Reprezentacije Poincaréove grupe i Landau-Yangov teorem

Bošnjak, Antonija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Antonija Bošnjak

REPREZENTACIJE POINCARÉOVE GRUPE I LANDAU - YANGOV TEOREM

Diplomski rad

Zagreb, 2015.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: ISTRAŽIVAČKI

Antonija Bošnjak

Diplomski rad

Reprezentacije Poincaréove grupe i Landau - Yangov teorem

Voditelj diplomskog rada: dr.sc. Anđelo Samsarov

Ocjena diplomskog rada: ______________________

Povjerenstvo: 1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Datum polaganja: ________________

Zagreb, 2015.

Zahvaljujem mentoru dr.sc.Anđelu Samsarovu na strpljenju, pomoći i vodstvu pri izradi ovog diplomskog rada, kao i dr.sc.Tajronu Juriću na susretljivosti i korisnim diskusijama.

Sadržaj

1 Uvod

Simetrije su ljudima odvijek bile fascinantne [1] i svima su privlačni objekti ili uzorci koji su na neki način simetrični. Zanimljiva je činjenica da se u prirodi koja nas okružuje pojavljuje mnogo vrsta simetrije. U svakodnevnom životu, pod simetrijom se obično podrazumijeva zrcalna simetrija, što za objekt u prostoru znači da postoji ravnina koja ga dijeli na dva dijela koja izgledaju potpuno isto. Ovakva vrsta simetrije se pojavljuje primjerice kod ljudi i životinja, gdje postoje dva istaknuta smjera. Jedan je smjer gibanja, a drugi smjer gravitacije i oni definiraju ravninu simetrije u prostoru. Iz ovoga možemo zaključiti da simetrije obično pokazuju neka unutrašnja svojstva objekata i prostora u kojemu se nalaze i da se one u prirodi mogu pojaviti ne samo kao egzaktne, već i kao približne simetrije.

Još jedan primjer je simetrija u biljnom svijetu. Za biljke i drveće postoji samo jedan istaknuti smjer, a to je smjer gravitacije, dok su horizontalni smjerovi svi jednako zastupljeni kako bi omogućili apsorpciju svjetlosti i kisika. Drveće s razgranatim krošnjama ima približno kontinuiranu rotacijsku simetriju duž vertikalnog smjera, dok cvijeće posjeduje diskretnu rotacijsku simetriju. Još jedan argument o važnosti simetrija je činjenica da se cvijeće u prirodi često pojavljuje s pet latica i prema tome posjeduje diskretnu simetriju petog reda. Pitanje je postoji li razlog zašto je broj pet povlašten, a jedan od mogućih odgovora je da pet latica čine pentagon koji se najefektivnije od svih geometrijskih oblika odupire kristalizaciji na način da ako ih pokušamo posložiti što više u ravnini, ostaje mnogo više praznog prostora nego što bi to bilo ako pokušamo posložiti trokute, kvadrate ili heksagone. Simetrije koje pokazuje biljni i životinjski svijet nisu savršene niti fundamentalne kao što su one koje pronalazimo kod kristala, ali ono što možemo zaključiti iz prethodnih razmatranja je da prostor u kojemu živimo podržava samo određene vrste simetrije.

Postavlja se pitanje što točno podrazumijevamo pod simetrijama? Jednu od prvih definicija dao je Hermann Weyl; objekt je simetričan ako postoji nešto što mu možemo učiniti na način da nakon tog djelovanja on izgleda isto kao što je izgledao i prije. Drugim riječima, simetrija geometrijskog objekta u Euklidovom prostoru je izometrija koja preslikava objekt u samoga sebe. Skup svih simetrijskih transformacija objekta predstavlja grupu, i to je grupa simetrija tog objekta. Međutim, ono što želimo dublje istražiti nisu simetrije objekata, već simetrije fizikalnih zakona. U tom smislu, simetrijska transformacija fizikalnog zakona je promjena varijabli i/ili prostorno-vremenskih koordinata takva da jednadžbe koje opisuju taj zakon imaju isti oblik u novim varijablama i koordinatama kakav su imale i prije. Kažemo da jednadžbe čuvaju svoj oblik i da su kovarijantne u odnosu na simetriju. Razlikujemo simetrije koje djeluju na prostorno-vremenske koordinate koje zovemo geometrijskim simetrijama i one koje na njih nemaju nikakav utjecaj, odnosno unutrašnje simetrije. Primjeri geometrijskih simetrija su translacija u prostoru i vremenu, te rotacija. S kontinuiranim simetrijama kao što je to promjena koordinata povezan je Noetherin teorem koji kaže da iz kovarijantnosti jednadžbi gibanja u odnosu na kontinuiranu transformaciju s n parametara slijedi postojanje n sačuvanih veličina, odnosno zakona sačuvanja. Pa tako homogenost prostora vodi na translacijsku invarijantnost pri čemu je sačuvan linearni moment, a homogenost vremena vodi na invarijantnost na translacije u vremenu i sačuvana veličina je energija.

U nerelativističkim teorijama jednadžbe vremenske evolucije su kovarijantne u odnosu na Galilejeve transformacije, dok su one u relativističkim teorijama zamijenjene Lorentzovim transformacijama. Lorentzovu grupu L čine sve 4×4 matrice Λ koje ostavljaju metriku Minkowskog invarijantnom. Tu su uključene rotacije i potisci, ali i diskretne simetrije pariteta i vremenske inverzije. Lorentzove transformacije zajedno s grupom translacija čine Poincaréovu ili nehomogenu Lorentzovu grupu čiji elementi (Λ, T_a) djeluju na $x \in \mathbb{R}^4$ na način da je $x \mapsto \Lambda x + a$. Elementarna čestica je objekt čija se svojstva ne mijenjaju ako ju translatiramo u vremenu ili prostoru ili ako ju rotiramo ili gledamo iz drugog sustava koji se uniformno giba u odnosu na naš sustav. Ova činjenica je dala ideju Wigneru da klasifikaciju elementarnih čestica poveže s ireducibilnim reprezentacijama Poincaréove grupe.

Eugene Wigner bio je jedan od prvih koji je uvidio važnost simetrija u fizici. U nizu članaka o atomskoj strukturi i molekularnim spektrima koje je izdao u razdoblju između 1926. i 1928., Wigner je dao osnove za primjenu teorije grupa i principa simetrija u kvantnoj mehanici. Analizirao je i grupu rotacija $SO(3)$ i pokazao da njena univerzalna grupa natkrivanja $SU(2)$ osim vektorskih i tenzorskih reprezentacija posjeduje i spinorne reprezentacije koje nisu vjerne reprezentacije grupe rotacija, čime je objasnio kako se pojavljuju spinori u prirodi. Još jedan važan Wignerov doprinos je teorem koji kaže da za simetrijsku transformaciju kvantnog sustava $\Phi \mapsto \Phi'$ postoji linearni unitaran ili antiunitaran operator U određen do na fazu, takav da je $\Phi' = U\Phi$.

Krajem 1930-ih Wigner se počeo baviti vremenski zavisnim simetrijama i 1939. je izdao članak pod naslovom "The Unitary Representations of the Inhomogenous Lorentz Group". U svom radu je postavio pitanje kako izgledaju unitarne reprezentacije Poincaréove grupe i koja je točno njihova fizikalna važnost, te je dao i odgovor na to pitanje. Pokazao je da je univerzalna grupa natkrivanja Lorentzove grupe grupa $SL(2,\mathbb{C})$ i napravio je potpunu klasifikaciju i konstrukciju svih ireducibilnih reprezentacija Poincaréove grupe, što ćemo pokazati u ovome radu.

Struktura rada je kako slijedi: prvo poglavlje je posvećeno osnovama teorije reprezentacija [2]. U drugom poglavlju opisujemo osnovna svojstva i ireducibilne reprezentacije grupe rotacija $SO(3)$ i Euklidove grupe E_2 [3]. Dalje imamo ireducibilne reprezentacije Lorentzove grupe $SO(3,1)$, iza kojih slijedi Wignerova klasifikacija ireducibilnih reprezentacija Poincaréove grupe [3–5]. Zadnje poglavlje bavi se reprezentacijama dvočestičnih stanja [6] i izvodom Landau - Yangovog teorema [7, 8].

2 Elementi teorije reprezentacija

U ovom poglavlju uvest ćemo neke od osnovnih pojmova kod razmatranja teorije reprezentacija grupa, odnosno algebri, kao i pojmove Liejeve grupe i algebre i njihovu vezu.

2.1 Reprezentacije grupa

Definicija 1. *(Reprezentacije grupe). Ako postoji homomorfizam iz grupe G u grupu operatora T_g na linearnom vektorskom prostoru V, onda kažemo da T_g čini reprezentaciju grupe G. Dimenzija reprezentacije je dimenzija vektorskog prostora V. Reprezentacija je vjerna ako je homomorfizam izomorfizam, odnosno bijektivno preslikavanje. Degenerirana reprezentacija je reprezentacija koja nije vjerna.*

Odnosno, reprezentacija je takvo preslikavanje:

$$g \in G \xrightarrow{T} T_g, \tag{2.1}$$

gdje je T_g operator na V takav da je:

$$T_{g_1} T_{g_2} = T_{g_1 g_2}. \tag{2.2}$$

Operator zadovoljava ista pravila kao i množenje originalnih elemenata grupe. Iz definicije se može vidjeti da je T_g regularan operator za svaki $g \in G$, jer $e = gg^{-1}$ povlači $T_e = T_g T_{-g}$, odnosno $T_g T_{g^{-1}} = I$, odakle slijedi $T_{g^{-1}} = T_g^{-1}$. Dakle, reprezentaciju možemo gledati kao linearno djelovanje grupe ili algebre na vektorski prostor. Svakom elementu grupe(algebre) je pridružen operator koji djeluje na vektorski prostor V. Taj prostor V zove se prostor reprezentacije, a $dim V$ dimenzija reprezentacije. Svaka grupa ima barem jednu reprezentaciju, a to je trivijalna reprezentacija koja šalje svaki element grupe u jedinični element.

Definicija 2. *Neka je T_g reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru V i neka je V_1 potprostor od V sa svojstvom da $T_g |x\rangle \in V_1$ za svaki $x \in V_1$ i $g \in G$.*
Kažemo da je V_1 invarijantni potprostor od V u odnosu na T_g. Invarijantni potprostor je pravi, ako ne sadrži netrivijalni invarijantni potprostor u odnosu na T_g.

Za reprezentaciju T_g na V kažemo da je ireducibilna ako ne postoji netrivijalni invarijantni potprostor u V u odnosu na reprezentaciju T_g. Ako on postoji, onda je reprezentacija reducibilna.
Ako je V_1 potprostor od V, ortogonalni komplement od V_1 sastoji se od svih vektora u V koji su ortogonalni na svaki vektor u V_1. Ako je ortogonalni komplement invarijantnog potprostora također invarijantan s obzirom na T_g, tada je reprezentacija potpuno reducibilna.

Ako je reprezentacijski prostor grupe prostor na kojemu je definiran unutarnji produkt, i ako su svi operatori T_g unitarni za sve $g \in G$, onda je reprezentacija T_g unitarna. Ako imamo unitarnu reprezentaciju koja je reducibilna, onda je ona i potpuno reducibilna. Odnosno, reducibilnost unitarne reprezentacije povlači njenu potpunu reducibilnost.

Teorem 1. *Ako je $g \mapsto U_g$ unitarna reprezentacija grupe G u konačno dimenzionalnom prostoru V. Ako je ta reprezentacija ireducibilna, onda je ona i potpuno reducibilna.*

Dokaz. Neka je $g \mapsto U_g$ unitarna reprezentacija grupe G u prostoru V i neka je $V_1 \subset V$ invarijantan potprostor s obzirom na tu reprezentaciju. Budući da je V_1 invarijantan s obzirom na unitarne operatore U_g i $U_g^* = U_{g^{-1}}$, onda je $V_2 = V \ominus V_1$, odnosno ortogonalni komplement od V_1 je također invarijantan s obzirom na U_g. Operator U_g inducira u V_1 unitaran operator $U_g^{'}$, a u V_2 unitaran operator $U_g^{''}$. Tada su $g \mapsto U_g'$ i $g \mapsto U_g''$ unitarne reprezentacije grupe G u V_1 i V_2. Kako je:

$$U_g = U_g' \oplus U_g'',$$

vidimo da je unitarna reprezentacija $g \mapsto U_g$ ortogonalna, dakle i direktna suma reprezentacija u potprostorima manjih dimenzija. □

Dakle, unitarnu reprezentaciju $g \mapsto U_g$ moguće je prikazati kao ortogonalnu sumu ireducibilnih unitarnih reprezentacija. Još jedna važna posljedica pojma ireducibilne reprezentacije je vezana za reprezentacije Abelovih grupa.

Teorem 2. *Svaka ireducibilna konačno dimenzionalna reprezentacija Abelove grupe u kompleksnom prostoru je jedno dimenzionalna.*

Dokaz. Neka je G Abelova grupa i $g \mapsto T_g$ reprezentacija te grupe u prostoru V. Kako je $g_1 g_2 = g_2 g_1$, to je $T_{g_1 g_2} = T_{g_2 g_1}$, iz čega slijedi $T_{g_1} T_{g_2} = T_{g_2} T_{g_1}$, odnosno:

$$G' = \{T_g \,|\, g \in G\}$$

je Abelova grupa regularnih operatora na V. Kako je G' familija operatora koji međusobno komutiraju u slučaju kompleksnog prostora, ta familija ima zajednički jednodimenzionalan invarijantan potprostor. Iz toga slijedi da je svaka reprezentacija Abelove grupe u kompleksnom konačno dimenzionalnom prostoru V reducibilna. □

Kao provjera ireducibilnosti reprezetacije nekomutativne grupe može nam poslužiti Schurova lema. Ovaj rezultat, uz Wigner-Eckartov teorem koji će biti izrečen kasnije, predstavlja vrlo važan rezultat kojeg ćemo učestalo koristiti.

Teorem 3. *Neka imamo ireducibilnu reprezentaciju T_g grupe G na prostoru V i A operator u V. Prva Schurova lema kaže da, ako je $T_g A = A T_g$ za sve $g \in G$, tada je $A = \lambda\, 1$, gdje je 1 jedinični operator. Odnosno, operator koji komutira sa svim operatorima T_g ireducibilne reprezentacije grupe G je proporcionalan jediničnom operatoru.*
Dalje, neka imamo dvije ireducibilne reprezentacije $T(g)$ i T_g' grupe G na prostorima V_1 i V_2, dimenzija d i d' i operator A koji transformira vektore iz V_1 u V_2. Druga Schurova lema kaže da, ako T_g i T_g' nisu ekvivalentne i $T_g A = A\, T_g'$ za sve $g \in G$, tada je $A = 0$.

2.2 Liejeve grupe i algebre

Liejeva grupa je grupa za koju su operacije množenja i inverza glatke [9]. Njeni elementi se mogu opisati sa skupom kontinuiranih parametara i broj tih nezavisnih parametara će odgovarati dimenziji grupe. Dakle, neformalna definicija bi bila da je Liejeva grupa takva grupa koja je istovremeno i glatka mnogostrukost. U našem slučaju će biti važniji pojam algebre, odnosno Liejeve algebre.

Algebra $\mathfrak{U}$ je vektorski prostor na kojemu imamo definiranu binarnu operaciju $\mathfrak{U}\times\mathfrak{U}\to\mathfrak{U}$. Jedini zahtjev na binarnu operaciju je da ona bude bilinearna, odnosno $(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$ i $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$, kao i $(\alpha x)\cdot\beta y = (\alpha\beta)x\cdot y$ za sve $x,y,z\in\mathfrak{U}$ i za sve elemente $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$, gdje je $\mathbb{F}$ polje nad kojime je algebra definirana. Ovakva definicija je jako općenita i da bi nam neka algebra bila od interesa, potrebno je definirati dodatna svojstva operacije produkta.
Primjerice, ako je produkt asocijativan, onda se radi o asocijativnoj algebri. U tom smislu Liejeva algebra je algebra za koju bilinearna operacija nije ni komutativna ni asocijativna nego ima dva druga svojstva. Operacija produkta u tom slučaju zove se Liejeva zagrada ili komutator.

Definicija 3. *Vektorski prostor $\mathfrak{g}$ nad poljem $\mathbb{F}$ s operacijom $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ koja se označava s $(x,y)\mapsto[x,y]$ i zove se zagrada ili komutator x i y, zove se Liejeva algebra nad $\mathbb{F}$ ako su zadovoljeni sljedeći aksiomi:*
(i) Operacija komutacije je bilinearna,
(ii) $[x,x]=0, \forall x\in\mathfrak{g}$,
(iii) Jacobijev identitet: $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0,\ x,y,z\in\mathfrak{g}$.

Kada se (i) i (ii) primijene na $[x+y,x+y]$, impliciraju antisimetričnost: (ii') $[x,y]=-[y,x]$. Iz asocijativne algebre s operacijom produkta $\cdot$ može se uvijek dobiti odgovarajuća Liejeva algebra $\mathfrak{g}$. Ako gledamo $\mathfrak{U}$ kao vektorski prostor i definiramo Liejevu zagradu kao:

$$[x,y] := x\cdot y - y\cdot x, \tag{2.3}$$

konstruiramo iz toga Liejevu algebru na istom vektorskom prostoru V.
Kažemo da su Liejeve algebre $\mathfrak{g}_1$ i $\mathfrak{g}_2$ nad $\mathbb{F}$ homomorfne ako postoji homomorfizam vektorskih prostora $\phi:\ \mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$ koji zadovoljava $\phi([x,y])=[\phi(x),\phi(y)]$, za sve x i y iz $\mathfrak{g}_1$ i tada se ϕ zove homomorfizam Liejevih algebri.

Liejeva algebra je komutativna ili Abelova ako $\forall x,y\in\mathfrak{g}$ vrijedi $[x,y]=0$, odnosno operacija produkta je komutativna. Dimenzija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je dimenzija te algebre ako ju gledamo kao vektorski prostor. Potprostor $\mathfrak{h}\subseteq\mathfrak{g}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ koji je i sam Liejeva algebra u odnosu na Liejevu zagradu, zovemo Liejevom podalgebrom od $\mathfrak{g}$. Svaka Liejeva algebra ima dvije podalgebre, samu sebe i potprostor $\{0\}$. To su trivijalne podalgebre; bilo koja druga podalgebra od $\mathfrak{g}$ zove se prava podalgebra od $\mathfrak{g}$.

Ako vrijedi još jače svojstvo da je $[x,y] \in \mathfrak{h}$, $\forall x \in \mathfrak{h}$ i $\forall y \in \mathfrak{g}$, takvu podalgebru zovemo invarijantnom podalgebrom ili idealom Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Potprostor koji se sastoji samo od nultog vektora, kao i sami $\mathfrak{g}$ su uvijek ideali od $\mathfrak{g}$.
Centar $Z(g)$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ čine svi $z \in \mathfrak{g}$ za koje vrijedi da je $[x,z] = 0$, $\forall x \in \mathfrak{g}$. Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je Abelova ili komutativna ako i samo ako je $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

Zbog svojstava Liejeve zagrade, svaka jednodimenzionalna Liejeva algebra je komutativna. Važan primjer je i izvedena algebra od $\mathfrak{g}$, koja se označava kao $[\mathfrak{g}\mathfrak{g}]$, koja je analogna komutatoru podgrupa grupe i sastoji se od svih linearnih kombinacija komutatora $[x,y]$ i očito je i sama ideal.

Ako $\mathfrak{g}$ nema drugih ideala osim samog sebe i $\{0\}$, onda kažemo da je $\mathfrak{g}$ prosta. Ako je $\mathfrak{g}$ prosta, onda je $Z(\mathfrak{g}) = 0$ i $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Direktna suma prostih Liejevih algebri je poluprosta Liejeva algebra. Poluprosta Liejeva algebra je cijela sastavljena od elemenata oblika $[x,y]$ od proizvoljnih $x,y \in \mathfrak{g}$. Prema tome, Abelova Liejeva algebra je jednaka svome centru, $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, dok joj je izvedena algebra jednaka nuli, a poluprosta Liejeva algebra je jednaka svojoj izvedenoj algebri i centar joj iščezava.

2.2.1 Veza između Liejevih grupa i Liejevih algebri

Svakoj Liejevoj grupi G možemo pridružiti odgovarajuću Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ zbog činjenice da se Liejeva algebra može gledati kao tangentni prostor Liejeve grupe u jedinici. Preslikavanje iz tangentnog prostora Liejeve grupe je eksponencijalno preslikavanje i Liejeva algebra se može gledati kao linearizacija Liejeve grupe u okolini jediničnog elementa. Eksponencijalno preslikavanje nas onda vraća natrag u Liejevu algebru.

