

# Feuerbachova točka

---

**Mihalic, Maja**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2015**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:910999>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-27**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Maja Mihalic

**FEUERBACHOVA TOČKA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc. dr. sc. Mea Bombardelli

Zagreb, srpanj, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Osnovni teoremi i pojmovi</b>	<b>2</b>
1.1 Feuerbachova kružnica . . . . .	2
1.2 Kut između tangente i tetive . . . . .	4
1.3 Izogonalno konjugirane točke . . . . .	5
1.4 Orijentirani kutovi . . . . .	8
<b>2 Teorem o Feuerbachovoj točki</b>	<b>11</b>
<b>3 Svojstva Feuerbachove točke</b>	<b>25</b>
3.1 Feuerbachova točka kao anti-Steinerova točka . . . . .	25
3.2 Feuerbachova točka kao ortopol . . . . .	37
3.3 Feuerbachova točka kao Ponceletova točka . . . . .	41
3.4 Feuerbachova točka i Eulerova točka simetrije . . . . .	46
<b>4 Generalizacija Feuerbachove točke</b>	<b>57</b>
<b>Bibliografija</b>	<b>70</b>

# Uvod

U ovom radu bavit ćemo se posebnom točkom trokuta čija su bogata svojstva često objekt promatranja u zadacima na matematičkim natjecanjima. To je točka u kojoj se Feuerbachova kružnica i upisana kružnica trokuta diraju, a nosi naziv Feuerbachova točka. Iako su naizgled čini lako za dokazati da se Feuerbachova i upisana kružnica diraju, vidjet ćemo da je potrebno duboko znanje geometrije čiji se dijelovi slažu kao kockice do krajnjeg rezultata. Zato je u prvom poglavlju dan kratak pregled osnovnih teorema i pojmova koji ćemo koristiti tijekom cijelog rada. U drugom poglavlju dan je dokaz teorema o Feuerbachovoj točki.

Treće poglavlje posvećeno je svojstvima Feuerbachove točke. Naravno, za potrebe ovog rada odabrano je samo nekoliko od brojnih svojstava te točke. U tom ćemo poglavlju Feuerbachovu točku povezati s ostalim posebnim točkama u trokutu. Zadnje poglavlje bavi se generalizacijom teorema o Feuerbachovoj točki.

# Poglavlje 1

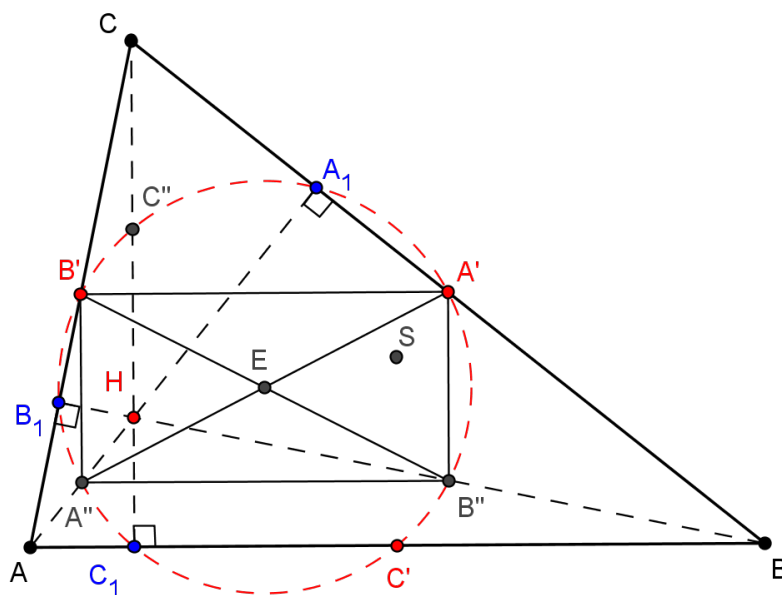
## Osnovni teoremi i pojmovi iz elementarne geometrije

### 1.1 Feuerbachova kružnica

Jedan od ciljeva ovog rada je dokazati da se u svakom trokutu upisana kružnica i Feuerbachova kružnica diraju. Stoga je na početku potrebno navesti osnovne pojmove i teoreme elementarne geometrije na koje ćemo se pozivati tijekom dokaza. Prije svega navedimo teorem iz kojeg proizlazi pojam **Feuerbachove kružnice**.

**Teorem 1.1.** *Neka su u trokutu  $ABC$  točke  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$  polovišta stranica, točke  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$  polovišta dužina  $\overline{AH}$ ,  $\overline{BH}$ ,  $\overline{CH}$ , gdje je  $H$  ortocentar danog trokuta, a točke  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  nožišta visina. Svih devet točaka  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  leže na istoj kružnici čije je središte polovište dužine  $\overline{SH}$ , gdje je  $S$  središte opisane kružnice trokuta  $ABC$ .*

*Dokaz.* Dužina  $\overline{A'B'}$  je srednjica trokuta  $ABC$  pa je  $A'B' \parallel AB$  i  $|A'B'| = \frac{1}{2}|AB|$ . S druge strane dužina  $\overline{A''B''}$  je srednjica trokuta  $ABH$  pa je  $A''B'' \parallel AB$  i  $|A''B''| = \frac{1}{2}|AB|$ . Slijedi  $A'B' \parallel A''B''$  i  $|A'B'| = |A''B''|$ . Dakle, četverokut  $A'B'A''B''$  je paralelogram, pa se dužine  $\overline{A'A''}$  i  $\overline{B'B''}$  raspolavljaju. Neka je  $E$  njihovo sjecište.



Slika 1.1: Teorem 1.1

Kako je  $\overline{A''B'}$  srednjica trokuta  $AHC$ , to je  $A''B' \parallel CH$ , pa je  $A''B' \perp AB$ . Stoga je i  $A''B' \perp A''B''$ , odnosno  $\angle B'A''B'' = 90^\circ$ . Prema tome, četverokut  $A'B'A''B''$  je pravokutnik, pa mu možemo opisati kružnicu  $k$  sa središtem u  $E$  i polumjera  $\frac{1}{2}|A'A''|$ .

Analogno se dokazuje i da je  $A'C'A''C''$  pravokutnik, odnosno da mu možemo opisati kružnicu čije je središte u točki  $E$ , a polumjer  $\frac{1}{2}|A'A''|$ . Dakle, točke  $A', B', C', A'', B''$  i  $C''$  leže na istoj kružnici  $k$ .

Kako je trokut  $A'A''A_1$  pravokutan s hipotenuzom  $\overline{A'A''}$ , to je kružnica  $k$  upravo opisana kružnica tog trokutu. Dakle, točka  $A_1$  također leži na kružnici  $k$ . Analogno se dokazuje i da  $B_1$  i  $C_1$  leže na  $k$ .

Središte kružnice nalazi se na presjeku simetrala tetiva  $\overline{A'A_1}$  i  $\overline{C'C_1}$ , a to su upravo srednjice trapeza  $HSA'A_1$  i  $HSC'C_1$ . Kako ti trapezi imaju zajednički krak  $\overline{SH}$ , to se središte Feuerbachove kružnice podudara s polovištem dužine  $\overline{SH}$ .  $\square$

Kružnica iz teorema 1.1 naziva se **Feuerbachova kružnica** (kružnica devet točaka, Eulerova kružnica) i označava se sa  $k_9$ .

Možemo se pitati zašto jedna kružnica nosi tri različita naziva. Razlog dakako moramo potražiti u povijesti. Njih su detaljno u svom članku opisali Kolar-Begović i Tonković (vidi [12]). Naime, 1765. godine poznati švicarski matematičar Leonhard Euler (1707. – 1783.) dokazao je da polovišta stranica trokuta i nožišta visina, leže na jednoj kružnici. Stoga se u njegovu čast kružnica naziva Eulerova kružnica. Povijesna istraživanja J. S.

MacKaya (1892. godine) otkrila su da postoji nekoliko i to nezavisnih otkrića Eulerove kružnice. Navodno je prvi puta spomenuta u članku Johna Butterwortha 1804. godine u dokazu Bevanova teorma.

Godine 1820. objavljen je članak Brianchona<sup>1</sup> i Ponceleta<sup>2</sup> u kojem se navodi da i polovišta spojnice vrhova i ortocentra trokuta također leže na Eulerovoj kružnici tog trokuta. Štoviše, u njihovom članku prikazan je prvi potpuni dokaz koncikličnosti navedenih devet točaka te se prvi put koristi termin kružnica devet točaka.

Njemački matematičar Karl Wilhelm Feuerbach (1800. – 1834.) je u svojoj 22. godini života dokazao da kružnica koja prolazi nožištima visina trokuta dira sve četiri kružnice koje diraju stranice trokuta, odnosno njihova produženja. Uočimo da se radi o upisanoj kružnici i pripisanim kružnicama trokuta. Dokaz je objavljen 1822. godine u radu *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren*. U tom je radu proučavao značajne točke trokuta i dao niz novih i važnih tvrdnji vezanih za Eulerovu kružnicu. Nakon objave Feuerbachova rada, teorem koji je dokazan u radu postao je poznat pod nazivom Feuerbachov teorem. Eulerova kružnica i Feuerbachov teorem zaintrigirali su mnoge matematičare, pa je objavljen velik broj različitih dokaza. S obzirom na to da su neki autori Feuerbachu pripisivali nezavisno otkriće Eulerove kružnice, u literaturi su koristili termin Feuerbachova kružnica.

Sjetimo se sada još jednog teorema koji se veže uz matematičara Eulera.

**Teorem 1.2.** *Središte  $S$  opisane kružnice, težište  $T$  i ortocentar  $H$  svakog trokuta su kolinearne točke, tj. leže na jednom pravcu. Nadalje,  $|TH| = 2|TS|$ .*

*Dokaz.* Dokaz ovog teorema može se pronaći u navedenoj literaturi (vidi [7], vidi [13])  $\square$

Pravac iz teorema 1.2 naziva se **Eulerov pravac** tog trokuta.

Uočimo da prema teoremu 1.1, središte Feuerbachove kružnice leži na Eulerovom pravcu promatranog trokuta.

## 1.2 Kut između tangente i tetive

U ovom potpoglavlju dokazat ćemo manje poznat, ali koristan teorem. Sjetimo se da je središnji kut nad nekim kružnim lukom jednak dvostrukom kutu nad tim istim lukom te da su svi obodni kutovi nad istim lukom sukkladni.

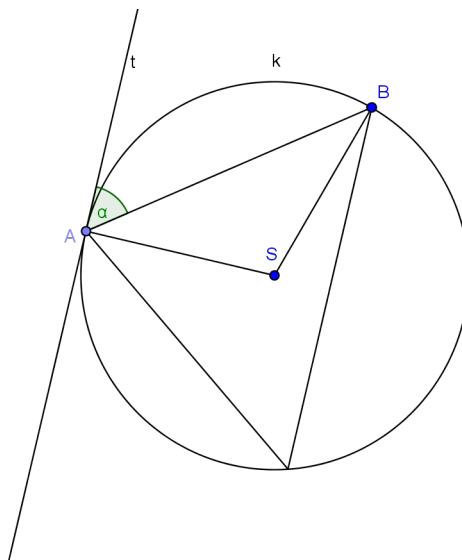
**Teorem 1.3.** *Neka su  $A$  i  $B$  točke na kružnici  $k$  i neka je  $t$  tangenta na kružnicu u točki  $A$ . Kut između tangente  $t$  i tetive  $\overline{AB}$  jednak je obodnom kutu nad tom tetivom.*

<sup>1</sup>Charles Julien Brianchon (1783. – 1864.), francuski matematičar i kemičar

<sup>2</sup>Jean-Victor Poncelet (1788. – 1867.), francuski vojni inženjer i matematičar



*Dokaz.* Neka je  $S$  središte kružnice  $k$ . Označimo s  $\alpha$  kut između tangente  $t$  i tetive  $\overline{AB}$ .



Slika 1.2: Kut tangente  $t$  i tetive  $\overline{AB}$ .

Znamo da je polumjer kružnice okomit na tangentu te kružnice u diralištu. Pa je  $\angle SAB = 90^\circ - \alpha$ . No, trokut  $ASB$  je jednakokračan, pa je:

$$\begin{aligned}\angle ASB &= 180^\circ - 2(90^\circ - \alpha) \\ &= 180^\circ - 180^\circ + 2\alpha = 2\alpha.\end{aligned}$$

Dakle,  $\angle ASB = 2\alpha$ . No, kut  $ASB$  je središnji kut nad tetivom  $\overline{AB}$ , a on je jednak dvostrukom obodnom kutu nad tom tetivom. Slijedi tvrdnja.  $\square$

### 1.3 Izogonalno konjugirane točke

Ovo potpoglavlje donosi teorem s kojim se rijetko koji student matematike susreo. Sama riječ *izogonalno* opisuje simetrije među pravcima koji prolaze kroz vrh danog kuta, a os simetrije je simetrala promatranog kuta.

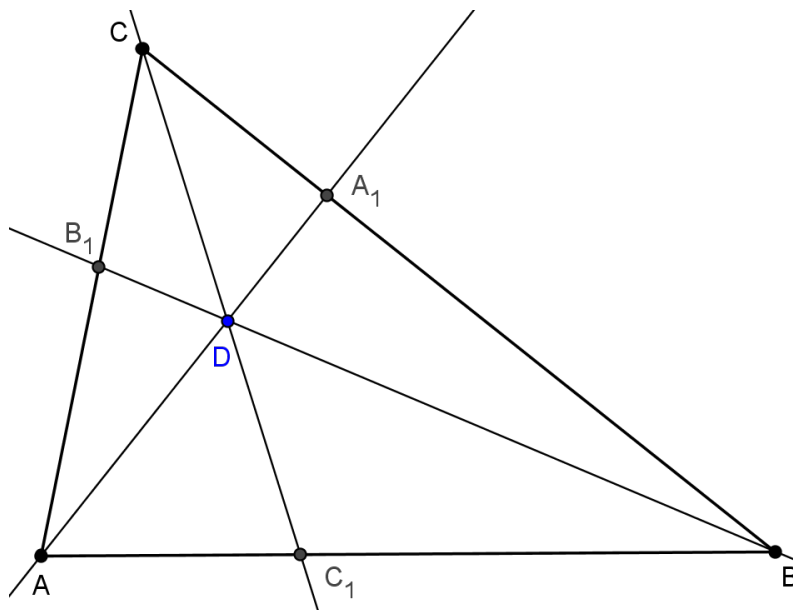
**Teorem 1.4.** *Neka je  $ABC$  trokut i  $P$  točka u ravnini. Pravci simetrični pravcima  $PA$ ,  $PB$  i  $PC$  s obzirom na simetrale kutova trokuta sijeku se u jednoj točki  $P'$ .*

Prije dokaza navedenog teorema sjetimo se tvrdnje teorema poznatog pod nazivom **Cevin teorem**<sup>3</sup>:

<sup>3</sup>Dokazao ga je talijanski matematičar Giovanni Ceva (1647. – 1734.).

**Teorem 1.5.** Neka su  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  točke na stranicama  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  i  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$ , redom. Pravci  $AA_1$ ,  $BB_1$  i  $CC_1$  prolaze jednom točkom ako i samo ako vrijedi:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$



Slika 1.3: Cevin teorem

Ovaj teorem možemo zapisati na drugi način pomoću trigonometrije.

**Teorem 1.6.** Neka su  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  točke na stranicama  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  i  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$ , redom. Pravci  $AA_1$ ,  $BB_1$  i  $CC_1$  prolaze jednom točkom ako i samo ako vrijedi:

$$\frac{\sin(\angle ACC_1)}{\sin(\angle C_1CB)} \cdot \frac{\sin(\angle BAA_1)}{\sin(\angle A_1AC)} \cdot \frac{\sin(\angle CBB_1)}{\sin(\angle B_1BA)} = 1.$$

*Dokaz.* Dovoljno je pokazati da je umnožak omjera duljina iz Cevinog teorema jednak umnošku omjera navedenih sinusa kutova bez obzira na to sijeku li se  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  u jednoj točki ili ne.

Naime, primjenom poučka o sinusima na trokute  $ACC_1$  i  $BCC_1$  dobivamo:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1C|} = \frac{\sin(\angle ACC_1)}{\sin(\angle A)} \quad \text{i} \quad \frac{|CC_1|}{|C_1B|} = \frac{\sin(\angle B)}{\sin(\angle C_1CB)},$$

odnosno

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{\sin(\angle ACC_1)}{\sin(\angle C_1CB)} \cdot \frac{\sin(\angle B)}{\sin(\angle A)}.$$

Slično,

$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{\sin(\angle BAA_1)}{\sin(\angle A_1AC)} \cdot \frac{\sin(\angle C)}{\sin(\angle B)} \quad \text{i} \quad \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{\sin(\angle CBB_1)}{\sin(\angle B_1BA)} \cdot \frac{\sin(\angle A)}{\sin(\angle C)}.$$

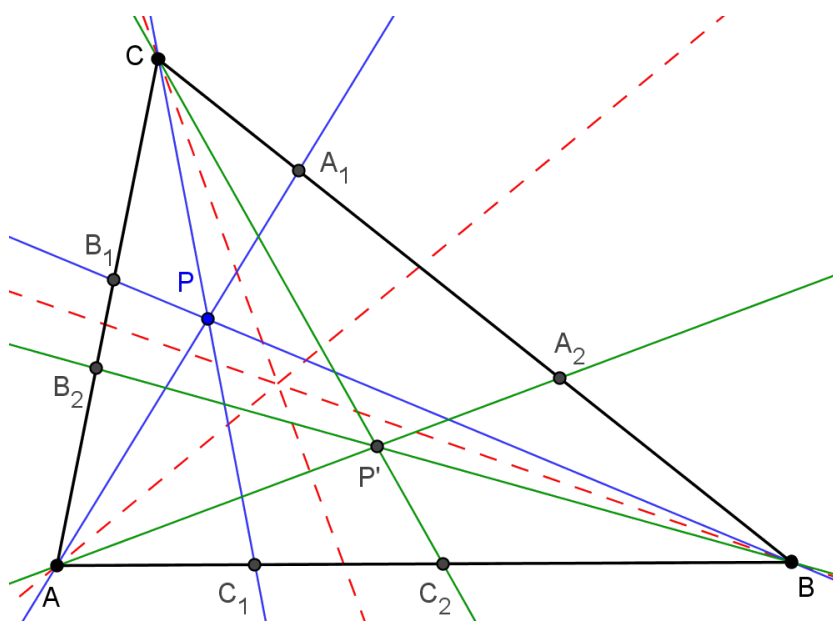
Množenjem dobivenih jednakosti imamo :

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{\sin(\angle C_1CB)}{\sin(\angle ACC_1)} \cdot \frac{\sin(\angle A_1AC)}{\sin(\angle BAA_1)} \cdot \frac{\sin(\angle B_1BA)}{\sin(\angle CBB_1)}.$$

Slijedi tvrdnja. □

Sada krenimo s dokazom teorema 1.4.

*Dokaz.* Neka je  $A_1 = PA \cap BC$ ,  $B_1 = PB \cap AC$  i  $C_1 = PC \cap AB$ . Neka je  $A_2 \in BC$  tako da je pravac  $AA_2$  simetričan pravcu  $AA_1$  s obzirom na simetralu kuta pri vrhu A. Slično,  $BB_2$  i  $CC_2$ .



Slika 1.4: Točka  $P'$  izogonalni je konjugat točke  $P$ .

Ako pokažemo da vrijedi

$$\frac{\sin(\angle ACC_2)}{\sin(\angle C_2CB)} \cdot \frac{\sin(\angle BAA_2)}{\sin(\angle A_2AC)} \cdot \frac{\sin(\angle CBB_2)}{\sin(\angle B_2BA)} = 1,$$

tada će prema obratu trigonometrijskog oblika Cevinog teorema slijediti tvrdnja. Budući da su pravci  $AA_2$ ,  $BB_2$  i  $CC_2$  simetrični pravcima  $AA_1$ ,  $BB_1$  i  $CC_1$  s obzirom na simetrale kutova trokuta  $ABC$ , vrijedi  $\angle ACC_2 = \angle C_1CB$ ,  $\angle C_2CB = \angle ACC_1$  itd. Sada imamo

$$\frac{\sin(\angle ACC_2)}{\sin(\angle C_2CB)} \cdot \frac{\sin(\angle BAA_2)}{\sin(\angle A_2AC)} \cdot \frac{\sin(\angle CBB_2)}{\sin(\angle B_2BA)} = \frac{\sin(\angle C_1CB)}{\sin(\angle ACC_1)} \cdot \frac{\sin(\angle A_1AC)}{\sin(\angle BAA_1)} \cdot \frac{\sin(\angle B_1BA)}{\sin(\angle CBB_1)}. \quad (1.1)$$

Pošto se pravci  $AA_1$ ,  $BB_1$  i  $CC_1$  sijeku u točki  $P$ , prema trigonometrijskom obliku Cevinog teoremu vrijedi:

$$\frac{\sin(\angle C_1CB)}{\sin(\angle ACC_1)} \cdot \frac{\sin(\angle A_1AC)}{\sin(\angle BAA_1)} \cdot \frac{\sin(\angle B_1BA)}{\sin(\angle CBB_1)} = 1.$$

Na temelju toga i (1.1) zaključujemo

$$\frac{\sin(\angle ACC_2)}{\sin(\angle C_2CB)} \cdot \frac{\sin(\angle BAA_2)}{\sin(\angle A_2AC)} \cdot \frac{\sin(\angle CBB_2)}{\sin(\angle B_2BA)} = 1,$$

odnosno prema obratu trigonometrijskog oblika Cevina teorema pravci  $AA_2$ ,  $BB_2$  i  $CC_2$  sijeku se u jednoj točki  $P'$ .  $\square$

Točku  $P'$  iz teorema 1.4 zovemo **izogonalni konjugat** točke  $P$  s obzirom na trokut  $ABC$ .

## 1.4 Orijentirani kutovi

S pojmom orijentiranih kutova ne susrećemo se često u geometriji. No, to će nam olakšati dokazivanje brojnih tvrdnji u ovom radu pa navedimo definiciju.

**Definicija 1.7.** *Neka su  $p$  i  $q$  dva neparalelna pravca. **Orijentirani kut** od  $p$  do  $q$  je kut za koji pravac  $p$  treba rotirati u smjeru obrnutom od kazaljke na satu kako bi postao paralelan s pravcem  $q$ . Oznaka:  $\angle(p, q)$ .*

Iz definicije slijedi da su dva orijentirana kuta sukladna ako se njihove mjere razlikuju za višekratnik od  $180^\circ$ .

**Definicija 1.8.** *Definiramo zbrajanje orijentiranih kutova na sljedeći način:*

$$\angle(p_1, p_2) + \angle(p_2, p_3) = \angle(p_1, p_3)$$

$$\angle(p_1, p_2) + \angle(p_3, p_4) = \angle(p_1, p_5)$$

gdje je  $p_5$  pravac takav da vrijedi  $\angle(p_2, p_5) = \angle(p_3, p_4)$ .

Iz te definicije proizlaze svojstva koja se lako dokažu.

**Teorem 1.9.** *Vrijede sljedeća svojstva:*

1.  $\angle(p_1, p_2) + \angle(p_2, p_1) = 0$ .
2. *Ako je pravac  $p_1$  paralelan pravcu  $q_1$ , a pravac  $p_2$  paralelan pravcu  $q_2$  tada*

$$\angle(p_1, p_2) = \angle(q_1, q_2).$$

*Analogno vrijedi ako su odgovarajući pravci međusobno okomiti.*

3. *Za tri različite točke  $A, B$  i  $C$  u ravnini vrijedi  $\angle ABC = -\angle CBA$ .*
4. *Tri različite točke  $A, B, C$  su kolinearne ako i samo ako je*

$$\angle ABC = 0,$$

*ili ako za bilo koju točku  $D$ , različitu od navedene tri, vrijedi:*

$$\angle ACD = \angle BCD.$$

5. *Za bilo koje četiri različite točke  $A, B, C, D$  u ravnini vrijedi:*

$$\angle ABC + \angle CDA = \angle BAD + \angle DCB.$$

6. *Četiri različite točke  $A, B, C$  i  $D$  leže na kružnici ako i samo ako*

$$\angle ABC = \angle ADC.$$

7. *Za bilo koje tri točke  $A, B$  i  $C$  vrijedi:*

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 0.$$

8. *Za tri različite točke  $A, B$  i  $C$  koje leže na kružnici sa središtem u točki  $O$  vrijedi  $2\angle ABC = \angle AOC$ .*

*Dokaz.* Dokazi navedenih tvrdnji nalaze se u literaturi (vidi [8], [9] i [10]). □

Uzmimo za primjer četiri različite točke  $A, B, C$ , i  $D$  koje leže na kružnici u tom poretku. Tada ako promatramo neorijentirane kutove prema teoremu o obodnom kutu imamo  $\angle ABD = \angle ACD$ . S druge strane, ako se te točke nalaze u poretku  $A, B, D$  i  $C$  tada u smislu

neorijentiranih kutova imamo  $\angle ABD = 180^\circ - \angle DCA$ . U tom istom slučaju, ako smatramo da su kutovi orijentirani imamo:

$$\angle ABD = 180^\circ - \angle DCA = -\angle DCA = \angle ACD.$$

Upravo u takvim situacijama je lakše raditi s orijentiranim kutovima.

Spomenimo još jednu važnu činjenicu rada s orijentiranim kutovima. Pogledajmo zadnje svojstvo u teoremu 1.9. Naime, dijeljenje s 2 je opasno kada radimo modulo  $180^\circ$ . Preciznije, iz jednakosti  $2\angle A = 2\angle B$ , ne slijedi  $\angle A = \angle B$ , zbog mogućnosti da je  $\angle A = \angle B + 90^\circ$ . Ako to usporedimo s kongruencijama, znamo da kongruenciju  $2a \equiv 2b \pmod{c}$  ne smijemo dijeliti s 2 kada je  $c$  paran. Iz istog razloga ne smijemo pisati  $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$ , jer kasniji izraz možda neće biti dobro definiran.

