$$

Propozicija 3.4.6. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Svaki omeđen niz u $\mathbb{R}^n$ ima konvergentan podniz.*

Dokaz. Ovu tvrdnju ćemo dokazati metodom matematičke indukcije. Za $n = 1$ tvrdnja je jasna (teorem 3.3.22). Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neko $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo da vrijedi za $n + 1$. Neka je (x_i) omeđen niz u $\mathbb{R}^{n+1}$. Neka su $(x_i^1), \ldots, (x_i^{n+1})$ komponentni nizovi od (x_i). Ti komponentni nizovi su omeđeni prema lemi 3.4.4 pa je prema istoj lemi niz (y_i) u $\mathbb{R}^n$ definiran sa

$$y_i = (x_i^1, \ldots, x_i^n)$$

omeđen u $\mathbb{R}^n$. Prema induktivnoj pretpostavci postoji strogo rastuća funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(y_{a(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ konvergentan niz u $\mathbb{R}^n$. Za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$y_{a(i)} = (x_{a(i)}^1, \ldots, x_{a(i)}^n).$$

Ovo znači da su $(x_{a(i)}^1), \ldots, (x_{a(i)}^n)$ komponentni nizovi od $(y_{a(i)})$ pa su onda oni konvergentni. Promotrimo niz $(x_{a(i)}^{n+1})_{i \in \mathbb{N}}$. On je omeđen jer je podniz omeđenog niza $(x_i^{n+1})_{i \in \mathbb{N}}$. Prema teoremu 3.3.22 postoji strogo rastuća funkcija $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(x_{a(b(i))}^{n+1})$ konvergentan niz u $\mathbb{R}$. Nizovi $(x^1_{a(b(i))}), \dots, (x^n_{a(b(i))})$ su konvergentni jer su podnizovi konvergentnih nizova $(x^1_{a(i)}), \dots, (x^n_{a(i)})$. Imamo

$$x_{a(b(i))} = (x^1_{a(b(i))}, \dots, x^n_{a(b(i))}, x^{n+1}_{a(b(i))})$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$. Iz ovoga zaključujemo da su komponentni nizovi od $(x_{a(b(i))})$ konvergentni pa iz propozicije 3.4.3 slijedi da je $(x_{a(b(i))})$ konvergentan niz u $\mathbb{R}^{n+1}$. Imamo

$$(x_{a(b(i))}) = (x_{(a\circ b)(i)}),$$

a prema napomeni $a \circ b$ je strogo rastuća funkcija. Dakle, $(x_{a(b(i))})$ je konvergentan podniz od (x_i) u $\mathbb{R}^{n+1}$. □

Napomena 3.4.7. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Kada za $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je kompaktan skup u $\mathbb{R}^n$, onda mislimo da je K kompaktan u metričkom prostoru $(\mathbb{R}^n, d)$, gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$.*

Teorem 3.4.8. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Tada je K kompaktan skup u $\mathbb{R}^n$ ako i samo ako je K zatvoren i omeđen.*

Dokaz. Ako je K kompaktan u $\mathbb{R}^n$, onda je zatvoren i omeđen prema propoziciji 3.2.4. Pretpostavimo da je K zatvoren i omeđen u $\mathbb{R}^n$. Ako je $K = \emptyset$, onda je jasno da je K kompaktan. Uzmimo da je $K \neq \emptyset$. Neka je p euklidska metrika na K. Prema korolaru 3.2.2 dovoljno je dokazati da je (K, p) kompaktan metrički prostor, a u tu svrhu je prema teoremu 3.1.9 dovoljno dokazati da je (K, p) sekvencijalno kompaktan metrički prostor. Neka je (x_i) niz u K. Tada je (x_i) omeđen niz u $\mathbb{R}^n$ (jer je K omeđen skup) pa prema propoziciji 3.4.6 postoji podniz (y_i) od (x_i) takav da je (y_i) konvergentan u $\mathbb{R}^n$. To znači da postoji $a \in \mathbb{R}^n$ takav da

$$y_i \longrightarrow a$$

u $(\mathbb{R}^n, d)$, gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Budući da je K zatvoren u $(\mathbb{R}^n, d)$ pa i u $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_d)$ te da

$$y_i \longrightarrow a$$

u $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_d)$, prema propoziciji 2.1.5 imamo da je $a \in K$. Dakle, imamo

$$y_i \longrightarrow a$$

u $(\mathbb{R}^n, d)$, $a \in K$ i

$$p = d\,|_{K\times K}$$

pa zaključujemo da

$$y_i \longrightarrow a$$

u (K, p). Prema tome, postoji podniz od (x_i) konvergentan u (K, p). Ovim smo dokazali da je (K, p) sekvencijalno kompaktan metrički prostor. Zaključak: K je kompaktan skup u $\mathbb{R}^n$. □

3.5 Potpunost metričkih prostora

Cauchyjevi nizovi

Definicija 3.5.1. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je (x_i) niz u X. Kažemo da je (x_i) Cauchyjev niz u (X, d) ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x_i, x_j) < \epsilon$ za sve $i, j \geq n_0$.*

Propozicija 3.5.2. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je (x_i) konvergentan niz u (X, d). Tada je (x_i) Cauchyjev niz u (X, d).*

Dokaz. Neka je $a \in X$ točka takva da $x_i \longrightarrow a$. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x_i, a) < \frac{\epsilon}{2}$$

za sve $i \geq n_0$. Neka su $i, j \geq n_0$. Imamo

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, a) + d(a, x_j) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dakle,

$$d(x_i, x_j) < \epsilon$$

za sve $i, j \geq n_0$. Zaključak: (x_i) je Cauchyjev niz. □

Napomena 3.5.3. *Ako je (X, d) metrički prostor, (Y, p) potprostor od (X, d) te (x_i) niz u Y, onda je (x_i) Cauchyjev u (Y, p) ako i samo ako je (x_i) Cauchyjev u (X, d). Nadalje, ako je $a \in Y$, onda $x_i \longrightarrow a$ u (Y, p) ako i samo ako $x_i \longrightarrow a$ u (X, d).*

Primjer 3.5.4. *Neka je p euklidska metrika na $\langle 0, +\infty\rangle$ te d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je (x_n) niz definiran sa $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada $x_n \longrightarrow 0$ u $(\mathbb{R}, d)$ (primjer 2.4.6). Stoga je (x_n) Cauchyjev niz u $(\mathbb{R}, d)$.*

Prema prethodnoj napomeni tada je (x_n) Cauchyjev niz u $(\langle 0, +\infty\rangle, p)$. Pretpostavimo da je (x_n) konvergentan u $(\langle 0, +\infty\rangle, p)$. Tada postoji $a \in \langle 0, +\infty\rangle$ takav da $x_n \longrightarrow a$ u $(\langle 0, +\infty\rangle, p)$. Tada $x_n \longrightarrow a$ i u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$. Uočimo da je $a \neq 0$ (jer je $a \in \langle 0, +\infty\rangle$). Dakle, $x_n \longrightarrow 0$ i $x_n \longrightarrow a$ (u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$) što je u kontradikciji s korolarom 2.1.9.
Zaključak: (x_n) je Cauchyjev niz u $(\langle 0, +\infty\rangle, p)$ ali nije konvergentan.

Definicija 3.5.5. *Neka je (X, d) metrički prostor. Za (X, d) kažemo da je potpun metrički prostor ako je svaki Cauchyjev niz konvergentan.*

Primjer 3.5.6. *Metrički prostor $(\langle 0, +\infty\rangle, p)$, gdje je p euklidska metrika na $\langle 0, +\infty\rangle$ nije potpun (prethodni primjer).*

Primjer 3.5.7. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$ te (x_n) niz definiran sa $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada su -1 i 1 gomilišta niza (x_n), no niz (x_n) nije konvergentan u $(\mathbb{R}, d)$, čak štoviše nije Cauchyjev.*

Neka je U otvoren skup u $(\mathbb{R}, d)$ koji sadrži 1 te neka je $N \in \mathbb{N}$. Tada je $2N \geq N$ i

$$x_{2N} = (-1)^{2N} = 1 \in U.$$

Dakle, 1 je gomilište niza (x_n). Analogno vidimo da je -1 gomilište od (x_n). Pretpostavimo da je (x_n) Cauchyjev niz. Neka je $\epsilon = 1$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x_i, x_j) < 1$$

za sve $i, j \geq n_0$. Neka je

$$i = 2n_0$$

te neka je

$$j = 2n_0 + 1.$$

Tada su $i, j \geq n_0$ pa je

$$d(x_i, x_j) < 1,$$

to jest

$$|x_i - x_j| < 1. \tag{3.15}$$

No,

$$x_i = (-1)^{2n_0} = 1$$

i

$$x_j = (-1)^{2n_0+1} = -1$$

pa je

$$|x_i - x_j| = |1 - (-1)| = 2$$

što je u kontradikciji s (3.15). Zaključak: niz (x_n) nije Cauchyjev pa stoga nije ni konvergentan.

Lema 3.5.8. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je (x_i) Cauchyjev niz u X. Pretpostavimo da je $a \in X$ gomilište niza (x_i). Tada $x_i \longrightarrow a$.*

Dokaz. Uzmimo $\epsilon > 0$. Budući da je (x_i) Cauchyjev niz postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x_i, x_j) < \frac{\epsilon}{2}$$

za sve $i, j \geq n_0$. Budući da je a gomilište od (x_i) postoji $n \geq n_0$ takav da je

$$x_n \in K(a, \frac{\epsilon}{2}).$$

Neka je $i \geq n_0$. Tada je

$$d(x_i, a) \leq d(x_i, x_n) + d(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dakle,

$$d(x_i, a) < \epsilon$$

za sve $i \geq n_0$. Prema tome $x_i \longrightarrow a$. □

Teorem 3.5.9. *Svaki kompaktan metrički prostor je potpun.*

Dokaz. Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor te neka je (x_i) Cauchyjev niz u (X, d). Prema teoremu 2.2.3 niz (x_i) ima gomilište u (X, d). Iz prethodne leme slijedi da je niz (x_i) konvergentan. Zaključak: (X, d) je potpun metrički prostor. □

Propozicija 3.5.10. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je (x_i) Cauchyjev niz u (X, d). Tada je (x_i) omeđen niz u (X, d).*

Dokaz. Odaberimo neki $\epsilon > 0$ (npr. $\epsilon = 1$). Budući da je (x_i) Cauchyjev niz postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x_i, x_j) < \epsilon$$

za sve $i, j \geq n_0$. Posebno,

$$d(x_i, x_{n_0}) < \epsilon$$

za sve $i \geq n_0$ što znači da je

$$\{x_i \mid i \geq n_0\} \subseteq K(x_{n_0}, \epsilon).$$

Slijedi da je $\{x_i \mid i \geq n_0\}$ omeđen skup u (X, d). S druge strane, vrijedi

$$\{x_1, \ldots, x_{n_0}\} = \{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_{n_0}\}.$$

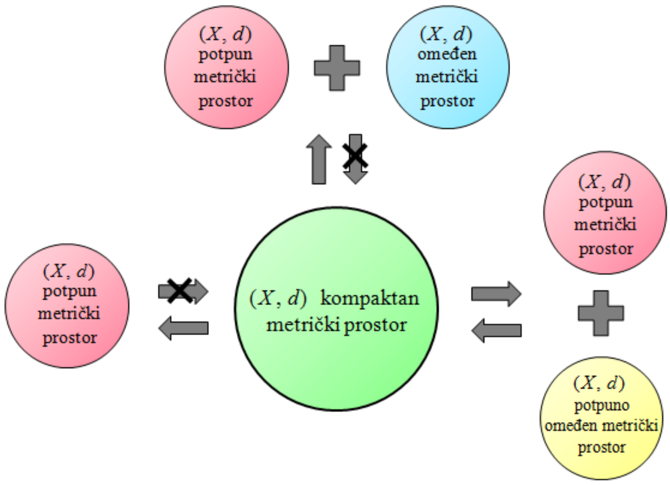
Iz korolara 2.3.3 slijedi da je $\{x_1, \ldots, x_{n_0}\}$ omeđen skup. Naposlijetku imamo

$$\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \{x_1, \ldots, x_{n_0}\} \cup \{x_i \mid i \geq n_0\}$$

pa je $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ omeđen skup. Dakle, (x_i) je omeđen niz u (X, d). □

Teorem 3.5.11. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Tada je $(\mathbb{R}^n, d)$ potpun metrički prostor.*

Dokaz. Neka je (x_i) Cauchyjev niz u $(\mathbb{R}^n, d)$. Prema prethodnoj propoziciji (x_i) je omeđen niz u $(\mathbb{R}^n, d)$. Iz propozicije 3.4.6 slijedi da (x_i) ima konvergentan podniz. Prema propoziciji 2.4.3 niz (x_i) ima gomilište u $(\mathbb{R}^n, d)$, a prema lemi 3.5.8 (x_i) je konvergentan. Dakle, metrički prostor $(\mathbb{R}^n, d)$ je potpun. □



Slika 3.4: (X, d) kompaktan $\Leftrightarrow$ (X, d) potpun i potpuno omeđen

Prethodni teorem nam pokazuje da potpun metrički prostor ne mora biti kompaktan.

