**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Luka Mikec

# TOPOLOŠKA POTPUNOST LOGIKA DOKAZIVOSTI

Diplomski rad

Voditelji rada:
izv. prof. dr. sc.
Mladen Vuković

doc. dr. sc.
Tin Perkov

Zagreb, rujan 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

# Sadržaj

# Uvod

Sustav **GL** (Gödel-Löb) je sustav modalne logike. Alfabet sustava modalne logike proširuje propozicijsku logiku tzv. modalnim operatorima $\Box$ i $\Diamond$. Kao što je slučaj i kod propozicijske logike, teoreme sustava **GL** moguće je opisati s konačno mnogo shema aksioma i pravila zaključivanja. Semantika za sustav **GL** je složenija od semantike propozicijske logike. Za razliku od veznika propozicijske logike, modalni operatori nisu "istinitosno funkcionalni". Preciznije, istinitost neke formule ne ovisi samo o istinitosti njenih potformula. Za modalne logike je uobičajeno koristiti relacijsku semantiku (poznatu i kao Kripkeova semantika, ili semantika mogućih svjetova). Postoji adekvatna relacijska semantika za sustav **GL**, te je **GL** potpun u odnosu na nju.

Alfabet sustava **GLP** (Gödel-Löb, eng. *polymodal*) proširuje alfabet sustava **GL** s modalnim operatorima $[n]$ i $\langle n \rangle$ za sve $n \in \omega$. Za razliku od sustava **GL**, za sustav **GLP** (u smislu koji će se kasnije precizirati) ne postoji zadovoljavajuća relacijska semantika.

Sustav **GL** je zanimljiv jer adekvatno i potpuno opisuje jedan fragment aritmetike. Opišimo detaljnije što se misli pod time. Neka je s $Pr$ označen predikat dokazivosti neke fiksirane "dovoljno snažne" aritmetike. Za proizvoljnu formulu $F$ simbol $\ulcorner F \urcorner$ označava numeral Gödelovog broja formule $F$. Aritmetička interpretacija $^*$ je funkcija koja svakoj propozicijskoj varijabli $p$ pridružuje proizvoljnu aritmetičku rečenicu $p^*$. Funkcija $^*$ komutira s propozicijskim veznicima te vrijedi $(\Box F)^* = Pr(\ulcorner F^* \urcorner)$, za svaku modalnu formulu $F$. Ako je modalna formula teorem sustava **GL**, njena aritmetička interpretacija je teorem aritmetike. Vrijedi i drugi smjer, ako su sve aritmetičke interpretacije neke formule dokazive u fiksiranoj aritmetici, onda je ta formula teorem sustava **GL** (Solovayov prvi teorem potpunosti). Sustav **GL** je i odlučiv pa se veza sustava **GL** i aritmetike može iskoristiti za odlučivanje jednog fragmenta aritmetike.

I sustav **GLP**, odnosno i operatori $[n]$ i $\langle n \rangle$ za sve $n \in \omega$, imaju aritmetičku interpretaciju. Označimo s $\prod_n^1$ aritmetičke formule logički ekvivalentne nekoj aritmetičkoj formuli u preneksnoj normalnoj formi s $n$ alternacija tipova kvantifikatora te čiji je prvi kvantifikator univerzalni. Tada formulu $[n]F$ možemo aritmetički interpretirati kao "formula $F$ je dokaziva uz pomoć svih istinitih $\prod_n^1$ aritmetičkih formula". Pritom je *istinita* $\prod_n^1$ *aritmetička formula* aritmetički predikat, tj. aritmetička formula s jednom slobodnom varijablom koja na prirodan način izražava (ali ne i zahvaća) istinitost $\prod_n^1$ formula u standardnom modelu aritmetike.

Označimo s $\overline{k}$ numeral broja $k$. Još jedna aritmetička interpretacija operatora $[n]$ je dokazivost uz $n$ ugniježđenih primjena $\omega$-pravila. To je hipotetičko pravilo u kojem iz beskonačnog niza dokaza koji za svaki $k \in \omega$ dokazuju formulu $F(\overline{k})$ izvodimo formulu $\forall k F(k)$. Moguće je na prirodan način aritmetičkim predikatom izraziti dokazivost uz najviše $n$ ugniježđenih primjena $\omega$-pravila (takav predikat nazivamo predikatom $n$-dokazivosti). Ako operator $[n]$ interpretiramo predikatom $n$-dokazivosti za sve $n \in \omega$, ponovno imamo jednu adekvatnu i potpunu aritmetičku interpretaciju.

Podsjetimo da sustav **GLP** nema zadovoljavajuću relacijsku semantiku. U ovom radu se bavimo topološkom semantikom sustava **GLP**. Preciznije, definira se valjanost formule na topološkom prostoru, i dokazuje se da je neka formula teorem sustava **GLP** ako i samo ako je valjana na određenom topološkom prostoru.

Rad je podijeljen u tri poglavlja. Prvo poglavlje se bavi relacijskom semantikom modalnih logika. Jedan cilj je dokazati da ne postoji zadovoljavajuća relacijska semantika za sustav **GLP**. Istovremeno se dokazuju i neki kasnije korisni rezultati. Naime, dokaz da je sustav **GLP** potpun u odnosu na određeni topološki prostor koristi potpunost tzv. sustava **J** u odnosu na njegovu relacijsku semantiku.

Drugo poglavlje se bavi topološkim prostorima. Pritom je temeljan pojam tzv. d-preslikavanja između topoloških prostora. Radi se o preslikavanju koje čuva neka svojstva topoloških prostora, između ostalih skup valjanih formula na danom prostoru. Definiraju se **GLP**-prostori kao vrlo općenita klasa prostora na kojima je valjan svaki teorem sustava **GLP**. Definira se i njihova podklasa, lme-prostori, te se na samom kraju poglavlja dokazuje da lme-prostori nadilaze topološku analogiju problema koji se javlja kod relacijske semantike.

U trećem se poglavlju dokazuje potpunost sustava **GLP**, prvo u odnosu na određenu klasu topoloških prostora, a onda i u odnosu na konkretan topološki prostor. Pritom se koristi potpunost sustava **J** u odnosu na njegovu topološku semantiku, te preslikavanje između formula sustava **GLP** i **J** koje čuva dokazivost. Kao posljedicu dobivamo i potpunost sustava **GL** u odnosu na određeni topološki prostor.

# Poglavlje 1

# Sustav GLP

## 1.1 Osnove i relacijska nepotpunost

Sustav **GLP** je sustav modalne logike kojeg je uveo Giorgi Japaridze u [11]. Sustavi modalne logike su skupovi formula nalik formulama propozicijske logike s novim operatorima, zatvoreni na određena transformacijska pravila. Za početak definirajmo jezik sustava **GLP**.

**Definicija 1.1.1.** *Alfabet sustava* **GLP** *je unija sljedećih skupova:*

- *skup prebrojivo mnogo propozicijskih varijabli* $\{p_n \mid n \in \omega\}$*;*
- *skup logičkih simbola* $\{\bot, \to\}$*;*
- *skup prebrojivo mnogo modalnih operatora dokazivosti* $\{[n] \mid n \in \omega\}$*;*
- *skup pomoćnih simbola* $\{(,)\}$ *(zagrade).*

Definirajmo koje su riječi nad alfabetom sustava **GLP** formule, te koje su formule teoremi sustava **GLP**.

**Definicija 1.1.2.** *Formula je riječ iz jezika kojeg definiramo rekurzivno:*

$$F ::= \bot \mid p \mid (F_1 \to F_2) \mid [n]F,$$

*gdje je $p$ propozicijska varijabla, $F_1$ i $F_2$ su formule, te vrijedi $n \in \omega$.*

Ako na formule gledamo kao na izraze s operatorima i operandima, onda operatori $[n]$ imaju najviši prioritet i za operator $\to$ nije predefinirana lijeva ili desna asocijativnost. Imajući to na umu, pri pisanju formule ispuštamo zagrade koje ne pridonose jednoznačnosti čitanja formule. Formule označavamo simbolima $F, G, H$ itd.

Koristimo i druge logičke veznike kao uobičajene pokrate te $\langle n \rangle$ kao pokratu za $\neg[n]\neg$, za svaki $n \in \omega$. Operatore $\langle n \rangle$ nazivamo modalnim operatorima konzistentnosti. Za propozicijske varijable obično koristimo simbole $p$, $q$, $r$ itd. umjesto $p_0$, $p_1$, $p_2$ itd.

**Definicija 1.1.3.** *Sustav* **GLP***je najmanji skup formula sa sljedećim svojstvima:*

- *sadrži sve tautologije propozicijske logike;*[1]
- *za formule $F$ i $G$ te $n \in \omega$ vrijedi $[n](F \to G) \to ([n]F \to [n]G) \in$* **GLP***; (shema aksioma K)*
- *za formulu $F$ te $n \in \omega$ vrijedi $[n]([n]F \to F) \to [n]F \in$* **GLP***; (shema aksioma L)*
- *za formulu $F$ te $n, m \in \omega$, $n > m$, vrijedi $[m]F \to [n]F \in$* **GLP***; (shema aksioma P1)*
- *za formulu $F$ te $n, m \in \omega$, $n > m$, vrijedi $\langle m \rangle F \to [n]\langle m \rangle F \in$* **GLP***; (shema aksioma P2)*
- *za formule $F, F \to G \in$* **GLP** *vrijedi $G \in$* **GLP***; (zatvorenje pravilom modus ponens)*
- *za formulu $F \in$* **GLP** *te $n \in \omega$ vrijedi $[n]F \in$* **GLP***. (zatvorenje pravilom generalizacije)*

Objasnimo ukratko pojedine komponente sustava **GLP**. Prve dvije i posljednje dvije točke su zajedničke svim tzv. normalnim sustavima modalne logike. Takvi sustavi imaju neka lijepa svojstva (vidi npr. [8]), poput teorema o zamjeni (koji ćemo nešto kasnije i koristiti). Posebnost sustava **GLP** su sheme $L$, *P1* i *P2*. Shema $L$ predstavlja tzv. formalizirani Löbov teorem. Löbov teorem tvrdi da u "dovoljno snažnim" teorijama $T$ vrijedi: ako $T$ dokazuje $Pr_T(\ulcorner F \urcorner) \to F$, onda $T$ dokazuje i $F$. Termin "formalizirani" se odnosi na činjenicu da se u shemi aksioma $L$ koriste samo (formalizirani) unutarteorijski predikati dokazivosti. Razlika dokazivosti i formalizirane dokazivosti u ovom slučaju nije problem. Može se dokazati (vidi npr. [8]) da je dodavanje sheme aksioma $L$ ekvivalentno dodavanju pravila zaključivanja koje iz pretpostavke oblika $[n]F \to F$ daje konkluziju $F$, za sve $n \in \omega$. Uobičajene aritmetičke interpretacije (vidi npr. [11]) formulama $[n]F$ pridružuju sve slabije zahtjeve za istinitost. To motivira shemu *P1*. Ako je neka formula konzistentna, tj.

[1] Ako pritom svaku potformulu oblika $[n]F$ uniformno zamijenimo novom propozicijskom varijablom. Npr. modalna formula $[3]p \to ([19](p \to \bot) \to [3]p)$ je aksiom sustava **GLP** jer je propozicijska formula $r \to (s \to r)$ tautologija propozicijske logike.

nije dokaziva njena negacija, te ako imamo na raspolaganju sve istinite $\prod_n^1$ formule onda to možemo i "vidjeti" ako su nam na raspolaganju sve istinite $\prod_{n+1}^1$ formule. To je, u grubo, motivacija iza sheme *P2*. Navedene "motivacije" samo pojašnjavaju zašto su aritmetičke interpretacije navedenih shema istinite u standardnom modelu aritmetike. Da ovako definiran sustav **GLP** doista adekvatno i potpuno zahvaća ono što je dokazivo o predikatu dokazivosti u "dovoljno snažnim" aritmetikama dokazao je Japaridze u [11].

Podsjetimo da je relacijski (ili Kripkeov) okvir neprazan usmjereni graf $\mathcal{F} = (W, R)$, a relacijski model $\mathcal{M}$ nad danim relacijskim okvirom je uređen par tog relacijskog okvira i relacije forsiranja $V$ između točaka relacijskog okvira i propozicijskih varijabli. Formula je istinita u točki $w$ relacijskog modela $\mathcal{M}$ (pišemo $\mathcal{M}, w \Vdash F$) ako je za neke formule $G$ i $H$ ispunjen neki od uvjeta: (1) $F = p$ za neku propozicijsku varijablu $p$ i vrijedi $wVp$, (2) $F = (G \to H)$ i: vrijedi $\mathcal{M}, w \nVdash G$ ili vrijedi $\mathcal{M}, w \Vdash H$, ili (3) $F = \Box G$ i za svaku točku $x \in W$ takvu da vrijedi $wRx$, vrijedi $\mathcal{M}, x \Vdash G$.