Sada se možemo pitati što se događa s zbrojem polovina kutova u trokutu. Znamo da, ako označimo kutove nekog trokuta s  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  tada gledajući neorijentirane kutove vrijedi  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ , odnosno  $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ$ . Srećom, to će vrijediti i u smislu orijentiranih kutova, ali pri tome valja paziti da svi kutovi imaju istu orijentaciju.

**Lema 1.10.** *Neka je  $ABC$  trokut i  $O$  središte upisane kružnice trokuta. Tada je  $\angle ABO = \angle OBC$ ,  $\angle BCO = \angle OCA$  i  $\angle CAO = \angle OAB$  te vrijedi*

$$\angle ABO + \angle BCO + \angle CAO = \angle OBC + \angle OCA + \angle OAB = 90^\circ.$$

*Dokaz.* Prema svojstvu 7. iz teorema 1.9 znamo da za kutove trokuta  $ABC$  vrijedi

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 0. \quad (1.2)$$

Prema pretpostavkama leme je  $\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC$ ,  $\angle BCA = \angle BCO + \angle OCA$  i  $\angle CAB = \angle CAO + \angle OAB$ . Uvrstivši to u (1.2) dobivamo:

$$\begin{aligned} \angle ABO + \angle OBC + \angle BCO + \angle OCA + \angle CAB &= \angle CAO + \angle OAB = 0 \\ \angle ABO + \angle BCO + \angle CAO &= -(\angle OBC + \angle OCA + \angle OAB). \end{aligned}$$

Jedini kut koji je sukladan svom sukutu je pravi kut. Slijedi tvrdnja. □

Iako valja biti oprezan, rad s orijetiranim kutovima u većini slučajeva olakšava račun, stoga od sada pa do kraja rada smatramo da su kutovi orijentirani, osim ako nije drugačije naglašeno.

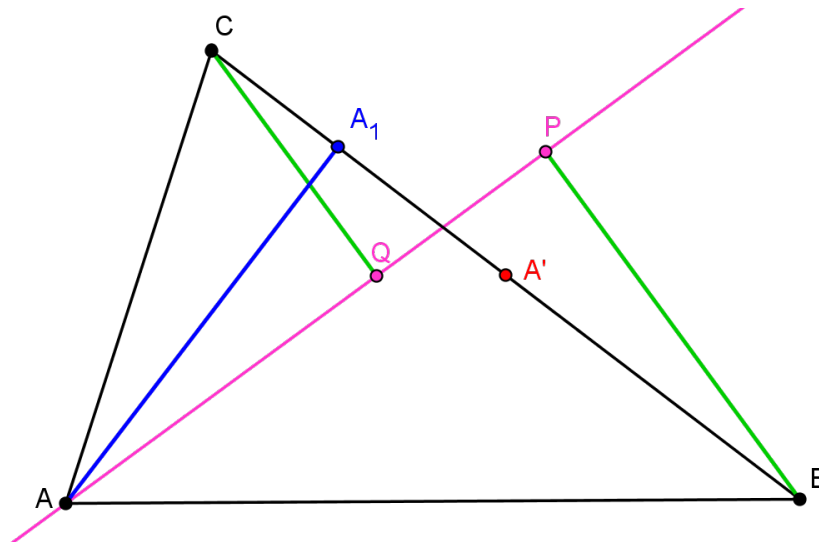
## Poglavlje 2

### Teorem o Feuerbachovoj točki

Kako bismo pripremili teren za dokaz glavnog teorema potrebno je dokazati nekoliko teorema.

**Teorem 2.1.** *Neka je  $ABC$  trokut i  $A'$  polovište stranice  $\overline{BC}$ . Neka je  $A_1$  nožište visine iz vrha  $A$  na pravac  $BC$ , te neka su točke  $P$  i  $Q$  redom ortogonalne projekcije točaka  $B$  i  $C$  na simetralu kuta  $BAC$ . Tada točke  $A'$ ,  $A_1$ ,  $P$  i  $Q$  leže na kružnici.*

*Dokaz.* Imamo sljedeću situaciju:

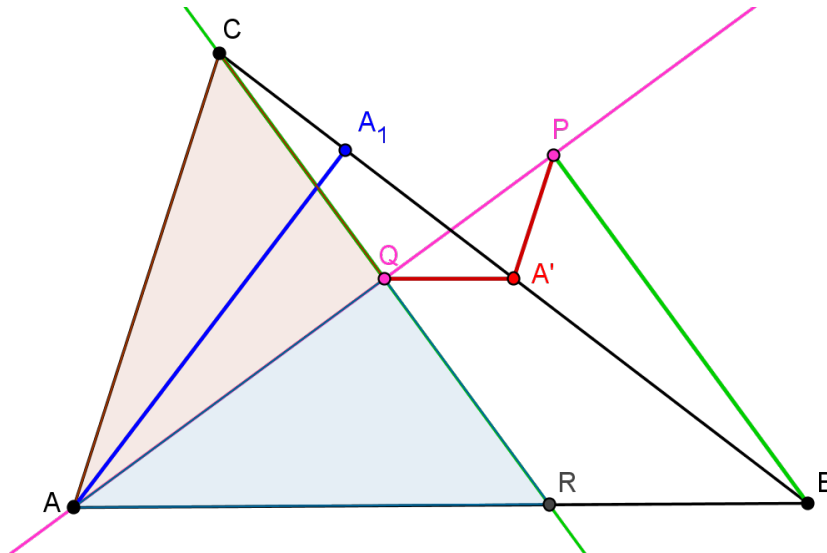


Slika 2.1: Teorem 2.1

Za dokaz ovog teorema koristit ćemo sljedeću lemu:

**Lema 2.2.** Sukladno oznakama iz teorema 2.1 vrijedi  $A'P \parallel AC$  i  $A'Q \parallel AB$ .

*Dokaz.* Neka je točka  $R$  točka presjeka pravaca  $CQ$  i  $AB$ .



Slika 2.2: Lema 2.2

Sada uočimo trokute  $ACQ$  i  $RAQ$ . Točka  $Q$  leži na simetrali kuta pa je

$$\angle CAQ = \angle QAR.$$

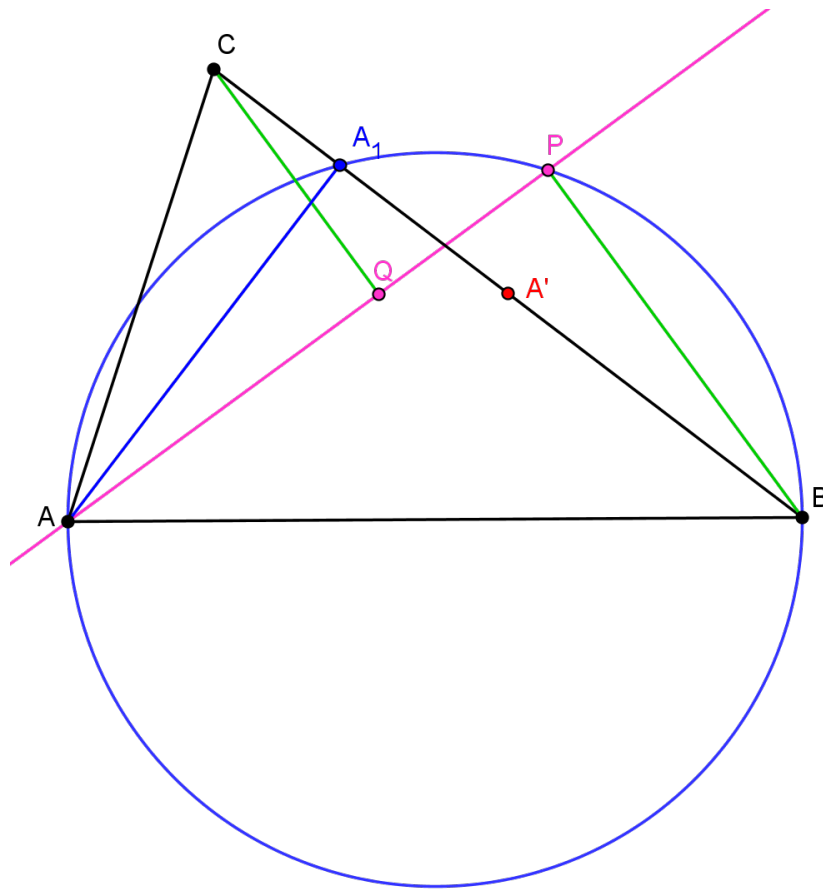
Nadalje je  $\angle AQC = 90^\circ$  te  $\angle AQR = 90^\circ$ , pa je  $\angle AQC = \angle AQR$ . Također, stranica  $\overline{AQ}$  zajednička je za oba trokuta. Dakle, prema teoremu  $K-S-K$  o sukkladnosti trokuta promatrana dva trokuta su sukkladni, ali su im odgovarajući kutovi suprotnih orijentacija. Iz toga slijedi da je točka  $Q$  polovište dužine  $\overline{CR}$ . Znamo da je točka  $A'$  polovište stranice  $\overline{BC}$  pa je dužina  $\overline{QA'}$  srednjica trokuta  $\overline{CRB}$ , pa je prema teoremu o srednjici trokuta ta dužina paralelna s dužinom  $\overline{RB}$ , odnosno  $\overline{AB}$ .

Analogno dokazujemo tvrdnju  $A'P \parallel AC$ . □

Provedimo sada dokaz iskazanog teorema.

Naime, znamo da je  $\angle AA_1B = 90^\circ$  te  $\angle APB = 90^\circ$ . Prema svojstvu 6. iz teorema 1.9 točke  $A, B, A_1$  i  $P$  leže na jednoj kružnici. S obzirom na to da su kutovi pravi, promjer te kružnice je  $\overline{AB}$  (plava kružnica na slici 2.3).





Slika 2.3: Teorem 2.1

Opet prema svojstvu 6. iz teorema 1.9 imamo  $\angle ABA_1 = \angle APA_1$  pa je i  $\angle ABC = \angle QPA_1$ . U skladu s definicijom orijentiranih kutova možemo pisati

$$\angle(AB, BC) = \angle(QP, PA_1).$$

Iz dokazane leme 2.2 znamo da je  $QA' \parallel AB$  stoga prema svojstvu 2. iz teorema 1.9 imamo  $\angle(AB, BC) = \angle(QA', BC)$  to jest  $\angle ABC = \angle QA'A_1$ .

Stoga je  $\angle QPA_1 = \angle ABC = \angle QA'A_1$  te svojstvu 6. iz teorema 1.9 slijedi da točke  $A_1$ ,  $A'$ ,  $P$  i  $Q$  leže na kružnici, a to je i trebalo dokazati.  $\square$

Izdvojimo rezultat koji je dokazan u dokazu, a kasnije ćemo ga koristiti:

**Korolar 2.3.** *Neka je  $ABC$  trokut i  $A_1$  nožište okomice iz vrha  $A$  na pravac  $BC$ . Neka su  $P$  i  $Q$  ortogonalne projekcije vrhova  $B$  i  $C$  na simetralu kuta  $BAC$ . Tada vrijedi:*

$$\angle ABC = \angle QPA_1.$$

*Analogno,  $\angle ACB = \angle PQA_1$ .*

Na temelju dokazanih tvrdnji lako možemo dokazati sljedeće dvije leme.

**Lema 2.4.** *Sukladno oznakama iz teorema 2.1, trokut  $PA'Q$  je jednakokračan, odnosno vrijedi  $|QA'| = |A'P|$ .*

*Dokaz.* Iz leme 2.2 znamo da su  $A'Q \parallel AB$ , stoga prema navedenim svojstvima orijentiranih kutova u teoremu 1.9 imamo

$$\angle(A'Q, QP) = \angle(AB, QP).$$

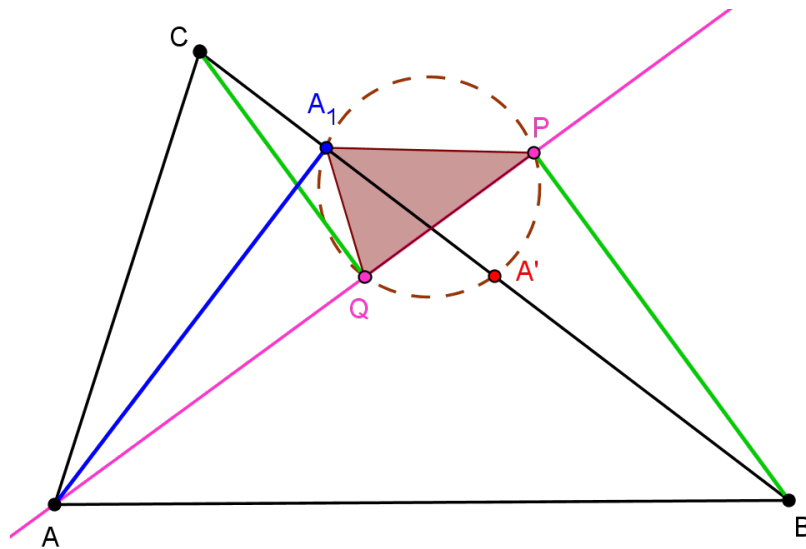
Slično iz  $A'P \parallel AC$  znamo

$$\angle(QP, A'P) = \angle(QP, AC).$$

Kako točke  $P$  i  $Q$  leže na simetrali kuta  $BAC$  vrijedi da je  $\angle(AB, QP) = \angle(QP, AC)$ . Stoga je  $\angle(A'Q, QP) = \angle(QP, A'P)$  to jest  $\angle A'QP = \angle QPA'$ . Dakle, zaista trokut  $PA'Q$  je jednakokračan i vrijedi  $|QA'| = |A'P|$ .  $\square$

**Lema 2.5.** *Sukladno oznakama iz teorema 2.1, trokuti  $A_1PQ$  i  $ABC$  su slični, a odgovarajući kutovi su im suprotne orijentacije.*

*Dokaz.* Iz korolara 2.3 znamo  $\angle QPA_1 = \angle ABC$  i  $\angle PQA_1 = \angle ACB$ , pa prema teoremu  $K-K$  o sličnosti trokuta slijedi tvrdnja.



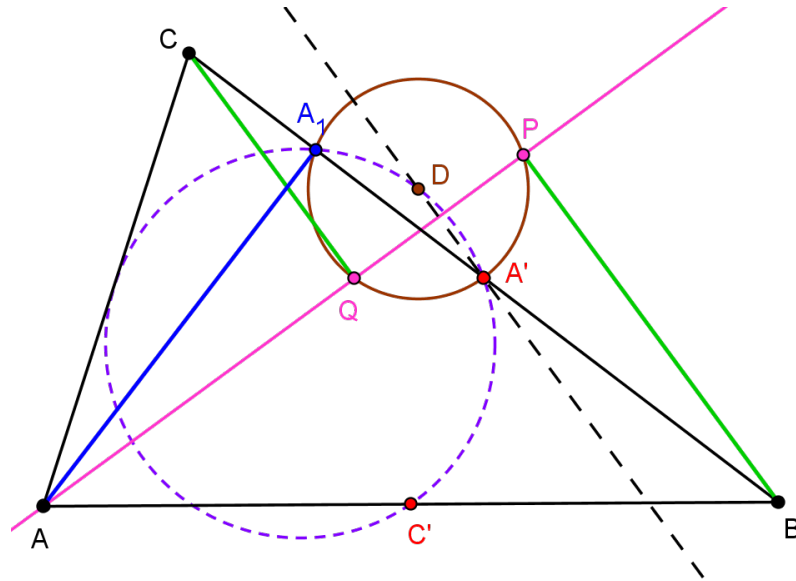
Slika 2.4: Lema 2.5

□

Sljedeći teorem povezuje dokazane tvrdnje i kružnicu devet točaka promatranog trokuta  $ABC$ .

**Teorem 2.6.** *Neka je  $ABC$  trokut,  $A'$  polovište stranice  $\overline{BC}$ ,  $A_1$  nožište okomice iz  $A$  na  $BC$ , te  $P$  i  $Q$  ortogonalne projekcije točaka  $B$  i  $C$  na simetralu kuta  $BAC$  redom. Tada središte  $D$  kružnice kroz točke  $P$ ,  $Q$ ,  $A'$  i  $A_1$  leži na kružnici devet točaka trokuta  $ABC$  i pravac  $A'D$  okomit je na simetralu kuta  $CAB$ .*

*Dokaz.* Zapravo tvrdimo da je sjecište Feuerbachove kružnice trokuta  $ABC$  i pravca okomitog na simetralu kuta  $CAB$  u točki  $A'$  (različito od točke  $A'$ ) upravo središte kružnice kroz točke  $P$ ,  $Q$ ,  $A'$  i  $A_1$ .



Slika 2.5: Teorem 2.6

S obzirom na to da je točka  $D$  središte trokutu  $PA'Q$  opisane kružnice, ona leži na simetralama stranica tog trokuta. Posebno, leži na simetrali stranice  $\overline{PQ}$ . No, na toj simetrali leži i točka  $A'$  jer prema lemi 2.4 trokut je  $PA'Q$  jednakokračan. Prema tome, pravac  $A'D$  okomit je na pravac  $PQ$  odnosno na simetralu kuta  $CAB$ . Vrijedi:

$$\angle(A'D, PQ) = 90^\circ.$$

Pokažimo da točka  $D$  leži na Feuerbachovoj kružnici trokuta  $ABC$ . Feuerbachova kružnica prolazi kroz polovišta stranica danog trokuta i nožišta visina. Prema tome točke  $A'$ ,  $C'$  i  $A_1$  leže na Feuerbachovoj kružnici trokuta  $ABC$ .

Kako je točka  $D$  središte kružnice kroz točke  $P$ ,  $Q$ ,  $A'$  i  $A_1$  vrijedi da je  $|DA_1| = |DA'|$ , odnosno trokut  $A_1DA'$  je jednakokračan pa je  $\angle A'A_1D = \angle DA'A_1$ . Također je  $\angle AA_1B = 90^\circ$  pa točka  $A_1$  leži na kružnici sa središtem u  $C'$  i promjerom  $\overline{AB}$ . Dakle, i trokut  $A_1C'B$  je jednakokračan jer je  $|A_1C'| = |C'B|$ . Slijedi jednakost  $\angle C'A_1B = \angle A_1BC'$ . Sada imamo:

$$\begin{aligned} \angle C'A_1D &= \angle C'A_1B + \angle BA_1D \\ &= \angle C'A_1B + \angle A'A_1D = \angle A_1BC' + \angle DA'A_1 \\ &= \angle(CB, AB) + \angle(DA', CB) = \angle(DA', CB) + \angle(CB, AB) \\ &= \angle(DA', AB) = \angle(DA', PQ) + \angle(PQ, AB) \\ &= 90^\circ + \angle(PQ, AB). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Kako je pravac  $PQ$  simetrala kuta  $BAC$  vrijedi  $\angle(PQ, AB) = \angle(AC, PQ)$ . Stoga iz (2.1) dobivamo:

$$\begin{aligned}\angle C'A_1D &= 90^\circ + \angle(AC, PQ) \\ &= \angle(AC, PQ) + 90^\circ \\ &= \angle(AC, PQ) + \angle(PQ, A'D) \\ &= \angle(AC, A'D).\end{aligned}$$

No, dužina  $\overline{A'C'}$  je srednjica trokuta  $ABC$  pa je  $A'C' \parallel AC$ , pa za kutove vrijedi

$$\angle(AC, A'D) = \angle(A'C', A'D).$$

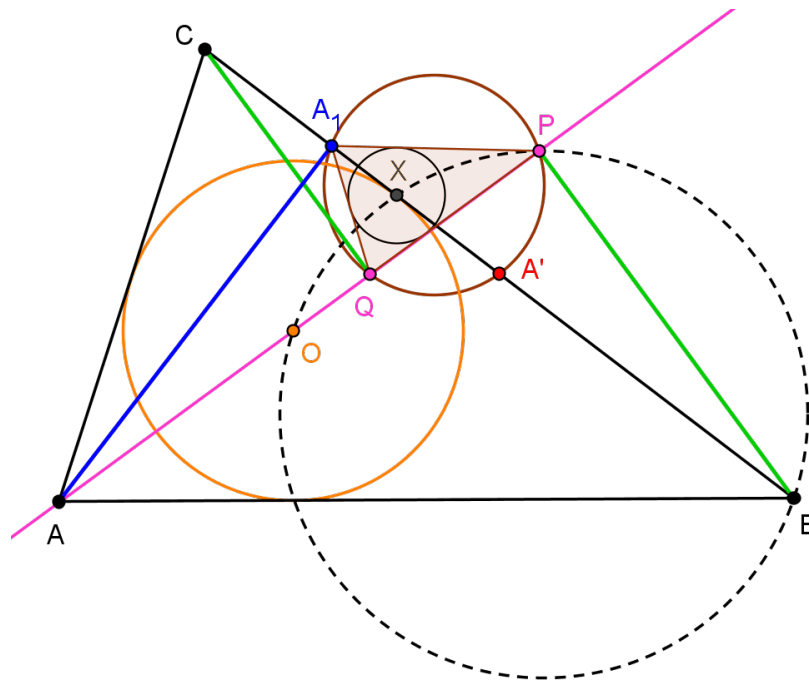
Konačno,

$$\angle C'A_1D = \angle(A'C', A'D) = \angle(C'A', A'D) = \angle C'A'D.$$

Dobili smo da su kutovi  $\angle C'A_1D$  i  $\angle C'A'D$  sukladni, pa prema tome točke  $C'$ ,  $A_1$ ,  $A'$  i  $D$  leže na jednoj kružnici, odnosno točka  $D$  leži na kružnici devet točaka trokuta  $ABC$ .  $\square$

**Teorem 2.7.** *Neka kružnica upisana trokutu  $ABC$  dira stranicu  $\overline{BC}$  u točki  $X$  te neka je  $A_1$  nožište visine iz vrha  $A$ . Neka su  $P$  i  $Q$  redom ortogonalne projekcije točaka  $B$  i  $C$  na simetralu kuta  $BAC$ . Tada je točka  $X$  središte trokutu  $A_1PQ$  upisane kružnice.*

*Dokaz.* Neka je  $O$  središte trokutu  $ABC$  upisane kružnice, te neka je  $O'$  središte trokutu  $A_1PQ$  upisane kružnice. Tvrdimo  $X = O'$ .



Slika 2.6: Teorem 2.7

Točka  $O$  nalazi se na pravcu  $PQ$ . Pravac  $BC$  je tangenta upisane kružnice trokuta  $ABC$  pa je pravac  $OX$  okomit na pravac  $BC$ . Stoga je  $\angle OXB = 90^\circ$ . Također, znamo da je  $\angle OPB = 90^\circ$ , pa točke  $X$  i  $P$  leže na kružnici promjera  $\overline{BO}$ .