Primjer 3.5.12. *Neka je $X \neq \emptyset$ te neka je d diskretna metrika na X. Tada je (X, d) potpun metrički prostor.*

Neka je (x_n) Cauchyjev niz u (X, d). Budući da je (x_n) Cauchyjev niz postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x_i, x_j) < \frac{1}{2}$$

za sve $i, j \geq n_0$. To znači da je

$$x_i = x_j$$

za sve $i, j \geq n_0$. Dakle,

$$x_i = x_{n_0}$$

za svaki $i \geq n_0$. Stoga je

$$d(x_i, x_{n_0}) = 0$$

za svaki $i \geq n_0$. Uzmimo $\epsilon > 0$. Posebno,

$$d(x_i, x_{n_0}) < \epsilon$$

za svaki $i \geq n_0$. Prema tome $x_i \longrightarrow x_{n_0}$. Dakle, (x_i) je konvergentan niz. Zaključak: (X, d) je potpun metrički prostor.

Uočimo da je (X, d) omeđen metrički prostor. No, ako je X beskonačan, (X, d) nije kompaktan što smo vidjeli u primjeru 3.2.5.

Prethodni primjer pokazuje da potpun metrički prostor ne mora biti kompaktan čak ni kada je omeđen. Koji uvjet bismo mogli dodati na metrički prostor, a da ipak dobijemo ekvivalenciju između kompaktnosti i potpunosti (slika 3.4.)? Odgovor na to će nam dati teorem 3.5.22.

Dijametar skupa

Neka je (X, d) metrički prostor te neka je S omeđen i neprazan skup u (X, d). Tada postoje $x_0 \in X$ i $r > 0$ takvi da je $S \subseteq K(x_0, r)$.

Neka su $x, y \in S$. Tada je

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) < 2r.$$

Dakle,

$$d(x, y) < 2r$$

za sve $x, y \in S$. Ovo znači da je skup $\{d(x, y) \mid x, y \in S\}$ odozgo omeđen u $\mathbb{R}$. Jasno je da je ovaj skup neprazan (jer je S neprazan) stoga ima supremum. Definiramo

$$\operatorname{diam} S = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in S\}.$$

Za broj $\operatorname{diam} S$ kažemo da je dijametar skupa S. Uočimo da za sve $x, y \in S$ vrijedi

$$d(x, y) \leq \operatorname{diam} S.$$

Primjer 3.5.13. *Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $F_n = [n, +\infty\rangle$. Tada je F_n zatvoren skup u $\mathbb{R}$ i $F_{n+1} \subseteq F_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, (F_n) je padajući niz nepraznih zatvorenih skupova u $\mathbb{R}$, no*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$$

(kada bi postojao $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$, onda bi vrijedilo $x \geq n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ što je nemoguće).

Lema 3.5.14. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ padajući niz skupova u $(X, \mathcal{T})$. Pretpostavimo da je (x_n) niz u X te $a \in X$ takav da $x_n \longrightarrow a$ i $x_n \in F_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.*

Dokaz. Neka je $k \in \mathbb{N}$. Promotrimo niz $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots$, tj. niz $(x_{k+n})_{n \in \mathbb{N}}$. To je podniz od (x_n) pa i on teži prema a. No,

$$x_{k+n} \in F_{k+n}$$

pa je

$$x_{k+n} \in F_k$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$ (ovdje koristimo da je $F_i \subseteq F_j$ za sve $i, j \in \mathbb{N}$, $i \geq j$ što slijedi iz činjenice da je niz $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajući). Budući da je F_k zatvoren skup imamo da je $a \in F_k$ (propozicija 2.1.5). Dakle, $a \in F_k$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, tj.

$$a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

□

Teorem 3.5.15 (Cantorov teorem)**.** *Neka je (X, d) potpun metrički prostor te neka je (F_n) padajući niz nepraznih zatvorenih skupova u (X, d). Pretpostavimo da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ skup F_n omeđen te da* $\operatorname{diam} F_n \longrightarrow 0$. *Tada je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ jednočlan skup.*

Dokaz. Dokažimo prvo da $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ ne sadrži više od jedne točke. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje

$$x, y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

takvi da je $x \neq y$. Neka je $\epsilon = d(x, y)$. Tada je $\epsilon > 0$ pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|\operatorname{diam} F_n - 0| < \epsilon$$

za svaki $n \geq n_0$, tj.

$$\operatorname{diam} F_n < d(x, y)$$

za svaki $n \geq n_0$. Posebno,

$$\operatorname{diam} F_{n_0} < d(x, y).$$

No,

$$x, y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

pa su $x, y \in F_{n_0}$ što povlači

$$d(x, y) \leq \operatorname{diam} F_{n_0}.$$

Imamo

$$d(x, y) \leq \operatorname{diam} F_{n_0} < d(x, y)$$

što je kontradikcija. Dakle, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ ne sadrži više od jedne točke. Preostaje još dokazati da je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ odaberimo točku $x_n \in F_n$ (to možemo jer je $F_n \neq \emptyset$ za svaki $n \in \mathbb{N}$). Tako dobivamo niz (x_n) u X. Prema lemi 3.5.14 dovoljno je dokazati da postoji $a \in X$ takav da $x_n \longrightarrow a$, tj. da je niz (x_n) konvergentan. Neka je $\epsilon > 0$. Budući da $\operatorname{diam} F_n \longrightarrow 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\operatorname{diam} F_n < \epsilon$$

za svaki $n \geq n_0$. Neka su $i, j \geq n_0$. Zbog $F_i \subseteq F_{n_0}$ i $F_j \subseteq F_{n_0}$ imamo

$$x_i, x_j \in F_{n_0}$$

pa iz

$$\operatorname{diam} F_{n_0} < \epsilon$$

slijedi da je

$$d(x_i, x_j) < \epsilon.$$

Dakle,

$$d(x_i, x_j) < \epsilon$$

za sve $i, j \geq n_0$. Ovim smo dokazali da je niz (x_n) Cauchyjev. Budući da je (X, d) potpun slijedi da je (x_n) konvergentan. Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Primjer 3.5.16. *Neka je d euklidska metrika na $\langle 0, +\infty\rangle$. Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $F_n = \langle 0, \frac{1}{n}]$. Uočimo da je $F_{n+1} \subseteq F_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Naime, ako je $x \in F_{n+1}$, onda je $x \in \langle 0, \frac{1}{n+1}]$ iz čega slijedi*

$$0 < x \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

pa je

$$x \in \langle 0, \frac{1}{n}] = F_n.$$

Očito je F_n zatvoren skup u $(\langle 0, +\infty\rangle, d)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Neka su

$$x, y \in \langle 0, \frac{1}{n}]$$

takvi da je $x \leq y$. Tada je

$$0 < x \leq y \leq \frac{1}{n}$$

pa je

$$y - x \leq \frac{1}{n},$$

tj.

$$d(x, y) \leq \frac{1}{n}.$$

Dakle, $\frac{1}{n}$ *je gornja međa od* $\{d(x,y) \mid x,y \in F_n\}$ *pa je*

$$\operatorname{diam} F_n \leq \frac{1}{n}.$$

Tada je

$$\operatorname{diam} F_n \in \langle -\frac{2}{n}, \frac{2}{n} \rangle$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$ *pa iz leme 2.4.5 slijedi*

$$\operatorname{diam} F_n \longrightarrow 0.$$

No,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset.$$

Naime, pretpostavimo da je

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset,$$

tj. postoji

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

Tada je posebno

$$x \in F_1 = \langle 0, 1]$$

pa slijedi da je $x > 0$. *To povlači da postoji* $n \in \mathbb{N}$ *takav da je*

$$\frac{1}{n} < x.$$

No, ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $x \in F_n$.

Zatvorena kugla

Definicija 3.5.17. *Neka je* (X, d) *metrički prostor,* $x_0 \in X$ *te* $r > 0$. *Definiramo* $\overline{K}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x_0, x) \leq r\}$. *Za* $\overline{K}(x_0, r)$ *kažemo da je zatvorena kugla oko točke* x_0 *radijusa* r.

Očito je $K(x_0, r) \subseteq \overline{K}(x_0, r)$.

Propozicija 3.5.18. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te* $x_0 \in X$ *i* $r > 0$. *Tada je* $\overline{K}(x_0, r)$ *zatvoren skup.*

Dokaz. Neka je $x \in \overline{K}(x_0, r)^C$. Tada je

$$d(x_0, x) > r.$$

Neka je

$$s = d(x_0, x) - r.$$

Tada je $s > 0$. Tvrdimo da je

$$K(x, s) \subseteq \overline{K}(x_0, r)^C. \tag{3.16}$$

Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $y \in K(x, s)$ takav da je $y \in \overline{K}(x_0, r)$. Imamo

$$d(x, x_0) \leq d(x, y) + d(y, x_0) < s + r = d(x_0, x)$$

što je kontradikcija. Dakle, (3.16) vrijedi. Time je dokazano da je $\overline{K}(x_0, r)^C$ otvoren skup što znači da je $\overline{K}(x_0, r)$ zatvoren skup. □

Uočimo sljedeće: Ako su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ takvi da je $A \subseteq B$ te ako je $a = \sup A$ i $b = \sup B$, onda je $a \leq b$. Naime, b je kao gornja međa od B ujedno i gornja međa od A iz čega odmah slijedi da je $a \leq b$.

Iz prethodne činjenice slijedi: Ako je (X, d) metrički prostor te ako su S i T neprazni omeđeni podskupovi od X takvi da je $S \subseteq T$, onda je

$$\operatorname{diam} S \leq \operatorname{diam} T.$$

Lema 3.5.19. *Neka je (X, d) metrički prostor te $x_0 \in X$ i $r > 0$. Tada je* $\operatorname{diam} \overline{K}(x_0, r) \leq 2r$.

Dokaz. Neka su $x, y \in \overline{K}(x_0, r)$. Tada je

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) \leq r + r = 2r.$$

Dakle,

$$d(x, y) \leq 2r$$

za sve $x, y \in \overline{K}(x_0, r)$. Ovo znači da je $2r$ gornja međa skupa $\{d(x, y) \mid x, y \in \overline{K}(x_0, r)\}$ pa je supremum ovog skupa manji ili jednak $2r$. Dakle,

$$\operatorname{diam} \overline{K}(x_0, r) \leq 2r.$$

□

Definicija 3.5.20. *Neka je X skup te (x_n) niz u X. Neka je $A \subseteq X$. Za A kažemo da je gomilište niza (x_n) ako za svaki $N \in \mathbb{N}$ postoji $n \geq N$ takav da je $x_n \in A$.*

Uočimo sljedeće: Ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, (x_n) niz u X te $a \in X$, onda je a gomilište niza (x_n) ako i samo ako je svaka otvorena okolina točke a u $(X, \mathcal{T})$ gomilište od (x_n). Nadalje, ako je (x_n) niz u X te A gomilište u X, onda je i B gomilište od (x_n) za svaki B takav da je

$$A \subseteq B \subseteq X.$$

Propozicija 3.5.21. *Neka je X skup, (x_n) niz u X te $A \subseteq X$. Pretpostavimo da je A gomilište niza (x_n) te da su $S_1, \dots, S_k$ podskupovi od A takvi da je $A = S_1 \cup \dots \cup S_k$. Tada postoji $i \in \{1, \dots, k\}$ takav da je S_i gomilište od (x_n).*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Neka je $i \in \{1, \dots, k\}$. Tada S_i nije gomilište niza (x_n) iz čega zaključujemo da postoji $N_i \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq N_i$ vrijedi $x_n \notin S_i$. Neka je

$$N = \max\{N_1, \dots, N_k\}.$$

Ako je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq N$, onda je

$$n \geq N_1, \dots, n \geq N_k$$

pa

$$x_n \notin S_1, \dots, x_n \notin S_k,$$

tj.

$$x_n \notin S_1 \cup \dots \cup S_k.$$

Dakle, $x_n \notin A$ za svaki $n \geq N$ što je kontradikcija s činjenicom da je A gomilište od (x_n). Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Teorem 3.5.22. *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada je (X, d) kompaktan ako i samo ako je (X, d) potpun i potpuno omeđen metrički prostor.*

