Teorija propasti i de Vylderova aproksimacija

Mešić, Anamarija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Anamarija Mešić

TEORIJA PROPASTI I DE VYLDEROVA APROKSIMACIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Hrvoje Šikić

Zagreb, lipanj 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Sadržaj

Uvod

Jedan važan dio financijske matematike je teorija rizika, te teorija propasti kao dio teorije rizika. Važno pitanje u upravljanju rizicima je kako procijeniti vjerojatnost da neka financijska institucija propadne, tj. bankrotira, odnosno, procijeniti vjerojatnost propasti. Bankrotom ćemo smatrati stanje u kojem ukupno financijsko stanje financijske institucije postane negativno. Najjednostavniji model rizika u teoriji propasti je Cramér-Lundbergov model, koji se još naziva i klasični model rizika, kojeg promatramo u drugom poglavlju ovog rada. Prvi ga je uveo Lundberg 1903. godine u svom radu gdje je uočio važnost složenih Poissonovih procesa za teoriju rizika, posebice neživotnog osiguranja. Cramér je 30-ak godina poslije rad stavio u strogi matematički kontekst, te je po njima model dobio ime.
U prvom poglavlju se nalaze definicije i izvodi koji će kasnije biti potrebni u radu, kao na primjer definicija Poissonovog procesa, izvod Panjerove rekurzivne formule i slično.
Drugo poglavlje se sastoji od definiranja procesa dobitka koji opisuje financijsko stanje neke financijske institucije u trenutku t koje ovisi o početnom kapitalu, premijama koje se uplaćuju te ukupnim isplaćenim iznosima šteta do trenutka t koje su slučajne varijable. Početni kapital je početno stanje (u vremenu $t = 0$) financijske institucije izraženo u novčanim jedinicama. Pretpostavlja se da premije dolaze neprekidno u konstantnom iznosu, iako to u praksi nikada nije slučaj, no ta pretpostavka olakšava daljnju primjenu matematike u radu. Pretpostavljamo također da je iznos isplaćenih šteta slučajan, te da je vrijeme između dvije isplaćene štete slučajno, te da vrijeme između dvije isplaćene štete ima svojstvo zaboravljivosti te da su iznosi šteta nezavisni o vremenu između isplate šteta. Drugim riječima, vjerojatnost da se isplati nova šteta se ne mijenja ovisno o vremenu isplate prethodne štete, te vrijeme od prethodno isplaćene štete ne utječe na iznos štete. Bitna pretpostavka modela je da je očekivani iznos novca koji se uplaćuje (premije) strogo veći od iznosa koji se isplaćuje (štete). Ta pretpostavka garantira pozitivnu vjerojatnost događaja da financijska institucija neće bankrotirati. U Cramér-Lundbergovom modelu se pretpostavlja da je distribucija vremena čekanja između isplata dviju šteta eksponencijalna, tj. da je ukupan iznos isplaćenih šteta do trenutka t Poissonov proces. Definirat ćemo vjerojatnost

propasti u ovisnosti o početnom kapitalu, te izvesti formulu za vjerojatnost propasti pomoću Lundbergove nejednakosti, vrlo važne u aktuarstvu. Osim u neprekidnom vremenu, što ćemo promatrati kroz rad, vjerojatnost propasti definirana je i u diskretnom vremenu. Uz vjerojatnost propasti, definirana je i vjerojatnost preživljenja. Također je dokazan teorem koji daje gornju ogradu za vjerojatnost propasti, tj. dokazana je Lundbergova nejednakost. Možemo se zapitati, koliko se formula za vjerojatnost propasti koristi u praksi? Prvenstveno, ponekad ne možemo eksplicitno odrediti distribuciju šteta, te vrijeme između dvije štete nije eksponencijalno distribuirano, pa izgleda da nemamo koristi od vjerojatnosti propasti. No, uglavnom ćemo pretpostaviti da štete imaju neku distribuciju, najčešće log-normalnu, gama, Paretovu ili eksponencijalnu, te da je vrijeme čekanja između isplate dvije štete eksponencijalno distribuirano. U tom ćemo slučaju moći primijeniti formulu za vjerojatnost propasti. No, hoće li se propast ikada dogoditi? Odgovor je: uglavnom ne. Naime, ukoliko financijska institucija uoči da joj se budžetsko stanje smanjuje, ili je vjerojatnost propasti velika, povećat će premije.
Osim procesa dobitka, promatrat ćemo i proces gubitka kojeg ćemo definirati kao razliku procesa dobitka i uplaćenih premija. Egzaktna formula za vjerojatnost propasti se za neke distribucije šteta ne može eksplicitno izračunati, te ćemo zato na kraju poglavlja izvesti formule za aproksimativno računanja vjerojatnosti propasti. Također, u drugom su poglavlju dani razni primjeri koji olakšavaju shvaćanje teme ovog rada.
U trećem poglavlju rada ćemo promatrati jednu aproksimaciju za vjerojatnost propasti, De Vylderovu aproksimaciju, te njeno poopćenje, 4MGDV aproksimaciju. De Vylderovu aproksimaciju je predložio De Vylder 1978. godine, te ta aproksimacija zato nosi njegovo ime. De Vylderova aproksimacija se izvodi iz egzaktne formule vjerojatnosti propasti u slučaju kada je distribucija šteta eksponencijalna uz pretpostavku da prva tri momenta procesa kojeg želimo aproksimirati postoje. 4GMDV aproksimacija se izvodi iz pretpostavke da štete imaju gama distribuciju, te da postoje prva četiri(ili tri) momenta procesa kojeg aproksimiramo. Navodimo prednosti i mane svake aproksimacije, te je dan primjer u kojem se računaju egzaktne i aproksimativne vjerojatnosti propasti kako bismo na primjeru uočili spomenute mane i prednosti aproksimacija.

Poglavlje 1

Preliminarije

1.1 Poissonov proces

Definicija 1.1.1. *Proces* $(N(t))_{t\geq 0}$ *s vrijednostima u skupu* $0, 1, 2, \ldots$ *nazivamo Poissonov proces s intenzitetom* $\lambda \geq 0$ *ako vrijedi*
i) $N_0 = 0$
ii) N *ima nezavisne priraste, tj. za* $0 = k_0 < k_1 < \ldots < k_m$ *slučajne varijable*

$$N_{k_1} = N_{k_1} - N_{k_0}, N_{k_2} - N_{k_1}, \ldots, N_{k_m} - N_{k_m - 1}$$

su nezavisne
iii) za $0 \leq s < t$ *je* $N_t - N_s \sim P(\lambda(t-s))$
pri čemu je $P(\lambda)$ *Poissonova razdioba s parametrom* λ.

Primijetimo da iz svojstva (iii) slijedi da za $0 \leq s < t$ distribucija od $N(t) - N(s)$ ovisi samo o $t - s$, ali ne i o s i t samima. Kažemo da N ima stacionarne priraste. Također, vrijedi $\mathbb{E}N_t = \lambda t$.

Definicija 1.1.2. *Proces* $(X(t))_{t\geq 0}$ *zovemo složeni Poissonov proces ako je*

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, t \geq 0$$

gdje je $(N(t))_{t\geq 0}$ *Poissonov proces s intenzitetom* λ, *a* $\{Y_i, i \in \mathbb{N}\}$ *familija nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli nezavisnih od* $N(t)$.

Uočimo da ako stavimo $Y_i = 1$, tada je $X_t = N_t$, pa je X_t Poissonov proces. Također uočimo da je zbog nezavisnosti po Waldovoj formuli

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}N_t \mathbb{E}Y_1 = \lambda t \mathbb{E}Y_1 \tag{1.1}$$

te

$$\mathbb{V}ar[X_t] = \lambda t \mathbb{E}[Y_1^2] \ . \tag{1.2}$$

1.2 Laplaceova transformacija

Definicija 1.2.1. *Neka je $f(x)$ funkcija definirana za sve $x \geq 0$. Definiramo Laplaceovu transformaciju f^* od f kao*

$$f^*(s) = \int_0^\infty \exp(-sx) f(x) dx \ , \ \text{za } s \geq 0$$

ako taj integral postoji.

Ponekad Laplaceovu transformaciju od f zapisujemo i kao $L(f)$, tj.

$$L(f)(s) = \int_0^\infty \exp(-sx) f(x) dx \ .$$

Navedimo sada neka svojstva Laplaceove tranformacije. U svim svojstvima pretpostavljamo da Laplaceova transformacija postoji.

- Neka su f_1 i f_2 funkcije, te α_1 i α_2 konstante. Tada vrijedi
$$L(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 L(f_1) + \alpha_2 L(f_2) \ . \tag{1.3}$$
- Neka je $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(x)dx$. Tada je
$$L(F) = \frac{L(f)}{x} \ . \tag{1.4}$$
- Neka je f diferencijabilna funkcija. Tada je
$$L(\frac{d}{dx} f(x)) = xL(f) - f(0) \ . \tag{1.5}$$
- Neka su f_1 i f_2 funkcije. Definiramo
$f(s) = (f_1 * f_2)(s) = \int_0^\infty f_1(x) f_2(s-x) dx$. Tada je
$$L(f) = L(f_1)L(f_2) \ . \tag{1.6}$$
- Neka vrijedi $Y \sim H$, gdje je H funkcija distribucije i $H(0) = 0$. Tada je
$$\mathbb{E}[\exp(-sY)] = \int_0^\infty \exp(-sx) dH(x) \ . \tag{1.7}$$
- Kada je distribucija neprekidna s gustoćom h, vrijedi
$$\mathbb{E}[\exp(-sY)] = L(h)(s) \ . \tag{1.8}$$

1.3 Panjerova rekurzivna formula

$(a, b, 0)$ klasa distribucije

Kažemo da distribucija diskretne slučajne varijable pripada $(a, b, 0)$ klasi distribucije ako se diskretna funkcija gustoće te distribucije $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ može zapisati rekurzivno kao

$$p_n = (a + \frac{b}{n})p_{n-1} \tag{1.9}$$

za $n \in \mathbb{N}$, a i b konstante. Iz $p_1 = (a+b)p_0$ slijedi $(a+b) \geq 0$. Pokažimo da Poissonova distribucija spada u klasu $(a, b, 0)$ distribucija.
Uzmimo $a = 0$. Tada iz (1.9) slijedi

$$p_n = \frac{b}{n}p_{n-1}$$

za $n \in \mathbb{N}$. Uvrštavanjem izraza za $p_{n-1}, p_{n-2}, \ldots$ u jednadžbu (1.9) dobivamo

$$p_n = \frac{b}{n}\frac{b}{n-1}\cdots\frac{b}{2}\frac{b}{1}p_0 = \frac{b^n}{n!}p_0 \ .$$

Uzimajući u obzir činjenicu $\sum_0^{\infty} p_n = 1$ slijedi

$$1 = \sum_0^{\infty} p_n = p_0 \sum_0^{\infty} \frac{b^n}{n!} = p_0 e^b$$

iz čega pak slijedi $p_0 = e^{-b}$, pa je $p_n = \frac{b^n}{n!}e^{-b}$. Odnosno, $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ je diskretna funkcija gustoće Poissonove razdiobe s parametrom b.