Prema teoremu o obodnom kutu vrijedi  $\angle XBO = \angle XPO$ , odnosno

$$\angle XPQ = \angle CBO. \quad (2.2)$$

Pošto su trokuti  $ABC$  i  $A_1PQ$  slični (lema 2.5) postoji preslikavanje sličnosti koje trokut  $ABC$  preslikava u trokut  $A_1PQ$ . Posebno, to preslikavanje preslikava točku  $O$  kao središte upisane kružnice trokuta  $ABC$  u točku  $O'$  koja je središte upisane kružnice trokuta  $A_1PQ$ . Osim toga, pri tom preslikavanju kutovi mijenjaju orijentaciju pa je

$$\angle O'PQ = -\angle OBC = \angle CBO. \quad (2.3)$$

Iz (2.2) i (2.3) dobivamo da je

$$\angle O'PQ = \angle XPQ.$$

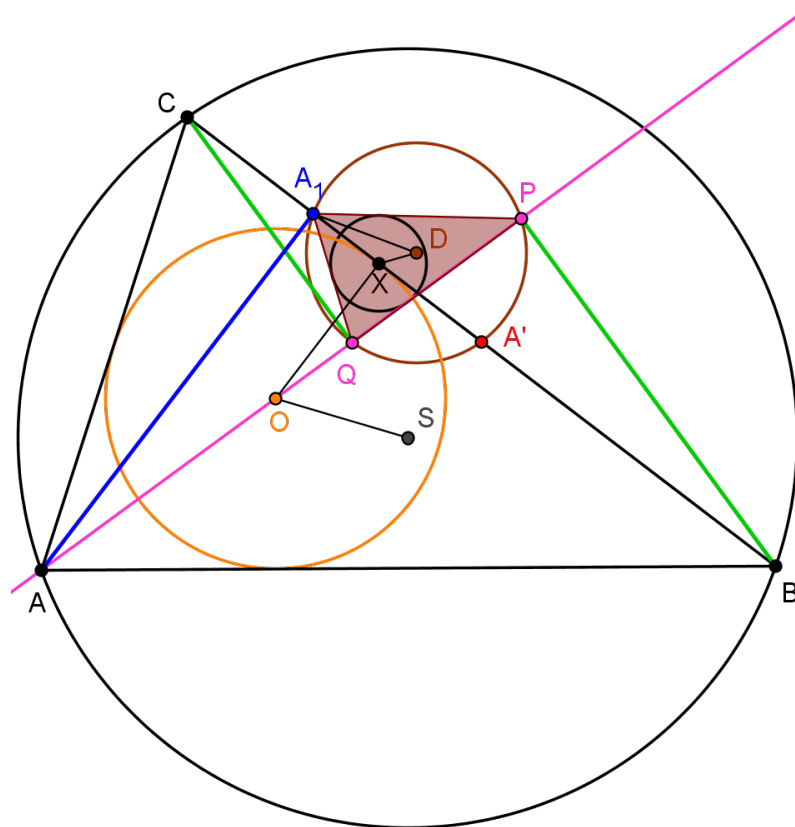
Dakle, točka  $X$  leži na pravcu  $O'P$ . Analogno se pokaže da točka  $X$  leži na pravcu  $O'Q$ . No, pravci  $O'P$  i  $O'Q$  imaju samo jednu zajedničku točku i to  $O'$ . Stoga je  $X = O'$ , a to smo i trebali dokazati.  $\square$

**Teorem 2.8.** *Neka kružnica upisana trokutu  $ABC$  dira stranicu  $\overline{BC}$  u točki  $X$  te neka je  $A_1$  nožište visine iz vrha  $A$ . Neka su  $P$  i  $Q$  ortogonalne projekcije točaka  $B$  i  $C$  na simetralu kuta  $BAC$ . Neka je  $X$  središte upisane kružnice, a  $D$  središte opisane kružnice trokuta  $QPA_1$ . Označimo sa  $S$  središte opisane kružnice, a s  $O$  središte upisane kružnice trokuta  $ABC$ . Vrijedi*

$$\angle(XD, AO) = \angle(BC, OS).$$

*Dokaz.* Već smo spomenuli da postoji preslikavanje sličnosti koje preslikava trokut  $ABC$  u trokut  $A_1PQ$ , a točku  $O$  preslikava u točku  $X$ . Nadalje, to preslikavanje preslikava točku  $S$  u točku  $D$  jer su to središta opisanih kružnica promatranih trokuta. Zbog sličnosti tih trokuta (lema 2.5) vrijedi:

$$\angle(XD, QP) = -\angle(OS, BC).$$



Slika 2.7: Teorem 2.8

No, pravac  $QP$  podudara se s pravcem  $AO$  stoga možemo pisati:

$$\angle(XD, AO) = -\angle(OS, BC),$$

odnosno,

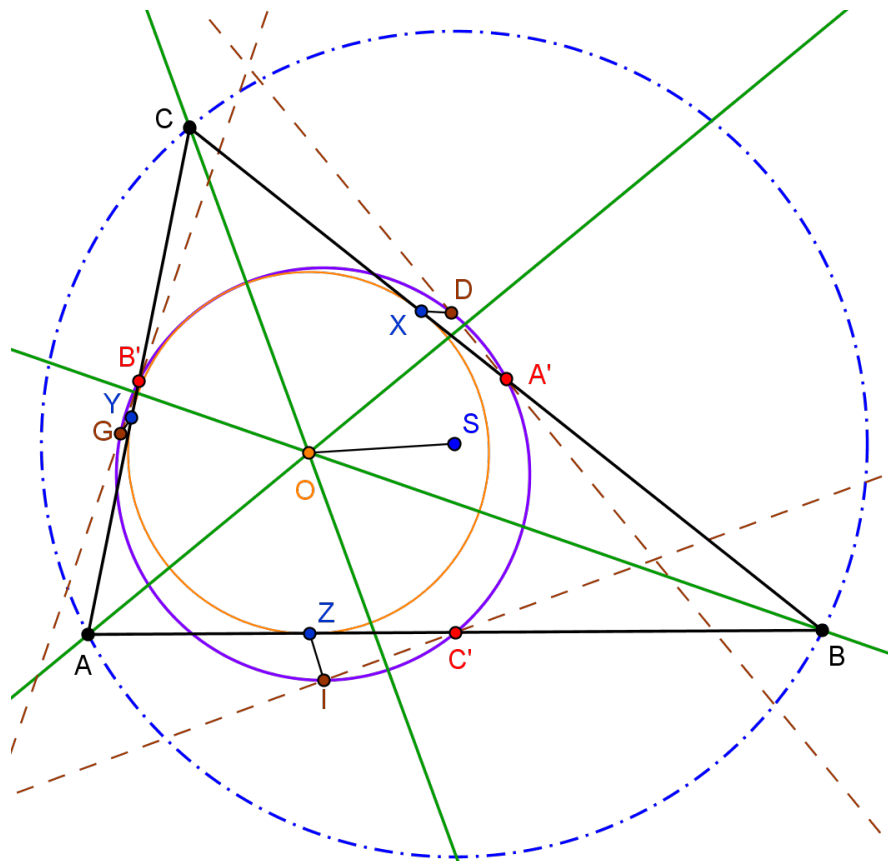
$$\angle(XD, QP) = \angle(BC, OS).$$

□

Sada smo pripremili teren za dokaz **Feuerbachova teorema** koji donosimo u nastavku.

**Teorem 2.9.** *U svakom se trokutu upisana kružnica i kružnica devet točaka (Feurbachova kružnica) diraju.*

*Dokaz.* Neka su  $X, Y$  i  $Z$  redom točke dodira upisane kružnice trokuta  $ABC$  sa stranicama trokuta  $\overline{BC}, \overline{AC}$  i  $\overline{AB}$ . Te su točke međusobno simetrične s obzirom na simetrale kutova na čijim krakovima leže, pa su pravci  $XY, XZ$  i  $YZ$  okomiti na odgovarajuće simetrale kutova. Neka su točke  $D, G$  i  $I$  točke presjeka Feuerbachove kružnice trokuta  $ABC$  s okomicama u točkama  $A', B'$  i  $C'$  na simetrale kutova  $CAB, ABC$  i  $BCA$  redom.

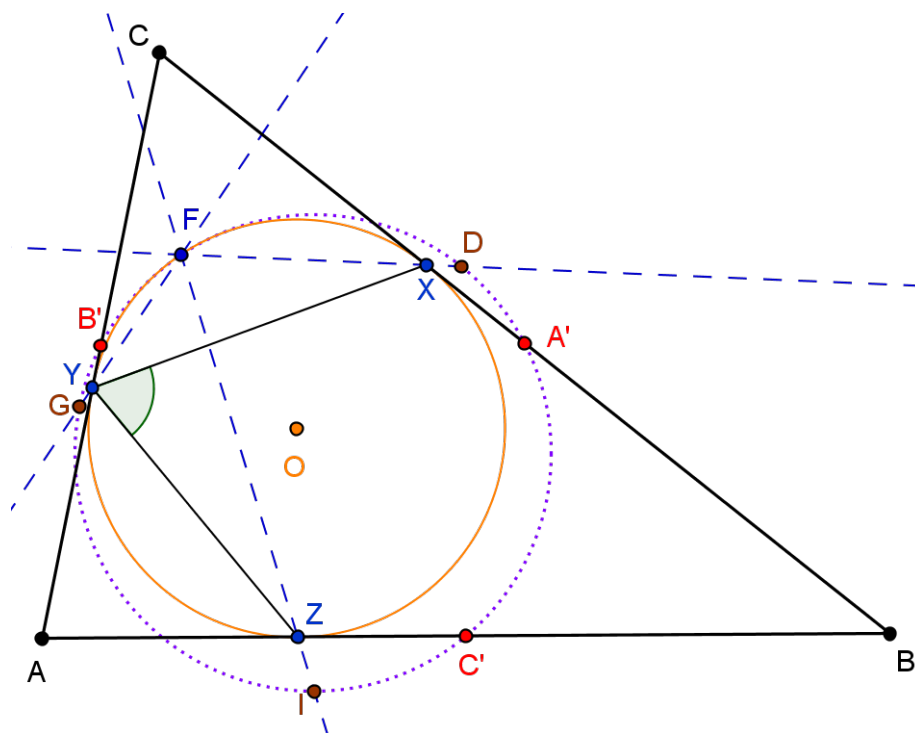


Slika 2.8: Teorem 2.9 a)



Prema teoremu 2.8 vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} \angle(XD, AO) &= \angle(BC, OS), \\ \angle(YG, BO) &= \angle(AC, OS), \\ \angle(ZI, CO) &= \angle(AB, OS). \end{aligned} \tag{2.4}$$



Slika 2.9: Teorem 2.9 b)

Na temelju (2.4) i svojstava orijentiranih kutova (teorem 1.9) možemo računati:

$$\begin{aligned}
 \angle(XD, ZI) &= \angle(XD, AO) + \angle(AO, ZI) \\
 &= \angle(XD, AO) + \angle(AO, CO) + \angle(CO, ZI) \\
 &= \angle(BC, OS) + \angle(AO, CO) - \angle(ZI, CO) \\
 &= \angle(BC, OS) - \angle(AB, OS) + \angle(AO, CO) \\
 &= \angle(BC, OS) + \angle(OS, AB) + \angle(AO, CO) \\
 &= \angle(BC, AB) + \angle(AO, CO) \\
 &= \angle(BC, AO) + \angle(AO, AB) + \angle(AO, CO) \\
 &= \angle(BC, AO) + \angle(AO, CO) + \angle(AO, AB) \\
 &= \angle(BC, CO) + \angle(AO, AB).
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Znamo je  $CO$  simetrala kuta  $ACB$  pa je  $\angle(BC, CO) = \angle(CO, AC)$ . Analogno je i  $\angle(AO, AB) = \angle(AC, AO)$ . Pa uvrštavanjem u (2.5) dobivamo:

$$\begin{aligned}
 \angle(XD, ZI) &= \angle(CO, AC) + \angle(AC, AO) \\
 &= \angle(CO, AO) \\
 &= \angle(CO, XY) + \angle(XY, YZ) - \angle(AO, YZ) \\
 &= 90^\circ + \angle(XY, YZ) - 90^\circ \\
 &= \angle XYZ.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

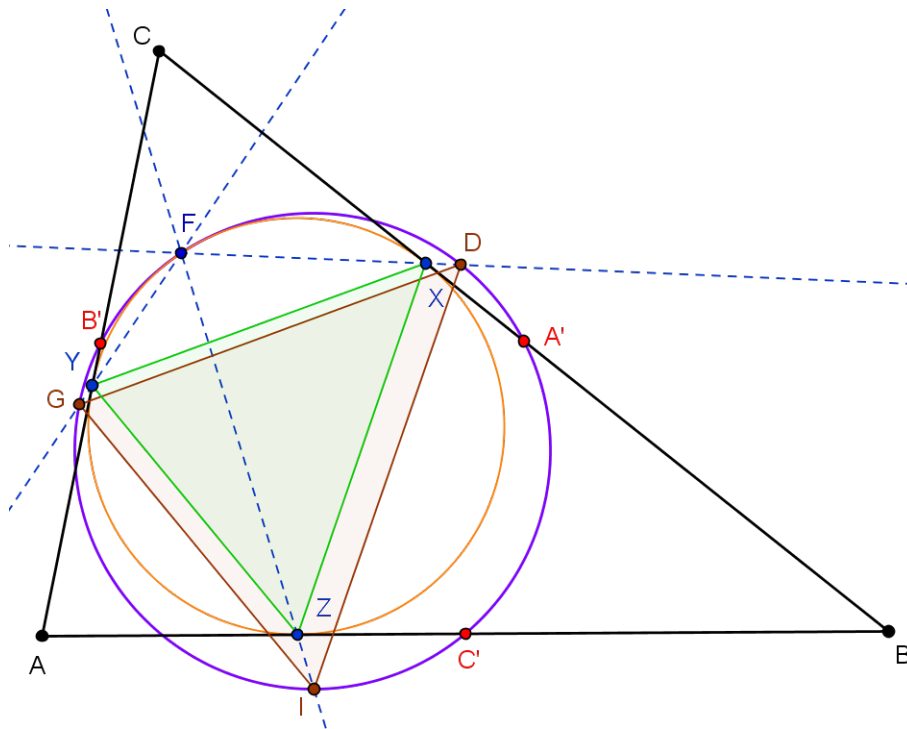
Neka je sada točka  $F$  točka presjeka upisane kružnice i pravca  $XD$  različita od  $X$ . Prema svojstvu 6. iz teorema 1.9 je  $\angle XFZ = \angle XYZ$ . Prema (2.6) imamo:

$$\angle(XD, ZI) = \angle XYZ = \angle XFZ.$$

Kako je  $\angle XFZ = \angle(XD, FZ)$  to je  $\angle(XD, ZI) = \angle(XD, FZ)$  iz čega slijedi da su pravci  $FZ$  i  $ZI$  paralelni. No, ti pravci imaju zajedničku točku  $Z$  pa se oni zapravo podudaraju. Dakle, točka  $F$  leži na pravcu  $ZI$ . Analogno bismo dobili  $F \in YG$ . Dakle, točka  $F$  leži na upisanoj kružnici trokuta  $ABC$  i ona je sjecište pravaca  $XD$ ,  $YG$  i  $ZI$ .

Sada pokažimo da su trokuti  $XYZ$  i  $DGI$  homotetični. Znamo da točke  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$  leže na kružnici devet točaka trokuta  $ABC$ , a pokazali smo da i točke  $D$ ,  $G$  i  $I$  također leže na toj kružnici. Tada prema svojstvu 6. iz teorema 1.9 znamo  $\angle IC'B' = \angle IGB'$ , odnosno  $\angle(C'I, C'B') = \angle(IG, B'G)$ . Pravci  $C'I$  i  $YX$  okomiti su na simetralu kuta  $ACB$  stoga su oni paralelni. Isto tako, pravac  $XZ$  paralelan je s pravcem  $B'G$ . Iz toga i iz  $B'C' \parallel BC$  slijedi  $\angle(C'I, C'B') = \angle(YX, CB)$ , odnosno  $\angle(IG, B'G) = \angle(IG, XZ)$ . Dakle,  $\angle(IG, XZ) = \angle(YX, CB)$ . Nadalje, kut  $\angle(YX, CB)$  je kut između tetive  $\overline{YX}$  upisane kružnice i tangente na tu kružnicu u točki  $X$ . Pa je prema teoremu o kutu između tangente i tetive

(teorem 1.3) navedeni kut jednak je  $\angle YZX$ . Dakle,  $\angle(IG, ZX) = \angle(YX, CB) = \angle YZX$ , odnosno  $\angle(IG, XZ) = \angle(ZY, XZ)$ . Iz toga slijedi da su pravci  $IG$  i  $YZ$  paralelni. Slično se pokazuje  $GD \parallel YX$  i  $DI \parallel XZ$ .



Slika 2.10: Teorem 2.9 c)

Dakle, trokuti  $DGI$  i  $XYZ$  zaista su homotetični. Centar njihove homotetije je sjecište pravaca  $DX$ ,  $GY$  i  $IZ$ , a to je upravo točka  $F$ . Stoga postoji homotetija s centrom u točki  $F$  koja preslikava trokut  $XYZ$  u trokut  $DGI$ , pa ta homotetija preslikava opisanu kružnicu trokuta  $XYZ$  u opisanu kružnicu trokuta  $DGI$ . No, opisana kružnica trokuta  $XYZ$  je upisana kružnica trokuta  $ABC$ , a opisana kružnica trokuta  $DGI$  je kružnica devet točaka trokuta  $ABC$ . Dakle, homotetija s centrom u točki  $F$  preslikava upisanu kružnicu trokuta  $ABC$  u njegovu Feuerbachovu kružnicu. Budući da je točka  $F$  centar opisane homotetije ona je fiksna. Znamo da  $F$  leži na upisanoj kružnici trokuta  $ABC$  pa iz toga zaključujemo da leži i na Feuerbachovoj kružnici tog trokuta. Osim toga, tangenta kroz točku  $F$  je također fiksna pa dvije promatrane kružnice diraju u točki  $F$ .  $\square$

Točka diranja upisane i Feuerbachove kružnice trokuta zove se **Feurbachova točka**. Uočimo da smo dokazali samo dio teorema koji se smatra Feuerbachovim teoremom. Naime, originalni teorem još tvrdi da Feuerbachova kružnica dira i pripisane kružnice trokuta.

No, to nije tema ovog rada, zato smo Feuerbachovom teoremu pridijelili naziv *Teorem o Feuerbachovoj točki*.

## Poglavlje 3

# Svojstva Feuerbachove točke

Nakon što smo dokazali da se upisana kružnica trokuta i Feuerbachova kružnica diraju, pitamo se postoji li veza te točke s drugim elementima trokuta  $ABC$ . To je tema brojnih zadataka na matematičkim natjecanjima. Do sada je otkriveno puno zanimljivih svojstava Feuerbachove točke, od kojih ćemo neka navesti u nastavku. Detaljnije može se pronaći u literaturi (vidi [5], [6] i [15]).

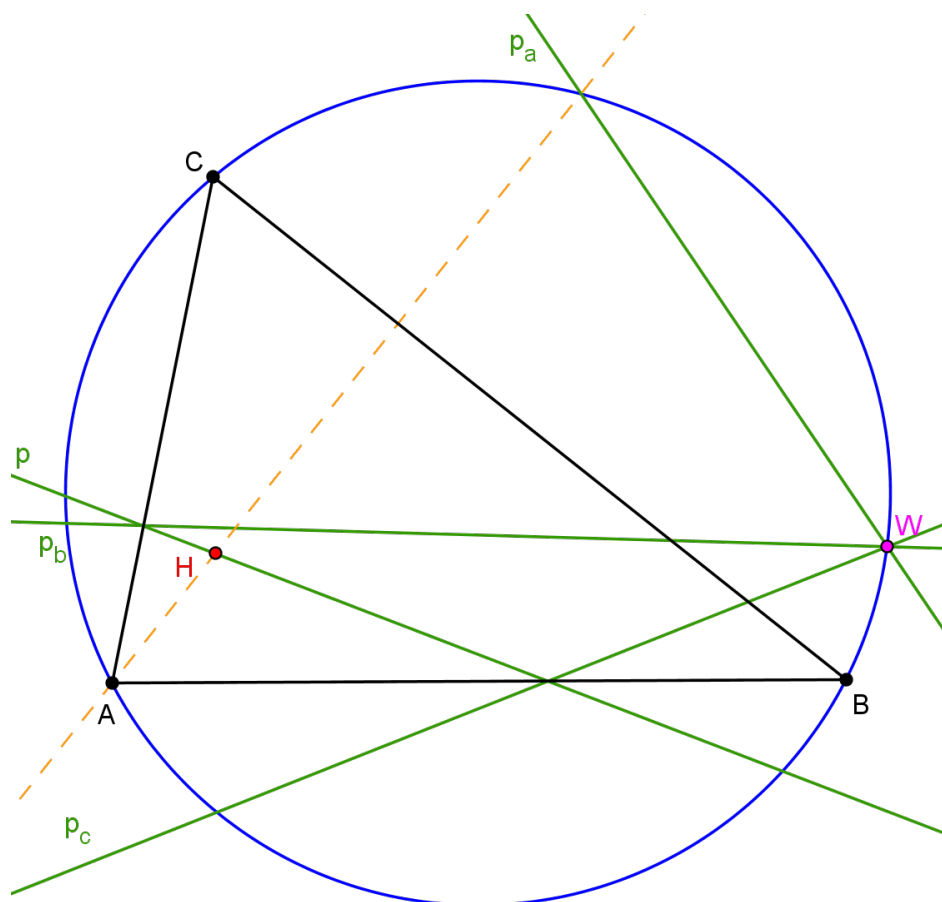
### 3.1 Feuerbachova točka kao anti-Steinerova točka

U ovom ćemo se poglavlju baviti posebnim trokutima unutar zadanog trokuta. No, prvo moramo dokazati teorem iz kojeg proizlazi definicija **anti-Steinerove točke**.

**Teorem 3.1.** *Neka je  $ABC$  trokut,  $H$  njegov ortocentar te  $p$  pravac kroz ortocentar. Osnosimetrične slike pravca  $p$  s obzirom na stranice promatranog trokuta prolaze kroz točku  $W$  koja leži na opisanoj kružnici trokuta  $ABC$ . Također, vrijedi:*

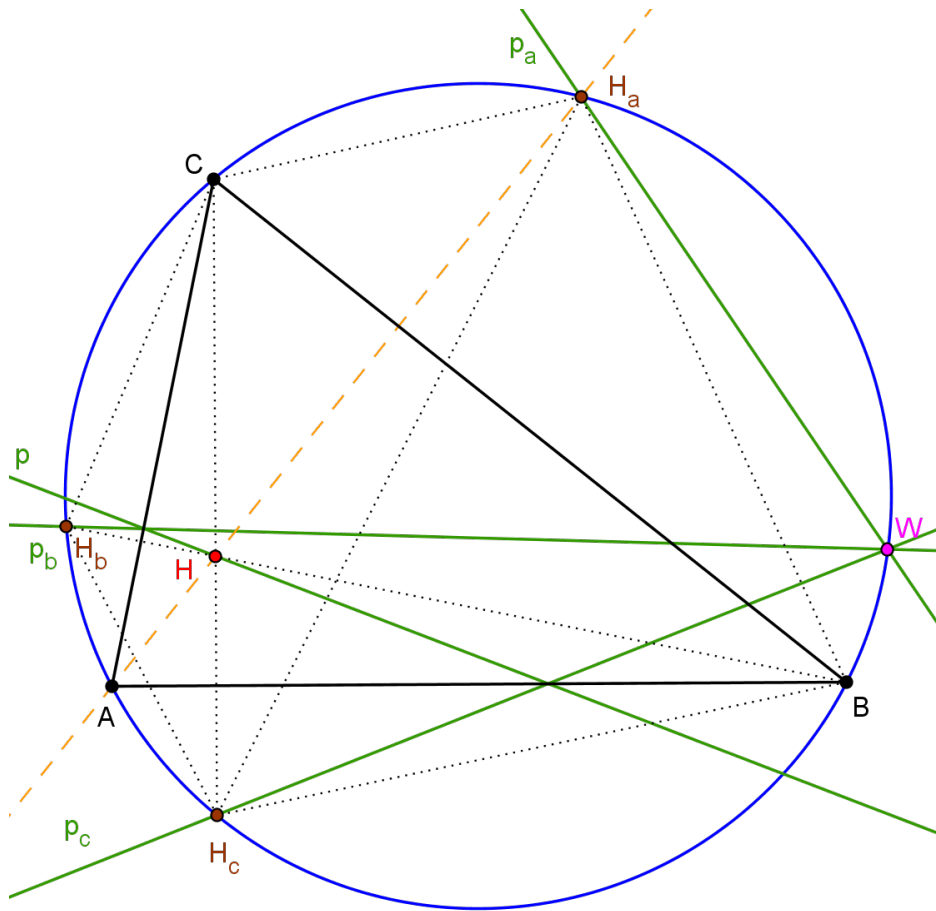
$$\angle CBW = \angle CAW = 90^\circ - \angle(AB, p).$$

*Dokaz.* Neka su  $p_a$ ,  $p_b$  i  $p_c$  osnosimetrične slike pravca  $p$  s obzirom na pravce  $BC$ ,  $AC$  i  $AB$ .



Slika 3.1: Teorem 3.1 a)

S obzirom na to da je  $H$  ortocentar trokuta  $ABC$ , pravci  $AH$  i  $BC$  su međusobno okomiti. Također,  $BH \perp AC$  i  $CH \perp AB$ . Neka je sada  $H_c$  osnosimetrična slika točke  $H$  s obzirom na pravac  $AB$ .



Slika 3.2: Teorem 3.1 b)

Tada vrijedi:

$$\angle AH_c B = -\angle AHB = \angle BHA. \quad (3.1)$$

Pokažimo najprije da točka  $H_c$  leži na opisanoj kružnici trokuta  $ABC$ . Sada imamo:

$$\begin{aligned} \angle BHA &= \angle(BH, AH) = \angle(BH, AC) + \angle(AC, BC) - \angle(AH, BC) \\ &= 90^\circ + \angle(AC, BC) - 90^\circ \\ &= \angle(AC, BC) = \angle ACB. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Iz (3.1) i (3.2) dobivamo:

$$\angle AH_c B = \angle ACB,$$

što znači da točka  $H_c$  leži na opisanoj kružnici trokuta  $ABC$ . Uočimo da bismo analogno mogli dokazati da osnosimetrična slika točke  $H$  s obzirom na pravac  $AC$  (točka  $H_b$ ) kao i

osnosimetrična slika točke  $H$  s obzirom na pravac  $BC$  (točka  $H_a$ ) leže na opisanoj kružnici trokuta  $ABC$ .

Kako je  $CH \perp AB$  te  $HH_c \perp AB$  to točke  $C$ ,  $H$  i  $H_c$  leže na okomici na pravac  $AB$ . Također, pravac  $p$  prolazi kroz točku  $H$ , pa pravac  $p_c$  prolazi kroz točku  $H_c$  zbog osne simetrije. Pokazali smo da točka  $H_c$  leži na opisanoj kružnici trokuta  $ABC$  pa je ona zapravo sjecište pravca  $p_c$  i opisane kružnice. Neka je sada točka  $W_1$  točka presjeka pravca  $p_c$  i opisane kružnice različita od točke  $H_c$ . Prema svojstvu 6. iz teorema 1.9 imamo:

$$\angle CAW_1 = \angle CH_cW_1.$$

Jer je pravac  $p_c$  osnosimetričan pravcu  $p$  s obzirom na pravac  $AB$  to je:

$$\angle(AB, p_c) = \angle(p, AB) = -\angle(AB, p).$$

Možemo pisati:

$$\begin{aligned} \angle CAW_1 &= \angle CH_cW_1 = \angle(CH, p_c) \\ &= \angle(CH, AB) + \angle(AB, p_c) \\ &= 90^\circ - \angle(AB, p). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Prema svojstvu 6. iz teorema 1.9 i iz (3.3) imamo:

$$\angle CBW_1 = \angle CAW_1 = 90^\circ - \angle(AB, p).$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \angle BAW_1 &= \angle BAC + \angle CAW_1 \\ &= \angle(AB, AC) + 90^\circ - \angle(AB, p) \\ &= 90^\circ - (\angle(AC, AB) + \angle(AB, p)) \\ &= 90^\circ - \angle(AC, p). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Neka je sada  $W_2$  sjecište pravca  $p_b$  i opisane kružnice. Sličnim postupkom kao (3.3), dobivamo:

$$\angle BAW_2 = 90^\circ - \angle(AC, p).$$

Ako to usporedimo s (3.4) imamo:

$$\angle BAW_1 = \angle BAW_2,$$

odnosno  $W_2 \in AW_1$ . No, točka  $W_2$  leži i na opisanoj kružnici pa je ona zapravo sjecište opisane kružnice i pravca  $AW_1$  različito od  $A$ , a to je točka  $W_1$ . Dakle, točka  $W_1$  leži na pravcima  $p_b$  i  $p_c$ .