Dokaz. Ako je (X, d) kompaktan, onda je potpun (teorem 3.5.9) i potpuno omeđen (propozicije 3.1.3 i 3.1.4). Pretpostavimo sada da je (X, d) potpun i potpuno omeđen metrički prostor. Neka je (x_i) niz u X. Dokažimo da (x_i) ima gomilište u (X, d). Ako to dokažemo, onda će slijediti da je (X, d) sekvencijalno kompaktan pa samim time i kompaktan. Budući da je (X, d) potpuno omeđen postoje $k \in \mathbb{N}$ i $x_1, \dots, x_k \in X$ takvi da je

$$K(x_1, \frac{1}{2}) \cup \dots \cup K(x_k, \frac{1}{2}) = X.$$

Jasno je da je X gomilište od (x_i). Prema propoziciji 3.5.21 postoji $j \in \{1, \dots, k\}$ takav da je $K(x_j, \frac{1}{2})$ gomilište od (x_i). Tada je i $\overline{K}(x_j, \frac{1}{2})$ gomilište od (x_i). Definirajmo

$$F_1 = \overline{K}(x_j, \frac{1}{2}).$$

Uočimo da je F_1 zatvoren skup, gomilište od (x_i) te

$$\operatorname{diam} F_1 \leq 1$$

(prema lemi 3.5.19). Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ te da smo definirali skup F_n takav da je F_n zatvoren, F_n gomilište od (x_i) i

$$\operatorname{diam} F_n \leq \frac{1}{n}.$$

Budući da je (X, d) potpuno omeđen postoje $k \in \mathbb{N}$ i $x_1, \ldots, x_k \in X$ takvi da je

$$X = K(x_1, \frac{1}{2(n+1)}) \cup \cdots \cup K(x_k, \frac{1}{2(n+1)}).$$

Imamo

$$\begin{aligned} F_n = F_n \cap X &= F_n \cap \left(K(x_1, \frac{1}{2(n+1)}) \cup \cdots \cup K(x_k, \frac{1}{2(n+1)}) \right) \\ &= \left(F_n \cap K(x_1, \frac{1}{2(n+1)}) \right) \cup \cdots \cup \left(F_n \cap K(x_k, \frac{1}{2(n+1)}) \right). \end{aligned}$$

Dakle,

$$F_n = \left(F_n \cap K(x_1, \frac{1}{2(n+1)}) \right) \cup \cdots \cup \left(F_n \cap K(x_k, \frac{1}{2(n+1)}) \right).$$

Prema propoziciji 3.5.21 postoji $j \in \{1, \ldots, k\}$ takav da je

$$F_n \cap K(x_j, \frac{1}{2(n+1)})$$

gomilište od (x_i). Očito je

$$F_n \cap K(x_j, \frac{1}{2(n+1)}) \subseteq F_n \cap \overline{K}(x_j, \frac{1}{2(n+1)}).$$

Definirajmo

$$F_{n+1} = F_n \cap \overline{K}(x_j, \frac{1}{2(n+1)}).$$

Tada je F_{n+1} zatvoren skup te gomilište niza (x_i). Očito je

$$F_{n+1} \subseteq F_n.$$

Iz

$$F_{n+1} \subseteq \overline{K}(x_j, \frac{1}{2(n+1)})$$

slijedi

$$\operatorname{diam} F_{n+1} \leq \operatorname{diam} \overline{K}(x_j, \frac{1}{2(n+1)}) \leq \frac{1}{n+1}.$$

Na ovaj način smo induktivno definirali padajući niz zatvorenih skupova $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je

$$\operatorname{diam} F_n \leq \frac{1}{n}$$

i F_n gomilište od (x_i) za svaki $n \in \mathbb{N}$. Očito je

$$\operatorname{diam} F_n \in \langle -\frac{2}{n}, \frac{2}{n} \rangle$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$ pa iz leme 2.4.5 slijedi

$$\operatorname{diam} F_n \longrightarrow 0.$$

Prema Cantorovom teoremu vrijedi

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset.$$

Odaberimo

$$a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

Tvrdimo da je a gomilište niza (x_i) u (X, d). Neka je U otvorena okolina točke a u (X, d). Tada postoji $r > 0$ takav da je

$$K(a, r) \subseteq U. \tag{3.17}$$

Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\frac{1}{n} < r.$$

Tvrdimo da je

$$F_n \subseteq K(a, r). \tag{3.18}$$

Neka je $x \in F_n$. Tada je

$$d(a, x) \leq \operatorname{diam} F_n \leq \frac{1}{n} < r.$$

Slijedi da je

$$x \in K(a, r).$$

Dakle, (3.18) vrijedi. Iz (3.18) slijedi da je $K(a, r)$ gomilište niza (x_i) pa iz (3.17) slijedi da je U gomilište od (x_i). Time smo dokazali da je a gomilište niza (x_i) u (X, d). Zaključak: (X, d) je kompaktan. □

Poglavlje 4

Primjena kompaktnosti

4.1 Neprekidne funkcije na segmentu

Lema 4.1.1. *Neka je F zatvoren podskup od $\mathbb{R}$.*

1) Ako je a supremum od F, onda je a maksimum od F.

2) Ako je a infimum od F, onda je a minimum od F.

Dokaz. 1) Pretpostavimo da je a supremum od F. Dovoljno je dokazati da je $a \in F$. Pretpostavimo suprotno, $a \notin F$. Tada je $a \in F^C$. Budući da je F^C otvoren postoji $r > 0$ takav da je

$$\langle a - r, a + r\rangle \subseteq F^C.$$

Prema propoziciji 3.3.11 postoji $x \in F$ takav da je

$$a - r < x.$$

S druge strane, budući da je a supremum od F vrijedi da je $x \leq a$. Dakle,

$$a - r < x \leq a < a + r$$

pa je

$$x \in \langle a - r, a + r\rangle,$$

tj. $x \in F^C$. To je kontradikcija s činjenicom da je $x \in F$. Prema tome je $a \in F$.

2) Koristeći propoziciju 3.3.12 ovo dokazujemo analogno kao pod 1). $\square$

Lema 4.1.2. *Neka je K kompaktan neprazan podskup od $\mathbb{R}$. Tada K ima minimum i maksimum.*

Dokaz. Iz teorema 3.4.8 slijedi da je K zatvoren i omeđen. Budući da je K omeđen i neprazan prema propozicijama 3.3.5 i 3.3.10 postoje $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a = \inf K$ i $b = \sup K$. Iz prethodne leme slijedi da je $a = \min K$ i $b = \max K$. □

Propozicija 4.1.3. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija (s obzirom na topologije $\mathcal{T}$, $\mathcal{E}$, gdje je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$). Neka je K neprazan kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. Tada f poprima minimum i maksimum na K, tj. postoje $a, b \in K$ takvi da je $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ za svaki $x \in K$.*

Dokaz. Prema propoziciji 1.4.7 skup $f(K)$ je kompaktan u $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$, tj. u $\mathbb{R}$. Prema prethodnoj lemi $f(K)$ ima minimum i maksimum. Neka je $m = \min f(K)$, $M = \max f(K)$. Neka su $a, b \in K$ takvi da je $m = f(a)$ i $M = f(b)$. Tada je očito

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

za svaki $x \in K$. □

Korolar 4.1.4. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija (s obzirom na metrike d, p, gdje je p euklidska metrika na $\mathbb{R}$). Neka je K neprazan kompaktan skup u (X, d). Tada f poprima minimum i maksimum na K.*

Dokaz. Funkcija f neprekidna je s obzirom na topologije $\mathcal{T}_d$ i $\mathcal{T}_p$, a $\mathcal{T}_p$ je euklidska topologija na $\mathbb{R}$. Nadalje, K je kompaktan u $(X, \mathcal{T}_d)$. Tvrdnja slijedi iz prethodne propozicije. □

Korolar 4.1.5. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija (s obzirom na metrike d, p, gdje je d euklidska metrika na $[a, b]$ i p euklidska metrika na $\mathbb{R}$). Tada f poprima minimum i maksimum na $[a, b]$.*

Dokaz. Očito je $[a, b]$ zatvoren i omeđen skup u $\mathbb{R}$. Stoga je prema teoremu 3.4.8 $[a, b]$ kompaktan skup u $\mathbb{R}$, tj. u $(\mathbb{R}, p)$, a $d = p\,|_{[a,b] \times [a,b]}$. Iz korolara 3.2.2 slijedi da je $([a, b], d)$ kompaktan metrički prostor. Jasno je da je tada $[a, b]$ kompaktan skup u metričkom prostoru $([a, b], d)$. Tvrdnja slijedi iz prethodnog korolara. □

4.2 Uniformna neprekidnost

Definicija 4.2.1. *Neka su (X, p) i (Y, q) metrički prostori te neka je $f : X \to Y$. Za funkciju f kažemo da je uniformno neprekidna s obzirom na metrike p i q ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x, y \in X$ vrijedi $p(x, y) < \delta \Rightarrow q(f(x), f(y)) < \epsilon$.*

Očito vrijedi sljedeće: Ako je funkcija f uniformno neprekidna s obzirom na metrike p i q, onda je f neprekidna s obzirom na metrike p i q.

Primjer 4.2.2. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Tada je f uniformno neprekidna funkcija (s obzirom na metrike d, d, gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$). Zašto?*

Neka je $\epsilon > 0$. Uzmimo $\delta = \epsilon$. Tada za sve $x, y \in \mathbb{R}$ takve da je

$$d(x, y) < \delta$$

vrijedi

$$d(x, y) < \epsilon$$

pa je

$$d(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Općenitije, ako je (X, d) metrički prostor, onda je $id_x : X \to X$ uniformno neprekidna s obzirom na metrike d, d.

Nadalje, ako su (X, p) i (Y, q) metrički prostori te $y_0 \in Y$, onda je funkcija $f : X \to Y$, $f(x) = y_0$ uniformno neprekidna s obzirom na metrike p i q. Naime, za $\epsilon > 0$ možemo uzeti bilo koji $\delta > 0$ i onda vrijedi

$$p(x, y) < \delta \Rightarrow q(f(x), f(y)) < \epsilon$$

za sve $x, y \in X$.

Propozicija 4.2.3. *Neka su (x_n) i (y_n) nizovi realnih brojeva te neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $x_n \longrightarrow a$ i $y_n \longrightarrow b$. Tada vrijedi sljedeće:*

1) $-x_n \longrightarrow -a$;

2) $|x_n| \longrightarrow |a|$;

3) $x_n + y_n \longrightarrow a + b$;

4) $x_n \cdot y_n \longrightarrow a \cdot b$;

5) Ako je $x_n \neq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $a \neq 0$, onda $\frac{1}{x_n} \longrightarrow \frac{1}{a}$.

Dokaz. 1) Neka je $\epsilon > 0$. Znamo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$|x_n - a| < \epsilon.$$

Uočimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|-x_n - (-a)| = |-1| \cdot |x_n - a| = |x_n - a|.$$

Stoga je za sve $n \geq n_0$

$$|-x_n - (-a)| < \epsilon.$$

Dakle, $-x_n \longrightarrow -a$.

2) Općenito za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi sljedeće:

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta|. \tag{4.1}$$

Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$|x_n - a| < \epsilon. \tag{4.2}$$

Prema (4.1) i (4.2) za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| < \epsilon.$$

Time je tvrdnja 2) dokazana.

3) Uzmimo $\epsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{4.3}$$

Nadalje, postoji $n_0' \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0'$ vrijedi

$$|y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{4.4}$$

Neka je $N = \max\{n_0, n_0'\}$. Tada je očito

$$N \geq n_0$$

i

$$N \geq n_0'$$

pa za svaki $n \geq N$ vrijedi

$$n \geq n_0$$

i

$$n \geq n_0'$$

što povlači da vrijedi (4.3) i (4.4). Stoga je

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dakle,

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| < \epsilon$$

za sve $n \geq N$. Time je tvrdnja 3) dokazana.

4) Budući da je (y_n) konvergentan niz, on je i Cauchyjev pa je i omeđen u $\mathbb{R}$ (propozicija 3.5.10). To znači da je skup $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ omeđen u $\mathbb{R}$ pa prema lemi 3.3.15 postoji $M > 0$ takav da je

$$|y_n| \leq M$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Neka je $\epsilon > 0$. Budući da $x_n \longrightarrow a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2M}. \tag{4.5}$$

Nadalje, budući da $y_n \longrightarrow b$ postoji $n_0' \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0'$ vrijedi

$$|y_n - b| < \frac{\epsilon}{2(|a| + 1)}. \tag{4.6}$$

Neka je $N = \max\{n_0, n_0'\}$. Neka je $n \geq N$. Tada je očito $n \geq n_0$ i $n \geq n_0'$ pa vrijedi (4.5) i (4.6). Imamo sljedeće

$$\begin{aligned}|x_n \cdot y_n - a \cdot b| &= |x_n \cdot y_n - y_n \cdot a + y_n \cdot a - a \cdot b| = |y_n| \cdot |x_n - a| + |a| \cdot |y_n - b| \\ &< M \cdot \frac{\epsilon}{2M} + (|a| + 1) \cdot \frac{\epsilon}{2(|a| + 1)} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Prema tome,

$$|x_n \cdot y_n - a \cdot b| < \epsilon$$

za sve $n \geq N$. Dakle, $x_n \cdot y_n \longrightarrow a \cdot b$.

