Kontinuumi

Friganović, Barbara

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Barbara Friganović

KONTINUUMI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, rujan 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Zahvaljujem se mentoru doc.dr.sc. Zvonku Iljazoviću na vodstvu, posvećenom vremenu, strpljenju i podršci tijekom izrade ovog diplomskog rada.
Rad posvećujem svojoj obitelji: mami Zlatki, tati Josipu, sestri Mirti i bratu Vinku te dečku Josipu.

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu istražujemo svojstva kontinuuma, odnosno povezanih i kompaktnih metričkih prostora. Rad je organiziran u tri cjeline.

U prvoj se bavimo općenito metričkim prostorima i metrikama te topološkim prostorima i topologijama, upoznajemo se s pojmom otvorenog skupa i neprekidnosti funkcija između dvaju metričkih, odnosno topoloških prostora.

U drugoj cjelini se upoznajemo s pojmovima kompaktnog metričkog i topološkog prostora te kompaktnog skupa u metričkom, odnosno topološkom prostoru.

U trećoj cjelini se upoznajemo s pojmom povezanosti, definiramo pojam baze topologije, Hausdorffovog prostora te konačno i putevima povezanog topološkog prostora.

Poglavlje 1

Metrički i topološki prostori

1.1 Metrika i metrički prostor

Neka je X neprazan skup te neka je $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija sa sljedećim svojstvima:

1. $d(x, y) \geqslant 0$ za sve $x, y \in X$
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$
4. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$ (nejednakost trokuta)

Tada za d kažemo da je metrika na skupu X, a za uređeni par (X, d) kažemo da je metrički prostor.

Primjer 1.1.1. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$d((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}.$$

Tada za d kažemo da je euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Može se pokazati da je d zaista metrika na $\mathbb{R}^n$ [3]. Za $n = 1$ imamo $d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Primjer 1.1.2. *Neka je X neprazan skup te $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}.$$

Lako se provjeri da je d metrika na X. Za d kažemo da je diskretna metrika na X.

Primjer 1.1.3. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Neka je $d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$d((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|.$$

Tvrdimo da je d_1 metrika na $\mathbb{R}^n$.

Svojstva 1. i 2. očito vrijede. Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n), z = (z_1, ..., z_n)$. Imamo:

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| = |x_1 - z_1 + z_1 - y_1| + \cdots + |x_n - z_n + z_n - y_n| \leqslant$$

$$\leqslant |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + \cdots + |x_n - z_n| + |z_n - y_n| =$$

$$= |x_1 - z_1| + \cdots + |x_n - z_n| + |z_1 - y_1| + \cdots + |z_n - y_n| = d_1(x, z) + d_1(z, y).$$

Dakle, $d_1(x, y) \leqslant d_1(x, z) + d_1(z, y)$.

Nadalje, neka je $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$d_\infty((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \max\Big\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\Big\}.$$

Tvrdimo da je d_∞ metrika na $\mathbb{R}^n$. Jedino svojstvo koje treba provjeriti je nejednakost trokuta.

Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n), z = (z_1, ..., z_n)$. Neka je $i \in \{1, ..., n\}$ takav da je $|x_i - y_i| = \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\}$. Tada imamo da je

$$d_\infty(x, y) = |x_i - y_i| \leqslant |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \leqslant d_\infty(x, z) + d_\infty(z, y).$$

Dakle, d_∞ je metrika na $\mathbb{R}^n$.

Primjer 1.1.4. *Označimo s I^∞ skup svih nizova u $[0, 1]$, dakle $I^\infty = [0, 1]^{\mathbb{N}}$. Uočimo sljedeće: ako su $(x_i), (y_i) \in I^\infty$ onda je $x_i, y_i \in [0, 1], \forall i \in \mathbb{N}$ pa je $|x_i - y_i| \leqslant 1, \forall i \in \mathbb{N}$, što povlači da je 1 gornja međa skupa*

$$\Big\{|x_i - y_i| \mid i \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Dakle, ovaj skup je odozgo omeđen pa ima supremum. Stoga ima smisla definirati funkciju $d : I^\infty \times I^\infty \to \mathbb{R}$ sa

$$d((x_i), (y_i)) = \sup\Big\{|x_i - y_i| \mid i \in \mathbb{N}\Big\}, \forall (x_i), (y_i) \in I^\infty.$$

Tvrdimo da je d metrika na I^∞.

Neka su $x, y \in I^\infty, x = (x_i), y = (y_i)$. Iz definicje funkcije d slijedi da je

$$|x_i - y_i| \leqslant d(x, y) \tag{1.1}$$

pa je jasno da je $d(x, y) \geq 0$.
Pretpostavimo da je $x = y$. *Tada je* $|x_i - y_i| = 0, \forall i \in \mathbb{N}$ *pa je* $d(x, y) = \sup\{0\}$, *tj.* $d(x, y) = 0$.
Obratno, pretpostavimo da je $d(x, y) = 0$. *Iz (1.1) slijedi da je* $|x_i - y_i| = 0, \forall i \in \mathbb{N}$ *pa je* $x = y$. *Očito je da je* $d(x, y) = d(y, x)$.
Neka su $x, y, z \in I^\infty$, $x = (x_i), y = (y_i), z = (z_i)$. *Iz nejednakosti trokuta za euklidsku metriku na* $\mathbb{R}$ *slijedi*

$$|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|, i \in \mathbb{N}$$

pa zbog $|x_i - z_i| \leq d(x, y)$ *i* $|z_i - y_i| \leq d(z, y)$ *imamo*

$$|x_i - y_i| \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Ovo znači da je broj $d(x, z) + d(z, y)$ *gornja međa skupa* $\{|x_i - y_i| \mid i \in \mathbb{N}\}$ *pa je veći ili jednak od supremuma toga skupa, tj.* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.
Time smo dokazali da je d *metrika na* I^∞. *Na isti način dobivamo da je funkcija* $d' : I^\infty \times I^\infty \to \mathbb{R}$ *definirana s*

$$d'((x_i), (y_i)) = \sup\left\{\frac{1}{2^i}|x_i - y_i| \mid i \in \mathbb{N}\right\}$$

metrika na I^∞.

1.2 Otvoren skup

Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ i $r > 0$. Definiramo

$$K(x_0, r) := \Big\{x \in X \mid d(x, x_0) < r\Big\}.$$

Za $K(x_0, r)$ kažemo da je ***otvorena kugla*** oko x_0 radijusa r u metričkom prostoru (X, d).
Neka je (X, d) metrički prostor te $U \subseteq X$. Za U kažemo da je ***otvoren skup*** u metričkom prostoru (X, d) ako za svaki $x \in U$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U$.

Primjer 1.2.1. *Neka je* (X, d) *metrički prostor,* $x_0 \in X$ *i* $r > 0$. *Tada je* $K(x_0, r)$ *otvoren skup u metričkom prostoru* (X, d). *Naime, neka je* $x \in K(x_0, r)$. *Definiramo*

$$s := r - d(x, x_0) > 0.$$

Tvrdimo da je

$$K(x, s) \subseteq K(x_0, r). \tag{1.2}$$

Neka je $y \in K(x, s)$. *Tada je* $d(x, y) < s$ *pa je*

$$d(x_0, y) \leq d(x, y) + d(x_0, x) < s + d(x_0, x) = r,$$

tj. $d(x_0, y) < r$, *odnosno* $y \in K(x_0, r)$ *što pokazuje da (1.2) vrijedi.*

Primjer 1.2.2. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ i $r > 0$. Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$x \in K(x_0, r) \Leftrightarrow d(x, x_0) < r \Leftrightarrow |x - x_0| < r$$

$$\Leftrightarrow -r < x - x_0 < r \Leftrightarrow x_0 - r < x < x_0 + r \Leftrightarrow x \in \langle x_0 - r, x_0 + r \rangle .$$

Dakle, $K(x_0, r) = \langle x_0 - r, x_0 + r \rangle$.

Primjer 1.2.3. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. za $n \in \mathbb{N}$ definiramo*

$$U_n = \left\langle -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right\rangle .$$

Iz prethodna dva primjera slijedi da je U_n otvoren skup u $(\mathbb{R}, d)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{0\}.$$

Naime ako je $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ onda je $x \in \left\langle -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right\rangle$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, tj. $|x| < \frac{1}{n}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ iz čega slijedi $|x| = 0$. U suprotnom bismo imali $n < \frac{1}{|x|}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, $x = 0$, no $\{0\}$ očito nije otvoren skup.
Zaključak: $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je niz otvorenih skupova u $(\mathbb{R}, d)$, ali $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ nije otvoren skup u tom metričkom prostoru.

Propozicija 1.2.4. *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada vrijedi:*

1. *$\emptyset, X$ su otvoreni skupovi u (X, d)*
2. *ako je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija otvorenih skupova u (X, d), onda je $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ otvoren skup u (X, d)*
3. *ako su U i V otvoreni skupovi u (X, d), onda je $U \cap V$ otvoren skup u (X, d).*

Dokaz. Tvrdnja 1. očito vrijedi.

2. Neka je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija otvorenih skupova u (X, d). Neka je $x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Tada postoji $\alpha \in A$ takav da je $x \in U_\alpha$. Skup U_α je otvoren pa postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U_\alpha$. Slijedi

$$K(x, r) \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha .$$

Dakle, $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ je otvoren skup u (X, d).

3. Neka su U i V otvoreni skupovi u (X, d). Neka je $x \in U \cap V$. Tada je $x \in U$ i $x \in V$ pa postoje $r_1, r_2 > 0$ takvi da je

$$K(x, r_1) \subseteq U \text{ i } K(x, r_2) \subseteq V.$$

Sada uzmemo $r = \min\{r_1, r_2\}$. Imamo $r > 0$ i $r \leq r_1, r \leq r_2$. Stoga je

$$K(x, r) \subseteq K(x, r_1) \subseteq U \text{ i } K(x, r) \subseteq K(x, r_2) \subseteq V$$

pa je

$$K(x, r) \subseteq U \cap V.$$

Prema tome $U \cap V$ je otvoren skup.

□

1.3 Neprekidnost

Neka je (X, d) metrički prostor, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u X te $a \in X$. Kažemo da niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***teži prema*** a u metričkom prostoru (X, d) i pišemo $x_n \to a$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za svaki $n \geq n_0, d(x_n, a) < \varepsilon$.

Propozicija 1.3.1. *Neka je (X, d) metrički prostor, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u X te $a \in X$. Tada $x_n \to a$ ako i samo ako za svaki otvoren skup U u (X, d) takav da je $a \in U$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in U$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $x_n \to a$.
Neka je U otvoren skup u (X, d) takav da je $a \in U$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $K(a, \varepsilon) \subseteq U$. Znamo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za svaki $n \geq n_0$, $x_n \in K(a, \varepsilon)$ iz čega slijedi da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in U$.

Obratno, pretpostavimo da za svaki otvoreni skup U takav da je $a \in U$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in U$. Dokažimo da $x_n \to a$.
Uzmimo $\varepsilon > 0$. Skup $K(a, \varepsilon)$ je otvoren u (X, d) i očito sadrži a pa prema pretpostavci postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in K(a, \varepsilon)$. Prema tome $x_n \to a$.

□

Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori, neka je $f : X \to Y$ funkcija te neka je $x_0 \in X$. Za funkciju f kažemo da je ***neprekidna*** u x_0 s obzirom na metrike d i d' ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi implikacija

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon,$$

odnosno

$$x \in K(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in K(f(x_0), \varepsilon).$$

Uočimo, f je neprekidna u točki x_0 ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi

$$f(K(x_0, \delta)) \subseteq K(f(x_0), \varepsilon).$$

Neka je (X, d) metrički prostor, $x \in X$ te U otvoren skup u (X, d) takav da je $x \in U$. Tada za U kažemo da je ***otvorena okolina*** točke x u metričkom prostoru (X, d).

Propozicija 1.3.2. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori, neka je $f : X \to Y$ funkcija te $x_0 \in X$. Tada je f neprekidna s obzirom na metrike d i d' ako i samo ako za svaku otvorenu okolinu V od $f(x_0)$ u (Y, d') postoji otvorena okolina U od x_0 u (X, d) takva da je $f(U) \subseteq V$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna u točki x_0. Neka je V otvorena okolina od $f(x_0)$ u (Y, d'). Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da je

$$K(f(x_0), \varepsilon) \subseteq V.$$

Budući da je f neprekidna u x_0 postoji $\delta > 0$ takav da je

$$f(K(x_0, \delta)) \subseteq K(f(x_0), \varepsilon).$$

Neka je $U = K(x_0, \delta)$. Tada je

$$f(U) \subseteq K(f(x_0), \varepsilon) \subseteq V, \text{ tj. } f(U) \subseteq V,$$

a očito je U otvorena okolina od x_0 u (X, d).

Obratno, pretpostavimo da za svaku otvorenu okolinu V od $f(x_0)$ postoji otvorena okolina U od x_0 takva da je $f(U) \subseteq V$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada je $K(f(x_0), \varepsilon)$ otvorena okolina od $f(x_0)$ pa postoji otvorena okolina U od x_0 takva da je

$$f(U) \subseteq K(f(x_0), \varepsilon).$$

Budući da je U otvoren skup postoji $\delta > 0$ takav da je $K(x_0, \delta) \subseteq U$ pa je

$$f(K(x_0, \delta)) \subseteq f(U) \subseteq K(f(x_0), \varepsilon), \text{ tj.}$$

$$f(K(x_0, \delta)) \subseteq K(f(x_0), \varepsilon).$$

Zaključak: f je neprekidna u x_0.