Analognim zaključivanjem možemo pokazati da  $W_1 \in p_a$ , čime smo zapravo dobili da je točka  $W_1$  sjecište pravaca  $p_a$ ,  $p_b$  i  $p_c$ , a osim toga je i na opisanoj kružnici trokuta  $ABC$ . Pokazali smo i da zadovoljava

$$\angle CBW_1 = \angle CAW_1 = 90^\circ - \angle(AB, p),$$

iz čega slijedi da je  $W_1$  upravo točka  $W$  spomenuta u teoremu.  $\square$

Točku  $W$  iz teorema 3.1 zovemo **anti-Steinerova točka** pravca  $p$  s obzirom na trokut  $ABC$ . Možemo se pitati zašto baš naziv *anti-Steinerova točka*. Naime, može se pokazati da točke simetrične nekoj točki  $R$  koja leži na opisanoj kružnici trokuta  $ABC$  s obzirom na pravce na kojima leže stranice trokuta  $ABC$ , leže na jednom pravcu koji prolazi kroz ortocentar trokuta  $ABC$ . Taj se pravac naziva **Steinerov pravac**<sup>1</sup> točke  $R$  s obzirom na trokut  $ABC$ .

Uočimo da je sukladno oznakama iz teorema 3.1 pravac  $p$  Steinerov pravac točke  $W$  s obzirom na trokut  $ABC$ . Naime, budući da  $W$  leži na pravcu  $p_a$  simetričnom pravcu  $p$  s obzirom na  $BC$ , točka simetrična točki  $W$  s obzirom na pravac  $BC$  leži na pravcu simetričnom pravcu  $p_a$  s obzirom na  $BC$ , a to je upravo pravac  $p$ . Slično vrijedi za točke simetrične točki  $W$  s obzirom na pravce  $AC$  i  $AB$ .

To opravdava naziv *anti-Steinerova točka*. Naziv *Steinerova točka* je naziv za određenu točku koja je povezana s prvim Brocardovim trokutom,  $X_{99}$  o kojoj se više može naći u online-enciklopediji o trokutu (vidi [11]).

Uočimo jedan zanimljiv korolar navedenog teorema.

**Korolar 3.2.** *Neka je  $ABC$  trokut. Pravci simetrični Eulerovom pravcu trokuta  $ABC$  s obzirom na stranice tog trokuta sijeku se u jednoj točki koja leži na opisanoj kružnici trokuta  $ABC$ .*

*Dokaz.* S obzirom da Eulerov pravac trokuta  $ABC$  prolazi kroz ortocentar, tvrdnja slijedi direktno iz teorema 3.1.  $\square$

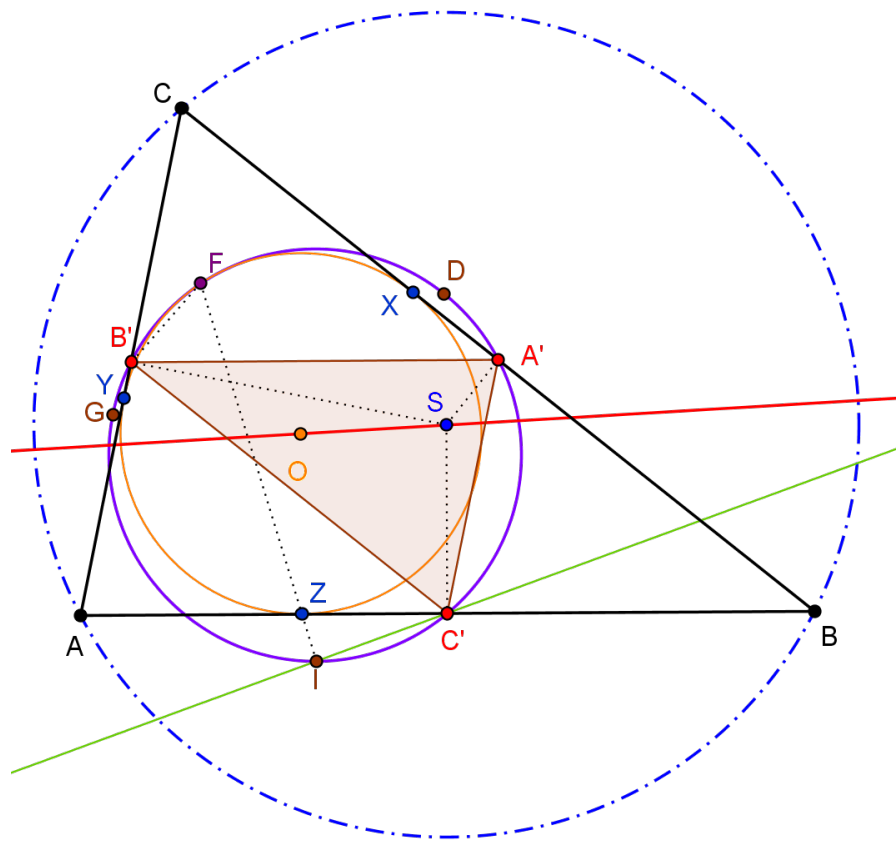
Sjecište opisano u korolaru 3.2 naziva se **Eulerova točka simetrije** trokuta  $ABC$ .

U nastavku promatramo anti-Steinerovu točku trokuta čiji su vrhovi polovišta stranica zadanog trokuta.

**Teorem 3.3.** *Neka je  $ABC$  trokut i neka je  $S$  središte opisane kružnice, a  $O$  središte upisane kružnice tog trokuta. Neka su  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$  polovišta stranica  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$ . Feuerbachova točka  $F$  trokuta  $ABC$  je anti-Steinerova točka pravca  $OS$  s obzirom na trokut  $A'B'C'$ .*

*Dokaz.* Prije svega moramo pokazati da je anti-Steinerova točka pravca  $OS$  s obzirom na trokut  $A'B'C'$  definirana, odnosno moramo pokazati da pravac  $OS$  prolazi kroz ortocentar trokuta  $A'B'C'$ .

<sup>1</sup>Jacob Steiner (1796. – 1863.), švicarski matematičar



Slika 3.3: Teorem 3.3

Naime, kako je točka  $S$  središte opisane kružnice trokuta  $ABC$ , to ona leži na simetralama stranica trokuta  $ABC$ . Stranice trokuta  $A'B'C'$  su zapravo srednjice trokuta  $ABC$  pa su one paralelne sa stranicama trokuta  $ABC$ . Štoviše, vrhovi trokuta  $A'B'C'$  su polovišta stranica trokuta  $ABC$  pa su simetrale stranice trokuta  $ABC$  pravci na kojima leže visine trokuta  $A'B'C'$ , pa je upravo točka  $S$  ortocentar trokuta  $A'B'C'$ . Stoga je  $OS$  Eulerov pravac trokuta  $A'B'C'$  pa zaista postoji anti-Steinerova točka  $W$  pravca  $OS$  s obzirom na trokut  $A'B'C'$  prema teoremu 3.1 vrijedi:

$$\angle C'B'W = 90^\circ - (\angle A'B', OS). \quad (3.5)$$

Neka su  $X, Y$  i  $Z$  redom točke dodira upisane kružnice trokuta  $ABC$  sa stranicama trokuta  $\overline{BC}, \overline{AC}$  i  $\overline{AB}$ . Neka je  $I$  sjecište Feuerbachove kružnice i okomice povučene u točki  $C'$  na

simetralu kuta  $BCA$ . Tada iz teorema 2.8 imamo:

$$\angle(ZI, CO) = \angle(AB, OS).$$

No, kako su  $AB$  i  $A'B'$  paralelni pravci to je:

$$\angle(ZI, CO) = \angle(AB, OS) = \angle(A'B', OS).$$

Nadalje, prema teoremu 2.6 je  $\angle(C'I, CO) = 90^\circ$ , pa točke  $B'$ ,  $C'$ ,  $I$  i  $F$  leže na Feuerbachovoj kružnici trokuta  $ABC$ . Sada imamo:

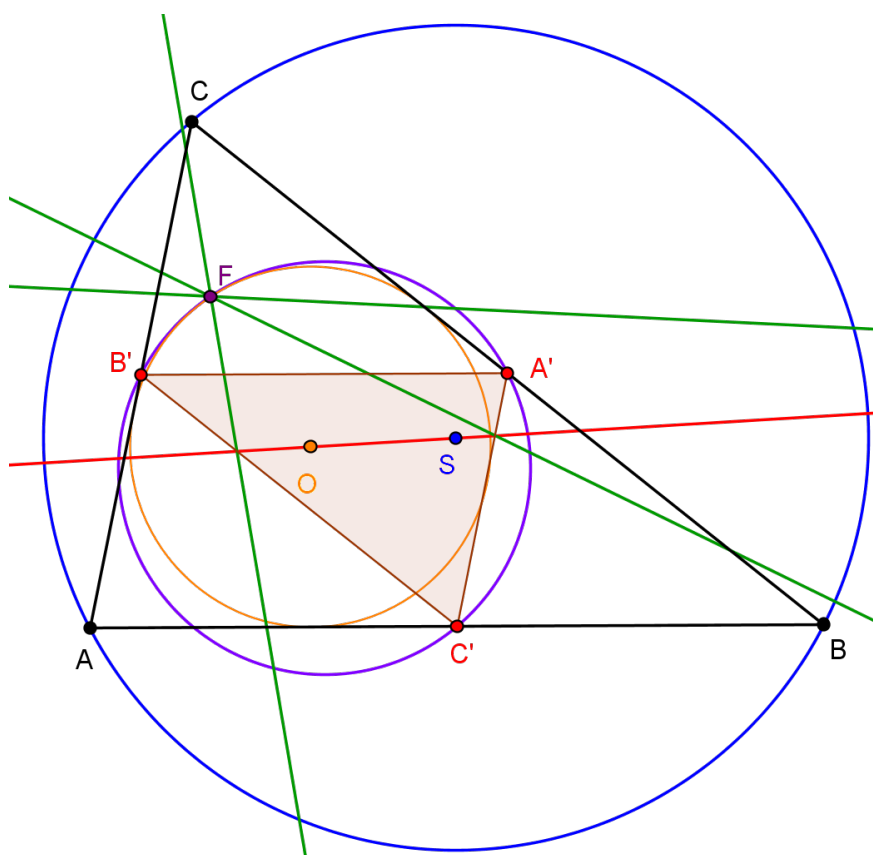
$$\begin{aligned} \angle C'B'F &= \angle C'IF = \angle(C'I, ZI) \\ &= \angle(C'I, CO) + \angle(CO, ZI) \\ &= 90^\circ - \angle(ZI, CO) \\ &= 90^\circ - \angle(A'B', OS). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Usporedbom (3.5) i (3.6) dobivamo:

$$\angle C'B'F = \angle C'B'W,$$

čime smo pokazali da točka  $F$  leži na pravcu  $B'W$ .

Analogno bismo pokazali  $F \in A'W$  te  $F \in C'W$ . No, kako su pravci  $A'W$ ,  $B'W$  i  $C'W$  različiti i sijeku se u  $W$ , znači da se točke  $W$  i  $F$  podudaraju. Prema tome, Feuerbachova točka  $F$  trokuta  $ABC$  je zaista anti-Steinerova točka pravca  $OS$  s obzirom na trokut  $A'B'C'$ .



Slika 3.4: Teorem 3.3: Feuerbachova točka trokuta  $ABC$  je anti-Steinerova točka pravca  $OS$  s obzirom na trokut  $A'B'C'$ .

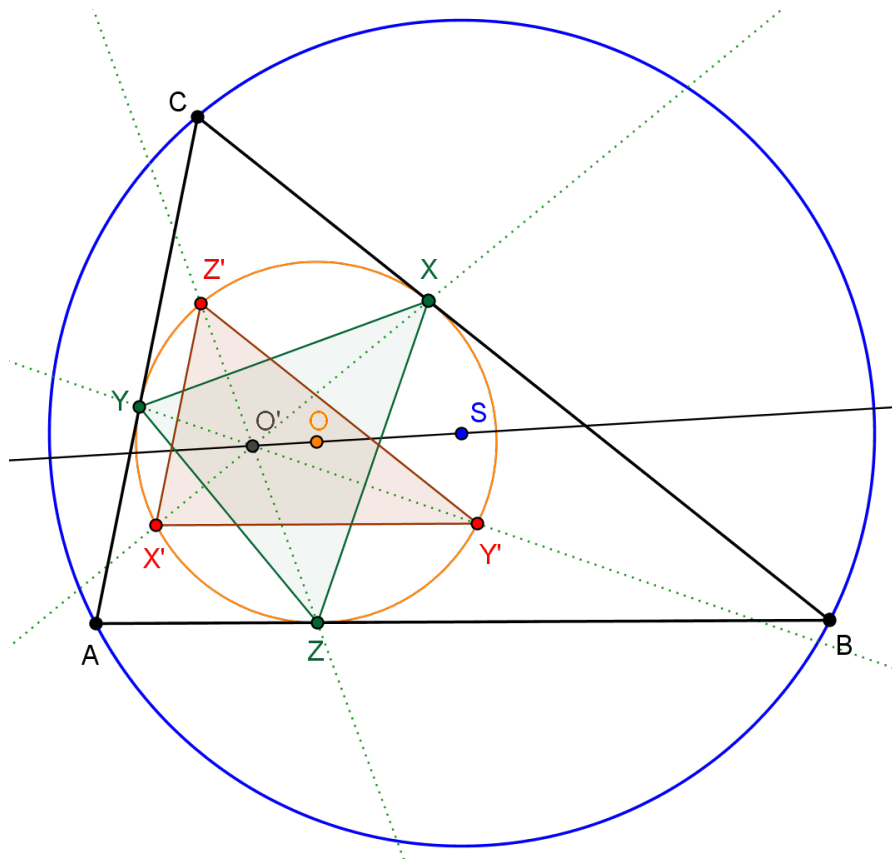
□

Uz trokut  $A'B'C'$  čiji su vrhovi polovišta stranica trokuta, uočimo da postoji još jedan zanimljiv trokut i to trokut  $XYZ$  čiji su vrhovi dirališta upisane kružnice i stranica promatranog trokuta  $ABC$ . U nastavku promatramo odnos trokuta  $XYZ$  i Feuerbachove točke trokuta  $ABC$ .

**Teorem 3.4.** *Neka je  $ABC$  trokut,  $S$  središte opisane kružnice, a  $O$  središte upisane kružnice tog trokuta. Neka su  $X, Y, Z$  dirališta upisane kružnice i stranica  $\overline{BC}, \overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  redom. Feuerbachova točka  $F$  trokuta  $ABC$  je anti-Steinerova točka pravca  $OS$  s obzirom na trokut  $XYZ$ .*

*Dokaz.* Opet prvo moramo dokazati da je anti-Steinerova točka pravca  $OS$  s obzirom na trokut  $XYZ$  definirana. Odnosno, moramo pokazati da ortocentar trokuta  $XYZ$  leži na

pravcu  $OS$ . Neka su točke  $X'$ ,  $Y'$  i  $Z'$  točke presjeka upisane kružnice trokuta  $ABC$  i pravaca na kojima leže visine trokuta  $XYZ$  povučene iz  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  redom.



Slika 3.5: Teorem 3.4 a)

Kako je  $ZZ'$  pravac na kojem leži visina trokuta  $XYZ$  povučena iz vrha  $Z$  to je  $ZZ' \perp XY$ , odnosno  $\angle(XY, ZZ') = 90^\circ$ . Prema svojstvu 6. iz teorema 1.9 imamo:

$$\begin{aligned} \angle YY'Z' &= \angle YZZ' = \angle(YZ, ZZ') \\ &= \angle(YZ, XY) + \angle(XY, ZZ') \\ &= \angle ZYX + 90^\circ. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Sada možemo primijeniti teorem o kutu između tangente i tetive (1.3):

$$\angle ZYX = \angle(ZX, BC). \tag{3.8}$$

Sada računamo:

$$\begin{aligned}
 \angle YY'Z' &= \angle(YY', Y'Z') = \angle ZYX + 90^\circ \\
 &= \angle(ZX, BC) + \angle(BO, ZX) \\
 &= \angle(BO, ZX) + \angle(ZX, BC) \\
 &= \angle(BO, BC) \\
 &= \angle OBC.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Nadalje, znamo  $YY' \perp XZ$  i  $XZ \perp BO$ , pa je  $YY' \parallel BO$ . Prema svojstvu 2. iz teorema 1.9 vrijedi:

$$\angle(YY', Y'Z') = \angle(BO, Y'Z').$$

Ako to usporedimo s (3.9) imamo:

$$\angle(BO, Y'Z') = \angle(BO, BC) \Rightarrow Y'Z' \parallel BC.$$

Analogno, bismo dobili  $X'Y' \parallel AB$  i  $X'Z' \parallel AC$ . Zaključujemo da su trokuti  $ABC$  i  $X'Y'Z'$  homotetični. Neka je  $M$  centar homotetije koja preslikava trokut  $ABC$  u trokut  $X'Y'Z'$ . Ta homotetija preslikava središte opisane kružnice trokuta  $ABC$  (točku  $S$ ) u središte opisane kružnice trokuta  $X'Y'Z'$ , a to je točka  $O$ . Dakle, točke  $S$ ,  $O$  i  $M$  su kolinearne.

Neka je  $O'$  slika točke  $O$  pri opisanoj homotetiji. Tada su točke  $M$ ,  $O$  i  $O'$  kolinearne, a kako su i  $S$ ,  $O$  i  $M$  kolinearne, slijedi da točka  $O'$  leži na pravcu  $OS$ . Pri opisanoj homotetiji točka  $A$  preslikava se u točku  $X'$ , točka  $B$  u  $Y'$  te  $C$  u  $Z'$ . Stoga vrijedi:

$$\angle O'Y'Z' = \angle OBC. \tag{3.10}$$

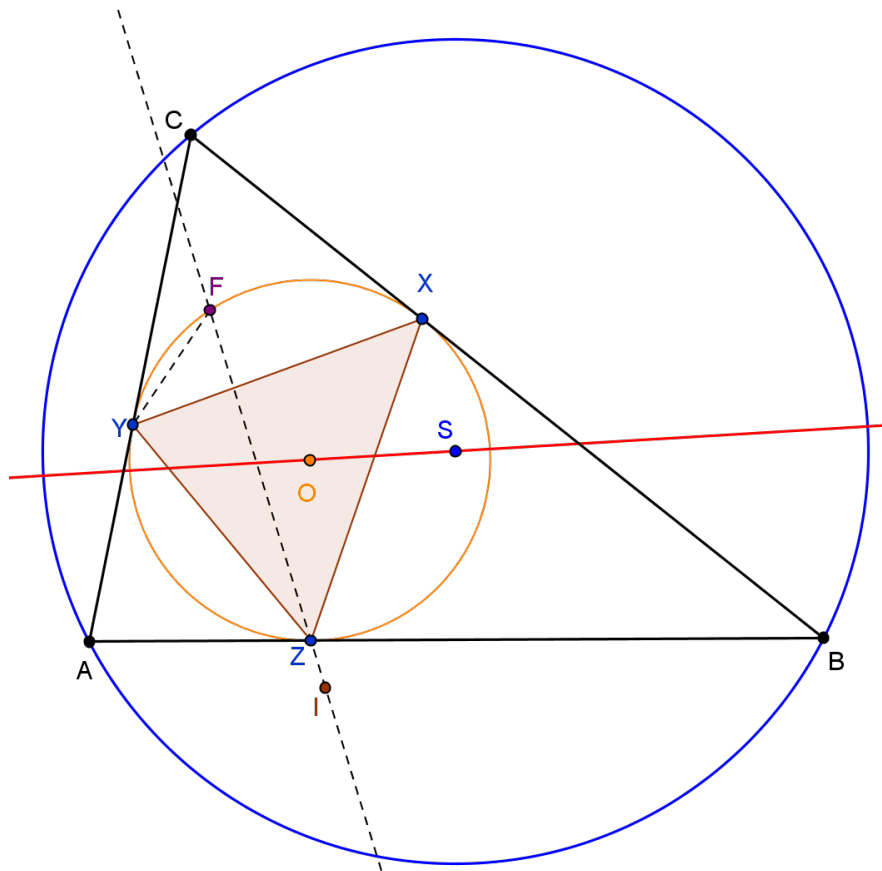
Iz (3.9) i (3.10) slijedi:

$$\angle O'Y'Z' = \angle YY'Z'. \tag{3.11}$$

Dakle,  $O' \in YY'$ , što znači da točka  $O'$  leži na pravcu koji sadrži visinu trokuta  $XYZ$  spuštenu iz vrha  $Y$ . Slično se pokazuje:  $O' \in XX'$  i  $O' \in ZZ'$ . Dakle, točka  $O'$  je ortocentar trokuta  $XYZ$ .

Pokazali smo da ortocentar trokuta  $XYZ$  leži na pravcu  $OS$ , pa prema teoremu 3.1 postoji anti-Steinerova točka  $W$  tog pravca s obzirom na trokut  $XYZ$  i vrijedi:

$$\angle ZYW = 90^\circ - \angle(XY, OS). \tag{3.12}$$



Slika 3.6: Teorem 3.4 b)

Neka je  $I$  sjecište Feuerbachove kružnice i okomice na simetralu kuta  $BCA$  povučene u polovištu stranice  $\overline{AB}$ . Koristeći teorem o kutu između tangente i tetive, svojstva orijen-

tiranih kutova (1.9) i teorem 2.8 računamo:

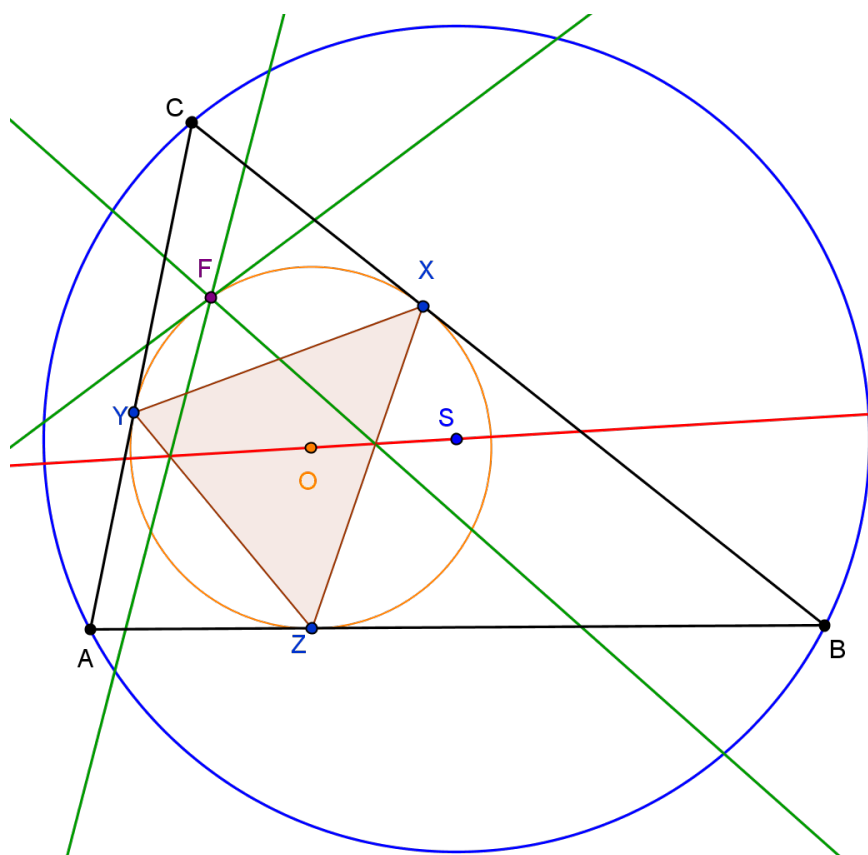
$$\begin{aligned}
 \angle ZYF &= \angle(AB, ZF) \\
 &= \angle(AB, ZI) \\
 &= \angle(AB, CO) + \angle(CO, ZI) \\
 &= \angle(AB, CO) - \angle(ZI, CO) \\
 &= \angle(AB, CO) - \angle(AB, OS) \\
 &= \angle(OS, AB) + \angle(AB, CO) \\
 &= \angle(OS, CO) \\
 &= \angle(OS, XY) + \angle(XY, CO) \\
 &= 90^\circ - \angle(XY, OS)
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Usporedbom (3.12) i (3.13) dobivamo:

$$\angle ZYF = \angle ZYW \Rightarrow F \in YW.$$

Slično,  $F \in XW$  i  $F \in ZW$ . Dakle, točka  $F$  je presjek pravaca  $XW$ ,  $YW$  i  $ZW$ , a oni su različiti, a imaju i zajedničku točku  $W$ , pa slijedi  $F = W$ . Time je dokazano da je točka Feuerbachova točka  $F$  trokuta  $ABC$  anti-Steinerova točka pravca  $OS$  s obzirom na trokut  $XYZ$ .





Slika 3.7: Teorem 3.4: Feuerbachova točka trokuta  $ABC$  je anti-Steinerova točka pravca  $OS$  s obzirom na trokut  $XYZ$ .