Izvod Panjerove rekurzivne formule

Promatramo proces $S = \sum_{i=0}^{N} X_i$, gdje su X_i nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable koje označavaju iznos isplate i-te štete, a N slučajni broj šteta koje se isplaćuju. Stoga je S ukupni iznos šteta. Označimo sa $G(x) = \mathbb{P}(S \leq x)$ funkciju distribucije ukupnih šteta, te neka je $F(x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x)$ funkcija distribucije iznosa pojedinih šteta i $(p_n)_{n=0}^{\infty}$, $p_n = \mathbb{P}(N = n)$ diskretna funkcija gustoće brojeva šteta. Uočimo da za događaj $\{S \leq x\}$ vrijedi

$$\{S \leq x\} = \cup_{n=0}^{\infty}\{S \leq x, N = n\}$$

pa je

$$\mathbb{P}(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S \leq x, N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S \leq x | N = n)\mathbb{P}(N = n) \tag{1.10}$$

gdje smo u prvoj jednakosti koristili formulu potpune vjerojatnosti, a u drugoj definiciju uvjetne vjerojatnosti. Nadalje, po definiciji varijable S vrijedi

$$\mathbb{P}(S \leq x | N = n) = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq x) = F^{n*}(x) \tag{1.11}$$

gdje je F^{n*} n-konvolucija funkcije distribucije F sa samom sobom (uz $F^{0*}(x) = 1$ za $x \geq 0$). Iz (1.10) slijedi

$$G(x) = \mathbb{P}(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(x) p_n \ . \tag{1.12}$$

Iz formule (1.12) se lako pokaže da vrijedi

$$g_x = \sum_{n=1}^{\infty} p_n f_x^{n*}, \text{ uz } g_0 = p_0 \tag{1.13}$$

gdje je $(g_x)_{x=0}^{\infty}$ diskretna funkcija gustoće pridružena funkciji distribucije $G(x)$, a $(f_x)_{x=0}^{\infty}$ diskretna funkcija gustoće pridružena funkciji distribucije $F(x)$, te $f_x^{n*} = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = x)$.

Neka je $P_N(r)$ funkcija izvodnica funkcije distribucije N,tj.

$$P_N(r) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n p_n, \ r \in \mathbb{R}, |r| \leq 1$$

te neka je funkcija distribucija od N klase $(a, b, 0)$. Tada je

$$\begin{aligned}
P_N'(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} p_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} (a + \frac{b}{n} p_{n-1}) \\
&= a \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} p_{n-1} + b \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} p_{n-1} \\
&= a \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} p_{n-1} + b \sum_{n=0}^{\infty} r^{n} p_{n} \\
&= a \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} p_{n-1} + b P_N(r) \ .
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Izračunajmo i prvi izraz iz jednakosti

$$\begin{aligned}
a \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} p_{n-1} &= a \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) r^{n-1} p_{n-1} + a \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} p_{n-1} \\
&= ar \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) r^{n-2} p_{n-1} + a \sum_{n=0}^{\infty} r^{n} p_{n} \\
&= ar P_N'(r) + a P_N(r) \ .
\end{aligned}$$

Uvrstimo dobiveno u formulu (1.14), pa dobivamo

$$P_N'(r) = ar P_N'(r) + (a+b) P_N(r) \ . \tag{1.15}$$

Može se pokazati da vrijedi

$$P_S(r) = P_N[P_X(r)] \tag{1.16}$$

gdje su $P_S(r) = \sum_{j=0}^{\infty} r^j g_j$, $P_X(r) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k f_k$ funkcije izvodnice od S i $X_1 = X$ iz čega deriviranjem po r slijedi

$$P_S'(r) = P_N'[P_X(r)] P_X'(r) \ . \tag{1.17}$$

Uvrštavanjem (1.15) u (1.17) dobivamo

$$P_S'(r) = a P_X(r) P_N'[P_X(r)] P_X'(r) + (a+b) P_N[P_X(r)] P_X'(r) \tag{1.18}$$

Sada, uvrštavanjem (1.16) i (1.17) u (1.18) slijedi

$$P_S'(r) = aP_X(r)P_S'(r) + (a+b)P_S(r)P_X'(r) \ . \tag{1.19}$$

Iz definicija funkcija izvodnica dobivamo

$$\sum_{j=0}^{\infty} jr^{j-1}g_j = a(\sum_{k=0}^{\infty} r^k f_k)(\sum_{j=0}^{\infty} jr^{j-1}g_j) + (a+b)(\sum_{j=0}^{\infty} r^j g_j)(\sum_{k=0}^{\infty} kr^{k-1}f_k) \ .$$

Množenjem te jednadžbe sa r dobivamo

$$\sum_{j=0}^{\infty} jr^j g_j = a(\sum_{k=0}^{\infty} r^k f_k)(\sum_{j=0}^{\infty} jr^j g_j) + (a+b)(\sum_{j=0}^{\infty} r^j g_j)(\sum_{k=0}^{\infty} kr^k f_k) \ .$$

Želimo dobiti g_x pa ćemo izjednačiti koeficijente uz r^k, te stavimo privremeno $x = k$ (za potrebe izvoda)

$$\begin{aligned} xg_x &= a\sum_{k=0}^{x} f_k(x-k)g_{x-k} + (a+b)\sum_{k=0}^{x} kf_k g_{x-k} \\ &= af_0 xg_x + a\sum_{k=1}^{x} f_k(x-k)g_{x-k} + (a+b)\sum_{k=1}^{x} kf_k g_{x-k} \end{aligned}$$

te zatim prvi član s desne strane prebacimo na lijevi, te podijelimo sve sa $(1 - af_0)$, pa dobivamo

$$g_x = \frac{1}{1-af_0}\sum_{k=1}^{x}(a + \frac{b^k}{x})f_k g_{x-k} \tag{1.20}$$

uz početni uvjet dan jednadžbom (1.13)
Formula (1.20) se zove Panjerova rekurzivna formula. Nama će posebno biti zanimljiv slučaj kada N ima geometrijsku razdiobu, tj. $p_n = pq^n$, za $n \in \mathbb{N}_0$. Geometrijska razdioba također pripada $(a, b, 0)$ klasi distribucija uz $a = q$, $b = 0$, pa formula (1.20) za takav N glasi

$$g_x = \frac{1}{1-q}\sum_{k=1}^{x} qf_k g_{x-k} \ .$$

Za svaki $y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned} G(y) = \sum_{x=0}^{y} g_x &= g_0 + \sum_{x=1}^{y} \frac{q}{1-qf_0} \sum_{k=1}^{x} f_k g_{x-k} \\ &= g_0 + \frac{q}{1-qf_0} \sum_{k=1}^{y} f_k \sum_{x=k}^{y} g_{x-k} \\ &= g_0 + \frac{q}{1-qf_0} \sum_{k=1}^{y} f_k G(y-k) \end{aligned} \tag{1.21}$$

1.4 Pareto distribucija

Definicija 1.4.1. *Kažemo da slučajna varijabla X ima Paretovu distribuciju s parametrima α i λ, $\alpha, \lambda \geq 0$, i pišemo $X \sim Pa(\alpha, \lambda)$ ako joj je funkcija gustoće dana sa*

$$f(x) = \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}}$$

za $x > 0$.

Izračunajmo očekivanje:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x f(x) dx &= \int_0^\infty (x + \lambda - \lambda) f(x) dx \\ &= \int_0^\infty (x+\lambda) f(x) dx - \int_0^\infty \lambda f(x) dx \\ &= \int_0^\infty (x+\lambda) f(x) dx - \lambda \ . \end{aligned}$$

Izračunajmo pripadni integral

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (x+\lambda) f(x) dx &= \int_0^\infty (x+\lambda) \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}} dx \\ &= \frac{\alpha\lambda}{\alpha-1} \int_0^\infty \frac{(\alpha-1)\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda+x)^\alpha} dx \\ &= \frac{\alpha\lambda}{\alpha-1} \end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost slijedi jer je $\int_0^\infty \frac{(\alpha-1)\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda+x)^\alpha} dx$ integral funkcije gustoće Pareto razdiobe s parametrima $\alpha - 1$ i λ. Slijedi da je

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha\lambda}{\alpha-1} - \lambda = \frac{\lambda}{\alpha-1} \ . \tag{1.22}$$

Slično se pokaže da je

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{2\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} \tag{1.23}$$

iz čega slijedi

$$\mathbb{V}ar[X] = \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \ . \tag{1.24}$$

Poglavlje 2

Teorija propasti

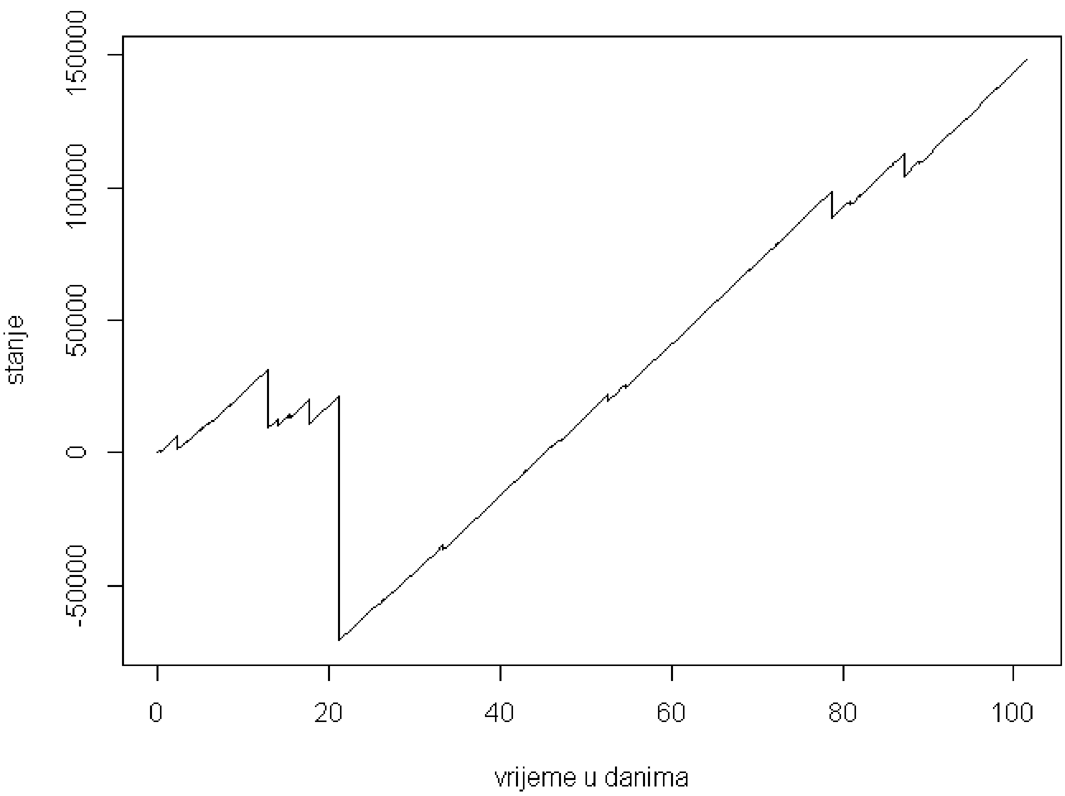
2.1 Uvod u teoriju propasti

Klasični model opisuje stanje osiguravajuće tvrtke (ili nekog drugog agenta) pomoću procesa $(U(t))_{t\geq 0}$ pri čemu je $U(t)$ financijsko stanje (mjereno u novčanim jedinicama) tvrtke u trenutku t. Ono ovisi o početnom kapitalu $u \geq 0$ u trenutku $t = 0$, procesu premija, te o nadolazećim naplatama za štetu. Pretpostavimo da tvrtka ima dovoljno osiguranika koji plaćaju premije, ili se dovoljno mnogo premija treba naplatiti, tako da možemo pretpostaviti da se premije plaćaju tijekom cijele godine, tj. da dolaze neprekidno. Tvrtka je tada u trenutku $t \geq 0$ dobila ukupnu premiju ct, gdje je c rata premije po jedinici vremena.
Također, pretpostavimo da štete dolaze u nekom slučajnom vremenskom trenutku, te da su njihovi iznosi slučajni. Označimo sa $(S(t))_{t\geq 0}$ proces ukupne štete. Neka je $(N(t))_{t\geq 0}$ brojeći proces broja šteta, tako da za fiksan $t \geq 0$, slučajna varijabla $N(t)$ predstavlja broj šteta koje su se dogodile do trenutka t. Individualni iznosi šteta su modelirani kao niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli $(X_i)_{i=1}^{\infty}$, tako da X_i predstavlja iznos i-te štete. Tada je