Neka je G Liejeva grupa čiji su elementi g označeni sa skupom parametara $\alpha = \{\alpha_1,...,\alpha_n\}$, odnosno $g = g(\alpha)$, takvima da je $g(0) = e$, gdje je e jedinični element. Pretpostavljamo da se djelovanje grupe može reprezentirati s $d \times d$ matricom D takvom da je $D(g(\alpha)) = D(\alpha)$ i $D(0) = 1$. Sada se D može razviti u red oko jediničnog elementa:

$$D(\delta\alpha) = 1 + i\delta\alpha_a X^a + ..., \tag{2.4}$$

gdje je $\delta\alpha$ infinitezimalni α, a ide preko svih parametara, a X^a zovemo generatorima grupe G koji su definirani kao:

$$X^a \equiv -i\frac{\partial}{\partial\alpha_a}D(\alpha)\bigg|_{\alpha=0}, \tag{2.5}$$

tako da su generatori zapravo tangentni vektori u jediničnom elementu grupe.

Za kompaktne grupe možemo gledati generatore čak i kada nismo u okolini jediničnog elementa. Možemo pisati $\delta\alpha_a$ kao α_a/k i pogledati kako izgleda $D(\alpha)$ kada koeficijent k ide u beskonačnost:

$$D(\alpha) = \lim_{k\to\infty}\left(1 + i\frac{\alpha_a X^a}{k}\right)^k = \exp(i\alpha_a X^a).$$

X^a su linearno nezavisni generatori i oni razapinju vektorski prostor, odnosno Liejevu algebru $\mathfrak{g}$. Dimenzija n Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ jednaka je broju generatora, a budući da $\{X^1,...,X^n\}$ čine bazu za $\mathfrak{g}$, onda se svaki element iz $\mathfrak{g}$ može zapisati kao linearna kombinacija elemenata X^a.

Zbog bilinearnosti Liejeva zagrada je jedinstveno određena na nekoj bazi B. Liejeva zagrada i Liejeva algebra se onda mogu definirati preko razvoja komutatora dvaju generatora u odnosu na tu bazu.

$$[T^a, T^b] = \sum_{c=1}^{d} f^{ab}{}_c T^c. \tag{2.6}$$

Koeficijenti $f^{ab}{}_c \in \mathbb{F}$ se zovu strukturne konstante Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i njihove vrijednosti ovise o bazi koju smo odabrali. Iz svojstava Liejeve algebre možemo vidjeti da je $f^{aa}{}_b = 0$, te da za strukturne konstante vrijedi svojstvo antisimetričnosti u gornjim indeksima, $f^{ab}{}_c = -f^{ba}{}_c$. Iz strukturnih konstanti se može saznati mnogo toga o algebri, pa tako i o strukturi grupe.

2.2.2 Reprezentacije Liejevih algebri

Liejeve algebre su puno jednostavnije od Liejevih grupa i s njima nam je lakše raditi, jer su one linearni prostori. Za svaku Liejevu grupu može se pronaći odgovarajuća Liejeva algebra, a ona se može definirati i odvojeno od Liejeve grupe.

Neka je T_G reprezentacija grupe G. Odgovarajuća reprezentacija algebre $\mathfrak{g}$ može se dobiti iz T_G:

$$T_{\mathfrak{g}}(X) = \left.\frac{dT_G(g(t))}{dt}\right|_{t=0}, \tag{2.7}$$

gdje $T_{\mathfrak{g}}$ zovemo infinitezimalnim operatorima. Može se definirati n takvih operatora, a n je dimenzija grupe G, a $X \in \mathfrak{g}$ odgovara jednoparametarskoj podgrupi $g(t)$. n operatora zajedno definiraju reprezentaciju algebre $\mathfrak{g}$. Za svaki $X^i \in \mathfrak{g}$, $i = 1,...,n$ imamo:

$$T_G e^{\alpha_i X^i} = e^{\alpha_i T_{\mathfrak{g}}(X^i)}. \tag{2.8}$$

Ako su dvije reprezentacije grupe G ekvivalentne, tada su i odgovarajuće reprezentacije algebri $\mathfrak{g}$ također ekvivalentne. Ako je $T_{\mathfrak{g}}$ ireducibilna reprezentacija, onda je i T_G. Obrnuto vrijedi ako i samo ako je grupa G povezana.

Za svaku Liejevu algebru postoji barem jedna reprezentacija, a to je ona koja preslikava svaki element u nulti vektor. Ova reprezentacija nije vjerna i zove se trivijalna. Budući da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ i sama vektorski prostor, moguće je reprezentirati ju na samu sebe i tako se dobije adjungirana ili regularna reprezentacija. Ova reprezentacija također postoji za svaku Liejevu algebru, neovisno o dimenzionalnosti ili strukturi algebre. Adjungirana reprezentacija šalje svaki element algebre x u ad_x, gdje je ad_x definirano kao:

$$ad_x(y) = [x, y]. \tag{2.9}$$

Jezgra ovog preslikavanja sastoji se od svih elemenata x iz $\mathfrak{g}$ koji komutiraju sa svim elementima iz $\mathfrak{g}$. Dakle, jezgra adjungiranog preslikavanja je centar algebre, koji je ideal od $\mathfrak{g}$. Ako je $\mathfrak{g}$ prosta, znači da je jezgra ili cijeli skup $\mathfrak{g}$ ili $\{0\}$, jer proste Liejeve algebre ne sadrže netrivijalne ideale. Ako je jezgra cijela $\mathfrak{g}$, svi komutatori iščezavaju i algebra je komutativna. Dakle, jezgra je $\{0\}$, odnosno adjungirana reprezentacija proste Liejeve algebre je vjerna reprezentacija. Za Abelove Liejeve algebre adjungirana reprezentacija nije vjerna.

2.3 Wigner-Eckartov teorem

U teoriji reprezentacija važan rezultat koji ćemo koristiti kasnije je Wigner-Eckartov teorem [10]. Za njegovu definiciju, ključan pojam su sferični tenzorski operatori. Ako imamo skup operatora $\{O_i^\mu, i = 1, ..., n_\mu\}$ na vektorskom prostoru V koji se na grupu simetrija G transformiraju kao:

$$U(g) O_i^\mu U(g)^{-1} = O_j^\mu D^\mu(g)^j{}_i, \tag{2.10}$$

gdje je $g \in G$, a $D^\mu(G)$ ireducibilna matrična reprezentacija, onda oni čine skup ireducibilnih operatora koji odgovaraju $\mu-$toj reprezentaciji.

Zanima nas kako će se kombinacija vektora i ireducibilnih operatora, $O_i^\mu |e_j^\nu\rangle$, transformirati na djelovanje G. Vrijedi da je:

$$\begin{aligned} U(g) O_i^\mu |e_j^\nu\rangle &= U(g) O_i^\mu U(g)^{-1} U(g) |e_j^\nu\rangle \\ &= O_k^\mu |e_l^\nu\rangle D^\mu(g)_i^k D^\nu(g)^l{}_j. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Drugim riječima, ova se stanja transformiraju kao direktni produkt reprezentacija $D^{\mu \times \nu}$.

Ovakav skup vektora onda možemo izraziti preko ireducibilnih vektora $|w_{\alpha l}^\lambda\rangle$ kao:

$$O_i^\mu |e_j^\nu\rangle = \sum_{\alpha, \lambda, l} |w_{\alpha l}^\lambda\rangle \langle \alpha, \lambda, l(\mu, \nu) i, j\rangle. \tag{2.12}$$

Sada možemo izračunati matrični element $\langle e_\lambda^l | O_i^\mu | e_j^\nu \rangle$.

Teorem 4. *(Wigner-Eckart): Neka je* $\{O_i^\mu\}$ *skup ireducibilnih tenzorskih operatora. Tada vrijedi:*

$$\langle e_\lambda^l | O_i^\mu | e_j^\nu \rangle = \sum_\alpha \langle \alpha, \lambda, l(\mu, \nu) i, j \rangle \, \langle \lambda || O^\mu || \nu \rangle_\alpha \, , \tag{2.13}$$

gdje $\langle \lambda || O^\mu || \nu \rangle_\alpha \equiv n_\lambda{}^{-1} \sum_k \langle e_\lambda^k | w_{\alpha k}^\lambda \rangle$ zovemo reducirani matrični element. Dakle, sva ovisnost o i, j i l je sadržana u Clebsch-Gordanovim koeficijentima na desnoj strani jednadžbe, koji su nam poznate veličine, dok je reducirani matrični element neovisan o i, j i l.

3 Ireducibilne reprezentacije grupe $SO(3)$ i E_2

U ovom poglavlju ćemo napraviti klasifikaciju svih ireducibilnih reprezentacija grupe rotacija $SO(3)$ i Euklidove grupe u dvije dimenzije. Njihove reprezentacije će nam poslužiti kao važan alat u klasifikaciji ireducibilnih reprezentacija Lorentzove i Poincaréove grupe.

3.1 Ireducibilne reprezentacije grupe $SO(3)$

Trodimenzionalne rotacije su linearne transformacije vektora $x = (x_1, x_2, x_3)$:

$$x' = Rx \tag{3.1}$$

koje ostavljaju duljinu tog vektora invarijantnom. Matrice R koje su ortogonalne i zadovoljavaju uvjet $|\det R|^2 = 1$, čine grupu $O(3)$. Njena podgrupa $SO(3)$ ima $\det R = 1$, i može se opisati s tri nezavisna parametra, dok drugi dio grupe $O(3)$ čine transformacije s negativnom vrijednošću determinante. Grupa $SO(3)$ je kompaktna i povezana. Za grupu kažemo da je jednostavno povezana ako se na njenom parametarskom prostoru svaki zatvoreni put kontinuiranom transformacijom može smanjiti na jednu točku. Za $SO(3)$ imamo dvije klase takvih zatvorenih puteva i zbog toga kažemo da je ona dvostruko povezana. Svaka točka na površini trodimenzionalne sfere je u matematičkom smislu ista kao i njena antipodalna točka, tako da se parametarski prostor $SO(3)$ grupe ne može jednostavno prikazati u trodimenzionalnom prostoru.
S druge strane, njena univerzalna grupa natkrivanja $SU(2)$ ima jednostavan parametarski prostor na kojemu imamo samo jednu klasu ovakvih puteva, pa kažemo da je ona jednostavno povezana. Elementi grupe $SU(2)$ su kompleksne 2×2 matrice u za koje vrijedi $\det u = 1$, te $u^\dagger u = uu^\dagger = I$ i mogu se zapisati kao:

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Dakle, svaka matrica u je određena s tri realna parametra. Veza između u i R matrica može se pronaći ako se transformacija (3.1) zamijeni sa $h' = uhu^\dagger$ gdje je h:

$$h = \sigma \cdot x = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

a $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ su Paulijeve matrice za koje vrijedi $\mathrm{Tr}\, \sigma_i \sigma_j = 2\delta_{ij}$. Matrični elementi R se mogu prikazati preko elemenata u kao:

$$R_{ij} = \frac{1}{2} Tr(\sigma_i u \sigma_j u^\dagger). \tag{3.4}$$

Svakoj matrici R iz $SO(3)$ odgovaraju dvije matrice, u i $-u$ iz $SU(2)$. $SU(2)$ je kompaktna i jednostavno povezana. Budući da je $SU(2)$ homomorfna grupi $SO(3)$ i ne sadrži jednostavno povezane podgrupe, $SU(2)$ je univerzalna grupa natkrivanja od

$SO(3)$. Jezgra homomorfizma je invarijantna podgrupa $\mathbb{Z}_2(I,-I)$, dakle kvocijentna grupa $SU(2)/\mathbb{Z}_2$ je izomorfna grupi $SO(3)$.

Kontinuirane parametre koji će opisivati elemente R grupe $SO(3)$ možemo izabrati na više načina, a ovdje ćemo koristiti tri jednoparametarske podgrupe $R_n(\psi)$, gdje je $n = 1,2,3$. Ako imamo fiksiranu os u smjeru $\hat{n}$, rotacije oko $\hat{n}$ čine podgrupu od $SO(3)$. Svaka od tih podgrupa vezana je za generator koji označavamo kao J_n i njeni elementi se mogu zapisati kao:

$$R_n(\psi) = e^{-i\psi J_n} \tag{3.5}$$

One formiraju jednoparametarsku podgrupu grupe $SO(3)$. Na rotacije J_n se ponaša kao vektor u smjeru $\hat{n}$.

Kako bismo saznali kako izgleda Liejeva algebra grupe $SO(3)$, moramo vidjeti kako izgledaju njeni infinitezimalni generatori u susjedstvu jediničnog elementa. Tri nezavisna elementa R_1, R_2 i R_3 grupe $SO(3)$ odgovaraju rotacijama oko osi x_1, x_2 i x_3 za kut ψ i imaju oblik:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix} \qquad R_3 = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Infinitezimalni generatori se mogu dobiti iz:

$$J_k = i\frac{dR_k(\psi)}{d\psi}\bigg|_{\psi=0}, \tag{3.7}$$

tako da generatori imaju oblik:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Teorem 5. *(Liejeva algebra grupe $SO(3)$): Tri generatora J_k grupe $SO(3)$ zadovoljavaju sljedeću algebru:*

$$[J_k, J_l] = i\varepsilon_{klm}J^m. \tag{3.9}$$

Dokaz. Ako je $k = l$, obje strane jednadžbe iščezavaju. Za $k \neq l$, npr $k = 1$, $l = 2$, imamo:

$$R_2(d\psi)J_1R_2^{-1}(d\psi) = J_kR_2(d\psi)^k{}_1. \tag{3.10}$$

Vrijedi da je $R_2(d\psi) = I - id\psi J_2$. Ako se zadržimo na članovima linearnima u $d\psi$, lijeva strana jednadžbe je jednaka $J_1 + id\psi[J_1, J_2]$. Ako isti izraz uvrstimo u desnu stranu jednadžbe, dobiva se $J_1 - d\psi J_3$, dakle:

$$[J_1, J_2] = iJ_3. \tag{3.11}$$

□

Vektori baze reprezentacijskog prostora V su svojstveni vektori generatora koji međusobno komutiraju. Generatori J_1, J_2 i J_3 ne komutiraju međusobno, ali svaki od njih komutira s operatorom $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$. Dakle, J^2 je Casimirov operator. Za vektore baze možemo izabrati svojstvene vektore komutirajućeg skupa operatora (J^2, J_3^2). Preostali generatori su operatori podizanja i spuštanja:

$$J_\pm = J_1 \pm iJ_2 \tag{3.12}$$

koji imaju sljedeća svojstva:

$$[J_3, J_\pm] = J_\pm \tag{3.13}$$
$$[J_+, J_-] = 2J_3 \tag{3.14}$$
$$J^2 = J_3^2 - J_3 + J_+ J_-. \tag{3.15}$$

Neka je $|m\rangle$ normalizirani svojstveni vektor od J_3, sa svojstvenom vrijednošću m u reprezentacijskom prostoru V:

$$J_3 |m\rangle = m |m\rangle. \tag{3.16}$$

Tada vrijedi:

$$J_3 J_+ |m\rangle = [J_3, J_+] |m\rangle + J_+ J_3 |m\rangle = J_+ |m\rangle (m+1). \tag{3.17}$$

Dakle $J_+ |m\rangle$ je ili svojstveno stanje od J_3 sa svojstvenom vrijednošću $(m+1)$ ili nulvektor. Slično se može pokazati i da vektor $J_- |m\rangle$ ili iščezava ili je svojstveno stanje od J_3 sa svojstvenom vrijednošću $(m-1)$. Neka je $J_+ |m\rangle \neq 0$, stanje možemo normalizirati i nazvati ga $|m+1\rangle$. Ako djelujemo operatorom podizanja na to stanje, dobit ćemo ili 0, ili $|m+2\rangle$. Ponavljanjem ovog procesa dobivamo niz vektora $\{|m+k\rangle, k = 0, 1, 2, ...\}$. Reprezentacijski prostor V je konačno dimenzionalan, dakle mora postojati posljednji neiščezavajući $|j\rangle$, tako da vrijedi:

$$J_3 |j\rangle = j |j\rangle \tag{3.18}$$
$$J_+ |j\rangle = 0. \tag{3.19}$$

Iz (3.1) slijedi:

$$J^2 |j\rangle = j(j+j) |j\rangle. \tag{3.20}$$

Ako sada pogledamo niz vektora $\{(J_-)^n |j\rangle, n = 0, 1, 2, ...\}$, vidimo da su oni svojstveni vektori od J_3 sa svojstvenim vrijednostima $j, j-1, j-2, ...$, te su istovremeno i svojstveni vektori od J^2 koji odgovaraju istoj svojstvenoj vrijednosti $j(j+1)$. Ove vektore normaliziramo na jedinicu i označimo ih sa $\{|m\rangle, m = j, j-1, j-2, ...\}$ Ovaj niz vektora će opet biti konačan, i neka je posljednji neiščezavajući vektor $|l\rangle$.

$$0 = \langle l| J_+ J_- |l\rangle = \langle l| J^2 - J_3^2 + J_3 |l\rangle = j(j+1) - l(l+1) \tag{3.21}$$

Dakle, mora vrijediti $l = -j$. Vektor $|l\rangle = |-j\rangle$ se dobije iz $|j\rangle$ djelovanjem operatora spuštanja cijeli broj puta, dakle imamo da je $j - (-j) = 2j = n, n = 0, 1, 2, ...$, dakle j je cijeli ili polucijeli broj, a dimenzija reprezentacije iznosi $2j+1$.

Teorem 6. *(Ireducibilne reprezentacije Liejeve algebre $SU(2)$). Ireducibilne reprezentacije Liejeve algebre $SU(2)$ su sve opisane svojstvenom vrijednošću angularnog momenta j iz skupa pozitivnih cijelih i polucijelih brojeva. Ortonormirani vektori baze mogu se opisati sljedećim jednadžbama:*

$$J^2 |j\, m\rangle = j(j+1) |j\, m\rangle \tag{3.22}$$

$$J_3 |j\, m\rangle = m |j\, m\rangle \tag{3.23}$$

$$J_\pm |j\, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j\, m \pm 1\rangle, \tag{3.24}$$

gdje posljednja relacija slijedi iz:

$$\begin{aligned}
\langle j\, m| J_+^\dagger J_+ |j\, m\rangle &= \langle j\, m| J_- J_+ |j\, m\rangle \\
&= \langle j\, m| J^2 - J_3^2 - J_3 |j\, m\rangle \\
&= j(j+1) - m(m+1) \\
\langle j\, m| J_+^\dagger J_+ |j\, m\rangle &= C_+^* C_+ \langle j\, m+1 \mid j\, m+1\rangle = C^2.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Konstanta u izrazu (3.25) je definirana do na proizvoljni fazni faktor koji je neovisan o m. Ovakav skup vektora zvat ćemo kanonskom bazom. Dvije baze s različitim faznim faktorima dat će reprezentacije koje će se razlikovati za faktor u nedijagonalnim elementima matrice.

Ako znamo kako generatori djeluju na vektore baze, možemo pronaći matrične elemente u raznim ireducibilnim reprezentacijama.

$$U(\alpha, \beta, \gamma) |j\, m\rangle = |j\, m'\rangle D^j(\alpha\beta\gamma)^{m'}{}_{m}, \tag{3.26}$$

gdje je U operator koji predstavlja element grupe $R(\alpha, \beta, \gamma)$. Reprezentacija preko Eulerovih kuteva može se zapisati kao:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha J_3} e^{-i\beta J_2} e^{-i\gamma J_3}, \tag{3.27}$$

iz čega slijedi:

$$D^j(\alpha, \beta, \gamma)^{m'}{}_{m} = e^{-i\alpha m'} d^j(\beta)^{m'}{}_{m} e^{-i\gamma m} \tag{3.28}$$

$$d^j(\beta)^{m'}{}_{m} = \langle j\, m'| e^{-i\beta J_2} |j\, m\rangle. \tag{3.29}$$

Iz vektora baze $x = (x_1, x_2, x_3)$, ne dobiju se sve ireducibilne reprezentacije grupe $SO(3)$, nego samo tenzorske ireducibilne reprezentacije koje odgovaraju cjelobrojnim vrijednostima angularnog momenta j. Sve ireducibilne reprezentacije se mogu dobiti iz univerzalne grupe natkrivanja $SU(2)$. Tada svakoj matrici R iz $SO(3)$ odgovaraju dva elementa unutar $SU(2)$; matrice u i $-u$ tvore dvoznačnu reprezentaciju od $SO(3)$:

$$D(u) = +D(+u) \tag{3.30}$$
$$D(u) = -D(-u). \tag{3.31}$$

Teorem 7. *(Ireducibilne reprezentacije grupe $SO(3)$). Grupa $SO(3)$ ima dvije različite klase ireducibilnih reprezentacija.*

(i) Za pozitivne cjelobrojne j, reprezentacije su sve jednoznačne.

(ii) Za j polucijeli broj, sve reprezentacije su dvoznačne.