5) Prema 2) znamo da vrijedi $|x_n| \longrightarrow |a|$. Imamo $0 < |a|$. Odaberimo $r \in \mathbb{R}$ takav da je

$$0 < r < |a|.$$

Tada je

$$|a| \in \langle r, \infty \rangle,$$

tj. $\langle r, \infty \rangle$ je otvorena okolina od $|a|$ u $\mathbb{R}$. Stoga postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za sve $n \geq n_0$

$$|x_n| \in \langle r, \infty \rangle.$$

Posebno, za sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$r < |x_n|,$$

tj.

$$\frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{r}.$$

Iz $x_n \longrightarrow a$ slijedi da postoji $n_0' \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0'$ vrijedi

$$|x_n - a| < \epsilon \cdot r \cdot |a|.$$

Neka je $N = \max\{n_0, n_0'\}$. Neka je $n \geq N$. Tada je

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - x_n}{x_n \cdot a}\right| = \frac{|a - x_n|}{|x_n \cdot a|} = |x_n - a| \cdot \frac{1}{|x_n|} \cdot \frac{1}{|a|}$$

$$< \epsilon \cdot r \cdot |a| \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{|a|} = \epsilon.$$

Dakle,

$$|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}| < \epsilon$$

za sve $n \geq N$. Prema tome, $\frac{1}{x_n} \longrightarrow \frac{1}{a}$. □

Propozicija 4.2.4. *Neka su (X, p) i (Y, q) metrički prostori, $a \in X$ te $f : X \to Y$ funkcija neprekidna u točki a (s obzirom na metrike p, q). Neka je (x_n) niz u X takav da $x_n \longrightarrow a$. Tada $f(x_n) \longrightarrow f(a)$.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da je

$$f(K(a, \delta; p)) \subseteq K(f(a), \epsilon; q).$$

Budući da $x_n \longrightarrow a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$p(x_n, a) < \delta,$$

tj.

$$x_n \in K(a, \delta; p).$$

Stoga, za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$f(x_n) \in f(K(a, \delta; p)) \subseteq K(f(a), \epsilon; q).$$

Dakle,

$$f(x_n) \in K(f(a), \epsilon; q),$$

to jest

$$q(f(x_n), f(a)) < \epsilon$$

za sve $n \geq n_0$. Prema tome, $f(x_n) \longrightarrow f(a)$. □

Teorem 4.2.5. *Neka su (X, p) i (Y, q) metrički prostori, $a \in X$ te $f : X \to Y$ funkcija koja ima sljedeće svojstvo: Kad god je (x_n) niz u X takav da $x_n \longrightarrow a$, onda $f(x_n) \longrightarrow f(a)$. Tada je f neprekidna u točki a s obzirom na metrike p, q.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. f nije neprekidna u točki a. Tada postoji $\epsilon > 0$ takav da za svaki $\delta > 0$ ne vrijedi implikacija

$$p(x, a) < \delta \Rightarrow q(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

To znači da za svaki $\delta > 0$ postoji $x \in X$ takav da vrijedi

$$p(x, a) < \delta \;\;\&\;\; q(f(x), f(a)) \geq \epsilon.$$

Posebno, za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo $\frac{1}{n} > 0$ pa postoji $x_n \in X$ takav da je

$$p(x_n, a) < \frac{1}{n} \;\;\&\;\; q(f(x_n), f(a)) \geq \epsilon.$$

Iz

$$p(x_n, a) < \frac{1}{n}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$ slijedi $x_n \longrightarrow a$ (lema 2.4.5). Iz pretpostavke teorema slijedi $f(x_n) \longrightarrow f(a)$. Iz

$$q(f(x_n), f(a)) \geq \epsilon$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$ slijedi da je

$$f(x_n) \in K(f(a), \epsilon)^C.$$

Skup $K(f(a), \epsilon)^C$ je zatvoren pa propozicija 2.1.5 povlači da je

$$f(a) \in K(f(a), \epsilon)^C,$$

to jest

$$f(a) \notin K(f(a), \epsilon)$$

što je očito nemoguće.
Zaključak: f je neprekidna u točki a s obzirom na metrike p, q. □

Neka je S skup te $f, g : S \to \mathbb{R}$. Definiramo funkciju $f + g : S \to \mathbb{R}$ sa

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

za svaki $x \in S$. Za $f + g$ kažemo da je zbroj funkcija f i g. Analogno, definiramo produkt $f \cdot g$ funkcija f i g sa

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

za svaki $x \in S$ te funkcije $-f, |f| : S \to \mathbb{R}$ sa

$$(-f)(x) = -f(x),$$

$$|f|(x) = |f(x)|$$

za svaki $x \in S$. Ako je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in S$ definiramo funkciju $\frac{1}{f} : S \to \mathbb{R}$ sa

$$(\frac{1}{f})(x) = \frac{1}{f(x)}$$

za svaki $x \in S$.

Teorem 4.2.6. *Neka je (X, d) metrički prostor, $a \in X$ te $f, g : X \to \mathbb{R}$ funkcije neprekidne u točki a (s obzirom na metriku d i euklidsku metriku na $\mathbb{R}$). Tada su $-f, |f|, f + g, f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ funkcije neprekidne u točki a. Ako je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in X$, onda je $\frac{1}{f} : X \to \mathbb{R}$ neprekidna u točki a.*

Dokaz. Neka je (x_n) niz u X takav da $x_n \longrightarrow a$. Tada $f(x_n) \longrightarrow f(a)$ i $g(x_n) \longrightarrow g(a)$ (propozicija 4.2.4). Iz propozicije 4.2.3 4) slijedi

$$f(x_n) \cdot g(x_n) \longrightarrow f(a) \cdot g(a),$$

to jest

$$(f \cdot g)(x_n) \longrightarrow (f \cdot g)(a).$$

Prema teoremu 4.2.5 funkcija $f \cdot g$ je neprekidna u točki a. Posve analogno dokazujemo ostale tvrdnje teorema. □

Napomena 4.2.7. *Neka su (X, d) i (Z, q) metrički prostori te neka je (Y, p) potprostor od (X, d). Pretpostavimo da je $y_0 \in Y$ te da je $f : X \to Z$ funkcija neprekidna u točki y_0 s obzirom na metrike d i q. Tada je $f|_Y : Y \to Z$ neprekidna funkcija u y_0 s obzirom na metrike p i q. Posebno, ako je f neprekidna, onda je $f|_Y$ neprekidna.*

Primjer 4.2.8. *Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ je neprekidna jer je $f = g \cdot g$, gdje je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$ pa neprekidnost funkcije g povlači (prema teoremu 4.2.6) neprekidnost od f. No, f nije uniformno neprekidna. Pretpostavimo suprotno. Tada za $\epsilon = 1$ postoji $\delta > 0$ takav da*

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon,$$

to jest

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| < 1.$$

Neka su

$$x = \frac{1}{\delta}, \;\; y = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}.$$

Tada je

$$|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

a

$$|x^2 - y^2| = |x - y| \cdot |x + y| = \frac{\delta}{2} \cdot (\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}) = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1.$$

Dakle,

$$|x - y| < \delta,$$

a

$$|x^2 - y^2| > 1$$

što je kontradikcija.

Primjer 4.2.9. *Neka je* $f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. *Tada je* f *neprekidna (s obzirom na euklidske metrike). Zašto?*

Neka je $g : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$. *Tadda je* g *neprekidna (napomena 4.2.7) pa iz* $f = \frac{1}{g}$ *i teorema 4.2.6 slijedi i neprekidnost od* f. *Tvrdimo da* f *nije uniformno neprekidna. Pretpostavimo suprotno, tada postoji* $\delta > 0$ *takav da*

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| < 1.$$

Neka su

$$x = \frac{\delta}{1 + \delta}, \quad y = \frac{\delta}{1 + 2\delta}.$$

Tada su $x, y \in \langle 0, 1\rangle$. *Imamo*

$$|x - y| = |\frac{\delta}{1 + \delta} - \frac{\delta}{1 + 2\delta}| = \delta|\frac{\delta}{1 + \delta} \cdot \frac{1}{1 + 2\delta}| < \delta,$$

a

$$|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = |\frac{1 + \delta}{\delta} - \frac{1 + 2\delta}{\delta}| = \frac{|-\delta|}{\delta} = 1.$$

Dakle,

$$|x - y| < \delta,$$

a

$$|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = 1$$

što je kontradikcija.

Teorem 4.2.10. *Neka su* (X, p) *i* (Y, q) *metrički prostori pri čemu je* (X, p) *kompaktan. Neka je* $f : X \to Y$ *neprekidna funkcija. Tada je* f *uniformno neprekidna.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Tada za svaki $x \in X$ postoji $\delta_x > 0$ takav da

$$p(x, y) < \delta_x \Rightarrow q(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$$

za svaki $y \in Y$. Uočimo sljedeće: ako je $x \in X$ te ako su

$$x_1, x_2 \in K(x, \delta_x),$$

onda je

$$p(x_1, x) < \delta_x$$

i

$$p(x_2, x) < \delta_x$$

pa slijedi

$$q(f(x_1), f(x)) < \frac{\epsilon}{2}$$

i

$$q(f(x_2), f(x)) < \frac{\epsilon}{2}$$

iz čega po nejednakosti trokuta zaključujemo

$$q(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon.$$

Neka je $\mathcal{U} = \{K(x, \delta_x) \mid x \in X\}$. Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od (X, d) pa budući da je (X, d) kompaktan, $\mathcal{U}$ ima Lebesgueov broj (teorem 3.1.8), označimo ga s λ. Pretpostavimo da su $x_1, x_2 \in X$ takvi da je

$$p(x_1, x_2) < \lambda.$$

Tada je

$$\operatorname{diam}\{x_1, x_2\} = p(x_1, x_2) < \lambda$$

pa postoji $x \in X$ takav da je

$$x_1, x_2 \subseteq K(x, \delta_x).$$

Slijedi

$$q(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon.$$

Pokazali smo da za sve $x_1, x_2 \in X$ vrijedi

$$p(x_1, x_2) < \lambda \Rightarrow q(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon.$$

Zaključak: f je uniformno neprekidna. $\square$

4.3 Integrabilnost neprekidnih funkcija

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $f : S \to \mathbb{R}$, neka je $T \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je funkcija f definirana na T ako je $T \subseteq S$.

Ako je funkcija f definirana na T, onda za f kažemo da je omeđena na T ako je $f(T)$ omeđen skup u $\mathbb{R}$. Ako je S domena funkcije f i f omeđena na S, onda kažemo da je f omeđena funkcija.

Pretpostavimo da su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te da je f omeđena na zatvorenom segmentu $[a, b]$. Definiramo brojeve

$$m(f; a, b) = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\},$$

$$M(f; a, b) = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

Uočimo sljedeće: Ako je f omeđena na $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te ako su $c, d \in [a, b]$, $c < d$, onda je f omeđena i na $[c, d]$ te je

$$m(f; a, b) \le m(f; c, d), \tag{4.7}$$

$$M(f; c, d) \le M(f; a, b). \tag{4.8}$$

Zašto je to tako?
Označimo

$$C = \{f(x) \mid x \in [c, d]\}$$

te

$$A = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

Očito je $C \subseteq A$ pa omeđenost od A povlači omeđenost od C. Dakle f je omeđena na $[c, d]$. Iz $C \subseteq A$ slijedi da je $\inf A$ donja međa od C, a to povlači

$$\inf A \le \inf C.$$

Dakle, (4.7) vrijedi. Nadalje, iz $C \subseteq A$ slijedi da je $\sup A$ gornja međa od C, a to povlači

$$\sup C \le \sup A.$$

Dakle, vrijedi i (4.8).

Napomena 4.3.1. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je X skup. Pod konačnim nizom $x_0, \dots, x_n$ u skupu X podrazumijevamo funkciju $\{0, \dots, n\} \to X$ čiju vrijednost za $i \in \{0, \dots, n\}$ označavamo sa x_i.*

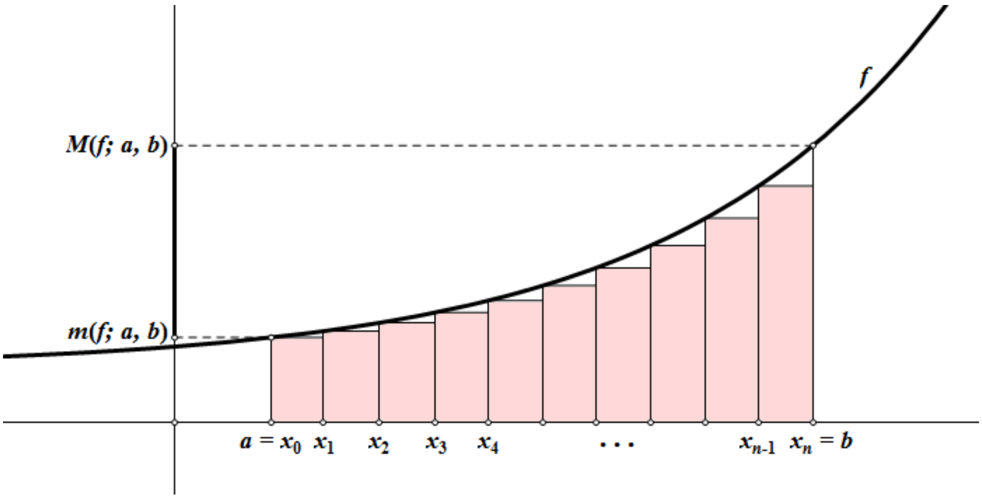
Definicija 4.3.2. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Za konačan niz $x_0, \dots, x_n$ u $\mathbb{R}$ kažemo da je subdivizija segmenta $[a, b]$ ako je $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.*

Neka je f funkcija omeđena na $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Neka je $x_0, \ldots, x_n$ subdivizija od $[a,b]$. Definiramo

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} m(f; x_i, x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i),$$

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} M(f; x_i, x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Za σ kažemo da je donja Darbouxova suma funkcije f na $[a,b]$ (pridružena subdiviziji $x_0, \ldots, x_n$), a za S kažemo da je gornja Darbouxova suma funkcije f na $[a,b]$ (pridružena subdiviziji $x_0, \ldots, x_n$).