□

Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori te neka je $f : X \to Y$ funkcija. Kažemo da je f ***neprekidna funkcija*** s obzirom na metrike d i d' ako je f neprekidna u x_0 s obzirom na metrike d i d' za svaki $x_0 \in X$.

Propozicija 1.3.3. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $U \subseteq X$. Tada je U otvoren skup u (X, d) ako i samo ako za svaki $x \in U$ postoji otvorena okolina V točke x u (X, d) takva da je $V \subseteq U$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je U otvoren. Tada za svaki $x \in U$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U$, a $K(x, r)$ je otvorena okolina točke x.

Obratno, pretpostavimo da za svaki $x \in U$ postoji otvorena okolina V točke x takva da je $V \subseteq U$. Neka je $x \in U$ te neka je V otvorena okolina od x takva da je $V \subseteq U$. Budući da je V otvoren skup, postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq V$ pa slijedi $K(x, r) \subseteq U$. Prema tome, U je otvoren skup.

□

Propozicija 1.3.4. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori te neka je $f : X \to Y$ funkcija. Tada je f neprekidna s obzirom na metrike d i d' ako i samo ako za svaki otvoren skup V u (Y, d') vrijedi da je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u (X, d).*

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna funkcija s obzirom na metrike d i d'.
Neka je V otvoren skup u (Y, d') i neka je $x \in f^{-1}(V)$. Tada je $f(x) \in V$ pa je V otvorena okolina od $f(x)$ u (Y, d'). Budući da je f neprekidna u x postoji otvorena okolina U točke x u (X, d) takva da je $f(U) \subseteq V$, a iz toga slijedi $U \subseteq f^{-1}(V)$. Dakle, za svaki $x \in f^{-1}(V)$ postoji otvorena okolina U od x takva da je

$$U \subseteq f^{-1}(V).$$

Iz propozicije 1.3.3 slijedi da je $f^{-1}(V)$ otvoren skup.

Obratno, pretpostavimo sada da je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u (X, d) za svaki otvoren skup V u (Y, d'). Neka je $x_0 \in X$. Dokažimo da je f neprekidna u točki x_0. Pretpostavimo da je V otvorena okolina od $f(x_0)$ u (Y, d'). Neka je

$$U = f^{-1}(V).$$

Tada je U otvoren skup, a očito je $x_0 \in U$ pa je U otvorena okolina od x_0 u (X, d). Nadalje iz definicije od U je jasno da je $f(U) \subseteq V$. Slijedi da je f neprekidna u x_0, dakle f je neprekidna.

□

Neka je X neprazan skup te neka je $\mathcal{T}$ familija podskupova od X koja zadovoljava sljedeće:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. ako je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija podskupova od X takva da je $U_\alpha \in \mathcal{T}$ za svaki $\alpha \in A$, onda je $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$
3. ako su $U, V \in \mathcal{T}$ onda je $U \cap V \in \mathcal{T}$.

Tada za $\mathcal{T}$ kažemo da je ***topologija*** na skupu X, a za uređeni par $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je ***topološki prostor***.

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $U \subseteq X$. Kažemo da je U ***otvoren skup*** u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako je $U \in \mathcal{T}$.

Neka je (X, d) metrički prostor. Označimo s $\mathcal{T}_d$ familiju svih skupova koji su otvoreni u metričkom prostoru (X, d). Tada je $\mathcal{T}_d$ topologija na skupu X. To slijedi iz propozicije 1.2.4. Za familiju $\mathcal{T}_d$ kažemo da je ***topologija inducirana metrikom*** d.
Uočimo sljedeće: ako je (X, d) metrički prostor te $U \subseteq X$, onda je U otvoren u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako je U otvoren skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.

Primjer 1.3.5. *Neka je X neprazan skup te neka je d diskretna metrika na X. Tada je $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$. Naime, neka je $U \subseteq X$ te neka je $x \in U$. Očito je $K\left(x, \frac{1}{2}\right) = \{x\}$. Stoga je*

$$K\left(x, \frac{1}{2}\right) \subseteq U.$$

Iz ovoga zaključujemo da je svaki podskup od X otvoren u metričkom prostoru (X, d). Iz ovog slijedi da je $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$.

Primjer 1.3.6. *Neka je X neprazan skup. Očito je $\{\emptyset, X\}$ topologija na skupu X. Pretpostavimo da X ima bar dva elementa. Tvrdimo da ne postoji metrika d na X takva da je $\{\emptyset, X\} = \mathcal{T}_d$.*
Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji metrika d na X takva da je $\{\emptyset, X\} = \mathcal{T}_d$. Odaberimo $a, b \in X$ takve da je $a \neq b$. Neka je $U = K(a, d(a, b))$. Tada je U otvoren skup u metričkom prostoru (X, d), tj. $U \in \mathcal{T}_d$ pa slijedi da je

$$U \in \{\emptyset, X\}.$$

Prema tome $U = \emptyset$ ili $U = X$. No ovo je nemoguće jer je iz definicije od U jasno da je $a \in U$ i $b \notin U$, dakle $U \neq \emptyset$ i $U \neq X$. Prema tome ne postoji metrika d na X takva da je $\{\emptyset, X\} = \mathcal{T}_d$.

Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je ***metrizabilan*** ako postoji metrika d na X takva da je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

Uočimo da prema prethodnom primjeru vrijedi sljedeće: ako je X skup koji ima bar dva elementa, onda topološki prostor $(X, \{\emptyset, X\})$ nije metrizabilan.

Neka je (X, T) topološki prostor te neka je $Y \subseteq X, Y \neq \emptyset$. Neka je $\mathcal{S} = \{U \cap Y | U \in \mathcal{T}\}$. Dokažimo da je $\mathcal{S}$ topologija na Y.

Imamo $\emptyset = \emptyset \cap Y$ i $Y = X \cap Y$ pa je $\emptyset, Y \in \mathcal{S}$.

Neka je $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{S}$. Za svaki $\alpha \in A$ postoji $U_\alpha \in \mathcal{T}$ takav da je $V_\alpha = U_\alpha \cap Y$. Imamo

$$\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (U_\alpha \cap Y) = \left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) \cap Y$$

pa je $\bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha \in \mathcal{S}$ jer je $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$ (budući da je $\mathcal{T}$ topologija).

Neka su $V_1, V_2 \in \mathcal{S}$. Tada je $V_1 = U_1 \cap Y$ i $V_2 = U_2 \cap Y$ gdje su $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$. Vrijedi

$$V_1 \cap V_2 = (U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) = (U_1 \cap U_2) \cap Y$$

pa je $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{S}$. Dakle, $\mathcal{S}$ je topologija na Y. Za $\mathcal{S}$ kažemo da je ***relativna topologija*** na Y (određena topologijom $\mathcal{T}$). Za $(Y, \mathcal{S})$ kažemo da je ***potprostor topološkog prostora*** $(X, \mathcal{T})$.

Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$. Neka je $p : Y \times Y \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s

$$p(a, b) = d(a, b), \text{ za sve } a, b \in Y$$

(uočimo da je p restrikcija funkcije d na skup $Y \times Y$). Očito je p metrika na Y. Za (Y, p) kažemo da je ***potprostor metričkog prostora*** (X, d).

Napomena: Ako je (X, d) metrički prostor, $x \in X$ i $r > 0$, onda ćemo otvorenu kuglu $K(x, r)$ preciznije označavati s $K_d(x, r)$.

Propozicija 1.3.7. *Neka je (Y, p) potprostor metričkog prostora (X, d). Neka je U otvoren skup u (X, d). Tada je $U \cap Y$ otvoren skup u (Y, p).*

Dokaz. Uočimo sljedeće: ako je $a \in Y$ i $r > 0$, onda je

$$K_p(a, r) = K_d(a, r) \cap Y. \tag{1.3}$$

Neka je $a \in U \cap Y$. Slijedi da je $a \in U$ i $a \in Y$. Tada postoji $r > 0$ takav da je $K_d(a, r) \subseteq U$. Slijedi da je $K_d(a, r) \cap Y \subseteq U \cap Y$, tj.

$$K_p(a, r) \subseteq U \cap Y.$$

Prema tome $U \cap Y$ je otvoren skup u (Y, d).

□

Propozicija 1.3.8. *Neka je (Y, p) potprostor metričkog prostora (X, d). Neka je V otvoren skup u (Y, d). Tada postoji otvoren skup U u (X, d) takav da je $V = U \cap Y$.*

Dokaz. Za svaki $a \in V$ postoji $r_a > 0$ takav da je $K_p(a, r_a) \subseteq V$. Zaključujemo da je

$$V = \bigcup_{a\in V} K_p(a, r_a).$$

Koristeći (1.3) dobivamo

$$V = \bigcup_{a\in V} (K_d(a, r_a) \cap Y) = \Big(\bigcup_{a\in V} K_d(a, r_a)\Big) \cap Y,$$

dakle $V = U \cap Y$ gdje je $U = \bigcup_{a\in V} K_d(a, r_a)$. Iz primjera 1.2.1 i propozicije 1.2.4 slijedi da je U otvoren skup u (X, d).

□

Iz prethodne dvije propozicije dobivamo sljedeći zaključak:
Ako je (Y, p) potprostor metričkog prostora (X, d), onda je $\mathcal{T}_p = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}_d\}$ odnosno, imamo sljedeću propoziciju:

Propozicija 1.3.9. *Ako je (Y, d) potprostor metričkog prostora (X, d), onda je $(Y, \mathcal{T}_p)$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T}_d)$.*

Primjer 1.3.10. *Neka je X skup koji ima bar dva elementa. Neka je d diskretna metrika na X te neka je $p : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s*

$$p(x, y) = \begin{cases} 2 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}.$$

Lako se vidi da je p metrika na X. Nadalje, za svaki $x \in X$ očito vrijedi $K_p(x, 1) = \{x\}$ što povlači da je svaki jednočlan podskup od X otvoren u (X, p) pa je onda i svaki podskup od X otvoren u (X, p). Dakle, $\mathcal{T}_p = \mathcal{P}(X)$.
S druge strane znamo da je $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ (primjer 1.3.5). Stoga je očito $(X, \mathcal{T}_p)$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T}_d)$ (općenito za svaku topologiju $\mathcal{T}$ na X vrijedi da je $(X, \mathcal{T})$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$). No (X, p) nije potprostor metričkog prostora (X, d) (u suprotnom bi slijedilo $p = d$ što očito ne vrijedi).

Poglavlje 2

Kompaktnost

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ familija takva da je

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Tada za $\mathcal{U}$ kažemo da je ***otvoren pokrivač*** topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$, neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$ te neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n, S \neq \emptyset$. Za $d|_{S \times S}$ kažemo da je euklidska metrika na S. Za topologiju induciranu tom metrikom kažemo da je ***euklidska topologija*** na S.

Primjer 2.0.1. *Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$. Neka je*

$$\mathcal{U} = \Big\{\langle -x, x\rangle \mid x > 0\Big\}.$$

Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač topološkog prostora $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$. Nadalje i familija $\{\langle -\infty, 1\rangle, \langle 0, +\infty\rangle\}$ je otvoreni pokrivač od $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$.

Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je ***kompaktan*** ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od $(X, \mathcal{T})$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$.

Primjer 2.0.2. *Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$. Tada topološki prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ nije kompaktan. Naime za otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ iz prethodnog primjera očito ne postoji $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $\mathbb{R} = U_1 \cup \cdots \cup U_n$.*

Primjer 2.0.3. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor takav da je $\mathcal{T}$ konačan skup. Tada je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan topološki prostor. Naime, svaki otvoren pokrivač od $(X, \mathcal{T})$ je očito konačan. Posebno, ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor takav da je X konačan skup, onda je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan topološki prostor.*

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $K \subseteq X$. Za nepraznu familiju $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ kažemo da je ***otvoreni pokrivač skupa*** K u $(X, \mathcal{T})$ ako je

$$K \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $K \subseteq X$. Kažemo da je K ***kompaktan skup*** u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od K u $(X, \mathcal{T})$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $K \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$.

Propozicija 2.0.4. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, neka je K neprazan podskup od X te neka je $\mathcal{S}$ relativna topologija na K. Tada je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$ ako i samo ako je $(K, \mathcal{S})$ kompaktan topološki prostor.*

Dokaz. Pretpostavimo da je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. Neka je $\mathcal{V}$ otvoren pokrivač topološkog prostora $(K, \mathcal{S})$. Ako je $V \in \mathcal{V}$, onda je $V \in \mathcal{S}$ pa postoji $U_V \in \mathcal{T}$ takav da je

$$V = U_V \cap K.$$

Očito je $V \subseteq U_V$ za svaki $V \in \mathcal{V}$ pa slijedi da je familija $\mathcal{U} = \{U_V \mid V \in \mathcal{V}\}$ otvoreni pokrivač skupa K u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$. Stoga postoje $n \in \mathbb{N}$ i $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ takvi da je

$$K \subseteq U_{V_1} \cup \cdots \cup U_{V_n}.$$

Neka je $x \in K$. Tada je $x \in U_{V_i}$ za neki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dakle, $x \in K \cap U_{V_i}$, tj. $x \in V_i$. Time smo dokazali da je $K \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_n$, tj.

$$K = V_1 \cup \cdots \cup V_n.$$

Zaključak: $(K, \mathcal{S})$ je kompaktan topološki prostor.

Obratno, pretpostavimo da je $(K, \mathcal{S})$ kompaktan topološki prostor. Neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač skupa K u $(X, \mathcal{T})$ te neka je $\mathcal{V} = \{U \cap K \mid U \in \mathcal{U}\}$. Tada je $\mathcal{V}$ otvoreni pokrivač topološkog prostora $(K, \mathcal{S})$. Naime, očito je $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{S}$, a ako je $x \in K$, onda postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $x \in U$ pa je $x \in U \cap K$, što pokazuje da je $K \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$, dakle

$$K = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V.$$

Stoga postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $K \subseteq (U_1 \cap K) \cup \cdots \cup (U_n \cap K)$ pa je $K \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$. Prema tome K je kompaktan u $(X, \mathcal{T})$.