Za polimodalne logike umjesto relacijskog okvira koristimo relacijsku strukturu $(W, (R_n)_{n\in\omega})$ gdje je $R_n$ binarna relacija na $W$ za svaki $n \in \omega$. Ovu strukturu ćemo također nazivati relacijskim okvirom. Pojmovi relacijskog modela i istinitosti formule u točki se uz ovakvu definiciju relacijskog okvira mogu prirodno proširiti na formule s operatorima $[n]$ za $n \in \omega$. Ako je $G = (W, (R_n)_{n\in\omega})$ relacijski okvir, s $G_n$ ćemo označavati graf $(W, R_n)$. Ako su $x$ i $y$ u relaciji $R_n$ to ćemo pisati kao $xR_ny$. Za točku $y$ ćemo reći da je $R_n$-dostiživa iz točke $x$. Ako za točku $y$ vrijedi da je $R_n$-dostiživa za neki $n \in \omega$ i nije bitna konkretna vrijednost $n$, ili je vrijednost $n$ očita iz konteksta, reći ćemo da je $y$ dostiživa iz točke $x$. Globalna istinitost na relacijskom modelu $\mathcal{M}$ je istinitost u svim točkama modela (pišemo $\mathcal{M} \vDash F$). Valjanost na relacijskom okviru $\mathcal{F}$ je globalna istinitost na svim relacijskim modelima nad relacijskim okvirom (pišemo $\mathcal{F} \vDash F$). Sljedećim nizom rezultata dokazat ćemo da nema netrivijalnih relacijskih modela za sustav **GLP**.

**Propozicija 1.1.4.** *Neka je $\mathcal{F} = (W, (R_n)_{n\in\omega})$ neki relacijski okvir. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne za svaki $n \in \omega$:*

- *Za svaku formulu $F$ je formula $[n]([n]F \to F) \to [n]F$ valjana na $\mathcal{F}$.*
- *Relacija $R_n$ je tranzitivna i inverzno dobro fundirana.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je za svaku formulu $F$ formula $[n]([n]F \to F) \to [n]F$ valjana na $\mathcal{F}$. Tada je na $\mathcal{F}$ valjana i formula $\langle n\rangle F \to \langle n\rangle(\neg\langle n\rangle F \wedge F)$ za svaku formulu $F$. Posebno je na $\mathcal{F}$ valjana sljedeća formula:

$$\langle n\rangle(p \vee \langle n\rangle p) \to \langle n\rangle(\neg\langle n\rangle(p \vee \langle n\rangle p) \wedge (p \vee \langle n\rangle p)).$$

Neka su $w$, $u$ i $v$ proizvoljne točke iz skupa $W$ za koje vrijedi $wR_nu$ i $uR_nv$. Promotrimo model $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ uz $V = \{(v,p)\}$. U točki $v$ je istinita formula $p$. Slijedi da je u točki $u$ istinita formula $p \vee \langle n \rangle p$. Stoga je u točki $w$ istinita formula $\langle n \rangle (p \vee \langle n \rangle p)$. Stoga je u točki $w$ istinita i formula $\langle n \rangle (\neg \langle n \rangle (p \vee \langle n \rangle p) \wedge (p \vee \langle n \rangle p))$. Činjenica da je ta formula istinita u točki $w$ povlači da postoji točka $x$ dostiživa iz točke $w$ u kojoj su istinite formule $\neg \langle n \rangle (p \vee \langle n \rangle p)$ i $p \vee \langle n \rangle p$. Kako je formula $\neg \langle n \rangle (p \vee \langle n \rangle p)$ istinita u točki $x$, iz točke $x$ ne mogu biti dostižive točke u kojima je istinita formula $p$. Kako je formula $p \vee \langle n \rangle p$ istinita u točki $x$, u točki $x$ vrijedi ili $p$, ili je iz točke $x$ dostiživa neka točka u kojoj je istinita formula $p$. Kako je druga mogućnost upravo eliminirana, ostaje da je u točki $x$ istinita formula $p$. Kako je $v$ jedina točka u kojoj je istinita formula $p$, slijedi da je $x$ upravo točka $v$. Kako vrijedi $wR_nx$, slijedi $wR_nv$. Time je dokazana tranzitivnost relacije $R_n$. Dokažimo sada svojstvo inverzne dobre fundiranosti. Pretpostavimo suprotno, da postoji niz točaka $(x_i)_{i \in \omega}$ skupa $W$ takav da vrijedi $x_iR_nx_{i+1}$ za $i \geq 0$. Označimo skup svih točaka u nizu s $X$. Stavimo $V = \{(x,p) | x \in X\}$. U točki $x_0$ je stoga istinita formula $\langle n \rangle p$. No na $\mathcal{F}$ je valjana formula

$$\langle n \rangle p \to \langle n \rangle (\neg \langle n \rangle p \wedge p).$$

Stoga je u točki $x_0$ istinita formula $\langle n \rangle (\neg \langle n \rangle p \wedge p)$. Dakle, postoji neka točka $x$ iz skupa $X$ u kojoj je istinita formula $\neg \langle n \rangle p \wedge p$. Kako je u točki $x$ istinita formula $p$, točka $x$ je jednaka $x_i$ za neki $i \in \omega$. Kako vrijedi $x_iR_nx_{i+1}$ te $x_{i+1} \Vdash p$, slijedi $x_i \Vdash \langle n \rangle p$. No, to je u kontradikciji s ranijim rezultatom da vrijedi $x_i \Vdash \neg \langle n \rangle p$. Kako je iz pretpostavke da relacija $R_n$ nije inverzno dobro fundirana dobivena kontradikcija, slijedi da je relacija $R_n$ inverzno dobro fundirana.

Dokažimo obrat. Pretpostavimo da je $R_n$ tranzitivna i inverzno dobro fundirana relacija. Neka je dan proizvoljni relacijski model $\mathcal{M}$ nad relacijskim okvirom $\mathcal{F}$. Neka je točka $w$ proizvoljna točka iz skupa $W$. Neka je $F$ proizvoljno fiksirana formula. Pretpostavimo da vrijedi $w \nVdash [n]F$. Iz toga slijedi $w \Vdash \langle n \rangle \neg F$. Neka je $N$ skup točaka dostiživih iz točke $w$ u kojima nije istinita formula $F$. Zbog $w \Vdash \langle n \rangle \neg F$ očito je $N$ neprazan. Pretpostavimo da je iz svake točke $x$ iz skupa $N$ dostiživa još neka točka iz skupa $N$. No tada $R_n$ nije inverzno dobro fundirana. Stoga za neku točku $x$ iz skupa $N$ vrijedi da iz nje nije dostiživa niti jedna točka iz skupa $N$. Zbog tranzitivnosti su sve točke dostižive iz točke $x$ ujedno dostižive i iz točke $w$. Stoga iz točke $x$ nije dostiživa niti jedna točka u kojoj je istinita formula $\neg F$. Zbog toga vrijedi $x \Vdash \neg F \wedge \neg \langle n \rangle \neg F$. S obzirom na to da vrijedi $wR_nx$, slijedi $w \Vdash \langle n \rangle (\neg F \wedge \neg \langle n \rangle \neg F)$. Koristeći definiciju istinitosti, slijedi $w \nVdash [n]([n]F \to F)$.

□

**Lema 1.1.5.** *Neka je* $\mathcal{F} = (W, (R_n)_{n \in \omega})$ *neki relacijski okvir, te* $n, m \in \omega$, $n > m$. *Tada su ekvivalentne sljedeće tvrdnje:*

- *Za svaku formulu $F$ je formula $[m]F \to [n]F$ valjana na $\mathcal{F}$.*
- *Vrijedi $R_n \subseteq R_{n-1}$, za sve $n \in \omega$, $n \geq 1$.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je za svaku formulu $F$ formula $[m]F \to [n]F$ valjana na $\mathcal{F}$. Tada je posebno valjana i formula $[m]\neg p \to [n]\neg p$. Ta je formula valjana ako i samo je valjana formula $\langle n\rangle p \to \langle m\rangle p$ (obrat po kontrapoziciji).

Neka su $w$ i $u$ proizvoljne točke iz skupa $W$ za koje vrijedi $wR_nu$. Promotrimo relacijski model $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ uz $V = \{(u,p)\}$. Kako vrijedi $wR_nu$ te $u \Vdash p$, slijedi $w \Vdash \langle n\rangle p$. Zatim, jer vrijedi i $w \Vdash \langle n\rangle p \to \langle m\rangle p$ slijedi $w \Vdash \langle m\rangle p$. Iz toga slijedi da postoji neka točka $x$ za koju vrijedi $wR_nx$ te u kojoj je istinita formula $p$. Kako je po definiciji relacije $V$ jedina takva točka $u$, slijedi $wR_nu$.

Dokažimo obrat. Pretpostavimo da okvir ima opisano svojstvo. Neka je dan proizvoljan relacijski model $\mathcal{M}$ nad relacijskim okvirom $\mathcal{F}$. Neka je točka $w$ proizvoljna točka iz skupa $W$. Neka je $F$ proizvoljno fiksirana formula. Pretpostavimo da vrijedi $w \nVdash [n]F$. Tada postoji točka $u$ koja je $R_n$-dostiživa iz točke $w$ te u kojoj nije istinita formula $F$. Koristeći svojstvo okvira, vrijedi $wR_mu$ Kako vrijedi $u \nVdash F$, slijedi $w \nVdash [m]F$.

$\square$

**Lema 1.1.6.** *Neka je $\mathcal{F} = (W, (R_n)_{n\in\omega})$ neki relacijski okvir, te $n, m \in \omega$, $n > m$. Tada su ekvivalentne sljedeće tvrdnje:*

- *Za svaku formulu $F$ je formula $\langle m\rangle F \to [n]\langle m\rangle F$ valjana na $\mathcal{F}$.*
- *Okvir $\mathcal{F}$ ima svojstvo da $wR_mu$ i $wR_nv$ povlači $vR_mu$.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je za svaku formulu $F$ formula $\langle m\rangle F \to [n]\langle m\rangle F$ valjana na $\mathcal{F}$. Tada je na $\mathcal{F}$ posebno valjana i formula $\langle m\rangle p \to [n]\langle m\rangle p$.

Neka su $w$, $u$ i $v$ proizvoljne točke iz skupa $W$ za koje vrijedi $wR_mu$ i $wR_nv$. Promotrimo model $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ uz $V = \{(u,p)\}$. Kako vrijedi $wR_mu$ te $u \Vdash p$, slijedi $w \Vdash \langle m\rangle p$. Zatim, jer vrijedi i $w \Vdash \langle m\rangle p \to [n]\langle m\rangle p$ slijedi da vrijedi $w \Vdash [n]\langle m\rangle p$. Kako vrijedi $wR_nv$, slijedi $v \Vdash \langle m\rangle p$. Iz toga slijedi da postoji neka točka $x$ za koju vrijedi $vR_mx$ te u kojoj je istinita formula $p$. Kako je po definiciji relacije $V$ jedina takva točka $u$, slijedi $vR_mu$.

Dokažimo obrat. Pretpostavimo da okvir ima opisano svojstvo. Neka je dan proizvoljni relacijski model $\mathcal{M}$ nad relacijskim okvirom $\mathcal{F}$. Neka je točka $w$ proizvoljna točka iz skupa $W$. Neka je $F$ proizvoljno fiksirana formula. Pretpostavimo da vrijedi $w \Vdash \langle m\rangle F$. Tada postoji točka $u$ za koju vrijedi $wR_mu$ te u kojoj je istinita formula $F$. Neka je $x$ proizvoljna točka $R_n$-dostiživa iz točke $w$. Kako vrijedi $wR_mu$ te $wR_nx$ iz pretpostavljenog svojstva okvira slijedi da vrijedi $xR_mu$. Kako vrijedi $u \Vdash F$, slijedi $x \Vdash \langle m\rangle F$. Iz te činjenice te proizvoljnosti točke $x$ slijedi $w \Vdash [n]\langle m\rangle F$.

□

Za relacijski okvir kažemo da je adekvatan za sustav **GLP** ako je svaki teorem sustava **GLP** valjan tom okviru.

**Teorem 1.1.7.** *Neka je* $\mathcal{F} = (W, (R_n)_{n\in\omega})$ *neki relacijski okvir adekvatan za sustav* **GLP**. *Tada je* $R_n = \emptyset$ *za svaki* $n \in \omega$, $n > 0$.

*Dokaz.* Dokažimo prvo da je $R_1$ prazna relacija. Pretpostavimo da $R_1$ nije prazna relacija. Tada postoje neke točke $u$ i $w$ za koje vrijedi $uR_1w$. Iz leme 1.1.5 slijedi $uR_0w$. Iz tih činjenica i leme 1.1.6 slijedi $wR_0w$. Tada $R_0$ nije inverzno dobro fundirana, suprotno propoziciji 1.1.4.