□

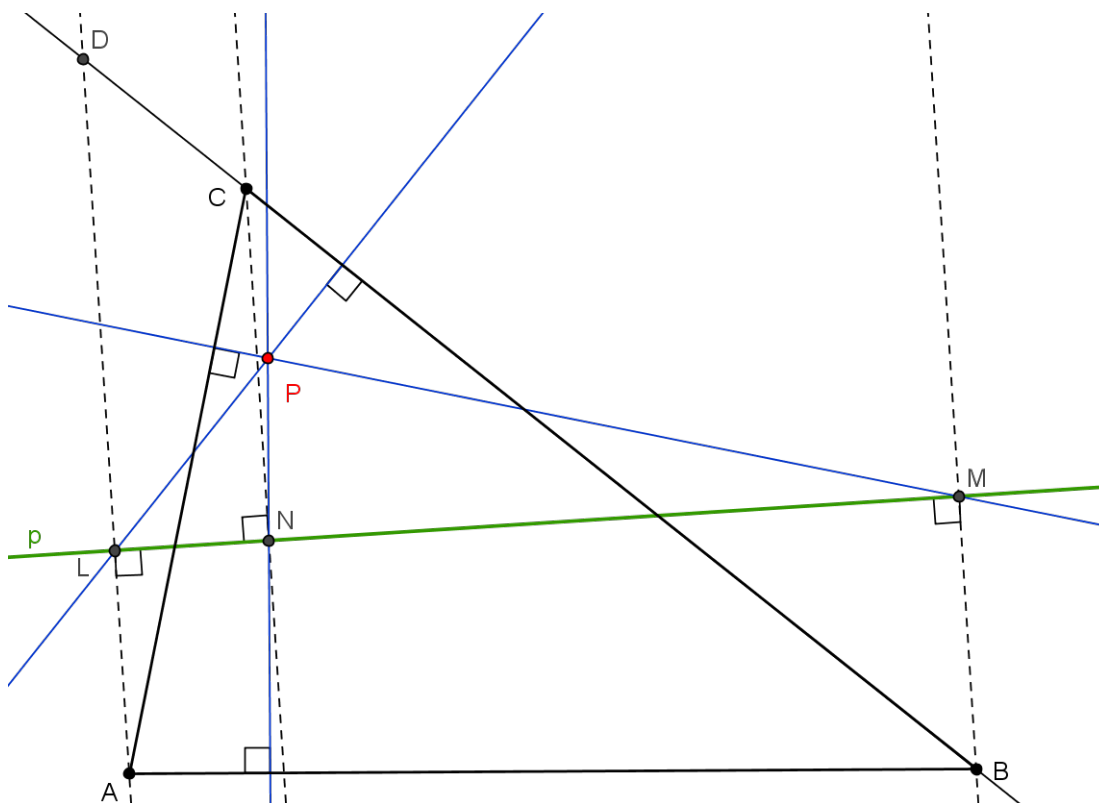
Uočimo da je točka  $O$  središte opisane kružnice trokuta  $XYZ$ . Pokazali smo da i ortocentar tog trokuta leži na pravcu  $OS$ , pa je  $OS$  Eulerov pravac tog trokuta.

## 3.2 Feuerbachova točka kao ortopol

Kao što smo vidjeli Feuerbachova točka i pravac koji prolazi kroz središte upisane i središte opisane kružnice trokuta su povezani. I ovom ćemo potpoglavljju promatrati odnos među njima. Prije toga navedimo teorem iz kojeg prozlazi definicija središnjeg pojma ovog potpoglavlja.

**Teorem 3.5.** *Neka je  $p$  pravac i  $ABC$  trokut. Neka su točke  $L$ ,  $M$  i  $N$  nožišta okomica spuštenih iz vrhova  $A$ ,  $B$  i  $C$  na pravac  $p$ , redom. Okomice spuštene iz točaka  $L$ ,  $M$ ,  $N$  na stranice  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  redom sijeku se u jednoj točki  $P$ .*

*Dokaz.* Neka je  $P$  presjek okomice iz točke  $L$  na  $BC$  i okomice iz  $M$  na  $AC$ . Nadalje, neka je  $D = AL \cap BC$ .



Slika 3.8: Točka  $P$  je ortopol pravca  $p$  s obzirom na trokut  $ABC$ .

Uočimo da su stranice trokuta  $ACD$  i  $MPL$  u parovima okomite:  $AC \perp PM$ ,  $AD \perp LM$  i  $CD \perp PL$ . Dakle, odgovarajući kutovi u tim trokutima su kutovi s okomitim kracima. Znamo da ako su dva kuta s okomitim kracima oba šiljasta ili oba tupa, tada su međusobno sukladni. Stoga su trokuti  $ACD$  i  $MPL$  slični po  $K-K-K$  teoremu o sličnosti trokuta. Stoga vrijedi:

$$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|LM|}{|PL|}. \quad (3.14)$$

Neka je  $Q$  sjecište okomice iz  $L$  na  $BC$  i okomice iz  $N$  na  $AB$ . Tada trokuti  $ABD$  i  $NQL$  imaju stranice u parovima okomite, pa su slični. Odnosno, imamo:

$$\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|QL|}{|LN|}. \quad (3.15)$$

Nadalje, jer je  $AL \parallel BM \parallel CN$ , prema Talesovom teoremu o proporcionalnosti je:

$$\frac{|CD|}{|BD|} = \frac{|LN|}{|LM|}. \quad (3.16)$$

Množenjem (3.14), (3.15) i (3.16), dobivamo sljedeće:

$$1 = \frac{|AD|}{|CD|} \cdot \frac{|BD|}{|AD|} \cdot \frac{|CD|}{|BD|} = \frac{|LM|}{|PL|} \cdot \frac{|QL|}{|LN|} \cdot \frac{|LN|}{|LM|} = \frac{|QL|}{|PL|}.$$

Dakle, dobili smo  $|PL| = |QL|$ . Pošto točke  $P$  i  $Q$  leže na istoj okomici iz  $L$  na  $BC$  mora biti  $P \equiv Q$ .  $\square$

Točku  $P$  iz teorema 3.5 nazivamo **ortopol** pravca  $p$  s obzirom na trokut  $ABC$ .

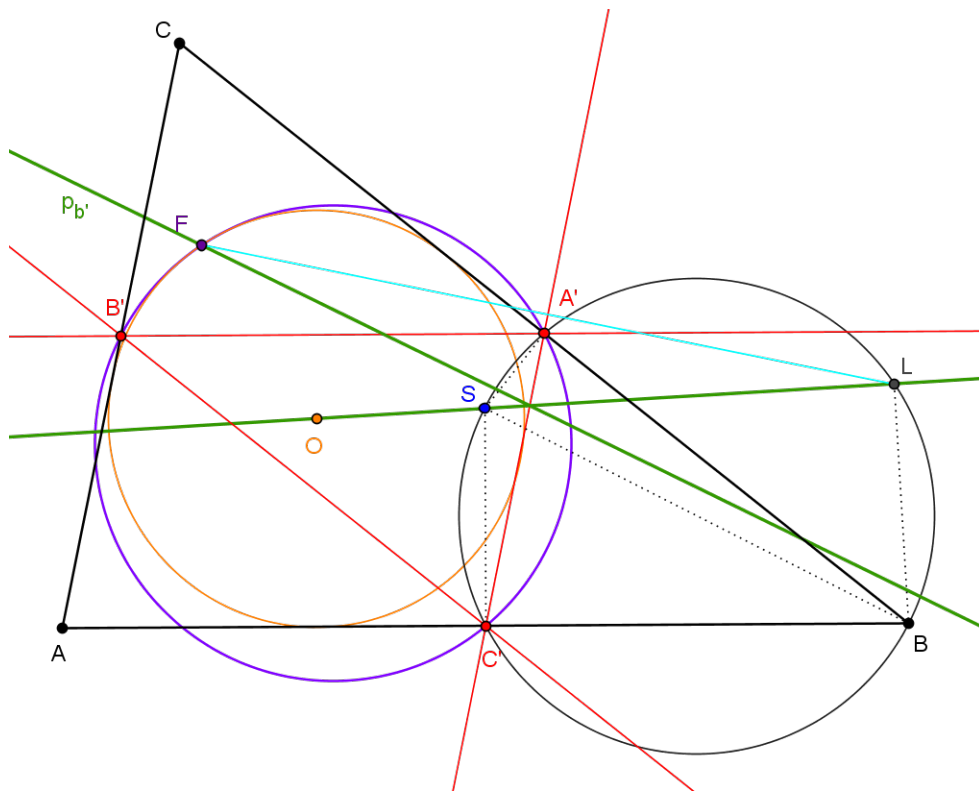
U ovom ćemo se potpoglavlju baviti sljedećim teoremom:

**Teorem 3.6.** *Neka je  $ABC$  trokut,  $S$  središte opisane kružnice, a  $O$  središte upisane kružnice tog trokuta. Feuerbachova točka  $F$  trokuta  $ABC$  je ortopol pravca  $OS$  s obzirom na trokut  $ABC$ .*

Prije dokaza tog teorema navest ćemo iskaz i dokaz teorema potrebnog za dokaz iskazanog teorema.

**Teorem 3.7.** *Neka je  $ABC$  trokut,  $S$  središte opisane kružnice, a  $O$  središte upisane kružnice tog trokuta. Neka su  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$  polovišta stranica  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$ , redom. Točke  $J$ ,  $K$ ,  $L$  simetrične Feuerbachovoj točki trokuta  $ABC$  s obzirom na pravce  $B'C'$ ,  $A'B'$ ,  $A'C'$  nožišta su okomica iz vrhova  $A$ ,  $B$ ,  $C$  na pravac  $OS$ .*

*Dokaz.* Neka je  $p_{B'}$  pravac simetričan pravcu  $OS$  s obzirom na pravac  $A'C'$ . Prema teoremu 3.3 pravac  $p_{B'}$  prolazi kroz točku  $F$  pa njena osnosimetrična slika s obzirom na pravac  $A'C'$  mora ležati na pravcu  $OS$ . Označimo tu točku slovom  $L$ .



Slika 3.9: Teorem 3.7

Kako su  $SA'$  i  $SC'$  simetrale stranica  $\overline{BC}$  i  $\overline{AB}$  vrijedi:

$$\angle BC'S = \angle SA'B = 90^\circ.$$

Stoga točke  $A'$  i  $C'$  leže na kružnici promjera  $\overline{BS}$ .

Sada uočimo trokute  $A'B'C'$  i  $A'BC'$ . Oni imaju jednu zajedničku stranicu  $\overline{A'C'}$ , a za ostale stranice, vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} |A'B'| &= \frac{1}{2}|AB| = |BC'| \\ |B'C'| &= \frac{1}{2}|BC| = |A'B|. \end{aligned}$$

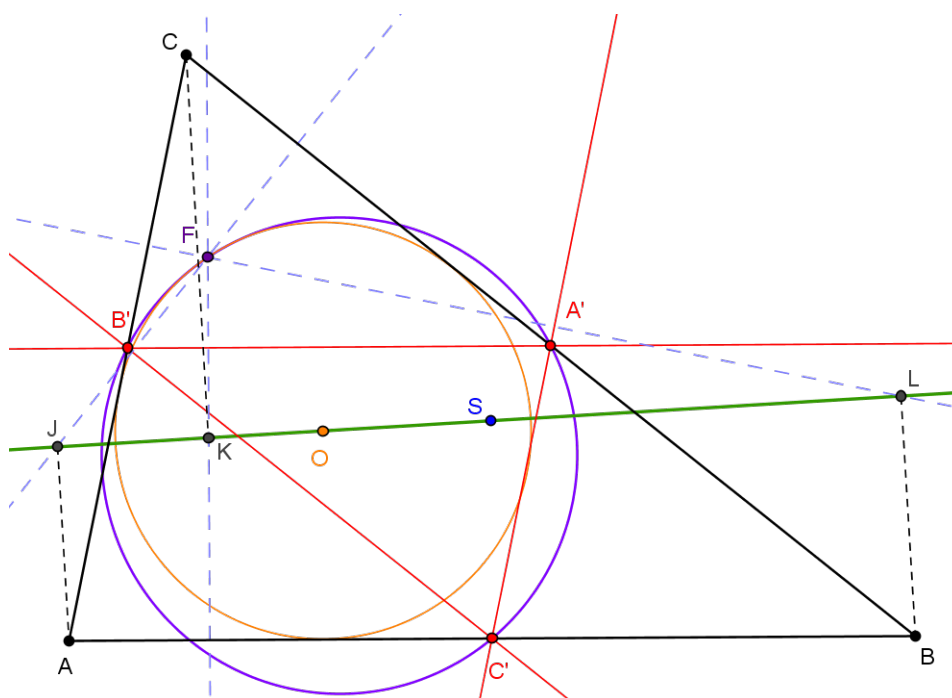
Dakle, prema teoremu  $S-S-S$  o sukladnosti trokuta trokutu  $A'B'C'$  i  $A'BC'$  su sukladni. Prema tome i njihove opisane kružnice su sukladne. Štoviše, uočimo da su te kružnice međusobno simetrične s obzirom pravac  $\overline{A'C'}$ . Budući da točka  $F$  leži na kružnici opisanoj trokutu  $A'B'C'$  jer je to Feuerbachova kružnica trokuta  $ABC$ , njoj simetrična točka (točka

$L$ ) mora ležati na kružnici opisanoj trokutu  $A'BC'$ . Prema Talesovom teoremu o obodnom kutu nad promjerom kružnice vrijedi  $\angle BLS = 90^\circ$ , odnosno točka  $L$  je nožište okomice spuštene iz vrha  $B$  na pravac  $OS$ .

Analogno se pokazuju i preostale dvije tvrdnje. □

Sada možemo krenuti s dokazom teorema 3.6.

*Dokaz.* Prema teoremu 3.7 točke  $J$ ,  $K$  i  $L$  su nožišta okomica iz vrhova  $A$ ,  $B$  i  $C$  na pravac  $OS$ .



Slika 3.10: Teorem 3.6

Nadalje, točka  $L$  je simetrična  $F$  s obzirom na pravac  $A'C'$ , pa je  $FL \perp A'C'$ . Kako je  $A'C' \parallel AC$ , to je  $FL \perp AC$ . Stoga točka  $F$  leži na okomici spuštenoj iz točke  $L$  na pravac  $AC$ . Analogno možemo pokazati da točka  $F$  leži na okomicama spuštenih uz točkaka  $J$  i  $K$  na pravce  $BC$  i  $AB$  redom. Dakle, promatrane okomice sijeku se u točki  $F$  pa prema definiciji ortopola slijedi tvrdnja teorema. □

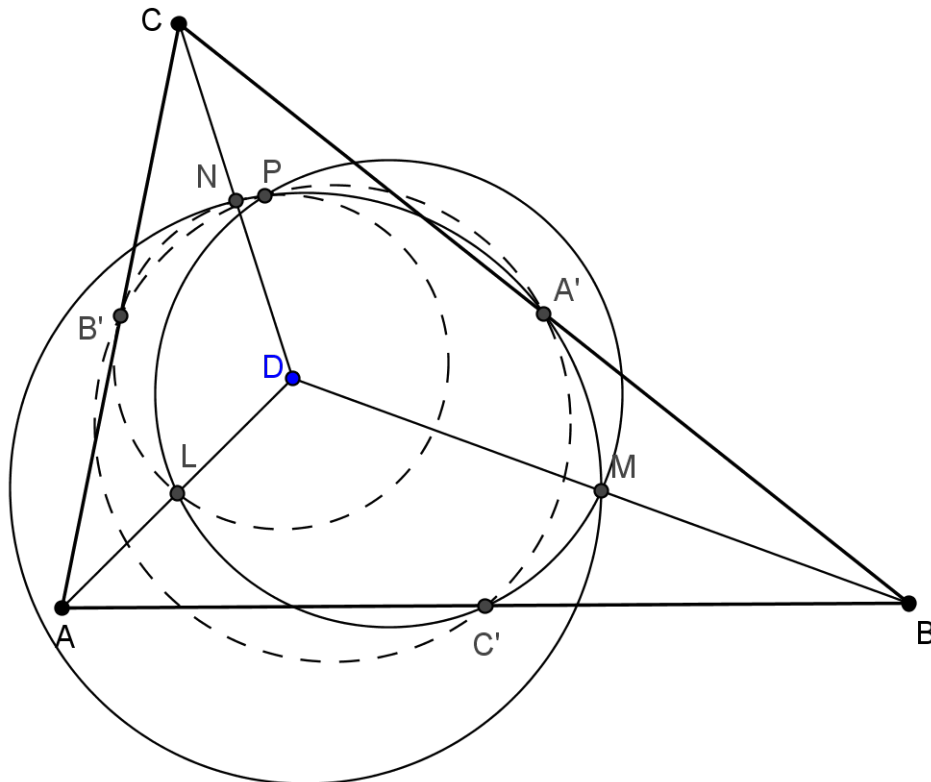
### 3.3 Feuerbachova točka kao Ponceletova točka

Definirajmo pojam *nožišnog trokuta* koji je jedan od središnjih pojmova ovog potpoglavlja.

**Definicija 3.8.** Neka je dan trokut  $ABC$  i točka  $P$ . Neka su  $P_1$ ,  $P_2$  i  $P_3$  nožišta okomica iz točke  $P$  na pravce  $BC$ ,  $CA$  i  $AB$  redom. Trokut  $P_1P_2P_3$  nazivamo **nožišni trokut** točke  $P$  s obzirom na trokut  $ABC$ .

**Teorem 3.9.** Neka su  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  točke ravnine. Feuerbachove kružnice trokuta  $ABC$ ,  $ABD$ ,  $BCD$  i  $ACB$  sijeku se u jednoj točki.

*Dokaz.* Neka su točke  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$  polovišta dužina  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$ . Neka su točke  $L$ ,  $M$  i  $N$  polovišta  $\overline{DA}$ ,  $\overline{DB}$  i  $\overline{DC}$ . Neka je točka  $P$  sjecište Feuerbachovih kružnica trokuta  $BDC$  i  $ABD$  različito od  $M$ .



Slika 3.11: Teorem 3.9

Tada na Feuerbachovoj kružnici trokuta  $ABD$  leže točke  $L$ ,  $M$ ,  $C'$  i  $P$ , pa je  $\angle LPM = \angle LC'M$ . Slično,  $\angle NPM = \angle NA'M$ . Znamo da su  $\overline{LC'}$ ,  $\overline{LM}$  i  $\overline{MC'}$  srednjice trokuta  $ABD$  pa je četverokut  $LC'MD$  paralelogram. Zbog toga je  $\angle LC'M = \angle MDL = \angle BDA$ . Analogno,  $\angle MA'N = \angle NDM = \angle CDB$  i  $\angle NB'L = \angle LDN = \angle ADC$ . Dakle,  $\angle LPM = \angle BDA$  i  $\angle NPM = \angle BDC$ .

Sada koristeći svojstva orijentiranih kutova (teorem 1.9) možemo računati:

$$\begin{aligned}
 \angle LPN &= \angle LPM + \angle MPN \\
 &= \angle BDA - \angle NPM \\
 &= \angle BDA - \angle BDC \\
 &= \angle BDA + \angle CDB \\
 &= \angle CDB + \angle BDA \\
 &= \angle CDA \\
 &= \angle NDL = \angle LB'N.
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

Iz (3.17) i svojstva 6. iz teorema 1.9 zaključujemo da točka  $P$  leži na kružnici kroz točke  $L$ ,  $N$  i  $B'$ , a to je upravo Feuerbachova kružnica trokuta  $ACD$ .

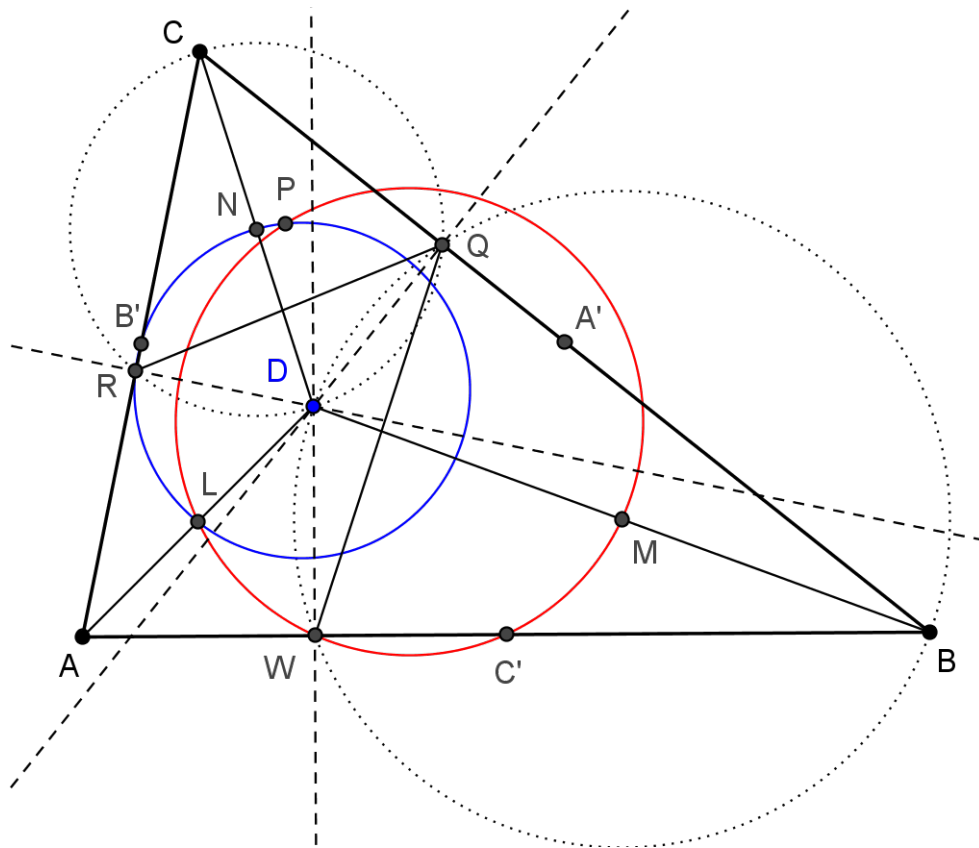
Slično se pokaže i za ostale kružnice.  $\square$

Točku presjeka  $P$  iz teorema 3.9 nazivamo **Ponceletova točka** četvorke točaka  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$ .

Jednu karakterizaciju Ponceletove točke iznosi sljedeći teorem.

**Teorem 3.10.** *Neka su  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  četiri točke ravnine. Četiri kružnice opisane nožišnim trokutima točaka  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  s obzirom na trokute  $BCD$ ,  $ACD$ ,  $ABD$  i  $ABC$  redom, sijeku se u Ponceletovoj točki promatrane četvorke točaka.*

*Dokaz.* Neka su točke  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $L$ ,  $M$  i  $N$  redom polovišta dužina  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AB}$ ,  $\overline{DA}$ ,  $\overline{DB}$  i  $\overline{DC}$ . Neka su  $W$ ,  $Q$  i  $R$  redom ortogonalne projekcije točke  $D$  na pravce  $AB$ ,  $BC$  i  $CA$ .



Slika 3.12: Teorem 3.10

Feuerbachova kružnica trokuta  $ABD$  prolazi kroz točke  $M$ ,  $L$  i  $W$ , dok Feuerbachova kružnica trokuta  $ACD$  prolazi kroz točke  $R$ ,  $B'$  i  $L$ . Prema teoremu 3.9 te se kružnice sijeku u točki  $L$  i Ponceletovoj točki  $P$  četvorke točaka  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$ . Točke  $R$  i  $Q$  leže na kružnici promjera  $\overline{CD}$ , a točke  $Q$  i  $W$  leže na kružnici promjera  $\overline{BD}$ . Stoga vrijedi:

$$\begin{aligned} \angle RQW &= \angle RQD + \angle DQW \\ &= \angle RCD + \angle DBW \\ &= \angle ACD + \angle DBA. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Također je:

$$\angle RPW = \angle RPL + \angle LPW. \quad (3.19)$$

Kako  $R$ ,  $P$ ,  $L$  i  $B'$  leže na Feuerbachovoj kružnici trokuta  $ACD$  imamo  $\angle RPL = \angle RB'L$ , a kako je  $B'L$  srednjica trokuta  $ACD$  vrijedi  $\angle RB'L = \angle ACD$ .

Slično, jer  $L$ ,  $P$ ,  $W$  i  $M$  leže na Feuerbachovoj kružnici trokuta  $ABD$  vrijedi  $\angle LPW = \angle LMW$ . Kako je trokut  $BWD$  pravokutan, a  $M$  polovište njegove hipotenuze, stoga i



središte njegove opisane kružnice, to je  $|MB| = |MW|$ , odnosno trokut  $WMB$  je jednakokrtačan. Tada je  $\angle MBW = \angle BWM$ . Neka je  $G$  polovište dužine  $\overline{DW}$ . Kako je  $LM$  srednjica, a  $DW$  pravac na kojem leži visina trokuta  $ABD$ , to je  $LM \perp DW$ , odnosno trokut  $WMG$  je pravokutan pa imamo:

$$\begin{aligned}\angle LMW &= \angle(LM, MW) \\ &= \angle(AB, MW) \\ &= \angle BWM = \angle MBW = \angle DBA.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Uvrstivši dobiveno u (3.19) imamo:

$$\angle RPW = \angle RPL + \angle LPW = \angle ACD + \angle DBA.\tag{3.21}$$

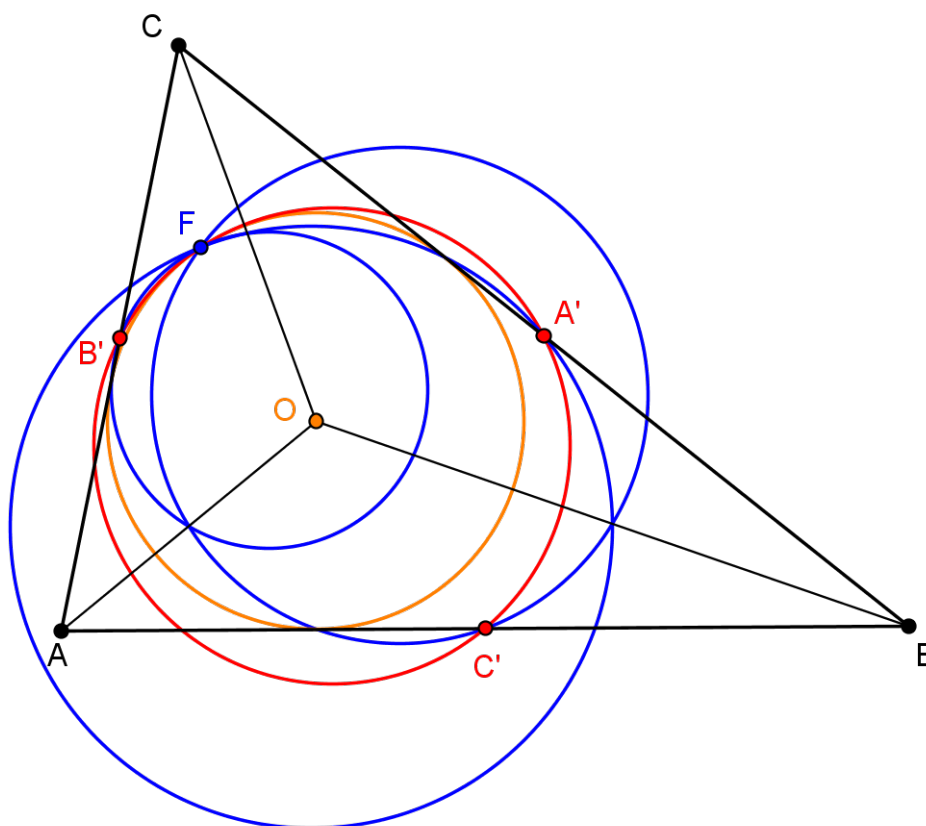
Sada iz (3.18) i (3.21) slijedi  $\angle RPW = \angle RQW$ , pa iz svojstva 6. teorema 1.9 znamo da su točke  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  i  $W$  konciklične. Dakle, dokazali smo da točka  $P$  leži na opisanoj kružnici trokuta  $WQR$ , tj. nožišnog trokuta točke  $D$  s obzirom na trokut  $ABC$ .