□

Neka je (X, d) metrički prostor. Za familiju $\mathcal{U}$ otvorenih skupova u (X, d) kažemo da je ***otvoreni pokrivač metričkog prostora*** (X, d) ako je

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Uočimo da je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač metričkog prostora (X, d) ako i samo ako je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač topološkog prostora $(X, \mathcal{T}_d)$.

Za metrički prostor (X, d) kažemo da je ***kompaktan*** ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od (X, d) postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je

$$X = U_1 \cup \cdots \cup U_n.$$

Uočimo da je (X, d) kompaktan metrički prostor ako i samo ako je $(X, \mathcal{T}_d)$ kompaktan topološki prostor.

Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $K \subseteq X$. Za nepraznu familiju $\mathcal{U}$ otvorenih skupova u (X, d) kažemo da je ***otvoreni pokrivač skupa*** K u metričkom prostoru (X, d) ako je

$$K \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Uočimo da je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač skupa K u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač skupa K u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.

Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $K \subseteq X$. Kažemo da je K ***kompaktan skup u metričkom prostoru*** (X, d) ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ skupa K u metričkom prostoru (X, d) postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je

$$K \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n.$$

Uočimo da je K kompaktan skup u u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako je K kompaktan skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.

Propozicija 2.0.5. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka je K neprazan podskup od X te neka je $p = d \restriction_{K \times K}$. Tada je K kompaktan skup u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako je (K, p) kompaktan metrički prostor.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{S}$ relativna topologija na K određena topologijom $\mathcal{T}_d$. Koristeći propozicije 1.3.7 i 1.3.8 dobivamo

$$\mathcal{S} = \{U \cap K \mid U \in \mathcal{T}_d\} = \{U \cap K \mid U \text{ otvoren u } (X, d)\} = \{V \mid \text{ otvoren u } (K, p)\} = \mathcal{T}_p,$$

dakle

$$\mathcal{S} = \mathcal{T}_p.$$

Iz propozicije 2.0.4 slijedi da je

$$K \text{ kompaktan u } (X,d) \Leftrightarrow K \text{ kompaktan u } (X,\mathcal{T}_d)$$

$$\Leftrightarrow (K,\mathcal{S}) \text{ kompaktan topološki prostor}$$

$$\Leftrightarrow (K,\mathcal{T}_p) \text{ kompaktan topološki prostor}$$

$$\Leftrightarrow (K,p) \text{ kompaktan metrički prostor.}$$

□

Neka je S skup te neka je $\mathcal{F}$ familija skupova. Kažemo da je S ***dobar skup*** za $\mathcal{F}$ ako postoje $n \in \mathbb{N}$ i $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ takvi da je

$$\mathcal{S} \subseteq F_1 \cup \cdots \cup F_n.$$

Uočimo sljedeće: ako je (X,d) metrički prostor i $K \subseteq X$, onda je K kompaktan u (X,d) ako i samo ako je K dobar za svaki svoj otvoreni pokrivač u (X,d).

Uočimo sljedeće: ako je S dobar skup za $\mathcal{F}$ te ako je T dobar skup za $\mathcal{F}$, onda je $S \cup T$ dobar skup za $\mathcal{F}$.

Teorem 2.0.6. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$ te neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Tada je $[a,b]$ kompaktan skup u metričkom prostoru $(\mathbb{R},d)$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač skupa $[a,b]$ u $(\mathbb{R},d)$. Želimo pokazati da je $[a,b]$ dobar za $\mathcal{U}$.
Neka je

$$S = \Big\{x \in [a,b] \mid [a,x] \text{ dobar za } \mathcal{U}\Big\}.$$

Budući da je $[a,b] \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$, postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $a \in U$. Slijedi $\{a\} \subseteq U$, tj. $[a,a] \subseteq U$. Prema tome je $a \in S$. Skup S je neprazan i omeđen odozgo pa stoga ima supremum, označimo ga s c. Iz $a \in S$ slijedi $a \leq c$. Očito je b gornja međa skupa S pa je $c \leq b$. Prema tome imamo $c \in [a,b]$. Stoga postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $c \in \mathcal{U}$. Budući da je U otvoren skup u $(\mathbb{R},d)$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x,r) \subseteq U$, tj.

$$\langle c-r, c+r\rangle \subseteq U.$$

Broj $c-r$ nije gornja međa od S (jer je manji od c) pa postoji $x \in S$ takav da je $c-r < x$. Tvrdimo da je

$$[a, c+r\rangle \subseteq [a,x] \cup \langle c-r, c+r\rangle. \tag{2.1}$$

Neka je $y \in [a, c+r\rangle$. Ako je $y \leq x$, onda je $y \in [a,x]$, a ako je $x < y$ zbog $c-r < x$ imamo $c-r < y$ te je

$$y \in \langle c-r, c+r\rangle.$$

Dakle, (2.1) vrijedi. Skupovi $[a, x]$ i $\langle c-r, c+r\rangle$ su dobri za $\mathcal{U}$ jer je $x \in S$ i $\langle c-r, c+r\rangle \subseteq U$. Stoga je i unija ova dva skupa dobra za $\mathcal{U}$ pa iz (2.1) slijedi da je i $[a, c+r\rangle$ dobar skup za $\mathcal{U}$. Iz $[a, c] \subseteq [a, c+r\rangle$ slijedi da je $[a, c]$ dobar za $\mathcal{U}$ dakle, $c \in S$.
Tvrdimo da je $c = b$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $c < b$. Odaberimo $z \in \mathbb{R}$ takav da je

$$c < z,\ z < c + r \text{ i } z < b.$$

Imamo $a \leq c < z < b$ pa je $z \in [a, b]$. Nadalje, $[a, z] \subseteq [a, c+r\rangle$ pa je $[a, z]$ dobar za $\mathcal{U}$. Stoga je $z \in S$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je c supremum skupa S i $c < z$. Prema tome je $c = b$ pa je $b \in S$ što znači da je $[a, b]$ dobar za $\mathcal{U}$. Dakle, $[a, b]$ je kompaktan skup.

□

Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori. Za funkciju $f : X \to Y$ kažemo da je ***neprekidna*** s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ ako za svaki $V \in \mathcal{S}$ vrijedi

$$f^{-1}(V) \in \mathcal{T}.$$

Napomena 2.0.7. *Iz 1.3.4 dobivamo sljedeći zaključak: ako su (X, d) i (Y, d') metrički prostori te $f : X \to Y$, onda je funkcija f neprekidna s obzirom na metrike d i d' ako i samo ako je f neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}_d$ i $\mathcal{T}_{d'}$.*

Propozicija 2.0.8. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori, $f : X \to Y$ funkcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ te K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. Tada je $f(K)$ kompaktan skup u $(Y, \mathcal{S})$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{V}$ otvoreni pokrivač od $f(K)$ u topološkom prostoru $(Y, \mathcal{S})$ te neka je $x \in K$. Tada je $f(x) \in f(K)$ pa postoji $V \in \mathcal{V}$ takav da je $f(x) \in V$. Slijedi da je $x \in f^{-1}(V)$. Ovim smo dokazali da je svaki element od K element nekog člana familije

$$\{f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{V}\}.$$

Nadalje, za svaki $V \in \mathcal{V}$ vrijedi $V \in \mathcal{S}$ pa je $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. Prema tome, $\{f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{V}\}$ je otvoreni pokrivač skupa K u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$. Zbog kompaktnosti skupa K postoje $n \in \mathbb{N}$ i $V_1, \ldots V_n \in \mathcal{V}$ takvi da je

$$K \subseteq f^{-1}(V_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_n).$$

Uzmimo $x \in K$. Tada je $x \in f^{-1}(V_i)$ za neki $i \in \{1, \ldots, n\}$ pa je $f(x) \in V_i$, što povlači $f(x) \in V_i \cup \cdots \cup V_n$. Dakle, za svaki $x \in K$ vrijedi $f(x) \in V_i \cup \cdots \cup V_n$. To znači da je

$$f(K) \subseteq V_i \cup \cdots \cup V_n.$$

Time smo dokazali da je $f(K)$ kompaktan.

□

Poglavlje 3

Povezanost

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka su U i V otvoreni skupovi u tom topološkom prostoru takvi da vrijedi

$$U \cup V = X, U \cap V = \emptyset, U \neq \emptyset \text{ i } V \neq \emptyset.$$

Tada za uređeni par (U, V) kažemo da je ***separacija*** topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$.
Analogno definiramo pojam separacije metričkog prostora.

Za topološki prostor kažemo da ***povezan*** ako ne postoji separacija tog topološkog prostora.
Analogno za metrički prostor kažemo da je povezan ako ne postoji separacija tog metričkog prostora.

Uočimo sljedeće: ako je (X, d) metrički prostor, onda je (U, V) separacija metričkog prostora (X, d) ako i samo ako je (U, V) separacija topološkog prostora $(X, \mathcal{T}_d)$.

Neka je (X, d) metrički prostor te $F \subseteq X$. Kažemo da je F ***zatvoren skup*** u metričkom prostoru (X, d) ako je F^c otvoren skup u (X, d).
Analogno definiramo pojam zatvorenog skupa u topološkom prostoru.

Ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te (U, V) separacija od $(X, \mathcal{T})$, onda su U i V zatvoreni skupovi u $(X, \mathcal{T})$ (jer je $U^c = V$ i $V^c = U$). Obratno, ako su F i G zatvoreni skupovi u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ takvi da vrijedi

$$F \cup G = X, F \cap G = \emptyset, F \neq \emptyset \text{ i } G \neq \emptyset,$$

onda je (F, G) separacija od $(X, \mathcal{T})$.

Uočimo sljedeće: topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ je povezan ako i samo ako ne postoji $A \subseteq X$ takav da je $A \neq \emptyset, A \neq X$ te takav da je A i otvoren i zatvoren u $(X, \mathcal{T})$.

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $A \subseteq X$. Za A kažemo da je ***povezan skup u topološkom prostoru*** $(X, \mathcal{T})$ ako je $A = \emptyset$ ili $A \neq \emptyset$ i topološki prostor $(A, \mathcal{T}_A)$ povezan, pri čemu je $\mathcal{T}_A$ relativna topologija na A.

Neka je (X, d) metrički prostor te $A \subseteq X$. Za A kažemo da je ***povezan skup u metričkom prostoru*** (X, d) ako je $A = \emptyset$ ili $A \neq \emptyset$ i metrički prostor (A, d_A) povezan, pri čemu je

$$d_A = d|_{A \times A}.$$

Neka je (X, d) metrički prostor te $A \subseteq X$. Neka je $d_A = d|_{A \times A}$. Znamo da je tada $\mathcal{T}_{d_A}$ ***relativna topologija*** na A određena topologijom $\mathcal{T}_d$.

Metrički prostor (A, d_A) je povezan ako i samo ako je topološki prostor $(A, \mathcal{T}_{d_A})$ povezan. Prema tome, A je povezan skup u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako je A povezan skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Za $S \subseteq \mathbb{R}^n, S \neq \emptyset$ označimo s $\mathcal{E}_S$ euklidsku topologiju na S te s d_S euklidsku metriku na S. Pretpostavimo da su S i T neprazni podskupovi od $\mathbb{R}^n$ takvi da je $S \subseteq T$. Tada je $(S, \mathcal{E}_S)$ potprostor topološkog prostora $(T, \mathcal{E}_T)$. Naime, to slijedi iz propozicije 1.3.9 i očite činjenice da je (S, d_S) potprostor metričkog prostora (T, d_T).

Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $S \subseteq X$. Kažemo da je S ***omeđen skup*** u metričkom prostoru (X, d) ako postoje $x \in X$ i $r > 0$ takvi da je $S \subseteq K(x, r)$.

Uočimo da u tom slučaju za sve $a, b \in S$ vrijedi

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < r + r = 2r,$$

dakle,

$$d(a, b) < 2r.$$

To znači da je skup $\{d(a, b) \mid a, b \in S\}$ omeđen odozgo u $\mathbb{R}$.

Neka je (X, d) metrički prostor te S neprazan i omeđen skup u tom metričkom prostoru. Definiramo broj

$$\operatorname{diam} S := \sup \Big\{ d(a, b) \mid a, b \in S \Big\}.$$

Za $\operatorname{diam} S$ kažemo da je ***dijametar skupa*** S u metričkom prostoru (X, d).

Primjer 3.0.1. *1. Neka je (X, d) metrički prostor, $x \in X$ i $r > 0$. Za sve $a, b \in K(x, r)$ vrijedi $d(a, b) < 2r$, tj. $2r$ je gornja međa skupa $\{d(a, b) \mid a, b \in K(x, r)\}$ pa je supremum ovog skupa manji ili jednak od $2r$, tj.*

$$\operatorname{diam} K(x, r) \leq 2r.$$

2. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}, S \neq \emptyset$, neka je d euklidska metrika na S te neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, takvi da je $[a, b] \subseteq S$. Tada je

$$\operatorname{diam} [a, b] = b - a \ (\textit{u metričkom prostoru } (S, d)).$$

Dokažimo to. Neka su $x, y \in [a, b]$. Pretpostavimo da je $x \leq y$. Imamo

$$b - a = (b - y) + (y - x) + (x - a),$$

gdje je $b - y \geq 0, y - x \geq 0, x - a \geq 0$ pa je $y - x \leq b - a$, tj.

$$|y - x| \leq b - a.$$

Isto dobivamo u slučaju $y \leq x$. Ovo znači da je $b - a$ gornja međa skupa $\{|y - x| \mid x, y \in [a, b]\}$, a očito je $b - a$ i element tog skupa. Prema tome,

$$b - a = \max\Big\{|y - x| \mid x, y \in [a, b]\Big\} = \max\Big\{d(x, y) \mid x, y \in [a, b]\Big\}.$$

Neka je (X, d) metrički prostor, $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač tog metričkog prostora i $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Kažemo da je λ ***Lebesgueov broj*** od $\mathcal{U}$ za (X, d) ako za svaki neprazan i omeđen skup A u (X, d) takav da je $\operatorname{diam} A < \lambda$ postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $A \subseteq U$.