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

uz $S(t) = 0$ kada je $N(t) = 0$. Proces dobitka $(U(t))_{t\geq 0}$ je tada definiran sa

$$U(t) = u + ct - S(t) \ . \tag{2.1}$$



Slika 2.1: Jedna realizacija procesa U u prvih 100 dana gdje je $\lambda = 1$, $c = 1.05\lambda$, te su individualne štete lognormalne s parametrima $\mu = 2$, $\sigma = \sqrt{8}$

U Cramér-Lundbergovom modelu rizika se pretpostavlja da je $(N(t))_{t\geq 0}$ Poissonov proces. Po definiciji, brojeći proces je Poissonov proces s parametrom λ ako je distribucija vremena između događaja eksponencijalna s parametrom λ. U našem slučaju događaj je pojava štete.
Ako definiramo A_i kao vrijeme između $(i-1)$ -og i i-tog događaja (vrijeme čekanja), gdje je A_1 vrijeme do prvog događaja, tada je $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s parametrom λ. Ako je brojeći proces Poissonov, tada je distribucija broja događaja do vremena t Poissonova s parametrom λt. Za fiksni t, neka je $N(t)$ broj događaja do trenutka t. Tada je za $n = 0, 1, \ldots$

$$N(t) \geq (n+1) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n+1} A_i \geq t \quad .$$

$A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ su eksponencijalno distribuirane s parametrom λ, pa slijedi da je

$$\sum_{i=1}^{n+1} A_i \sim \gamma(n+1, \lambda) \ ,$$

tj. slučajna varijabla $\sum_{i=1}^{n+1} A_i$ ima gama distribuciju. Općenito, slučajna varijabla ima gama distribuciju s parametrima α i λ ako joj je funkcija gustoće $f(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}\exp(-\lambda x)}{\Gamma(\alpha)}$ za $x \geq 0$ gdje je $\Gamma(\alpha)$ gama funkcija definirana sa

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}\exp(-x)dx \ .$$

Dakle,

$$\mathbb{P}(N(t) \geq n+1) = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n+1} A_i \leq t) = 1 - \sum_{j=1}^{n} \exp(-\lambda t)\frac{(\lambda t)^j}{j\,!}$$

ili ekvivalentno

$$\mathbb{P}(N(t) \leq n) = \sum_{j=1}^{n} \exp(-\lambda t)\frac{(\lambda t)^j}{j\,!} \quad .$$

Slijedi:

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = \exp(-\lambda t)\frac{(\lambda t)^n}{n\,!} \ . \tag{2.2}$$

Iz definicije složenog Poissonovog procesa slijedi da je ukupni proces šteta $(S(t))_t$ složen Poissonov proces. U kontekstu da Poissonov proces reprezentira proces agregatnih šteta od nekog vremena $t \geq 0$, distribucija vremena do sljedeće štete je eksponencijalna s parametrom λ i funkcija distribucije sljedeće štete je F.
Dakle, distribuciju od X_1 označavamo sa F, uz $F(0) = 0$, da bi sve isplaćene štete bile pozitivne, i $F(x) = 0$ za $x \leq 0$, te za nju pretpostavljamo da je neprekidna s funkcijom gustoće f. Sa m_k označavamo k-ti moment od X_1, a funkciju generirajućih momenata označavamo sa $M_X(r) = \mathbb{E}[exp(rX_1)]$, te tada pretpostavljamo da postoji $0 \leq \gamma \leq \infty$ tako da je $M_X(r)$ konačan, $\forall r \leq \gamma$, te $\lim_{r \to \gamma^-} M_X = \infty$. Stavimo $m = m_1$, te pretpostavimo da je $m < \infty$ jer u suprotnom ni jedna osiguravajuća tvrtka ne bi prihvatila takav rizik, s obzirom da bi očekivanje individualnih šteta bilo $+\infty$.

Primjer 2.1.1. *Neka je ukupni proces šteta* $(S(t))_{t\geq 0}$ *složeni Poissonov proces s parametrom* 100*, te distribucija individualnih iznosa šteta Paretova* $Pa(4, 300)$*. Izračunajmo prvo očekivanje i varijancu od* $S(1)$*:*
Po formulama (1.1)*,* (1.2) *uz* $\lambda = 100$*,* $t = 1$*, te iz formula* (1.22) *i* (1.23) *slijedi da je*

$$\mathbb{E}[S(1)] = \mathbb{E}[N_1]\mathbb{E}[X_1] = 100\frac{300}{3} = 10000$$

i

$$\mathbb{V}ar[S(1)] = 100\frac{2(300)^2}{3 * 2} = 3 * 10^6 \ .$$

Analogno se dobije očekivanje i varijanca slučajne varijable $S(2)$*:*

$$\mathbb{E}[S(2)] = 100 * 2\frac{300}{3} = 2 * 10^4$$

$$\mathbb{V}ar[S(2)] = 100 * 2 * \frac{2(300)^2}{3 * 2} = 6 * 10^6$$

Sada izračunajmo očekivanje i varijancu od $S(2) - S(1)$*:*

$$\mathbb{E}[S(2) - S(1)] = 2 * 10^4 - 10^4 = 10^4$$

zbog linearnosti očekivanja,te

$$\begin{aligned}\mathbb{V}ar[S(2) - S(1)] &= \mathbb{V}ar[S(2)] - \mathbb{V}ar[S(1)] - 2\mathbb{C}ov[S(2), S(1)] \\ &= \mathbb{V}ar[S(2)] - \mathbb{V}ar[S(1)] = 6 * 10^6 - 3 * 10^6 = 3 * 10^6\end{aligned}$$

zbog nezavisnosti slučajnih varijabli $S(2)$ *i* $S(1)$*.*

2.2 Definicija vjerojatnosti propasti

Promatramo vjerojatnost da proces $U(t)$ padne ispod neke granice, najčešće 0, za neki početni kapital u. Definiramo vjerojatnost propasti $\psi(u)$ kao vjerojatnost da isplaćene štete premaše početni kapital i dobitak od premija, tj.

$$\psi(u) = \mathbb{P}(\tau < \infty) = \mathbb{P}(U(t) < 0 \text{ za neki } t \geq 0) \ .$$

Neka je $\tau = inf\{t; U(t) < 0\}$ vrijeme propasti, uz $\tau = \infty$ ako je $U(t) \geq 0$, $\forall t$. Tada je uz gornju definiciju

$$\psi(u) = \mathbb{P}(\tau < \infty)$$

Također, možemo definirati vjerojatnost propasti u diskretnom vremenu kao

$$\psi_r(u) = \mathbb{P}(U(t) < 0; \text{ za neke } t,\ t = r, 2r, 3r, \dots)\ .$$

Uz ovu definiciju, propast se dogodi ako je ukupno financijsko stanje tvrtke manje od 0 u nekom vremenu r, $r \in \mathbb{N}$. Ako se propast dogodi s obzirom na definiciju $\psi_r(u)$, ona se mora dogoditi i s obzirom na definiciju $\psi(u)$. No, obrat ne mora vrijediti: promatramo $U(t)$ tako da je za neki $n \in \mathbb{N}$, $U(nr) \geq 0$ i $U((n+1)r) \geq 0$, ali $U(\tau) \leq 0$ za neki $\tau \in (nr, (n+1)r)$. Ako je $U(t) \geq 0$ za sve t izvan $< nr, (n+1)r >$, onda se propast dogodila s obzirom na definiciju u neprekidnom vremenu, ali ne s obzirom na definiciju u diskretnom vremenu. Stoga vrijedi $\psi_r(u) \leq \psi(u)$. No,kako r postaje malen, $\psi_r(u)$ postaje dobra aproksimacija za $\psi(u)$.
S obzirom na gornje definicije možemo promatrati konačno vrijeme propasti, tj. vjerojatnost da $U(t)$ padne ispod 0 u konačnom vremenskom intervalu $(0, t]$

$$\psi(u, t) = \mathbb{P}(U(s) < 0; \text{ za neki } s,\ 0 \leq s \leq t)$$

i diskretnu vjerojatnost propasti u konačnom vremenu

$$\psi_r(u, t) = \mathbb{P}(U(s) < 0; \text{ za neke } s,\ \ s = r, 2r, \dots, t)$$

gdje je t višekratnik broja r. Razmatranje koje objašnjava zašto je $\psi_r(u) \leq \psi(u)$ se također može primijeniti na $\psi_r(u, t)$ i $\psi(u, t)$, te slijedi $\psi_r(u, t) \leq \psi(u, t)$, te ako je r malen, tada je $\psi_r(u, t)$ dobra aproksimacija od $\psi(u, t)$.

2.3 Lundbergova nejednakost

Označimo vremena šteta sa T_1,T_2,... i stavimo $T_0 = 0$. Neka je $Y_i = c(T_i - T_{i-1}) - X_i$, te

$$U_{Tn} = u + \sum_{i=1}^{n} Y_i\ .$$

To je slučajna šetnja, te iz teorije o slučajnim šetnjama, propast se dogodi g.s. ako i samo ako $\mathbb{E}[Y_i] \leq 0$ (za dokaz vidi [4]) pa je

$$\mathbb{E}[Y_i] \geq 0 \iff c\frac{1}{\lambda} - m_1 \geq 0 \iff c \geq \lambda m_1\ .$$

Uvjet $c \geq \lambda m_1$ se može interpretirati tako da za jednu jedinicu vremena premija bude veća od očekivane ukupne količine šteta. Taj uvjet se zove uvjet čistog profita. Pokazali smo da, ako taj uvjet nije zadovoljen, vrijedi $\psi(u) = 1\ \forall u \geq 0$. Prilagođeni koeficijent ili Lundbergov eksponent, kojeg označavamo sa R, je mjera rizika za proces budžetskog viška. Prilagođeni koeficijent je definiran kao jedinstveni pozitivan korijen od

$$\lambda M_x(r) - \lambda - cr \tag{2.3}$$

tako da je R zadan kao rješenje jednadžbe

$$\lambda M_x(R) = \lambda + cR \ . \tag{2.4}$$

Da bismo vidjeli da postoji jedinstven strogo pozitivan korijen , promatramo funkciju $g(r) = \lambda M_x(r) - \lambda - cr$. Uočimo da je $g(0) = 0$, te

$$\frac{d}{dr} g(r) = \lambda \int_0^\infty x e^{xr} f(x) dx$$

pa je

$$\frac{d}{dr} g(r)|_{r=0} = \lambda m_1 - c$$

što znači da g pada u nuli (zbog uvjeta čistog profita). Nadalje,

$$\frac{d^2}{dr^2} g(r) = \lambda \frac{d^2}{dr^2} M_x(r) = \lambda \int_0^\infty x^2 \exp(rx) f(x) dx > 0$$

jer su sve podintegralne funkcije nenegativne. Slijedi da je g konveksna pa ako g ima točku ekstrema, tada g ima minimum u toj točki. Pokažimo da vrijedi

$$\lim_{r \to \gamma^-} g(r) = \infty \ .$$

Tada vrijedi da ako g pada u 0, funkcija mora imati jednistvenu točku ekstrema, pa postoji jedinstven R takav da $g(R) = 0$.
Da bismo to pokazali, posebno promatramo $\gamma < \infty$ i $\gamma = \infty$. U prvom slučaju je jasno da vrijedi. U drugom slučaju, s obzirom da su štete pozitivne, postoji $\epsilon > 0$ i vjerojatnost p takvi da

$$\mathbb{P}(X_1 > \epsilon) = p > 0$$

pa je

$$M_x(r) = \int_0^\infty \exp(rx) f(x) dx \geq \int_\epsilon^\infty \exp(rx) f(x) dx \geq \exp(r\epsilon) p$$

te zato slijedi

$$\lim_{r \to \infty} g(r) \geq \lim_{r \to \infty} (\lambda \exp(r\epsilon) p - \lambda - cr) = \infty \ .$$