Zbog leme 1.1.6 vrijedi da je $R_n$ podskup od $R_{n-1}$ za svaki pozitivan $n \in \omega$. Imamo dakle da vrijedi $R_n = \emptyset$ za svaki $n \in \omega$.

□

Spomenimo odmah da sustav **GLP** nije potpun u odnosu na bilo koju nepraznu adekvatnu klasu relacijskih okvira. Za dokazati taj rezultat potrebna je činjenica da iako je formula $[1]\bot$ valjana na svakom **GLP**-adekvatnom okviru, ona nije teorem sustava **GLP**. Taj rezultat će slijediti naknadno, kada dokažemo teorem adekvatnosti tzv. **GLP**-prostora za sustav **GLP**.

Ipak, postoji klasa relacijskih modela (ne okvira) na kojima je globalno istinita formula $F$ ako i samo ako vrijedi $\mathbf{GLP} \vdash F$. Nju je opisao Lev Beklemishev u [2].

Sustav **GL** se može promatrati kao fragment sustava **GLP** u kojem se od operatora $[n]$ za $n \in \omega$ javlja samo operator $[0]$. Slično se može promatrati sustav u kojem se javljaju samo operatori $[0]$ i $[1]$. Taj se sustav označava s **GLB** (slovo $B$ prema bimodalna).

Za neke sustave modalne logike postoji adekvatna topološka semantika. Početni korak u istraživanju topološke semantike logika dokazivosti napravio je Leo Esakia 1981. godine u [9]. Dokazao je potpunost sustava **GL** u odnosu na raspršene topološke prostore. Taj su rezultat neovisno pojačali Merab Abashidze 1985. godine u [1] i Andreas Blass 1990. godine u [7] dokazavši potpunost u odnosu na konkretan topološki prostor ordinala $\omega^\omega$ s uređajnom topologijom. Potpunost sustava **GLB** u odnosu na tzv. **GLP**-prostore dokazao je Lev Beklemishev 2010. godine. O ovim i drugim rezultatima moguće je pronaći više u [3].

Potpunost sustava **GLP** u odnosu na **GLP**-prostore u punoj općenitosti konačno su dokazali Lev Beklemishev i David Gabelaia 2013. godine u članku [4]. Glavni cilj ovog rada je predstaviti taj dokaz.

# Poglavlje 2

# Topološki prostori

## 2.1 Osnovne definicije

Osnovni cilj ovog rada je dokazati potpunost sustava **GLP** u odnosu na klasu tzv. **GLP**-prostora. U ovom je poglavlju fokus na svojstvima, odnosima i operacijama nad određenim vrstama prostora potrebnim u nastavku. Veza **GLP**-prostora i samog sustava **GLP** će biti opisana u trećem poglavlju.

**Definicija 2.1.1.** *Topološki prostor je par* $(X, \mathcal{T})$ *za koji vrijedi:*

- $X$ *je proizvoljan neprazan skup čije elemente nazivamo točkama;*
- *familija* $\mathcal{T}$ *je familija podskupova od* $X$*, tj.* $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$*, za koju vrijedi:*
  1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$*;*
  2. *familija* $\mathcal{T}$ *je zatvorena na konačne presjeke;*
  3. *familija* $\mathcal{T}$ *je zatvorena na proizvoljne unije.*

*Familiju* $\mathcal{T}$ *nazivamo topologijom nad* $X$ *ili samo topologijom. Njene elemente nazivamo* $\mathcal{T}$*-otvorenim skupovima ili (ako je topologija* $\mathcal{T}$ *očita iz konteksta) otvorenim skupovima. Skup čiji je komplement* $\mathcal{T}$*-otvoren nazivamo* $\mathcal{T}$*-zatvorenim skupom ili (ako je topologija* $\mathcal{T}$ *očita iz konteksta) zatvorenim skupom.*

Ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, ovisno o kontekstu $X$ označava skup točaka tog prostora, ali i cijeli prostor.

Topologija je *diskretna* ako sadrži sve podskupove od $X$. Ako sadrži samo $\emptyset$ i $X$, naziva se *indiskretna*.

Ponekad se topološki prostori ne zadaju potpuno eksplicitno, već zadavanjem skupa točaka i dijela topologije. Do preostalog dijela topologije dolazi se nekim jednostavnim operacijama, kako je prikazano u sljedećoj definiciji.

**Definicija 2.1.2.** *Baza neke topologije na $X$ je familija $B$ podskupova od $X$ za koju vrijedi:*

- *presjek svaka dva člana familije $B$ unija je nekih članova familije $B$;*
- *familija $B$ pokriva $X$, tj. $\bigcup B = X$.*

*Za topologiju $\mathcal{T}$ kažemo da je generirana bazom $B$ ako se sastoji od praznog skupa i svih proizvoljnih unija članova baze $B$.*

*Za familiju $B$ kažemo da je podbaza topologije $\mathcal{T}$ ako vrijedi da je familija svih konačnih presjeka članova familije $B$ jedna baza topologije $\mathcal{T}$. Neka je $B$ proizvoljna familija podskupova skupa $X$, te familija $B'$ zatvorenje familije $B$ na konačne presjeke. Za topologiju $\mathcal{T}$ kažemo da je generirana familijom $B$ ako se sastoji od praznog skupa i svih proizvoljnih unija članova familije $B'$.*

Ukratko, podbaza je familija skupova istih točaka koje sadrži i prostor, i topologija je zatvorenje na proizvoljne unije zatvorenja podbaze na konačne presjeke. Ako je topologija $\mathcal{T}$ generirana familijom $B$, onda je $B$ jedna podbaza za topologiju $\mathcal{T}$.

Primijetimo da podbaza jedinstveno određuje topologiju, ali ne i obratno.

Slijede opisi nekoliko često korištenih topologija.

**Definicija 2.1.3.** *Neka je $(X, <)$ linearno uređen skup. Neka je $B$ familija koju čine sljedeći skupovi:*

- *$\langle a, b\rangle$ ako vrijedi $a, b \in X$ te $a < b$;*
- *$[\min X, b\rangle \in B$ ako vrijedi $b \in X$, postoji $\min X$ te $\min X < b$;*
- *$\langle a, \max X] \in B$ ako vrijedi $a \in X$, postoji $\max X$ te $a < \max X$.*

*Za topologiju $\mathcal{T}$ generiranu familijom $B$ kažemo da je uređajna topologija danog linearno uređenog skupa $(X, <)$.*

**Definicija 2.1.4.** *Neka je $(X, <)$ linearno uređen skup. Neka je topologija $\mathcal{T}$ sastavljena od praznog skupa, skupa $X$ i svih skupova oblika $\{x \in X \mid x < a\}$ za $a \in X$. Za topologiju $\mathcal{T}$ kažemo da je lijeva topologija danog linearno uređenog skupa $(X, <)$.*

Slijede definicije nekih osnovnih pojmova vezanih uz topološke prostore.

**Definicija 2.1.5.** *Neka je zadan topološki prostor $(X, \mathcal{T})$.*

- *Za skup* $S \subseteq X$ *kažemo da je okolina točke* $t \in X$ *ako je otvoren u prostoru* $X$ *i sadrži točku* $t$.[1]
- *Za skup* $S \subseteq X$ *kažemo da je probušena okolina točke* $t \in X$ *ako je skup* $S \cup \{t\}$ *okolina točke* $t$*, i skup* $S$ *ne sadrži točku* $t$.
- *Točka* $t$ *je gomilište skupa* $S \subseteq X$ *ako za svaki* $\mathcal{T}$*-otvoreni skup* $U$ *takav da vrijedi* $t \in U$ *postoji točka* $t' \in U \cap S$ *takva da vrijedi* $t' \neq t$.
- *Za* $S \subseteq X$*, s* $\mathrm{d}\,S$ *označavamo skup svih gomilišta skupa* $S$.
- *Za* $S \subseteq X$*, s* $\widetilde{\mathrm{d}}S$ *označavamo skup* $X \setminus \mathrm{d}(X \setminus S)$.
- *Za* $S \subseteq X$*, skup* $cS = S \cup \mathrm{d}\,S$ *zovemo zatvorenje skupa* $S$.
- *Za* $S \subseteq X$*, skup* $\operatorname{int} S = \bigcup_{O \in \mathcal{T}, O \subseteq S} O$ *zovemo interiorom skupa* $S$.
- *Točka* $t$ *je izolirana točka u skupu* $S \subseteq X$ *ako postoji otvoren skup* $O$ *takav da vrijedi* $S \cap O = \{t\}$. *Oznakom* $\operatorname{iso} S$ *označavamo skup svih točaka izoliranih u skupu* $S$. *Taj ćemo skup zvati i skupom izoliranih točaka skupa* $S$.
- *Skup* $S$ *je gust u sebi ako ne sadrži izoliranu točku.*
- *Prostor* $X$ *je raspršen ako nema nepraznih podskupova koji su gusti u sebi.*
- *Prostor* $(X', \mathcal{T}')$ *je potprostor prostora* $(X, \mathcal{T})$ *ako vrijedi* $X' \subseteq X$ *i topologija* $\mathcal{T}'$ *je familija presjeka* $\mathcal{T}$*-otvorenih skupova sa skupom* $X'$. *Kaže se da je* $(X', \mathcal{T}')$ *potprostor prostora* $X$ *generiran skupom* $X'$.
- *Preslikavanje* $f : X_1 \to X_2$ *između dva topološka prostora je otvoreno ako je za svaki otvoreni skup* $O$ *domene skup* $f(O)$ *otvoren u kodomeni.*
- *Preslikavanje* $f : X_1 \to X_2$ *između dva topološka prostora je neprekidno ako je za svaki otvoreni skup* $O$ *kodomene skup* $f^{-1}(O)$ *otvoren u domeni.*
- *Bijekcija* $f : X_1 \to X_2$ *između dva topološka prostora je homeomorfizam ako je otvorena i neprekidna.*
- *Preslikavanje* $f : X_1 \to X_2$ *između dva topološka prostora je diskretno po točkama ako za svaku točku* $y \in X_2$ *skup* $f^{-1}(\{y\})$ *generira diskretan potprostor domene.*

---

[1] U literaturi se obično ovako definira termin "otvorena okolina". Termin "okolina" se tada definira kao bilo koji nadskup neke otvorene okoline. U ovom radu nam neće zatrebati okoline koje nisu otvorene, pa poistovjećujemo te termine.

Ako raspolažemo s jednom ili više topologija, možemo, koristeći njih, definirati nove topologije. Jedan način za to smo već upoznali. Radilo se o topologiji generiranom nekim podskupom prostora. Prvo uvodimo disjunktnu sumu topologija. Ova će nam konstrukcija zatrebati pri samom kraju rada, kako bismo povezali mnogo manjih prostora u jedan veći prostor.

**Definicija 2.1.6.** *Neka je $I$ skup te $(X_i)_{i\in I}$ familija prostora indeksirana skupom $I$. Ako za neke različite indekse $i, j \in I$ skupovi $X_i$ i $X_j$ nisu disjunktni, preimenujemo elemente kako bi postali disjunktni.*

*Definiramo topološki prostor $X = (\sqcup_{i\in I} X_i, \mathcal{T}^{\sqcup})$ na sljedeći način. Skup točaka $\sqcup_{i\in I} X_i$ je (disjunktna) unija svih skupova $X_i$ za $i \in I$. Skup $S$ je $\mathcal{T}^{\sqcup}$-otvoren ako i samo ako je za svaki indeks $i \in I$ presjek skupa $S$ i prostora $X_i$ otvoren u prostoru $X_i$. Tako definiran prostor $X$ nazivamo disjunktnom unijom familije prostora $(X_i)_{i\in I}$.*

Koristit ćemo još jednu metodu za definiranje nove topologije na temelju neke već definirane topologije. Sljedeći pojam je ključan pri definiciji jedne klase prostora (tzv. lme-prostora) na kojima je moguće izgraditi protuprimjer svakoj formuli koja nije teorem sustava **GLP**.

**Definicija 2.1.7.** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Za topologiju kažemo da je* d*-topologija topologije $\mathcal{T}$ ako je generirana familijom $\mathcal{T} \cup \{\mathrm{d}(A) \mid A \subseteq X\}$. Pritom* d*-topologiju označavamo s $\mathcal{T}^+$, a prostor $(X, \mathcal{T}^+)$ s $X^+$.*

Dokažimo neke korisne činjenice o topološkim prostorima.

**Lema 2.1.8.** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Vrijedi:*

1. *Neka je $S$ podskup prostora $X$. Zatvorenje skupa $S$ je najmanji zatvoren nadskup skupa $S$.*
2. *Ako je $\mathrm{d}\,X$ prazan skup, prostor $X$ je diskretan.*
3. *Skup $S \subseteq X$ sadrži neku probušenu okolinu točke $t \in X$ ako i samo ako vrijedi $t \in \widetilde{\mathrm{d}}S$.*
4. *Neka je $(Y, \sigma)$ topološki prostor, te $f : X \to Y$ neko preslikavanje. Neka je $x$ točka prostora $X$ te $O$ neka njena okolina. Neka je $U$ proizvoljna okolina točke $x$ sadržana u okolini $O$. Ako nijedna okolina točke $f(x)$ nije sadržana u skupu $f(O)$, onda niti jedna okolina točke $f(x)$ nije sadržana u skupu $f(U)$.*

*Dokaz.* 1. Kako vrijedi $cS = S \cup \mathrm{d}\,S$, očito je zatvorenje nadskup skupa $S$.