3.2 Ireducibilne reprezentacije grupe E_2

Euklidova grupa općenito E_n sastoji se od kontinuiranih linearnih transformacija na $n-$dimenzionalnom Euklidovom prostoru $\mathbb{R}^n$ koje ostavljaju duljinu svih vektora invarijantnom. Linearna transformacija poprima oblik:

$$x \to x', \;\; x'^i = R^i{}_j x^j + b^i. \tag{3.1}$$

Posljedica sačuvanja duljine vektora je da je $R^i{}_j$ ortogonalna matrica, dakle homogeni dio transformacija odgovara rotacijama. Nehomogeni dio je opisan s parametrima b^i koji odgovaraju uniformnim translacijama svih točaka. Euklidova grupa u dvije dimenzije, E_2, sastoji se od rotacija u ravnini koje su opisane kutom θ i translacija koje su opisane s parametrima (b^1, b^2). Transformacija sada ima oblik:

$$x'^1 = x^1 \cos\theta - x^2 \sin\theta + b^1 \tag{3.2}$$
$$x'^2 = x^1 \sin\theta + x^2 \cos\theta + b^2. \tag{3.3}$$

Element grupe E_2 označit ćemo s $g(\mathbf{b}, \theta)$ i njihovo pravilo množenja je:

$$g(\mathbf{b_2}, \theta_2) g(\mathbf{b_1}, \theta_1) = g(\mathbf{b_3}, \theta_3), \;\; \theta_3 = R(\theta_2)\mathbf{b_1} + \mathbf{b_2}. \tag{3.4}$$

Opći element Euklidove grupe može se zapisati i u matričnom obliku:

$$g(\mathbf{b}, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & b^1 \\ \sin\theta & \cos\theta & b^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Podskup elemenata $\{g(0, \theta) = R(\theta)\}$ čini podgrupu rotacija, odnosno $SO(2)$. Opći element podgrupe rotacija je $R(\theta) = e^{-i\theta J}$ gdje su J njeni generatori. Podskup elemenata

$\{g(\mathbf{b},0) = T(\mathbf{b})\}$ čini podgrupu translacija, T_2 koja ima dvije nezavisne jednoparametarske podgrupe s generatorima:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Opći element podgrupe translacija može se zapisati kao $T(\mathbf{b}) = e^{-i\mathbf{bP}}$, a opći element cijele grupe E_2:

$$g(\mathbf{b},\theta) = T(\mathbf{b})R(\theta). \tag{3.7}$$

Teorem 8. *(Liejeva algebra grupe E_2) Generatori grupe E_2 zadovoljavaju sljedeću algebru:*

$$[P_1,P_2] = 0 \tag{3.8}$$
$$[J,P_k] = i\varepsilon^{km}P_m. \tag{3.9}$$

Dakle, generatori translacija međusobno komutiraju, i P_k se transformiraju kao komponente vekorskog operatora. To se još može zapisati kao:

$$e^{-i\theta J}P_k e^{i\theta J} = P_m R(\theta)^m{}_k. \tag{3.10}$$

Grupa translacija T_2 čini invarijantnu podgrupu Euklidove grupe E_2, a kvocijentna grupa E_2/T_2 je izomorfna sa $SO(2)$.

E_2 ima invarijantnu podgrupu, dakle nije prosta grupa. Invarijantna podgrupa je Abelova, dakle E_2 nije niti poluprosta. Parametri koji opisuju translacije, (b^1,b^2) imaju beskonačan doseg, pa možemo zaključiti da grupa nije kompaktna.

Grupa E_2 će posjedovati dvije vrste unitarnih ireducibilnih reprezentacija od kojih će za nas biti važne unitarne reprezentacije. Izvod reprezentacija grupe E_2 sličan je kao i kod grupe $SO(3)$. Uzimamo neki standardni vektor $|v_0\rangle$ u reprezentacijskom prostoru V na koji onda djelujemo s elementima grupe ili generatorima određen broj puta dok ne dobijemo zatvoren ireducibilan invarijantni potprostor ili bazu za takav potprostor. Za razliku od reprezentacija grupe $SO(3)$, ovdje će sve vjerne reprezentacije biti beskonačno dimenzionalne, dok konačno dimenzionalne reprezentacije neće biti vjerne.
Casimirov operator P^2 komutira sa svim generatorima grupe i ima svojstvenu vrijednost p^2 koja je pozitivno definitna i jedinstvena za svaku ireducibilnu reprezentaciju. Da je operator P^2 pozitivno definitan, te stoga ima svojstvene vrijednosti $p^2 > 0$ vidi se iz oblika Casimirovog operatora $P^2 = P_1^2 + P_2^2$. Na temelju prve Schurove leme (teorem 2.1.3), svojstvene vrijednosti p mogu nam poslužiti za označavanje unitarne

ireducibilne reprezentacije grupe E_2. Za unitarne reprezentacije generatori $\{J, P_1, P_2\}$ su hermitski. Unitarne ireducibilne reprezentacije Euklidove grupe E_2 su opisane u sljedećem teoremu.

Teorem 9. *(Unitarne ireducibilne reprezentacije Euklidove grupe E_2): Euklidova grupa E_2 posjeduje dvije vrste unitarnih ireducibilnih reprezentacija, ovisno o svojstvenoj vrijednosti Casimirovog operatora P^2:*
(i) Za $p^2 = 0$ sve unitarne ireducibilne reprezentacije Euklidove grupe E_2 su jednodimenzionalne degenerirane i vektori baze se mogu opisati sa:

$$\begin{aligned} J\,|0\,m\rangle &= |0\,m\rangle\, m \\ R(\theta)\,|0\,m\rangle &= |0\,m\rangle\, e^{-im\theta} \\ T(\mathbf{b})\,|0\,m\rangle &= |0\,m\rangle\,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

(ii) Za $p^2 > 0$, reprezentacijski prostor je beskonačno dimenzionalan i matrični elementi generatora iznose:

$$\langle p\,m'|\,J\,|p\,m\rangle = m\delta^{m'}{}_{m}, \tag{3.12}$$

$$\langle p\,m'|\,P_{\pm}\,|p\,m\rangle = \mp ip\delta^{m'}{}_{m\pm1}. \tag{3.13}$$

Dokaz. Uvodimo sada operatore $P_{\pm}$ na način $P_{\pm} = P_1 \pm iP_2$ za koje se lako može pokazati da zadovoljavaju sljedeću relaciju s operatorom angularnog momenta J:

$$[J, P_{\pm}] = \pm P_{\pm}. \tag{3.14}$$

S ciljem da dokažemo navedeni teorem, pretpostavimo sada da je dana neka unitarna ireducibilna reprezentacija od E_2. S obzirom da je $SO(2)$ podgrupa od E_2, ta će reprezentacija ujedno biti i unitarna reprezentacija podgrupe $SO(2)$. Međutim ta će reprezentacija općenito biti reducibilna za $SO(2)$. Znamo da se svaka unitarna reprezentacija dane Liejeve grupe može rastaviti na direktnu sumu ireducibilnih reprezentacija iste grupe, pa zaključujemo da u našem slučaju unitarnu ireducibilnu reprezentaciju od E_2 možemo rastaviti na direktnu sumu ireducibilnih reprezentacija grupe $SO(2)$.
S druge strane, ireducibilne reprezentacije od $SO(2)$ su jednodimenzionalne, označene su cjelobrojnim parametrom $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ i njihov reprezentacijski prostor razapinje samo jedan vektor, $|m\rangle$, koji je ujedno i svojstveni vektor angularnog momenta, odnosno generatora rotacije u dvije dimenzije. Parametar m je pri tome svojstvena vrijednost angularnog momenta u dvodimenzionalnom prostoru.

Kao posljedica toga, prostor unitarne ireducibilne reprezentacije grupe E_2 razapinjat će vektori $|pm\rangle$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ i taj će prostor općenito biti beskonačno dimenzionalan. Dakle, u izgradnji reprezentacijskog prostora grupe E_2, samo smo pridodali i skupili vektore $|m\rangle$ koji razapinju ireducibilne invarijantne potpostore u odnosu na $SO(2)$. Pri tome smo tim vektorima pridodali još jednu dodatnu oznaku p, koja je povezana sa svojstvenom vrijednošću Casimirovog operatora P^2. Taj parametar označava unitarnu ireducibilnu reprezentaciju za E_2, odnosno njen ireducibilni reprezentacijski prostor.

Dakle, reprezentacijski prostor je direktna suma jednodimenzionalnih potprostora koje označavamo sa svojstvenom vrijednošću m od J. Vektori baze su istovremeno svojstveni vektori od P^2 i J,

$$P^2 |p\, m\rangle = p^2 |p\, m\rangle \qquad p^2 \geqslant 0 \tag{3.15}$$

$$J |p\, m\rangle = m |p\, m\rangle\,. \tag{3.16}$$

Relacija ((3.14)) povlači da su $P_\pm |pm\rangle$ svojstvena stanja od J sa svojstvenom vrijednošću $(m \pm 1)$:

$$JP_\pm |pm\rangle = [J, P_\pm] |pm\rangle + P_\pm J |pm\rangle = (m \pm 1) P_\pm |pm\rangle \tag{3.17}$$

i vrijedi normalizacija:

$$\langle pm| P_\pm^\dagger P_\pm |pm\rangle = \langle pm| P_\mp P_\pm |pm\rangle = \langle pm| P^2 |pm\rangle = p^2 \langle pm|pm\rangle = p^2, \tag{3.18}$$

gdje je vektor $|pm\rangle$ normaliziran na jedinicu.
Za $p^2 = 0$ ćemo onda imati:

$$P_\pm |0m\rangle = 0, \tag{3.19}$$

iz čega vidimo da su unitarne ireducibilne reprezentacije jednodimenzionalne i reprezentacijski prostor je konačno dimenzionalan.
S druge strane, ako je $p > 0$, definiramo:

$$|pm \pm 1\rangle \equiv P_\pm |pm\rangle\, (\pm i/p). \tag{3.20}$$

Ako imamo neki početni vektor $|pm_0\rangle$, uočavamo da djelovanjem operatora podizanja i spuštanja $P_\pm$ dolazimo do vektora baze $\{|pm\rangle\,,\ m = 0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ i reprezentacijski prostor je beskonačno dimenzionalan. □

4 Reprezentacije Lorentzove grupe

4.1 Osnovna svojstva Lorentzove grupe

Homogene Lorentzove transformacije su kontinuirane linearne transformacije Λ oblika:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{4.1}$$

koje čuvaju duljinu četverovektora:

$$|x|^2 = |x'|^2, \tag{4.2}$$

gdje je $x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, a kvadrat četverovektora je definiran sa:

$$(x)^2 = g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = x^{\mu} x_{\mu} = -(x^0)^2 + (\mathbf{x})^2. \tag{4.3}$$

Metrika $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ ima oblik:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Sada se uvjet (4.2) može zapisati na sljedeći način:

$$g_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} x^{\rho} x^{\sigma} = g_{\rho\sigma} x^{\rho} x^{\sigma}, \tag{4.5}$$

što daje:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\rho} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = g_{\rho\sigma}. \tag{4.6}$$

Dakle, u matričnom obliku $\Lambda^{-1} = g\Lambda^T g^{-1}$, iz čega slijedi da je $|\det\Lambda|^2 = 1$. Ako u izrazu (4.6) uzmemo komponentu $\rho = \sigma = 0$, dobivamo:

$$(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_0)^2 = 1. \tag{4.7}$$

Dakle:

$$(\Lambda^0{}_0)^2 \geqslant 1 \;\Rightarrow\; \Lambda^0{}_0 \geqslant 1 \quad \text{ili} \quad \Lambda^0{}_0 \leqslant -1. \tag{4.8}$$

Lorentzove transformacije kod kojih je $\Lambda^0{}_0 \geqslant 1$ zovemo ortokrone jer one čuvaju smjer vremena, a one sa $\Lambda^0{}_0 \leqslant -1$ to ne rade. Lorentzova grupa nije povezana, nego se sastoji od četiri disjunktna skupa $\{L_+^{\uparrow}, L_-^{\uparrow}, L_+^{\downarrow}, L_-^{\downarrow}\}$, ovisno o predznaku determinante i uvjetu (4.8). Prave Lorentzove transformacije L_+ čine podgrupu sastavljenu od dva skupa, $L_+^{\uparrow}$ i $L_+^{\downarrow}$.

Tablica 4.1: Četiri komponente Lorentzove grupe L

komponenta	$\det \Lambda$	$\Lambda^0{}_0$
$L_+^\uparrow$	$+1$	$\geqslant +1$
$L_-^\uparrow$	-1	$\geqslant +1$
$L_+^\downarrow$	$+1$	$\leqslant -1$
$L^{\downarrow -}$	-1	$\leqslant -1$

Homogene Lorentzove transformacije su definirane sa (4.1) kao linearne transformacije koje ostavljaju duljinu četverovektora invarijantnom. One su potpuno opisane s realnim 4×4 matricama Λ koje zadovoljavaju uvjet $\Lambda^{-1} = g\Lambda^T g^{-1}$. Matrica Λ ima 16 elemenata, ali zbog simetričnosti u indeksima $\mu\nu$, imamo 10 ograničenja, zbog čega opća homogena Lorentzova transformacija ovisi o 6 realnih parametara.

Dakle, skup L matrica Λ koje opisuju homogene Lorentzove transformacije čini grupu koja je izomorfna grupi $O(1,3)$, rotacija u četverodimenzionalnom prostoru Minkowskog i L je linearna Liejeva grupa dimenzije 6.

Rotacije u trodimenzionalnom prostoru su primjer Lorentzovih transformacija, i imaju oblik:

$$\Lambda^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & (R)^i{}_j & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

gdje su $(R)^i{}_j$ 3×3 matrice rotacija. Lorentzov potisak duž $x-$osi ima oblik:

$$\Lambda^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} \cosh\xi & \sinh\xi & 0 & 0 \\ \sinh\xi & \cosh\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

i odgovara transformacijama između dva koordinatna sustava koji se gibaju jedan u odnosu na drugog duž $x-$osi brzinom $v = c\tanh\xi$. Aditivnu veličinu ξ zovemo rapiditet ili Varićakov parametar.
Dakle, specijalne Lorentzove transformacije djeluju na komplementaran skup koordinata u odnosu na rotacije, odnosno one miješaju vremensku i jednu od prostornih komponenti, u ovom slučaju t i x komponentu, dok y i z komponente ostaju nepromijenjene. Promjena iz trigonometrijskih funkcija u hiperbolne je odgovorna za ovakvo ponašanje i takva promjena je povezana sa predznacima u metrici Minkowskog kada imamo dvije prostorne komponente u odnosu na slučaj kada imamo jednu vremensku i jednu prostornu komponentu. Vrijednosti hiperbolnih funkcija nisu ograničene

i parametrizacija preko ξ je u tom smislu nekompaktna.

Prava Lorentzova grupa L_+ se sastoji od specijalnih ortogonalnih 4×4 matrica s metrikom $g_{\mu\nu} =$diag$(-1,1,1,1)$. Λ matrice za rotacije su unitarne, ali one za Lorentzove potiske nisu. Označavamo ju još i sa $SO(3,1)$ i množenje unutar grupe je dano s množenjem odgovarajućih Λ matrica.

Teorem 10. *(Dekompozicija Lorentzovih transformacija): Opći element prave Lorentzove grupe L_+ može se jedinstveno zapisati u faktoriziranom obliku:*

$$\Lambda = R(\alpha,\beta,0)L_3(\xi)R(\phi,\theta,\psi)^{-1}, \tag{4.11}$$

gdje je $L_3(\xi)$ Lorentzov potisak duž $z-$osi brzinom $v = c\tanh\xi$, $0 \leqslant \xi \leqslant \infty$ i Eulerovi kutovi za rotacije su u uobičajenom rasponu.

U ovoj parametrizaciji čistoj rotaciji odgovara $\xi = 0$, a čistom Lorentzovom potisku duž smjera $\hat{n}(\theta,\phi)$ odgovara $\psi = 0$, $\alpha = \phi$ i $\beta = \theta$

4.2 Veza prave Lorentzove grupe i $SL(2)$

Između Lorentzove grupe L_+ i specijalne linearne grupe $SL(2)$ postoji prirodna veza, analogno kao što postoji veza između grupe rotacija $SO(3)$ i specijalne unitarne grupe $SU(2)$.
Četiri koordinate možemo posložiti i na drugi način i definirati reprezentaciju koja je različita od adjungirane koja djeluje na četverovektor s 4×4 matricama, odnosno koordinate možemo razmjestiti u 2×2 kompleksnu matricu koja je hermitska po konstrukciji.
Svakoj točki x^μ pridružujemo 2×2 hermitsku matricu X pomoću relacije:

$$x^\mu \mapsto X = \sigma_\mu x^\mu, \tag{4.12}$$

gdje su $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ Paulijeve matrice, a σ_0 jedinična matrica. Sada imamo:

$$X = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & -x^1 - ix^2 \\ -x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

Duljina četverovektora odgovara negativnoj vrijednosti determinante od X, $-det X = |\mathbf{x}|^2 - |x^0|^2$. Lorentzova transformacija Λ na četverovektoru x^μ inducira linearnu transformaciju na matrici X koja čuva hermicitet i vrijednost determinante. Ovakvo preslikavanje imat će sljedeći oblik:

$$X \xrightarrow{\Lambda} X' = AXA^\dagger. \tag{4.14}$$

Znamo kako se transformiraju pojedinačne komponente četverovektora, ali sada želimo vidjeti kako izgleda 2×2 matrica transformacije. Dakle, imamo:

$$x'^\mu \sigma_\mu = X(x^\mu \sigma_\mu)X^\dagger. \tag{4.15}$$

Matrica A daje istu vrstu transformacije za kut θ i rapiditet ξ kako smo imali i u 4×4 notaciji. Matrice A i $A^\dagger$ će općenito biti kompleksne. Imamo da je $\det X = 1$, dakle norma je sačuvana.
Imat ćemo dvije različite klase matrica A. Imamo tri rotacije i tri potiska i 2×2 kompleksna matrica ima 8 komponenti, no zbog uvjeta na determinantu ostaje ih 6. U slučaju rotacija će matrica transformacije imati sljedeći oblik:

$$A = e^{\frac{i}{2}\theta\sigma_i}, \tag{4.16}$$

a u slučaju potisaka:

$$A = e^{\frac{1}{2}\xi\sigma_i}. \tag{4.17}$$

Ovdje možemo uvesti novu vrstu reprezentacije koja se razlikuje od adjungirane po tome što je linearna u matricama transformacije A i zovemo ju spinorna reprezentacija. Iz nje se može vidjeti veza između grupa $SL(2,\mathbb{C})$ i $SO(3,1)$. Kada je A negativna jedinična matrica, adjungirana reprezentacija je bilinearna u A, dakle negativni predznak neće promijeniti $x^\mu\sigma_\mu$, ali će zato transformirati spinor ψ u $-\psi$.
Dakle transformacija ovog oblika ne utječe na koordinate, ali mijenja predznak spinora. U koordinatnoj reprezentaciji A i $-A$ su identične, dakle $SO(3,1) \cong SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$, odnosno svakoj $\Lambda \in L_+$ odgovaraju dvije $SL(2,\mathbb{C})$ matrice $\pm A(\Lambda)$, baš kao i u slučaju $SO(3)$ i $SU(2)$.

4.3 Generatori i Liejeva algebra grupe $SO(3,1)$

Kovarijantni generatori Lorentzovih transformacija $J_{\mu\nu}$ su antisimetrični tenzori definirani sa sljedećim izrazom za infinitezimalne rotacije u prostoru Minkowskog:

$$\Lambda(\delta\omega) = I - \frac{i}{2}\delta\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu}, \tag{4.18}$$

gdje su $\delta\omega^{\mu\nu} = -\delta\omega_{\mu\nu}$ antisimetrični infinitezimalni parametri. Odgovarajući kontravarijatni generatori su $J^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}J_{\lambda\sigma}g^{\sigma\nu}$.

Prostorna rotacija u (m,n) ravnini može se shvatiti kao rotacija oko $k-$osi gdje je (k,m,n) permutacija od $(1,2,3)$. U ovakvoj notaciji može se pisati:

$$J_k = \frac{1}{2}\varepsilon^{kmn}J_{mn}, \qquad J_{mn} = \varepsilon^{mnk}J_k. \tag{4.19}$$

Dakle, imamo tri generatora rotacija $\mathbf{J} = \{J^{23}, J^{31}, J^{12}\}$ i tri generatora potisaka $\mathbf{K} = \{J^{10}, J^{20}, J^{30}\}$.