Primjer 2.3.1. *Neka je ukupni proces šteta* $(S(t))_{t\geq 0}$ *složeni Poissonov proces s parametrom* λ*,te neka je* $X_1 \sim \gamma(2, 0.02)$*. Izračunajmo prilagođeni koeficijent ako je premija po jedinici vremena jednaka* 130λ*. Tražimo pozitivni korijen jednadžbe*

$$\lambda M_X(r) - \lambda - cr$$

tj. tražimo R *takav da vrijedi*

$$\lambda M_X(R) - \lambda - 130\lambda R = 0 \ .$$

Odnosno,nakon dijeljenja s λ *dobivamo*

$$M_X(R) - 1 - 130R = 0 \ .$$

Jer je $X \sim \gamma(\alpha, \lambda)$*, slijedi da je*

$$M_X(r) = (\frac{\lambda}{\lambda - r})^{\alpha} \ .$$

Uvrštavanjem slijedi da tražimo pozitivno rješenje jednadžbe (uočimo da je $\alpha = 2$ *i* $\lambda = 0.02$*)*

$$(\frac{0.02}{0.02 - R})^2 - 1 - 130R = 0 \ .$$

Laganim računom slijedi da tražimo $R > 0$ *takav da vrijedi*

$$R(-130R^2 + 4.2R - 0.012) = 0 \ .$$

Rješavanjem te jednadžbe dobivamo prilagođeni koeficijent $R = 0.00264$*.*

Primjer 2.3.2. *Koristeći aproksimaciju*

$$\exp(Rx) \approx 1 + Rx + \frac{1}{2}R^2x^2 + \frac{1}{6}R^3x^3$$

nađimo aproksimaciju za prilagođeni koeficijent R *kada za individualne iznose šteta vrijedi* $X \sim \gamma(2.5, 2.5)$ *i* $c = 1.05\lambda$*. Prvo uočimo da zbog linearnosti matematičkog očekivanja vrijedi*

$$M_X(r) = \mathbb{E}[e^{rX}] \approx \mathbb{E}[1 + Rx + \frac{1}{2}R^2x^2 + \frac{1}{6}R^3x^3] = 1 + Rm_1 + \frac{1}{2}R^2m_2 + \frac{1}{6}R^3m_3 \ .$$

Kao u prethodnom primjeru, tražimo R *takav da vrijedi*

$$\lambda M_X(R) - \lambda - 1.5\lambda R = 0$$

odnosno,

$$1 + Rm_1 + \frac{1}{2}R^2m_2 + \frac{1}{6}R^3m_3 - 1 - 1.5R = 0 \ .$$

Za gama distribuciju vrijedi

$$\mathbb{E}[X^n] = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{\lambda^n}$$

pa uvrštavanjem odgovarajućih očekivanja i sređivanjem dobivamo jednadžbu

$$1 + R + \frac{7}{10}R^2 + \frac{21}{50}R^3 - 1 - 1.05R = 0$$

ili ekvivalento

$$R(21R^2 + 7R - \frac{5}{2}) = 0$$

čije je rješenje $R = 0.0686$.

Generalno, prilagođeni koeficijent je teško naći, pa pokušajmo naći neku ogradu za njega. Pogledajmo funkciju $g(r)$ za $r > 0$.

$$\begin{aligned} g''(r) &= \lambda\mathbb{E}[X^2\exp(rX)] > \lambda\mathbb{E}[X^2] = \lambda m_2 \\ g'(r) &= g'(0) + \int_0^r g''(s)ds > -(c - \lambda m_1) + \lambda m_2 r \\ g(r) &= g(0) + \int_0^r g'(s)ds > \lambda m_2\frac{r^2}{2} - (c - \lambda m_1)r \ . \end{aligned}$$

Za $r = R$

$$0 = g(R) > R(m_2\lambda\frac{R}{2} - (c - \lambda m_1)) \ .$$

Te napokon slijedi

$$R < \frac{2(c - \lambda m_1)}{\lambda m_2} \ . \tag{2.5}$$

Teorem 2.3.1. *Neka je R prilagođeni koeficijent. Tada vrijedi*

$$\psi(u) \leq \exp(-Ru) \ .$$

Dokaz. (Dokaz je uzet iz [1])

Dokaz indukcijom. Definiramo vjerojatnost propasti prije n-te štete kao $\psi_n(u)$. Dovoljno je pokazati

$$\psi_n(u) \leq \exp(-Ru)$$

za $n = 1, 2, 3 \ldots$ jer vrijedi
$$\psi(u) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(u) \ .$$
Pretpostavimo da za fiksan n, $n \geq 1$,
$$\psi_n(u) \leq \exp(-Ru) \ .$$
Izvest ćemo izraz za $\psi_{n+1}(u)$ uzimajući u obzir vrijeme i količinu prve štete:
Pretpostavimo da se prva šteta dogodila u vremenu $t > 0$ i da je iznos štete x. Ako se propast dogodila u trenutku ili prije $(n+1)$-e štete, tada se propast dogodila u trenutku prve štete, tako da je $x > u + ct$, ili se propast nije dogodila u trenutku prve štete, tako da je budžetski višak nakon isplate te štete, $u + ct - x$, nenegativan, te se propast dogodila uz ovaj budžetski višak pri isplati neke od budućih n šteta.
S obzirom da je pojava štete Poissonov proces s parametrom λ, distribucija vremena do prve štete je eksponencijalna s parametrom λ. Integriranjem po svim mogućim vremenima i iznosima prve štete dobivamo
$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(u) = &\int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda t) \int_{u+ct}^\infty f(x)dxdt \\ &+ \int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda t) \int_0^{u+ct} f(x)\psi_n(u + ct - x)dxdt \ .\end{aligned}$$
Uočimo da je prvi integral vjerojatnost propasti pri isplati prve štete, a drugi vjerojatnost da se šteta nije dogodila pri isplati prve štete, ali je pri isplati neke od sljedećih n šteta. Također uočimo da proces viška "počinje ispočetka" poslije isplate prve štete, tako da je vjerojatnost propasti unutar isplata prvih n šteta nakon isplate prve štete jednaka $\phi_n(u + ct - x)$. Sada primijenjujemo induktivnu pretpostavku:
$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(u) \leq &\int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda t) \int_{u+ct}^\infty f(x)dxdt \\ &+ \int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda t) \int_0^{u+ct} f(x) \exp(-R(u + ct - x))dxdt \ .\end{aligned}$$
Nadalje, koristimo činjenicu da je $\exp(-R(u + ct - x)) \geq 1$ za $x \geq u + ct$, pa je
$$\int_{u+ct}^\infty f(x)dx \leq \int_{u+ct}^\infty \exp(-R(u + ct - x))f(x)dx$$

te je zato

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(u) &\leq \int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda t) \int_0^\infty f(x) \exp(-R(u+ct-x)) dx dt \\ &= \exp(-Ru) \int_0^\infty \lambda \exp((-\lambda + cR)t) \int_0^\infty \exp(-Rx) f(x) dx dt \\ &= \exp(-Ru) \int_0^\infty \lambda \exp(-(\lambda + cR)t) M_X(R) dt \ .\end{aligned}$$

Budući da je $\lambda + cR = \lambda M_X(R)$, integral je jednak 1, te je zato

$$\psi_{n+1}(u) \leq \exp(-Ru) \ .$$

Još treba dokazati bazu, odnosno, da nejednakost vrijedi za $n = 1$. Istim argumentima kao gore slijedi

$$\begin{aligned}\psi_1(u) &= \int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda t) \int_{u+ct}^\infty f(x) dx dt \\ &\leq \int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda t) \int_{u+ct}^\infty f(x) \exp(-R(u+ct-x)) dx dt \\ &\leq \int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda t) \int_0^\infty f(x) \exp(-R(u+ct-x)) dx dt = \exp(-Ru) \ .\end{aligned}$$

□

Primjer 2.3.3. *Promatramo klasičan proces rizika s Poissonovim parametrom $\lambda = 100$, eksponencijalno distribuiranim individualnim štetama s očekivanjem 1, i premijom $c = 125$. Izračunajmo $\psi_1(u)$, te $\psi_2(u)$ po formuli*

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(u) = &\int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda t) \int_{u+ct}^\infty f(x) dx dt \\ &+ \int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda t) \int_0^{u+ct} f(x) \psi_n(u+ct-x) dx dt \ .\end{aligned}$$

Budući da je $\psi_0(x) = 0$ za svaki x i $f(x) = e^{-x}$ slijedi da je

$$\psi_1(u) = \int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda t) \int_{u+ct}^\infty e^{-x} dx dt \ .$$

Računamo

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda t) \int_{u+ct}^\infty e^{-x} dx dt &= \int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda t) e^{-(u+ct)} dt \\ &= e^{-u} \frac{\lambda}{\lambda + c} \ .\end{aligned} \tag{2.6}$$

Uvrštavanjem vrijednosti $\lambda = 100$ *i* $c = 125$ *slijedi da je*

$$\psi_1(u) = \frac{100}{225} e^{-u} = \frac{4}{9} e^{-u} \ .$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} \psi_2(u) = \int_0^\infty & \lambda \exp(-\lambda t) \int_{u+ct}^\infty e^{-x} dx dt \\ & + \int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda t) \int_0^{u+ct} e^{-x} \psi_1(u + ct - x) dx dt \end{aligned}$$

odnosno,

$$\psi_2(u) = \psi_1(u) + \int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda t) \int_0^{u+ct} e^{-x} \frac{\lambda}{\lambda + c} e^{-(u+ct-x)} dx dt \ .$$

Računamo

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda t) & \int_0^{u+ct} e^{-x} \frac{\lambda}{\lambda + c} e^{-(u+ct-x)} dx dt \\ & = \psi_1(u)[\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-ct} \int_0^{u+ct} dx dt] \\ & = \psi_1(u)[\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-ct} (u + ct) dt] \ . \end{aligned} \tag{2.7}$$

Izračunajmo integral

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-ct} (u + ct) dt & = \int_0^\infty u e^{-t(\lambda+c)} dt + \int_0^\infty c t e^{-t(\lambda+c)} \\ & = \frac{u}{\lambda + c} + c \int_0^\infty t e^{-t(\lambda+c)} \ . \end{aligned}$$