Slika 4.1: Donja Darbouxova suma funkcije f na $[a,b]$.

Neka je $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Tada je

$$m(f; a, b) \leq m(f; x_i, x_{i+1}) \leq M(f; x_i, x_{i+1}) \leq M(f; a, b)$$

pa je

$$m(f;a,b)\cdot(x_{i+1}-x_i) \leq m(f;x_i,x_{i+1})\cdot(x_{i+1}-x_i) \leq M(f;x_i,x_{i+1})\cdot(x_{i+1}-x_i) \leq M(f;a,b)\cdot(x_{i+1}-x_i).$$

Stoga je

$$\sum_{i=0}^{n-1} m(f; a, b) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} m(f; x_i, x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} M(f; x_i, x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} M(f; a, b) \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Slijedi

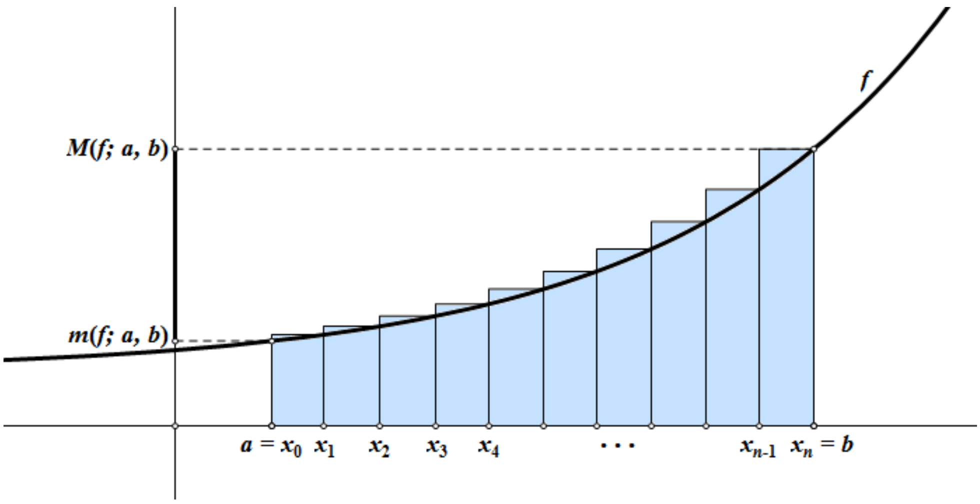
$$m(f; a, b) \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \leq \sigma \leq S \leq M(f; a, b) \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i).$$

Imamo

$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a.$$

Stoga je

$$m(f; a, b) \cdot (b - a) \leq \sigma \leq S \leq M(f; a, b) \cdot (b - a). \tag{4.9}$$



Slika 4.2: Gornja Darbouxova suma funkcije f na $[a, b]$.

Iz ovoga zaključujemo da je skup svih donjih Darbouxovih suma funkcije f na $[a, b]$ omeđen. Supremum ovog skupa označavamo

$$I_*(f; a, b)$$

i nazivamo donji integral funkcije f na $[a, b]$. Isto tako, iz (4.9) slijedi da je skup svih gornjih Darbouxovih suma funkcije f na $[a, b]$ omeđen. Infimum tog skupa označavamo

$$I^*(f; a, b)$$

i nazivamo gornji integral funkcije f na $[a, b]$.

Definicija 4.3.3. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Za funkciju f kažemo da je integrabilna na $[a, b]$ ako je f omeđena na $[a, b]$ te ako je $I_*(f; a, b) = I^*(f; a, b)$. U tom slučaju $I_*(f; a, b)$ (ili $I^*(f; a, b)$) nazivamo imtegral funkcije f na $[a, b]$ i označavamo sa $\int_a^b f$ ili $\int_a^b f(x)dx$. Ako je $[a, b]$ domena funkcije f, onda za f naprosto kažemo da je integrabilna.*

Napomena 4.3.4. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka su f i g funkcije definirane na $[a, b]$ te takve da je*

$$f(x) = g(x)$$

za svaki $x \in [a, b]$. Tada je f integrabilna na $[a, b]$ ako i samo ako je g integrabilna na $[a, b]$ i u tom slučaju je

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Primjer 4.3.5. *Neka je $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 2014, & x = 0. \end{cases}$$

Tada je

$$f([0, 1]) = \{\frac{1}{x} \mid x \in \langle 0, 1]\} \cup \{2014\} = [1, +\infty\rangle.$$

Iz ovoga zaključujemo da f nije omeđena funkcija na $[0, 1]$.

Primjer 4.3.6. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ i $c \in \mathbb{R}$. Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = c$ za svaki $x \in [a, b]$.*

Imamo

$$f([a, b]) = \{c\}$$

pa je očito da je f omeđena funkcija. Neka je $x_0, \dots, x_n$ subdivizija od $[a, b]$. Tada je za svaki $i \in \{0, \dots, n-1\}$

$$m(f; x_i, x_{i+1}) = c,$$
$$M(f; x_i, x_{i+1}) = c.$$

Stoga je

$$\sum_{i=0}^{n-1} m(f; x_i, x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} c \cdot (x_{i+1} - x_i) = c \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = c \cdot (b - a),$$

te analogno

$$\sum_{i=0}^{n-1} M(f; x_i, x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i) = c \cdot (b - a).$$

Iz ovoga zaključujemo sljedeće: Svaka donja Darbouxova suma od f *na* $[a, b]$ *je jednaka* $c \cdot (b - a)$. *Stoga je*

$$I_*(f; a, b) = c \cdot (b - a).$$

Isto tako zaključujemo da je

$$I^*(f; a, b) = c \cdot (b - a).$$

Dakle,

$$I_*(f; a, b) = I^*(f; a, b)$$

pa je funkcija f *integrabilna na* $[a, b]$ *i*

$$\int_a^b f = c \cdot (b - a).$$

Napomena 4.3.7. *Neka su* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *te neka je* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija. Tada je* f *omeđena što slijedi iz korolara 4.1.5. Naime, prema tom korolaru postoje* $x_0, x_1 \in [a, b]$ *takvi da je*

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$$

za svaki $x \in [a, b]$.

Primjer 4.3.8. *Neka je* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana sa*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Tada je

$$f([0, 1]) = \{0, 1\},$$

dakle, f *je omeđena funkcija. No,* f *nije integrabilna. Neka je* $x_0, \ldots, x_n$ *subdivizija od* $[0, 1]$. *Neka je* $i \in \{0, \ldots, n - 1\}$. *Tada je*

$$f([x_i, x_{i+1}]) = \{0, 1\}.$$

Naime, to je posljedica činjenice da između svaka dva realna broja postoji barem jedan racionalan i barem jedan iracionalan broj. Slijedi

$$m(f; x_i, x_{i+1}) = 0$$

i

$$M(f; x_i, x_{i+1}) = 1.$$

Stoga je

$$\sum_{i=0}^{n-1} m(f; x_i, x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i) = 0$$

i

$$\sum_{i=0}^{n-1} M(f; x_i, x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) = 1 - 0 = 1.$$

Iz ovoga zaključujemo sljedeće: Svaka donja Darbouxova suma od f na $[0, 1]$ je 0, a svaka gornja je 1. Stoga je

$$I_*(f; 0, 1) = 0$$

i

$$I^*(f; 0, 1) = 1$$

pa funkcija f nije integrabilna.

Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka su $x_0, \dots, x_n$ i $y_0, \dots, y_m$ subdivizije od $[a, b]$. Za $y_0, \dots, y_m$ kažemo da je profinjenje subdivizije $x_0, \dots, x_n$ ako je

$$\{x_0, \dots, x_n\} \subseteq \{y_0, \dots, y_m\}.$$

Napomena 4.3.9. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je S konačan podskup od $[a, b]$ takav da je $a, b \in S$. Tada postoji subdivizija $x_0, \dots, x_n$ od $[a, b]$ takva da je*

$$\{x_0, \dots, x_n\} = S.$$

Naime, jasno je da elemente od S možemo napisati u obliku $x_0, x_1 \dots, x_n$ gdje je

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$$

i tada je $x_0, \dots, x_n$ tražena subdivizija.

Propozicija 4.3.10. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka su $x_0, \dots, x_n$ i $y_0, \dots, y_m$ subdivizije od $[a, b]$. Tada postoji subdivizija $z_0, \dots, z_k$ od $[a, b]$ takva da je $z_0, \dots, z_k$ profinjenje od $x_0, \dots, x_n$ i $y_0, \dots, y_m$.*

Dokaz. Neka je

$$S = \{x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m\}.$$

Tada je S konačan podskup od $[a, b]$ koji sadrži a i b. Prema prethodnoj napomeni postoji subdivizija $z_0, \dots, z_k$ od $[a, b]$ takva da je

$$\{z_0, \dots, z_k\} = S.$$

Očito je tada

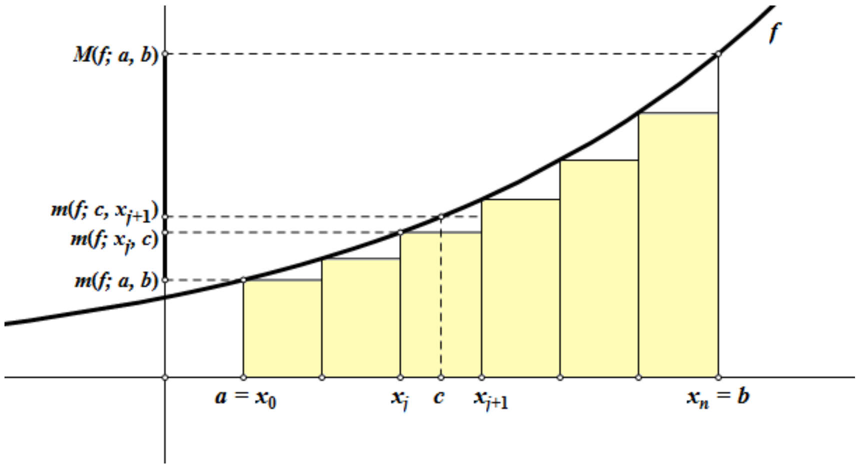
$$\{x_0, \dots, x_n\} \subseteq \{z_0, \dots, z_k\}$$

i

$$\{y_0, \dots, y_m\} \subseteq \{z_0, \dots, z_k\}$$

pa slijedi da je $z_0, \dots, z_k$ tražena subdivizija. □

Propozicija 4.3.11. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je f funkcija omeđena na $[a, b]$. Neka su $x_0, \dots, x_n$ i $y_0, \dots, y_m$ subdivizije segmenta $[a, b]$ takve da je $y_0, \dots, y_m$ profinjenje od $x_0, \dots, x_n$. Neka su σ i S donja i gornja Darbouxova suma od f na $[a, b]$ pridružene subdiviziji $x_0, \dots, x_n$ te σ' i S' donja i gornja Darbouxova suma od f na $[a, b]$ pridružene subdiviziji $y_0, \dots, y_m$. Tada je $\sigma \le \sigma'$ i $S' \le S$.*



Slika 4.3: Skica dokaza propozicije 4.3.11.