Teorem 3.0.2. *Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor te neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od (X, d). Tada postoji $\lambda > 0$ takav da je λ Lebesgueov broj od $\mathcal{U}$ za (X, d).*

Dokaz. Za svaki $x \in X$ postoji $U_x \in \mathcal{U}$ takav da je $x \in U_x$. Nadalje, za svaki $x \in X$ skup U_x je otvoren u metričkom prostoru (X, d) pa postoji $r_x > 0$ takav da je

$$K(x, r_x) \subseteq U_x. \tag{3.1}$$

Familija $\Big\{K\Big(x, \frac{r_x}{2}\Big) \mid x \in X\Big\}$ je otvoreni pokrivač od (X, d) pa budući da je (X, d) kompaktan postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \ldots, x_n \in X$ takvi da je

$$X = K\Big(x_1, \frac{r_{x_1}}{2}\Big) \cup \cdots \cup K\Big(x_n, \frac{r_{x_n}}{2}\Big). \tag{3.2}$$

Neka je $\lambda = \min\Big\{\frac{r_{x_1}}{2}, \ldots, \frac{r_{x_1}}{2}\Big\}$. Tvrdimo da je λ Lebesgueov broj od $\mathcal{U}$ za (X, d). Neka je A neprazan, omeđen skup u (X, d) takav da je $\operatorname{diam} A < \lambda$. Odaberimo $a_0 \in A$. Prema (3.2) postoji $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $a_0 \in K\Big(x_i, \frac{r_{x_i}}{2}\Big)$. Tvrdimo da je $A \subseteq K(x_i, r_{x_i})$. Neka je $a \in A$. Imamo

$$d(x_i, a) \leq d(x_i, a_0) + d(a_0, a) < \frac{r_{x_i}}{2} + \operatorname{diam} A < \frac{r_{x_i}}{2} + \lambda \leq \frac{r_{x_i}}{2} + \frac{r_{x_i}}{2} = r_{x_i},$$

dakle, $d(x_i, a) < r_{x_i}$ pa je $a \in K(x_i, r_{x_i})$. Prema tome, $A \subseteq K(x_i, r_{x_i})$ pa iz (3.1) slijedi

$$A \subseteq U_{x_i}.$$

Dakle, A je podskup nekog elementa od $\mathcal{U}$. Time smo dokazali da je λ Lebesgueov broj od $\mathcal{U}$ za (X, d).

□

Teorem 3.0.3. *Neka je d euklidska metrika na* $[0,1]$. *Tada je* $([0,1],d)$ *povezan metrički prostor.*

Dokaz. Iz teorema 2.0.6 i propozicije 2.0.5 slijedi da je $([0,1],d)$ kompaktan metrički prostor. Pretpostavimo da metrički prostor $([0,1],d)$ nije povezan. Tada postoji separacija (U,V) od $([0,1],d)$. Familija $\{U,V\}$ je očito otvoreni pokrivač od $([0,1],d)$. Prema prethodnom teoremu postoji Lebesgueov broj λ od $\{U,V\}$ za $([0,1],d)$. Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\frac{1}{n} < \lambda.$$

Za $i \in \{0,\dots,n-1\}$ neka je $A_i = \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$. Uočimo da je $[0,1] = A_0 \cup \dots \cup A_{n-1}$ te da je

$$\operatorname{diam} A = \frac{1}{n}, \forall i \in \{0,\dots,n-1\}.$$

Nadalje, za svaki $i \in \{0,\dots,n-2\}$ vrijedi $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$. Imamo $\operatorname{diam} A_0 = \frac{1}{n} < \lambda$ pa budući da je λ Lebesgueov broj od $\{U,V\}$ za $([0,1],d)$ vrijedi

$$A_0 \subseteq U \text{ ili } A_0 \subseteq V.$$

Promotrimo slučaj kad je $A_0 \subseteq U$. Imamo $\operatorname{diam} A_1 = \frac{1}{n} < \lambda$ pa je i $A_1 \subseteq U$ ili $A_1 \subseteq V$. No kada bi vrijedilo $A_1 \subseteq V$, onda bi zbog $A_0 \cap A_1 \neq \emptyset$ vrijedilo $U \cap V \neq \emptyset$ što je nemoguće. Stoga je $A_1 \subseteq U$.
Isto tako sada zaključujemo da je $A_2 \subseteq U$ te također $A_3 \subseteq U, \dots, A_{n-1} \subseteq U$. Prema tome je $[0,1] \subseteq U$ pa slijedi da je $V = \emptyset$, što je nemoguće. Analogno dobivamo da $A_0 \subseteq V$ vodi na kontradikciju. Prema tome, metrički prostor $([0,1],d)$ je povezan.

□

Propozicija 3.0.4. *Neka su* $(X,\mathcal{T})$ *i* $(Y,\mathcal{S})$ *topološki prostori te neka je* $f : X \to Y$ *surjekcija neprekidna s obzirom na topologije* $\mathcal{T}$ *i* $\mathcal{S}$. *Pretpostavimo da je topološki prostor* $(X,\mathcal{T})$ *povezan. Tada je topološki prostor* $(Y,\mathcal{S})$ *povezan.*

Dokaz. Pretpostavnimo suprotno. Tada postoji separacija (U,V) topološkog prostora $(Y,\mathcal{S})$. Vrijedi $U,V \in \mathcal{S}$ pa je $f^{-1}(U), f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. Iz $U \cap V = \emptyset$ slijedi

$$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset.$$

Nadalje, iz $Y = U \cup V$ slijedi

$$X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V).$$

Vrijedi da je $U \neq \emptyset$ pa postoji $y \in U$. Budući da je f surjekcija postoji $x \in X$ takav da je $f(x) = y$. Dakle, $f(x) \in U$ pa je $x \in f^{-1}(U)$. Prema tome, $f^{-1}(U)$ je neprazan skup. Analogno dobivamo da je $f^{-1}(V)$ neprazan skup. Sve zajedno,

$$(f^{-1}(U), f^{-1}(V))$$

je separacija od $(X, \mathcal{T})$. No to je nemoguće jer je $(X, \mathcal{T})$ povezan topološki prostor. Zaključak: $(Y, \mathcal{S})$ je povezan.

□

Korolar 3.0.5. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori te neka je $f : X \to Y$ surjekcija neprekidna s obzirom na metrike d i d'. Pretpostavimo da je metrički prostor (X, d) povezan. Tada je metrički prostor (Y, d') povezan.*

Dokaz. Prema napomeni 2.0.7 funkcija f je neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}_d$ i $\mathcal{T}_{d'}$. Topološki prostor $(X, \mathcal{T}_d)$ je povezan pa iz prethodne propozicije slijedi da je $(Y, \mathcal{T}_{d'})$ povezan topološki prostor. Time je dokazana tvrdnja korolara.

□

3.1 Baza topologije

Neka je $\mathcal{T}$ topologija na skupu X te neka je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ familija skupova koja ima svojstvo da se svaki neprazan element U od $\mathcal{T}$ može napisati kao unija nekih elemenata od $\mathcal{B}$. Tada za $\mathcal{B}$ kažemo da je ***baza topologije*** $\mathcal{T}$.

Uočimo sljedeće: ako je $\mathcal{T}$ topologija na skupu X, onda je $\mathcal{T}$ baza topologije $\mathcal{T}$.

Propozicija 3.1.1. *Neka je $\mathcal{T}$ topologija na skupu X te neka je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Tada je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$ ako i samo ako za svaki $U \in \mathcal{T}$ i za svaki $x \in U$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq U$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$. Neka su $U \in \mathcal{T}$ i $x \in U$. Znamo da je

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha,$$

gdje je $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ neka indeksirana familija elemenata od $\mathcal{B}$. Slijedi da postoji $\alpha \in A$ takav da je $x \in B_\alpha$. Očito je $B_\alpha \subseteq U$.

Obratno, pretpostavimo da za svaki $U \in \mathcal{T}$ i za svaki $x \in U$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je

$$x \in B \subseteq U.$$

Neka je $U \in \mathcal{U}, U \neq \emptyset$. Tada za svaki $x \in U$ postoji $B_x \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_x \subseteq U$. Slijedi da je

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x.$$

Prema tome, $\mathcal{B}$ je baza topologije $\mathcal{T}$.

□

Primjer 3.1.2. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $\mathcal{B} = \{K(x, r) \mid x \in X, r > 0\}$. Iz prethodne propozicije slijedi da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_d$.*

Propozicija 3.1.3. *Neka su $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ topologije na skupu X te neka je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_1$ i baza topologije $\mathcal{T}_2$. Tada je $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.*

Dokaz. Neka je $U \in \mathcal{T}_1$. Tada je $U = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$, gdje je B_α indeksirana familija elemenata od $\mathcal{B}$. Budući da je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_2$ imamo da je $B_\alpha \in \mathcal{T}_2$, za svaki $\alpha \in A$ pa je $\bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha \in \mathcal{T}_2$, tj. $U \in \mathcal{T}_2$. Time smo dokazali da je $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, a analogno dobivamo da je $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$.

□

Propozicija 3.1.4. *Neka je X neprazan skup te neka je $\mathcal{B}$ familija podskupova od X koja ima sljedeća svojstva:*

1. $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$,
2. *ako su $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ i $x \in B_1 \cap B_2$, onda postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Tada postoji jedinstvena topologija $\mathcal{T}$ na X kojoj je $\mathcal{B}$ baza.

Dokaz. Neka je $\mathcal{T} = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq U\}$. Tvrdimo da je $\mathcal{T}$ topologija na X kojoj je $\mathcal{B}$ baza. Očito je $\emptyset \in \mathcal{T}$. Iz svojstva 1. slijedi da je $X \in \mathcal{T}$.

Pretpostavimo da je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{T}$. Jasno je da je $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \subseteq X$. Neka je $x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Tada postoji $\alpha \in A$ takav da je $x \in U_\alpha$. Budući da je $U_\alpha \in \mathcal{T}$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq U_\alpha$. Slijedi $x \in B \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Prema tome je

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}.$$

Pretpostavimo da su $U, V \in \mathcal{T}$. Neka je $x \in U \cap V$. Tada je $x \in U$ i $x \in V$ pa postoje $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ takvi da je $x \in B_1 \subseteq U$ i $x \in B_2 \subseteq V$. Tada je $x \in B_1 \cap B_2 \subseteq U \cap V$. Iz svojstva 2. slijedi da postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ pa je $x \in B_3 \subseteq U \cap V$. Dakle,

$$U \cap V \in \mathcal{T}.$$

Ovim smo dokazali da je $\mathcal{T}$ topologija na X. Očito je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, a iz definicije od $\mathcal{T}$ i propozicije 3.1.1 slijedi da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$. Da je $\mathcal{T}$ jedinstvena topologija kojoj je $\mathcal{B}$ baza slijedi iz prethodne propozicije.

□

Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori. Neka je

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{S}\}.$$

Tada je $\mathcal{B}$ familija podskupova od $X \times Y$. Tvrdimo da postoji jedinstvena topologija na $X \times Y$ kojoj je $\mathcal{B}$ baza.

Dovoljno je provjeriti da su zadovoljene pretpostavke prethodne propozicije. Iz $X \in \mathcal{T}, Y \in \mathcal{S}$ slijedi $X \times Y \in \mathcal{B}$ pa je jasno

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X \times Y.$$

Neka su $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Tada je $B_1 = U_1 \times V_1$ i $B_2 = U_2 \times V_2$ gdje su $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ i $V_1, V_2 \in \mathcal{S}$. Imamo

$$B_1 \cap B_2 = (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

pa je $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ (jer je $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ i $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{S}$). Dakle,

$$B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}, \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}.$$

Iz ovoga slijedi da je zadovoljen drugi uvjet iz prethodne propozicije. Dakle, postoji jedinstvena topologija $\mathcal{R}$ na $X \times Y$ kojoj je $\mathcal{B}$ baza. Za $\mathcal{R}$ kažemo da je ***produktna topologija*** na $X \times Y$ (određena topologijama $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$), a za topološki prostor $(X \times Y, \mathcal{R})$ kažemo da je ***produkt topoloških prostora*** $(X, \mathcal{T}$ i $(Y, \mathcal{S})$.