Parcijalnom integracijom se lako dobije

$$\int_0^\infty t e^{-t(\lambda+c)} = \frac{1}{(\lambda + c)^2} \ .$$

Uvrstimo dobiveno u (2.7) *i dobivamo*

$$\psi_2(u) = \psi_1(u)[1 + \lambda(\frac{u}{\lambda + c} + \frac{c}{(\lambda + c)^2})]$$

te kada uvrstimo $\lambda = 100$, $c = 125$ *i sredimo*

$$\psi_2(u) = \psi_1(u)(\frac{4}{9} u + \frac{101}{81}) \ .$$

2.4 Vjerojatnost preživljenja

Definiramo vjerojatnost preživljenja $\phi(u)$ kao vjerojatnost da se propast ne dogodi uz početni kapital u, tj. $\phi(u) = 1-\psi(u)$. Iz dokaza Lundbergove nejednakosti uzimajući u obzir iznos i vrijeme prve štete slijedi

$$\phi(u) = \int_0^\infty \lambda exp(-\lambda t) \int_0^{u+ct} f(x)\phi(u+ct-x)dxdt \ .$$

Supstitucijom $s = u + ct$ slijedi

$$\begin{aligned}\phi(u) &= \frac{1}{c}\int_0^\infty \lambda exp(-\lambda(s-u)/c) \int_0^s f(x)\phi(s-x)dxds \\ &= \frac{\lambda}{c} exp(\lambda u/c) \int_u^\infty exp(-\lambda s/c) \int_0^s f(x)\phi(s-x)dxds \ .\end{aligned}$$

Diferenciranjem dobivamo integro-diferencijabilnu jednadžbu

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\phi(u) = \frac{\lambda^2}{c^2} exp(\lambda u/c) &\int_u^\infty exp(-\lambda s/c) \int_0^s f(x)\phi(s-x)dxds \\ &- \frac{\lambda}{c}\int_0^u f(x)\phi(u-x)dx\end{aligned}$$

tj.

$$\frac{d}{du}\phi(u) = \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u f(x)\phi(u-x)dx \ . \tag{2.8}$$

Integrirajući po $(0,t)$ dobivamo

$$\begin{aligned}\phi(t)-\phi(0) &= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \phi(u)du + \frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^u \phi(u-s)(1-F(s))dsdu \\ &= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \phi(u)du \\ &+ \frac{\lambda}{c}\int_0^t [\phi(u)(1-F(u)) - \phi(u) + \int_0^u \phi'(u-s)(1-F(s))ds]du \qquad (2.9) \\ &= \frac{\lambda}{c}\phi(0)\int_0^t (1-F(u))du + \frac{\lambda}{c}\int_0^t (1-F(s))ds \int_s^t \phi'(u-s)ds \\ &= \frac{\lambda}{c}\phi(0)\int_0^t (1-F(u))du + \frac{\lambda}{c}\int_0^t (1-F(s))(\phi(u-s)-\phi(0))ds \ .\end{aligned}$$

I napokon slijedi

$$\phi(u) = \phi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \phi(u-s)(1-F(s))ds \ .$$

Izračunajmo sada $\psi(u)$. Iz prethodne formule vrijedi

$$1 - \psi(u) = 1 + \psi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u (1 - \psi(u-z))(1 - F(s))ds \ . \tag{2.10}$$

Preostaje izračunati $\psi(0)$, a to ćemo napraviti pomoću pretpostavke da Lundbergova nejednakost vrijedi. Stavimo u (2.9) $t = \infty$ te dobivamo

$$\begin{aligned} -\psi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \int_0^u \psi(u-s)f(x)dxdu \\ - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty (1 - F(u))du \ . \end{aligned}$$

Promijenimo red integracije u dvostrukom integralu

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^u f(x)\psi(u-x)dxdu &= \int_0^\infty \int_0^u \psi(u-x)duf(x)dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \psi(y)dyf(x)dx = \int_0^\infty \psi(y)dy \ . \end{aligned}$$

Dakle, prva dva izraza u jednadžbi se ponište pa imamo

$$\psi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty (1 - F(u))du = \frac{\lambda m}{c} \ .$$

Sada uvrstimo dobiveno u jednadzbu (2.10)

$$1 - \psi(u) = 1 - \frac{\lambda}{c}(m - \int_0^u (1 - F(x))dx + \int_0^u \psi(u-x)(1 - F(x))dx \ .$$

Konačno, formula za $\psi(u)$ je

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty (1 - F(x))dx + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-x)(1 - F(x))dx \ .$$

Primjer 2.4.1. *Stavimo u jednadžbi* (2.8) $F(x) = 1 - \exp(-\alpha x), x \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}\phi(u) &= \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \alpha \exp(-\alpha x)\phi(u-x)dx \\ &= \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\alpha\lambda}{c}\int_0^u \exp(-\alpha(u-x))\phi(x)dx \\ &= \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\alpha\lambda}{c}\exp(-\alpha u)\int_0^u \exp(\alpha x)\phi(x)dx \ . \end{aligned} \tag{2.11}$$

Diferenciranjem slijedi

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{du^2}\phi(u) = \frac{\lambda}{c}\frac{d}{du}\phi(u) + \frac{\alpha^2\lambda}{c}\exp(-\alpha u)\int_0^u \exp(\alpha x)\phi(x)dx \\ - \frac{\alpha\lambda}{c}\phi(u)\ .\end{aligned} \tag{2.12}$$

Integral u (2.12) *je integral u* (2.11) *pomnožen sa* $-\alpha$. *Dakle, pomnožimo* (2.11) *s* α *i dodamo* (2.12) *jednadžbi* (2.11). *Dobivamo*

$$\frac{d^2}{du^2}\phi(u) + \alpha\frac{d}{du}\phi(u) = \frac{\lambda}{c}\frac{d}{du}\phi(u)$$

ili

$$\frac{d^2}{du^2}\phi(u) + (\alpha - \frac{\lambda}{c})\frac{d}{du}\phi(u) = 0\ .$$

Ovo je diferencijalna jednadžba drugog reda čije je rješenje

$$\phi(u) = a_0 + a_1\exp(-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u)$$

gdje su a_0 *i* a_1 *konstante. Zbog Lundbergove nejednakosti vrijedi* $\lim_{u\to\infty}\phi(u) = 1$, *što daje* $a_0 = 1$, *iz čega slijedi* $\phi(0) = 1 + a_1$, *odnosno* $a_1 = -\phi(0) = -\frac{\lambda m}{c}$. *Konačno,*

$$\phi(u) = 1 - \frac{\lambda}{\alpha c}\exp(-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u)\ . \tag{2.13}$$

Ako stavimo $c = (1+\theta)\lambda m$, *tada je jednadžba*

$$\phi(u) = 1 - \frac{1}{1+\theta}\mathrm{e}^{\frac{-\alpha\theta}{1+\theta}} \tag{2.14}$$

nezavisna od λ. *Ovu nezavisnost smo izveli iz pretpostavke* $F(x) = 1 - \exp(-\alpha x)$, $x \geq 0$, *no ona vrijedi za sve distribucije štete. Izračunajmo prilagođeni koeficijent za eksponencijalnu distribuciju. Tražimo* $R > 0$ *takav da vrijedi*

$$\lambda + Rc - \lambda\int_{-\infty}^{\infty}\exp(Rx)\alpha\exp(-\alpha x)dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(Rx)\alpha\exp(-\alpha x)dx = \frac{\alpha}{\alpha - R}$$

pa rješavamo jednadžbu

$$\lambda + cR - \frac{\alpha\lambda}{\alpha - R} = 0$$

odnosno

$$R^2 - \frac{\alpha - \lambda}{c} R = 0$$

čije je strogo pozitivno rješenje $R = \alpha - \frac{\lambda}{c}$. *Sada slijedi da je*

$$\psi(u) = \psi(0)\exp(-Ru) \ .$$

Promotrimo sada kako možemo dobiti formulu za ϕ pomoću Laplaceove transformacije. Sjetimo se jednadžbe (2.8)

$$\frac{d}{du}\phi(u) = \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u f(x)\phi(u-x)dx \ .$$

Iz (1.5) slijedi da je lijeva strana te jednadžbe jednaka $s\phi^*(s) - \phi(0)$, a integral na desnoj strani je jednak $-\dfrac{\lambda}{c} f^*(s)\phi^*(s)$, pa slijedi

$$s\phi^*(s) - \phi(0) = \frac{\lambda}{c}\phi^*(s) - \frac{\lambda}{c} f^*(s)\phi^*(s)$$

odnosno

$$\phi^*(s) = \frac{c\phi(0)}{cs - \lambda(1 - f^*(s))} \ .$$

Kada je f racionalna funkcija, možemo naći formulu za ϕ invertirajući ϕ^*. Ovo je dobra metoda za naći jednadžbu za ϕ, no može biti teška za provesti u većini slučajeva jer je teško invertirati ϕ^*.

2.5 Proces gubitka

Osim procesa dobitka $(U(t))_{t\geq 0}$ korisno je gledati i proces koji označava same gubitke. S obzirom da je gubitak u trenutku t razlika isplaćenog iznosa i uplaćenog iznosa, definiramo ukupni proces gubitka $(L(t))_{t\geq 0}$ sa

$$L(t) = S(t) - ct, \forall t \geq 0 \tag{2.15}$$

te sa slučajnom varijablom L označimo maksimum ukupnog procesa gubitka. Uočimo da je tada $U(t) = u - L(t)$, iz čega slijedi

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \mathbb{P}(U(t) \geq 0, \forall t \geq 0) \\ &= \mathbb{P}(L(t) \leq u, \forall t \geq 0) \\ &= \mathbb{P}(L \leq u) \ . \end{aligned} \tag{2.16}$$

Dakle, ϕ je funkcija distribucije slučajne varijable L, te vrijedi $L(0) = S(0) - c \cdot 0 = 0$ pa je L nenegativna slučajna varijabla.
Pretpostavimo da $U(t)$ u nekom trenutku padne ispod vrijednosti početnog kapitala za l_1, tj. da poprimi vrijednost $u - l_1$. Vjerojatnost tog događaja je $\psi(0)$ i tada ukupni proces šteta poprima najveću vrijednost do tog trenutka, vrijednost l_1. Budući da složeni Poissonov proces ima stacionarne i nezavisne priraste, vjerojatnost da ukupni proces dosegne novu najveću vrijednost je opet $\psi(0)$, jer je to događaj da $U(t)$ poprimi vrijednost manju od $u - l_1$, npr. $u - l_1 - l_2$. Sada je nova najveća vrijednost $l_1 + l_2$. Analogno nastavljamo dalje i uočimo da je vjerojatnost da najveća vrijednost ukupnog procesa šteta poraste n puta

$$\psi(0)^n \phi(0) \tag{2.17}$$

za $n \in \mathbb{N}_0$. Uočimo da je to funkcija gustoće geometrijske razdiobe. Maksimum ukupnog procesa gubitka L je suma prirasta najvećih vrijednosti procesa, pa je

$$L = \sum_{i=1}^{N} L_i \tag{2.18}$$

gdje je N broj prirasta najveće vrijednosti ukupnog procesa gubitka, a L_i vrijednost i-tog porasta najveće vrijednosti ukupnog procesa gubitka,te su L_i nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable. Dakle, L je složena geometrijska slučajna varijabla. Neka je K funkcija distribucije slučajne varijable L_1, te k pripadna funkcija gustoće. Neka je sada $L^*(s)$ Laplaceova transformacija slučajne varijable L,

$$\begin{aligned} L^*(s) = \mathbb{E}[e^{-sL}] &= \int_0^\infty e^{-su} d\psi(u) \\ &= \psi(0) + \int_0^\infty e^{-su} (\frac{d}{du}\psi(u)) du \ . \end{aligned} \tag{2.19}$$

Integral u gornjoj jednadžbi je Laplaceova transformacija od $\frac{d}{du}\psi(u)$ pa je po (1.5)

$$\begin{aligned} L^*(s) &= \psi(0) - s\psi^*(s) - \psi(0) \\ &= s\psi^*(s) \\ &= \frac{sc\psi(0)}{cs - \lambda(1 - f^*(s))} \ . \end{aligned} \tag{2.20}$$