Dokaz. Možemo pretpostaviti da je $m = n + 1$, tj. da je $y_0, \dots, y_m$ dobivena od $x_0, \dots, x_n$ dodavanjem samo jedne točke, označimo ju s c. Naime, u općem slučaju možemo od $x_0, \dots, x_n$ do $y_0, \dots, y_m$ doći u konačno mnogo koraka dodavanjem jedne točke. Dakle,

$$(y_0, \dots, y_m) = (x_0, \dots, x_j, c, x_{j+1}, \dots x_n),$$

za neki $j \in \{0, \dots, n\}$. Stoga je

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} m(f; x_i, x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{j-1} m(f; x_i, x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i) + m(f; x_j, x_{j+1}) \cdot (x_{j+1} - x_j) + \sum_{i=j+1}^{n-1} m(f; x_i, x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} m(f; x_j, x_{j+1}) \cdot (x_{j+1} - x_j) &= m(f; x_j, x_{j+1}) \cdot (x_{j+1} - c + c - x_j) \\ &= m(f; x_j, x_{j+1}) \cdot (x_{j+1} - c) + m(f; x_j, x_{j+1}) \cdot (c - x_j) \end{aligned}$$

$$\leq m(f; x_j, c) \cdot (c - x_j) + m(f; c, x_{j+1}) \cdot (x_{j+1} - c).$$

Prema tome,

$$\sigma \leq \sum_{i=0}^{j-1} m(f; x_i, x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i) + m(f; x_j, c) \cdot (c - x_j)$$

$$+m(f; c, x_{j+1}) \cdot (x_{j+1} - c) + \sum_{i=j+1}^{n-1} m(f; x_i, x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \sigma',$$

tj. $\sigma \leq \sigma'$. Posve analogno dobivamo $S' \leq S$. □

Korolar 4.3.12. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je f funkcija omeđena na $[a, b]$. Tada je $I_*(f; a, b) \leq I^*(f; a, b)$.*

Dokaz. Neka je σ donja Darbouxova suma od f te S gornja Darbouxova suma od f. Tada postoje subdivizije $x_0, \ldots, x_n$ i $y_0, \ldots, y_m$ takve da je σ određena sa $x_0, \ldots, x_n$ i S određena sa $y_0, \ldots, y_m$. Prema propoziciji 4.3.10 postoji subdivizija $z_0, \ldots, z_k$ koja profinjuje i $x_0, \ldots, x_n$ i $y_0, \ldots, y_m$. Neka su σ' i S' donja i gornja Darbouxova suma od f određene subdivizijom $z_0, \ldots, z_k$. Iz prethodne propozicije slijedi $\sigma \leq \sigma'$ i $S' \leq S$. Prema (4.9) vrijedi $\sigma' \leq S'$. Dakle,

$$\sigma \leq \sigma' \leq S' \leq S,$$

tj. $\sigma \leq S$. Fiksirajmo neku gornju Darbouxovu sumu S. Prema dokazanom vrijedi $\sigma \leq S$ za svaku donju Darbouxovu sumu σ. Iz ovoga slijedi da je S gornja međa skupa svih donjih Darbouxovih suma od f na $[a, b]$. Stoga je S veći ili jednak od supremuma tog skupa, tj.

$$I_*(f; a, b) \leq S.$$

Ovo znači da je $I_*(f; a, b)$ donja međa svih gornjih Darbouxovih suma od f na $[a, b]$. Stoga je $I_*(f; a, b)$ manji ili jednak od infimuma tog skupa, tj.

$$I_*(f; a, b) \leq I^*(f; a, b).$$

□

Uočimo: Ako je f omeđena na $[a, b]$ te σ donja, a S gornja Darbouxova suma od f na $[a, b]$, onda je $\sigma \leq S$, što slijedi iz prethodnog korolara (zapravo, da je $\sigma \leq S$ vidjeli smo direktno u samom dokazu).

Propozicija 4.3.13. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je f funkcija omeđena na $[a, b]$. Tada je f integrabilna na $[a, b]$ ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$ postoje donja Darbouxova suma σ i gornja Darbouxova suma S od f na $[a, b]$ takve da je $S - \sigma < \epsilon$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f integrabilna na $[a, b]$. Uzmimo $\epsilon > 0$. Iz definicije broja $I_*(f; a, b)$ i propozicije 3.3.11 slijedi

$$I_*(f; a, b) - \frac{\epsilon}{2} < \sigma$$

za neku donju Darbouxovu sumu σ od f. Nadalje, iz definicije broja $I^*(f; a, b)$ i propozicije 3.3.12 slijedi

$$S < I^*(f; a, b) + \frac{\epsilon}{2}$$

za neku gornju Darbouxovu sumu S od f. Dakle,

$$I_*(f; a, b) - \frac{\epsilon}{2} < \sigma \leq S < I^*(f; a, b) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Slijedi

$$S - \sigma < I^*(f; a, b) + \frac{\epsilon}{2} - (I_*(f; a, b) - \frac{\epsilon}{2}).$$

No, kako je f integrabilna, vrijedi

$$I_*(f; a, b) = I^*(f; a, b)$$

pa je

$$S - \sigma < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Obratno, pretpostavimo da za svaki $\epsilon > 0$ postoje donja Darbouxova suma σ i gornja Darbouxova suma S od f na $[a, b]$ takve da je

$$S - \sigma < \epsilon. \tag{4.10}$$

Dokažimo da je f integrabilna na $[a, b]$. Pretpostavimo suprotno. Tada je

$$I_*(f; a, b) \neq I^*(f; a, b)$$

pa iz korolara 4.3.12 slijedi da je

$$I_*(f; a, b) < I^*(f; a, b).$$

Neka je σ donja, a S gornja Darbouxova suma od f na $[a, b]$. Tada je

$$\sigma \leq I_*(f; a, b) < I^*(f; a, b) \leq S$$

pa je

$$0 < I^*(f; a, b) - I_*(f; a, b) \leq S - \sigma.$$

Neka je
$$\epsilon = I^*(f; a, b) - I_*(f; a, b).$$
Tada je $\epsilon > 0$ i
$$\epsilon \leq S - \sigma$$
za svaku donju Darbouxovu sumu σ i svaku gornju Darbouxovu sumu S. Ovo je u kontradikciji s (4.10). Prema tome, f je integrabilna na $[a, b]$. □

Teorem 4.3.14. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je f integrabilna.*

Dokaz. Prema napomeni 4.3.7 funkcija f je omeđena. Neka je $\epsilon > 0$. Želimo dokazati da postoje donja Darbouxova suma σ i gornja Darbouxova suma S of f na $[a, b]$ takve da je $S - \sigma < \epsilon$. Ako to dokažemo, onda će iz prethodne propozicije slijediti da je f integrabilna. Funkcija f je neprekidna s obzirom na p, d gdje su p i d euklidske metrike na $[a, b]$ i $\mathbb{R}$. Budući da je $[a, b]$ kompaktan skup u $\mathbb{R}$, metrički prostor $([a, b], p)$ je kompaktan pa je f uniformno neprekidna (teorem 4.2.10). Stoga postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x, y \in [a, b]$ vrijedi
$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b - a}. \tag{4.11}$$
Pretpostavimo da su $c, d \in [a, b]$ takvi da je $c < d$ i
$$d - c < \delta.$$
Tvrdimo da je tada
$$M(f; c, d) - m(f; c, d) < \frac{\epsilon}{b - a}. \tag{4.12}$$
Prema korolaru 4.1.5 (primjenom na funkciju $f|_{[c,d]}$) postoje $x_0, x_1 \in [c, d]$ takvi da je
$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$$
za svaki $x \in [c, d]$. Iz ovoga zaključujemo da je $f(x_0)$ minimum, a $f(x_1)$ maksimum skupa $\{f(x) \mid x \in [c, d]\}$. Slijedi da je
$$M(f; c, d) = f(x_1)$$
i
$$m(f; c, d) = f(x_0).$$
Uočimo da je
$$|x_1 - x_0| < \delta.$$
Naime, ako je
$$c \leq x_0 \leq x_1 \leq d,$$

onda je

$$|x_1 - x_0| = x_1 - x_0 \leq d - c < \delta,$$

a ako je

$$c \leq x_1 \leq x_0 \leq d,$$

onda je

$$|x_1 - x_0| = x_0 - x_1 \leq d - c < \delta.$$

Sada $|x_1 - x_0| < \delta$ i (4.11) povlače

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Stoga je

$$M(f; c, d) - m(f; c, d) = f(x_1) - f(x_2) < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Time je (4.12) dokazano. Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\frac{b-a}{n} < \delta.$$

Definirajmo subdiviziju $x_0, \ldots, x_n$ od $[a, b]$ sa

$$x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}, \quad i \in \{0, \ldots, n\}.$$

Neka je $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Tada je

$$x_{i+1} - x_i = a + (i+1) \cdot \frac{b-a}{n} - a - i \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} < \delta.$$

Prema (4.12) tada vrijedi

$$M(f; x_i, x_{i+1}) - m(f; x_i, x_{i+1}) < \frac{\epsilon}{b-a}. \tag{4.13}$$

Neka je

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} m(f; x_i, x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

i

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} M(f; x_i, x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Tada su σ i S donja i gornja Darbouxova suma od f te koristeći (4.13) dobivamo

$$S - \sigma = \sum_{i=0}^{n-1} [M(f; x_i, x_{i+1}) - m(f; x_i, x_{i+1})] \cdot (x_{i+1} - x_i) < \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\epsilon}{b-a} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

$$= \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = \frac{\epsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \epsilon.$$

Dakle,

$$S - \sigma < \epsilon.$$

Time je dokazano da je f integrabilna. □

Poglavlje 5

Lokalna kompaktnost

5.1 Svojstva lokalne kompaktnosti

Definicija 5.1.1. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor te* $A \subseteq X$. *Definiramo* $\mathrm{Int}(A) = \displaystyle\bigcup_{U \text{ otv.}, \, U \subseteq A} U$. *Za* $\mathrm{Int}(A)$ *kažemo da je interior skupa* A *u topološkom prostoru* $(X, \mathcal{T})$.

Uočimo sljedeće: $\mathrm{Int}(A)$ je otvoren skup i $\mathrm{Int}(A) \subseteq A$. Nadalje, ako je U otvoren skup takav da je $U \subseteq A$, onda je

$$U \subseteq \mathrm{Int}(A).$$

Drugim riječima, $\mathrm{Int}(A)$ je naveći (u smislu inkluzije) otvoren skup sadržan u A.

Primijetimo da vrijedi sljedeće: Ako su $A, B \subseteq X$ takvi da je $A \subseteq B$, onda je

$$\mathrm{Int}(A) \subseteq A \subseteq B,$$

tj. $\mathrm{Int}(A) \subseteq B$ pa je

$$\mathrm{Int}(A) \subseteq \mathrm{Int}(B).$$

Definicija 5.1.2. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor te* $A \subseteq X$. *Definiramo* $\mathrm{Cl}(A) = \displaystyle\bigcap_{F \text{ zatv.}, \, A \subseteq F} F$. *Za* $\mathrm{Cl}(A)$ *kažemo da je zatvarač skupa* A *u topološkom prostoru* $(X, \mathcal{T})$.

Uočimo da je $\mathrm{Cl}(A)$ zatvoren skup te da je $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$. Nadalje, ako je F zatvoren skup takav da je $A \subseteq F$, onda je

$$\mathrm{Cl}(A) \subseteq F.$$

Drugim riječima, $\mathrm{Cl}(A)$ je najmanji zatvoren skup koji sadrži A.

Ako su $A, B \subseteq X$ takvi da je $A \subseteq B$, onda je

$$A \subseteq B \subseteq \mathrm{Cl}(B),$$

tj. $A \subseteq \mathrm{Cl}(B)$ pa je

$$\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(B).$$

Definicija 5.1.3. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Za $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je lokalno kompaktan topološki prostor ako za svaki $x \in X$ postoje otvoren skup U i kompaktan skup K takvi da je $x \in U \subseteq K$.*

Definicija 5.1.4. *Za metrički prostor (X, d) kažemo da je lokalno kompaktan ako je pripadni topološki prostor $(X, \mathcal{T}_d)$ lokalno kompaktan.*

Uočimo da je svaki kompaktan topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ ujedno i lokalno kompaktan (za $x \in X$ uzmemo $U = X$ i $K = X$). Obrat općenito ne vrijedi.

Primjer 5.1.5. *Neka je X neprazan skup te d diskretna metrika na X. Tada je (X, d) lokalno kompaktan metrički prostor.*

Naime, ako je $x \in X$, neka je

$$U = K(x, \frac{1}{2})$$

i

$$K = \{x\}.$$

Tada je U otvoren skup, K kompaktan te

$$U = \{x\} \subseteq K.$$

No, (X, d) nije kompaktan metrički prostor ako je X beskonačan (primjer 3.2.5).

Propozicija 5.1.6. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov topološki prostor. Tada je $(X, \mathcal{T})$ lokalno kompaktan ako i samo ako svaka točka $x \in X$ ima otvorenu okolinu U takva da je $\mathrm{Cl}(U)$ kompaktan skup.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $(X, \mathcal{T})$ lokalno kompaktan topološki prostor. Neka je $x \in X$. Tada postoje otvoren skup U i kompaktan skup K takvi da je

$$x \in U \subseteq K.$$

Iz teorema 1.3.21 slijedi da je K zatvoren skup. Sada $U \subseteq K$ povlači da je

$$\mathrm{Cl}(U) \subseteq K.$$

Iz propozicije 3.2.9 slijedi da je $\mathrm{Cl}(U)$ kompaktan skup.

Obratno, pretpostavimo da svaka točka $x \in X$ ima otvorenu okolinu U takva da je $\mathrm{Cl}(U)$ kompaktan skup. Tada je očito $(X, \mathcal{T})$ lokalno kompaktan (za K uzmemo $\mathrm{Cl}(U)$). $\square$

Propozicija 5.1.7. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Tada je $(X, \mathcal{T})$ lokalno kompaktan ako i samo ako za svaki $x \in X$ postoji kompaktan skup K takav da je $x \in \mathrm{Int}(K)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $(X, \mathcal{T})$ lokalno kompaktan. Neka je $x \in X$. Tada postoje otvoren skup U i kompaktan skup K takvi da je

$$x \in U \subseteq K.$$

Budući da je U otvoren skup vrijedi da je

$$U \subseteq \mathrm{Int}(K).$$

Dakle, $x \in \mathrm{Int}(K)$.