Matrični oblik generatora rotacija možemo dobiti iz infinitezimalnih rotacija:

$$J_k = i\frac{\partial R_k}{\partial \phi}\bigg|_{\phi=0}, \tag{4.20}$$

iz čega dobijemo 4×4 matrice J_i:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

Infinitezimalna rotacija je jednaka:

$$R(\delta\theta) = I - i\delta\theta^k J_k, \tag{4.22}$$

a ukupna rotacija:

$$R = e^{-i\theta^k J_k}. \tag{4.23}$$

Slično iz $L_1(\xi)$, $L_2(\xi)$, $L_3(\xi)$ možemo dobiti generatore potisaka:

$$K_l = i\frac{\partial L_l}{\partial \psi}\bigg|_{\psi=0}, \tag{4.24}$$

odnosno:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0, \end{pmatrix} \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.25}$$

Ovdje koristimo notaciju da je $\delta\xi^m = \delta\omega^{m0}$ i $K \equiv J_{m0}$. Generatori potisaka miješaju vremensku dimenziju s jednom od prostornih. Infinitezimalni generatori potisaka su jednaki:

$$\Lambda(\delta\xi) = I - i\delta\xi^m K_m, \tag{4.26}$$

pa konačni Lorentzov potisak ima oblik:

$$\Lambda(\xi) = e^{-i\xi^m K_m}. \tag{4.27}$$

Dakle, općenita prava Lorentzova transformacija se može zapisati kao:

$$\Lambda(\omega) = e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu}}. \tag{4.28}$$

Ako imamo dvije prave Lorentzove transformacije Λ i Ω, onda vrijedi zakon transformacije:

$$\Omega\Lambda(\omega)\Omega^{-1} = \Lambda(\omega'), \tag{4.29}$$

gdje je $\omega'^{\mu\nu} = \Omega^{\mu}{}_{\lambda}\Omega^{\nu}{}_{\sigma}\omega^{\lambda\sigma}$.
Generatori $\{J_{\mu\nu}\}$ transformiraju se na Ω kao komponente tenzora drugog reda:

$$\Omega J_{\mu\nu}\Omega^{-1} = J_{\lambda\sigma}\Omega^{\lambda}{}_{\mu}\Omega^{\sigma}{}_{\nu}. \tag{4.30}$$

Teorem 11. *Liejeva algebra prave Lorentzove grupe je dana sa:*

$$[J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}] = i(J_{\lambda\nu}g_{\mu\sigma} - J_{\sigma\nu}g_{\mu\lambda} + J_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - J_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}). \tag{4.31}$$

Dokaz. Pomoću matričnog oblika generatora $J_{\mu\nu}$:

$$(J_{\lambda\sigma})^{\nu}{}_{\mu} = -i(\delta^{\nu}{}_{\lambda}g_{\sigma\mu} - \delta^{\nu}{}_{\sigma}g_{\lambda\mu})$$

komutacijsku relaciju možemo raspisati kao:

$$\begin{aligned}
[J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}]^{\alpha}{}_{\beta} &= (J_{\mu\nu})^{\alpha}{}_{\rho}(J_{\lambda\sigma})^{\rho}{}_{\beta} - (J_{\lambda\sigma})^{\alpha}{}_{\rho}(J_{\mu\nu})^{\rho}{}_{\beta} \\
&= -(\delta^{\alpha}{}_{\mu}g_{\nu\rho} - \delta^{\alpha}{}_{\nu}g_{\mu\rho})(\delta^{\rho}{}_{\lambda}g_{\sigma\beta} - \delta^{\rho}{}_{\sigma}g_{\lambda\beta}) \\
&+ (\delta^{\alpha}{}_{\lambda}g_{\sigma\rho} - \delta^{\alpha}{}_{\sigma}g_{\lambda\rho})(\delta^{\rho}{}_{\mu}g_{\nu\beta} - \delta^{\rho}{}_{\nu}g_{\mu\beta}) \\
&= -\delta^{\alpha}{}_{\mu}g_{\nu\rho}g_{\sigma\beta} + \delta^{\alpha}{}_{\mu}g_{\nu\sigma}g_{\lambda\beta} + \delta\alpha{}_{\nu}g_{\mu\lambda}g_{\sigma\beta} - \delta^{\alpha}{}_{\nu}g_{\mu\sigma}g_{\lambda\beta} \\
&+ \delta^{\alpha}{}_{\lambda}g_{\sigma\mu}g_{\nu\beta} - \delta^{\alpha}{}_{\lambda}g_{\sigma\nu}g_{\mu\beta} - \delta^{\alpha}{}_{\sigma}g_{\lambda\mu}g_{\nu\beta} + \delta^{\alpha}{}_{\sigma}g_{\mu\nu}g_{\mu\beta},
\end{aligned}$$

iz čega se lako dođe do tražene relacije. □

Liejevu algebru Lorentzove grupe možemo raspisati po komponentama kao:

$$[J_m, K_n] = i\varepsilon^{mnl}J_l \tag{4.32}$$

$$[K_m, J_n] = i\varepsilon^{mnl}K_l \tag{4.33}$$

$$[K_m, K_n] = -i\varepsilon^{mnl}J_l. \tag{4.34}$$

Kao posljedica relacije (4.33) imamo da je:

$$RK_mR^{-1} = K_{m'}R^{m'}_{m} \tag{4.35}$$

$$RL_{\hat{n}}(\xi)R^{-1} = L_{R\hat{n}}(\xi), \tag{4.36}$$

gdje je R rotacija u tri dimenzije i $L_{\hat{n}}(\xi)$ je specijalna Lorentzova transformacija, odnosno potisak duž $\hat{n}$ smjer. Dakle, generatori Lorentzovih potisaka se na rotacije transformiraju kao komponente običnog vektora i Lorentzov potisak u $\hat{n}$ smjeru se transformira kao potisak u $R\hat{n}$ smjeru za rotaciju R.
Iz komutacijskih relacija možemo vidjeti da generatori J_i čine zatvoren skup, dakle oni tvore podgrupu prave Lorentzove grupe. U slučaju koordinatne reprezentacije ta podgrupa je $SO(3)$ ili $SU(2)$. Potisci nemaju takvo svojstvo zatvorenosti, jer njihova kombinacija daje rotaciju, tako da oni ne mogu formirati podgrupu. Negativan predznak u posljednjoj relaciji dolazi od metrike Minkowskog i ukazuje na nekompaktnost grupe. Algebra svih šest generatora je zatvorena na komutacijska pravila.

4.4 *Ireducibilne reprezentacije prave Lorentzove grupe*

Želimo klasificirati sve ireducibilne reprezentacije prave Lorentzove grupe. Zbog nekompaktnosti grupe, konačno dimenzionalne reprezentacije ne mogu biti unitarne.

Generatori K_i nisu hermitski, jer matrice Λ općenito nisu unitarne.
Sada možemo definirati linearne kombinacije J_i i K_i:

$$M_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i) \tag{4.37}$$
$$N_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i) \tag{4.38}$$

koje su hermitske. Rezultat je da se algebra preko ovih kombinacija može izraziti kao:

$$[M_i, M_j] = i\varepsilon^{ijk} M_k \tag{4.39}$$
$$[N_i, N_j] = i\varepsilon^{ijk} N_k \tag{4.40}$$
$$[M_i, N_j] = 0. \tag{4.41}$$

Liejeva algebra Lorentzove grupe identična je algebri grupe $SU(2)_M \times SU(2)_N$, gdje M i N odgovaraju generatorima algebre. Svaka reprezentacija grupe $SU(2) \times SU(2)$ inducira reprezentaciju prave Lorentzove grupe $SO(3,1)$.
Grupa $SU(2)_M \times SU(2)_N$ je kompaktna, a $SO(3,1)$ nije, iako dijele istu Liejevu algebru. Da bi reprezentacija bila unitarna, generatori trebaju biti hermitski, međutim zbog faktora i u (4.37) i (4.38), dva skupa generatora (M_i, N_i) i (J_i, K_i) ne mogu svi istovremeno biti hermitski, tako da konačno dimenzionalne reprezentacije Lorentzove grupe neće biti unitarne.
Dakle, grupa $SO(3,1)$ se faktorizirala i sve njene konačno dimenzionalne ireducibilne reprezentacije mogu se dobiti ako se riješe odvojeno dvije $SU(2)$ algebre. Iz operatora M_i i N_i se mogu konstruirati operatori podizanja i spuštanja treće komponente angularnog momenta.

Reprezentacije direktnog produkta dvaju algebri možemo označiti s brojevima $(u, v;\ 2u, 2v = 0, 1, 2, \ldots)$ takvima da su $u(u+1)$ i $v(v+1)$ svojstvene vrijednosti dvaju Casimirovih operatora $\mathbf{M}^2$ i $\mathbf{N}^2$. Baza u reprezentacijskom prostoru je $\{|k\,l\rangle;\ k = -u, \ldots, u;\ l = -v, \ldots, v\}$ koja se sastoji od direktnog produkta dvaju vektora iz kanonskih baza $\{|u, k\rangle\}, \{|v, l\rangle\}$ od dvaju $SU(2)$ podalgebri. Na takvoj bazi generatori Lorentzove grupe djeluju na sljedeći način:

$$J_3\,|k\,l\rangle = (M_3 + N_3)\,|k\,l\rangle = |k\,l\rangle\,(l + k) \tag{4.42}$$
$$\begin{aligned} J_\pm\,|k\,l\rangle = (M_\pm + N_\pm)\,|k\,l\rangle &= |k \pm 1\ l\rangle\,[u(u+1) - k(k+1)]^{1/2} \\ &+ |k\ l \pm 1\rangle\,[v(v+1) - l(l+1)]^{1/2} \end{aligned} \tag{4.43}$$

$$K_3\,|k\,l\rangle = i(N_3 - M_3)\,|k\,l\rangle = |k\,l\rangle\,i(l - k) \tag{4.44}$$
$$\begin{aligned} K_\pm\,|k\,l\rangle = i(N_\pm - M_\pm)\,|k\,l\rangle &= |k\ l \pm 1\rangle\,i[v(v+1) - l(l \pm 1)]^{1/2} \\ &- |k \pm 1\ l\rangle\,i[u(u+1) - k(k \pm 1)]^{1/2}. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Ako se ograničimo na prostor trodimenzionalnih rotacija, reprezentacijski prostor je ekvivalentan prostoru direktnog produkta angularnih momenata u i v. Prostor se može dijagonalizirati s obzirom na J^2 i J_3, tako da postaje direktna suma invarijantnih potprostora (u odnosu na rotacije) sa $j = |u-v|, |u-v+1|, ..., (u+v)$. Nova baza je $\{|j\, m\rangle\}$.
Generatori potisaka nisu hermitski u bazi $|k\, l\rangle$, imaju imaginarne svojstvene vrijednosti i K_3 je antihermitski generator. Dakle, konačno dimenzionalne reprezentacije Lorentzove grupe nisu unitarne.
Zbog neunitarnosti ovakve reprezentacije ne možemo koristiti za opis kvantnomehaničkih stanja, ali možemo ih koristiti za opis transformacija polja.

Svaka $SU(2)$ reprezentacija se može opisati s j, gdje je $j = 0, 1/2, 1, ...$, pa se tako i svaka reprezentacija $SO(3,1)$ može jednoznačno predstaviti s maksimalnim težinama dvaju $SU(2)$ grupa, odnosno (u, v). Promotrit ćemo neke od reprezentacija s najmanjim težinama. Trivijalna reprezentacija je $(0,0)$ i ona opisuje skalarnu česticu bez spina.
Reprezentacije $(1/2, 0)$ i $(0, 1/2)$ su obje dvodimenzionalne i povezane su jedna s drugom paritetom ili nabojnom konjugacijom. Njihove reprezentacijske matrice su $SL(2)$ matrice. Ove reprezentacije zovemo Weylovim reprezentacijama, jer služe za opis Weylovih fermiona, neutralnih čestica bez mase sa spinom 1/2. Lijevi Weylov spinor ψ_L se transformira kao $(1/2, 0)$, a desni ψ_R kao reprezentacija $(0, 1/2)$. Diracovom spinoru odgovara direktna suma ovih dvaju reprezentacija, $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$. Ova četverodimenzionalna reprezentacija je reducibilna i Diracov spinor predstavljamo preko dva Weylova spinora kao:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \tag{4.46}$$

Reprezentacije $(1,0)$ i $(0,1)$ su trodimenzionalne i predstavljaju objekte spina 1. Tenzor elektromagnetskog polja se transformira kao direktna suma ovih dvaju reprezentacija, dakle takva reprezentacija ima šest dimenzija, $(1,0) \oplus (0,1)$.

4.4.1 Unitarne reprezentacije

Lorentzova grupa nije kompaktna, dakle sve unitarne reprezentacije će biti beskonačno dimenzionalne. Stanja ćemo označavati kao i prije, jedina razlika je u dozvoljenim vrijednostima za $(u, v; l, k)$, odnosno $(j_0, j_1; j, m)$. Želimo vidjeti kakva ograničenja će postaviti zahtjev za unitarnost reprezentacija.
Djelovanje generatora rotacija $\{J_i\}$ na vektore baze $|j\, m\rangle$ je kao i prije, pri čemu se vrijednost j se ne mijenja. Potisci se na rotacije transformiraju kao komponente običnog vektora, pa možemo koristiti Wigner - Eckartov teorem:

$$\langle j'\, m'|\, O^s_\lambda\, |j\, m\rangle = \langle j'\, m'(s, j)\lambda\, m\rangle\, \langle j'||O^s||j\rangle\,, \tag{4.47}$$

gdje $\lambda = -s, ..., s$. Matrični elementi ne iščezavaju u sljedećim slučajevima:

$$(i) \qquad |j-s| \leqslant j' \leqslant j+s \tag{4.48}$$

$$(ii) \qquad m' = \lambda + m. \tag{4.49}$$

Za potiske onda slijedi:

$$\langle j'\, m' |\, K_3\, | j\, m \rangle = A^{j'}{}_{j} \langle j'\, m' (1, j) 0\, m \rangle \tag{4.50}$$

$$\langle j'\, m' |\, K_{\pm}\, | j\, m \rangle = \mp\sqrt{2} A^{j'}{}_{j} \langle j'\, m' (1, j) \pm 1\, m \rangle\,. \tag{4.51}$$

Koeficijent $A^{j'}{}_{j}$ odgovara reduciranom matričnom elementu Wigner-Eckartovog teorema i matrični elementi iščezavaju osim ako $j' = j-1, j, j+1$ i $m' = n+m$. Faktor $\mp\sqrt{2}$ dolazi zbog toga što $\mp K_{\pm}/\sqrt{2}$ skupa s K_3 tvore normalizirani skup ireducibilnih sferičnih tenzorskih operatora.

$$K_1^{(1)} \equiv -\frac{1}{\sqrt{2}} K_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}} (K_1 + iK_2) \tag{4.52}$$

$$K_{-1}^{(1)} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} K_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (K_1 - iK_2). \tag{4.53}$$

Ograničenja na koeficijente $A^{j'}{}_{j}$ možemo pronaći ako zahtijevamo da budu zadovoljene komutacijske relacije za generatore K:

$$[K_{\pm}, K_3] = \pm J_{\pm} \tag{4.54}$$

$$[K_+, K_-] = -2J_3. \tag{4.55}$$

Reprezentacije su beskonačno dimenzionalne, pa za razliku od prije, nema gornjeg ograničenja na vrijednosti j.
Uvodimo nove definicije za koeficijente $A^{j}{}_{j}$:

$$A_j^+ = \frac{A_j^{j+1}}{\sqrt{(2j+1)(j+1)}} \tag{4.56}$$

$$A_j = \frac{A^{j}{}_{j}}{\sqrt{j(j+1)}} \tag{4.57}$$

$$A_j^- = -\frac{A_j^{j-1}}{\sqrt{j(2j+1)}}. \tag{4.58}$$

Sad možemo pronaći kako djeluje K_3 na bazu $|jm\rangle$:

$$\begin{aligned} K_3\, |jm\rangle = {} & \sqrt{(j-m)(j+m)} A_j^-\, |j-1\, m\rangle + m A_j\, |jm\rangle \\ & + \sqrt{(j-m+1)(j+m+1)} A_j^+\, |j+1\, m\rangle\,. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Nadalje, K_+:

$$\begin{aligned} K_+\, |jm\rangle = {} & A_j^- \sqrt{(j-m-1)(j-m)}\, |jm+1\rangle + A_j \sqrt{(j+m+1)(j-m)}\, |jm+1\rangle \\ & - A_j^+ \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)}\, |j+1\, m+1\rangle\,. \end{aligned} \tag{4.60}$$

K_- djeluje kao:

$$K_- \left| jm \right\rangle = -A_j^- \sqrt{(j+m)(j+m-1)} \left| j-1\, m-1 \right\rangle + A_j \sqrt{(j-m+1)(j+m)} \left| j\, m-1 \right\rangle \\ + A_j^+ \sqrt{(j-m+1)(j-m+2)} \left| j+1\, m-1 \right\rangle, \tag{4.61}$$

iz čega dobivamo skup uvjeta na koeficijente:

$$[(j-1)A_{j-1} - (j+1)A_j]A_j^- = 0 \tag{4.62a}$$

$$[(j+2)A_{j+1} - jA_j]A_j^+ = 0 \tag{4.62b}$$

$$(2j-1)A_j^- A_{j-1}^+ - A_j^2 - (2j+3)A_{j+1}^- A_j^+ = 1, \tag{4.62c}$$

pri čemu je sada:

$$A_j^- = \frac{A_j^{j-1}}{\sqrt{j(2j+1)}}. \tag{4.63}$$

Neka je j_0 minimalna vrijednost angularnog momenta. Tada $A_{j_0}^-$ mora biti 0, jer stanja $\left| j_0 - 1\, m \right\rangle$ i $\left| j_0 - 1\, m \pm 1 \right\rangle$ ne postoje.
Za $A_j^\pm \neq 0$ imamo:

$$A_{j+1} = \frac{j}{j+2} A_j, \tag{4.64}$$

čije je rješenje:

$$A_j = i \frac{\nu j_0}{j(j+1)}, \tag{4.65}$$

gdje je $\nu \in \mathbb{C}$ proizvoljna konstanta. Definiramo $A_j^- \cdot A_{j-1}^+ = -B_j^2$, budući da je $B_{j_0} = 0$ iz (4.62c) dobijemo:

$$B_j^2 = \frac{(j^2 - j_0^2)(j^2 - \nu^2)}{j^2(4j^2 - 1)} \tag{4.66}$$

i $A_j^- = B_j \xi_j$, $A_{j-1}^+ = -B_j \xi_j^{-1}$.
Želimo odrediti koeficijente ν, ξ i to ćemo napraviti tako da zahtijevamo da su K_1, K_2, K_3 hermitski generatori. Ovi uvjeti daju:

$$A_j = A_j^* \tag{4.67}$$

$$A_j^- = (A_{j-1}^+)^*. \tag{4.68}$$

Za koeficijente ν, ξ pronalazimo sljedeće:

$$j_0(\nu + \nu^*) = 0 \tag{4.69}$$

$$|B_j|(|\xi_j|^2 - e^{-2i\beta_j}) = 0, \tag{4.70}$$

gdje je $B_j = |B_j| e^{i\beta_j}$. Dakle, imamo dvije različite klase ireducibilnih reprezentacija Lorentzove grupe. Glavni niz koji je opisan s parametrima $\nu = -iw$, $w \in \mathbb{R}$, $j_0 =$

$0, 1/2, 1, \ldots$ i komplementarni niz koji je opisan s parametrima $-1 \leqslant \nu \leqslant 1$; $j_0 = 0$.

Matrični elementi generatora $\{J_m\}$ su dani kanonskim oblicima, a $\{K_m\}$ gdje su koeficijenti $A^k{}_j (k = j, j \pm 1)$ određeni s relacijama:

$$A^j{}_j = i \frac{\nu j_0}{[j(j+1)]^{1/2}} \tag{4.71}$$

$$A^j{}_{j-1} = -[j(2j-1)]^{1/2} B_j \xi_j \tag{4.72}$$

$$A^{j-1}{}_j = [j(2j+1)]^{1/2} B_j \xi_j^{-1} \tag{4.73}$$

$$B_j^2 = \frac{(j^2 - j_0^2)(j^2 - \nu^2)}{j^2(4j^2 - 1)}. \tag{4.74}$$

5 Reprezentacije Poincaréove grupe

Poincaréova grupa nije kompaktna, pa su njene unitarne reprezentacije sve beskonačno dimenzionalne. Wigner je otkrio da se ireducibilne reprezentacije mogu označiti svojstvenim vrijednostima dvaju Casimirovih operatora, od kojih jedan odgovara masi, a drugi je povezan s angularnim momentom. Pronašao je korespondenciju između ireducibilnih reprezentacija Poincaréove grupe i elementarnih čestica. Klasificirao je elementarne čestice i dao njihovu definiciju; elementarna čestica je ireducibilna reprezentacija Poincaréove grupe. Njegova analiza ireducibilnih reprezentacija Poincaréove grupe se bavila klasifikacijom fizikalno relevantnih reprezentacija i metoda koju je koristio osnovana je na maloj grupi. U ovom poglavlju ćemo opisati osnovna svojstva Poincaréovih transformacija, Liejeve algebre Poincaréove grupe i njenih generatora, te ćemo uvesti pojmove male grupe i inducirane reprezentacije i zatim pomoću Wignerove metode klasificirati sve ireducibilne unitarne reprezentacije.

5.1 Osnovna svojstva Poincaréove grupe

Općenita Poincaréova transformacija može se zapisati kao generalizacija homogene Lorentzove transformacije:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + b^{\mu}, \tag{5.1}$$

gdje su b^{μ} vektori u $\mathbb{R}^4$. Dakle, Poincaréovu grupu čine transformacije u prostoru Minkowskog koje se sastoje od svih translacija i pravih Lorentzovih transformacija i njihovih produkata. Grupu označavamo sa P i zovemo ju još i nehomogena Lorentzova grupa.