Iz formule (2.19) slijedi

$$L^*(s)|_{s=0} = \mathbb{E}[e^{-sL}]|_{s=0} = 1 \ , \tag{2.21}$$

a iz formule (2.20) korištenjem L'Hopitalovog pravila slijedi

$$\begin{aligned} L^*(s)|_{s=0} &= \lim_{s\to 0} \frac{sc\psi(0)}{cs - \lambda(1 - f^*(s))} \\ &= \frac{c\psi(0)}{c - \lambda \frac{d}{ds} f^*(s)|_{s=0}} \ . \end{aligned} \tag{2.22}$$

Izračunajmo

$$\frac{d}{ds} f^*(s)|_{s=0} = -\int_0^\infty y e^{-sy} f(y) dy|_{s=0} = -m_1 \ .$$

Sada izjednačavanjem (2.21) i (2.22) dobivamo

$$1 = \frac{c\psi(0)}{c - \lambda m_1}$$

tj.

$$\psi(0) = 1 - \frac{\lambda m_1}{c} \ . \tag{2.23}$$

Uočimo da smo sada izveli formulu za $\psi(0)$ bez korištenja pretpostavke da Lundbergova nejednakost vrijedi. S druge strane,

$$\mathbb{E}[e^{-sL}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{-sL}|N]] \ . \tag{2.24}$$

Računamo

$$\mathbb{E}[e^{-sL}|N = n] = \mathbb{E}[exp(-s \sum_{i=1}^{n} L_i)] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[exp(-sL_i)]$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz nezavisnosti slučajnih varijabli L_i.

$$\mathbb{E}[exp(-sL_i)] = k^*(s)$$

pa je

$$\mathbb{E}[e^{-sL}|N = n] = k^*(s)^n \ .$$

Uvrstimo dobiveno u jednadžbu (2.24), i dobivamo

$$\mathbb{E}[e^{-sL}] = \mathbb{E}[k^*(s)^N] \ .$$

Jer je L složena geometrijska razdioba, slijedi da je

$$\mathbb{E}[e^{-sL}] = \frac{\phi(0)}{1 - \psi(0)k^*(s)} \ . \tag{2.25}$$

Izjednačavanjem (2.25) s (2.22) i dijeljenjem sa $\phi(0)$ slijedi

$$1 - \psi(0)k^*(s) = \frac{cs - \lambda(1 - f^*(s))}{cs} \ .$$

Iz jednadžbe (2.23) uvrstimo izraz za $\psi(0)$, te dobivamo

$$-\frac{\lambda m_1}{c}k^*(s) = \frac{-\lambda(1 - f^*(s)}{cs}$$

i skraćivanjem slijedi

$$k^*(s) = \frac{1 - f^*(s)}{sm_1} \ .$$

Sada, invertirajući Laplaceovu transformaciju dobivamo

$$k(x) = \frac{1}{m_1}(1 - F(x))$$

iz čega slijedi da su L_i neprekidne slučajne varijable (jer su X_i neprekidne).

Primjer 2.5.1. *Uz pretpostavku da svi momenti postoje, nađimo* $\mathbb{E}[L_1^r]$, $r \in \mathbb{N}$. *Budući da je* $k(x) = \frac{1}{m_1}(1 - F(x))$, *slijedi da je*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L_1^r] &= \frac{1}{m_1}\int_0^\infty x^r(1 - F(x))dx \\ &= \frac{1}{m_1}\int_0^\infty x^r \int_x^\infty f(y)dydx \ . \end{aligned}$$

Zamjenom integrala dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L_1^r] &= \frac{1}{m_1}\int_0^\infty f(y)\int_0^y x^r dxdy \\ &= \frac{1}{m_1}\int_0^\infty f(y)\frac{1}{r+1}y^{r+1}dy \\ &= \frac{m_{r+1}}{(r+1)m_1} \ . \end{aligned}$$

Sada definiramo slučajne varijable

$$L_\alpha = \sum_{i=1}^{N} L_{\alpha,i} \tag{2.26}$$

gdje je N broj prirasta najveće vrijednosti ukupnog procesa gubitka, $(L_{\alpha,i})_{i=1}^{\infty}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s funkcijom distribucije K_α i pripadnom funkcijom gustoće

$$k_{\alpha,x} = K(x+1) - K(x)$$

za $x = 0, 1, 2, \ldots$, gdje je $K(x) = \mathbb{P}[L_1 \leq x]$ te

$$L_\beta = \sum_{i=1}^{N} L_{\beta,i} \tag{2.27}$$

gdje je N broj prirasta najveće vrijednosti ukupnog procesa gubitka, $(L_{\beta,i})_{i=1}^{\infty}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s funkcijom distribucije K_β i pripadnom funkcijom gustoće

$$k_{\beta,x} = K(x) - K(x-1)$$

za $x \in \mathbb{N}$.
Iz definicije K_α i K_β dobivamo

$$K_\alpha(u) \geq K(u) \geq K_\beta(u)$$

iz čega slijedi

$$K_\alpha^{n*}(u) \geq K^{n*}(u) \geq K_\beta^{n*}(u)\ .$$

Iz formule (1.12) slijedi

$$\begin{aligned}\phi(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n) K^{n*}(u) \\ &= \phi(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi(0)^n \phi(0) K^{n*}(u)\ .\end{aligned}$$

Neka je $\phi_\alpha(u) = \mathbb{P}(L_\alpha \leq u)$ i $\phi_\beta(u) = \mathbb{P}(L_\beta \leq u)$ pa je

$$\psi_\alpha(u) \geq \psi(u) \geq \psi_\beta(u)$$

te zato što su L_α i L_β diskretne slučajne varijable

$$\mathbb{P}(L_\alpha < u) \geq \mathbb{P}(L < u) \geq \mathbb{P}(L_\beta < u)$$

pa je za $u > 0$

$$\mathbb{P}(L_\beta \leq u) \leq \phi(u) \leq \mathbb{P}(L_\alpha < u)\ .$$

Iz formule (2.25) slijedi

$$\phi_\alpha(0) = \frac{\phi(0)}{1-\psi(0)k_{\alpha,0}}$$

pa je po formuli (1.21) za $u = 1, 2, 3, \ldots$

$$\phi_\alpha(u) = \phi_\alpha(0) + \frac{q}{1-qk_{\alpha,0}} \sum_{j=1}^{u} k_{\alpha,j}\phi_\alpha(u-j)$$

odnosno, ako uvrstimo $q = \psi(0)$, te izraz za $\phi_\alpha(0)$ slijedi

$$\phi_\alpha(u) = \frac{\phi(0)}{1-\psi(0)k_{\alpha,0}} + \frac{\psi(0)}{1-\psi(0)k_{\alpha,0}} \sum_{j=1}^{u} k_{\alpha,j}\phi_\alpha(u-j)\ . \tag{2.28}$$

Iz definicije ϕ_β slijedi $\phi_\beta(0) = \phi(0)$ pa je po formuli (1.21) za $u = 1, 2, 3, \ldots$

$$\phi_\beta(u) = \phi(0) + \psi(0) \sum_{j=1}^{u} k_{\beta,j}\phi_\beta(u-j)\ . \tag{2.29}$$

Želimo aproksimirati vjerojatnost propasti u konačnom i beskonačnom vremenu. Prisjetimo se formule

$$\begin{aligned}\psi(u,t) &= \mathbb{P}(U(s) < 0;\ \text{za neki } s, 0 \le s \le t) \\ &= \mathbb{P}(u + cs - \sum_{i=1}^{N(s)} X_i < 0;\ \text{za neki } s, 0 \le s \le t)\ .\end{aligned} \tag{2.30}$$

Bez smanjenja općenitosti stavimo $\lambda = m_1 = 1$. Za $i = 1, 2, 3, \ldots$ neka je $X_{1,i}$ diskretna slučajna varijabla distribuirana na $0, 1/\beta, 2/\beta, \ldots$, $\beta > 0$ takva da je $X_{1,i}$ dobra aproksimacija za X_i. Definiramo

$${}_1\psi(u,t) = \mathbb{P}(u + (1+\theta)s - \sum_{i=1}^{N(s)} X_{1,i} < 0 \text{ za neki } s, 0 \le s \le t)$$

gdje je θ koeficijent usrednjenja, tj. koeficijent takav da vrijedi $c = (1+\theta)\lambda m_1$. Tada je ${}_1\psi(u,t)$ dobra aproksimacija za $\psi(u,t)$. Sada, za $i = 1, 2, 3, \ldots$ definiramo $X_{2,i} = \beta X_{1,i}$ i

$${}_2\psi(u,t) = \mathbb{P}(u + (1+\theta)\beta s - \sum_{i=1}^{N(s)} X_{2,i} < 0;\ \text{za neki } s, 0 \le s \le t)\ . \tag{2.31}$$

Uočimo da je ${}_2\psi(\beta u, t) = {}_1\psi(u, t)$. Nadalje, stavimo neka je Poissonov parametar $\dfrac{1}{(1+\theta)\beta}$, pa je dohodak po premiji po jednici vremena jednak jedan, pa dobivamo

$$
{}_3\psi(u, t) = \mathbb{P}(u + s - \sum_{i=1}^{N^*(s)} X_{2,i} < 0;\ \text{za neki } s, 0 \le s \le t) \tag{2.32}
$$

gdje za fiksni s, $N^*(s)$ ima Poissonovu distribuciju s očekivanjem $\dfrac{s}{(1+\theta)\beta}$. Tada je ${}_3\psi(u, (1+\theta)\beta t) = {}_2\psi(u, t)$ pa je $\psi(u, t) \approx {}_3\psi(u\beta, (1+\theta)\beta t)$, pa je ${}_3\psi(u, t)$ vjerojatnost propasti u neprekidnom vremenu. Nadalje, neka je

$$
\psi_d(u, t) = \mathbb{P}(u + n - \sum_{i=1}^{n} Z_i < 0 \text{ za neki } n, n = 1, 2, \ldots, t) \tag{2.33}
$$

gdje je Z_i ukupni iznos štete u i-tom intervalu. Kada Z_i ima složenu Poissonovu distribuciju s parametrom $\dfrac{1}{(1+\theta)\beta}$ i individualni iznosi šteta su distribuirani kao $X_{2,i}$, jednadžba (2.33) je diskretna vjerojatnost propasti kao što je jednadžba (2.32) bila neprekidna vjerojatnost propasti.

Poglavlje 3

De Vylderova aproksimacija

3.1 De Vylderova (eksponencijalna) aproksimacija

Osim numeričkih metoda, željeli bismo imati još neki način aproksimacije vjerojatnosti propasti. Jednu jednostavnu aproksimaciju dao je De Vylder, te je po njemu ta aproksimacija nazvana De Vylderova aproksimacija. Glavna ideja je aproksimirati proces rizika procesom $(\widetilde{U}(t))_{t\geq 0}$ koji zadovoljava sljedeće pretpostavke:

1. $\widetilde{U}(0) = u$
2. Poissonov parametar je λ
3. premija po jedinici vremena je $\widetilde{c}$
4. individualni iznosi šteta imaju eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\widetilde{\alpha}$, tj. $\widetilde{F}(x) = 1 - \exp(-\widetilde{\alpha}x), x \geq 0$.