Obratno, pretpostavimo da za svaki $x \in X$ postoji kompaktan skup K takav da je $x \in \mathrm{Int}(K)$. Tada je $(X, \mathcal{T})$ očito lokalno kompaktan topološki prostor (za U uzmemo da je $\mathrm{Int}(K)$). □

Propozicija 5.1.8. *Ako je (X, d) metrički prostor u kojem je svaka zatvorena kugla kompaktan skup, onda je (X, d) lokalno kompaktan.*

Dokaz. Uzmimo $x \in X$. Odaberimo $r > 0$ (npr. $r = 1$). Tada je $K(x, r)$ otvorena okolina točke x sadržana u kompaktnom skupu $\overline{K}(x, r)$. Time je tvrdnja dokazana. □

Korolar 5.1.9. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Tada je $(\mathbb{R}^n, d)$ lokalno kompaktan metrički prostor.*

Dokaz. Svaka zatvorena kugla u $\mathbb{R}^n$ je kompaktan skup (jer je zatvorena i omeđena). Tvrdnja sada slijedi iz prethodne propozicije. □

5.2 Metrika d_∞

Neka je I^∞ skup svih nizova u $[0, 1]$. Definiramo funkciju $d_\infty : I^\infty \times I^\infty \to \mathbb{R}$ sa

$$d_\infty((x_i), (y_i)) = \sup\{|x_i - y_i| \mid i \in \mathbb{N}\}$$

(uočimo da je skup $\{|x_i - y_i| \mid i \in \mathbb{N}\}$ odozgo omeđen jer za svaki $i \in \mathbb{N}$ iz $x_i, y_i \in [0, 1]$ slijedi $|x_i - y_i| \leq 1$). Tvrdimo da je d_∞ metrika na I^∞. Provjeravamo svojstva:

1) Očito je

$$d_\infty((x_i), (y_i)) \geq 0$$

za sve $(x_i), (y_i) \in I^\infty$. Ako je $(x_i) = (y_i)$, onda je očito

$$d_\infty((x_i), (y_i)) = 0.$$

Obratno, ako je
$$d_\infty((x_i),(y_i)) = 0,$$
tada je
$$|x_i - y_i| \leq 0$$
za svaki $i \in \mathbb{N}$ pa slijedi $x_i = y_i$ za svaki $i \in \mathbb{N}$, tj. $(x_i) = (y_i)$.

2) Očito je
$$d_\infty((x_i),(y_i)) = d_\infty((y_i),(x_i)).$$

3) Neka su $(x_i),(y_i),(z_i) \in I^\infty$. Neka je $j \in \mathbb{N}$. Tada je
$$|x_j - y_j| \leq |x_j - z_j| + |z_j - y_j| \leq d_\infty((x_i),(z_i)) + d_\infty((z_i),(y_i)).$$
Ovo znači da je $d_\infty((x_i),(z_i)) + d_\infty((z_i),(y_i))$ gornja međa od $\{|x_i - y_i| \mid i \in \mathbb{N}\}$. Stoga je
$$d_\infty((x_i),(y_i)) \leq d_\infty((x_i),(z_i)) + d_\infty((z_i),(y_i)).$$

Zaključak: d_∞ je metrika na I^∞.

Propozicija 5.2.1. *Metrički prostor (I^∞, d_∞) nije lokalno kompaktan.*

Dokaz. Neka je $x = (x_i)$ niz u $[0,1]$ definiran sa $x_i = 0$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je (I^∞, d_∞) lokalno kompaktan. Tada postoje otvoren skup U i kompaktan skup K takvi da je
$$x \in U \subseteq K.$$
Tada postoji $r > 0$ takav da je
$$K(x,r) \subseteq U.$$
Možemo pretpostaviti da je $r \leq 1$. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo niz $y_n = (y_n^i)_{i \in \mathbb{N}}$ u $[0,1]$ sa
$$y_n^i = \begin{cases} \frac{r}{2}, & i = n \\ 0, & i \neq n. \end{cases}$$
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$d_\infty(y_n, x) = \frac{r}{2} < r$$
pa je
$$y_n \in K(x,r) \subseteq U \subseteq K.$$
Dakle, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je niz u K. Budući da je K kompaktan skup u (I^∞, d_∞) postoji strogo rastuća funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(y_{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentan niz u (I^∞, d_∞) (zapravo konvergentan u K). Stoga je $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u (I^∞, d_∞) pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je
$$d_\infty(y_{a_n}, y_{a_m}) < \frac{r}{2} \tag{5.1}$$

za sve $m, n \geq n_0$. Odaberimo $m, n \geq n_0$ takve da je $n < m$. Neka je $p = a_n$ i $q = a_m$. Tada je $p < q$ pa iz definicije niza $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ slijedi

$$d_\infty(y_p, y_q) = \frac{r}{2}.$$

No, prema (5.1) vrijedi

$$d_\infty(y_p, y_q) < \frac{r}{2}.$$

Kontradikcija. Dakle, (I^∞, d_∞) nije lokalno kompaktan metrički prostor. □

Poglavlje 6

Hilbertova kocka

6.1 Kompaktnost Hilbertove kocke

Definicija 6.1.1. *Neka je $\mathcal{H}$ skup svih $(x_i) \in I^\infty$ takvih da je $x_i \leq \frac{1}{i}$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Za $\mathcal{H}$ kažemo da je Hilbertova kocka. Metriku $d_\infty|_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$ na $\mathcal{H}$ označavamo također sa d_∞.*

Teorem 6.1.2. *Metrički prostor $(\mathcal{H}, d_\infty)$ je kompaktan.*

Dokaz. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{H}$. Za $n \in \mathbb{N}$ neka je

$$x_n = (x_n^i)_{i\in\mathbb{N}},$$

tj.

$$x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^i, \ldots).$$

Promotrimo niz $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$. To je niz u $[0, 1]$ pa budući da je $[0, 1]$ kompaktan, postoje strogo rastuća funkcija $a_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $b_1 \in [0, 1]$ takvi da

$$x^1_{a_1(n)} \longrightarrow b_1.$$

Pretpostavimo da je $k \in \mathbb{N}$ te da je $a_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija te

$$b_1 \in [0, 1], b_2 \in [0, \frac{1}{2}], \ldots, b_k \in [0, \frac{1}{k}]$$

takvi da je

$$(x^i_{a_k(n)})_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow b_i \text{ za svaki } i \in \{1, \ldots, k\}. \tag{6.1}$$

Promotrimo niz $(x_n^{k+1})_{n\in\mathbb{N}}$ u $[0, \frac{1}{k+1}]$ te njegov podniz $(x^{k+1}_{a_k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Budući da je $[0, \frac{1}{k+1}]$ kompaktan, postoji strogo rastuća funkcija $c : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ te $b_{k+1} \in [0, \frac{1}{k+1}]$ takvi da

$$(x^{k+1}_{a_k(c(n))})_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow b_{k+1}. \tag{6.2}$$

Iz propozicije 2.4.4 i (6.1) slijedi da

$$(x^i_{a_k(c(n))})_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow b_i, \text{ za svaki } i \in \{1,\dots,k\}. \tag{6.3}$$

Definiramo

$$a_{k+1} = a_k \circ c.$$

Tada je a_{k+1} strogo rastuća funkcija te iz (6.2) i (6.3) slijedi

$$(x^i_{a_{k+1}(n)})_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow b_i$$

za svaki $i \in \{1,\dots,k+1\}$. Na ovaj način smo induktivno konstruirali strogo rastuće funkcije $a_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ te brojeve b_k, $k \in \mathbb{N}$ pri čemu je $b_k \in [0, \frac{1}{k}]$, takve da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi (6.1). Neka je

$$b = (b_1,\dots,b_k,\dots).$$

Tada je $b \in \mathcal{H}$. Tvrdimo da je b gomilište niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Neka je $\epsilon > 0$ te $N \in \mathbb{N}$. Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\frac{1}{k} \le \frac{\epsilon}{2}.$$

Budući da vrijedi (6.1), za svaki $i \in \{1,\dots,k\}$ postoji $n_i \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \ge n_i$ vrijedi

$$|x^i_{a_k(n)} - b_i| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Neka je $n_0 = \max\{n_1,\dots,n_k\}$. Neka je $n \ge n_0$. Tada vrijedi

$$|x^i_{a_k(n)} - b_i| < \frac{\epsilon}{2} \tag{6.4}$$

za svaki $i \in \{1,\dots,k\}$. No, (6.4) vrijedi i za $i > k$. Naime, ako je $i > k$, onda je $x^i_{a_k(n)}, b_i \in [0, \frac{1}{i}]$ pa je

$$|x^i_{a_k(n)} - b_i| \le \frac{1}{i} < \frac{1}{k} \le \frac{\epsilon}{2}.$$

Dakle, (6.4) vrijedi i za $i > k$, tj. (6.4) vrijedi za svaki $i \in \mathbb{N}$. Stoga je

$$\sup\{|x^i_{a_k(n)} - b_i| \mid i \in \mathbb{N}\} \le \frac{\epsilon}{2},$$

tj.

$$d_\infty(x_{a_k(n)}, b) \le \frac{\epsilon}{2}.$$

Prema tome

$$d_\infty(x_{a_k(n)}, b) < \epsilon \tag{6.5}$$

za svaki $n \geq n_0$. Neka je
$$n = \max\{n_0, N\}.$$
Tada je $n \geq n_0$ pa vrijedi (6.5). Nadalje, imamo
$$N \leq n \leq a_k(n),$$
tj.
$$a_k(n) \geq N.$$
Dakle, za svaki $\epsilon > 0$ i za svaki $N \in \mathbb{N}$ postoji $l \geq N$ takav da je
$$d_\infty(x_l, b) < \epsilon.$$
Ovim smo dokazali da je b gomilište niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Prema tome, svaki niz u $(\mathcal{H}, d_\infty)$ ima gomilište što znači da je $(\mathcal{H}, d_\infty)$ sekvencijalno kompaktan pa samim tim i kompaktan. □

6.2 Homeomorfizam metričkih i topološki prostora

Definicija 6.2.1. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te $f : X \to Y$ bijekcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$. Za funkciju f kažemo da je homeomorfizam topoloških prostora $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ ako je $f^{-1} : Y \to X$ neprekidna s obzirom na $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$.*

Za topološke prostore $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ kažemo da su homeomorfni i pišemo
$$(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{S})$$
ako postoji homeomorfizam topoloških prostora $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$.

Definicija 6.2.2. *Neka su (X, p) i (Y, q) metrički prostori. Za funkciju $f : X \to Y$ kažemo da je homeomorfizam metričkih prostora (X, p) i (Y, q) ako je f homeomorfizam pripadnih topoloških prostora $(X, \mathcal{T}_p)$ i $(Y, \mathcal{T}_q)$. Dakle, $f : X \to Y$ je homeomorfizam metričkih prostora (X, p) i (Y, q) ako i samo ako je f bijekcija neprekidna s obzirom na p i q i $f^{-1} : Y \to X$ neprekidna s obzirom na q, p.*

Za metričke prostore (X, p) i (Y, q) kažemo da su homeomorfni i pišemo
$$(X, p) \cong (Y, q)$$
ako postoji barem jedan homeomorfizam metričkih prostora (X, p) i (Y, q).

Naravno, vrijedi: $(X, p) \cong (Y, q)$ ako i samo ako $(X, \mathcal{T}_p) \cong (Y, \mathcal{T}_q)$.

Propozicija 6.2.3. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te $f : X \to Y$ homeomorfizam. Tada je $f^{-1} : Y \to X$ homeomorfizam topoloških prostora $(Y, \mathcal{S})$ i $(X, \mathcal{T})$. Nadalje, ako je $(Z, \mathcal{V})$ topološki prostor te $g : Y \to Z$ homeomorfizam topoloških prostora $(Y, \mathcal{S})$ i $(Z, \mathcal{V})$, onda je $g \circ f : X \to Z$ homeomorfizam topoloških prostora $(X, \mathcal{T})$ i $(Z, \mathcal{V})$.*

Dokaz. Očito je f^{-1} homeomorfizam. Budući da su f i g neprekidne, iz propozicije 1.4.4 slijedi da je $g \circ f$ neprekidna. Nadalje, jasno je da je $g \circ f$ bijekcija te da vrijedi

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

pa je $(g \circ f)^{-1}$ neprekidna kao kompozicija neprekidnih funkcija. Dakle, $g \circ f$ je homeomorfizam. □

Korolar 6.2.4. *Neka su $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ i $(Z, \mathcal{V})$ topološki prostori. Tada vrijedi:*

1) $(X, \mathcal{T}) \cong (X, \mathcal{T})$;

2) Ako je $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{S})$, onda je $(Y, \mathcal{S}) \cong (X, \mathcal{T})$;

3) Ako je $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{S})$ i $(Y, \mathcal{S}) \cong (Z, \mathcal{V})$, onda je $(X, \mathcal{T}) \cong (Z, \mathcal{V})$.