Podgrupa Poincaréove grupe je homogena Lorentzova grupa $SO(3,1)$, a komutativna invarijantna podgrupa je grupa četverodimenzionalnih translacija. Poincaréova grupa se slično kao i Lorentzova sastoji od četiri odvojene komponente. Komponenta $P_+^{\uparrow}$ nije kompaktna; ona sadrži $L_+^{\uparrow}$ i grupu translacija koje nisu kompaktne. $P_+^{\uparrow}$ je dvostruko povezana, analogno s $L_+^{\uparrow}$, te nije niti prosta niti poluprosta grupa, jer ima invarijantnu komutativnu podgrupu.

Opći element Poincaréove grupe označavamo sa $g(b,\Lambda)$ i dvije transformacije jedna za drugom su ekvivalentne jednoj transformaciji:

$$g(b',\Lambda')g(b,\Lambda) = g(\Lambda' b + b', \Lambda'\Lambda), \tag{5.2}$$

pri čemu djelovanje Poincaréove grupe možemo zapisati i u matričnom obliku.

Bilo koja Poincaréova transformacija se može jedinstveno zapisati kao produkt translacija i homogenih Lorentzovih transformacija.

Opći element Poincaréove grupe može se zapisati u faktoriziranom obliku:

$$g(b,\Lambda) = T(b)\Lambda, \tag{5.3}$$

gdje je $T(b) = g(b, I)$ translacija, a $\Lambda = g(0, \Lambda)$ prava Lorentzova transformacija.

Poincaréova grupa ima deset generatora. Generatori translacija su definirani izrazom za infinitezimalne translacije:

$$T(\delta b) = I - i\delta b^{\mu} P_{\mu}, \tag{5.4}$$

a odgovarajući kontravarijantni generatori su dani sa $P^{\mu} = g^{\mu\nu} P_{\nu}$.

Teorem 12. *(Liejeva algebra Poincaréove grupe): Liejeva algebra Poincaréove grupe dana je s:*

$$[P_{\mu}, P_{\lambda}] = 0 \tag{5.5}$$

$$[P_{\mu}, J_{\lambda\sigma}] = i(P_{\lambda} g_{\mu\sigma} - P_{\sigma} g_{\mu\lambda}) \tag{5.6}$$

$$[J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}] = i(J_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma} - J_{\sigma\nu} g_{\mu\lambda} + J_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} - J_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda}). \tag{5.7}$$

Izraz (5.5) je posljedica komutativnosti grupe translacija, a (5.7) smo pokazali ranije kod reprezentacija Lorentzove grupe. (5.6) možemo dokazati pomoću infinitezimalnog oblika Λ matrica:

$$\Lambda P_{\mu} \Lambda^{-1} = (I - \frac{i}{2} \delta\omega^{\lambda\sigma} J_{\lambda\sigma}) P_{\mu} (I + \frac{i}{2} \delta\omega^{\lambda\sigma} J_{\lambda\sigma}) \tag{5.8}$$

$$= P_{\mu} + \frac{i}{2} \delta\omega^{\lambda\sigma} [P_{\mu}, J_{\lambda\sigma}] + 0(\delta\omega^2), \tag{5.9}$$

gdje je desna strana jednaka:

$$P_{\nu} [I - \frac{i}{2} \delta\omega^{\lambda\sigma} J_{\lambda\sigma}]^{\nu}{}_{\mu} = P_{\mu} - \frac{i}{2} \delta\omega^{\lambda\sigma} (J_{\lambda\sigma})^{\nu}{}_{\mu} P_{\nu} \tag{5.10}$$

$$= P_{\mu} - \frac{1}{2} \delta\omega^{\lambda\sigma} (\delta^{\nu}_{\lambda} g_{\sigma\mu} - \delta^{\nu}_{\sigma} g_{\lambda\mu}) P_{\nu}. \tag{5.11}$$

Iz činjenice da P_{μ} ne komutira s $J_{\mu\nu}$ možemo zaključiti da Poincaréova grupa nije direktni produkt Lorentzove i grupe translacija, već je ona poludirektni produkt ovih dvaju grupa:

$$P = L \rtimes T_4. \tag{5.12}$$

Liejeva algebra cijele Poincaréove grupe se može raspisati po komponentama. Komutator dvaju translacija je:

$$[P^0, P_m] = [P_n, P_m] = 0, \tag{5.13}$$

dok je (5.6) po komponentama jednak:

$$[P^0, J_n] = 0 \tag{5.14a}$$

$$[P_m, J_n] = i\varepsilon^{mnl} P_l \tag{5.14b}$$

$$[P_m, K_n] = i\delta_{mn} P^0 \tag{5.14c}$$

$$[P^0, K_n] = iP_n, \tag{5.14d}$$

a (5.7) jednako kao i kod Lorentzove grupe:

$$[J_m, J_n] = i\varepsilon^{mnl} J_l \tag{5.15a}$$
$$[K_m, J_n] = i\varepsilon^{mnl} K_l \tag{5.15b}$$
$$[K_m, K_n] = -i\varepsilon^{mnl} J_l. \tag{5.15c}$$

Iz oblika komutacijskih relacija možemo zaključiti da se P^0 ponaša kao skalar na trodimenzionalne rotacije, a J_n je invarijantan na vremenske translacije. Translacije i potisci u različitim prostornim smjerovima komutiraju, ali se miješaju ako uključuju isti prostorni smjer.

5.2 Wignerova klasifikacija

Zanima nas kako izgledaju ireducibilne reprezentacije Poincaréove grupe za koje su operatori P_μ i $J_{\mu\nu}$ hermitski, dakle beskonačno dimenzionalne reprezentacije. Kako bismo klasificirali sve ireducibilne reprezentacije, potrebno je pronaći skup međusobno komutirajućih generatora grupe simetrija. Možemo izabrati podgrupu translacija koja je invarijantna komutativna podgrupa, odnosno P^μ svi komutiraju međusobno. Za vektore baze ćemo onda odabrati svojstvene vektore generatora translacija P^μ i operatore Liejeve algebre odgovarajuće male grupe koji komutiraju.

Poincaréova grupa nije kompaktna, dakle nećemo imati konačno dimenzionalne unitarne reprezentacije. Na Hilbertovom prostoru imamo samo beskonačno dimenzionalne reprezentacije Poincaréove grupe s impulsom različitim od 0, koje onda zahtijevaju unitarnost. Odnosno, postoji beskonačno mnogo stanja s različitim četveroimpulsima P^μ koji su povezani Lorentzovim potiscima. Zanima nas broj stupnjeva slobode za česticu koja ima određeni četveroimpuls i za to nam je važan pojam male grupe.

Teorem 13. *(Mala grupa, inducirana reprezentacija): Na potprostoru koji odgovara danom četverovektoru $\{p^\mu\}$, nezavisne komponente $\{W^\mu\}$ formiraju Liejevu algebru male grupe od p^μ.*
Za svaku ireducibilnu unitarnu reprezentaciju male grupe, može se izvesti odgovarajuća inducirana reprezentacija cijele Poincaréove grupe uzastopnim primjenama homogene Lorentzove transformacije.
Ireducibilne unitarne reprezentacije Poincaréove grupe su opisane svojstvenim vrijednostima dvaju Casimirovih operatora $-P^2$ i W^2/p^2.

Liejeva algebra na koju se teorem odnosi je dana izrazom (5.21) gdje su operatori P^μ zamijenjeni sa njihovim svojstvenim vrijednostima p^μ i oblik ove algebre određuje vektor $\{p^\mu\}$.
U traženju reprezentacija Poincaréove grupe, reprezentacije male grupe su važne jer

se pomoću njih grade reprezentacije cijele grupe. Mala grupa je jedinstvena podgrupa koja čuva invarijantnost vektora impulsa i ovakvu metodu možemo primijeniti na nehomogene grupe, odnosno one koje imaju poluprostu podgrupu. Za Poincaréovu grupu je to Lorentzova podgrupa plus invarijantna komutativna podgrupa translacija. Za reprezentaciju cijele grupe koja ima dijagonalan impuls, svako stanje je istovremeno i stanje poluproste grupe, male grupe, a ova stanja su nam poznata.

Poincaréova grupa će u četiri dimenzije imati dva Casimirova operatora. Prvi definiramo kao:

$$C_1 \equiv -P_\mu P^\mu = {P_0}^2 - \mathbf{P}^2. \tag{5.16}$$

Njegova svojstvena vrijednost, c_1, nije pozitivno definitna. Svojstvene vrijednosti ovog Casimirovog operatora odgovaraju kvadratu ukupne energije u sustavu centra mase. Drugi Casimirov operator je $C_2 = W_\mu W^\mu$ čije komponente ne komutiraju međusobno, ali on komutira s P_μ i definiramo ga pomoću Pauli-Lubanski vektora.

Teorem 14. *(Pauli-Lubanski vektor W_μ): Pauli-Lubanski vektor definiran sa:*

$$W^\lambda \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\lambda\mu\nu\sigma} J_{\mu\nu} P_\sigma \tag{5.17}$$

ima sljedeća svojstva:

$$W^\lambda P_\lambda = 0 \tag{5.18}$$

$$[W^\lambda, P^\mu] = 0 \tag{5.19}$$

$$[W^\lambda, J^{\mu\nu}] = i(W^\mu g^{\lambda\nu} - W^\nu g^{\mu\lambda}) \tag{5.20}$$

$$[W^\lambda, W^\sigma] = i\varepsilon^{\lambda\sigma\mu\nu} W_\mu P_\nu. \tag{5.21}$$

Dokaz. Iz relacije (5.18) možemo zaključiti da su četverovektori P i W okomiti jedan na drugi. Imamo:

$$W^\lambda P_\lambda = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} J_{\mu\nu} P_\lambda P_\sigma.$$

Desna strana jednadžbe iščezava zbog antisimetričnosti ε tenzora u indeksima $(\lambda\sigma)$ dok je produkt dvaju faktora momenta simetričan u tim istim indeksima.
Iz (5.19) vidimo translacijsku invarijantnost W^λ.

$$\begin{aligned}[W^\lambda, P^\mu] &= \varepsilon^{\lambda\alpha\beta\sigma}[J_{\alpha,\beta}, P^\nu] P_\sigma/2 \\ &= i\varepsilon^{\lambda\alpha\beta\sigma}[\delta^\mu_\alpha P_\beta - \delta^\mu_\beta P_\alpha] P_\sigma/2\end{aligned}$$

Oba člana na desnoj strani jednadžbe iščezavaju.
Iz (5.20) možemo zaključiti da se $\{W^\lambda\}$ transformiraju kao komponente četverovektora na homogene Lorentzove transformacije i posljedica je definicije Pauli-Lubanski

vektora.
Komutacijsku relaciju (5.21) možemo pokazati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
[W^\lambda, W^\sigma] &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\sigma\mu\gamma\nu}[W^\lambda, J_{\mu\gamma}P_\nu] \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{\sigma\mu\gamma\nu}([W^\lambda, J_{\mu\gamma}]P_\nu) + J_{\mu\gamma}[W^\lambda, P^\nu]).
\end{aligned}$$

Drugi član na desnoj strani iščezava, a iz prvog se dobije tražena relacija:

$$\begin{aligned}
[W^\lambda, W^\sigma] &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\sigma\mu\gamma\nu}g_{\mu\kappa}g_{\gamma\xi}[W^\lambda, J^{\kappa\xi}]P_\nu \\
&= \frac{i}{2}\varepsilon^{\sigma\mu\gamma\nu}g_{\mu\kappa}g_{\gamma\xi}(W^\kappa g^{\lambda\xi} - W^\xi g^{\kappa\lambda})P_\nu \\
&= i\varepsilon^{\lambda\sigma\mu\nu}W_\mu P_\nu.
\end{aligned}$$

□

Dakle, C_2 se transformira kao četverovektor, ali zbog uvjeta $P^\lambda W_\lambda = 0$, on ima samo tri nezavisne komponente. Može se pokazati da C_2 komutira sa svim generatorima Poincaréove grupe.

5.3 *Jednočestična stanja*

Najjednostavnija situacija je kada imamo jednočestično stanje koje se transformira kao element Poincaréove grupe i na ovaj način ćemo onda klasificirati čestice prema njenim reprezentacijama. Moramo odrediti skup međusobno komutirajućih generatora grupe simetrija. P^μ komutiraju, tako da će oni svakako činiti dio tog skupa. Casimirov operator $C_1 = -P_\mu P^\mu$ će biti konstanta. Drugi Casimirov operator $C_2 = W^\mu W_\mu$ će kvantizirati spin čestica, dok će mala grupa odrediti spin reprezentacije.
Prvi korak je da uzmemo svojstveno stanje četveroimpulsa i konstruiramo malu grupu. Nakon toga treba pronaći novu oznaku koja će odgovarati spinu čestice.
Postoje četiri različita vektora impulsa u smislu da se takvi vektori ne mogu dobiti jedan iz drugog kontinuiranim Lorentzovim transformacijama. To su sljedeće situacije.

(i) $p^2 = 0$, $p^\mu = (0,0,0,0)$. Ovo u stvari i nije jednočestično stanje, nego je u pitanju osnovno stanje cijelog sustava ili vakuum. Mala grupa je cijela Lorentzova grupa, jer je takvo stanje invarijantno na bilo koju od homogenih Lorentzovih transformacija. Pripadna grupa natkrivanja je $SL(2,\mathbb{C})$. Njene ireducibilne reprezentacije su identificirane u dodatku B.

(ii) $p^2 = -M^2 < 0$. Imamo vektor oblika $p^\mu = (M,0,0,0)$, što odgovara masivnoj čestici u sustavu mirovanja. Četverovektor impulsa ima samo vremensku komponentu različitu od 0, što znači da će mala grupa ostavljati tu komponentu invarijantnom i miješati tri prostorne komponente bez ikakvih ograničenja. To je grupa rotacija $SO(3)$.

(iii) $p^2 = 0$. Ne postoji sustav mirovanja čestice. Vektor p^μ je u najjednostavnijoj varijanti vektor s jednom prostornom i jednom vremenskom komponentom različitom od 0, gdje te komponente imaju isti iznos, $p^\mu = (\omega_0, 0, 0, \omega_0)$. Radi se o bezmasenoj čestici koja se giba duž $z-$os. Mala grupa je Euklidova grupa u dvije dimenzije.

(iv) $p^2 = Q^2 > 0$. Odgovarajući četverovektor impulsa ima oblik $p^\mu = (0,0,0,Q)$. Jedna od prostornih komponenti je različita od nule, dok preostale iščezavaju. Ovaj slučaj odgovara čestici koja bi imala imaginarnu vrijednost mase i kretala bi se brzinom većom od brzine svjetlosti i koja dosad nije opažena. Mala grupa je $SO(2,1)$, jer je jedna od komponenti vremenska, a preostale dvije su prostorne.

Od ove četiri mogućnosti zanimaju nas dvije koje su fizikalne, prva kada masa čestice nije jednaka nuli i mala grupa je $SO(3)$ i druga, kada je masa čestice jednaka nuli i mala grupa je Euklidova grupa E_2. Sljedeći korak je da pronađemo način na koji ćemo označiti preostale kvantne brojeve i stanja.

5.3.1 Stanja masivnih čestica

Standardni vektor je ${p_t}^\mu \equiv (p^0, \mathbf{p}) = (M, \mathbf{0})$. Za referentni sustav odabiremo sustav mirovanja čestice ($\mathbf{p} = 0$) s masom jednakom M. Kvocijentna grupa Poincaréove grupe u odnosu na cijelu invarijatnu podgrupu T_4 je homogena Lorentzova grupa. Maksimalna podgrupa od $SO(3,1)$ koja ostavlja p_t invarijantnim je grupa trodimenzionalnih rotacija $SO(3)$. Svaka unitarna ireducibilna reprezentacija $SO(3)$ inducira unitarnu ireducibilnu reprezentaciju Poincaréove grupe.

Nulta komponenta vektora W^μ će iščezavati, pa imamo vrijednost Casimirovog operatora $C_2 = W^\mu W_\mu = -M^2$. Svojstvene vrijednosti od J^2 su $s(s+1)$. Možemo pronaći čemu je jednak Casimirov operator, a iz toga i odgovarajuću vrijednost spina.

Vektore baze potprostora koji odgovara svojstvenim vrijednostima ${p_t}^\mu$ od P^μ ćemo označiti s $\{|\mathbf{0}\lambda\rangle\}$. Pa imamo:

$$
\begin{aligned}
P^\mu\,|\mathbf{0}\lambda\rangle &= |\mathbf{0}\lambda\rangle\,{p_t}^\mu \qquad {p_t}^\mu = (M,0)\\
\mathbf{J}^2\,|\mathbf{0}\lambda\rangle &= |\mathbf{0}\lambda\rangle\,s(s+1)\\
J_3\,|\mathbf{0}\lambda\rangle &= |\mathbf{0}\lambda\rangle\,\lambda .
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

Potprostor invarijantan na djelovanje grupe $SO(3)$ kojeg razapinje ova baza je potprostor cijelog reprezentacijskog prostora kojeg želimo konstruirati. Želimo pronaći vektore baze cijelog prostora, odnosno odrediti kako izgledaju transformacije iz male grupe u proizvoljni sustav, a to ćemo napraviti pomoću Lorentzovog potiska. Koristit ćemo konstrukciju koja se zove Wignerova rotacija i ona uključuje potisak popraćen rotacijom. Definiramo $H(p)$ kao:

$$H(p) \equiv R(\alpha, \beta, 0) L_3(\xi). \tag{5.23}$$

$H(p)$ će transformirati vektor iz sustava mirovanja ${p_t}^{\mu}$ u općeniti p^{μ}.
Komutator dvaju operatora potisaka daje rotaciju, znači ako primijenimo operator potiska određen broj puta, možemo doći u stanje koje je rotirano u odnosu na početno. Wignerovu rotaciju definiramo kao:

$$W(\Lambda, p) \equiv H(\Lambda p)^{-1} \Lambda H(p). \tag{5.24}$$

$H(p)$ prebacuje stanje impulsa p iz sustava mirovanja u stanje impulsa p^{μ}, Λ je proizvoljna transformacija koja pripada Lorentzovoj grupi, koja će ovakav vektor p prebaciti u Λp i posljednja transformacija je inverzna $H(\Lambda p)^{-1}$. Nakon ovakve tri transformacije, impuls se vraća na prvotnu vrijednost $(M, 0, 0, 0)$, ali stanje je sada u zarotiranom obliku. Stanje će imati istu vrijednost impulsa, ali prostorne komponente će biti različite od onih s kojima smo započeli. Dakle, ovakva transformacija ima sljedeći oblik po fazama:

$$(M, 0, 0, 0) \xrightarrow{H(p)} p^{\mu} \xrightarrow{\Lambda} \Lambda p \xrightarrow{H(\Lambda p)^{-1}} (M, 0, 0, 0). \tag{5.25}$$

Impuls je ostao isti, a rezultat transformacije vidimo u maloj grupi. Ako je proizvoljna Lorentzova transformacija Λ rotacija u tri dimenzije, onda je $W = R$. Ove rezultate možemo sažeti u sljedećem teoremu.

Teorem 15. *(Vremenolike unitarne ireducibilne reprezentacije Poincaréove grupe): Vektori baze $\{|\mathbf{p}\,\lambda\rangle\}$ razapinju vektorski prostor koji je invarijantan na trasformacije Poincaréove grupe. Djelovanje grupe transformacija na ove vektore baze je dano sa:*

$$T(b)\,|\mathbf{p}\,\lambda\rangle = |\mathbf{p}\,\lambda\rangle\, e^{-ib^{\mu} p_{\mu}} \tag{5.26}$$

$$\Lambda\,|\mathbf{p}\,\lambda\rangle = |\mathbf{p}'\,\lambda'\rangle\, D^{s}[R(\Lambda, p)]^{\lambda'}{}_{\lambda}, \tag{5.27}$$

gdje je ${p'}^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} p^{\nu}$,

$$R(\Lambda, p) \equiv H(p')^{-1} \Lambda H(p), \tag{5.28}$$

i $D^{s}[\mathbf{R}]$ je reprezentacijska matrica grupe $SO(3)$ koja odgovara angularnom momentu s. Reprezentaciju označavamo s (M, s), te je ona unitarna i ireducibilna.