Dokažimo prvo da je zatvorenje zatvoren skup, tj. da je $(S \cup \mathrm{d}\,S)^c$ otvoren skup.

Neka je $D$ unija svih otvorenih skupova disjunktnih sa skupom $S$. Dokažimo da vrijedi $D = (S \cup \mathrm{d}\, S)^c$. Neka vrijedi $x \in D$. Očito vrijedi $x \notin S$. Zatim, iz definicije skupa $D$ slijedi da postoji okolina točke $x$ koja ne sadrži niti jednu točku iz skupa $S$. Stoga vrijedi i $x \notin \mathrm{d}\, S$. Pretpostavimo sada da vrijedi $x \in (S \cup \mathrm{d}\, S)^c$. Iz $x \notin \mathrm{d}\, S$ slijedi da postoji neka okolina $O$ točke $S$ u kojoj niti jedna točka (osim možda točke $x$) nije iz skupa $S$. Kako vrijedi i $x \notin S$, slijedi da je skup $O$ disjunktan sa $S$, što znači da vrijedi $x \in O \subseteq D$.

Dokažimo sada da je zatvorenje skupa $S$ najmanji zatvoren nadskup skupa $S$. Neka je $P$ presjek svih zatvorenih nadskupa skupa $S$. Tada je komplement skupa $P$ unija svih otvorenih skupova disjunktnih sa $S$. No dokazali smo da je ta unija upravo komplement zatvorenja skupa $S$. Iz činjenice $P^c = (cS)^c$ očito slijedi $P = cS$.

2. Da prostor $X$ nije diskretan, neka točka $c$ bi imala samo višečlane okoline. To bi povlačilo da je točka $c$ element skupa $\mathrm{d}\, X$, jer se u svakoj njenoj okolini nalazi još neka točka prostora $X$. Međutim, skup $\mathrm{d}\, X$ je prazan pa je prostor $X$ diskretan.

3. Pretpostavimo da skup $S \subseteq X$ sadrži probušenu okolinu $O$ točke $t \in X$. Okolina $O \cup \{t\}$ točke $t$ ne sadrži niti jednu točku iz skupa $X \setminus S$ osim možda same točke $t$. Stoga točka $t$ nije gomilište skupa $X \setminus S$, pa vrijedi $t \in \widetilde{\mathrm{d}}S$.

   Pretpostavimo sada da vrijedi $t \in \widetilde{\mathrm{d}}S$. Tada točka $t$ nije gomilište skupa $X \setminus S$. Stoga postoji okolina $O$ točke $t$ koja u presjeku sa skupom $X \setminus S$ ne sadrži niti jednu drugu točku iz skupa $X \setminus S$. Tada je probušena okolina $O \setminus \{t\}$ disjunktna sa skupom $X \setminus S$. Slijedi da je probušena okolina $O \setminus \{t\}$ sadržana u skupu $S$.

4. Kako vrijedi $U \subseteq O$, slijedi $f(U) \subseteq f(O)$. Za svaku okolinu $P$ točke $f(x)$ vrijedi $P \nsubseteq f(O)$, pa slijedi $P \nsubseteq f(U)$.

$\square$

Primijetimo da je topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ raspršen ako i samo ako za svaki neprazan podskup $S$ prostora $X$ postoji otvoreni skup $O$ čiji je presjek sa skupom $S$ neki jednočlan skup.

Svi prostori koje promatramo u nastavku će imati svojstvo raspršenosti. Promotrimo za početak nekoliko konkretnih primjera takvih prostora.

**Primjer 2.1.9.** *Dajemo nekoliko primjera raspršenih topoloških prostora.*

- *Bilo koji skup uz diskretnu topologiju je raspršen topološki prostor.*

- *Neka je $R$ tranzitivna i inverzno dobro fundirana binarna relacija na skupu $X$. Za točku $x \in X$ označimo s $R(x)$ skup $\{y \in X \mid xRy\}$. Označimo $B = \{R(x) \cup \{x\} | x \in X\}$. Neka su $R(u) \cup \{u\}$ i $R(v) \cup \{v\}$ proizvoljni članovi familije $B$. Neka je $x$ proizvoljna točka presjeka tih skupova. Zbog tranzitivnosti relacije $R$, skup $R(x) \cup \{x\}$ je podskup oba skupa, pa stoga i njihovog presjeka. Dakle, presjek svaka dva skupa familije $B$ jednak je uniji nekih članova familije $B$, pa je familija $B$ baza za neku topologiju.*

  *Označimo s $\mathcal{T}$ topologiju generiranu bazom $B$. Dokažimo da je prostor $(X, \mathcal{T})$ raspršen. Za proizvoljan neprazan skup točaka $S$ prostora $X$ treba pronaći otvoreni skup koji sadrži samo jednu točku skupa $S$. Kako je relacija $R$ inverzno dobro fundirana, unutar skupa $S$ postoji barem jedna $R$-maksimalna (s obzirom na skup $S$) točka $t$. Skup $R(t) \cup \{t\}$ je otvoren skup (jer je član baze). Prema $R$-maksimalnosti točke $t$ unutar skupa $S$, slijedi da su skupovi $R(t)$ i $S$ disjunktni. Dakle, vrijedi $S \cap (R(t) \cup \{t\}) = \{t\}$ pa je prostor $(X, \mathcal{T})$ raspršen.*

**Teorem 2.1.10.** *Prostor $(\alpha, \mathcal{T})$, gdje je $\alpha$ ordinal i $\mathcal{T}$ uređajna topologija, je raspršen.*

*Dokaz.* Neka je $S$ proizvoljan podskup prostora. Zbog dobre uređenosti ordinala, ordinal $\min S$ je dobro definiran.

Tada otvoren skup $[0, \min S + 1\rangle$ sadrži točku $\min S$ iz skupa $S$ i samo nju. $\square$

Primijetimo da identičan argument dokazuje da su raspršeni i svi prostori kojima je skup točaka ordinal, a topologija lijeva.

Za interpretaciju polimodalnih sustava (kakav je **GLP**) potrebni su politopološki prostori. To su strukture nalik topološkim prostorima koje, umjesto jedne, sadrže prebrojivo mnogo topologija.

**Definicija 2.1.11.** *Politopološki prostor $(X, (\mathcal{T}_n)_{n\in\omega})$ je uređeni par nepraznog skupa $X$ te niza $(\mathcal{T}_n)_{n\in\omega}$ takvog da je $(X, \mathcal{T}_n)$ topološki prostor za svaki $n \in \omega$.*

Politopološki prostori će u nastavku biti označavani kao $(X; \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \dots)$. Topološki pojmovi i operatori iz definicije 2.1.5 primjenjivi su i dalje na prostore $(X, \mathcal{T}_n)$. Konkretno, pod pojmovima $\mathcal{T}_n$-okoline, probušene $\mathcal{T}_n$-okoline, $\mathcal{T}_n$-izolirane točke, $\mathcal{T}_n$-gomilišta, $\mathcal{T}_n$-zatvorenja, $\mathcal{T}_n$-interiora te $\mathcal{T}_n$-gustoće u sebi podskupa politopološkog prostora misli se na okolinu, probušenu okolinu, izoliranu točku, gomilište, zatvorenje, interior i gustoću u sebi podskupa prostora $(X, \mathcal{T}_n)$.

Pod $\mathcal{T}_n$-raspršenosti politopološkog prostora mislimo na raspršenost prostora $X$ u odnosu na topologiju $\mathcal{T}_n$. Simbol $\mathrm{d}_{\mathcal{T}_n} S$ je skup $\mathcal{T}_n$-gomilišta skupa $S$. Simbol $\widetilde{\mathrm{d}}_{\mathcal{T}_n} S$ označava skup $X \setminus \mathrm{d}_{\mathcal{T}_n}(X \setminus S)$. Disjunktna unija politopoloških prostora je politopološki prostor u kojem su sve topologije disjunktne unije odgovarajućih topologija polaznih prostora.

Preslikavanje $f$ između prostora $(W, (R_n)_{n\in\omega})$ i $(W', (R'_n)_{n\in\omega})$ je homeomorfizam ako je $f$ homeomorfizam u odnosu na svaki par topologija $\mathcal{T}_i$ i $\mathcal{T}'_i$, za sve $i \in \omega$.

Reći ćemo da je politopološki prostor diskretan ako su sve njegove topologije, osim možda njih konačno mnogo, diskretne.

## 2.2 Generalizirani skup gomilišta i $\mathrm{d}$-preslikavanje

Operator $\mathrm{d}\, S$, gdje je $S$ podskup nekog prostora, definiran je kao skup svih gomilišta skupa $S$. Može ga se generalizirati na sljedeći način.

**Definicija 2.2.1.** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, te $A \subseteq X$. Za svaki ordinal $\alpha$ operator $\mathrm{d}^\alpha$ se definira na sljedeći način:*

- $\mathrm{d}^0\, A = A$;
- $\mathrm{d}^{\alpha+1}\, A = \mathrm{d}(\mathrm{d}^\alpha\, A)$;
- $\mathrm{d}^\alpha\, A = \bigcap_{\beta<\alpha} \mathrm{d}^\beta\, A$, *ako je $\alpha$ ordinal druge vrste.*

Postoji veza između generaliziranog skupa gomilišta i raspršenih prostora. Naime, prostor $X$ je raspršen ako i samo ako je za neki ordinal $\alpha$ skup $\mathrm{d}^\alpha\, X$ prazan. Tu činjenicu ćemo nešto kasnije i dokazati. Ilustrirajmo zasad djelovanje generaliziranog skupa gomilišta na tipičnom prostoru kakav se javlja u nastavku - prostoru ordinala s uređajnom topologijom.

**Primjer 2.2.2.** *U sljedećim primjerima pretpostavimo da je na raspolaganju dovoljno velik početni komad klase ordinala. Pretpostavljamo da je topologija uređajna. Redom imamo:*

- $\mathrm{d}^1\, \omega = \mathrm{d}\, \omega = \{\omega\}$.
- $\mathrm{d}^2\, \omega^2 = \mathrm{d}\,\mathrm{d}\, \omega^2 = \mathrm{d}\{\omega, \omega\cdot 2, \omega\cdot 3, \dots, \omega^2\} = \{\omega^2\}$.
- $\mathrm{d}^3\, \omega^3 = \mathrm{d}\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}\, \omega^3 = \mathrm{d}\,\mathrm{d}\{\omega, \omega\cdot 2, \omega\cdot 3, \dots, \omega^2, \omega^2+\omega, \omega^2+\omega\cdot 2, \dots, \omega^2\cdot 2, \omega^2\cdot 2 + \omega, \omega^2\cdot 2+\omega\cdot 2, \dots, \omega^3\} = \mathrm{d}\{\omega^2, \omega^2\cdot 2, \omega^2\cdot 3, \dots, \omega^3\} = \{\omega^3\}$.
- $$\begin{aligned} \mathrm{d}^\omega\, \omega^\omega &= \bigcap_{\beta<\omega} \mathrm{d}^\beta\, \omega^\omega \\ &= \omega^\omega \cap \mathrm{d}\, \omega^\omega \cap \mathrm{d}\,\mathrm{d}\, \omega^\omega \cap \dots \\ &= \omega^\omega \setminus \{0\} \setminus \{\alpha \mid \textit{postoje ordinali } \beta \textit{ i } \gamma > 0 \textit{ takvi da vrijedi } \alpha = \beta + \omega^0\cdot\gamma\} \\ &\qquad \setminus \{\alpha \mid \textit{postoje ordinali } \beta \textit{ i } \gamma > 0 \textit{ takvi da vrijedi } \alpha = \beta + \omega^1\cdot\gamma\} \\ &\qquad \setminus \dots \\ &= \{\omega^\omega\}. \end{aligned}$$

Za prostor $(X, \mathcal{T})$ skup $\operatorname{iso} X$ sadrži točke $x$ za koje je skup $\{x\}$ otvoren. Stoga vrijedi $\operatorname{d} X = X \setminus \operatorname{iso} X$. Za proizvoljan podskup $A$ prostora $X$ ne mora vrijediti $\operatorname{d} A = A \setminus \operatorname{iso} A$. Npr. $\omega \subset \omega^\omega$, ali $\operatorname{d} \omega = \{\omega\} \neq \emptyset = \omega \setminus \operatorname{iso} \omega$.

Dokažimo neka korisna svojstva generaliziranog skupa gomilišta.