Dokaz. Očito je $id_x : X \to X$ homeomorfizam topoloških prostora $(X, \mathcal{T})$, $(X, \mathcal{T})$. Iz ovoga slijedi tvrdnja 1). Tvrdnje 2) i 3) slijede direktno iz prethodne propozicije. □

Primjer 6.2.5. *Vrijedi $\langle 0, 1\rangle \cong \langle 0, 2\rangle$ (ovdje podrazumjevamo da se radi o metričkim prostorima s euklidskom metrikom). Naime, funkcija $f : \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 2\rangle$ definirana sa*

$$f(x) = 2x$$

je homeomorfizam jer je očito bijektivna i neprekidna, a njen inverz $f^{-1} : \langle 0, 2\rangle \to \langle 0, 1\rangle$,

$$f(y) = \frac{y}{2}$$

je također očito neprekidna funkcija. Isto tako imamo

$$\langle 0, 1\rangle \cong \langle 5, 6\rangle$$

jer je $f : \langle 0, 1\rangle \to \langle 5, 6\rangle$,

$$f(x) = x + 5$$

homeomorfizam. Nadalje, ako su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, onda je

$$\langle a, b\rangle \cong \langle 0, b - a\rangle$$

(homeomorfizam je dan sa $x \mapsto x - a$), a

$$\langle 0, 1\rangle \cong \langle 0, b - a\rangle$$

(homeomorfizam je dan sa $x \mapsto (b - a)x$). Stoga je

$$\langle 0, 1\rangle \cong \langle a, b\rangle.$$

Posve analogno dobivamo da je

$$[0, 1] \cong [a, b]$$

za sve $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Propozicija 6.2.6. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ homeomorfni topološki prostori. Tada je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan ako i samo ako je $(Y, \mathcal{S})$ kompaktan.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan. Neka je $f : X \to Y$ homeomorfizam topoloških prostora $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$. Tada je f neprekidna bijekcija pa je f i surjekcija. Iz propozicije 1.4.8 slijedi da je $(Y, \mathcal{S})$ kompaktan topološki prostor. Analogno dobivamo da kompaktnost od $(Y, \mathcal{S})$ povlači kompaktnost od $(X, \mathcal{T})$. □

Primjer 6.2.7. *Metrički prostori $(\langle 0, 1\rangle, p)$ i $([0, 1], q)$ nisu homeomorfni (p i q su euklidske metrike na $\langle 0, 1\rangle$ i $[0, 1]$). To slijedi iz prethodne propozicije budući da je $[0, 1]$ kompaktan skup u $\mathbb{R}$, a $\langle 0, 1\rangle$ nije.*

Primjer 6.2.8. *Neka je X skup koji ima barem dva elementa. Tada je $id_x : X \to X$ bijekcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{P}(X)$ i $\{\emptyset, X\}$. No, id_x nije homeomorfizam topoloških prostora $(X, \mathcal{P}(X))$ i $(X, \{\emptyset, X\})$. Naime, $id_x^{-1} : X \to X$ nije neprekidna funkcija s obzirom na $\{\emptyset, X\}$ i $\mathcal{P}(X)$ jer je*

$$id_x^{-1} = id_x$$

pa ako uzmemo neki $S \subseteq X$ takav da je $S \neq \emptyset$ i $S \neq X$ (takav postoji jer X ima barem dva elementa), onda je $S \in \mathcal{P}(X)$ i

$$id_x^{\leftarrow}(S) = S,$$

a $S \notin \{\emptyset, X\}$.

Prethodni primjer pokazuje da neprekidna bijekcija ne mora biti homeomorfizam.

Teorem 6.2.9. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ neprekidna bijekcija (s obzirom na $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$). Pretpostavimo da je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan te da je $(Y, \mathcal{S})$ Hausdorffov topološki prostor. Tada je f homeomorfizam topoloških prostora $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$.*

Dokaz. Treba dokazati da je $f^{-1} : Y \to X$ neprekidna s obzirom na $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$. Prema propoziciji 1.4.6 dovoljno je dokazati da je $(f^{-1})^{\leftarrow}(F)$ zatvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$ za svaki zatvoren skup F u $(X, \mathcal{T})$. Tvrdimo da za svaki $S \subseteq X$ vrijedi

$$(f^{-1})^{\leftarrow}(S) = f(S). \tag{6.6}$$

Ovo slijedi iz sljedećih ekvivalencija:

$$y \in (f^{-1})^{\leftarrow}(S) \Leftrightarrow f^{-1}(y) \in S$$

$$\Leftrightarrow \text{postoji } x \in S \text{ takav da je } x = f^{-1}(y)$$

$$\Leftrightarrow \text{postoji } x \in S \text{ takav da je } f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow y \in f(S).$$

Stoga je prema (6.6) dovoljno dokazati da je za svaki zatvoren skup F u $(X, \mathcal{T})$ skup $f(F)$ zatvoren u $(Y, \mathcal{S})$. Neka je F zatvoren u $(X, \mathcal{T})$. Tada je F kompaktan u $(X, \mathcal{T})$ (propozicija 1.3.14). Budući da je f neprekidna, $f(F)$ je kompaktan u $(Y, \mathcal{S})$. Iz teorema 1.3.21 slijedi da je $f(F)$ zatvoren u $(Y, \mathcal{S})$.
Zaključak: f je homeomorfizam topoloških prostora $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$. □

Korolar 6.2.10. *Neka su (X, p) i (Y, q) metrički prostori te neka je $f : X \to Y$ bijekcija neprekidna s obzirom na metrike p, q. Pretpostavimo da je (X, p) kompaktan. Tada je f homeomorfizam.*

Dokaz. Funkcija f je neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}_p$ i $\mathcal{T}_q$, $(X, \mathcal{T}_p)$ je kompaktan topološki prostor, a $(Y, \mathcal{T}_q)$ je Hausdorffov (jer je metrizabilan). Prema prethodnom teoremu f je homeomorfizam topoloških prostora $(X, \mathcal{T}_p)$ i $(Y, \mathcal{T}_q)$. Time je tvrdnja korolara dokazana. □

6.3 Projekcije

Za $j \in \mathbb{N}$ neka je $p_j : I^\infty \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$p_j((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) = x_j.$$

Za p_j kažemo da je projekcija od I^∞ na j-tu koordinatu.

Propozicija 6.3.1. *Za svaki $j \in \mathbb{N}$ funkcija p_j je neprekidna (s obzirom na metriku d_∞ i euklidsku metriku na $\mathbb{R}$).*

Dokaz. Neka je $j \in \mathbb{N}$. Neka su $(x_i), (y_i) \in I^\infty$. Imamo

$$|p_j((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) - p_j((y_i)_{i\in\mathbb{N}})| = |x_j - y_j| \leq d_\infty((x_i), (y_i)).$$

Dakle,

$$|p_j(a) - p_j(b)| \leq d_\infty(a, b) \tag{6.7}$$

za sve $a, b \in I^\infty$. Tvrdimo da je p_j uniformno neprekidna funkcija. Neka je $\epsilon > 0$. Želimo naći $\delta > 0$ takav da za sve $a, b \in I^\infty$ takve da je

$$d_\infty(a, b) < \delta$$

vrijedi

$$|p_j(a) - p_j(b)| < \epsilon.$$

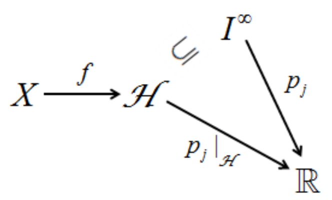
No ovo, prema (6.7), vrijedi za $\delta = \epsilon$ (ili za svaki $\delta \in \langle 0, \epsilon]$). Dakle, p_j je uniformno neprekidna pa je i neprekidna. $\square$

Korolar 6.3.2. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $f : X \to \mathcal{H}$ funkcija neprekidna s obzirom da metrike d, d_∞. Tada je $p_j \circ f : X \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija za svaki $j \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Neka je $j \in \mathbb{N}$. Iz prethodne propozicije slijedi da je $p_j|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Imamo

$$p_j \circ f = p_j|_{\mathcal{H}} \circ f$$

pa je $p_j \circ f$ neprekidna kao kompozicija neprekidnih funkcija. $\square$



Slika 6.1: f neprekidna $\Rightarrow p_j \circ f$ neprekidna.

Teorem 6.3.3. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $f : X \to \mathcal{H}$ funkcija takva da je $p_j \circ f : X \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija za svaki $j \in \mathbb{N}$. Tada je f neprekidna funkcija.*

Dokaz. Uočimo da za svaki $x \in X$ vrijedi

$$f(x) = (p_1(f(x)), p_2(f(x)), \dots, p_j(f(x)), \dots).$$

Za $j \in \mathbb{N}$ definirajmo funkciju

$$f_j = p_j \circ f.$$

Dakle, za svaki $j \in \mathbb{N}$, $f_j : X \to \mathbb{R}$ je neprekidna funkcija te vrijedi

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_j(x), \dots).$$

Neka je $x_0 \in X$. Neka je $\epsilon > 0$. Odaberimo $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Za svaki $j \in \{1, \dots, k\}$, zbog neprekidnosti funkcije f_j, postoji $\delta_j > 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi sljedeće

$$d(x, x_0) < \delta_j \Rightarrow |f_j(x) - f_j(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Neka je

$$\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_k\}.$$

Tada za svaki $x \in X$ takav da je

$$d(x, x_0) < \delta$$

vrijedi

$$|f_j(x) - f_j(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} \tag{6.8}$$

za svaki $j \in \{1, \dots, k\}$. No, (6.8) vrijedi i za sve $j > k$ (i za svaki $x \in X$). Naime, tada vrijedi

$$f_j(x), f_j(x_0) \in p_j(\mathcal{H}) \subseteq [0, \frac{1}{j}]$$

pa je

$$|f_j(x) - f_j(x_0)| \leq \frac{1}{j} < \frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dakle, za svaki $x \in X$ takav da je

$$d(x, x_0) < \delta$$

vrijedi (6.8) za svaki $j \in \mathbb{N}$ što povlači

$$d_\infty(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\epsilon}{2}$$

pa je

$$d_\infty(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Prema tome, f je neprekidna u x_0.
Zaključak: Funkcija f je neprekidna. $\square$

Bibliografija

[1] C. O. Christenson, W. L. Voxman, *Aspects of Topology*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.

[2] W. A. Sutherland, *Introduction to metric and topological spaces*. Oxford University Press, 1975.

[3] S. B. Nadler, *Continuum theory*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučava se kompaktnost u raznim situacijama i oblicima. Rad je podijeljen na šest poglavlja, a svako poglavlje se sastoji od nekoliko potpoglavlja. U prvom poglavlju upoznajemo metričke i topološke prostore, njihova svojstva te sam pojam kompaktnosti u metričkom i topološkom prosotoru, neprekidnu funkciju te njenu vezu sa kompaktnošću. U drugom poglavlju proučavamo konvergentne nizove i podnizove. Definiramo gomilište niza i potpuno omeđen metrički prostor te istražujemo njihovu vezu sa kompaktnošću. U trećem poglavlju otkrivamo razne vrste kompaktnosti kao što su sekvencijalna kompaktnost, kompaktnost potprostora te kompaktnost u $\mathbb{R}^n$. U tom poglavlju također definiramo i potpun metrički prostor. U četvrtom poglavlju bavimo se primjenom kompaktnosti te dokazujemo da neprekidna funkcija na segmentu mora biti integrabilna. U petom poglavlju definiramo lokalnu kompaktnost i metrički prostor (I^∞, d_∞). U zadnjem, šestom poglavlju, istražujemo kompaktnost Hilbertove kocke te proučavamo homeomorfizam metričkih i topoloških prostora.

Summary

This thesis examines the compactness in a variety of situations and forms. Thesis is divided into six chapters, and each chapter consists of several subsections. In the first chapter we introduce metric and topological spaces, their properties, and the very notion of compactness in metric and topological spaces, continuous function and its relationship with compactness. In the second chapter we study the convergent sequences and subsequences. We define accumulation points of sequences and totally bounded metric spaces and investigate their relationship with compactness. In the third chapter we find various types of compactness such as sequential compactness, compactness of subspaces and compactness in $\mathbb{R}^n$. In this chapter, we also define a complete metric space. The fourth chapter deals with the application of the compactness and prove that a continuous function on a segment must be integrable. In the fifth chapter, we define a local compactness and metric space (I^∞, d_∞). In the final, sixth chapter, we investigate compactness of Hilbert cube, and study a homeomorphism of metric and topological spaces.

Životopis

Zovem se Marija Đukić i rođena sam u Slavonskom Brodu dana 20. prosinca 1990. godine. Živim u selu istočno od Slavonskog Broda zvanom Ruščica, gdje sam i pohađala prva četiri razreda u Osnovnoj školi Vladimira Nazora. Ostatak osnovnoškolskog obrazovanja nastavila sam i završila u istoimenoj školi u Slavonskom Brodu. Tamo sam završila i srednju školu Gimnaziju "Matija Mesić", smjer: prirodoslovno - matematički. Trenutno sam studentica Prirodoslovno - matematičkog fakulteta u Zagrebu na matematičkom odsjeku, nastavničko usmjerenje, kojeg sam upisala u rujnu 2009. godine.