Dokaz. Želimo pokazati da je $|\mathbf{p}\,\lambda\rangle$ svojstveno stanje od P^{μ} sa svojstvenim vrijednostima $p^{\mu} = (p^0, \mathbf{p})$ gdje je $p^0 = M\cosh\xi$, što slijedi iz činjenice da su translacije sa svojim generatorima $\{P^{\mu}\}$ invarijantna podgrupa.

$$\begin{aligned}
P^{\mu}\,|\mathbf{p}\,\lambda\rangle &= P^{\mu} H(p)\,|\mathbf{0}\,\lambda\rangle = H(p)H(p)^{-1} P^{\mu} H(p)\,|\mathbf{0}\,\lambda\rangle \\
&= H(p)P^{\nu}\,|\mathbf{0}\,\lambda\rangle H(p)^{\mu}{}_{\nu} = H(p)\,|\mathbf{0}\,\lambda\rangle H(p)^{\mu}{}_{\nu} {p_t}^{\nu} \\
&= |\mathbf{p}\,\lambda\rangle\, p^{\mu}.
\end{aligned}$$

Za drugi dio teorema imamo:

$$\begin{aligned}\Lambda|\mathbf{p}\,\lambda\rangle &= \Lambda H(p)\,|\mathbf{0}\,\lambda\rangle = H(p')[H(p')^{-1}\Lambda H(p)]\,|\mathbf{0}\,\lambda\rangle\\ &= |\mathbf{p}'\,\lambda'\rangle\,D^s[R(\Lambda,p)]^{\lambda'}{}_{\lambda}.\end{aligned}$$

$R(\Lambda,p)$ je trodimenzionalna rotacija, što vidimo iz:

$$H(\Lambda p)^{-1}\Lambda H(p)p_t{}^{\mu} = H(\Lambda)^{-1}\Lambda p^{\mu} = H(\Lambda p)^{-1}p'^{\mu} = p_t{}^{\mu}.$$

□

Prostor razapet s vektorima $\{|\mathbf{p}\,\lambda\rangle\}$ je invarijantan na Poincaréove transformacije i ireducibilan jer su svi vektori generirani iz jednog početnog vektora djelovanjem generatora $\{J_{\pm}\}$ i $H(p)$. Ne možemo imati netrivijalne invarijantne potprostore.
Svi generatori su hermitski u ovoj bazi i reprezentacijske matrice su unitarne, znači da su dobivene reprezentacije ireducibilne i unitarne.

Ovo je bio slučaj čestice koja posjeduje masu. Mala grupa je bila skup svih transformacija u sustavu mirovanja, odnosno grupa $SO(3)$. Ako imamo određeni impuls, tri prostorne komponente su jednake 0, a četvrta komponenta je masa čestice. Reprezentacije Poincaréove grupe smo dobili iz reprezentacija $SO(3)$ grupe kojoj pripadaju objekti u mirovanju kada primijenimo operatore potiska Lorentzove podgrupe. U ovom slučaju imamo najveću poluprostu grupu i najmanje generatora izvan te grupe, odnosno potiske, koje smo morali izračunati.

5.3.2 Stanja bezmasenih čestica

Sljedeći slučaj je ($c_1 = 0$, $\mathbf{p} \neq 0$). Ovakvi četverovektori ne mogu imati sustav mirovanja. Iznos vremenske i prostorne komponente vektora su jednaki, pa za standardni vektor uzimamo vektor oblika:

$$p_l{}^{\mu} = (\omega_0, 0, 0, \omega_0). \tag{5.29}$$

Opet ćemo koristiti Wignerovu rotaciju. Kako bismo dobili stanje impulsa $p^{\mu} = (\omega, \mathbf{p})$, gdje je $\mathbf{p} = \omega\hat{\mathbf{p}}$ i jedinični vektor $\hat{\mathbf{p}}$ je opisan kutevima (θ, ϕ), prvo ćemo primijeniti Lorentzov potisak $L_3(\xi)$, da bi transformirali ω_0 u ω, a zatim rotaciju $R(\phi,\theta,0)$ da bi usmjerili $z-$os u $\hat{\mathbf{p}}$ smjeru. Dakle, djelujemo s $H(p) = R(\phi,\theta,0)L_3(\xi)$, da bi postigli transformaciju $p_l{}^{\mu}$ u p^{μ}:

$$p^{\mu} = H(p)^{\mu}{}_{\nu}p_l{}^{\nu} = [R(\phi,\theta,0)L_3(\xi)]^{\mu}{}_{\nu}p_l{}^{\nu}. \tag{5.30}$$

Komponente W_0 i W_3 su po iznosu jednake, pa od drugog Casimirovog operatora ostaje:

$$W_{\mu}W^{\mu} = W_1^2 + W_2^2. \tag{5.31}$$

Pitanje je kolika je svojstvena vrijednost Casimirovog operatora unutar grupe E_2, gdje W_1 i W_2 komutiraju. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} W^0 &= W^3 = \omega_0 J_{12} = \omega_0 J_3 \\ W_1 &= \omega_0(J_{23} + J_{20}) = \omega_0(J_1 + K_2) \\ W_2 &= \omega_0(J_{31} - J_{10}) = \omega_0(J_2 - K_1). \end{aligned} \tag{5.32}$$

Liejeva algebra je definirana sa:

$$[W_1, W_2] = 0 \tag{5.33}$$

$$[W_1, J_3] = iW_2 \tag{5.34}$$

$$[W_2, J_3] = -iW_1 \tag{5.35}$$

i prema tome ona odgovara Liejevoj algebri Euklidove grupe E_2 sa sljedećim korespodencijama:

$$W_1 \mapsto P_1, \qquad W_2 \mapsto P_2, \qquad W_0/P_0 \mapsto J_3. \tag{5.36}$$

Casimirov operator je dan sa $C_2 = W^\mu W_\mu = (W_1)^2 + (W_2)^2$ i njegova svojstvena vrijednost je $w^2 = w_1^2 + w_2^2 \geqslant 0$. Operatori W_1 i W_2 komutiraju, pa ih možemo istovremeno dijagonalizirati. Svojstvene vrijednosti različite od 0 čine kontinuirani spektar, tako da bi predstavljale bezmasene čestice s kontinuiranim vrijednostima spina, pa jedino što nam preostaje je $w_1 = w_2 = 0$. Dakle ove reprezentacije imaju smisla samo za takva bezmasena stanja ϕ za koja vrijedi:

$$W_1\phi = 0 = W_2\phi \tag{5.37}$$

i $W^\mu = \lambda P^\mu$ definira helicitet. Ovakve reprezentacije će tada imati samo jedan generator i one nisu vjerne.

Mala grupa je Euklidova grupa E_2 koja posjeduje dvije vrste reprezentacija. Degenerirane jednodimenzionalne reprezentacije odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $w = 0$. Ovdje su w_μ i p_μ proporcionalni, ali budući da je $w_1 = w_2 = 0$, jedini generator koji ne iščezava je W_0/P_0, kojeg možemo identificirati s J_3. Dakle vektori baze $|\lambda\rangle$ su opisani sa svojstvenim vrijednostima od J_3, odnosno s helicitetom λ. Mala grupa se tada reducira na grupu rotacija u ravnini $SO(2)$, koja je komutativna.
Nedegenerirane reprezentacije grupe E_2 odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $w > 0$ i sve su beskonačno dimenzionalne.

Slično kao i kod masivnih čestica, pomoću ireducibilnih reprezentacija male grupe E_2 možemo generirati bazu za odgovarajuće reprezentacije cijele Poincaréove grupe tako što ćemo primijeniti transformaciju $H(p)$ na vektore baze ireducibilnog reprezentacijskog prostora od E_2. Ove reprezentacije označit ćemo s $M(= 0)$ i w.

Degenerirane reprezentacije grupe E_2 su sve jednodimenzionalne i potprostor koji odgovara standardnom vektoru p_l je jednodimenzionalan. Vektori baze $|\mathbf{p_l}\,\lambda\rangle$ imaju sljedeća svojstva:

$$\begin{aligned} P^\mu\,|\mathbf{p_l}\,\lambda\rangle &= |\mathbf{p_l}\,\lambda\rangle\, {p_l}^\mu \\ J_3\,|\mathbf{p_l}\,\lambda\rangle &= |\mathbf{p_l}\,\lambda\rangle\,\lambda \\ W_i\,|\mathbf{p_l}\,\lambda\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Vektori baze cijelog reprezentacijskog prostora su definirani sa:

$$|\mathbf{p}\,\lambda\rangle = R(\phi,\theta,0)\,|p\hat{\mathbf{z}}\,\lambda\rangle = H(p)\,|\mathbf{p_l}\,\lambda\rangle \tag{5.39}$$

$$|p\hat{\mathbf{z}}\,\lambda\rangle = L_3(\xi)\,|\mathbf{p_l}\,\lambda\rangle\,, \tag{5.40}$$

gdje je $p = \omega_0 e^\xi$ iznos od $\mathbf{p}$. Sve rezultate slično kao i prije možemo sažeti u sljedećem teoremu.

Teorem 16. *(Svjetlolike unitarne ireducibilne reprezentacije Poincaréove grupe): Vektori baze $\{|\mathbf{p}\,\lambda\rangle\}$ razapinju vektorski prostor koji je invarijantan na Poincaréove transformacije. Dobivena reprezentacija označena sa $(M = 0, \lambda)$ je unitarna i ireducibilna. Djelovanje transformacija na ove vektore baze je dano sa:*

$$T(b)\,|\mathbf{p}\,\lambda\rangle = |\mathbf{p}\,\lambda\rangle\, e^{-ib^\mu p_\mu} \tag{5.41}$$

$$\Lambda\,|\mathbf{p}\,\lambda\rangle = |\Lambda\mathbf{p}\,\lambda\rangle\, e^{-i\lambda\theta(\Lambda,p)}, \tag{5.42}$$

gdje je $\theta(\Lambda, p)$ kut koji ovisi o Λ i p i koji se može odrediti iz relacije:

$$e^{-i\lambda\theta(\Lambda,p)} = \langle\mathbf{p_l}\,\lambda|\,H^{-1}(\Lambda,p)\Lambda H(p)\,|\mathbf{p_l}\,\lambda\rangle\,. \tag{5.43}$$

W i P operatori su proporcionalni, dakle imamo samo jedan parametar koji opisuje W, jer smo P već odabrali. Konstanta proporcionalnosti je helicitet λ. Operatori W_μ su sastavljeni od J, pa vidimo da je λ komponenta angularnog momenta duž smjera gibanja:

$$\lambda = \frac{\vec{J}\cdot\vec{P}}{|\vec{P}|}. \tag{5.44}$$

Helicitet λ može biti pozitivan ili negativan, cjelobrojan ili polucjelobrojan, jer unitarne ireducibilne reprezentacije Poincaréove grupe mogu biti jednoznačne ili dvoznačne. Za bezmasene čestice helicitet je invarijantan na Lorentzove transformacije, odnosno vrijednost heliciteta λ bezmasene čestice će izgledati isto u svim referentnim sustavima. Bezmasene čestice mogu imati samo jednu vrijednost heliciteta, ona ne mora biti dio nekog većeg multipleta kao što je to slučaj kod masivnih čestica gdje se λ miješaju na Lorentzove transformacije i imamo $(2s+1)$ mogućih vrijednosti. λ je rotacijski invarijantna veličina čak i za masivne čestice, dok god promatramo rotaciju duž P.

Drugim riječima, ako pogledamo vektorski produkt između $\vec{J}$ i $\vec{P}$, vidimo da on ne mijenja svoju vrijednost na rotacije, ali vrijedi još i jači uvjet da je on invarijantan na Lorentzove transformacije. Kada imamo veličinu koja je invarijantna na Lorentzove transformacije, onda ona ne mora biti dio nekog većeg multipleta ni zbog kakvih ograničenja, osim na ona koja se mogu pojaviti van Lorentzove grupe. Bezmasena čestica može imati samo jedno stanje polarizacije λ, ali ako imamo teoriju invarijantnu na prostornu inverziju, onda paritet mijenja predznak heliciteta i imamo dva takva stanja ± 1 koja se mogu transformirati jedno u drugo prostornom inverzijom. Primjerice, jake i elektromagnetske sile čuvaju paritet, pa je on dobar kvantni broj i oba stanja zovemo istim imenom. S druge strane, slabe sile ne čuvaju paritet, odnosno on nije dobar kvantni broj i stanja suprotnog heliciteta istih aditivnih kvantnih brojeva suprotnih heliciteta niti ne postoje, pa nemaju isto ime.

5.3.3 Tahioni ($c_1 < 0$)

U ovom slučaju nemamo fizikalne reprezentacije, ali ga donosimo zbog potpunosti. Sada je $C_1 = -p_\mu p^\mu$ i izabrat ćemo standardni vektor:

$$p_s{}^\mu = (0,0,0,Q), \tag{5.45}$$

gdje je $Q^2 = -C_1 > 0$. Generatori odgovarajuće male grupe su:

$$\begin{aligned} W^0 &= QJ_3 \\ W_1 &= QJ_{20} = QK_2 \\ W_2 &= QJ_{01} = -QK_1. \end{aligned} \tag{5.46}$$

Drugi Casimirov operator je jednak $C_2 = Q^2({K_1}^2 + {K_2}^2 - {J_3}^2)$, a Liejeva algebra ima sljedeće komutacijske relacije:

$$\begin{aligned} [K_2, J_3] &= iK_1 \\ [J_3, K_1] &= iK_2 \\ [K_1, K_2] &= -iJ_3. \end{aligned} \tag{5.47}$$

Mala grupa je $SO(2,1)$ koja nije kompaktna i sve njene ireducibilne unitarne reprezentacije su beskonačno dimenzionalne. Unitarne ireducibilne reprezentacije grupe $SO(2)$ označavat ćemo sa svojstvenom vrijednošću c_2 koja može imati ili kontinuirane vrijednosti u rasponu $0 < c_2 < \infty$ ili diskretne vrijednosti $c_2 = -j(j+1),\ j = 0,1,2,....$ Za dvoznačne reprezentacije možemo imati i $j = 1/2, 3/2, ...$

Vektore baze označavamo s $|p_s \lambda\rangle_{c_2}$, gdje je $\lambda = 0, \pm 1, ...$ u slučaju kontinuiranog pozitivnog c_2, te s $\lambda = j+1, j+1, ...$ ili $\lambda = -j-1, -j-2, ...$ u slučaju diskrentnog negativnog c_2.

Pomoću reprezentacija grupe $SO(2)$ možemo izgraditi ireducibilne reprezentacije Poincaréove grupe, opet istom procedurom kao i prije, odnosno djelovanjem homogenih Lorentzovih transformacija van male grupe.
Općeniti vektor baze je:

$$|\mathbf{p}\,\lambda\rangle = H(p)\,|p_s\,\lambda\rangle\,, \tag{5.48}$$

gdje je $H(p) = R_3(\phi)L_1(\zeta)L_3(\xi)$. Sada imamo:

$$T(b)\,|\mathbf{p}\,\lambda\rangle = |\mathbf{p}\,\lambda\rangle\, e^{-ib^\mu p_\mu} \tag{5.49}$$

$$\Lambda\,|\mathbf{p}\,\lambda\rangle = |\Lambda\mathbf{p}\,\lambda'\rangle\, D^{c_2}[H^{-1}(\Lambda p)\Lambda H(p)]^{\lambda'}{}_{\lambda}. \tag{5.50}$$

D^{c_2} je reprezentacijska matrica za malu grupu $SO(2,1)$ koja odgovara Casimirovom operatoru sa svojstvenom vrijednošću c_2. Reprezentacije bi odgovarale česticama s $M^2 < 0$, masa bi im bila imaginarna veličina i imale bi brzinu veću od brzine svjetlosti. Takve čestice zovu se tahioni i nisu nikada opažene, tako da nam ovaj slučaj nije od velike važnosti.

Rezultat cijele analize je da sad imamo potpunu klasifikaciju jednočestičnih kvantnih stanja u Hilbertovom prostoru i kvantne brojeve kojima smo označili ta stanja. Kako bismo mogli raditi s ovakvim stanjima, potrebno ih je normalizirati. Međutim, vektori baze ovise o kontinuiranim varijablama, i normalizacija stanja neće biti trivijalna. Definirali smo stanja u maloj grupi koja smo onda pomoću potisaka doveli u općeniti oblik i takva procedura će nam omogućiti jedinstvenu normalizaciju stanja.

Neka je k^μ vektor male grupe, a p^μ cijele Poincaréove grupe i neka imamo proizvoljno stanje $\psi_{p,\sigma}$. Takva stanja su ortonormirana na način:

$$\langle\psi_{k',\sigma'}|\psi_{k,\sigma}\rangle = \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\delta_{\sigma',\sigma}. \tag{5.51}$$

Posljedica toga je da reprezentacija male grupe mora biti unitarna:

$$D^\dagger(W) = D^{-1}(W). \tag{5.52}$$

Za skalarni produkt vrijedi:

$$\langle\psi_{p',\sigma'}|\psi_{p,\sigma}\rangle = N(p)\Big(U^{-1}(H(p))\,\psi_{p',\sigma'},\psi_{k,\sigma}\Big) \tag{5.53}$$

$$= N(p)N^*(p')D\Big(W(H^{-1}(p),p')\Big)^*_{\sigma,\sigma'}\delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}), \tag{5.54}$$

gdje je $k' \equiv H^{-1}(p)p'$. Budući da je $k = H^{-1}(p)p$, delta funkcije $\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ i $\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ su proporcionalne. Za $p = p'$, transformacija male grupe je trivijalna, pa je skalarni produkt jednak:

$$\langle\psi_{p'\sigma'}|\psi_{p,\sigma}\rangle = |N(p)|^2\delta_{\sigma'\sigma}\delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}). \tag{5.55}$$

Želimo pronaći faktor proporcionalnosti koji povezuje ove dvije delta funkcije. Lorentz invarijantni integral proizvoljne skalarne funkcije $f(p)$ preko četveroimpulsa za slučaj masivne i bezmasene čestice može se zapisati:

$$\begin{aligned}\int d^4p\delta(p^2+M^2)\theta(p^0)f(p) &= \int d^3\mathbf{p}\,dp^0\delta((p^0)^2-\mathbf{p}^2-M^2)\theta(p^0)f(\mathbf{p},p^0)\\ &= \int d^3\mathbf{p}\frac{f(\mathbf{p},\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2})}{2\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2}}.\end{aligned} \tag{5.56}$$

Invarijantni volumni element je jednak $d^3\mathbf{p}/\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2}$, a delta funkcija je definirana sa:

$$\begin{aligned}F(\mathbf{p}) &= \int F(\mathbf{p}')\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')d^3\mathbf{p}'\\ &= \int F(\mathbf{p}')[\sqrt{\mathbf{p}'^2+M^2}\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})]\frac{d^3\mathbf{p}'}{\sqrt{\mathbf{p}'^2+M^2}}.\end{aligned} \tag{5.57}$$

Invarijantna delta funkcija je onda jednaka:

$$\sqrt{\mathbf{p}'^2+M^2}\,\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p}) = p^0\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p}). \tag{5.58}$$

Budući da su p' i p povezane s k' i k Lorentzovom transformacijom $H(p)$, vrijedi da je:

$$p^0\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p}) = k^0\delta^3(\mathbf{k}'-\mathbf{k}), \tag{5.59}$$

iz čega slijedi:

$$\langle\psi_{p',\sigma'}|\psi_{p,\sigma}\rangle = |N(p)|^2\delta_{\sigma'\sigma}\left(\frac{p_0}{k_0}\right)\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p}). \tag{5.60}$$

Za konstantu $N(p)$ možemo odabrati $N(p)=\sqrt{k_0/p_0}$, dakle u maloj grupi $N(p)$ je jednak 1.

Dakle, klasifikaciju jednočestičnih stanja smo napravili uz pomoć Wignerove metode male grupe. Odabrali smo skup komutirajućih generatora za označavanje određenih kvantnih brojeva. To su bili četveroimpulsi, koji međusobno komutiraju, i komponente Pauli-Lubanski vektora koji također komutiraju s generatorima P. Ukupna Poincaréova grupa ima 10 generatora, odnosno četiri generatora translacija i šest generatora koji odgovaraju potiscima i rotacijama. Komutacijska pravila su pokazala da komponente P_α i $J_{\mu\nu}$ ne komutiraju kada se indeksi podudaraju, odnosno $[P_\alpha, J_{\mu\nu}]\neq 0$ za $\alpha=\mu$ ili $\alpha=\nu$. Prema tome, od šest operatora $J_{\mu\nu}$, dva od njih ne komutiraju s danim operatorom impulsa. Četiri preostala smo preuredili u komponente Pauli-Lubanski vektora što nam daje sve moguće generatore.