Teorem 3.1.5. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $(X \times Y, \mathcal{R})$ njihov produkt. Neka je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$ te neka je L kompaktan skup u $(Y, \mathcal{S})$. Tada je $K \times L$ kompaktan skup u $(X \times Y, \mathcal{R})$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{W}$ otvoreni pokrivač od $K \times L$ u $(X \times Y, \mathcal{R})$ te neka je $x \in K$. Za svaki $y \in L$ vrijedi $(x, y) \in K \times L$ pa postoji $W_y \in \mathcal{W}$ takav da je $(x, y) \in W_y$. Neka je $y \in L$. Skup W_y je otvoren u $(X \times Y, \mathcal{R})$, tj. $W_y \in \mathcal{R}$ pa iz $(x, y) \in W_y$ i činjenice da je $\{U \times V \mid U \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{S}\}$ baza topologije $\mathcal{R}$ slijedi da postoje $U_y \in \mathcal{T}$ i $V_y \in \mathcal{S}$ takvi da je

$$(x, y) \in U_y \times V_y \subseteq W_y.$$

Uočimo da je $x \in U_y$ i $y \in V_y$, za svaki $y \in L$. Familija $\{V_y \mid y \in L\}$ je otvoreni pokrivač skupa L u topološkom prostoru $(Y, \mathcal{S})$. Budući da je L kompaktan u $(Y, \mathcal{S})$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $y_1, \ldots, y_n \in L$ takvi da je

$$L \subseteq V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}.$$

Neka je $N = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$. Očito je $x \in N$ i $N \in \mathcal{T}$. Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi

$$N \times V_{y_i} \subseteq U_{y_i} \times V_{y_1} \subseteq W_{y_i}.$$

Stoga je

$$N \times L \subseteq N \times (V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}) = (N \times V_{y_1}) \cup \cdots \cup (N \times V_{y_n}) \subseteq W_{y_1} \cup \cdots \cup W_{y_n}.$$

Dakle, skup $N \times L$ je dobar za $\mathcal{W}$. Dakle, za svaki $x \in K$ postoji $N_x \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in N_x$ te da je $N_x \times L$ dobar za $\mathcal{W}$.

Familija $\{N_x \mid x \in K\}$ je otvoreni pokrivač skupa K u $(X, \mathcal{T})$. Budući da je K kompaktan, postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \ldots, x_n \in K$ takvi da je

$$K \subseteq N_{x_1} \cup \cdots \cup N_{x_n}.$$

Slijedi

$$K \times L \subseteq (N_{x_1} \cup \cdots \cup N_{x_n}) \times L = (N_{x_1} \times L) \cup \cdots \cup (N_{x_n} \times L).$$

Skupovi $N_{x_1} \times L, \ldots, N_{x_n} \times L$ su dobri za $\mathcal{W}$ pa je i njihova unija dobar skup za $\mathcal{W}$. Budući da je $K \times L$ poskup te unije i taj skup je dobar za $\mathcal{W}$. Prema tome, $K \times L$ je dobar za svaki svoj otvoreni pokrivač u $(X \times Y, \mathcal{R})$ pa je stoga kompaktan u $(X \times Y, \mathcal{R})$.

□

Korolar 3.1.6. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ kompaktni topološki prostori te neka je $(X \times Y, \mathcal{R})$ njihov produkt. Tada je $(X \times Y, \mathcal{R})$ kompaktan topološki prostor.*

Neka su (X, p) i (Y, q) metrički prostori. Definiramo funkciju $d : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$ sa

$$d((x_1 y_1), (x_2, y_2)) = \max\{p(x_1, x_2), q(y_1, y_2)\}.$$

Tvrdimo da je d metrika na $X \times Y$. Jedino netrivijalno svojstvo koje treba provjeriti je nejednakost trokuta. Neka su $a_1, a_2, a_3 \in X \times Y, a_1 = (x_1, y_1), a_2 = (x_2, y_2)$ i $a_3 = (x_3, y_3)$. Imamo

$$p(x_1, x_2) \leq p(x_1, x_3) + p(x_3, x_2) \leq d(a_1, a_3) + d(a_3, a_2)$$

i

$$q(y_1, y_2) \leq q(y_1, y_3) + q(y_3, y_2) \leq d(a_1, a_3) + d(a_3, a_2).$$

Stoga je $\max\{p(x_1, x_2), q(y_1, y_2)\} \leq d(a_1, a_3) + d(a_3, a_2)$, tj.

$$d(a_1, a_2) \leq d(a_1, a_3) + d(a_3, a_2).$$

Prema tome, d je metrika na $X \times Y$. Za d kažemo da je ***produktna metrika*** na $X \times Y$ (određena metrikama p i q), a za metrički prostor $(X \times Y, d)$ kažemo da je ***produkt metričkih prostora*** (X, p) i (Y, q).

Lema 3.1.7. *Neka su (X, p) i (Y, q) metrički prostori te neka je $(X \times Y, d)$ njihov produkt. Neka su $x_0 \in X, y_0 \in Y$ i $r > 0$. Tada je*

$$K_d((x_0, y_0), r) = K_p(x_0, r) \times K_q(y_0, r).$$

Dokaz. Neka su $x \in X$ i $y \in Y$. Tada vrijedi:

$$(x, y) \in K_d((x_0, y_0), r) \Leftrightarrow d((x, y), (x_0, y_0)) < r$$

$$\Leftrightarrow \max\{p(x, x_0), q(y, y_0)\} < r$$

$$\Leftrightarrow p(x, x_0) < r \text{ i } q(y, y_0) < r$$

$$\Leftrightarrow x \in K_p(x_0, r) \text{ i } y \in K_q(y_0, r)$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in K_p(x_0, r) \times K_q(y_0, r)$$

pa slijedi tvrdnja leme.

□

Teorem 3.1.8. *Neka su (X, p) i (Y, q) metrički prostori te neka je $(X \times Y, d)$ njihov produkt. Tada je $(X \times Y, \mathcal{T}_d)$ produkt topoloških prostora $(X, \mathcal{T}_p)$ i $(Y, \mathcal{T}_q)$.*

Dokaz. Prema definiciji produktne topologije treba dokazati da je familija $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_p, V \in \mathcal{T}_q\}$ baza topologije $\mathcal{T}_d$.

Dokažimo prvo da je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_d$. Neka su $U \in \mathcal{T}_p, V \in \mathcal{T}_q$. Želimo dokazati da je $U \times V \in \mathcal{T}_d$. Neka je $z \in U \times V$. Tada je $z = (x, y)$, gdje je $x \in U$ i $y \in V$. Imamo da je U otvoren skup u (X, p) (jer je $U \in \mathcal{T}_p$) pa postoji $r_1 > 0$ takav da je $K_p(x, r_1) \subseteq U$. Analogno dobivamo da postoji $r_2 > 0$ takav da je $K_q(y, r_2) \subseteq V$. Neka je $r = \min\{r_1, r_2\}$. Tada je

$$K_p(x, r) \subseteq U \text{ i } K_q(y, r) \subseteq V$$

pa je

$$K_p(x, r) \times K_q(y, r) \subseteq U \times V.$$

Iz prethodne leme slijedi da je

$$K_d(z, r) \subseteq U \times V.$$

Ovim smo pokazali da je $U \times V$ otvoren skup u metričkom prostoru $(X \times Y, d)$, dakle $U \times V \in \mathcal{T}_d$. Prema tome je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_d$.

Neka je $W \in \mathcal{T}_d$ te neka je $z \in W$. Tada je W otvoren skup u $(X \times Y, d)$ pa postoji $r > 0$ takav da je $K(z, r) \subseteq W$. Iz prethodne leme slijedi da je $K(z, r) \in \mathcal{B}$. Dakle, postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $z \in B \subseteq W$. Zaključujemo da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_d$ pa slijedi tvrdnja teorema.

□

Korolar 3.1.9. *Neka su (X, p) i (Y, q) kompaktni metrički prostori te neka je $(X \times Y, d)$ njihov produkt. Tada je $(X \times Y, d)$ kompaktan metrički prostor.*

Dokaz. Prema teoremu 3.1.8 $(X \times Y, \mathcal{T}_d)$ je produkt topoloških prostora $(X, \mathcal{T}_p)$ i $(Y, \mathcal{T}_q)$ koji su očito kompaktni. Stoga je prema korolaru 3.1.6 $(X \times Y, \mathcal{T}_d)$ kompaktan topološki prostor. Dakle, $(X \times Y, d)$ je kompaktan metrički prostor.

□

Korolar 3.1.10. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $(X \times Y, \mathcal{R})$ njihov produkt. Pretpostavimo da su topološki prostori $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ metrizabilni. Tada je i topološki prostor $(X \times Y, \mathcal{R})$ metrizabilan.*

Dokaz. Postoje metrika p na X takva da je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_p$ i metrika q na Y takva da je $\mathcal{S} = \mathcal{T}_q$. Neka je d produktna topologija na $X \times Y$ određena metrikama p i q. Prema teoremu 3.1.8 $(X \times Y, \mathcal{T}_d)$ je produkt topoloških prostora $(X, \mathcal{T}_p)$ i $(Y, \mathcal{T}_q)$, tj. produkt topoloških prostora $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$. S druge strane i $(X \times Y, \mathcal{R})$ je produkt ovih topoloških prostora pa slijedi $\mathcal{R} = \mathcal{T}_d$. Time je dokazana tvrdnja korolara.

□

3.2 Hausdorffov prostor

Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je ***Hausdorffov*** ako za sve $x, y \in X$ takve da je $x \neq y$ postoje $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da je $x \in U, y \in V$ i $U \cap V = \emptyset$.

Primjer 3.2.1. *Neka je X skup koji ima bar dva elementa. Tada topološki prostor $(X, \{\emptyset, X\})$ nije Hausdorffov.*

Propozicija 3.2.2. *Svaki metrizabilan topološki prostor je Hausdorffov.*

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor koji je metrizabilan. Tada je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ za neku metriku d na X. Neka su $x, y \in X, x \neq y$. Neka je $U = K\left(x, \frac{d(x,y)}{2}\right)$ i $V = K\left(y, \frac{d(x,y)}{2}\right)$. Pretpostavimo da je $U \cap V \neq \emptyset$. Tada postoji $z \in X$ takav da je $z \in U$ i $z \in V$ pa slijedi

$$d(x, z) < \frac{d(x, y)}{2} \text{ i } d(y, z) < \frac{d(x, y)}{2}.$$

Stoga je

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{d(x, y)}{2} + \frac{d(x, y)}{2} = d(x, y),$$

tj. $d(x, y) < d(x, y)$ što je kontradikcija. Prema tome, $U \cap V = \emptyset$. Očito je $x \in U$ i $y \in V$. Nadalje, U i V su otvoreni skupovi u (X, d) pa su $U, V \in \mathcal{T}_d$, tj. $U, V \in \mathcal{T}$. Prema tome, topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ je Hausdorffov.

□

Propozicija 3.2.3. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $(X \times Y, \mathcal{R})$ njihov produkt. Pretpostavimo da su topološki prostori $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ Hausdorffovi. Tada je i topološki prostor $(X \times Y, \mathcal{R})$ Hausdorffov.*

Dokaz. Neka su $z_1, z_2 \in X \times Y$ točke takve da je $z_1 \neq z_2$. Imamo $z_1 = (x_1, y_1)$ i $z_2 = (x_2, y_2)$, gdje su $x_1, x_2 \in X$ i $y_1, y_2 \in Y$. Iz $z_1 \neq z_2$ slijedi $x_1 \neq x_2$ ili $y_1 \neq y_2$.
1. slučaj: $x_1 \neq x_2$
Tada postoje $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ takvi da je $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ i $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Tada su $U_1 \times Y$ i $U_2 \times Y$ disjunktni otvoreni skupovi u $(X \times Y, \mathcal{R})$ takvi da je $z_1 \in U_1 \times Y$ i $z_2 \in U_2 \times Y$.
2. slučaj: $y_1 \neq y_2$
Tada postoje disjunktni otvoreni skupovi V_1, V_2 u $(Y, \mathcal{S})$ takvi da je $y_1 \in V_1$ i $y_2 \in V_2$ pa su $X \times V_1$ i $X \times V_2$ disjunktni otvoreni skupovi u $(X \times Y, \mathcal{R})$ takvi da je $z_1 \in X \times V_1$ i $z_2 \in X \times V_2$.
Zaključak: topološki prostor $(X \times Y, \mathcal{R})$ je Hausdorffov.

□

Propozicija 3.2.4. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $(X \times Y, \mathcal{R})$ njihov produkt. Neka su $p_1 : X \times Y \to X$ i $p_2 : X \times Y \to Y$ projekcije na prvu i drugu koordinatu (tj. $p_1(x, y) = x, p_2(x, y) = y, \forall x \in X, \forall y \in Y$). Tada je p_1 neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{R}$ i $\mathcal{T}$, a p_2 neprekidna s obzirom na $\mathcal{R}$ i $\mathcal{S}$.*

Dokaz. Neka je $U \in \mathcal{T}$. Tada je ${p_1}^{-1}(U) = U \times Y$ pa je

$$ {p_1}^{-1}(U) \in \mathcal{R} $$

(jer je $U \in \mathcal{T}$ i $Y \in \mathcal{S}$). Dakle, funkcija p_1 je neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{R}$ i $\mathcal{T}$.
Analogno dobivamo da je p_2 neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{R}$ i $\mathcal{S}$.

□

Napomena 3.2.5. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ funkcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$. Tada ćemo za funkciju f reći da je $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ - neprekidna.*

Propozicija 3.2.6. *Neka su $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ i $(Z, \mathcal{W})$ topološki prostori te neka su $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ funkcije takve da je f $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ - neprekidna te je g $(\mathcal{S}, \mathcal{W})$ - neprekidna. Tada je funkcija $g \circ f$ $(\mathcal{T}, \mathcal{W})$ - neprekidna.*

Dokaz. Neka je $W \in \mathcal{W}$. Vrijedi

$$ (g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)). $$

Iz $W \in \mathcal{W}$ slijedi da je $g^{-1}(W) \in \mathcal{S}$ pa je $f^{-1}(g^{-1}(W)) \in \mathcal{T}$. Dakle, $(g \circ f)^{-1}(W) \in \mathcal{T}$.
Zaključak: funkcija $g \circ f$ je $(\mathcal{T}, \mathcal{W})$ - neprekidna.