Zbog četvrte pretpostavke De Vylderova aproksimacija se ponekad zove i eksponencijalna aproksimacija. Po formuli (2.13) slijedi da je vjerojatnost propasti za proces $(\widetilde{U}(t))_{t\geq 0}$

$$\frac{\widetilde{\lambda}}{\widetilde{\alpha}\widetilde{c}} \exp(-(\widetilde{\alpha} - \widetilde{\lambda}/\widetilde{c})u) \ . \tag{3.1}$$

Parametre $\widetilde{\lambda}, \widetilde{c}$ i $\widetilde{\alpha}$ biramo izjednačavajući momente, tj. iz formula

$$\mathbb{E}[U(t)] = \mathbb{E}[\widetilde{U}(t)],\ \mathbb{E}[S(t)^2] = \mathbb{E}[\widetilde{S}(t)^2],\ \mathbb{E}[S(t)^3] = \mathbb{E}[\widetilde{S}(t)^3]$$

pa je za De Vylderovu aproksimaciju nužno da postoje prva tri momenta varijabla X_i. Iz prve formule dobivamo

$$u + ct - \lambda m_1 t = u + \widetilde{c}t - \frac{\widetilde{\lambda}t}{\widetilde{\alpha}}$$

jer za eksponencijalnu razdiobu vrijedi $\mathbb{E}[X^k] = \frac{k!}{\alpha^k}$, $k \in \mathbb{N}$. Izraz za $\widetilde{c}$ glasi

$$\widetilde{c} = c - \lambda m_1 + \frac{\widetilde{\lambda}}{\widetilde{\alpha}} \ . \tag{3.2}$$

Iz $\mathbb{E}[S(t)^2] = \mathbb{E}[\widetilde{S}(t)^2]$ dobivamo

$$\lambda m_2 = \frac{2\widetilde{\lambda}}{\widetilde{\alpha}^2}, \tag{3.3}$$

a iz jednadžbe $\mathbb{E}[S(t)^3] = \mathbb{E}[\widetilde{S}(t)^3]$ dobivamo

$$\lambda m_3 = \frac{6\widetilde{\lambda}}{\widetilde{\alpha}^3} \ . \tag{3.4}$$

Rješavanjem sustava jednadžbi (3.3) i (3.4) slijedi da je

$$\widetilde{\alpha} = \frac{3m_2}{m_3} \ i \ \widetilde{\lambda} = \frac{9\lambda m_2^3}{2m_3^2} \ . \tag{3.5}$$

Sada dobiveno uvrstimo u formulu (3.1):

$$\widetilde{c} = c - \lambda m_1 + \frac{3\lambda m_2^2}{2m_3}. \tag{3.6}$$

Za izračunati De Vylderovu aproksimaciju, dobiveno se uvrsti u formulu (3.1).
U situacijama kada prilagođeni koeficijent procesa rizika kojeg aproksimiramo postoji, aproksimacija daje dobre rezultate kada je vjerojatnost propasti mala, npr. manja od 5%. No, aproksimacija nije dobra za male vrijednosti od u, npr. kada je $u = 0$, no to se u praksi i rijetko događa jer je za male u vjerojatnost propasti velika. Također, metoda nije precizna ni kada prilagođeni koeficijent ne postoji.

Primjer 3.1.1. *Promatramo klasični proces rizika s individualnim iznosima šteta $X_i = X$ čija je gustoća*

$$f(x) = \frac{1}{2}(2\exp(-2x) + \frac{2}{3}\exp(-\frac{2x}{3}))$$

za $x \geq 0$. Pretpostavimo da je $\lambda = 1$ i $c = 1.1\lambda$. Nađimo De Vylderovu aproksimaciju $\psi_{DV}(u)$ za $u = 0, 10, 20, \ldots, 50$.
Izračunajmo prvo momente individualnih iznosa šteta. Ako stavimo da je Y_1 slučajna varijabla s funkcijom gustoće $y_1 = 2\exp(-2x)$, i Y_2 slučajna varijabla s funkcijom gustoće $y_2 = \frac{2}{3}\exp(-\frac{2x}{3})$ tada zbog linearnosti matematičkog očekivanja vrijedi

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}(\mathbb{E}[Y_1] + \mathbb{E}[Y_2]) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}) = 1$$

jer su Y_1 i Y_2 eksponencijalno distribuirane s parametrima 2 i $\frac{2}{3}$, respektivno. Nadalje,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^k] &= \int_0^\infty x^k \frac{1}{2}(2\exp(-2x) + \frac{2}{3}\exp(-\frac{2x}{3}))dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty x^k(2\exp(-2x) + \frac{2}{3}\exp(-\frac{2x}{3}))dx \\ &= \frac{1}{2}(\mathbb{E}[Y_1^k] + \mathbb{E}[Y_2^k])\end{aligned}$$

$k \in \mathbb{N}$ gdje smo u zadnjoj jednakosti koristili linearnost integrala. Slijedi da je

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{2}(\frac{2}{4} + \frac{2}{(\frac{2}{3})^2}) = \frac{5}{2}$$

$$\mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{2}(\frac{6}{8} + \frac{6}{\frac{8}{27}}) = \frac{21}{2} \ .$$

Po formuli (3.5) uz $\lambda = 1$ slijedi

$$\widetilde{\alpha} = \frac{3 * (\frac{5}{2})}{\frac{21}{2}} = \frac{5}{7} \ i \ \widetilde{\lambda} = \frac{9(\frac{5}{2})^2}{2(\frac{21}{2})^2} = \frac{125}{196} \ ,$$

a po formuli (3.2) uz $\lambda = 1$ i $c = 1.1\lambda$ slijedi

$$\widetilde{c} = 1.1 - 1 + \frac{\frac{125}{196}}{\frac{5}{7}} = 0.1 + \frac{25}{28} \ .$$

Sada dobiveno uz $u = 0$ uvrstimo u formulu (3.1) i dobivamo

$$\psi_{DV}(0) = \frac{125}{196}\frac{1}{\frac{5}{7}(0.1 + \frac{25}{28})} = 0.8993 \ .$$

Izračunajmo sada i egzaktnu vrijednost od $\psi(u) = 1 - \phi(u)$. Može se pokazati da za individualne iznose šteta koji imaju distribuciju zbroja dvije eksponencijalne distribucije, s težinama q i $1-q$, čiji su parametri α i β, vrijedi sljedeća formula za vjerojatnost propasti

$$\psi(u) = \frac{1}{(1+\theta)(r_2 - r_1)}[(\rho - r_1)\exp(-r_1 u) + (r_2 - p)\exp(-r_2 u)]^{1/2}$$

gdje su

$$r_1 = \frac{\rho + \theta(\alpha+\beta) - [(\rho + \theta(\alpha+\beta))^2 - 4\alpha\beta\theta(1+\theta)]^{1/2}}{2(1+\theta)} \ ,$$

$$r_2 = \frac{\rho + \theta(\alpha+\beta) + [(\rho + \theta(\alpha+\beta))^2 - 4\alpha\beta\theta(1+\theta)]^2}{2(1+\theta)} \ ,$$

$$p = \frac{q\alpha^{-1}}{q\alpha^{-1}r(1-q)\beta^{-1}}$$

i

$$\rho = \alpha(1-p) + \beta p \ .$$

Uz $\theta = 0.1$, $\alpha = 2$, $\beta = \frac{2}{3}$ *i* $q = 1 - q = \frac{1}{2}$ *računanjem slijedi* $\psi(0) = 0.9091$, *te nadalje*

$$\begin{aligned} \psi_{DV}(10) &= 0.4380 \ i \ \psi(10) = 0.4377 \ , \\ \psi_{DV}(20) &= 0.2133 \ i \ \psi(20) = 0.2132 \ , \\ \psi_{DV}(30) &= 0.1039 \ i \ \psi(30) = 0.1039 \ , \\ \psi_{DV}(40) &= 0.0506 \ i \ \psi(40) = 0.0506 \ , \\ \psi_{DV}(10) &= 0.0246 \ i \ \psi(10) = 0.0247 \ . \end{aligned}$$

Uočimo da se u ovom primjeru može uočiti kako De Vylderova aproksimacija daje jako dobre rezultate kada su individualni iznosi šteta mješovito eksponencijalno distribuirani, te da za $u = 0$ metoda nije toliko precizna kao za veće u, kao što je već spomenuto.

3.2 4MGDV aproksimacija

S obzirom da De Vylderova aproksimacija u nekim slučajevima ne daje precizne rezultate, Burnecki, Mišta i Weron (vidi [2]) su predložili novu aproksimaciju, 4MGDV (4-moment gamma De Vylder) aproksimaciju koja je zapravo prilagođena De Vylderova aproksimacija. Kod ove aproksimacije se zahtjeva da postoje prva četiri momenta procesa individualnih isplata šteta, te se pretpostavlja da je distribucija individualnih isplata šteta gama. Proces rizika s gama distribuiranim individualnim štetama je određen s četiri parametara $(\widetilde{\lambda}, \ \widetilde{\theta}, \ \widetilde{\mu}, \ \widetilde{\mu}_2)$ gdje je $\widetilde{\lambda}$ parametar Poissonovog procesa, $\widetilde{\theta}$ koeficijent usrednjenja, $\widetilde{\mu}$ i $\widetilde{\mu}_2$ momenti procesa kojeg aproksimiramo. Koeficijente opet dobivamo izjednačavanjem momenata odgovarajućih procesa gubitka $L(t) = S(t) - ct$.
Može se pokazati da je

$$M_{S(t)}(u) = e^{\lambda t[M_{X_1}(u)-1]} \ ,$$

te

$$\mathbb{E}[S(t)^r] = \frac{d^r}{du^r} M_{S(t)}(u)|_{u=0} \ ,$$

pa je

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S(t)] &= \frac{d}{du}M_{S(t)}(u)|_{u=0} = \lambda t M'_{X_1}(u)M_{S(t)}(u)|_{u=0} \\ &= \lambda t m_1\end{aligned} \tag{3.7}$$

jer je $M_{S(t)}(u)|_{u=0} = 1$, a uz $c = \lambda m_1(1+\theta)$ slijedi

$$\mu_1 = \mathbb{E}[S(t) - ct] = \lambda t m_1 - \lambda m_1(1+\theta)t = -\theta\lambda t m_1 \; . \tag{3.8}$$

Nadalje, $\mathbb{E}[L(t)^2] = \mathbb{E}[S(t)^2] - 2\mathbb{E}[S(t)]ct + (ct)^2$, pa računamo $\mathbb{E}[S(t)^2]$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S(t)^2] &= \frac{d}{du}(\lambda t M'_{X_1}(u)M_{S(t)}(u))|_{u=0} \\ &= \lambda t[M''_{X_1}(u)M_{S(t)}(u) + M'_{X_1}(u)M'_{S(t)}(u)] \\ &= \lambda t m_2 + (\lambda t m_1)^2\end{aligned} \tag{3.9}$$

pa uz c kao gore dobivamo

$$\begin{aligned}\mu_2 = \mathbb{E}[L(t)^2] &= \lambda t m_2 + (\lambda t m_1)^2 - 2\lambda m_1 c t^2 + (ct)^2 \\ &= \lambda t m_2 + (\theta t \lambda m_1)^2 \; .\end{aligned} \tag{3.10}$$

Analogno dalje slijedi

$$\mu_3 = \mathbb{E}[L(t)^3] = \lambda m_3 t - 3(\lambda m_2 t)(\theta\lambda m_1 t) - (\theta\lambda m_1 t)^2 \tag{3.11}$$

i

$$\begin{aligned}&\mu_4 = \mathbb{E}[L(t)^4] = \\ &\quad \lambda m_4 t - 4(\lambda m_3 t)(\theta\lambda m_1 t) + 3(\lambda m_2 t)^2 + 6(\lambda m_2 t)(\theta\lambda m_1 t)^2 + (\theta\lambda m_1 t)^4 \; .\end{aligned} \tag{3.12}$$