6 Landau - Yangov teorem

6.1 Dvočestična stanja

Dosad smo razmatrali jednočestična stanja koja se transformiraju kao ireducibilne reprezentacije prave Poincaréove grupe i koje su opisane masom i spinom, odnosno helicitetom. Dalje želimo vidjeti kako izgledaju dvočestična stanja, pa ćemo izraziti produkt dvaju jednočestičnih stanja kao linearnu kombinaciju dvočestičnih stanja koja imaju ista transformacijska svojstva kao i jednočestično stanje. Dvočestični Hilbertov prostor ćemo onda gledati kao tenzorski produkt odgovarajućih jednočestičnih prostora. Sustav od dvije ili više čestica će se općenito transformirati kao reducibilna reprezentacija Poincaréove grupe i situacija je analogna onoj kada imamo dva sustava s angularnim momentima j_1 i j_2. Situacija je analogna, ali nije identična, u smislu da granice u kojima se nalazi angularni moment kompozitnog sustava nisu više iste kao u slučaju redukcije reprezentacija grupe $SO(3)$. Ovdje, naime, nema gornje granice na ukupni angularni moment, a donja granica ovisi o projekcijama komponenti, kako će kasnije biti objašnjeno. Iako stanje na lijevoj strani relacije (6.62) možemo formalno shvatiti kao složeno kompozitno stanje koje opisuje jednu česticu (koja se, primjerice, tek treba raspasti), ono je u stvari kao linearna kompozicija dvočestičnih stanja i samo dvočestično stanje. Kao primjer, to stanje može opisati Z^0 bozon koji se tek treba raspasti na svoje komponente (primjerice, dva fotona).
Direktni produkt dvaju ireducibilnih reprezentacijskih prostora Poincaréove grupe $V_1 \otimes V_2$ je ireducibilan u odnosu na direktni produkt dvaju Poincaréovih grupa. Ali na dijagonalnu podgrupu $\{(a,\Lambda)\times(a,\Lambda)\}$ koja je izomorfna Poincaréovoj grupi, prostor je reducibilan:

$$V_1 \otimes V_2 = \oplus_n W_n, \tag{6.61}$$

gdje je W_n ireducibilna reprezentacija Poincaréove grupe. Općenito postoje tri različita slučaja. Možemo imati direktni produkt dvaju masivnih ireducibilnih reprezentacija $\Gamma(m_1, j_1)\otimes\Gamma(m_2, j_2)$, direktni produkt masivne i bezmasene reprezentacije $\Gamma(m, j)\otimes\Gamma(0,\lambda)$, te direktni produkt dvaju bezmasenih reprezentacija, $\Gamma(0,\lambda_1)\otimes\Gamma(0,\lambda_2)$. Ograničavamo se na reprezentacije s pozitivnom energijom.

Dakle, zanima nas situacija kada imamo dvije bezmasene reprezentacije. Promotrimo dvije bezmasene čestice heliciteta λ_1 i λ_2. Općenito stanje se može zapisati kao linearna suma tenzorskih produkata dvaju jednočestičnih stanja $\{|q_1,\lambda_1\rangle, |q_2,\lambda_2\rangle\}$ i redukcija ovakvog stanja se odvija po relaciji [6]:

$$|\lambda_1\,\lambda_2,\,\hat{p},\,j\,\lambda\rangle = \int_{SU(2)} d\mu(g) D^*(g)^j_{\lambda\,\lambda_1-\lambda_2} U(g)\,|q_1,\,\lambda_1\rangle\,|q_2,\,\lambda_2\rangle\,, \tag{6.62}$$

gdje je $U(g)$ neka reprezentacija od SU(2), a $d\mu(g)$ invarijantna Haarova mjera na

$SU(2)$ grupi (vidi dodatak B) čija je normalizacija:

$$\int_{SU(2)} d\mu(g) = 1. \tag{6.63}$$

Uzmimo da su impulsi čestica na desnoj strani relacije (6.62) dani sa $q_1 = (q, 0, 0, q)$ i $q_2 = (q, 0, 0, -q)$, a vrijednosti heliciteta λ_1 i λ_2 su određene. S ovim izborom impulsa, stanje (6.62) predstavlja opis kompozitnog stanja u sustavu centra mase (CM). Definirajmo stanje $|\mu, \lambda\rangle$ na sljedeći način:

$$|\mu, \lambda\rangle = \int_{SU(2)} d\mu(g) D^*(g)^j_{\lambda,\mu} U(g) |q_1, \lambda_1\rangle |q_2, \lambda_2\rangle \, . \tag{6.64}$$

Može se pokazati da stanja $|\mu, \lambda\rangle$ imaju sljedeća svojstva:

(i) Transformira se kao reprezentacija grupe $SU(2)$ spina j.

(ii) Stanja $|\mu, \lambda\rangle$ jednaka su 0, osim u slučaju $\mu = \lambda_1 - \lambda_2$.

(iii) Spin j ima donje ograničenje, $j \geq |\lambda_1 - \lambda_2|$.

Primijenjujemo sljedeću reduciju reprezentacijskog prostora na ireducibilne potprostore. Redukcija ima oblik:

$$V(0, \lambda_1) \otimes V(0, \lambda_2) = \oplus_{M,j} \tilde{V}(M, j). \tag{6.65}$$

Pri tome, kao što smo već spomenuli, u gornjem razvoju najmanja moguća vrijednost spina j je ograničena odozdo s $|\lambda_1 - \lambda_2|$, dok M može poprimiti bilo koju vrijednost. U svrhu daljnjeg razmatranja uvodimo koordinate (α, β, γ) na $SU(2)$ tako da element $g \in SU(2)$ možemo zapisati kao $e^{-i\alpha J_{12}} e^{-i\beta J_{31}} e^{-i\gamma J_{12}}$. Mjera se tada može zapisati kao:

$$\int_{SU(2)} d\mu(g) \alpha(g) = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^{4\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\gamma \int_{-1}^{1} d\cos\beta \, \alpha(g). \tag{6.66}$$

Može se pokazati da vrijedi sljedeća relacija [6]:

$$\begin{aligned} |\lambda_1 \lambda_2, \, \hat{p}, \, j\lambda\rangle = & \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{-1}^{1} d\cos\beta \\ & d^j{}_{\lambda, \lambda_1 - \lambda_2}(\beta) e^{i(\lambda - \lambda_1 - \lambda_2)\alpha} |p_1, \, \lambda_1\rangle |p_2, \, \lambda_2\rangle_{CM} \, , \end{aligned} \tag{6.67}$$

kao i:

$$|p_1, \, \lambda_1\rangle |p_2, \, \lambda_2\rangle_{CM} = \sum_{j,\lambda} (2j+1) e^{-i(\lambda - \lambda_1 - \lambda_2)\alpha} d^j{}_{\lambda, \, \lambda_1 - \lambda_2}(\beta) |\lambda_1 \lambda_2, \, \hat{p}, \, j\lambda\rangle \, . \tag{6.68}$$

U gornjim relacijama veličine $d^j_{\lambda\mu}(\beta)$ su dane sa:

$$d^j_{\lambda\mu}(\beta) = D^j_{\lambda\mu}(e^{-i\beta J_{31}}), \tag{6.69}$$

gdje je β Eulerov kut koji se pojavljuje u parametrizaciji elemenata grupe $SU(2)$. Relacija (6.67) bit će nam od posebne koristi. Iz (6.67) i (6.68) mogu se dobiti matrični elementi:

$$\langle k_1,\, \lambda_1| \langle k_2,\, \lambda_2 | \lambda_1 \lambda_2,\, \hat{p},\, j\lambda \rangle = \frac{1}{\pi} d^j{}_{\lambda, \lambda_1 - \lambda_2} [\beta(\vec{k}_1)] e^{i(\lambda - \lambda_1 - \lambda_2)\alpha(\vec{k}_1)}$$

$$\delta(|\vec{k}_1| - |\vec{p}_1|)\delta^3(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \tag{6.70}$$

$$\langle \lambda_1 \lambda_2,\, p',\, J\rho | \lambda_1 \lambda_2,\, p,\, j\lambda \rangle = \frac{2}{\pi(2j+1)} \delta_{Jj} \delta_{\rho\lambda} \delta^4(p' - p). \tag{6.71}$$

Njihova fizikalna važnost je u tome što oni određuju amplitude raspada kompozitnog sistema opisanog stanjem $|\lambda_1 \lambda_2,\, \hat{p},\, j\lambda\rangle$ na dvije čestice pojedinačno opisane stanjima $|k_1,\, \lambda_1\rangle$ i $|k_2\, \lambda_2\rangle$ (vidi potpoglavlje 6.2).

6.1.1 Direktni produkt stanja dvaju identičnih čestica

Kada imamo dvije identične čestice, direktni produkt njihovih stanja mora biti simetričan ili antisimetričan ovisno o spinu čestica, odnosno radi li se o bozonima ili fermionima. Primjerice, za slučaj masivnih čestica vrijedi:

$$|\lambda_1\, \lambda_2,\, \hat{p},\, j\, \lambda\rangle_{S,A} = \int_{SU(2)} d\mu(g) D^*(g)^j_{\lambda\; \lambda_1 - \lambda_2} U(g) \frac{1 \pm \sigma}{2} |q_1,\, j\lambda_1\rangle |q_2,\, j\lambda_2\rangle, \tag{6.72}$$

gdje je σ operator izmjene:

$$\sigma |q_1,\, j\lambda_1\rangle |q_2,\, j\lambda_2\rangle = |q_2,\, j\lambda_2\rangle |q_1,\, j\lambda_1\rangle \tag{6.73}$$

a $S(A)$ označava (anti)simetrično stanje. Ako se radi o bozonima uzimamo pozitivan predznak, ako o fermionima onda uzimamo negativan predznak. Primijetimo da u slučaju bezmasenih čestica (fotona) vrijedi ista formula, (6.72), s time da je relevantan samo gornji predznak u operatoru projekcije, te uz naznaku da u jednočestičnim stanjima trebamo ispustiti indekse j.

Kao posljedica Poincaréove invarijantnosti, $U(g)$ od $g \in P_+^{\uparrow}$ i operator σ komutiraju, prema tome možemo im zamijeniti poredak u relaciji (6.68), iz čega onda slijedi:

$$|\lambda_1\, \lambda_2,\, \hat{p},\, j\, \lambda\rangle_{S,A} = \frac{1 \pm \sigma}{2} |\lambda_1\, \lambda_2,\, \hat{p},\, j\, \lambda\rangle. \tag{6.74}$$

Operator σ djeluje na $|\lambda_1\, \lambda_2,\, \hat{p},\, j\, \lambda\rangle$ tako da mijenja poredak dvaju jednočestičnih stanja, pa je:

$$\sigma |\lambda_1\, \lambda_2,\, \hat{p},\, j\, \lambda\rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{-1}^{1} d\cos\beta$$

$$d^J{}_{\lambda, \lambda_1 - \lambda_2}(\beta) e^{i(\lambda - \lambda_1 - \lambda_2)\alpha} |p_2,\, j\lambda_2\rangle |p_1,\, j\lambda_1\rangle_{CM}, \tag{6.75}$$

pri čemu smo iskoristili rezultat (6.67). Uzmimo da su dvije čestice opisane sa $p_1 = (p_{10}, \vec{p}_1)$ i $p_2 = (p_{20}, -\vec{p}_1)$, te da je smjer vektora $\vec{p}_1$ je označen s (α, β).

U tom slučaju možemo identificirati $|p_1,\, \lambda_1\rangle$ s $|\overrightarrow{(\alpha, \beta)},\, \lambda_1\rangle$ i onda je:

$$|p_2,\, \lambda_2\rangle |p_1,\, \lambda_1\rangle_{CM} = |-\overrightarrow{(\alpha, \beta)},\, \lambda_2\rangle |\overrightarrow{(\alpha, \beta)},\, \lambda_1\rangle. \tag{6.76}$$

Budući da je $-\overrightarrow{(\alpha,\beta)} = \overrightarrow{(\alpha+\pi,\pi-\beta)}$, to stanje se može napisati kao:

$$|p_2,\lambda_2\rangle\,|p_1,\lambda_1\rangle_{CM} = |\overrightarrow{(\alpha+\pi,\pi-\beta)},\lambda_2\rangle\,|-\overrightarrow{(\alpha+\pi,\pi-\beta)},\lambda_1\rangle\,. \tag{6.77}$$

Promijenimo li varijable integracije α i β u $\tilde{\alpha}=\alpha+\pi$ i $\tilde{\beta}=\pi-\beta$, dobivamo:

$$\sigma\,|\lambda_1\,\lambda_2,\hat{p},J\,\lambda\rangle = (-1)^{J+\lambda_1+\lambda_2}\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\tilde{\alpha}\int_{-1}^{1}d\cos\tilde{\beta}$$
$$d^J_{\lambda,\lambda_1-\lambda_2}(\tilde{\beta})e^{i(\lambda-\lambda_1-\lambda_2)\tilde{\alpha}}\,|\overrightarrow{(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})}\,j\,\lambda_2\rangle\,|-\overrightarrow{(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})}\,j\,\lambda_1\rangle\,, \tag{6.78}$$

gdje smo koristili identitet:

$$d^J_{\lambda\mu}(\pi-\beta) = (-1)^{J+\lambda}d^J_{\lambda(-\mu)}(\beta). \tag{6.79}$$

Ako dobiveni rezultat usporedimo s relacijom (6.67), dobivamo:

$$\sigma\,|\lambda_1\,\lambda_2,\hat{p},J\,\lambda\rangle = (-1)^{J+\lambda_1+\lambda_2}\,|\lambda_2\,\lambda_1,\hat{p},J\,\lambda\rangle\,. \tag{6.80}$$

Konačno imamo relaciju:

$$|\lambda_1\,\lambda_2,\hat{p},J\,\lambda\rangle_{S,A} = \frac{1}{2}\Big(|\lambda_1\,\lambda_2,\hat{p},J\,\lambda\rangle \pm (-1)^{(J+\lambda_1+\lambda_2)}\,|\lambda_2\,\lambda_1,\hat{p},J\,\lambda\rangle\Big). \tag{6.81}$$

Općenito, heliciteti λ_1 i λ_2 mogu biti različiti. Bezmasena čestica je opisana jednom vrijednošću heliciteta. Za razliku od transformacija neprave Poincaréove grupe, transformacije prave Poincaréove grupe ne miješaju helicitet λ, ali u slučaju da dođe do miješanja heliciteta, redukcijska relacija poprima ovaj oblik:

$$V(0,\pm\lambda)\otimes V(0,\pm\lambda) = \bigoplus_{\lambda_1,\lambda_2,M,j}\tilde{V}(M,j). \tag{6.82}$$

6.2 Selekcijska pravila i Landau - Yangov teorem

U svrhu boljeg razumijevanja argumenata koji vode ka traženim selekcijskim pravilima, prisjetimo se osnovnih postulata kvantne mehanike. Kao što već znamo, stanje kvantnog sustava je predstavljeno vektorom $|\psi\rangle$ u Hilbertovom prostoru. Bilo koji takav vektor $|\psi\rangle$ u tom slučaju može se zapisati u nekoj ortonormiranoj bazi na način:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,|\phi_n\rangle\,, \tag{6.83}$$

gdje su c_n jednoznačno određene veličine. Ako ovu relaciju invertiramo, dobijemo:

$$c_n = \langle\phi_n\,|\,\psi\rangle \tag{6.84}$$

i skup konstanti c_n je dovoljan da bi se ovaj vektor opisao na jedinstven način. Tada $|c_n|^2$ za neki n možemo interpretirati kao vjerojatnost prijelaza stanja $|\psi\rangle$ u stanje opisano s $|\phi_n\rangle$. Prema tome, ako $|c_n|^2$ iščezava, prijelaz je zabranjen. U analogiji s ovime, želimo proučiti kako izgledaju amplitude za raspad čestice spina 1 u dvije identične bezmasene čestice i pripadajuća selekcijska pravila. U tom smislu možemo primijetiti da je (6.72) analogon razvoju (6.83). Na temelju te činjenice, zaključujemo da se bitna informacija za fiziku nalazi u koeficijentima koji se nalaze u relaciji (6.72). O svojstvima tih koeficijenata ovisit će teorijsko predviđanje ishoda promatranog procesa. Već letimični pogled na relaciju (6.72) je dovoljan da bi se zaključilo da je vrijednost koeficijenta predodređena simetrijskim svojstvima sistema i čestičnom statistikom. Sama simetrijska svojstva sistema su opisana matematičkim (grupno-teorijskim) svojstvima faktora $d^j_{\lambda\,\lambda_1-\lambda_2}$. Za finalizaciju izvoda selekcijskih pravila koristimo prethodno dobivene relacije,(6.67) i (6.81), koje u svrhu preglednosti navodimo još jednom:

$$|\lambda_1\lambda_2,\,\hat{p},\,j\lambda\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_{-1}^{1} d\cos\beta$$
$$d^j{}_{\lambda,\lambda_1-\lambda_2}(\beta)e^{i(\lambda-\lambda_1-\lambda_2)\alpha}\,|p_1,\,\lambda_1\rangle\,|p_2,\,\lambda_2\rangle_{CM} \tag{6.85}$$

$$|\lambda_1\lambda_2,\,\hat{p},\,j\lambda\rangle_{S,A} = \frac{1}{2}(\,|\lambda_1\lambda_2,\,\hat{p},\,j\lambda\rangle \pm (-1)^{j+\lambda_1+\lambda_2})\,|\lambda_2\,\lambda_1,\,\hat{p},\,j\lambda\rangle\,. \tag{6.86}$$

Prema relacijama (6.85) i (6.86), ako imamo raspad masivne čestice na dvije ili masivne ili bezmasene čestice, koeficijent mogućeg konačnog dvočestičnog stanja u razvoju početnog jednočestičnog stanja proporcionalan je $d^j{}_{\lambda,\lambda_1-\lambda_2}(\beta)$. Ako je $d^j{}_{\lambda,\lambda_1-\lambda_2}(\beta) = 0$, onda je takav raspad zabranjen.

Ako pogledamo raspad masivne čestice na dvije identične čestice koje mogu biti ili masivne ili bezmasene, iz posljednje relacije dobivamo:

$$|\lambda\,\lambda,\,\hat{p},\,j\,\lambda\rangle_{S,A} = \frac{1}{2}(1 \pm (-1)^{j+\lambda_1+\lambda_2})\,|\lambda\lambda,\,\hat{p},\,j\,\lambda\rangle\,. \tag{6.87}$$

Dakle, ako je $(1 \pm (-1)^{j+\lambda_1+\lambda_2}) = 0$, tada je:

$$\langle p_1\,\lambda_1|\,\langle p_2\,\lambda_2\,|\,\lambda\,\lambda,\,\hat{p},\,j\,\lambda\rangle_{S,A} = 0 \tag{6.88}$$

i ovakav raspad je zabranjen. Ovakvo selekcijsko pravilo objašnjava Landau - Yangov teorem koji kaže da je raspad $Z^0 \to 2\gamma$ zabranjen. Čestica Z^0 ima spin $j = 1$ i njenim raspadom u sustavu mirovanja nije moguće dobiti dva fotona suprotnih heliciteta. Ako dva fotona imaju suprotne helicitete, onda je $|\lambda_1 - \lambda_2| = 2$ i prema tome je minimalna vrijednost $j = 2$, ali Z^0 ima spin $j = 1$.

Ako fotoni imaju isti helicitet, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ koji može poprimiti vrijednosti 1 i -1, onda $d^j{}_{\lambda,\lambda_1-\lambda_2} = d^1{}_{\lambda,0}(\beta)$ ne iščezava. S druge strane, $(1 + (-1)^{j+\lambda_1+\lambda_2})$ za $j = 1$ i $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \pm 1$ iščezava. Iz toga se može zaključiti da je ovakav raspad zabranjen.

Općeniti Landau - Yangov teorem kaže da se masivna čestica s neparnom vrijednošću spina ne može raspasti na dvije identične čestice jednakog heliciteta. Ako je j neparan cijeli broj, onda je:

$$1 \pm (-1)^{j+2\lambda} = 0 \tag{6.89}$$

neovisno o vrijednosti heliciteta λ. Kada je λ cjelobrojan, uzimamo pozitivan predznak i cijeli faktor iščezava, a ako je λ polucjelobrojan, uzimamo negativan predznak i opet će iščezavati.

Yang je 1949. izdao članak pod naslovom "Selection Rules for the Dematerialization of a Particle into Two Photons" [7]. Motivacija mu je bila opservacija Johna Archibalda Wheelera da se pozitronij u S-tripletnom stanju ne može raspasti na dva fotona. Pozitronij je vezano stanje elektrona i pozitrona ukupnog angularnog momenta $j = 1$. Takav raspad je zabranjen selekcijskim pravilima koja je Yang dobio iz principa invarijantnosti na rotacije i paritet. Ovaj dokaz je od velike važnosti jer ne koristi pretpostavke kvantne teorije polja.
Yang je razmatrao dva fotona jednakih valnih duljina koji se gibaju duž z-osi u različitim smjerovima. Situacija je analogna onoj kada se čestica raspada na dva fotona. Dvočestična stanja sustava možemo označiti sa $\Psi^{\lambda_1\lambda_2}$, gdje λ_1 i λ_2 poprimaju vrijednosti R i L. Prvi indeks se odnosi na polarizacijsko stanje fotona koji se propagira u $+z$ smjeru, a drugi na polarizacijsko stanje fotona koji se propagira u $-z$ smjeru i imamo četiri moguća stanja, Ψ^{RR}, Ψ^{RL}, Ψ^{LR} i Ψ^{LL}. Yang je razmotrio kako se ova stanja ponašaju na prostorne rotacije i inverzije. Dakle, promatrao je prvo rotaciju za kut ϕ oko $z-$osi, zatim rotaciju za kut $\theta = 180°$ oko $x-$osi i konačno inverziju.
Dva fotona se gibaju duž $z-$os, pa je komponenta j_z angularnog momenta duž smjera gibanja uvijek jednaka $j_z = \pm 1$. Dakle ukupna $z-$komponenta dvaju fotona je $j_z = \pm 2$ za fotonske funkcije Ψ^{RL} i Ψ^{LR} gdje su spinovi paralelni, odnosno $j_z = 0$ za Ψ^{RR} i Ψ^{LL} gdje su spinovi fotona antiparalelni. Ukupni angularni moment j sustava mora ostati konstantan, pa dobivamo prvo selekcijsko pravilo.