**Propozicija 2.2.3.** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Tada vrijedi:*

1. *Za svaki zatvoreni skup $A$ vrijedi $\operatorname{d} A = A \setminus \operatorname{iso} A$.*
2. *Za svaki zatvoreni skup $A$, skup $\operatorname{d} A$ je također zatvoren.*
3. *Skup $\operatorname{d}^\alpha X$ je zatvoren za svaki ordinal $\alpha$.*
4. *Vrijedi $\operatorname{d}^{\alpha+\beta} X \subseteq \operatorname{d}^\alpha X$ za sve oridnale $\alpha$ i $\beta$.*
5. *Ako je $X$ raspršen, za svaki ordinal $\alpha$ i svaki pozitivan ordinal $\beta$ vrijedi jedno od sljedećeg:*
   - *barem jedan od skupova $\operatorname{d}^\alpha X$ i $\operatorname{d}^{\alpha+\beta} X$ je prazan skup, ili*
   - *skup $\operatorname{d}^{\alpha+\beta} X$ je pravi podskup skupa $\operatorname{d}^\alpha X$.*
6. *Neka su $A$ i $B$ proizvoljni podskupovi prostora $X$ za koje vrijedi $A \subseteq B$. Tada vrijedi i $\operatorname{d}^\alpha A \subseteq \operatorname{d}^\alpha B$, za sve ordinale $\alpha$.*
7. *Neka je $\alpha$ najmanji ordinal za koji skup $\operatorname{d}^\alpha X$ ne sadrži neki element $x \in X$. Tada je $\alpha$ ordinal prve vrste.*
8. *Neka je $X$ ordinal, a $\mathcal{T}$ lijeva topologija nad $X$. Neka za ordinale $\alpha$ i $\beta$ vrijedi $\beta < \alpha < X$. Tada vrijedi $\operatorname{d}^\beta \alpha = [\beta, \alpha\rangle$.*

*Dokaz.* 1. Zbog toga što je skup $A$ jednak vlastitom zatvorenju (vidi lemu 2.1.8), a zatvorenje jednako uniji $A$ i $\operatorname{d} A$, slijedi $A = A \cup \operatorname{d} A$, pa vrijedi $\operatorname{d} A \subseteq A$. Pretpostavimo prvo da je točka $g$ gomilište skupa $A$. Zbog $\operatorname{d} A \subseteq A$ slijedi $g \in A$. Kad bi $g$ bila izolirana točka u skupu $A$, točka $g$ ne bi mogla biti gomilište skupa $A$ (postojala bi okolina od $g$ koja ne sadrži nijednu drugu točku iz skupa $A$), pa $g \in A \setminus \operatorname{iso} A$.

Pretpostavimo sada da vrijedi $g \in A \setminus \operatorname{iso} A$. Tada po definiciji skupa $\operatorname{iso} A$ slijedi da svaka okolina točke $g$ sadrži barem još jednu točku iz skupa $A$, što je definicija gomilišta skupa $A$.

2. Za $x \in \operatorname{iso} A$ s $O_x$ označimo proizvoljan otvoreni skup takav da vrijedi $A \cap O_x = \{x\}$. Tada je $O = \bigcup_{x \in \operatorname{iso} A} O_x$ otvoren skup zbog zatvorenosti topologije na unije. Skup $O$ možemo zapisati kao disjunktnu uniju skupova $\operatorname{iso} A$ i $O'$, gdje

skup $O'$ definiramo na sljedeći način: $O' = O \setminus \operatorname{iso} A$. Primijetimo da su skupovi $O'$ i $A$ disjunktni; u suprotnom bi neki od ranije odabranih skupova $O_x$ u presjeku s $A$ dao višečlan skup.

Iz prethodne tvrdnje imamo $\operatorname{d} A = A \setminus \operatorname{iso} A$. Primjenom komplementa na obje strane i nakon sređivanja slijedi $(\operatorname{d} A)^c = A^c \cup \operatorname{iso} A$. Kako je skup $O'$ disjunktan sa skupom $A$ dalje to možemo zapisati kao $(\operatorname{d} A)^c = A^c \cup O' \cup \operatorname{iso} A = A^c \cup O$. Unija dva otvorena skupa je otvoren skup, pa slijedi da je skup $\operatorname{d} A$ komplement otvorenog skupa, tj. zatvoren skup.

3. Tvrdnju dokazujemo transfinitnom indukcijom po ordinalu $\alpha$. Tvrdnja vrijedi za bazu indukcije.

   Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za sve ordinale manje od $\alpha$ i dokažimo da vrijedi i za ordinal $\alpha$. Ako je $\alpha$ ordinal prve vrste, onda vrijedi $\alpha = \beta + 1$ za neki ordinal $\beta$. Po pretpostavci vrijedi da je $\operatorname{d}^\beta X$ zatvoren skup. Po prethodnoj tvrdnji propozicije slijedi da je stoga $\operatorname{d}^\alpha X = \operatorname{d}(\operatorname{d}^\beta X)$ također zatvoren skup. Ako je $\alpha$ ordinal druge vrste, onda vrijedi $\operatorname{d}^\alpha X = \bigcap_{\beta<\alpha} \operatorname{d}^\beta X$. Po pretpostavci vrijedi da je $\operatorname{d}^\beta X$ zatvoren skup za svaki ordinal $\beta < \alpha$. Presjek zatvorenih skupova je zatvoren skup. Stoga je $\operatorname{d}^\alpha X$ zatvoren skup.

4. Neka je $\alpha$ proizvoljan ordinal. Tvrdnju dokazujemo transfinitnom indukcijom po ordinalu $\beta$.

   Tvrdnja vrijedi za bazu indukcije. Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za sve ordinale manje od $\beta$ i dokažimo da vrijedi i za $\beta$. Ako je $\beta$ ordinal prve vrste, onda vrijedi $\beta = \gamma + 1$ za neki $\gamma$. Po prethodnoj tvrdnji propozicije slijedi da je skup $\operatorname{d}^{\alpha+\beta} X$ zatvoren. Prema prvoj tvrdnji propozicije vrijedi $\operatorname{d}^{\alpha+\beta} X = \operatorname{d}(\operatorname{d}^{\alpha+\gamma} X) = \operatorname{d}^{\alpha+\gamma} X \setminus \operatorname{iso}(\operatorname{d}^{\alpha+\gamma} X)$. Iz toga slijedi $\operatorname{d}^{\alpha+\beta} X \subseteq \operatorname{d}^{\alpha+\gamma} X$. Po pretpostavci vrijedi $\operatorname{d}^{\alpha+\gamma} \subseteq \operatorname{d}^\alpha X$, pa slijedi $\operatorname{d}^{\alpha+\beta} \subseteq \operatorname{d}^\alpha X$,

   Ako je $\beta$ ordinal druge vrste, onda vrijedi $\operatorname{d}^{\alpha+\beta} X = \bigcap_{\gamma<\alpha+\beta} \operatorname{d}^\gamma X$. Kad bi $\operatorname{d}^{\alpha+\beta} X$ sadržavao element izvan $\operatorname{d}^\alpha X$, slijedilo bi da za sve ordinale $\delta$ manje od $\alpha + \beta$ vrijedi $\operatorname{d}^\delta X \not\subseteq \operatorname{d}^\alpha X$. Za slučaj $\delta = \alpha$ imamo kontradikciju. Stoga vrijedi $\operatorname{d}^{\alpha+\beta} X \subseteq \operatorname{d}^\alpha X$.

5. Dokažimo prvo da je neprazan zatvoreni skup $A$ raspršenog prostora pravi nadskup skupa $\operatorname{d} A$ (zasad znamo samo da je nadskup). Kako vrijedi $A \subseteq X$, zbog svojstva raspršenosti postoji točka $t$ i otvoreni skup $O$ takav da vrijedi $A \cap O = \{t\}$. Točka $t \in A$ ima okolinu $O$ koja ne sadrži nijednu drugu točku iz skupa $A$. Stoga $t \notin \operatorname{d} A$.

Primjenom upravo dokazane činjenice i treće tvrdnje propozicije imamo da vrijedi:

$$\mathrm{d}^{\alpha+1} X \subset \mathrm{d}^{\alpha} X \text{ za } \mathrm{d}^{\alpha} X \neq \emptyset.$$

Pretpostavimo da je prostor $(X, \mathcal{T})$ raspršen prostor te je $\mathrm{d}^{\alpha} X$ neprazan skup. Tvrdnju dokazujemo transfinitnom indukcijom po ordinalu $\beta$.

Već smo dokazali da tvrdnja vrijedi za bazu indukcije te korak indukcije kad je $\beta$ ordinal prve vrste (koristimo činjenicu da je $\mathrm{d}^{\alpha} X$ zatvoren skup kad je $\alpha$ pozitivan ordinal).

Pretpostavimo sada da je $\beta$ ordinal druge vrste. Iz ranije dokazane tvrdnje znamo da vrijedi $\mathrm{d}^{\alpha+1} X \subset \mathrm{d}^{\alpha} X$. Iz prethodne tvrdnje znamo da vrijedi $\mathrm{d}^{\alpha+\beta} X \subseteq \mathrm{d}^{\alpha+1} X$. Stoga, vrijedi $\mathrm{d}^{\alpha+\beta} X \subset \mathrm{d}^{\alpha} X$.

6. Tvrdnju dokazujemo transfinitnom indukcijom po ordinalu $\alpha$. Tvrdnja vrijedi za bazu indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve ordinale manje od $\alpha$ i dokažimo da vrijedi i za $\alpha$. Ako je $\alpha$ ordinal prve vrste, onda vrijedi $\alpha = \beta + 1$ za neki ordinal $\beta$. Neka je $x \in \mathrm{d}(\mathrm{d}^{\beta} A)$. Neka je $O$ proizvoljna okolina točke $x$. Tada postoji neka točka $t$ različita od $x$ u presjeku $\mathrm{d}^{\beta} A$ i $O$. Po pretpostavci vrijedi $\mathrm{d}^{\beta} A \subseteq \mathrm{d}^{\beta} B$. Stoga je točka $t$ i u presjeku skupova $\mathrm{d}^{\beta} B$ i $O$. Okolina $O$ je bila proizvoljna, pa zaključujemo da je $x$ element $\mathrm{d}(\mathrm{d}^{\beta} B) = \mathrm{d}^{\alpha} B$. Pretpostavimo sada da je $\alpha$ ordinal druge vrste. Tada vrijedi $\mathrm{d}^{\alpha} A = \cap_{\beta<\alpha} \mathrm{d}^{\beta} A$. Svaki skup $\mathrm{d}^{\beta} A$ u presjeku je podskup skupa $\mathrm{d}^{\beta} B$. Stoga je i cijeli presjek podskup skupa $\cap_{\beta<\alpha} \mathrm{d}^{\beta} B$.

7. Pretpostavimo da vrijedi $\alpha = 0$. No vrijedi $\mathrm{d}^{0} X = X$ i stoga vrijedi $x \in \mathrm{d}^{0} X$.

   Pretpostavimo da je $\alpha$ ordinal druge vrste. Tada je $\mathrm{d}^{\alpha} X$ presjek skupova koji sadrže $x$. No tada vrijedi $x \in \mathrm{d}^{\alpha} X$.

   Preostaje samo mogućnost da je $\alpha$ ordinal prve vrste.

8. Dokažimo transfinitnom indukcijom da je skup $\mathrm{d}^{\beta} \alpha$ točno skup $[\beta, \alpha\rangle$. Tvrdnja vrijedi za bazu indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve ordinale $\gamma < \beta$. Ako je $\beta$ ordinal prve vrste, onda vrijedi $\beta = \delta + 1$, za neki $\delta$. Po pretpostavci indukcije vrijedi $\mathrm{d}^{\delta} \alpha = [\delta, \alpha\rangle$. Stoga vrijedi $\mathrm{d}^{\beta} \alpha = \mathrm{d}[\delta, \alpha\rangle$. Kako je $X$ prostor s lijevom topologijom, skup $[0, \delta]$ je otvoren skup. Stoga točka $\delta$ nije gomilište skupa $[\delta, \alpha\rangle$. Sve okoline svih ostalih točaka $\zeta$ skupa $[\delta, \alpha\rangle$ su nadskup skupa $[0, \zeta]$. Skup $[0, \zeta]$ sadrži točku $\delta$. Stoga se sve točke osim točke $\delta$ nalaze u skupu $\mathrm{d}[\delta, \alpha\rangle = [\delta + 1, \alpha\rangle = [\beta, \alpha\rangle$. Pretpostavimo sada da je $\beta$ ordinal druge vrste. Tada vrijedi $\mathrm{d}^{\beta} \alpha = \cap_{\gamma<\beta} \mathrm{d}^{\gamma} \alpha$. Po pretpostavci indukcije vrijedi $\mathrm{d}^{\gamma} \alpha = [\gamma, \alpha\rangle$ za svaki ordinal $\gamma < \beta$. Promotrimo presjek tih segmenata.