□

Propozicija 3.2.7. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori, neka je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{S}$ te neka je $f : X \to Y$. Tada je f $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ - neprekidna ako i samo ako za svaki $B \in \mathcal{B}$ vrijedi $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.*

Dokaz. Ako je f neprekidna, onda je $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}, \forall B \in \mathcal{B}$ jer je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}$.

Obratno, pretpostavimo da za svaki $B \in \mathcal{B}$ vrijedi $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$. Neka je $V \in \mathcal{S}$. Tada postoji indeksirana familija $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ elemenata od $\mathcal{B}$ takva da je $V = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$. Imamo

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(B_\alpha).$$

Prema pretpostavci za svaki $\alpha \in A$ vrijedi $f^{-1}(B_\alpha) \in \mathcal{T}$. Stoga je $\bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(B_\alpha) \in \mathcal{T}$, tj. $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. Dakle, f je $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ - neprekidna.

□

Propozicija 3.2.8. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $(X \times Y, \mathcal{R})$ njihov produkt. Neka su $p_1 : X \times Y \to X$ i $p_2 : X \times Y \to Y$ projekcije na prvu i drugu koordinatu. Neka je $(Z, \mathcal{W})$ topološki prostor te $f : Z \to X \times Y$. Tada je f $(\mathcal{W}, \mathcal{R})$ - neprekidna ako i samo ako je $p_1 \circ f$ $(\mathcal{W}, \mathcal{T})$ - neprekidna i $p_2 \circ f$ $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ - neprekidna.*

Dokaz. Ako je f neprekidna, onda iz propozicija 3.2.6 i 3.2.7 slijedi da su $p_1 \circ f$ i $p_2 \circ f$ neprekidne.

Obratno, pretpostavimo da je $p_1 \circ f$ $(\mathcal{W}, \mathcal{T})$ - neprekidna te da je $p_2 \circ f$ $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ - neprekidna. Familija $\{U \times V \mid U \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{S}\}$ je baza topologije $\mathcal{R}$ pa je prema prethodnoj propoziciji dovoljno pokazati da je $f^{-1}(U \times V) \in \mathcal{W}, \forall U \in \mathcal{T}, \forall V \in \mathcal{S}$. Neka su $U \in \mathcal{T}$ i $V \in \mathcal{S}$. Tada je

$$\begin{aligned}
f^{-1}(U \times V) &= \{z \in Z \mid f(z) \in U \times V\} \\
&= \{z \in Z \mid (p_1(f(z)), p_2(f(z))) \in U \times V\} \\
&= \{z \in Z \mid p_1(f(z)) \in U, p_2(f(z)) \in V\} \\
&= \{z \in Z \mid p_1(f(z)) \in U\} \cap \{z \in Z \mid p_2(f(z)) \in V\} \\
&= \{z \in Z \mid (p_1 \circ f)(z) \in U\} \cap \{z \in Z \mid (p_2 \circ f)(z) \in V\} \\
&= (p_1 \circ f)^{-1}(U) \cap (p_2 \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{W}
\end{aligned}$$

jer je $(p_1 \circ f)^{-1}(U) \in \mathcal{W}$ i $(p_2 \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{W}$. Prema tome, $f^{-1}(U \times V) \in \mathcal{W}$.
Zaključak: f je $(\mathcal{W}, \mathcal{R})$ - neprekidna.

□

Propozicija 3.2.9. *1. Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori, $y_0 \in Y$ i $f : X \to Y$ funkcija definirana s $f(x) = y_0, \forall x \in X$. Tada je f neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ ($(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ - neprekidna).*

2. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Tada je identiteta $id_x : X \to X$ neprekidna funkcija s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}$ ($(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ - neprekidna).*

Dokaz. 1. Neka je $V \in \mathcal{S}$. Ako je $y_0 \in V$, onda je $f^{-1}(V) = X$, a ako $y_0 \notin V$, onda je $f^{-1}(V) = \emptyset$. U svakom slučaju $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. Dakle, f je neprekidna.

2. Neka je $U \in \mathcal{T}$. Imamo

$$id_x^{-1}(U) = \{x \in X \mid id_x(x) \in U\} = \{x \in X \mid x \in U\} = U,$$

dakle $id_x^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Time je tvrdnja dokazana.

□

Teorem 3.2.10. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ povezani topološki prostori te neka je $(X \times Y, \mathcal{R})$ njihov produkt. Tada je i $(X \times Y, \mathcal{R})$ povezan topološki prostor.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji separacija (W_1, W_2) topološkog prostora $(X \times Y, \mathcal{R})$. Neka je $x_0 \in X$. Tvrdimo da je skup $\{x_0\} \times Y$ čitav sadržan u W_1 ili W_2. Definirajmo funkciju $f : Y \to X \times Y$ s

$$f(y) = (x_0, y).$$

Iz prethodne dvije propozicije slijedi da je f $(\mathcal{S}, \mathcal{R})$ - neprekidna. Uočimo da je

$$f(Y) = \{x_0\} \times Y.$$

Kada bi $\{x_0\} \times Y$ sjekao i W_1 i W_2, onda bi $f^{-1}(W_1)$ i $f^{-1}(W_2)$ bili neprazni podskupovi od Y, otvoreni jer je f neprekidna, disjunktni jer su W_1 i W_2 disjunktni te takvi da je $Y = f^{-1}(W_1) \cup f^{-1}(W_2)$ jer je $X \times Y = W_1 \cup W_2$. No to je nemoguće jer je $(Y, \mathcal{S})$ povezan. Dakle, $\{x_0\} \times Y$ ne može sjeći i W_1 i W_2 pa je $\{x_0\} \times Y$ čitav sadržan u W_1 ili W_2. Skupovi W_1 i W_2 su neprazni pa postoje $x_1, x_2 \in X$ i $y_1, y_2 \in Y$ takvi da je $(x_1, y_1) \in W_1$ i $(x_2, y_2) \in W_2$. Slijedi da je $(\{x_1\} \times Y) \cap W_1 \neq \emptyset$ pa je

$$\{x_1\} \times Y \subseteq W_1. \tag{3.3}$$

Analogno dobivamo da je

$$\{x_2\} \times Y \subseteq W_2. \tag{3.4}$$

Odaberimo $y_0 \in Y$. Definiramo funkciju $g : X \to X \times Y$ s $g(x) = (x, y_0)$. Iz prethodnih dviju propozicija slijedi da je g $(\mathcal{T}, \mathcal{R})$ - neprekidna. Iz (3.3) slijedi da je

$$g(x_1) = (x_1, y_0) \in \{x_1\} \times Y \subseteq W_1$$

pa je $x_1 \in g^{-1}(W_1)$. Analogno koristeći (3.4) dobivamo da je $x_2 \in g^{-1}(W_2)$. Prema tome, $g^{-1}(W_1)$ i $g^{-1}(W_2)$ su neprazni, otvoreni skupovi u $(X, \mathcal{T})$, disjunktni su i u uniji daju čitav X. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ povezan.
Zaključak: Topološki prostor $(X \times Y, \mathcal{R})$ je povezan.

□

Korolar 3.2.11. *Neka su (X, p) i (Y, q) povezani metrički prostori te neka je $(X \times Y, d)$ njihov produkt. Tada je $(X \times Y, d)$ povezan metrički prostor.*

Dokaz. Koristeći prethodni teorem ovu tvrdnju dokazujemo na isti način kao korolar 3.1.9. □

3.3 Kontinuumi

Za metrički prostor (X, d) kažemo da je ***kontinuum*** ako je (X, d) kompaktan i povezan metrički prostor.

Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je ***Hausdorffov kontinuum*** ako je $(X, \mathcal{T})$ povezan i kompaktan Hausdorffov prostor.

Uočimo sljedeće: ako je (X, d) metrički prostor, onda je (X, d) kontinuum ako i samo ako je $(X, \mathcal{T}_d)$ Hausdorffov kontinuum.

Primjer 3.3.1. *Neka je d euklidska metrika na $[0, 1]$. Tada je $([0, 1], d)$ kontinuum. Naime, prema teoremu 3.0.3 $([0, 1], d)$ je povezan metrički prostor. S druge strane, ako je d' euklidska metrika na $\mathbb{R}$, onda je $[0, 1]$ kompaktan skup u $(\mathbb{R}, d')$ prema teoremu 2.0.6. Očito je $d = d'|_{[0,1]\times[0,1]}$ pa je prema propoziciji 2.0.5 $([0, 1], d)$ kompaktan metrički prostor.*

Propozicija 3.3.2.

1. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ Hausdorffovi kontinuumi te neka je $(X \times Y, \mathcal{R})$ produkt topoloških prostora $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$. Tada je $(X \times Y, \mathcal{R})$ Hausdorffov kontinuum.*

2. *Neka su (X, p) i (Y, q) kontinuumi te neka je $(X \times Y, d)$ produkt metričkih prostora (X, p) i (Y, q). Tada je $(X \times Y, d)$ kontinuum.*

Dokaz. Tvrdnja 1. slijedi iz teorema 3.2.10, propozicije 3.2.3 i korolara 3.1.6, a tvrdnja 2. slijedi iz korolara 3.1.9 i 3.2.11. □

Propozicija 3.3.3. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori te neka je $f : X \to Y$ surjekcija neprekidna s obzirom na metrike d i d'. Pretpostavimo da je (X, d) kontinuum. Tada je i (Y, d') kontinuum.*

Dokaz. Iz korolara 3.0.5 slijedi da je (Y, d') povezan. Imamo da je X kompaktan skup u metričkom prostoru (X, d) pa je iz toga X kompaktan skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$. Funkcija f je $(\mathcal{T}_d, \mathcal{T}'_d)$ - neprekidna (prema napomeni 2.0.7) pa iz propozicije 2.0.8 slijedi da je $f(X)$ kompaktan skup u topološkom prostoru $(Y, \mathcal{T}_{d'})$. No $f(X) = Y$ jer je f surjekcija. Prema tome, Y je kompaktan skup u topološkom prostoru $(Y, \mathcal{T}_{d'})$, dakle Y je kompaktan skup u metričkom prostoru (Y, d') pa zaključujemo da je (Y, d') kompaktan metrički prostor. Time je tvrdnja propozicije dokazana.

□

Primjer 3.3.4. *1. Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $x \in X$. Tada je $\{x\}$ povezan skup u $(X, \mathcal{T})$. Naime, ako je $\mathcal{S}$ relativna topologija na $\{x\}$, onda je $\mathcal{S} = \{\emptyset, \{x\}\}$ pa je očito da ne postoji separacija od $(\{x\}, \mathcal{S})$.*

2. Neka je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor te neka su $x, y \in X, x \neq y$. Tada skup $\{x, y\}$ nije povezan u $(X, \mathcal{T})$. Naime, znamo da postoje $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da je $U \cap V = \emptyset, x \in U$ i $y \in V$. Neka je $\mathcal{S}$ relativna topologija na $\{x, y\}$. Vrijedi

$$\{x\} = U \cap \{x, y\} \ \ i \ \ \{y\} = V \cap \{x, y\}$$

pa zaključujemo da su

$$\{x\}, \{y\} \in \mathcal{S}.$$

Stoga je $(\{x\}, \{y\})$ separacija topološkog prostora $(\{x, y\}, \mathcal{S})$.

Primjer 3.3.5. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Tada je $[0, 1]$ povezan skup u $(\mathbb{R}, d)$. To slijedi iz teorema 3.0.3. Nadalje, ako je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$, onda je $[0, 1]$ kompaktan skup u $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$.*

Propozicija 3.3.6. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, neka je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$ te neka je F zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$ takav da je $F \subseteq K$. Tada je F kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač skupa F u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$. Tada je $\mathcal{U} \cup \{X \backslash F\}$ otvoreni pokrivač od K u $(X, \mathcal{T})$. Naime, budući da je F zatvoren u $(X, \mathcal{T})$, imamo $X \backslash F \in \mathcal{T}$ pa je

$$\mathcal{U} \cup \{X \backslash F\} \subseteq \mathcal{T}.$$

Nadalje, neka je $x \in K$. Ako je $x \in F$, onda postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $x \in U$, a ako $x \notin F$, onda je $x \in X \backslash F$. Dakle, $\mathcal{U} \cup \{X \backslash F\}$ je otvoreni pokrivač od K pa budući da je K kompaktan postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je

$$K \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n \cup X \backslash F.$$

Dakle,

$$F \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n \cup X \backslash F$$

pa zaključujemo da je

$$F \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n.$$

Prema tome, F je kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$.

□

Korolar 3.3.7. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan topološki prostor te neka je F zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. Tada je F kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$.*

Vezano uz prethodnu propoziciju, imamo da zatvoren skup općenito ne mora biti kompaktan. Naime, ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor koji nije kompaktan, onda je X zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$ koji nije kompaktan.

Postavlja se pitanje mora li (i uz koje uvjete) kompaktan skup biti zatvoren.