Analogno se pokaže i za ostale kružnice.  $\square$

Sad promotrimo vezu Feuerbachove i Ponceletove točke u nekom trokutu.

**Teorem 3.11.** *Neka je  $ABC$  trokut i  $O$  središte upisane kružnice tog trokuta. Feuerbachove kružnice trokuta  $AOB$ ,  $AOC$  i  $BOC$  sijeku se u Feuerbachovoj točki trokuta  $ABC$ .*

*Dokaz.* Prema teoremu 3.9 Feuerbachove kružnice trokuta  $AOB$ ,  $AOC$ ,  $BOC$  i  $ABC$  sijeku se u Ponceletovoj točki četvorke  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $O$ . Prema teoremu 3.10 ta Ponceletova točka leži na opisanoj kružnici nožišnog trokuta točke  $O$  s obzirom na trokut  $ABC$ , a to je upisana kružnica trokuta  $ABC$ . Dakle, tražena točka je sjecište Feuerbachove kružnice trokuta  $ABC$  i njegove upisane kružnice. Prema teoremu 2.9 to je Feuerbachova točka trokuta  $ABC$ .



Slika 3.13: Teorem 3.11

□

### 3.4 Feuerbachova točka i Eulerova točka simetrije

Do sada je jednu od središnjih uloga naših razmatranja imao pravac koji sadrži središte opisane i upisane kružnice danog trokuta. U nastavku tu ulogu preuzimaju Eulerovi pravci određenih trokuta. Podsjetimo, Eulerov pravac je pravac koji sadrži ortocentar, središte opisane kružnice i težište trokuta. Prema korolaru 3.2 pravci simetrični Eulerovom pravcu s obzirom na stranice promatranog trokuta sijeku se u jednoj točki koja se naziva Eulerova točka simetrije.

**Teorem 3.12.** *Neka je  $ABC$  trokut i  $O$  središte upisane kružnice tog trokuta. Neka su  $C_a$  i  $C_b$  redom ortogonalne projekcije točke  $C$  na simetrale kuta  $AO$  i  $BO$ . Analogno defini-*

ramo i točke  $A_b, A_c, B_a$  i  $B_c$ . Eulerovi pravci trokuta  $AA_bA_c, BB_aB_c$  i  $CC_aC_b$  sijeku se u Feuerbachovoj točki trokuta  $ABC$ .

Prije dokaza dokažimo jednu kratku lemu o ortocentru koju ćemo koristiti u nastavku.

**Lema 3.13.** *Neka je  $ABC$  trokut i  $H$  ortocentar trokuta. Neka je  $R$  polumjer opisane kružnice trokuta  $ABC$ . Tada vrijede sljedeće jednakosti:*

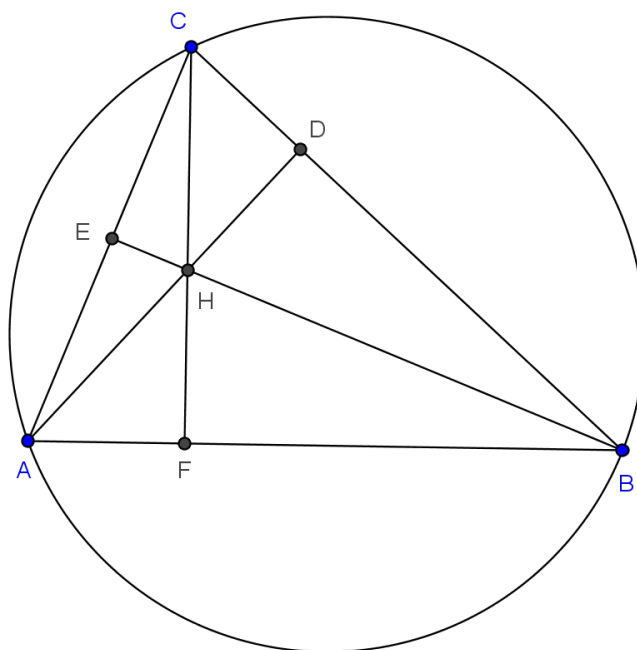
$$|AH| = 2R \cdot \cos(\angle CAB),$$

$$|BH| = 2R \cdot \cos(\angle ABC),$$

$$|CH| = 2R \cdot \cos(\angle BCA).$$

U ovoj lemi i njenom dokazu ne koristimo orijentirane kutove.

*Dokaz.* Neka su  $D, E, F$  nožišta okomica iz vrhova  $A, B$  i  $C$  na nasuprotne stranice trokuta.



Slika 3.14: Udaljenost ortocentra od vrhova trokuta.

Iz pravokutnog trokuta  $AEH$  znamo:

$$|AH| = \frac{|AE|}{\sin(\angle AHE)}. \quad (3.22)$$

No, iz pravokutnog trokuta  $ABE$  imamo:

$$|AE| = |AB| \cdot \cos(\angle EAB) = |AB| \cdot \cos(\angle CAB). \quad (3.23)$$

Trokut  $AHE$  sličan je trokutu  $ACD$ , pa je  $\angle AHE = \angle ACD = \angle ACB$ . Iz toga i iz (3.22) i (3.23) dobivamo:

$$|AH| = \frac{|AB| \cdot \cos(\angle CAB)}{\sin(\angle BCA)}.$$

Iz poučka o sinusima znamo:

$$\frac{|AB|}{\sin(\angle BCA)} = 2R,$$

pa je zaista  $|AH| = 2R \cdot \cos(\angle CAB)$ . □

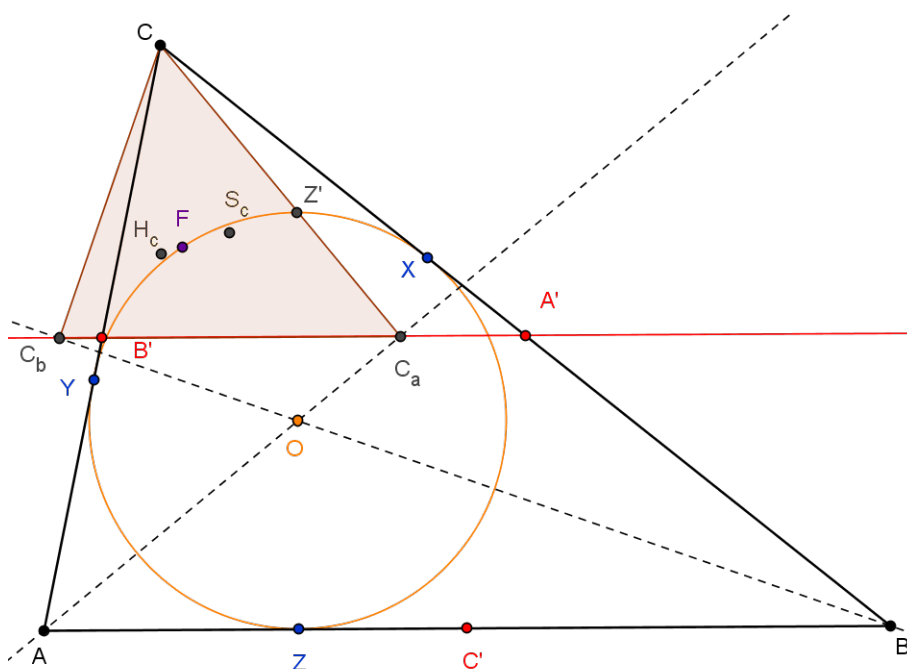
Sada možemo krenuti s dokazom teorema 3.12.

*Dokaz.* Pokazat ćemo da Eulerov pravac trokuta  $CC_aC_b$  prolazi kroz Feuerbachovu točku  $F$  trokuta  $ABC$ . Za ostale trokute, dokaz je analogan.

Neka je  $H_c$  ortocentar trokuta  $CC_aC_b$ , te  $S_c$  središte opisane kružnice tog trokuta. Tada je  $CC_b \perp BO$  i  $CC_a \perp AO$  pa točke  $C_a$  i  $C_b$  leže na kružnici čiji je promjer dužina  $\overline{CO}$ . No, tada ta kružnica prolazi kroz vrhove trokuta  $CC_aC_b$  pa mu je to opisana kružnica. Stoga je točka  $S_c$  polovište dužine  $\overline{CO}$  te vrijedi:

$$\angle(CO, OC_b) = \angle(CC_a, C_aC_b). \quad (3.24)$$

Pokažimo sada da je  $C_bC_a \parallel AB$ .



Slika 3.15: Teorem 3.12 a)

Prema svojstvu orijentiranih kutova (teorem 1.9) i iz  $C_b \in OB$  imamo:

$$\begin{aligned} \angle(CO, OC_b) &= \angle(CO, BC) + \angle(BC, OC_b) \\ &= \angle(CO, BC) + \angle(BC, OB). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Kako je  $\angle(CO, BC)$  polovina kuta pri vrhu  $C$ , a  $\angle(BC, OB)$  polovina kuta pri vrhu  $B$  u trokutu  $ABC$ , iz leme 1.10, znamo da vrijedi:

$$\angle(CO, BC) + \angle(BC, OB) = 90^\circ - \angle(AO, AC). \quad (3.26)$$

Sada zbog  $CC_a \perp AO$  dobivamo:

$$\begin{aligned} \angle(CO, OC_b) &= \angle(CO, BC) + \angle(BC, OB) \\ &= 90^\circ - \angle(AO, AC) \\ &= \angle(AC, CC_a). \end{aligned} \quad (3.27)$$

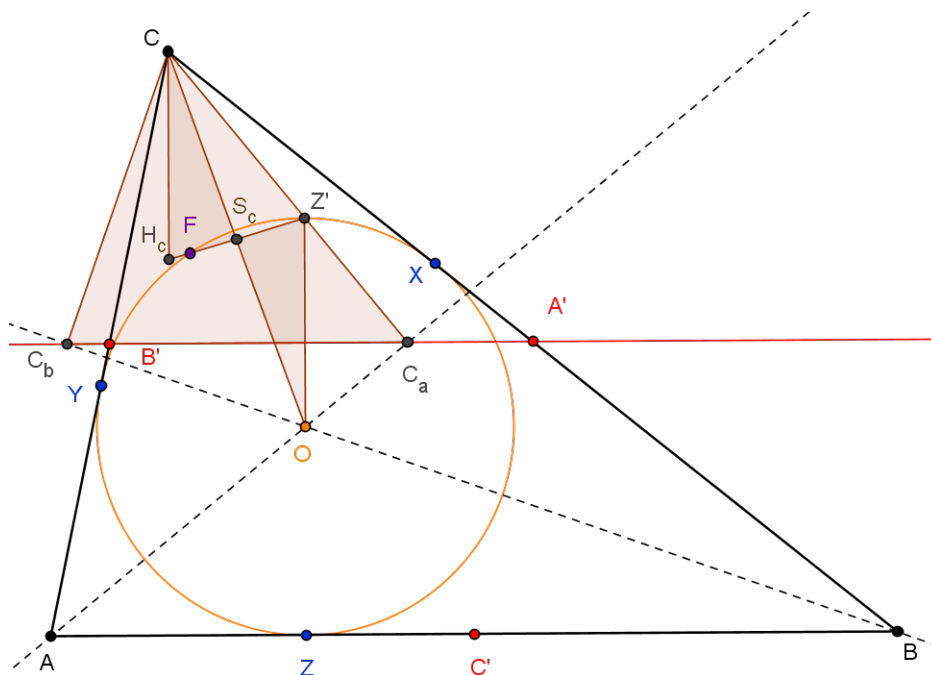
Iz (3.24) i (3.27) dobivamo:

$$\angle(AC, CC_a) = \angle(CC_a, C_aC_b). \quad (3.28)$$

Neka je  $V$  sjecište  $AC$  i  $C_aC_b$  te  $U$  polovište  $\overline{CC_a}$ . Zbog (3.28) trokut  $CVC_a$  je jednako-kračan, pa je  $|VC| = |VC_a|$ . Tada je  $VU$  okomito na  $CC_a$ . Dakle,  $VU \parallel AC_a$ . Dužina  $\overline{VU}$  je srednjica trokuta  $CAC_a$ , pa je konačno  $V$  polovište od  $\overline{AC}$ . Stoga  $C_bC_a$  prolazi kroz polovište stranice  $\overline{CA}$ .

Slično se pokaže da  $C_bC_a$  prolazi kroz polovište stranice  $\overline{BC}$ . Prema teoremu o srednjici trokuta slijedi  $C_bC_a \parallel AB$ .

Neka je  $Z'$  točka simetrična točki  $Z$  s obzirom na točku  $O$ . Uočimo da tada i  $Z'$  leži na upisanoj kružnici trokuta  $ABC$ . Primijetimo da je  $CH_c \parallel OZ'$ . Naime, zbog pokazane paralelnosti je  $OZ' \perp C_bC_a$ , a pošto je  $H_c$  ortocentar trokuta  $CC_aC_b$  vrijedi  $CH_c \perp C_bC_a$ .



Slika 3.16: Teorem 3.12 b)

Nadalje, uočimo da vrijedi

$$\angle BOA = \angle(\overline{BO}, \overline{OA}) = \angle(\overline{OC_b}, \overline{OC_a}) = \angle C_bOC_a.$$

Iz teorema 1.9 vrijedi  $\angle ABO + \angle BOA + \angle OAB = 0$ , odnosno  $\angle BOA = \angle BAO + \angle OBA$ . Primjenom leme 1.10 dobivamo  $\angle BOA = 90^\circ - \angle ACO$ . Stoga imamo:

$$\angle C_bOC_a = \angle BOA = 90^\circ - \angle ACO. \quad (3.29)$$

No, kako točke  $C$ ,  $C_b$ ,  $O$  i  $C_a$  leže na kružnici vrijedi:

$$\angle C_b C C_a = \angle C_b O C_a. \quad (3.30)$$

Iz (3.29) i (3.30) je:

$$\begin{aligned} \angle C_b C C_a &= \angle C_b O C_a \\ &= 90^\circ - \angle ACO. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dokažimo sada kratku lemu koju ćemo koristiti dalje u dokazu.

**Lema 3.14.** Uz oznake iz teorema 3.12, vrijedi  $|CH_c| = r$ , gdje je  $r$  radijus upisane kružnice trokuta  $ABC$ .

U ovoj lemi i njenom dokazu ne koristimo orijentirane kutove.

*Dokaz.* S obzirom da je  $\overline{CO}$  promjer opisane kružnice trokuta  $CC_aC_b$ , iz leme 3.13 i do sada dokazanog u dokazu teorema 3.12, znamo:

$$\begin{aligned} |CH_c| &= |CO| \cdot \cos(\angle C_a C C_b) \\ &= |CO| \cdot \cos(90^\circ - \angle ACO) \\ &= |CO| \cdot \sin(\angle ACO). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Iz pravokutnog trokuta  $CYO$  znamo:

$$\sin \angle YCO = \frac{r}{|CO|} \Leftrightarrow |CO| = \frac{r}{\sin(\angle YCO)} = \frac{r}{\sin(\angle ACO)}. \quad (3.33)$$

Iz (3.32) i (3.33) slijedi:  $|CH_c| = r$ . □

Zbog paralelnosti pravaca  $CH_c$  i  $Z'O$  vrijedi  $\angle H_c C O = \angle Z' O C$ , odnosno  $\angle H_c C S_c = \angle Z' O S_c$ . Kako je  $S_c$  polovište dužine  $\overline{CO}$  vrijedi  $|CS_c| = |S_c O|$ , a iz leme 3.14 je  $|CH_c| = |OZ'|$ , prema  $S$ - $K$ - $S$  teoremu o sukladnosti trokuta slijedi da su trokuti  $CH_c S_c$  i  $OZ' S_c$  sukladni. Dakle,  $\angle CS_c H_c = \angle OS_c Z'$ , odnosno  $\angle(S_c C, S_c H_c) = \angle(S_c O, S_c Z')$ , stoga su točke  $S_c$ ,  $H_c$  i  $Z'$  kolinearne.

Kako Feuerbachova točka  $F$  trokuta  $ABC$  leži na njegovoj upisanoj kružnici vrijedi  $\angle Z' F Z = 90^\circ$ . Pokažimo da je i  $\angle S_c F Z$  također pravi.

Naime, točka  $S_c$  je polovište dužine  $\overline{CO}$ . Pokazali smo da je Feuerbachova točka Ponceletova točka točaka  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $O$  (teorem 3.11), pa ona leži na kružnicama devet točaka trokuta  $ABC$ ,  $AOB$ ,  $BOC$  i  $AOC$ . Neka je  $W$  polovište dužine  $\overline{BO}$ . Na Feuerbachovoj kružnici trokuta  $ABC$  leže točke  $F$ ,  $A'$  i  $C'$ .

Prema svojstvu orijentiranih kutova (teorem 1.9) možemo pisati:

$$\angle ZFS_c = \angle ZFW + \angle WFS_c. \quad (3.34)$$

Kako točke  $S_c$ ,  $F$ ,  $W$  i  $A'$  leže na kružnici devet točaka trokuta  $BOC$  to je  $\angle WFS_c = \angle WA'S_c$ . Kako su  $\overline{S_cW}$  i  $\overline{A'W}$  srednjice tog trokuta, to je četverokut  $A'WOS_c$  paralelogram pa je  $\angle WA'S_c = \angle S_cOW$ . Na temelju zbroja kutova u trokutu  $BOC$  i prema lemi 1.10 znamo:

$$\begin{aligned} \angle S_cOW &= \angle COB \\ &= \angle CBO + \angle OCB \\ &= 90^\circ - \angle BAO. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Nadalje,  $W$ ,  $F$  i  $Z$  i  $C'$  leže na kružnici devet točaka trokuta  $AOB$  pa je

$$\angle ZFW = \angle ZC'W = \angle(ZC', C'W).$$

Kako je  $WC'$  srednjica trokuta  $ABO$  to je

$$\begin{aligned} \angle(ZC', C'W) &= \angle(ZC', AO) = \angle(AB, AO) \\ &= \angle BAO. \end{aligned} \quad (3.36)$$

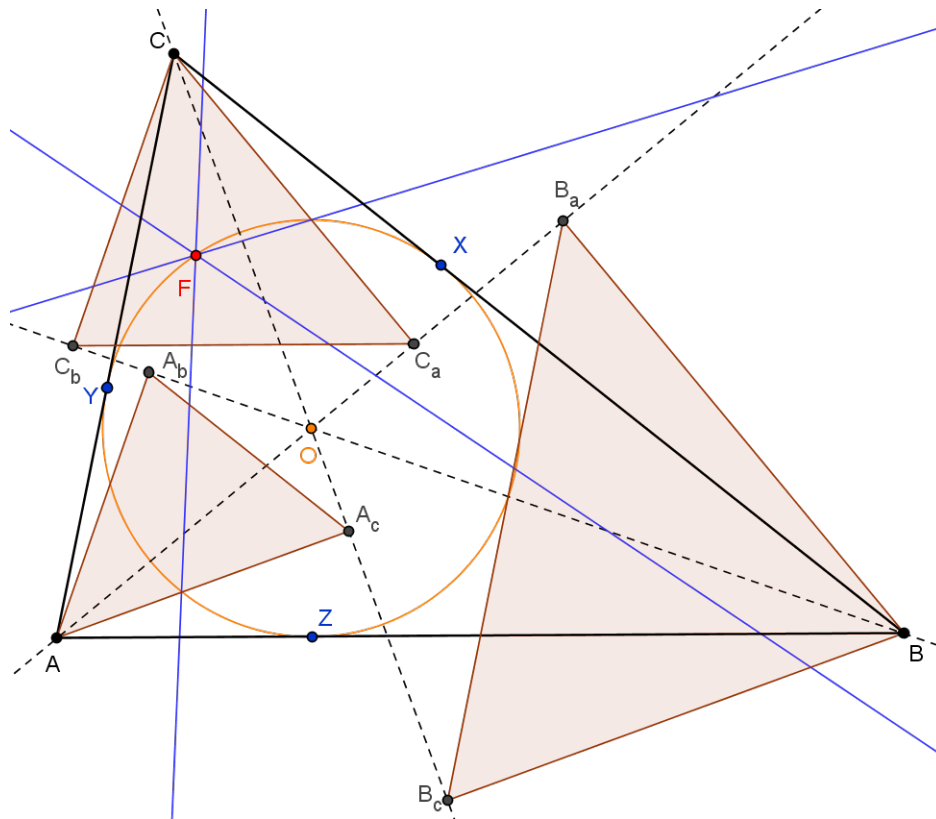
Uvrštavanjem (3.35) i (3.36) u (3.34) dobivamo,

$$\begin{aligned} \angle ZFS_c &= \angle ZFW + \angle WFS_c \\ &= \angle BAO + 90^\circ - \angle BAO \\ &= 90^\circ. \end{aligned}$$

Dakle,  $\angle Z'FZ = 90^\circ$  i  $\angle ZFS_c = 90^\circ$ , a to znači da  $F$  leži na pravcu  $Z'S_c$ , odnosno na Eulerovom pravcu trokuta  $CC_aC_b$ .

Analogno se pokaže da  $F$  leži na Eulerovim pravcima ostalih trokuta. Slijedi tvrdnja.  $\square$



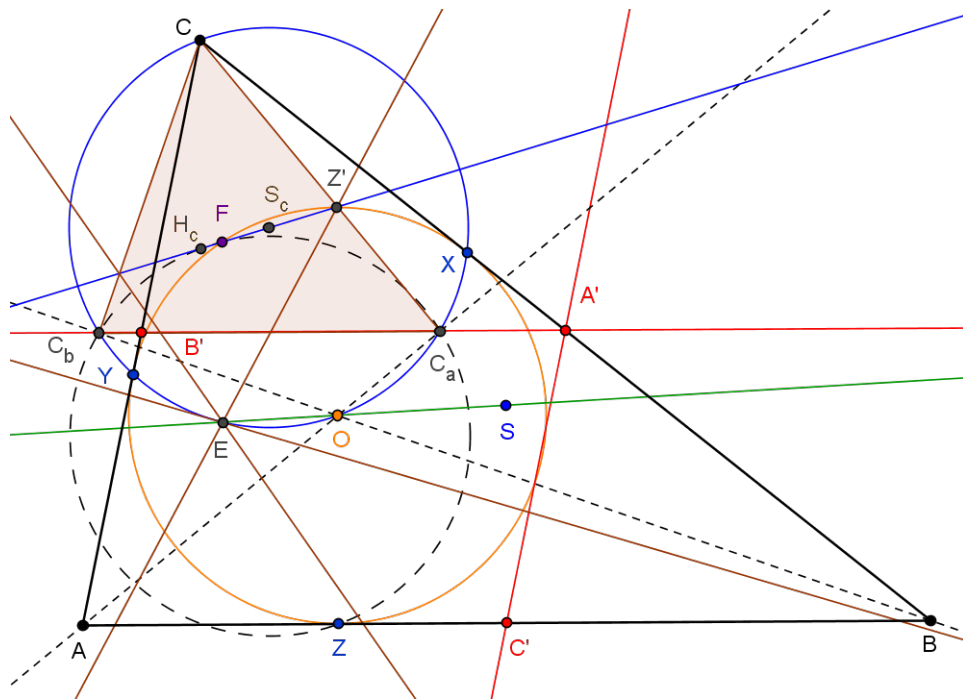


Slika 3.17: Teorem 3.12 c)

Idući teorem povezuje Feuerbachovu i Eulerovu točku simetrije promatranog trokuta.

**Teorem 3.15.** *Neka je  $ABC$  trokut,  $O$  središte upisane, a  $S$  središte opisane kružnice tog trokuta. Neka su  $C_a$  i  $C_b$  ortogonalne projekcije točke  $C$  na simetrale kuta  $AO$  i  $BO$ . Analogno definiramo i točke  $A_b, A_c, B_a$  i  $B_c$ . Pravci simetrični Eulerovom pravcu trokuta  $CC_aC_b$  s obzirom na stranice tog trokuta i pravac  $OS$  sijeku se u točki  $E_c$  koja je simetrična Feuerbachovoj točki trokuta  $ABC$  s obzirom na pravac  $C_aC_b$ . Slično vrijedi za trokute  $AA_bA_c$  i  $BB_aB_c$ .*

*Dokaz.* Neka su  $H_c$  ortocentar i  $S_c$  središte opisane kružnice trokuta  $CC_aC_b$ . Tada je pravac  $H_cS_c$  Eulerov pravac trokuta  $CC_aC_b$ . Prema korolaru 3.2 pravci simetrični pravcu  $H_cS_c$  s obzirom na stranice trokuta  $CC_aC_b$  sijeku se u Eulerovoj točki simetrije koja leži na opisanoj kružnici promatranog trokuta. Pokažimo da je ta Eulerova točka simetrije točka simetrična Feuerbachovoj točki  $F$  trokuta  $ABC$  u odnosu na pravac  $C_aC_b$ .