Ordinal $\beta$ je u svim segmentima u presjeku. Pretpostavimo da je u skupu $\mathrm{d}^\beta\,\alpha$ najmanji ordinal $\beta'$ različit (manji) od ordinala $\beta$. Tada bi vrijedilo da je ordinal $\beta'$ element segmenta $[\beta'+1,\alpha\rangle$ (vrijedi $\beta'+1<\beta$ pa je i skup $[\beta'+1,\alpha\rangle$ u presjeku). Kako $\beta'$ nije element segmenta $[\beta'+1,\alpha\rangle$, slijedi da je najmanji ordinal barem veći ili jednak od $\beta$.

$\square$

Označimo $D_\beta = \mathrm{d}^\beta X \setminus \mathrm{d}^{\beta+1} X$. Uz to označimo $S_\alpha = \bigcup_{\beta\leq\alpha} D_\beta$. Skupove $D_\beta$ je korisno zamišljati kao slojeve prostora. Između ostalog, vrijedi da svi slojevi $D_\beta$, za $\beta<\alpha$ (gdje $\alpha$ ovisi o prostoru), čine particiju prostora, tj. neprazni su, međusobno disjunktni te je njihova unija jednaka cijelom prostoru. Dokažimo prvo neka jednostavna korisna svojstva tih skupova.

**Lema 2.2.4.** *Neka je $(X,\mathcal{T})$ proizvoljan raspršen topološki prostor, te $\alpha$ proizvoljan ordinal.*

1. *Ako je $D_\alpha$ prazan skup, onda je $\mathrm{d}^\beta X$ prazan skup za svaki ordinal $\beta$ takav da vrijedi $\beta\geq\alpha$.*
2. *Neka $\beta$ proizvoljan ordinal različit od $\alpha$. Tada su skupovi $D_\alpha$ i $D_\beta$ disjunktni.*
3. *Ako vrijedi $D_\alpha=\emptyset$, onda vrijedi $S_\alpha = X$.*

*Dokaz.*

1. Iz činjenice da je $D_\alpha$ prazan skup očito slijedi $\mathrm{d}^\alpha X\subseteq \mathrm{d}^{\alpha+1}X$. Iz četvrte tvrdnje propozicije 2.2.3 slijedi $\mathrm{d}^\alpha X = \mathrm{d}^{\alpha+1}X$. Iz pete tvrdnje propozicije 2.2.3 tada slijedi da je skup $\mathrm{d}^\alpha X$ prazan skup.

   Neka je $\beta$ ordinal veći od ordinala $\alpha$. Sada po četvrtoj tvrdnji propozicije 2.2.3 slijedi $\mathrm{d}^\beta X\subseteq \mathrm{d}^\alpha X$. Iz činjenice da je $\mathrm{d}^\alpha X$ prazan skup stoga slijedi $\mathrm{d}^\beta X=\emptyset$.

2. Možemo pretpostaviti da vrijedi $\alpha<\beta$ (tj. $\alpha+1\leq\beta$). Iz definicije skupa $D_\beta$ vidljivo je da vrijedi $D_\beta\subseteq \mathrm{d}^\beta X$. Iz četvrte tvrdnje propozicije 2.2.3 slijedi $\mathrm{d}^\beta X\subseteq \mathrm{d}^{\alpha+1}X$. Iz tih činjenica slijedi $D_\beta\subseteq \mathrm{d}^{\alpha+1}X$. No, iz definicije skupa $D_\alpha$ je očito da je skup $D_\alpha$ disjunktan sa skupom $\mathrm{d}^{\alpha+1}X$. Stoga je skup $D_\alpha$ disjunktan i sa svakim podskupom skupa $\mathrm{d}^{\alpha+1}X$, pa stoga i skupom $D_\beta$.

3. Pretpostavimo da vrijedi $D_\alpha=\emptyset$ te $S_\alpha\neq X$.

   Označimo $R = X\setminus S_\alpha$. Iz definicije skupa $S_\alpha$ očito je da vrijedi $S_\alpha\subseteq X$, pa iz činjenice $S_\alpha\neq X$ slijedi $S_\alpha\subset X$. Stoga je $R$ neprazan skup.

   Neka je $c\in X$ proizvoljna točka skupa $R$. Iz činjenice da vrijedi $D_\alpha=\emptyset$ slijedi $\mathrm{d}^\alpha X=\emptyset$ te $\mathrm{d}^{\alpha+1}X=\emptyset$ (prema lemi 2.2.3). Stoga je skup $\{\beta\mid c\notin \mathrm{d}^\beta X\}$ neprazan. Označimo $\alpha'=\min\{\beta\,|\,c\notin \mathrm{d}^\beta X\}$. Prema sedmoj tvrdnji propozicije

2.2.3 slijedi da postoji ordinal $\alpha''$ takav da vrijedi $\alpha' = \alpha''+1$. Imamo $c \in \mathrm{d}^{\alpha''} X$ te $c \notin \mathrm{d}^{\alpha''+1} X$, pa vrijedi $c \in D_{\alpha''}X$.

Prema prvoj tvrdnji propozicije iz $D_\alpha = \emptyset$ slijedi $\mathrm{d}^\beta = \emptyset$ za $\beta \geq \alpha$. Kako vrijedi $\{c\} \subseteq D_{\alpha''} \subseteq \mathrm{d}^{\alpha''}$, slijedi $\alpha'' < \alpha$. No tada vrijedi $D_{\alpha''} \subseteq S_\alpha$, pa je točka $c$ u skupu $S_\alpha$, što je kontradikcija s pretpostavkom.

□

Sada možemo dokazati već spominjanu vezu generaliziranog skupa gomilišta i raspršenih prostora. Konkretno, prostor $X$ je raspršen ako i samo ako je za neki ordinal $\alpha$ skup $\mathrm{d}^\alpha X$ prazan. Opišimo prvo neformalno zašto ta veza vrijedi. Ako je prostor raspršen, skup gomilišta svakog nepraznog skupa $S$ je uvijek pravi podskup skupa $S$. To znači da je svakom novom "iteracijom" $\beta$ generaliziranog skupa gomilišta, skup $\mathrm{d}^\beta X$ sve manji. Ako je iteracija dovoljno velika, primjerice takva da joj je kardinalnost veća od kardinalnosti prostora, skup $\mathrm{d}^\beta X$ je prazan.

S druge strane, ako je skup $\mathrm{d}^\beta X$ prazan za neki ordinal $\beta$, ne može postojati neprazan podskup koji je gust u sebi. Naime, nijedna iteracija generaliziranog skupa gomilišta ne bi mogla "izbaciti" neku točku iz tog podskupa. No to je upravo definicija raspršenog prostora; tj. prostor je raspršen ako ne sadrži podskup koji je gust u sebi.

**Teorem 2.2.5.** *Prostor $(X, \mathcal{T})$ je raspršen ako i samo ako je za neki ordinal $\alpha$ skup $\mathrm{d}^\alpha X$ prazan.*

*Dokaz.* Dokažimo prvo sljedeće: ako za neki ordinal $\alpha$ vrijedi $S_\alpha = X$ onda je za neki ordinal $\alpha$ skup $\mathrm{d}^\alpha X$ prazan.

Pretpostavimo da za neki ordinal $\alpha$ vrijedi $S_\alpha = X$. Tada također vrijedi $S_{\alpha+1} = X$, pa iz druge tvrdnje leme 2.2.4 slijedi $D_{\alpha+1} = \emptyset$. Iz prve tvrdnje leme 2.2.4 slijedi da je $\mathrm{d}^{\alpha+1} X$ prazan skup.

Stoga je dovoljno dokazati da za dovoljno veliki ordinal $\alpha$ vrijedi $S_\alpha = X$.

Transfinitnom indukcijom ćemo dokazati da za svaki ordinal $\alpha$ vrijedi:

$$S_\alpha = X \text{ ili } |S_\alpha| \geq |\alpha|.$$

Tvrdnja vrijedi za bazu indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve ordinale $\gamma < \alpha$. Promotrimo slučaj $\alpha = \beta + 1$. Pretpostavimo da je skup $S_\alpha$ pravi podskup prostora $X$. Kako je skup $S_\beta$ unija skupova $D_\gamma$ disjunktnih sa skupom $D_\alpha$, skupovi $S_\beta$ i $D_\alpha$ su disjunktni. Ako je ordinal $\beta$ konačne kardinalnosti jednake $n$, vrijedi $|\alpha| = n + 1$. Zbog konačnosti ordinala $\beta$ i disjunktnosti skupova $S_\beta$ i $D_\alpha$ vrijedi $|S_\alpha| = |S_\beta| + |D_\alpha|$. Prema trećoj tvrdnji leme 2.2.4, ako je $D_\alpha$ prazan skup, onda vrijedi $S_\alpha = X$. Stoga u nastavku uzimamo da je skup $D_\alpha$ neprazan. Imamo niz nejednakosti $|S_\alpha| = |S_\beta| + |D_\alpha| \geq |\beta| + |D_\alpha| \geq |\beta| + 1 = |\alpha|$.

Promotrimo sada slučaj kada je $\beta$ beskonačni ordinal. Zbog toga i činjenice da vrijedi $S_\beta \subset S_\alpha$ slijedi $|S_\alpha| \geq |\beta| = |\beta + 1| = |\alpha|$.

Neka je $\alpha$ ordinal druge vrste. Pretpostavimo da je skup $S_\alpha$ različit od $X$. Razlikujemo slučajeve ovisno o tome postoji li ordinal $\beta < \alpha$ za koji vrijedi $|\alpha| = |\beta|$. Promotrimo slučaj $|\alpha| = |\beta|$ za neki ordinal $\beta < \alpha$. Tada tvrdnja slijedi jer vrijedi $S_\alpha \supset S_\beta$. Preostaje slučaj kad je $|\alpha|$ veće od $|\beta|$ za svaki ordinal $\beta < \alpha$. Kako bismo dokazali tvrdnju o odnosu kardinalnosti potrebna nam je injekcija iz ordinala (promatranog kao skup) $\alpha$ u skup $S_\alpha$. Jedna takva injekcija je funkcija koja ordinalu $\beta$ pridružuje neki element skupa $D_\beta$. Svi skupovi $D_\beta$, za $\beta < \alpha$, su neprazni zbog pretpostavke da je skup $S_\alpha$ pravi podskup prostora $X$ i treće tvrdnje leme 2.2.4. Prema drugoj tvrdnji leme 2.2.4 su i disjunktni. Stoga takva injekcija $f$ postoji i vrijedi $|S_\alpha| \geq |\alpha|$.

Pretpostavimo sada da vrijedi $\mathrm{d}^\alpha X = \emptyset$ za neki ordinal $\alpha$. Neka je $A$ neprazan podskup prostora $X$. Treba dokazati da skup $A$ sadrži točku izoliranu u skupu $A$.

Pretpostavimo da skup $A$ ne sadrži točku izoliranu u skupu $A$. Sve okoline svih točaka skupa $A$ tada sadrže još neku točku iz skupa $A$. Stoga vrijedi $\mathrm{d}\, A \supseteq A$. Transfinitnom indukcijom ćemo dokazati da za svaki ordinal $\alpha$ vrijedi $\mathrm{d}^\alpha A \supseteq A$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve ordinale $\gamma$ manje od ordinala $\alpha$. Neka vrijedi $\alpha = \beta + 1$. Neka je $x$ proizvoljan element skupa $A$. Tada po pretpostavci vrijedi $x \in \mathrm{d}^\beta A$. Uzmimo proizvoljnu okolinu od $x$. Kako sve okoline točke $x$ sadrže još neku točku skupa $A$, onda sadrže i (iste te) točke skupa $\mathrm{d}^\beta A$. Stoga vrijedi $x \in \mathrm{d}^\alpha A$.[2] Neka je $\alpha$ ordinal druge vrste. Tada je $\mathrm{d}^\alpha A$ presjek skupova koji su nadskupi skupa $A$, pa je i skup $\mathrm{d}^\alpha A$ nadskup skupa $A$. Prema šestoj tvrdnji propozicije 2.2.3 vrijedi $\mathrm{d}^\alpha A \subseteq \mathrm{d}^\alpha X = \emptyset$. Dakle, vrijedi $\mathrm{d}^\alpha A = \emptyset$. No, upravo smo dokazali da vrijedi $\mathrm{d}^\alpha A \supseteq A \neq \emptyset$, pa slijedi $\emptyset \neq \emptyset$. To je kontradikcija pa slijedi da je prostor raspršen. $\square$

Sada definiramo tip preslikavanja analogan ograničenim morfizmima između relacijskih okvira. Između ostalog, ovakvo preslikavanje čuva rang (odakle dolazi i ime preslikavanja). Kasnije ćemo dokazati da ono čuva valjanost između topoloških prostora. U sljedećoj definiciji koristimo pojmove iz definicije 2.1.5.