(i) Za početno stanje ukupnog angularnog momenta $j = 0, 1$, moguća konačna stanja su $\Psi^{RR} + \Psi^{LL}$, jer stanja Ψ^{RL} i Ψ^{LR} imaju vrijednost angularnog momenta duž $z-$osi jednaku $\pm 2\hbar$ što je previše za $j = 0$ ili $j = 1$.

Rotacija oko $z-$osi za kut 180°, R_θ, će prebaciti z u $-z$ i prema tome se kutevi θ transformiraju u $(\pi - \theta)$. Stanja Ψ^{RR}, Ψ^{LL}, $\Psi^{RR} - \Psi^{LL}$ su svojstvena stanja operatora R_θ i R_ϕ sa svojstvenom vrijednošću 1, ali će stanje $\Psi^{RL} + \Psi^{LR}$ na ovu transformaciju dobiti negativan predznak. Početno stanje koje je svojstveno stanje od R_ϕ sa svojstvenom vrijednošću 1 ima ista rotacijska svojstva kao kugline funkcije, pa rotacija oko $x-$osi znači da se kutevi θ transformiraju u $(\theta + \pi)$ što daje faktor -1 za neparne j, iz čega dolazi sljedeći zaključak.

(ii) Za početno stanje s ukupnim angularnim momentom $j = 1, 3, 5, \ldots$ jedina moguća konačna stanja su Ψ^{RL} i Ψ^{LR}.

Paritet mora biti sačuvan u prelasku iz početnog u konačno stanje. Na transformaciju pariteta $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$ valna funkcija počenog sistema dobiva fakor P, gdje je $P = \pm 1$. Iz toga slijedi posljednje selekcijsko pravilo.

(iii) Za neparno početno stanje, početna čestica mora se raspasti u $\Psi^{RR} - \Psi^{LL}$, jer je to jedino moguće neparno konačno stanje.

Ako pogledamo slučaj $j = 1$, vidimo da prvi argument isključuje stanja Ψ^{RL} i Ψ^{LR}, dok zbog drugog argumenta niti $\Psi^{RR} + \Psi^{LL}$ i $\Psi^{RR} - \Psi^{LL}$ ne mogu biti konačna stanja i proces $Z^0 \mapsto 2\gamma$ je zabranjen selekcijskim pravilima.

7 Zaključak

Napravili smo kratki pregled ireducibilnih reprezentacija grupe rotacija $SO(3)$ i Euklidove grupe E_2, kao i osnovna svojstva homogene Lorentzove grupe i njene Liejeve algebre. Prvo smo proučavali reprezentacije prave Lorentzove grupe $SO(3,1)$ i zaključili smo da postoje dvije klase ireducibilnih reprezentacija. Konačno dimenzionalne ireducibilne reprezentacije nisu unitarne, jer grupa nije kompaktna. Stanja u Hilbertovom prostoru moraju biti u unitarnim reprezentacijama grupe simetrija, tako da nam ove reprezentacije ne mogu poslužiti za opis stanja, ali ih i dalje možemo koristiti za opis transformacija polja. S druge strane imamo unitarne ireducibilne reprezentacije, koje su beskonačno dimenzionalne. Lorentzova grupa nam je bila ključna u opisu ireducibilnih reprezentacija Poincaréove grupe.

Slijedeći Wignerovu metodu, konstruirali smo unitarne ireducibilne reprezentacije Poincaréove grupe. U označavanju ireducibilne reprezentacije koristili smo svojstvene vrijednosti dvaju Casimirovih operatora od kojih je jedan odgovarao masi čestice, a drugi je bio povezan s angularnim momentom. Dobili smo dva tipa fizikalnih reprezentacija. U prvom slučaju je masa $M \neq 0$, mala grupa je grupa rotacija $SO(3)$ i postoji ireducibilna reprezentacija za svaku ireducibilnu reprezentaciju grupe $SO(3)$. Za česticu spina J imamo novu oznaku, helicitet λ koji poprima vrijednosti od $-j$ do j, dakle dimenzija reprezentacija je dimenziju $2j+1$. Drugi slučaj čine reprezentacije za koje je $M = 0$. Mala grupa je sada Euklidova grupa u dvije dimenzije E_2 i jedine konačno dimenzionalne reprezentacije ove grupe su jednodimenzionalne, na koje translacije djeluju trivijalno. Ireducibilne reprezentacije su označene jednom jedinom vrijednošću λ koja je cjelobrojna ili polucjelobrojna. Ako uključimo i diskretnu simetriju pariteta, onda imamo dvije vrijednosti heliciteta $\pm\lambda$. Iz ovakve analize se može zaključiti da postoji fundamentalna razlika između ovih dvaju vrsta ireducibilnih reprezentacija, odnosno masivnih i bezmasenih čestica.

Nadalje smo razmatrali dvočestična stanja koja odgovaraju reducibilnim reprezentacijama Poincaréove grupe i izveli selekcijska pravila koja zabranjuju raspad $Z^0 \mapsto \gamma\gamma$ [8], odnosno pokazali smo da vrijedi Landau-Yangov teorem, koristeći principe invarijantnosti na rotacije i prostornu inverziju.

Dodaci

Dodatak A Osnove teorije grupa

Definicija 4. *Neprazan skup G s binarnom operacijom $\cdot$ naziva se **grupa** ako zadovoljava sljedeća svojstva:*

(i) zatvorenost, $\forall a, b \in H$ element $a \cdot b \in G$

(ii) asocijativnost, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, $\forall a, b, c \in G$,

(iii) postoji element $e \in G$, kojeg nazivamo neutralni element ili jedinica, takav da je $a \cdot e = e \cdot a$, $\forall a \in G$,

(iv) $\forall a \in G$, postoji element $a^{-1} \in G$, kojeg nazivamo inverzni element, takav da je $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

Preslikavanje $\phi : G \mapsto G'$ je homomorfizam ako čuva zakone grupe, odnosno:

$$\phi(g_1)\phi(g_2) = \phi(g_1 g_2) \tag{A.1}$$

i vrijedi:

(i) Ako su $e \in G$, $e' \in G'$ jedinični elementi, tada je $\phi(e) = e'$, zbog $\phi(e)\phi(g) = \phi(eg) = \phi(ge) = \phi(g)\phi(e) = \phi(g)$. Budući da je ϕ surjekcija i e' je jedinstven element, $\phi(e) = e'$.

(ii) $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$, jer $\phi(g^{-1})\phi(g) = \phi(g^{-1}g) = e'$

Skup svih elemenata iz G koje ϕ preslikava u e' zovemo jezgra homomorfizma ϕ i označavamo kao $\operatorname{Ker}\phi$. Ako je preslikavanje ϕ bijektivno, onda takav homomorfizam zovemo izomorfizam i grupe G i G' se mogu identificirati. Ako je $G = G'$, takav homomorfizam zovemo endomorfizam, a izomorfizam zovemo automorfizam.

Grupa u sebi može sadržavati podskup koji opet čini grupu, odnosno podskup H unutar grupe G je podgrupa od G ako zadovoljava aksiome te grupe G.
Neka je H podgrupa grupe G. Tada je lijeva susjedna klasa od H u odnosu na element $g \in G$ skup $gH \equiv \{gh \mid h \in H\}$. Desna susjedna klasa je dan sa $Hg = \{hg \mid h \in H\}$. Prostor lijevih (desnih) susjednih klasa je $\{gH\}_{g \in G}$ ($\{Hg\}_g \in G$).

Podgrupa je invarijantna ako $\forall g \in G$ i $h \in H$ imamo da je $ghg^{-1} \in H$. Ako je H invarijantna podgrupa od G, lijeva i desna susjedna klasa su iste. Tada se njihov prostor može označiti sa:

$$G/H = \{gH\} = \{Hg\} \tag{A.2}$$

Teorem 17. *Ako je H invarijantna podgrupa od G, tada je G/H kvocijentna grupa od G s obzirom na H. Množenje unutar grupe je skup množenja susjednih klasa. Identitet je H.*

Svaka podgrupa sadrži barem dvije invarijantne podgrupe, trivijalnu koja sadrži samo jedinični element i samu sebe.

Definicija 5. *(Direktni produkt grupa): Neka su H_1 i H_2 podgrupe grupe G sa sljedećim svojstvima: (i) svaki element iz H_1 komutira sa svakim elementom iz H_2, odnosno $h_1h_2 = h_2h_1$ za sve $h_1 \in H_1$ i $h_2 \in H_2$ i (ii) svaki element $g \in G$ može se jedinstveno zapisati kao $g = h_1h_2$ gdje su $h_1 \in H_1$ i $h_2 \in H_2$. Tada je G direktni produkt H_1 i H_2 , $G = H_1 \otimes H_2$.*

Ako je $G = H_1 \otimes H_2$, onda i H_1 i H_2 moraju biti invarijantne podgrupe od G.

Definicija 6. *(Poludirektni produkt grupa): Grupa G koja posjeduje dvije podgrupe H_1 i H_2 je poludirektni produkt grupa H_1 i H_2 ako:*

(i) H_1 je invarijantna podgrupa od G.

(ii) Podgrupe H_1 i H_2 imaju zajednički samo jedinični element.

(iii) Svaki element $g \in G$ se može izraziti na jedan i samo jedan način kao $g = h_1 \otimes h_2$, preko elemenata $h_1 \in H_1$ i $h_2 \in H_2$.

Polu-direktni produkt dvaju grupa označavamo kao $G = H_1 \rtimes H_2$.

Grupu G koja ne sadrži netrivijalne invarijantne podgrupe, zovemo prosta grupa, a onu koja ne posjeduje netrivijalne Abelove invarijantne podgrupe zovemo poluprosta grupa.

Dodatak B Reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

Neka L označava Liejevu algebru grupe $SL(2,\mathbb{C})$, odnosno $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ čija se standardna baza sastoji od [11,12]:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.1}$$

Tada vrijedi:

$$[h,x] = 2x \tag{B.2}$$

$$[h,y] = -2y \tag{B.3}$$

$$[x,y] = h. \tag{B.4}$$

Budući da je h poluprosta, ona djeluje dijagonalno na V. Dakle možemo napraviti dekompoziciju prostora V u direktne sume svojstvenih potprostora $V_\lambda = \{v \in V \mid h \triangleright v = \lambda v\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Kad god je $V_\lambda \neq 0$, zovemo λ težinom od h u V, a V_λ zovemo težinskim prostorom.

Lema 1. *Ako je $v \in V_\lambda$, tada je $x \triangleright v \in V_{\lambda+2}$ i $y \triangleright v \in V_{\lambda-2}$.*

Dokaz.

$$h \triangleright (x \triangleright v) = [h,x] \triangleright v + x \triangleright h \triangleright v = 2x \triangleright v + \lambda x \triangleright v = (\lambda+2) x \triangleright v$$
$$h \triangleright (y \triangleright v) = [h,y] \triangleright v + y \triangleright h \triangleright v = 2y \triangleright v + \lambda y \triangleright v = (\lambda-2) y \triangleright v.$$

□

Lema ukazuje da su x, y predstavljeni nilpotentnim endomorfizmima od V.
Budući da je $dim\, V < \infty$ i suma $V = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} V_\lambda$ je direktna, mora postojati $V_\lambda \neq 0$ takav da je $V_{\lambda+2} = 0$. Za takav λ, bilo koji vektor različit od 0 u V_λ zvat će se maksimalni vektor težine λ.
Sada pretpostavljamo da je V ireducibilan $L-$modul i analiziramo strukturu modula. Izaberemo maksimalan vektor, recimo da je to v_0. Neka je $v_{-1} = 0$, $v_i = \frac{1}{i!} y^i \triangleright v_0$, $i > 0$.

Lema 2. *Vrijede sljedeće relacije:*

(i) $h \triangleright v_i = (\lambda - 2i) v_i$

(ii) $y \triangleright v_i = (i+1) v_{i+1}$

(iii) $x \triangleright v_i = (\lambda - i + 1) v_{i-1}, \;\; (i \geq 0)$

Dokaz. (i) Dokaz ide indukcijom.

$$\begin{aligned} h \triangleright v_0 &= \lambda v_i \\ h \triangleright v_i &= (\lambda - 2i) v_i \\ h \triangleright v_{i+1} &= h \frac{1}{i+1} y \triangleright v_i \\ &= \frac{1}{i+1} \left([h,y] \triangleright v_i + y \triangleright h \triangleright v_i \right) \\ &= \frac{1}{i+1} \left(-2y \triangleright v_i + y \triangleright h \triangleright v_i \right) \\ &= -2 \left(\frac{1}{i+1} y \triangleright v_i \right) + \frac{1}{i+1} (\lambda - 2i)\, y \triangleright v_i \\ &= -2 v_{i+1} + (\lambda - 2i) v_{i+1} \\ &= (\lambda - 2(i+1)) v_{i+1} \end{aligned}$$

(ii) Slijedi iz definicije.

(iii)

$$\begin{aligned} i x \triangleright v_i &= x \triangleright y \triangleright v_{i-1} \\ &= [x,y] \triangleright v_{i-1} + y \triangleright x \triangleright v_{i-1} \\ &= (\lambda - 2(i-1)) v_{i-1} + (\lambda - i + 2) y \triangleright v_{i-2} \\ &= (\lambda - 2i + 2) v_{i-1} + (i-1)(\lambda - i + 2) v_{i-1} \\ &= i(\lambda - i + 1) v_{i-1}. \end{aligned}$$

□

Zbog (i) su svi v_i ($v_i \neq 0$) linearno nezavisni. V je konačnodimenzionalan, pa stavimo da je m najmanji mogući cijeli broj za koji $v_m \neq 0$, $v_{m+1} = 0$. Tada je $v_{m+i} = 0$ za sve i veće od 0. Lema pokazuje da je potprostor od V s bazom $(v_0, \dots, v_m)$ $L-$podmodul različit od 0. V je ireducibilan, pa se mora nalaziti cijeli u V. Matrice endomorfizama koji predstavljaju $\{x, y, h\}$ s obzirom na danu bazu, mogu se zapisati eksplicitno. h će biti dijagonalna matrica, a x i y gornja odnosno donja trokutasta nilpotentna matrica.

Iz (iii) slijedi da za $i = m+1$ lijeva strana jednadžbe je 0, dok je desna $(\lambda - m)v_m$, a budući da imamo $v_m \neq 0$, može se zaključiti da je $\lambda = m$. Dakle, težina maksimalnog vektora je nenegativni cijeli broj čija je dimenzija za 1 manja od dimenzije od V. Zovemo ju najveća težina od V.

Svaka težina μ pojavljuje se s multiplicitetom 1, odnosno $dim\, V_\mu = 1$ ako je $V_\mu \neq 0$. λ je jedinstveno određen s V, pa se može zaključiti da je maksimalni vektor također jedinstven za V do na skalarni višekratnik različit od 0.

Teorem 18. *Neka je V ireducibilni modul za $L = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.*

(i) *S obzirom na h, V je direktna suma težinskih prostora* V_μ, $\mu = m, m+2, \ldots, -(m-2), -m$, *gdje je* $m+1 = dim\,V$ *i* $dim\,V_\mu = 1, \forall \mu$.

(ii) *V ima (do na skalarni višekratnik različit od 0) jedinstven maksimalni vektor čija je težina, najveća težina od V, m.*

(iii) *Djelovanje L na V je dano eksplicitno, ako je baza izabrana na dani način. Postoji najviše jedan ireducibilni L−modul (do na izomorfizam) svake moguće dimenzije* $m+1$, $(m \geq 0)$.

Dodatak C Haarova mjera

Za Liejeve grupe postoje dvije procedure integracije koje vode na lijevu i desnu invarijantnost. Lijeva i desna invarijantna (Haarovu) mjeru označavamo sa:

$$d\mu_L(g) = \rho_L(a)d^n a, \tag{C.1}$$

$$d\mu_R(g) = \rho_R(a)d^n a, \qquad g \equiv g(a) \tag{C.2}$$

Neka je $M \subset G$. Tada je svojstvo od $d\mu_L$:

$$\int_M d\mu_L(g) f(g) = \int_{g_0 M} d\mu_L(g) f(g_0^{-1} g) \tag{C.3}$$

odnosno, Jacobian transformacije $g \mapsto g_0 g$ je 1. Isto tako vrijedi i da je $d\mu_L(g_0 g) = d\mu_L(g)$. Slično je za desni invarijantni integral:

$$\int_M d\mu_R(g) f(g) = \int_{M g_0} d\mu_R(g) f(g g_0^{-1}) \tag{C.4}$$

ili $d\mu_R(g) = d\mu_R(g g_0)$. Ako je domena M integracije G:

$$\int_G d\mu_L(g) f(g) = \int_G d\mu_L(g) f(g_0^{-1} g) \tag{C.5}$$

Na isti način je:

$$\int_G d\mu_R(g) f(g) = \int_G d\mu_R(g) f(g g_0^{-1}). \tag{C.6}$$

Treba se pokazati da vrijedi sljedeće:

$$\rho_L(a) = \left[det \left(\frac{\partial \phi^\rho(a,b)}{\partial b^\sigma} \right) \Bigg|_{b=0} \right]^{-1} \tag{C.7}$$

$$\rho_R(a) = \left[det \left(\frac{\partial \phi^\rho(b,a)}{\partial b^\sigma} \right) \Bigg|_{b=0} \right]^{-1} \tag{C.8}$$

Ovakva mjera je jedinstvena do na multiplikativnu konstantu. Liejeva grupa je kompaktna ako i samo ako postoji:

$$V \equiv \int_G d\mu_L(g) \tag{C.9}$$

Tada je $d\mu_R = d\mu_L$ do na konstantu. V zovemo volumen grupe.
Za komutativne i proste grupe je $d\mu_L = const \times d\mu_R$. Za mjere $d\mu_L$, $d\mu_R$ vrijedi da ako je $f \geq 0$ na $M \subset G$, tada je:

$$\int_M d\mu_{L,R} f \geq 0, \tag{C.10}$$

i ako on iščezava, onda je $f = 0$ na M (gotovo svugdje). Možemo konstruirati dva Hilbertova prostora koristeći funkcije iz G u $\mathbb{C}$:

$$H_L: \; ako \; f_1, f_2 \in H_L, \; tada\, je \tag{C.11}$$

$$(f_1, f_2)_L = \int_G d\mu_L f_1(g)^* f_2(g) \leqslant \infty \tag{C.12}$$

$$H_R: \ ako\ f_1, f_2 \in H_R,\ tada je \tag{C.13}$$

$$(f_1, f_2)_R = \int_G d\mu_R f_1(g)^* f_2(g) \leqslant \infty \tag{C.14}$$

Lijeva regularna reprezentacija je unitarna u H_L, a desna regularna reprezentacija je unitarna u H_R.
Za kompaktne grupe možemo invarijantnu mjeru $d\mu_L = d\mu_R$ označiti kao $d\mu$.

Literatura

[1] Gieres, F. : About Symmetries in Physics. // Symmetries in Physics (1997) arXiv:hep-th/9712154v1

[2] Kurepa,S. Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene, Tehnička knjiga, 1990.

[3] Tung,W. Group Theory in Physics, World Scientific Publishing Company, 1985.

[4] Costa,G. Fogli,G. Symmetries and Group Theory in Particle Physics, Springer-Verlag, 2012.

[5] Weinberg,S. The Quantum Theory of Fields, Volume 1: Foundations, Cambridge University Press, 2005.

[6] Balachandran,A.P. Marmo, G. Jo, S.G. Group Theory and Hopf Algebras, World Scientific Publishing Company, 2010.

[7] Yang,C.N. : Selection Rules for the Dematerialization of a Particle into Two Photons. // Phys. Rev.77, 2(1950) 242-245

[8] Balachandran, A.P. ; Jo, S.G. : $Z^0 \mapsto 2\gamma$ and the Twisted Coproduct of the Poincaré Group. // Int.J.Mod.Phys.A22, (2007) 6133-6146

[9] Bošnjak, A. Liejeve grupe i algebre. Seminarski rad. Zagreb : Prirodoslovno-matematički fakultet, 2014.

[10] Chaichian,M. Hagedorn,R. Symmetries in Quantum Mechanics: From Angular Momentum to Supersymmetry, CRC Press, 1997.

[11] Bošnjak, A. Reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Seminarski rad. Zagreb : Prirodoslovno-matematički fakultet, 2014.

[12] Humphreys,J.E. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer-Verlag, 1972.