Slika 3.18: Teorem 3.15

Neka su  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  točke u kojima upisana kružnica trokuta  $ABC$  dira stranice trokuta  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$ . Pokažimo sada da kružnica s promjerom  $\overline{ZH_c}$  prolazi kroz točke  $C_a$  i  $C_b$ . Da bismo to pokazali, moramo pokazati da su točke  $X$ ,  $Z$  i  $C_a$  te  $Y$ ,  $Z$  i  $C_b$  kolinearne. Uočimo da su trokuti  $BOX$  i  $BOZ$  sukladni ( $\overline{BO}$  je zajednička stranica, kutovi u vrhu  $B$  su sukladni jer je  $BO$  simetrala kuta  $CBA$ , a kutovi u vrhovima  $X$  i  $Z$  su pravi). Iz toga slijedi  $|XB| = |ZB|$ . Analogno,  $|AY| = |AZ|$  i  $|CX| = |CY|$ . Neka su  $x$ ,  $y$  i  $z$  redom duljine odsječaka tangenti iz vrhova  $A$ ,  $B$ ,  $C$  na upisanu kružnicu. Imamo:

$$\begin{aligned} x &= |AY| = |AZ| \\ y &= |BX| = |BZ| \\ z &= |CX| = |CY|. \end{aligned}$$

Tada imamo:

$$\begin{aligned} |AB| &= x + y \\ |BC| &= y + z \\ |AC| &= x + z. \end{aligned}$$

Zbrajanjem prvih dviju jednakosti i uvrštavanjem treće jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= |AB| + |BC| \\2y + |AC| &= |AB| + |BC| \\y &= \frac{|AB| + |BC| - |AC|}{2}.\end{aligned}$$

Sada dobivamo

$$y = |BX| = \frac{|AB| + |BC| - |AC|}{2} = |A'B'| + |BA'| - |B'C|.$$

Na temelju toga možemo računati:

$$\begin{aligned}|A'X| &= ||BX| - |BA'| \\&= ||A'B'| + |BA'| - |B'C| - |BA'| \\&= ||A'B'| - |B'C|.\end{aligned}$$

U dokazu teorema 3.12 pokazali smo da je trokut  $CB'C_a$  jednakokračan pa je  $|B'C| = |B'C_a|$ . Također znamo da  $C_a$  leži na pravcu  $A'B'$  pa imamo:

$$|A'X| = ||A'B'| - |B'C_a|| = |C_aA'|.$$

Prema tome trokut  $A'C_aX$  je jednakokračan. Kako je i trokut  $BZX$  jednakokračan, a kutovi u vrhovima  $A'$  i  $B$  sukladni (jer  $C_aA' \parallel ZB$ ), to su trokuti  $BZX$  i  $A'C_aX$  slični. Dakle,  $\angle C_aXA' = \angle ZXB$ , pa su točke  $X, Z$  i  $C_a$  kolinearne. Analogno bismo dokazali kolinearnost točaka  $Y, Z$  i  $C_b$ .

Kako je  $XZ \perp BO$  i  $CC_b \perp BO$ , to je  $XZ \parallel CC_b$ . No, kako je  $C_aH_c \perp CC_b$  to je  $C_aH_c \perp XZ$ . Budući da su točke  $X, Z$  i  $C_a$  kolinearne, slijedi  $ZC_aH_c = 90^\circ$ . Slično,  $H_cC_bZ = 90^\circ$ . Dakle, točke  $C_a$  i  $C_b$  leže na kružnici promjera  $\overline{ZH_c}$ .

Neka je  $Z'$  točka simetrična točki  $Z$  s obzirom na središte upisane kružnice trokuta  $ABC$ . Iz dokaza teorema 3.12 znamo da se pravci  $H_cF$  i  $Z'F$  podudaraju te  $Z'F \perp ZF$ . Stoga kružnica s promjerom  $\overline{ZH_c}$  prolazi i kroz  $F$ , odnosno točke  $F, C_a, Z$  i  $C_b$  su koncikličke.

U dokazu teorema 3.12 pokazali smo da je pravac  $C_aC_b$  zapravo pravac na kojem leži srednjica trokuta  $ABC$  pa iz  $BH_c \perp C_aC_b$  slijedi  $BH_c \perp AB$ . Kako je i  $OZ \perp AB$ , to je  $CH_c \parallel OZ$ . No, u lemi 3.14 pokazali smo da je duljina  $|CH_c|$  jednaka radijusu upisane kružnice trokuta  $ABC$ , pa je  $|CH_c| = |OZ|$ . Dakle, četverokut  $COZH_c$  ima paralelne i sukladne nasuprotne stranice  $\overline{CH_c}$  i  $\overline{OZ}$ , pa je on paralelogram. Tada je i  $|CO| = |H_cZ|$ . Kako je  $\overline{CO}$  promjer opisane kružnice trokuta  $CC_aC_b$ , a  $\overline{H_cZ}$  promjer kružnice kroz točke  $F, C_a, Z$  i  $C_b$ , to su te dvije kružnice sukladne. S obzirom na to da se te kružnice sijeku u

točkama  $C_a$  i  $C_b$ , one su simetrične s obzirom na pravac  $C_aC_b$ . Stoga točka simetrična točki  $F$  s obzirom na pravac  $C_aC_b$  leži na opisanoj kružnici trokuta  $CC_aC_b$ .

Prema teoremu 3.12 točka  $F$  leži na Eulerovom pravcu trokuta  $CC_aC_b$ . Pravac simetričan Eulerovom pravcu trokuta  $CC_aC_b$  s obzirom na pravac  $C_aC_b$  siječe opisanu kružnicu tog trokuta u dvije točke. Prema dokazu teorema 3.1 jedno sjecište je anti-Steinerova točka (označimo je s  $E_c$ ) trokuta  $CC_aC_b$ , a drugo sjecište je točka simetrična ortocentru  $H_c$  s obzirom na pravac  $C_aC_b$ . Kako su  $F$  i  $H_c$  različite točke, znači da je  $E_c$  osnosimetrična slika točke  $F$ . No, prema korolaru 3.2 točka  $E_c$  je Eulerova točka simetrije trokuta  $CC_aC_b$ .

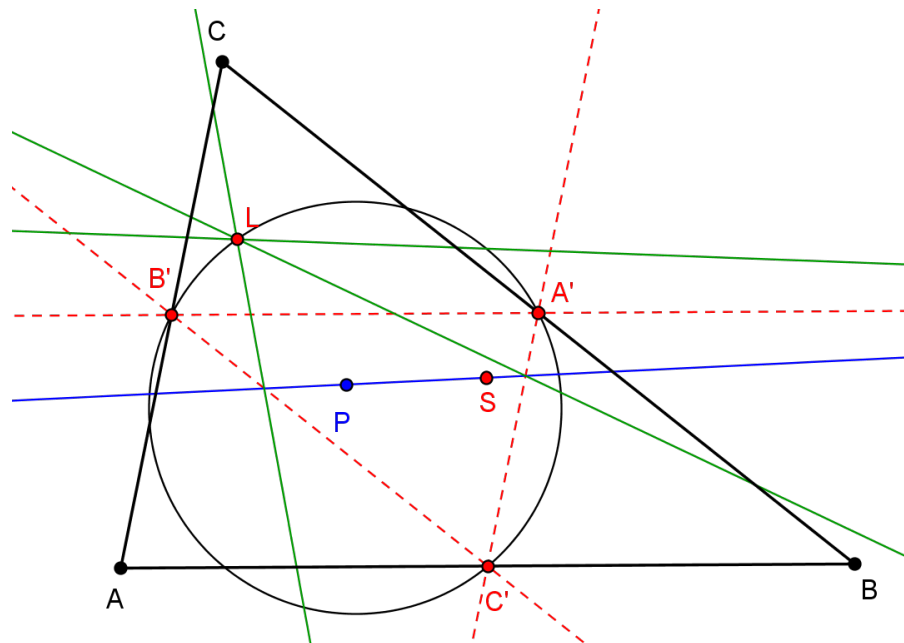
Prema teoremu 3.3, točka  $E_c$  leži na pravcu  $OS$ . □

## Poglavlje 4

# Generalizacija Feuerbachove točke

Neka je  $ABC$  trokut. Neka su kao i prije, točke  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$  polovišta stranica  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  i  $\overline{AB}$ . Zatim, neka je  $S$  središte opisane kružnice trokuta  $ABC$ , te neka je  $P$  bilo koja točka ravnine različita od  $S$ . U dokazu teorema 3.3 pokazali smo da je točka  $S$  ortocentar trokuta  $A'B'C'$ . Također, kružnica devet točaka trokuta  $ABC$  je kružnica opisana trokutu  $A'B'C'$ . Sada prema teoremu 3.1 iz kojeg proizlazi definicija anti-Steinerove točke i u skladu s navedenim oznakama možemo zaključiti sljedeće:

**Teorem 4.1.** *Osnosimetrične slike pravca  $PS$  s obzirom na pravce  $B'C'$ ,  $C'A'$  i  $A'B'$  sijeku se u jednoj točki  $L$  koja leži na Feuerbachovoj kružnici trokuta  $ABC$ . Točka  $L$  je anti-Steinerova točka pravca  $PS$  s obzirom na trokut  $A'B'C'$ .*



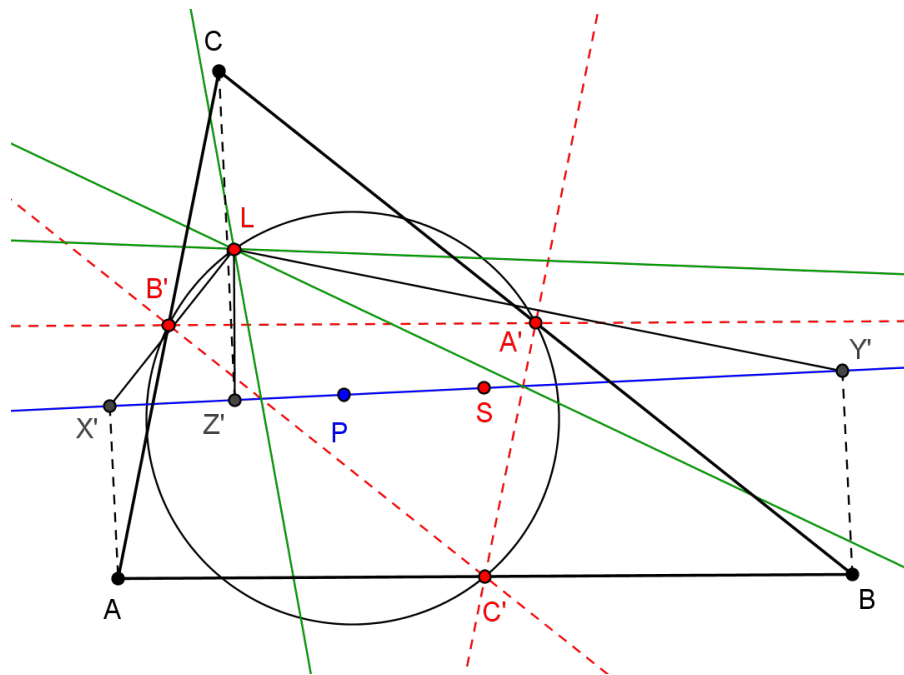
Slika 4.1: Teorem 4.1

**Teorem 4.2.** *Točka  $L$  iz teorema 4.1 je ortopol pravca  $PS$  s obzirom na trokut  $ABC$ , gdje je  $S$  središte opisane kružnice trokuta  $ABC$ .*

Prije dokaza tog teorema dokazat ćemo teorem potreban za dokaz iskazanog teorema.

**Teorem 4.3.** *Točke  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  simetrične točki  $L$  iz teorema 4.1 s obzirom na pravce  $B'C'$ ,  $C'A'$  i  $A'B'$  su redom nožišta okomica iz točaka  $A$ ,  $B$ ,  $C$  na pravac  $PS$ .*

*Dokaz.* Neka je  $p_{b'}$  pravac simetričan pravcu  $PS$  s obzirom na pravac  $A'C'$ . Prema teoremu 4.1 pravac  $p_{b'}$  prolazi kroz točku  $L$  pa osnosimetrična slika točke  $L$  s obzirom na pravac  $A'C'$  leži na pravcu  $PS$ . Označimo tu točku  $Y'$ .

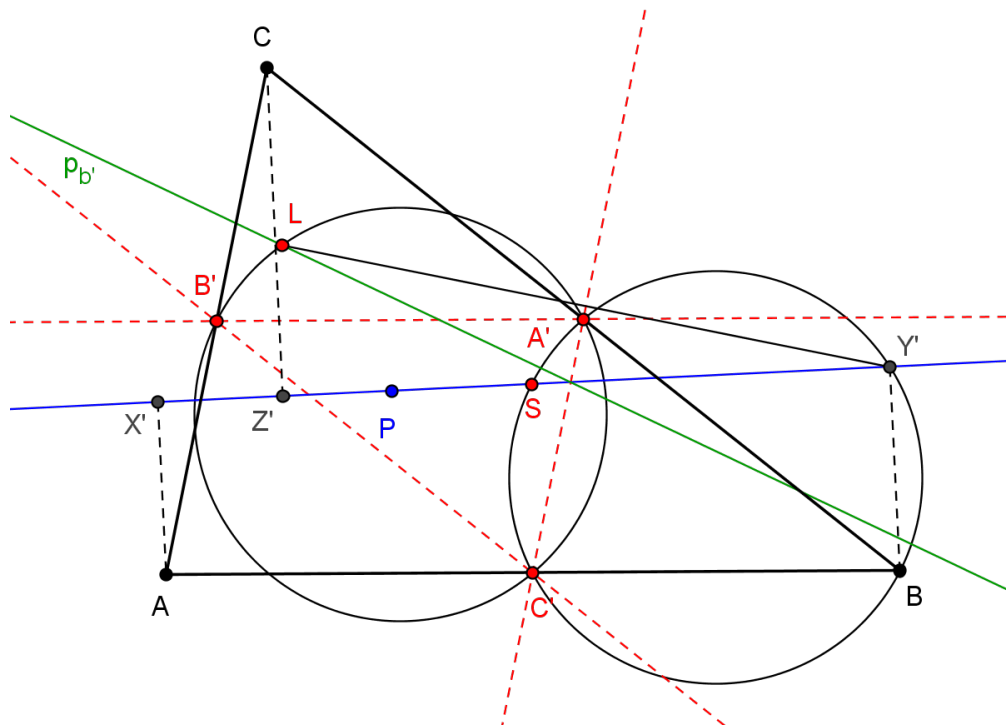


Slika 4.2: Teorem 4.3 a)

Kako točke  $S$ ,  $A'$  i  $C'$  leže na simetralama stranica trokuta  $ABC$  vrijedi:

$$\angle BC'S = \angle SA'B = 90^\circ.$$

Stoga točke  $A'$  i  $C'$  leže na kružnici promjera  $\overline{BS}$ .



Slika 4.3: Teorem 4.3 b)

Sada uočimo trokute  $A'B'C'$  i  $A'BC'$ . Oni imaju zajedničku stranicu  $\overline{A'C'}$ , a za ostale stranice vrijedi sljedeće:

$$|A'B'| = \frac{1}{2}|AB| = |BC'|$$

$$|B'C'| = \frac{1}{2}|BC| = |A'B|.$$

Dakle, prema teoremu  $S-S-S$  o sukladnosti trokuta trokutu  $A'B'C'$  i  $A'BC'$  su sukladni. Prema tome i njihove opisane kružnice su sukladne. Štoviše, uočimo da su te kružnice međusobno simetrične s obzirom na pravac  $A'C'$ . Budući da točka  $L$  leži na kružnici opisanoj trokutu  $A'B'C'$  jer je to Feuerbachova kružnica trokuta  $ABC$ , točka  $Y'$ , simetrična točki  $L$  u odnosu na pravac  $A'C'$ , leži na kružnici opisanoj trokutu  $A'BC'$ . Prema Talesovom teoremu o obodnom kutu nad promjerom kružnice  $\angle BY'S = 90^\circ$ , pa je točka  $Y'$  nožište okomice spuštene iz vrha  $B$  na pravac  $PS$ .

Analogno se pokazuju i preostale dvije tvrdnje. □

Sada dokažimo teorem 4.2.



*Dokaz.* Prema teoremu 4.3 točke  $X'$ ,  $Y'$  i  $Z'$  su nožišta okomica iz vrhova  $A$ ,  $B$  i  $C$  na pravac  $PS$ . Nadalje, točka  $Y'$  je simetrična  $L$  s obzirom na pravac  $A'C'$ , pa je  $LY' \perp A'C'$ . Kako je  $A'C' \parallel AC$ , to je  $LY' \perp AC$ . Stoga točka  $L$  leži na okomici spuštеноj iz točke  $Y'$  na pravac  $AC$ . Analogno bismo pokazali da točka  $L$  leži na okomicama spuštenim iz točaka  $X'$  i  $Z'$  na pravce  $BC$  i  $AB$  redom. Stoga se promatrane okomice sijeku u točki  $L$  pa prema definiciji ortopola slijedi tvrdnja teorema.  $\square$

Uočimo da se sada kao korolar navedenog teorema nameće sljedeća tvrdnja:

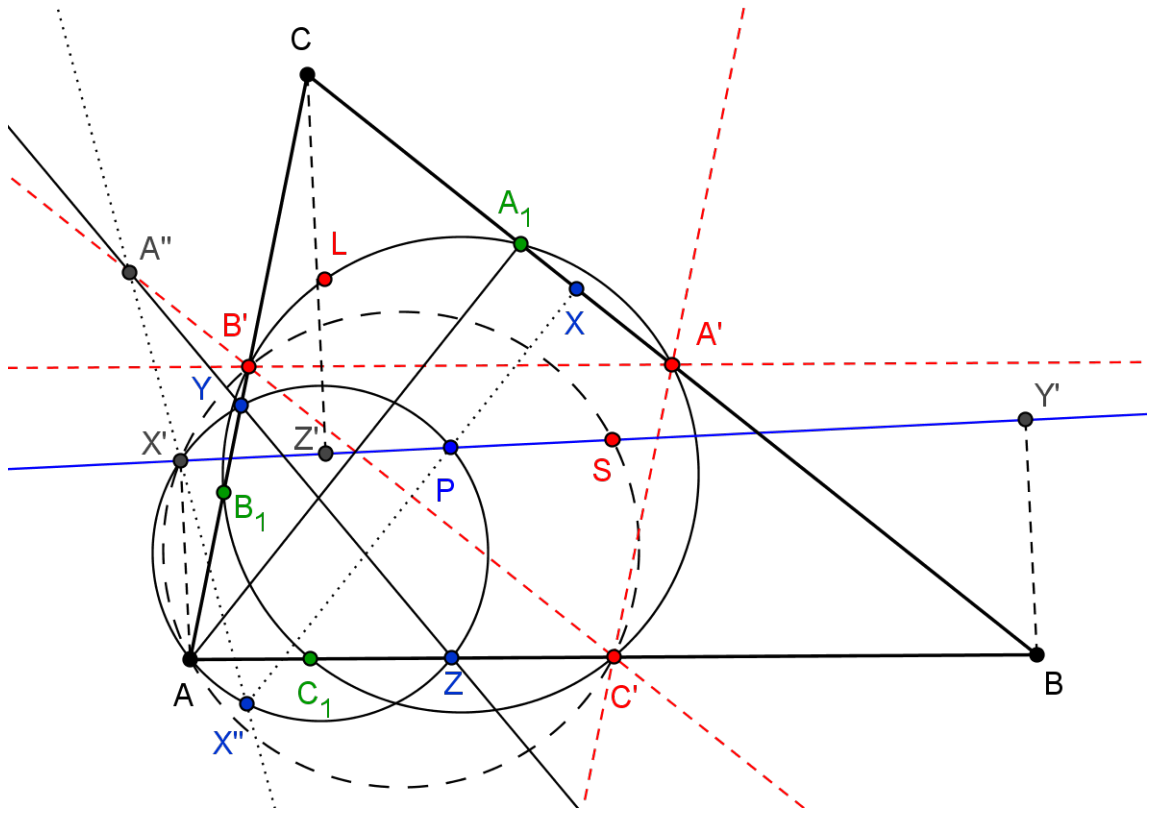
**Korolar 4.4.** *Ortopol pravca koji prolazi kroz središte opisane kružnice nekog trokuta leži na Feuerbachovoj kružnici tog trokuta.*

Idući teorem ima krucijalno značenje za ovo poglavlje:

**Teorem 4.5.** *Neka su  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  redom nožišta okomica iz točke  $P$  na pravce  $BC$ ,  $AC$  i  $AB$ . Neka su  $X'$ ,  $Y'$  i  $Z'$  redom ortogonalne projekcije točaka  $A$ ,  $B$ ,  $C$  na pravac  $PS$ . Zatim, neka su  $A'' = B'C' \cap YZ$ ,  $B'' = A'C' \cap XZ$  i  $C'' = A'B' \cap XY$ . Tada točka  $L$  iz teorema 4.2 leži na pravcima  $XA''$ ,  $YB''$  i  $ZC''$ .*

*Dokaz.* Uočimo da je trokut  $XYZ$  nožišni trokut točke  $P$  s obzirom na trokut  $ABC$ . Neka su sada  $X''$ ,  $Y''$  i  $Z''$  točke simetrične točkama  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  s obzirom na pravce  $B'C'$ ,  $A'C'$  i  $A'B'$  redom.

Očito je  $XX'' \perp B'C'$  odnosno  $XX'' \perp BC$  jer  $B'C' \parallel BC$ . Dakle, točke  $P$ ,  $X$  i  $X''$  leže na pravcu okomitom na pravac  $BC$ . Nadalje, neka su  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  nožišta visina iz vrhova  $A$ ,  $B$  i  $C$  na nasuprotne stranice trokuta  $ABC$ . Tada su točke  $A$  i  $A_1$  međusobno simetrične s obzirom na pravac  $B'C'$ . Stoga su pravci  $AX''$  i  $A_1X$  međusobno simetrični s obzirom na pravac  $B'C'$ . Kako je  $A_1X$  paralelan pravcu  $B'C'$ , pravac  $AX''$  je također paralelan pravcu  $B'C'$  (jer je pravac  $AX''$  simetričan pravcu  $A_1X$ ), odnosno pravac  $AX'' \parallel BC$ .



Slika 4.4: Teorem 4.5 a)

Budući da je  $AX'' \parallel BC$  i  $PX'' \perp BC$ , imamo  $\angle AX''P = 90^\circ$ . Stoga točka  $X''$  leži na kružnici promjera  $\overline{AP}$ . Nadalje, znamo  $\angle AZP = 90^\circ$ ,  $\angle AYP = 90^\circ$  te  $\angle AX'P = 90^\circ$ , pa i točke  $Y, Z$  i  $X'$  leže na kružnici promjera  $\overline{AP}$ . Iz teorema 4.3 znamo da točke  $B', C'$  i  $X'$  leže na kružnici promjera  $\overline{AS}$ . Primjenom svojstava orijentiranih kutova (teorem 1.9) imamo  $\angle AC'B' = \angle AX'B'$  i  $\angle YZA = \angle YX'A$ . Sada možemo računati:

$$\begin{aligned}\angle YX'B' &= \angle YX'A + \angle AXB' \\ &= \angle YZA + \angle AC'B' .\end{aligned}$$

Nadalje,  $A'' \in YZ$  i  $C' \in AZ$  pa je  $\angle YZA = \angle A''ZC'$ . Kako je i  $A'' \in B'C'$ , to je  $\angle AC'B' = \angle ZC'A''$ . Stoga dalje imamo:

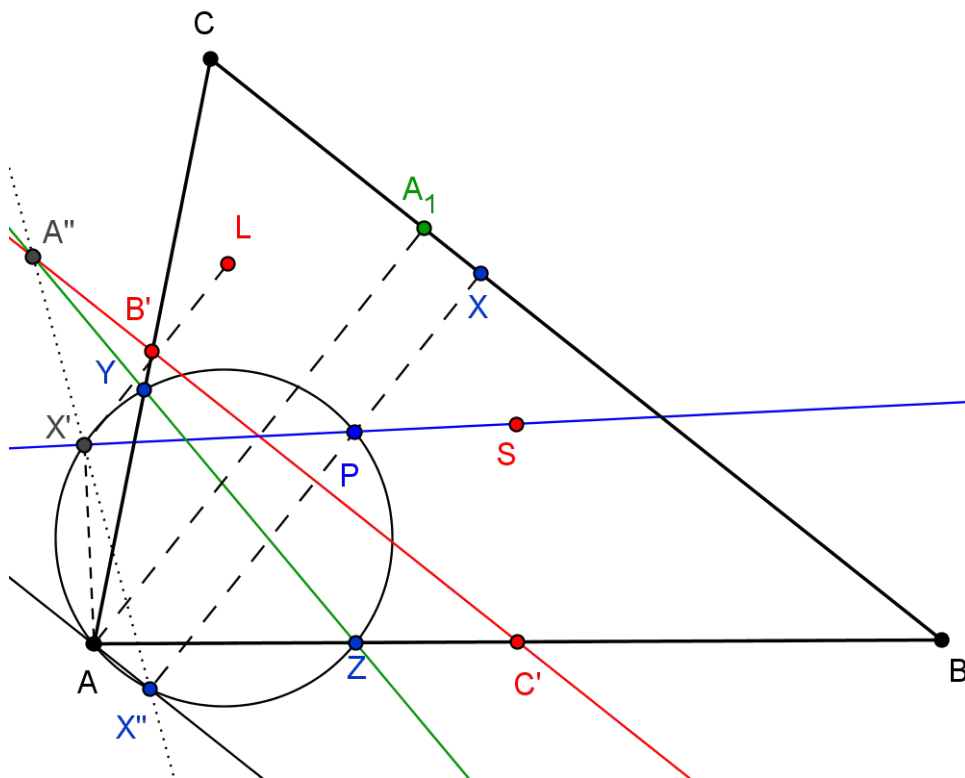
$$\begin{aligned}\angle YX'B' &= \angle A''ZC' + \angle ZC'A'' \\ &= \angle A''ZC' + \angle ZC'A'' .\end{aligned}\tag{4.1}$$