**Definicija 2.2.6.** *Preslikavanje $f : X \to Y$ između dva topološka prostora koje je otvoreno, neprekidno i diskretno po točkama nazivamo* d*-preslikavanjem.*

Diskretnost po točkama možemo shvatiti kao neku vrstu oslabljene injektivnosti. Naime, ako dvije različite točke imaju istu sliku, onda svaka od tih točaka posjeduje

[2] Iako nam to ne treba, primijetimo da bi tada uz prethodnu propoziciju vrijedilo i više: $\mathrm{d}^\alpha A = \mathrm{d}^\beta A$ za $\alpha, \beta > 0$.

okolinu koja ne sadrži preostalu točku. Nazovimo točke bliskima ako nemaju neke međusobno disjunktne okoline. Tada diskretnost po točkama implicira sljedeći uvjet:

$$\text{ako vrijedi } f(x_1) = f(x_2), \text{ i točke } x_1 \text{ i } x_2 \text{ su bliske, onda vrijedi } x_1 = x_2,$$

za sve točke $x_1$ i $x_2$.

Sada ćemo nizom rezultata ilustrirati vezu između generaliziranog skupa gomilišta i d-preslikavanja. Jedan istaknuti rezultat do kojeg ćemo doći je da d-preslikavanje čuva tzv. rang točaka. Rang točke opisuje posljednji sloj, tj. skup $D_\beta$ s maksimalnim $\beta$, u kojem se javlja dana točka. Zatim, dokazat ćemo da je rang u nekom smislu kanonsko d-preslikavanje. Naime, dokazat ćemo da je rang jedino d-preslikavanje između raspršenog prostora i ordinala s lijevom topologijom.

**Propozicija 2.2.7.** *Neka je $f : X \to Y$ jedno* d*-preslikavanje. Tada vrijedi sljedeći identitet:*

$$f^{-1}(\mathrm{d}\, A) = \mathrm{d}\, f^{-1}(A), \textit{ za svaki } A \subseteq Y.$$

*Dokaz.* Pretpostavimo da vrijedi $x \in f^{-1}(\mathrm{d}\, A)$. Tada vrijedi $f(x) \in \mathrm{d}\, A$, odnosno u svakoj okolini točke $f(x)$ postoji točka skupa $A$ (različita od točke $f(x)$). Neka je $O$ proizvoljna okolina točke $x$. Tada je skup $f(O)$, zbog otvorenosti preslikavanja $f$, jedna okolina točke $f(x)$. Stoga u skupu $f(O)$ postoji neka točka $y_1$ skupa $A$ različita od točke $f(x)$. Zatim, u skupu $O$ postoji neki original $x_1$ točke $y_1$. U proizvoljnoj okolini točke $x$ je original $x_1$ točke $y_1$ skupa $A$, različit od točke $x$. Stoga vrijedi $x \in \mathrm{d}\, f^{-1}(A)$.

Pretpostavimo da vrijedi $x \in \mathrm{d}\, f^{-1}(A)$. Treba dokazati da je $f(x)$ gomilište skupa $A$. Neka je $O$ proizvoljna okolina točke $f(x)$. Treba dokazati da $O$ sadrži i neku točku iz skupa $A$ različitu od $f(x)$. Iz činjenice da je $x$ gomilište skupa $f^{-1}(A)$ slijedi da je u inverznoj slici $f^{-1}(O)$ okoline $O$, jer ona sadrži $x$, sigurno i neka točka $x_1$ različita od $x$ čija je slika u skupu $A$. Iz činjenice da je $x$ gomilište skupa $f^{-1}(A)$ slijedi da svaka okolina $O'$ točke $x$ sadrži neku drugu točku $x_1$ iz skupa $f^{-1}(A)$. Posebno, okolina $f^{-1}(O)$ sadrži neku drugu točku $x_1$ iz skupa $f^{-1}(A)$. Kako je točka $x_1$ u skupu $f^{-1}(O)$, slijedi da je $f(x_1)$ u skupu $O$. Stoga vrijedi $x \in f^{-1}(\mathrm{d}\, A)$. □

Upravo izrečenu propoziciju o skupu gomilišta možemo prilagoditi za generalizirani skup gomilišta. Već je iz nadolazećeg korolara jasno da d-preslikavanje čuva rang među prostorima.

**Korolar 2.2.8.** *Ako je $f : X \to Y$* d*-preslikavanje i $\alpha$ ordinal, onda vrijedi* $\mathrm{d}^\alpha X = f^{-1}(\mathrm{d}^\alpha Y)$.

*Dokaz.* Tvrdnju dokazujemo transfinitnom indukcijom po ordinalu $\alpha$. Tvrdnja vrijedi za bazu indukcije. Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za sve ordinale manje od ordinala $\alpha$ i dokažimo da vrijedi i za ordinal $\alpha$. Ako je $\alpha$ ordinal prve vrste, onda vrijedi $\alpha = \beta + 1$ za neki ordinal $\beta$. Po pretpostavci vrijedi $\mathrm{d}^\beta X = f^{-1}(\mathrm{d}^\beta Y)$. Primijenimo operator d na obje strane. Slijeva dobivamo skup $\mathrm{d}^\alpha X$, a zdesna (koristeći propoziciju 2.2.7) skup $f^{-1}(\mathrm{d}^\alpha Y)$. Ako je $\alpha$ ordinal druge vrste, onda vrijedi $\mathrm{d}^\alpha X = \cap_{\beta<\alpha} \mathrm{d}^\beta X$. Pretpostavimo da vrijedi $x \in \mathrm{d}^\alpha X$. Tada vrijedi $x \in \mathrm{d}^\beta x$ za sve ordinale $\beta < \alpha$. Iz pretpostavke indukcije slijedi da je točka $f(x)$ element skupa $\mathrm{d}^\beta Y$ za sve ordinale $\beta < \alpha$. Stoga je točka $f(x)$ element presjeka svih skupova $\mathrm{d}^\beta Y$ za ordinale $\beta < \alpha$, pa stoga i skupa $\mathrm{d}^\alpha Y$. Iz toga slijedi da je točka $x$ u skupu $f^{-1}(\mathrm{d}^\alpha Y)$. □

Ako je $(X, \mathcal{T})$ neki raspršen topološki prostor, onda (prema teoremu 2.2.5) vrijedi $\mathrm{d}^\alpha X = \emptyset$ za neki ordinal $\alpha$. Najmanji takav ordinal označavamo s $\rho(X)$. Taj se ordinal naziva Cantor-Bendixsonovim rangom prostora.

Za dani raspršen topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ definiramo funkciju $\rho_{(X,\mathcal{T})} : X \to \rho(X)$ na sljedeći način: $\rho_{(X,\mathcal{T})}(x) = \min\{\alpha | x \in D_\alpha\}$. Imajući na umu disjunktnost $D_\alpha$ i $D_\beta$ za različite $\alpha$ i $\beta$ (prema drugoj tvrdnji leme 2.2.4), mogli smo napisati i $\{\rho_{(X,\mathcal{T})}(x)\} = \{\alpha \mid x \in D_\alpha\}$. Za danu točku $x \in X$ ordinal $\rho_{(X,\mathcal{T})}(x)$ nazivamo rangom točke $x$.

Kad je skup točaka jasan iz konteksta koristit ćemo oznaku $\rho_{\mathcal{T}}$. Kad je topologija jasna iz konteksta koristit ćemo oznaku $\rho_X$.

Primijetimo da je (zbog prve tvrdnje leme 2.2.4) slika funkcije $\rho_X$, tj. skup $\rho_X(X)$, ordinal. Kako skup ordinala $\rho_X(X)$ sadrži sve ordinale manje od ordinala $\rho(X)$ i ne sadrži ordinal $\rho(X)$, slijedi $\rho_X(X) = \rho(X)$.

Već smo najavili da svi neprazni slojevi $D_\beta$ čine particiju. Dokažimo taj rezultat.

**Lema 2.2.9.** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ proizvoljan raspršen topološki prostor. Tada je familija $\{D_\beta \mid D_\beta \neq \emptyset\}$ jedna particija prostora $X$.*

*Dokaz.* Označimo $P = \{D_\beta \mid D_\beta \neq \emptyset\}$. Članovi skupa $P$ su očito neprazni. Zatim, članovi skupa $P$ su disjunktni prema drugoj tvrdnji leme 2.2.4.

Dokažimo da skup $P$ pokriva prostor $X$. Neka je $x$ proizvoljna točka prostora $X$. Kako je $X$ raspršen prostor, postoji najmanji ordinal $\beta$ takav da točka $x$ nije element $\mathrm{d}^\beta X$. Prema sedmoj tvrdnji propozicije 2.2.3 slijedi da je $\beta$ ordinal prve vrste. Označimo stoga $\beta = \alpha + 1$. Prema definiciji ordinala $\beta$ slijedi $x \in \mathrm{d}^\alpha X$. Imamo $x \in \mathrm{d}^\alpha X$ i $x \notin \mathrm{d}^{\alpha+1} X$, što povlači $x \in D_\alpha$.

□

Sada dokazujemo da je rang u određenom smislu istaknuto d-preslikavanje. Naime, to je jedino d-preslikavanje čija je slika ordinal s lijevom topologijom. Sljedeću lemu koristimo na brojnim mjestima u nastavku. Činjenica da je rang d-preslikavanje je korisna kad želimo pronaći skup otvoren u domeni, koji sadrži najviše jednu točku ranga $\alpha$, za neki ordinal $\alpha$. Pomoću ove leme ćemo za svaku točku prostora moći pronaći okolinu čije su sve preostale točke manjeg ranga od točke $x$.

**Lema 2.2.10.** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ proizvoljan raspršen topološki prostor. Promotrimo prostor $(\rho(X), \mathcal{T})$ gdje je $\mathcal{T}$ lijeva topologija. Tada vrijedi:*

1. *$\rho_X : X \to \rho(X)$ je surjektivno* d*-preslikavanje.*

2. *Neka je $\alpha$ ordinal, $(\alpha, \mathcal{T})$ prostor s lijevom topologijom i postoji* d*-preslikavanje između $X$ i $\alpha$. Tada je $\rho_X$ jedino* d*-preslikavanje između $X$ i $\alpha$.*

*Dokaz.* Dokažimo prvu tvrdnju. Dokažimo prvo otvorenost preslikavanja $\rho_X$. Neka je $O$ neki otvoren skup prostora $X$. Treba dokazati da je i $\rho_X(O)$ otvoren skup. U slučaju prostora $\rho(X)$, treba dokazati da je $\rho_X(O)$ ordinal. Odnosno, treba dokazati da je za svaki ordinal $\beta$ skupa $\rho_X(O)$, u skupu $\rho_X(O)$ također i svaki ordinal $\gamma$ manji od ordinala $\beta$. Iako nije unaprijed poznato je li $\rho_X(O)$ ordinal, jasno je da je podskup ordinala $\rho(X)$. Stoga možemo označiti $\alpha_0 = \min\{\beta \in \rho(X) \,|\, \beta \notin \rho_X(O)\}$. Ako vrijedi $\alpha_0 = \rho_X(O)$, skup $\rho_X(O)$ zadovoljava svojstvo ordinala, odnosno preslikavanje $\rho_X$ je otvoreno.

Pretpostavimo zatim $\alpha_0 \neq \rho_X(O)$. Iz definicije ordinala $\alpha_0$ slijedi $\alpha_0 \notin \rho_X(O)$. Dakle, niti jedna točka skupa $O$ nije u skupu $D_{\alpha_0} = \mathrm{d}^{\alpha_0} X \setminus \mathrm{d}^{\alpha_0+1} X$. Odnosno, sve točke koje su u skupovima $O$ i $\mathrm{d}^{\alpha_0} X$ su ujedno i u skupovima $O$ i $\mathrm{d}^{\alpha_0+1} X$. Iz četvrte tvrdnje leme 2.2.3 slijedi i obratna inkluzija.

Dokažimo transfinitnom indukcijom da za svaki ordinal $\beta$ vrijedi $O \cap \mathrm{d}^{\alpha_0} X = O \cap \mathrm{d}^{\alpha_0+\beta} X$. Iz četvrte tvrdnje leme 2.2.3 slijedi $O \cap \mathrm{d}^{\alpha_0} X \subseteq \mathrm{d}^{\alpha_0+\beta} X$. Preostaje dokazati $\mathrm{d}^{\alpha_0+\beta} X \subseteq O \cap \mathrm{d}^{\alpha_0} X$. Ako je $\beta$ ordinal prve vrste, postoji ordinal $\beta'$ takav da vrijedi $\beta = \beta' + 1$. Iz pretpostavke indukcije slijedi $O \cap \mathrm{d}^{\alpha_0} X = O \cap \mathrm{d}^{\alpha_0+\beta'} X$. Vrijedi $O \cap \mathrm{d}^{\alpha_0+\beta} X = O \cap \mathrm{d}\,\mathrm{d}^{\alpha_0+\beta'} X$. Pretpostavimo da vrijedi $x \in O \cap \mathrm{d}^{\alpha_0+\beta} X$. Tada vrijedi $x \in O$ te $x \in \mathrm{d}\,\mathrm{d}^{\alpha_0+\beta'} X$. Neka je $U$ presjek proizvoljne okoline točke $x$ sa skupom $O$. Tada za svaku točku $x' \in U$, osim možda točke $x$, vrijedi $x' \in O$ te $x' \in \mathrm{d}^{\alpha_0+\beta'} X$. No tada vrijedi $x' \in \mathrm{d}^{\alpha_0} X$. Stoga vrijedi $x \in \mathrm{d}\,\mathrm{d}^{\alpha_0} X = \mathrm{d}^{\alpha_0+1} X$. Kako vrijedi $\mathrm{d}^{\alpha_0} X = \mathrm{d}^{\alpha_0+1} X$, slijedi $x \in \mathrm{d}^{\alpha_0} X$.