Primjer 3.3.8. *Neka je X skup koji ima bar dva elementa. Odaberimo podskup K od X takav da je $K \neq \emptyset$ i $K \neq X$. Skup K je kompaktan u topološkom prostoru $(X, \{\emptyset, X\})$, no K nije zatvoren u ovom topološkom prostoru.*

Teorem 3.3.9. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor te neka je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. Tada je K zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Ako je $K = \emptyset$ tvrdnja je jasna. Pretpostavimo da je K neprazan. Neka je $x \in K^c$. Za svaki $y \in K$ vrijedi $x \neq y$ pa postoje $U_y, V_y \in \mathcal{T}$ takvi da je

$$x \in U_y, y \in V_y \text{ i } U_y \cap V_y = \emptyset.$$

Skup K je kompaktan, a familija $\{V_y \mid y \in K\}$ je otvoreni pokrivač od K pa stoga postoje $n \in \mathbb{N}$ i $y_1, \ldots, y_n \in K$ takvi da je

$$K \subseteq V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}. \tag{3.5}$$

Neka je $W = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$. Tada je $x \in W$ i $W \in \mathcal{T}$. Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi

$$W \subseteq U_{y_i} \text{ i } U_{y_i} \cap V_{y_i} = \emptyset.$$

Stoga je

$$W \cap V_{y_i} = \emptyset, \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \text{tj. } W \cap (V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}) = \emptyset.$$

Iz (3.5) slijedi da je $W \cap K = \emptyset$. To znači da je $W \subseteq K^c$.

Imamo sljedeći zaključak: za svaki $x \in K^c$ postoji $W_x \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in W_x \subseteq K^c$. Stoga je $K^c = \bigcup_{x \in K^c} W_x$ iz čega slijedi da je $K^c \in \mathcal{T}$. Prema tome, K je zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$.

□

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $Y \subseteq X, Y \neq \emptyset$. Kažemo da je Y ***Hausdorffov kontinuum*** u $(X, \mathcal{T})$ ako je $(Y, \mathcal{S})$ Hausdorffov kontinuum, gdje je $\mathcal{S}$ relativna topologija na Y.

Propozicija 3.3.10. *Neka je $(Y, \mathcal{S})$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$. Pretpostavimo da je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov. Tada je $(Y, \mathcal{S})$ Hausdorffov.*

Dokaz. Neka su $a, b \in Y, a \neq b$. Budući da je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov, postoje $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da je $a \in U, b \in V$ i $U \cap V = \emptyset$. Slijedi

$$a \in U \cap Y, b \in V \cap Y, (U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset \text{ i } U \cap Y, V \cap Y \in \mathcal{S}.$$

Dakle, $(Y, \mathcal{S})$ je Hausdorffov.

□

Pretpostavimo da je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor te da je $Y \subseteq X, Y \neq \emptyset$. Tada je Y Hausdorffov kontinuum u $(X, \mathcal{T})$ ako i samo ako je Y povezan i kompaktan u $(X, \mathcal{T})$.

Neka je (X, d) metrički prostor te $Y \subseteq X, Y \neq \emptyset$. Kažemo da je Y kontinuum u $(X, \mathcal{T})$ ako je (Y, d') kontinuum, gdje je $d' = d|_{Y \times Y}$.

Propozicija 3.3.11. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka su K i L kompaktni skupovi u $(X, \mathcal{T})$. Tada je $K \cup L$ kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. Ako je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov, onda je i $K \cap L$ kompaktan skup.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $K \cup L$. Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač i od K i od L pa postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ te $m \in \mathbb{N}$ i $V_1, \ldots, V_m \in \mathcal{U}$ takvi da je

$$K \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n \text{ i } L \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_m.$$

Slijedi

$$K \cup L \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n \cup V_1 \cup \cdots \cup V_m.$$

Prema tome, $K \cup L$ je kompaktan skup.

Pretpostavimo $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov. Prema teoremu 3.3.9 skupovi K i L su zatvoreni u $(X, \mathcal{T})$. Stoga je $K \cap L$ zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$, a očito vrijedi $K \cap L \subseteq L$. Iz propozicije 3.3.6 slijedi da je $K \cap L$ kompaktan skup.

□

Iz prethodne propozicije lako zaključujemo da je unija konačno mnogo kompaktnih skupova u topološkom prostoru kompaktan skup.

Općenito, unija (beskonačno mnogo) kompaktnih skupova ne mora biti kompaktan skup. Naime, ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i K skup koji nije kompaktan u $(X, \mathcal{T})$, onda je

$$K = \bigcup_{x \in K} \{x\},$$

a za svaki $x \in K$ očito vrijedi da je $\{x\}$ kompaktan skup.

S druge strane, ako je $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija kompaktnih skupova u Hausdorffovom prostoru $(X, \mathcal{T})$, onda na isti način kao i u dokazu prethodne propozicije zaključujemo da je $\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha$ kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$.

Primjer 3.3.12. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka su a i b takvi da $a, b \notin X$ i $a \neq b$. Neka je $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cup \{X \cup \{a\}, X \cup \{b\}, X \cup \{a, b\}\}$. Tvrdimo da je $\mathcal{T}'$ topologija na $X \cup \{a, b\}$.*

Očito vrijedi $\emptyset, X \cup \{a, b\} \in \mathcal{T}'$.

Neka je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{T}'$. Razlikujemo nekoliko slučajeva:

1. *$U_\alpha \in \mathcal{T}, \forall \alpha \in A$. Tada je $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$ pa je $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}'$.*
2. *Postoji $\alpha_0 \in A$ takav da je $U_{\alpha_0} = X \cup \{a, b\}$. Tada je $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X \cup \{a, b\}$.*
3. *Postoji $\alpha_0 \in A$ takav da je $U_{\alpha_0} = X \cup \{a\}$ te je $U_\alpha \neq X \cup \{b\}$ i $U_\alpha \neq X \cup \{a, b\}$, za svaki $\alpha \in A, \alpha \neq \alpha_0$. Tada je $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X \cup \{a\}$.*
4. *Postoji $\alpha_0 \in A$ takav da je $U_{\alpha_0} = X \cup \{b\}$ te je $U_\alpha \neq X \cup \{a\}$ i $U_\alpha \neq X \cup \{a, b\}$, za svaki $\alpha \in A, \alpha \neq \alpha_0$. Tada je $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X \cup \{b\}$.*
5. *Postoje $\alpha_0, \alpha_1 \in A$ takvi da je $U_{\alpha_0} = X \cup \{a\}$, $U_{\alpha_1} = X \cup \{b\}$. Tada je $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X \cup \{a, b\}$.*

U svakom slučaju

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}'.$$

Neka su $U, V \in \mathcal{T}'$. Imamo nekoliko slučajeva:

1. *$U, V \in \mathcal{T}$. Tada je $U \cap V \in \mathcal{T}$.*
2. *$U \in \mathcal{T}, V \notin \mathcal{T}$. Tada je $U \cap V = U$.*
3. *$U \notin \mathcal{T}, V \in \mathcal{T}$. Tada je $U \cap V = V$.*
4. *$U, V \in \{X \cup \{a\}, X \cup \{b\}, X \cup \{a, b\}\}$. Tada je $U \cap V \in \{X, X \cup \{a\}, X \cup \{b\}, X \cup \{a, b\}\}$.*

U svakom slučaju,

$$U \cap V \in \mathcal{T}'.$$

Prema tome, $\mathcal{T}'$ je topologija na X' gdje je $X' = X \cup \{a, b\}$.

Tvrdimo da je skup $X \cup \{a\}$ kompaktan u topološkom prostoru $(X', \mathcal{T}')$. Neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $X \cup \{a\}$ u $(X', \mathcal{T}')$. Iz

$$X \cup \{a\} \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$$

slijedi da postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $a \in U$. Zbog $U \in \mathcal{T}'$ imamo $U = X \cup \{a\}$ ili $U = X \cup \{a, b\}$. Svakako, $X \cup \{a\} \subseteq U$. Prema tome, $X \cup \{a\}$ je kompaktan skup u $(X', \mathcal{T}')$. Analogno dobivamo da je $X \cup \{b\}$ kompaktan skup u $(X', \mathcal{T}')$.

Uzmimo sada da je X beskonačan skup te da je $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Odaberimo a i b takve da $a, b \notin X$ te da je $a \neq b$. Neka su X' i $\mathcal{T}'$ definirani kao gore. Neka je

$$\mathcal{U} = \{\{x \mid x \in X\}.$$

Očito je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od X u topološkom prostoru $(X', \mathcal{T}')$, no jasno je da ne postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $X \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$. Prema tome, skup X nije kompaktan u $(X', \mathcal{T}')$. No,

$$X = (X \cup \{a\}) \cap (X \cup \{b\}),$$

a $X \cup \{a\}$ i $X \cup \{b\}$ su kompaktni skupovi u $(X', \mathcal{T}')$.

Prethodni primjer pokazuje da presjek dva kompaktna skupa ne mora biti kompaktan skup.

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $A \subseteq X$ te $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da je

$$A \subseteq U \cup V, A \cap U \cap V = \emptyset, U \cap A \neq \emptyset \text{ i } V \cap A \neq \emptyset.$$

Tada za uređeni par (U, V) kažemo da je ***separacija skupa*** A u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$.

Propozicija 3.3.13. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $A \subseteq X$. Tada je A povezan skup u $(X, \mathcal{T})$ ako i samo ako ne postoji separacija skupa A u $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je A povezan skup u $(X, \mathcal{T})$. Pretpostavimo da je (U, V) separacija skupa A u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$. Slijedi da je $A \neq \emptyset$ i da je $(A, \mathcal{T}_A)$ povezan topološki prostor, gdje je $\mathcal{T}_A$ relativna topologija na A. Iz definicije separacije skupa u topološkom prostoru slijedi da je

$$(U \cap A, V \cap A)$$

separacija topološkog prostora $(A, \mathcal{T}_A)$, što je nemoguće. Prema tome, ne postoji separacija skupa A u $(X, \mathcal{T})$.

Obratno, pretpostavimo da ne postoji separacija skupa A u $(X, \mathcal{T})$. Želimo pokazati da je A povezan skup u $(X, \mathcal{T})$. To je jasno ako je $A = \emptyset$. Uzmimo stoga da je A neprazan. Pretpostavimo da A nije povezan u $(X, \mathcal{T})$. Tada topološki prostor $(A, \mathcal{T}_A)$ nije povezan pa postoji separacija (V_1, V_2) topološkog prostora $(A, \mathcal{T}_A)$. Slijedi da postoje $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ takvi da je

$$V_1 = U_1 \cap A \text{ i } V_2 = U_2 \cap A.$$

Lako se provjeri da je (U_1, U_2) separacija skupa A u $(X, \mathcal{T})$, no to je u kontradikciji s pretpostavkom da takva separacija ne postoji. Prema tome, A je povezan skup u $(X, \mathcal{T})$.

□

Propozicija 3.3.14. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $(C_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija povezanih skupova u $(X, \mathcal{T})$ i T povezan skup u $(X, \mathcal{T})$. Pretpostavimo da je $C_\alpha \cap T \neq \emptyset, \forall \alpha \in A$. Tada je $(\bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha) \cup T$ povezan skup.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada prema prethodnoj propoziciji postoji separacija (U, V) skupa $(\bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha) \cup T$ u $(X, \mathcal{T})$. Pretpostavimo da je $U \cap T \neq \emptyset$ i $V \cap T \neq \emptyset$. Očito je

$$T \subseteq U \cup V \text{ i } U \cap V \cap T = \emptyset.$$

Stoga je (U, V) separacija skupa T, a to je nemoguće jer je T povezan. Stoga ne može vrijediti $U \cap T \neq \emptyset$ i $V \cap T \neq \emptyset$ pa je $U \cap T = \emptyset$ ili $V \cap T = \emptyset$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $V \cap T = \emptyset$. Slijedi da je $T \subseteq U$. Neka je $\alpha \in A$. Posve analogno zaključujemo da je $C_\alpha \cap U = \emptyset$ ili $C_\alpha \cap V = \emptyset$. No iz $C_\alpha \cap T \neq \emptyset$ i $T \subseteq U$ slijedi da je $C_\alpha \cap U \neq \emptyset$. Stoga je $C_\alpha \cap V = \emptyset$ pa iz $C_\alpha \subseteq U \cup V$ slijedi $C_\alpha \subseteq U$. Dakle, $C_\alpha \subseteq U, \forall \alpha \in A$ pa slijedi da je

$$\Big(\bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha\Big) \cup T \subseteq U.$$

Stoga je

$$\Bigg(\Big(\bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha\Big) \cup T\Bigg) \cap V = \emptyset$$

što je u kontradikciji s činjenicom da je (U, V) separacija skupa $(\bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha) \cup T$.

Zaključak: $(\bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha) \cup T$ je povezan skup.

□

Korolar 3.3.15. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $(C_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija povezanih skupova u $(X, \mathcal{T})$ takvih da je $\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha \neq \emptyset$. Tada je $\bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha$ povezan skup u $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Prema prepostavci postoji $x \in X$ takav da je $x \in C_\alpha, \forall \alpha \in A$. Definiramo $T = \{x\}$. Očito je da je T povezan skup te da za svaki $\alpha \in A$ vrijedi $C_\alpha \cap T \neq \emptyset$. Iz prethodne propozicije slijedi da je $\bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha$ povezan skup.

□

Korolar 3.3.16. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka su S i T povezani skupovi u $(X, \mathcal{T})$ takvi da je $S \cap T \neq \emptyset$. Tada je $S \cup T$ povezan skup u $(X, \mathcal{T})$.*

Korolar 3.3.17. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka su S i T kontinuumi $(X, \mathcal{T})$ takvi da je $S \cap T \neq \emptyset$. Tada je $S \cup T$ kontinuum u $(X, \mathcal{T})$.*

Propozicija 3.3.18. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ - neprekidna funkcija. Neka je $(A, \mathcal{T}_A)$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$ i $(B, \mathcal{S}_B)$*

potprostor topološkog prostora $(Y, \mathcal{S})$. *Pretpostavimo da je* $f(A) \subseteq B$. *Neka je* $g : A \to B$ *funkcija definirana sa* $g(x) = f(x), \forall x \in A$. *Tada je* g $(\mathcal{T}_A, \mathcal{S}_B)$ *- neprekidna funkcija.*

Dokaz. Neka je $V \in \mathcal{S}_B$. Tada postoji $U \in \mathcal{S}$ takav da je $V = U \cap B$. Imamo:

$$g^{-1}(V) = \{x \in A \mid g(x) \in V\}$$

$$= \{x \in A \mid g(x) \in U\}$$

$$= \{x \in A \mid f(x) \in U\}$$

$$= \{x \in X \mid f(x) \in U\} \cap A$$

$$= f^{-1}(U) \cap A.$$

Dakle,

$$g^{-1}(V) = f^{-1}(U) \cap A.$$

Funkcija f je $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ - neprekidna, a $U \in \mathcal{S}$ pa je $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Stoga je $g^{-1}(V) \in \mathcal{T}_A$.