Iz svojstva 7. iz teorema 1.9 znamo

$$\angle A''ZC' + \angle ZC'A'' = -\angle C'A''Z = \angle ZA''C' .\tag{4.2}$$

Iz (4.1) i (4.2) zaključujemo  $\angle YX'B' = \angle ZA''C' = \angle YA''B'$ . Dobili smo  $\angle YX'B' = \angle YA''B'$ . Dakle, točka  $X'$  leži na kružnici koja prolazi točkama  $A''$ ,  $Y$  i  $B'$ . Stoga je  $\angle A''B'Y = \angle A''X'Y$ . Budući da točke  $Y, Z, X'$  i  $X''$  leže na kružnici promjera  $\overline{AP}$ , imamo  $\angle YPX'' = \angle YX'X''$ . Na temelju navednog možemo računati:

$$\begin{aligned}
 \angle A''X'X'' &= \angle A''X'Y + \angle YX'X'' \\
 &= \angle A''B'Y + \angle YPX'' \\
 &= \angle(C'B', AC) + \angle(PY, PX) \\
 &= \angle(C'B', AC) + \angle(PY, AC) + \angle(AC, CB) + \angle(BC, PX) \\
 &= \angle(C'B', AC) + 90^\circ + \angle(AC, CB) + 90^\circ \\
 &= \angle(C'B', AC) + \angle(AC, CB) \\
 &= \angle(CB, AC) + \angle(AC, CB) \\
 &= 0^\circ.
 \end{aligned}$$

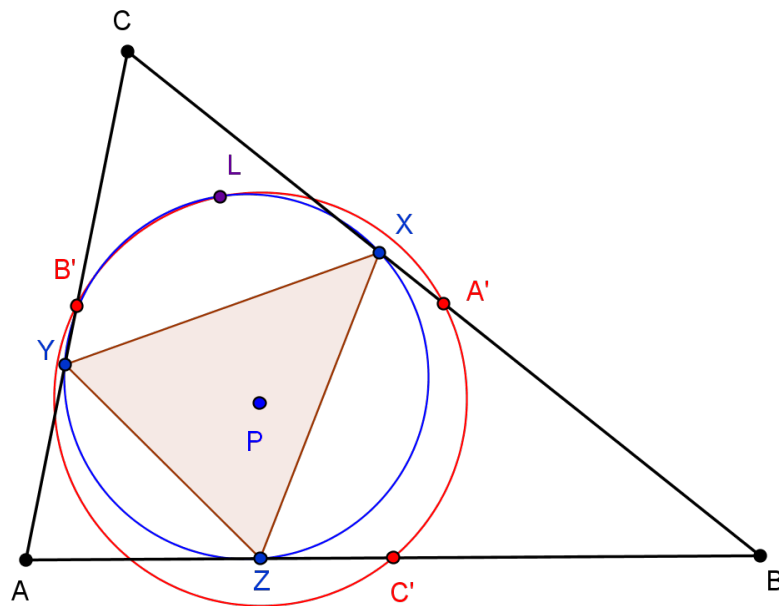


Slika 4.5: Teorem 4.5 b)

Dakle, točke  $A''$ ,  $X'$  i  $X''$  su kolinearne. No, prema teoremu 4.3 točka  $X'$  simetrična je točki  $L$  s obzirom na pravac  $B'C'$ , dok smo točku  $X''$  definirali kao točku simetričnu točki  $X$  s obzirom na pravac  $B'C'$ . Točka  $A''$  leži na pravcu  $B'C'$  pa je i sama sebi simetrična na taj pravac. Budući da su točke  $A''$ ,  $X'$  i  $X''$  kolinearne, to su i njihove simetrične slike  $A''$ ,  $L$  i  $X$  kolinearne. Dakle,  $L \in XA''$ . Analogno se pokaže  $L \in YB''$  i  $L \in ZC''$ . Slijedi tvrdnja teorema.  $\square$

U dokazu prethodnog teorema pokazali smo da točke  $Y$ ,  $Z$ ,  $X'$  i  $X''$  leže na kružnici promjera  $\overline{AP}$ . Ako promotrimo potenciju točke  $A''$  na tu kružnicu vrijedi:  $|A''X'| \cdot |A''X''| = |A''Z| \cdot |A''Y|$ . Budući da su  $A''$ ,  $X'$  i  $X''$  simetrične točkama  $A''$ ,  $L$  i  $X$  s obzirom na pravac  $B'C'$ , imamo  $|A''X'| = |A''L|$  te  $|A''X''| = |A''X|$ , odnosno  $|A''L| \cdot |A''X| = |A''X'| \cdot |A''X''|$ . Odnosno,  $|A''L| \cdot |A''X| = |A''Z| \cdot |A''Y|$  pa točke  $L$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  leže na jednoj kružnici. To znači da točka  $L$  leži na kružnici kroz točke  $X$ ,  $Y$  i  $Z$ , odnosno na opisanoj kružnici nožišnog trokuta  $XYZ$  točke  $P$  s obzirom na trokut  $ABC$ . Time smo dokazali:

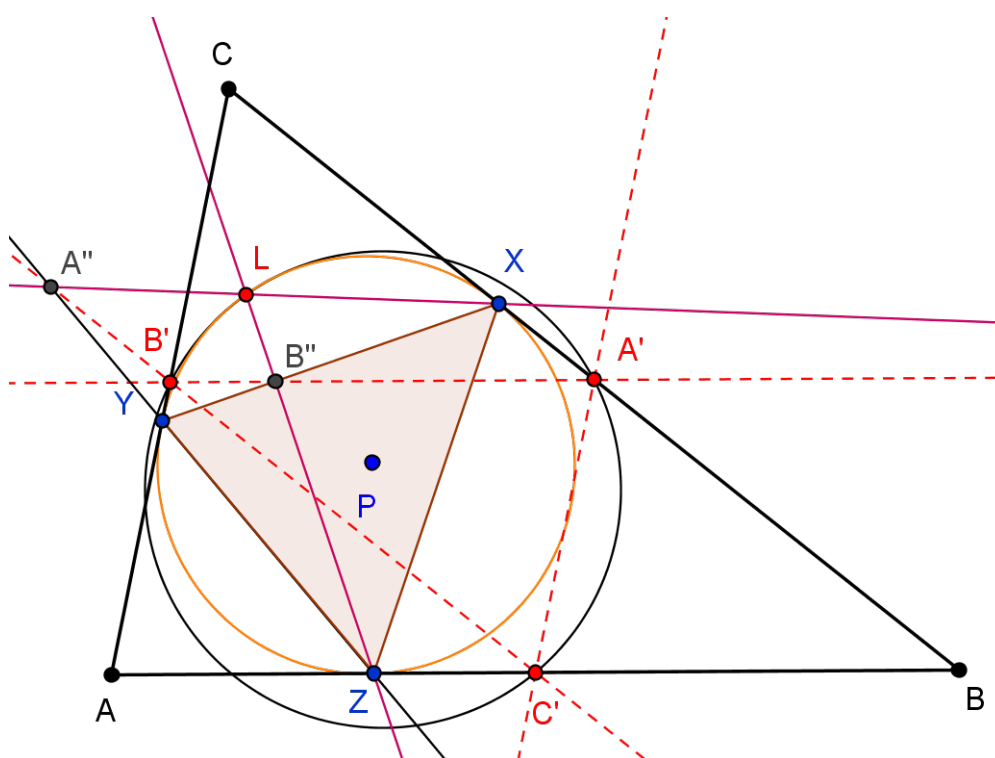
**Teorem 4.6.** Uz oznake kao ranije točka  $L$  leži na opisanoj kružnici nožišnog trokuta  $XYZ$  točke  $P$  s obzirom na trokut  $ABC$ .



Slika 4.6: Teorem 4.6

Na temelju dokazanih tvrdnji u ovom poglavlju slijedi teorem koji nosi naziv **Prvi Fontenèov teorem**<sup>1</sup>:

**Teorem 4.7.** *Neka je  $ABC$  trokut i  $P$  bilo koja točka ravnine. Neka su točke  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  redom polovišta stranica  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  danog trokuta. Neka je  $XYZ$  nožišni trokut točke  $P$  s obzirom na trokut  $ABC$ . Neka su točke  $A''$ ,  $B''$  i  $C''$  presjeci odgovarajućih stranica trokuta  $A'B'C'$  i  $XYZ$ . Tada se pravci  $XA''$ ,  $YB''$  i  $ZC''$  sijeku u točki  $L$  koja je zajednička točka Feuerbachove kružnice trokuta  $ABC$  i opisane kružnice nožišnog trokuta  $XYZ$ .*



Slika 4.7: Prvi Fontenèov teorem

Točka  $L$  iz teorema 4.7 naziva se **Fontenèova točka** točke  $P$  s obzirom na trokut  $ABC$ .

**Drugi Fontenèov teorem** izriče još jaču tvrdnju.

**Teorem 4.8.** *Neka je  $ABC$  trokut i  $P$  proizvoljna točka ravnine. Ako se točka  $P$  giba po fiksnom pravcu koji prolazi kroz središte opisane kružnice trokuta  $ABC$  tada opisana kružnica*

<sup>1</sup>Georges Fontenè (1848. – 1923.), profesor na francuskom sveučilištu u Parizu. Svoje je radove objavljivao u časopisu *Nouvelles Annales*.

nožišnog trokuta točke  $P$  s obzirom na trokut  $ABC$  prolazi kroz fiksnu točku Feuerbachove kružnice trokuta  $ABC$ .

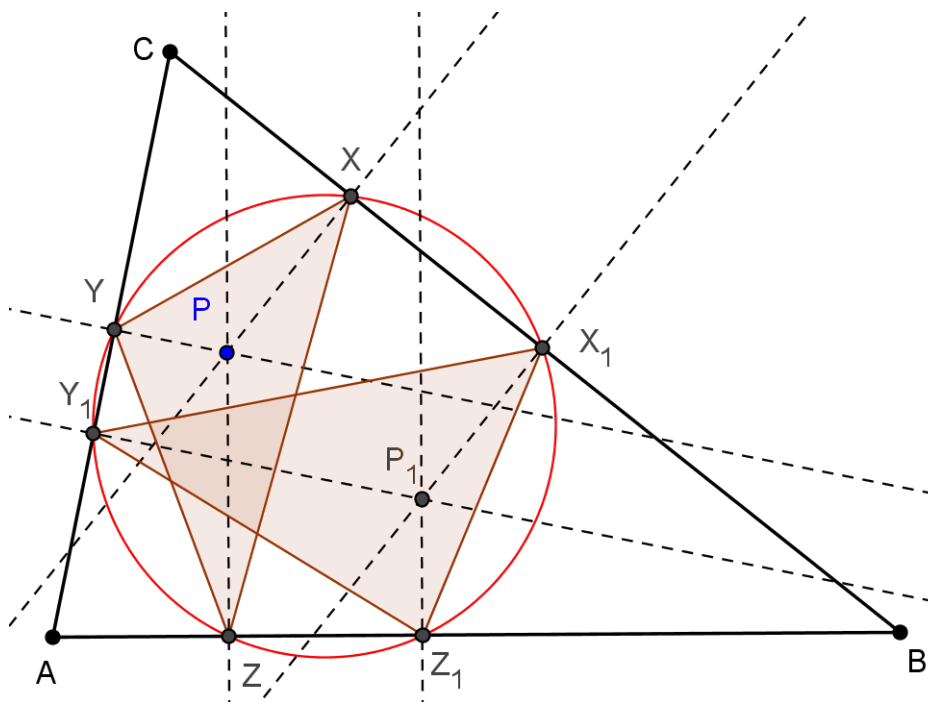
*Dokaz.* Dokaz slijedi iz teorema 4.7 i 4.1. Naime, točka je fiksna upravo zato što je anti-Steinerova točka.  $\square$

Na kraju dokažimo teorem koji se smatra generalizacijom teorema o Feuerbachovoj točki, a on nosi naziv **Treći Fontenèov teorem**.

**Teorem 4.9.** *Neka je  $ABC$  trokut i  $P$  proizvoljna točka ravnine. Neka je točka  $P_1$  izogonalni konjugat točke  $P$  s obzirom na trokut  $ABC$  te  $S$  središte opisane kružnice trokuta  $ABC$ . Feuerbachova kružnica i opisana kružnica nožišnog trokuta točke  $P$  s obzirom na trokut  $ABC$  se diraju ako i samo ako su točke  $P$ ,  $P_1$  i  $S$  kolinearne.*

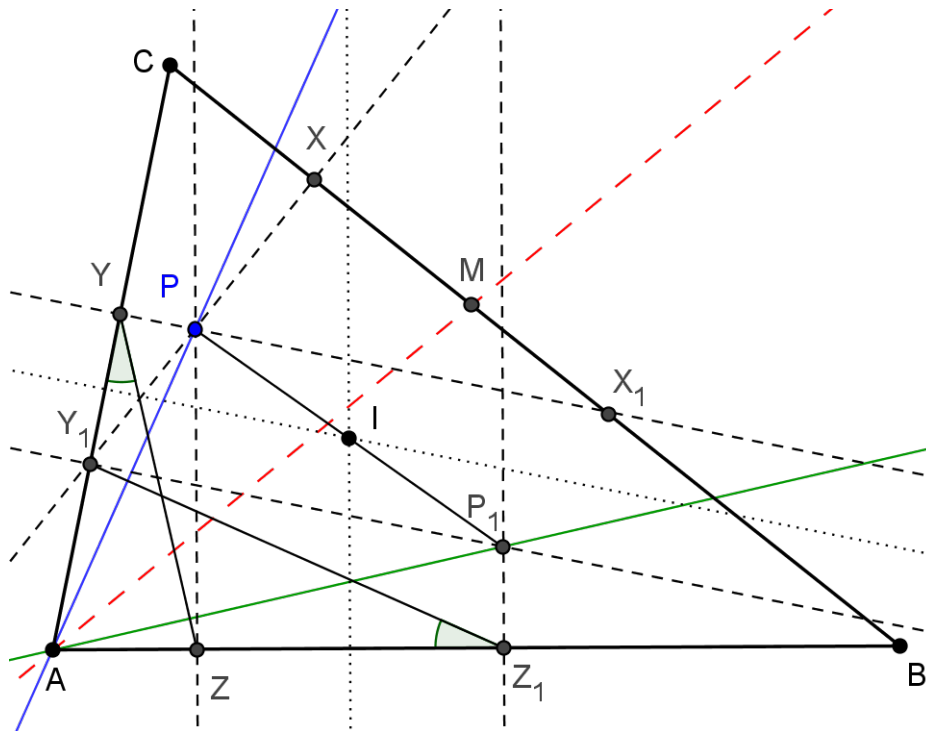
Pri dokazu koristit ćemo sljedeću zanimljivu lemu:

**Lema 4.10.** *Neka je  $ABC$  trokut i točka  $P$  unutar tog trokuta. Neka je točka  $P_1$  izogonalni konjugat točke  $P$  s obzirom na trokut  $ABC$ . Neka su  $XYZ$  i  $X_1Y_1Z_1$  nožišni trokuti točaka  $P$  i  $P_1$  s obzirom na trokut  $ABC$ . Točke  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $X_1$ ,  $Y_1$  i  $Z_1$  leže na kružnici čije je središte polovište dužine  $\overline{PP_1}$ .*



Slika 4.8: Opisana kružnica nožišnih trokuta točaka  $P$  i  $P_1$ .

*Dokaz.* Neka su  $Y$  i  $Y_1$  na pravcu  $AC$  te neka su  $Z$  i  $Z_1$  na pravcu  $AB$ . Pokažimo da te četiri točke leže na jednoj kružnici.



Slika 4.9: Lema 4.10

Zbog definicije nožišnog trokuta je  $\angle PYA = \angle PZA = 90^\circ$  pa točke  $Y$  i  $Z$  leže na kružnici promjera  $\overline{PA}$ . Zato je  $\angle PYZ = \angle PAZ$ . Analogno je  $\angle Y_1Z_1P_1 = \angle Y_1AP_1$ .

Neka je  $M$  točka u kojoj simetrala kuta  $CAB$  siječe stranicu  $\overline{BC}$ . Tada je  $\angle MAB = \angle CAM$ . Nadalje, iz definicije izogonalog konjugata je  $\angle PAM = \angle MAP_1$ . Na temelju svojstva orijentiranih kutova možemo pisati:

$$\begin{aligned} \angle PAZ &= \angle PAM + \angle MAZ \\ &= \angle MAP_1 + \angle MAB \\ &= \angle CAM + \angle MAP_1 \\ &= \angle CAP_1 = \angle Y_1AP_1. \end{aligned}$$

Dobili smo:

$$\angle PYZ = \angle PAZ = \angle Y_1AP_1 = \angle Y_1Z_1P_1.$$

Sada imamo:

$$\begin{aligned}\angle ZYY_1 &= \angle ZYA \\ &= 90^\circ - \angle PYZ \\ &= 90^\circ - \angle Y_1Z_1P_1 \\ &= \angle AZ_1Y_1 = \angle ZZ_1Y_1.\end{aligned}$$

Dakle,  $\angle ZYY_1 = \angle ZZ_1Y_1$  pa su prema svojstvu 6. iz teorema 1.9 točke  $Y$ ,  $Y_1$ ,  $Z$  i  $Z_1$  konciklične.

Označimo s  $I$  središte kružnice kroz točke  $Y$ ,  $Y_1$ ,  $Z$  i  $Z_1$ . Tada  $I$  leži na presjeku simetrala dužina  $\overline{YY_1}$  i  $\overline{ZZ_1}$  jer su to tetive promatrane kružnice. Ako sada promotrimo pravokutne trapeze  $YY_1P_1P$  i  $ZZ_1P_1P$ , uočavamo da su simetrale dužina  $\overline{YY_1}$  i  $\overline{ZZ_1}$  upravo srednjice tih trapeza, pa te simetrale prolaze kroz polovište dužine  $\overline{PP_1}$ . Dakle, točka  $I$  je polovište dužine  $\overline{PP_1}$ .

Kao što smo pokazali koncikličnost točaka  $Y$ ,  $Y_1$ ,  $Z$  i  $Z_1$ , slično bismo pokazali da su i točke  $X$ ,  $X_1$ ,  $Y$  i  $Y_1$  konciklične. Središte kružnice kroz točke  $X$ ,  $X_1$ ,  $Y$  i  $Y_1$  leži na simetralama dužina  $\overline{XX_1}$  i  $\overline{YY_1}$  jer su to tetive promatrane kružnice. Iz pravokutnih trapeza  $XX_1P_1P$  i  $YY_1P_1P$ , vidimo da su simetrale dužina  $\overline{YY_1}$  i  $\overline{ZZ_1}$  upravo srednjice tih trapeza, pa te simetrale prolaze kroz polovište dužine  $\overline{PP_1}$ , a to je upravo točka  $I$ . Dakle, točke  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $X_1$ ,  $Y_1$  i  $Z_1$  leže na kružnici sa središtem u točki  $I$ , a ta je kružnica upravo kružnica opisana nožišnom trokutu  $XYZ$ . Slijedi tvrdnja.  $\square$

Lako se pokaže da su ortocentar i središte opisane kružnice nekog trokuta izogonalno konjugirane točke. Tada je opisana kružnica njihovih nožišnih trokuta upravo Feuerbachova kružnica početnog trokuta.

Sada možemo dokazati teorem 4.9.

*Dokaz.* Neka je  $XYZ$  nožišni trokut točke  $P$  i  $X_1Y_1Z_1$  nožišni trokut točke  $P_1$ . Neka je  $L$  Fontenèova točka točke  $P$  s obzirom na trokut  $ABC$  te  $L_1$  Fontenèova točka točke  $P_1$  s obzirom na trokut  $ABC$ . Prema lemi 4.10 trokutu  $XYZ$  i  $X_1Y_1Z_1$  imaju istu opisanu kružnicu. Tada se  $L_1$  nalazi na Feuerbachovoj kružnici trokuta  $ABC$  i na kružnici opisanoj trokutu  $XYZ$ , kao i točka  $L$  prema teoremu 4.7. Dakle, točke  $L$  i  $L_1$  su točke presjeka tih dviju kružnica.

Točka  $L$  je prema teoremu 4.1 anti-Steinerova točka pravca  $PS$  s obzirom na trokut  $A'B'C'$ . Isto tako  $L_1$  je anti-Steinerova točka pravca  $P_1S$  s obzirom na trokut  $A'B'C'$ . Feuerbachova kružnica trokuta  $ABC$  i opisana kružnica trokuta  $XYZ$  se diraju ako i samo ako se točke  $L$  i  $L_1$  podudaraju.

Iz teorema iz kojeg prozilazi definicija anti-Steinerove točke (teorem 3.1) vidimo da zapravo postoji bijekcija između pravaca kroz ortocentar i točaka opisane kružnice trokuta. Stoga ako se točke  $L$  i  $L_1$  podudaraju tada se i pravci  $PS$  i  $P_1S$  podudaraju. S druge strane,



ako se pravci  $PS$  i  $P_1S$  podudaraju, to jest točke  $P$ ,  $P_1$  i  $S$  su kolinearne tada je prema teoremu 4.8 sjecište Feuerbachove kružnice trokuta  $ABC$  i opisane kružnice trokuta  $XYZ$  fiksna točka pa se točke  $L$  i  $L_1$  podudaraju. Slijedi tvrdnja.  $\square$

Uočimo da je Feuerbachov teorem, dokazan u drugom poglavlju ovog rada, poseban slučaj teorema 4.9 i to kada je točka  $P$  upravo središte upisane kružnice trokuta  $ABC$ , jer je središte upisane kružnice samo sebi izogonalni konjugat. Tada je Feuerbachova točka zapravo Fontenèova točka danog trokuta.

Kao što je i uobičajeno u matematici, postoji još teorema koji se smatraju generalizacijom Feuerbachova teorema.

## Bibliografija

- [1] J. L. Ayme, *Les trois thèorèmes de Georges Fontenè*, *Geometry Gèométrie Geometria* **8** (2011.), 1–28, <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/Fontene.pdf>, (lipanj 2015.).
- [2] M. Bocanu, *Geometry Unbound*, [https://www.awesomemath.org/wp-content/uploads/article\\_1\\_bocanu.pdf](https://www.awesomemath.org/wp-content/uploads/article_1_bocanu.pdf), (lipanj 2015.).
- [3] A. Bogomolny, *Orthopole: What is it? A Mathematical Doodle*, <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Orthopole.shtml#explanation>, (svibanj 2015.).
- [4] D. Grinberg, *Anti-Steiner points with respect to a triangle*, <http://web.mit.edu/~darij/www/AntiSteinerPDF.zip>, (travanj 2015.).
- [5] ———, *From Baltic Way to Feuerbach - A Geometrical Excursion*, <http://web.mit.edu/~darij/www/BalticFeuer.zip>, (travanj 2015.).
- [6] ———, *Generalization of the Feuerbach point*, [web.mit.edu/~darij/www/GenFeuerPDF.zip](http://web.mit.edu/~darij/www/GenFeuerPDF.zip), (travanj 2015.).
- [7] D. Ilišević i M. Bombardelli, *Elementarna geometrija, skripta, verzija 1.0*, <http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf>, (travanj 2015.).
- [8] R. A. Johnson, *Directed Angles in Elementary Geometry*, *American Mathematical Monthly* **25** (1917.), br. 3, 101–105.
- [9] ———, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover reprint, 1925.
- [10] K. Kedlaya, *Geometry Unbound*, (2006.), <http://kskedlaya.org/geometryunbound/gu-060118.pdf>.
- [11] C. Kimberling, *Encyclopedia of triangle centers – ETC*, <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>, (svibanj 2015.).

- [12] Z. Kolar-Begović i A. Tonković, *Feuerbachov teorem*, Osječki matematički list (2009.), br. 9, 21–30.
- [13] V. Praslov, *Problems in Plane and Solid geometry, v. 1 Plane Geometry*, <http://students.imsa.edu/~tliu/Math/planegeo.pdf>, (travanj 2015.).
- [14] L. N. Van, *Fontenè theorems and some corollaries*, <https://nguyenvanlinh.files.wordpress.com/2010/11/fontene-theorem-and-some-corollaries.pdf>, (lipanj 2015.).
- [15] J. Vonk, *The Feuerbach Point and Reflections of the Euler line*, Forum Geometricorum **9** (2009.), br. 9, 47–55.
- [16] I. Zelich, *Poncelet point and its applications*, [http://www.academia.edu/6251353/Poncelet\\_point\\_and\\_its\\_applications\\_3\\_](http://www.academia.edu/6251353/Poncelet_point_and_its_applications_3_), (svibanj 2015.).

# Sažetak

U ovom smo radu dokazali dio poznatog Feuerbachova teorema, odnosno da se Feuerbachova kružnica i upisana kružnica nekog trokuta diraju u Feuerbachovoj točki. Zatim smo Feuerbachovu točku povezali s drugim posebnim točkama trokuta. Naime, promatrali smo je u ulozi anti-Steinerove točke, ortopola, Ponceleove točke te smo uspostavili vezu između Feuerbachove točke i Eulerove točke simetrije. Na kraju, dana je generalizacija Feuerbachova teorema koja je poznata pod nazivom Treći Fontenèov teorem. Tijekom cijelog rada koristilo se znanje o orijentiranim kutovima koje je uvelike olakšalo većinu danih dokaza.

# Summary

In this paper we proved the part of the famous Feuerbach theorem, that is, Feuerbach circle of any triangle is tangent to its incircle at Feuerbach point. Then, we connected Feuerbach point with other special points of the triangle. In fact, we have observed it in the role of anti-Steiner point, orthopole, Poncelet point and we have established a relation between Feuerbach point and Euler reflection point. Finally, a generalization of Feuerbach theorem which is known as the Third Fontenè theorem is given. Through the entire paper the knowledge of directed angles was used which made many of proofs easier.

# Životopis

Rođena sam 24. ožujka 1992. godine u Zagrebu. Godine 1998. krenula sam u prvi razred Osnovne škole Dragutina Domjanića u Svetom Ivanu Zelini. Osmi razred osnovne škole završila sam 2006. godine i te iste godine upisala sam opću gimnaziju u Srednjoj školi Dragutina Stražimira, također u Svetom Ivanu Zelini.

Nakon završetka opće gimnazije 2010. godine, upisala sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom Fakultetu u Zagrebu. Završetkom tog studija 2013. godine, stekla sam akademski naziv sveučilišnog prvostupnika edukacije matematike. Iste godine upisala sam diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika; smjer: nastavnički, također na PMF-u u Zagrebu, koji ove godine završavam.