Iz dobivenih jednadžbi uočimo da je izjednačavanje odgovarajućih momenata procesa gubitka ekvivalentno izjednačavanju odgovarajućih momenata procesa ukupnih šteta. Za gama distribuciju vrijedi da se treći i četvrti momenti mogu izraziti pomoću prethodnih na sljedeći način:

$$\widetilde{\mu}_3 = \frac{\widetilde{\mu}_2}{\widetilde{\mu}^2}(2\widetilde{\mu}_2 - \widetilde{\mu}) \text{ i } \widetilde{\mu}_4 = \frac{\widetilde{\mu}_2}{\widetilde{\mu}^2}(2\widetilde{\mu}_2 - \widetilde{\mu}^2)(3\widetilde{\mu}_2 - 2\widetilde{\mu}^2) \; . \tag{3.13}$$

Dakle, parametri $(\widetilde{\lambda},\ \widetilde{\theta},\ \widetilde{\mu},\ \widetilde{\mu}_2)$ moraju zadovoljavati sljedeće jednadžbe

$$\begin{aligned}\theta\lambda\mu &= \widetilde{\theta}\widetilde{\lambda}\widetilde{\mu} \\ \lambda\mu_2 &= \widetilde{\lambda}\widetilde{\mu}_2 \\ \lambda\mu_3 &= \widetilde{\lambda}\frac{\widetilde{\mu}_2}{\widetilde{\mu}^2}(2\widetilde{\mu}_2 - \widetilde{\mu}) \\ \lambda\mu_4 &= \widetilde{\lambda}\frac{\widetilde{\mu}_2}{\widetilde{\mu}^2}(2\widetilde{\mu}_2 - \widetilde{\mu}^2)(3\widetilde{\mu}_2 - 2\widetilde{\mu}^2)\end{aligned} \tag{3.14}$$

Rješavanjem sustava jednadžbi (3.14) dobivamo izraze za parametre kako slijedi

$$\begin{aligned}
\widetilde{\lambda} &= \frac{\lambda(\mu_3)^2(\mu_2)^3}{(\mu_2\mu_4 - 2(\mu_3)^2)(2\mu_2\mu_4 - 3(\mu_3)^2)} \\
\widetilde{\theta} &= \frac{\theta\mu(2(\mu_3)^2 - \mu_2\mu_4)}{(\mu_2)^2\mu_3} \\
\widetilde{\mu} &= \frac{2(\mu_3)^2 - 2\mu_2\mu_4}{\mu_2\mu_3} \\
\widetilde{\mu_2} &= \frac{(\mu_2\mu_4 - 2(\mu_3)^2)(2\mu_2\mu_4 - 3(\mu_3)^2)}{(\mu_2\mu_3)^2} \ .
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Da bismo osigurali da je $\widetilde{\mu}$, $\widetilde{\mu}_2 \geq 0$ i $\widetilde{\mu}_2 \geq \widetilde{\mu}^2$ trebamo pretpostaviti $\widetilde{\mu}_2\widetilde{\mu}_4 \leq \frac{3}{2}(\mu_3)^2$ i $\widetilde{\mu}_2\widetilde{\mu}_4 \geq \frac{1}{2}(\mu_3)^2$. Ukoliko to nije ispunjeno, stavimo $\widetilde{\mu} = \mu$ i ne računamo četvrti moment. U tom slučaju sličnim računom kao gore dobivamo parametre

$$\widetilde{\lambda} = \frac{2\lambda\mu_2^2}{\mu(\mu_3 + \mu_2\mu)} \ ,$$

$$\widetilde{\theta} = \frac{\theta\mu(\mu_3 + \mu_2\mu)}{2\mu_2^2} \ ,$$

$$\widetilde{\mu} = \mu \ ,$$

$$\widetilde{\mu}_2 = \frac{\mu(\mu_3 + \mu_2\mu)}{2\mu_2} \ .$$

Može se pokazati da je uz takve parametre $(\widetilde{\lambda},\ \widetilde{\theta},\ \widetilde{\mu},\ \widetilde{\mu}_2)$ 4MGVD aproksimacija jednaka

$$\psi_{4MGDV}(u) = \frac{\widetilde{\theta}(1 - \frac{R}{\widetilde{\alpha}})exp(-\frac{\widetilde{\beta}R}{\widetilde{\alpha}}u)}{1 + (1 + \widetilde{\theta})R - (1 + \widetilde{\theta})(1 - \frac{R}{\widetilde{\alpha}})} + \frac{\widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}sin(\widetilde{\alpha}\pi)}{\pi}I \tag{3.16}$$

gdje je

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{\widetilde{\alpha}}exp(-(x+1)\widetilde{\beta}u)dx}{[x^{\widetilde{\alpha}}(1 + \widetilde{\alpha}(1 + \widetilde{\theta})(x+1)) - cos(\widetilde{\alpha}\pi)]^2 + sin^2(\widetilde{\alpha}\pi)} \tag{3.17}$$

uz $\widetilde{\alpha} = \frac{\widetilde{\mu}^2}{\widetilde{\mu}_2 - \widetilde{\mu}^2}$, $\widetilde{\beta} = \frac{\widetilde{\mu}}{\widetilde{\mu}_2 - \widetilde{\mu}^2}$. U slučaju kada su individualni iznosi šteta gama ili eksponencijalno distribuirani, ova aproksimacija daje egzaktne rezultate. U slučaju miješane eksponencijalne razdiobe individualnih iznosa šteta može se pokazati da 4MGDV daje bolje rezultate od De Vylderove (eksponencijalne) razdiobe.
Usporedimo točnost De Vylderove i 4GMDV aproksimacije na sljedećem primjeru.

Primjer 3.2.1. *(Primjer preuzet iz [3]) Promatramo klasični proces rizika s individualnim iznosima šteta $X_i = X$ koji su mješovito distribuirani, s parametrima $\alpha = 1/190744933.98$, $\beta = 1/84535691.61$, težinom $q = 0.78$ i $\theta = 0.3$.*
Egzaktne vrijednosti su dane u sljedećoj tablici

u	0	10^7	10^8	10^9	10^{10}
$\psi(u)$	0.76923077	0.75872977	0.67258748	0.21205921	0.00000214

Tablica 3.1: Tablica egzaktnih vrijednosti vjerojatnosti propasti kada su individualne štete mješovito eksponencijalno distribuirane s parametrima $\alpha = 1/190744933.98$, $\beta = 1/84535691.61$, $q = 0.78$ i $\theta = 0.3$.

Uočimo da je za početni kapital $u = 10^7$ vjerojatnost propasti približno ista kao u slučaju kada početnog kapitala nema. Značajno se smanjuje tek za $u = 10^9$. Sada ćemo dati rezultate De Vylderove aproksimacije za isti proces u sljedećoj tablici.

u	0	10^7	10^8	10^9	10^{10}
$\psi(u)$	0.76308137	0.75337907	0.67142556	0.21224673	0.00000211

Tablica 3.2: Tablica aproksimativnih vrijednosti dobivenih De Vylderovom aproksimacijom vrijednosti vjerojatnosti propasti kada su individualne štete mješovito eksponencijalno distribuirane s parametrima $\alpha = 1/190744933.98$, $\beta = 1/84535691.61$, $q = 0.78$ i $\theta = 0.3$.

Opet vidimo da De Vylderova aproksimacija daje jako dobre rezultate u slučaju kada su individualni iznosi šteta mješovito eksponencijalno distribuirani. Napokon, u sljedećoj tablici dane su aproksimativne vrijednosti dobivene 4MGDV distribucijom.

u	0	10^7	10^8	10^9	10^{10}
$\psi(u)$	0.76746161	0.75702255	0.67221498	0.21209805	0.00000213

Tablica 3.3: Tablica aproksimativnih vrijednosti vjerojatnosti propasti dobivenih 4MGDV aproksimacijom kada su individualne štete mješovito eksponencijalno distribuirane s parametrima $\alpha = 1/190744933.98$, $\beta = 1/84535691.61$, $q = 0.78$ i $\theta = 0.3$.

Uočavamo da 4MGDV aproksimacija također daje dobre rezultate. Također uočimo da 4GMDV aproksimacija daje bolje rezultate od De Vylderove aproksimacije za slučaj kada su individulani iznosi šteta mješovito eksponencijalno distribuirani, kao što je već spomenuto, iako De Vylderova aproksimacija daje egzaktne rezultate za eksponencijalno distribuirane štete.

Bibliografija

[1] D. M. C. Dickson. *Insurance risk and ruin.* Cambridge University Press, 2005.

[2] A. Weron K. Burnecki, P. Místa. *A new gamma type approximation of the ruin probability*, volume 36. Acta Physica Polonica B, 2005.

[3] K. Burnecki P. Místa. *Ruin probabilities in infinite time.* Hugo Steinhaus Center, Wroclaw University of Technology-Poland, 2005.

[4] H. Schmidli. *Lecture Notes on Risk Theory.* Institute of Mathematics, University of Cologne, 1996.

Sažetak

U ovom radu smo promatrali Cramér-Lundbergov model u teoriji rizika. On se sastoji od pretpostavke da je proces isplata šteta složen Poissonov. U prvom poglavlju smo definirali složeni Poissonov proces, te smo dali još neke definicije i izvode koje kasnije koristimo. Definirali smo proces dobitka kao razliku zbroja početnog kapitala i premija te isplata šteta do trenutka t. Izveli smo formulu za vjerojatnost da taj proces bude manji od 0 u nekom trenutku t, te dali gornju ogradu za tu vjerojatnost. Uz vjerojatnost propasti, definirali smo i vjerojatnost preživljenja. S obzirom da se u nekim slučajevima formula za vjerojatnost propasti ne može eksplicitno izračunati, izveli smo i neke aproksimacije vjerojatnosti propasti. U trećem poglavlju smo definirali dvije aproksimacije, De Vylderovu aproksimaciju i 4MGDV aproksimaciju. U slučaju De Vylderove aproksimacije, vidjeli smo da u slučaju eksponencijalno distribuiranih šteta aproksimacija daje egzaktne rezultate. Također smo istaknuli da 4MGDV aproksimacija daje bolje rezultate od De Vylderove aproksimacije.

Summary

In this study we observed the Cramér-Lundberg model in the theory of risk. It consists of the assumption that the aggregate claims process is a compound Poisson process. In the first chapter we defined a compound Poisson process, and gave relevant definitions and extracts that we would later use. We defined a surplus process as opposed to the sum of the insurer's surplus at time 0 and the insurer's rate of premium income per unit time and aggregate claims at time t. We deduced a formula for the probability that the surplus process is less than 0 at some time t, and gave an upper bound for that probability. In addition to the ruin probability, we also defined the survival probability. Since in some cases the formula for the probability of ruin can not be explicitly calculated, we established some approximations thereof. In the third chapter, we define two approximations, the De Vylder approximation and the 4MGDV approximation. In case of exponentially distributed individual claim amounts, we observed that the De Vylder approximation gives exact results. We also concluded that the 4MGDV approximation gives better results than the De Vylder approximations.

Životopis

Rođena sam 03. lipnja 1989. godine u Zagrebu, gdje sam i pohađala OŠ Šestine. Nakon osnovne škole, 2004. upisujem VII. gimnaziju, koju završavam 2008.godine. Te iste godine sam upisala preddiplomski studij Matematika na PMF Matematičkom odsjeku u Zagrebu. Preddiplomski studij sam završila 2012. godine, te sam te iste godine upisala diplomski studij Financijska i poslovna matematika, također na PMF matematičkom odsjeku.