□

Propozicija 3.3.19. *Neka su* $(X, \mathcal{T})$ *i* $(Y, \mathcal{S})$ *topološki prostori te neka je* $f : X \to Y$ $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ *- neprekidna funkcija. Pretpostavimo da je* A *povezan skup u* $(X, \mathcal{T})$. *Tada je* $f(A)$ *povezan skup u* $(Y, \mathcal{S})$.

Dokaz. Ako je $A = \emptyset$ tvrdnja je jasna. Pretpostavimo da je $A \neq \emptyset$. Tada je i $f(A) \neq \emptyset$. Neka je $B = f(A)$. Neka je $\mathcal{T}_A$ relativna topologija na A u $(X, \mathcal{T})$ te neka je $\mathcal{S}_B$ relativna topologija na B u $(Y, \mathcal{S})$. Neka je $g : A \to B$ funkcija definirana sa $g(x) = f(x), \forall x \in A$. Prema prethodnoj propoziciji g je očito surjekcija. Iz propozicije 3.0.4 slijedi da je $(B, \mathcal{S}_B)$ povezan topološki prostor. Time je tvrdnja propozicije dokazana.

□

Korolar 3.3.20. *Neka su* (X, d) *i* (Y, d') *metrički prostori, neka je* $f : X \to Y$ *funkcija neprekidna s obzirom na metrike* d *i* d' *te neka je* A *povezan skup u metričkom prostoru* (X, d). *Tada je* $f(A)$ *povezan skup u metričkom prostoru* (Y, d').

Propozicija 3.3.21. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$, *neka je* (X, p) *metrički prostor, neka je* d *euklidska metrika na* $\mathbb{R}^n$ *te neka je* $f : X \to \mathbb{R}^n$. *Neka je* $x_0 \in X$ *te neka su* $f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}$ *komponentne funkcije od* f. *Neka je* d' *euklidska metrika na* $\mathbb{R}$. *Tada je funkcija* f *neprekidna u* x_0 *s obzirom na metrike* p *i* d *ako i samo ako su funkcije* $f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}$ *neprekidne u* x_0 *s obzirom na metrike* p *i* d'.

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna u x_0. Neka je $i \in \{1, \ldots, n\}$. Za svaki $x \in X$ vrijedi

$$\begin{aligned} d'(f_i(x), f_i(x_0)) = |f_i(x) - f_i(x_0)| &= \sqrt{(f_i(x) - f_i(x_0))^2} \\ &\leq \sqrt{(f_1(x) - f_1(x_0))^2 + \cdots + (f_n(x) - f_n(x_0))^2} \\ &= d((f_1(x), \ldots, f_n(x)), (f_1(x_0), \ldots, f_n(x_0))) \\ &= d(f(x), f(x_0)). \end{aligned}$$

Dakle,

$$d'(f_i(x), f_i(x_0)) \leq d(f(x), f(x_0)), \forall x \in X. \tag{3.6}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da je f neprekidna u x_0, postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi

$$p(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Iz (3.6) slijedi da vrijedi

$$p(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f_i(x), f_i(x_0)) < \varepsilon.$$

Dakle, f_i je neprekidna u x_0.

Obratno, pretpostavimo da su $f_1, \ldots, f_n$ neprekidne u x_0. Neka je $\varepsilon > 0$. Neka je $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tada postoji $\delta_i > 0$ takav da vrijedi

$$p(x, x_0) < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(x_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}. \tag{3.7}$$

Neka je $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Neka je $x \in X$ takav da je $p(x, x_0) < \delta$. Tada iz (3.7) slijedi

$$|f_1(x) - f_1(x_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \ldots, |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

pa kvadriranjem, zbrajanjem i korjenovanjem dobijemo

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Stoga je f neprekidna u x_0.

□

Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka su $a, b \in \mathbb{R}^n$. Definiramo

$$\overline{ab} = \Big\{a + t(b - a) \mid t \in [0, 1]\Big\}.$$

Za $\overline{ab}$ kažemo da je ***segment*** u $\mathbb{R}^n$ određen točkama a i b. Uočimo da su $a, b \in \overline{ab}$.

Propozicija 3.3.22. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Tada je svaki segment u $\mathbb{R}^n$ kontinuum u metričkom prostoru $(\mathbb{R}^n, d)$.*

Dokaz. Neka su $a, b \in \mathbb{R}^n$. Definirajmo funkciju $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ sa

$$f(t) = a + t(b - a).$$

Neka je p euklidska metrika na $[0, 1]$. Tvrdimo da je funkcija f neprekidna s obzirom na metrike p i d. U tu svrhu dovoljno je dokazati da su komponentne funkcije od f neprekidne s obzirom na metrike p i d', gdje je d' euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Imamo

$$a = (a_1, \ldots, a_n) \text{ i } b = (b_1, \ldots, b_n).$$

Neka su $f_1, \ldots, f_n$ komponentne funkcije od f. Tada za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi

$$f_i(t) = a_i + t(b_i - a_i), \forall t \in [0, 1].$$

Općenito, ako su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$g(x) = \alpha + \beta x,$$

onda je g neprekidna s obzirom na metrike p i d'. Naime, neka su $x \in [0, 1]$ i $\varepsilon > 0$. Definirajmo

$$\delta = \frac{\varepsilon}{|\beta| + 1}.$$

Tada za svaki $y \in [0, 1]$ takav da je $|x - y| < \delta$ vrijedi

$$|x - y| < \frac{\varepsilon}{|\beta| + 1}$$

pa je

$$\Big(|\beta| + 1\Big)|x - y| < \varepsilon,$$

što povlači

$$|\beta||x - y| < \varepsilon,$$

tj.

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon.$$

Prema tome, funkcija g je neprekidna s obzirom na p i d'. Stoga su i funkcije $f_1, \ldots, f_n$ neprekidne s obzirom na p i d' pa je i f neprekidna s obzirom na p i d. Metrički prostor $([0, 1], p)$ je povezan (prema teoremu 3.0.3), stoga je $[0, 1]$ povezan skup u $([0, 1], p)$. Prema korolaru 3.3.20 skup $f([0, 1])$ je povezan u $(\mathbb{R}^n, d)$. No očito je

$$f([0, 1]) = \overline{ab}.$$

Dakle, $\overline{ab}$ je povezan u $(\mathbb{R}^n, d)$. Analogno koristeći teorem 2.0.6 i propoziciju 3.3.19 dobivamo da je $\overline{ab}$ kompaktan u $(\mathbb{R}^n, d)$. Dakle, $\overline{ab}$ je kontinuum u $(\mathbb{R}^n, d)$.

□

Primjer 3.3.23. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Neka je $a = (0,0), b = (1,0), c = (0,1)$ i $e = (1,1)$. Imamo:*

$$\overline{ab} = \Big\{a + t(b-a) \mid t \in [0,1]\Big\} = \Big\{(t,0) \mid t \in [0,1]\Big\},$$

$$\overline{ac} = \Big\{(0,t) \mid t \in [0,1]\Big\},$$

$$\overline{ce} = \Big\{(t,1) \mid t \in [0,1]\Big\},$$

$$\overline{be} = \Big\{(1,t) \mid t \in [0,1]\Big\}.$$

Neka je $S = \overline{ab} \cup \overline{ac}$ te $T = \overline{ce} \cup \overline{be}$. Iz prethodne propozicije i korolara 3.3.16 slijedi da su skupovi S i T povezani u $(\mathbb{R}^2, d)$. Očito je

$$S \cap T = \{b, c\},$$

a skup $\{b, c\}$ nije povezan u $(\mathbb{R}^2, d)$ prema primjeru 2. iz 3.3.4. Dakle, presjek dva povezana skupa ne mora biti povezan.

Uočimo da su S i T kompaktni u $(\mathbb{R}^2, d)$ (prema prethodnoj propoziciji i propoziciji 3.3.11). Dakle, S i T su kontinuumi u $(\mathbb{R}^2, d)$, ali $S \cap T$ nije kontinuum u $(\mathbb{R}^2, d)$.

3.4 Povezanost putevima

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, neka su $a, b \in X$ te neka je $\gamma : [0,1] \to X$ funkcija neprekidna s obzirom na euklidsku topologiju na $[0,1]$ i topologiju $\mathcal{T}$ takva da je

$$\gamma(0) = a \text{ i } \gamma(1) = b.$$

Tada za γ kažemo da je ***put u topološkom prostoru*** $(X, \mathcal{T})$ ***od*** a ***do*** b.

Neka je (X, d) metrički prostor, neka su $a, b \in X$ te neka je $\gamma : [0,1] \to X$ funkcija neprekidna s obzirom na euklidsku metriku na $[0,1]$ i metriku d takva da je

$$\gamma(0) = a \text{ i } \gamma(1) = b.$$

Tada za γ kažemo da je ***put u metričkom prostoru*** (X, d) ***od*** a ***do*** b.

Uočimo sljedeće: ako je (X, d) metrički prostor i $a, b \in X$, onda je γ put u metričkom prostoru(X, d) od a do b ako i samo ako je γ put u pripadnom topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$ od a do b.

Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je ***putevima povezan*** ako za sve $a, b \in X$ postoji put u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ od a do b. Posve analogno definiramo pojam putevima povezanog metričkog prostora.

Očito je metrički prostor (X, d) putevima povezan ako i samo ako je topološki prostor $(X, \mathcal{T}_d)$ putevima povezan.

Propozicija 3.4.1. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ putevima povezan topološki prostor. Tada je $(X, \mathcal{T})$ povezan.*

Dokaz. Odaberimo točku $a \in X$. Za svaki $x \in X$ postoji put γ_x u $(X, \mathcal{T})$ od a do x. Za svaki $x \in X$ skup $\gamma_x([0, 1])$ je povezan u $(X, \mathcal{T})$ (prema propoziciji 3.3.19) te je $a \in \gamma_x([0, 1])$. Iz korolara 3.3.16 slijedi da je

$$\bigcup_{x \in X} \gamma_x([0, 1])$$

povezan skup u $(X, \mathcal{T})$. Za svaki $x \in X$ vrijedi

$$x \in \gamma_x([0, 1])$$

pa zaključujemo da je

$$\bigcup_{x \in X} \gamma_x([0, 1]) = X.$$

Dakle, X je povezan u $(X, \mathcal{T})$, odnosno $(X, \mathcal{T})$ je povezan topološki prostor. □

Korolar 3.4.2. *Svaki putevima povezan metrički prostor je povezan.*

Propozicija 3.4.3. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Tada je metrički prostor $(\mathbb{R}^n, d)$ putevima povezan.*

Dokaz. Neka su $a, b \in \mathbb{R}^n$. Definirajmo funkciju $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ sa

$$\gamma(t) = a + t(b - a).$$

U dokazu propozicije 3.3.22 smo vidjeli da je funkcija γ neprekidna s obzirom na euklidsku metriku na $[0, 1]$ i metriku d. Prema tome, γ je put u $(\mathbb{R}^n, d)$ od a do b. □

Bibliografija

[1] C. O. Christenson, W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, Marcel Dekker, Inc., New York, (1977).

[2] S. B. Nadler, *Continuum theory*, Marcel Dekker, Inc., New York, (1992).

[3] W. A. Sutherland, *Introduction to metric and topological spaces*, Oxford University Press, (1975).

Sažetak

U ovom diplomskom radu smo se u prvoj cjelini upoznali s metričkim i topološkim prostorima. Detaljnije smo obradili otvorene skupove i neprekidnost funkcija. Zatim smo u drugoj cjelini obradili pojam kompaktnosti, pri tome definirali produktnu topologiju i Lebesgueov broj. Konačno, u trećoj cjelini prelazimo na pojam povezanosti uz definiranje baze topologije i prostora povezanog putevima te konačno na kontinuumime.

Summary

In this diploma thesis, in the first chapter we are introduced to metric and topological spaces. We described in detail concepts of open spaces and continuous functions. The second chapter is about the concept of compactness, where we also defined product topology and Lebesgue number. Finally, the third chapter is about the concept of connectedness, with definitions of the base of a topology, path connected spaces and finally continua.

Životopis

Rođena sam 8. svibnja 1990. godine u Šibeniku. Od 1996. do 2004. godine sam pohađala Osnovnu školu Fausta Vrančića u Šibeniku. U privatnoj školi za strane jezike Lingua sam učila engleski jezik od prvog do osmog razreda, a talijanski jezik od šestog do osmog razreda.

Nakon toga sam se upisala u Gimnaziju Antuna Vrančića, također u Šibeniku. Smjer opća gimnazija sam završila 2008. godine. Uz to sam učila njemački jezik od prvog do trećeg razreda srednje škole u već spomenutoj školi za strane jezike.

U srpnju 2008. godine sam upisala Preddiplomski sveučilišni studij matematike na PMF-MO kojeg sam završila u srpnju 2013. godine. U rujnu 2014. godine sam upisala Diplomski sveučilišni studij matematike i informatike, nastavnički smjer.