Prema ranijim pretpostavkama $\alpha_0$ nije najveći ordinal u skupu $\rho_X(O)$. Stoga za neki veći ordinal $\beta$ postoje točke koje su u skupovima $O$ i $D_\beta$. Činjenica da su u skupu $D_\beta$ povlači i da su u skupu $\mathrm{d}^\beta X$. Prema četvrtoj tvrdnji propozicije 2.2.3 i činjenici $\beta > \alpha_0$ slijedi da su točke koje su u skupovima $O$ i $\mathrm{d}^\beta X$ ujedno i u skupovima $O$ i $\mathrm{d}^{\alpha_0} X$. Dakle, postoje točke koje su u skupovima $O$ i $\mathrm{d}^{\alpha_0} X$. Kako je prostor raspršen, za neki ordinal $\alpha_1$ vrijedi $O \cap \mathrm{d}^{\alpha_1} X = \emptyset$. No prema ranije dokazanoj tvrdnji vrijedi $O \cap \mathrm{d}^{\alpha_1} X = O \cap \mathrm{d}^{\alpha_0} X$. Skup $O \cap \mathrm{d}^{\alpha_0} X$ je neprazan, što je kontradikcija.

Dokažimo da je preslikavanje $\rho_X$ neprekidno.

Neka je $\alpha \in \rho(X)$ proizvoljna točka. Treba dokazati da je $\rho_X^{-1}([0,\alpha\rangle)$ otvoren skup.

Dokažimo da vrijedi $\rho_X^{-1}([0,\alpha\rangle) = X \setminus \mathrm{d}^\alpha X$. Neka je $x \in X$ proizvoljna točka ranga $\beta$, za neki ordinal $\beta \in [0,\alpha\rangle$. Prema definiciji preslikavanja $\rho_X$, slijedi $x \in D_\beta$, te stoga $x \in \mathrm{d}^\beta X$ i $x \notin \mathrm{d}^{\beta+1} X$. Kako vrijedi $\beta < \alpha$, vrijedi $\beta + 1 \leq \alpha$. Prema četvrtoj tvrdnji propozicije 2.2.3, slijedi $x \notin \mathrm{d}^\alpha X$.

Neka je $x \in X$ proizvoljna točka izvan skupa $\mathrm{d}^\alpha X$. Označimo $P = \{D_\beta \,|\, D_\beta \neq \emptyset\}$. Prema lemi 2.2.9, $P$ je particija skupa $X$. Prema četvrtoj tvrdnji propozicije 2.2.3 vrijedi $\mathrm{d}^\beta X \subseteq \mathrm{d}^\alpha X$ za sve ordinale $\beta$ takve da vrijedi $\beta \geq \alpha$. Stoga je točka $x$ izvan svih skupova $D_\beta$ za $\beta \geq \alpha$. To znači da vrijedi $x \in D_\beta$ za neki ordinal $\beta$ takav da vrijedi $\beta < \alpha$. No to znači da vrijedi $\rho_X(x) = \beta$ za neki $\beta$ takav da vrijedi $\beta < \alpha$. To dalje znači da vrijedi $x \in \rho_X^{-1}([0,\alpha\rangle$.

Kako je (po propoziciji 2.2.3) skup $\mathrm{d}^\alpha X$ zatvoren, slijedi da je skup $X \setminus \mathrm{d}^\alpha X$ otvoren.

Dokažimo da je preslikavanje $\rho_X$ diskretno po točkama. Neka je $\alpha \in \rho(X)$ proizvoljna točka. Po definiciji, $\rho_X^{-1}(\{\alpha\})$ je skup točaka skupa $\mathrm{d}^\alpha X$ koje nisu u skupu $\mathrm{d}^{\alpha+1} X$, tj. nisu u skupu $\mathrm{d}\,\mathrm{d}^\alpha X$. Dokažimo prvo da prostor $X' = D_\alpha$ nema gomilišta.

Pretpostavimo da je točka $c$ gomilište prostora $X'$. To znači da se u svakoj njenoj okolini $O \cap X'$, za neki $\mathcal{T}$-otvoren skup $O$, nalazi i neka točka $c'$. Tada se u svakoj okolini $O$ polazišnog prostora $X$ također nalazi točka $c'$. No, tada je točka $c$ element skupa $\mathrm{d}\,\mathrm{d}^\alpha X$, pa se suprotno pretpostavci ne nalazi u prostoru $X'$. Stoga vrijedi $\mathrm{d}\, X' = \emptyset$. Prema drugoj tvrdnji leme 2.1.8, prostor $X'$ je diskretan.

Dokažimo sada drugu tvrdnju. Koristimo korolar 2.2.8. Neka je $f$ proizvoljno odabrano d-preslikavanje iz prostora $X$ u ordinal $\alpha$ (promatran kao skup). Tada vrijedi $\mathrm{d}^\beta X = f^{-1}(\mathrm{d}^\beta \alpha)$ za svaki ordinal $\beta$.

Uvrštavajući identitet $\mathrm{d}^\beta \alpha = [\beta, \alpha\rangle$ (osma tvrdnja leme 2.2.3) u raniju jednakost dobivamo: $\mathrm{d}^\beta X = f^{-1}([\beta,\alpha\rangle)$. Kako je $\rho_X$ (prema prvoj tvrdnji) jedno d-preslikavanje, vrijedi $\mathrm{d}^\beta X = \rho_X^{-1}([\beta,\alpha\rangle)$. Stoga $f^{-1}([\beta,\alpha\rangle) = \rho_X^{-1}([\beta,\alpha\rangle)$. Dokažimo da vrijedi $f^{-1}(\{\beta\}) = \rho_X^{-1}(\{\beta\})$ za svaki ordinal $\beta$.

Ponovno koristeći osmu tvrdnju leme 2.2.3 imamo $f^{-1}([\beta,\alpha\rangle) = \rho_X^{-1}([\beta,\alpha\rangle)$ i $f^{-1}([\beta+1,\alpha\rangle) = \rho_X^{-1}([\beta+1,\alpha\rangle)$. Sada lako dobijemo traženi rezultat $f^{-1}(\{\beta\}) = f^{-1}([\beta,\alpha\rangle) \setminus f^{-1}([\beta+1,\alpha\rangle) = \rho_X^{-1}([\beta,\alpha\rangle) \setminus \rho_X^{-1}([\beta+1,\alpha\rangle) = \rho_X^{-1}(\{\beta\})$. Kako su $f$ i $\rho_X$ funkcije jednakih domena i kodomena, te im je djelovanje jednako, zaključujemo $f = \rho_X$.

$\square$

Prve dvije tvrdnje sljedećeg korolara opisuju kako kompozicija d-preslikavanja čuva svojstvo d-preslikavanja. Pritom je prva tvrdnja izražena nezgrapno jer će nam u tom obliku zatrebati u nastavku. Treća tvrdnja izražava ranije opisano svojstvo d-preslikavanja; naime svojstvo čuvanja ranga.

**Korolar 2.2.11.** *Neka su $X$, $Y$ i $Z$ raspršeni topološki prostori. Neka su $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ neka* d*-preslikavanja.*

1. *Neka je preslikavanje $f$ neprekidno i diskretno po točkama. Neka skup $g^{-1}(\{z\})$ generira diskretan potprostor prostora $Y$ za neku točku $z \in Z$. Tada skup $(g \circ f)^{-1}(\{z\})$ generira diskretan potprostor prostora $X$.*

2. *Neka za preslikavanja $f$ i $g$ vrijedi da su* d*-preslikavanja. Tada vrijedi da je i kompozicija $g \circ f$ jedno* d*-preslikavanje.*

3. *Neka za preslikavanje $f$ vrijedi da je* d*-preslikavanje. Tada vrijedi $\rho_X = \rho_Y \circ f$.*

*Dokaz.* Dokažimo prvu tvrdnju. Neka je točka $x \in X$ proizvoljan original točke $z$. Označimo $y = f(x)$. Tada vrijedi $z = g(y)$. Treba dokazati da postoji otvoreni skup $O$ koji sadrži točku $x$ i ne sadrži niti jedan drugi original točke $z$. Kako skup $g^{-1}(\{z\})$ generira diskretan potprostor prostora $Y$ postoji okolina $I_Y$ točke $y$, koja ne sadrži niti jedan drugi original točke $z$. Kako je preslikavanje $f : X \to Y$ diskretno po točkama, postoji okolina $I_X$ točke $x$, koja ne sadrži niti jedan drugi original točke $y$. Definiramo $O = I_X \cap f^{-1}(I_Y)$. Kako je preslikavanje $f$ neprekidno, skup $f^{-1}(I_Y)$ je otvoren, pa je i skup $O$ otvoren. Dokažimo da niti jedan drugi original $x'$ točke $z$ nije element skupa $O$. Pretpostavimo da vrijedi $x' \in O$. Tada vrijedi $x' \in I_X$ i $f(x') \in I_Y$. Kako je $f(x')$ original točke $z$, točka $f(x')$ je jedini original točke $z$ u skupu $I_Y$. No tada vrijedi $y = f(x) = f(x')$. Kako je točka $x'$ original točke $y$, slijedi da je točka $x'$ jedini original točke $y$ u skupu $I_X$. No tada vrijedi $x = x'$.

Dokažimo sada drugu tvrdnju. Neka je $O$ proizvoljan skup koji je otvoren u prostoru $X$. Skup $f(O)$ je otvoren u prostoru $Y$ zbog otvorenosti preslikavanja $f$. Skup $g(f(O))$ je otvoren u prostoru $Z$ zbog otvorenosti preslikavanja $g$. Neka je $O$ proizvoljan otvoren skup u prostoru $Z$. Skup $g^{-1}(O)$ je otvoren u prostoru $Y$ jer je preslikavanje $g$ neprekidno. Skup $f^{-1}(g^{-1}(O)) = (g \circ f)^{-1}(O)$ je otvoren jer je preslikavanje $f$ neprekidno. Diskretnost po točkama slijedi iz prve tvrdnje korolara.

Dokažimo sada treću tvrdnju. Prema prvoj tvrdnji leme 2.2.10, preslikavanje $\rho_Y$ je d-preslikavanje, a prema upravo dokazanoj drugoj tvrdnji propozicije je tada i $\rho_Y \circ f$ jedno d-preslikavanje. Prema drugoj tvrdnji leme 2.2.10, vrijedi $\rho_X = \rho_Y \circ f$. □

Na kraju ovog pregleda svojstava d-preslikavanja, dokažimo još jedno njihovo korisno svojstvo. Ako imamo neku točku $x$ i neku njenu okolinu, možemo pronaći onu okolinu u kojoj točka $x$ ima najveći rang.

**Lema 2.2.12.** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ raspršen topološki prostor, te $x$ proizvoljna točka prostora $X$. Neka je $O$ proizvoljna okolina točke $x$. Tada postoji okolina točke $x$ koja je podskup okoline $O$, te u kojoj točka $x$ ima najveći rang.*

*Dokaz.* Neka je rang točke $x$ jednak $\lambda$. Zbog toga što skup $\rho_X^{-1}(\{\lambda\})$ generira diskretan potprostor prostora $X$, postoji okolina $I$ točke $x$ koja od svih točaka ranga $\lambda$ sadrži samo točku $x$. Označimo $O' = O \cap \rho_X^{-1}([0, \lambda+1\rangle) \cap I$. Očito se radi o presjeku tri otvorena skupa (prema drugoj tvrdnji leme 2.2.10) koji sadrže točku $x$. Stoga je i skup $O'$ jedna okolina točke $x$. □

## 2.3 Maksimalni i $\ell$-maksimalni prostori

Započinjemo predstavljanje tzv. lme-prostora, vrste politopoloških prostora ključne za dokaz potpunosti.

Jedino što nam je još potrebno za definiciju takvih prostora su pojmovi $\ell$-proširenja i $\ell$-maksimalnosti. Prvo ćemo definirati te pojmove, te dokazati neke činjenice vezane uz njih.

**Definicija 2.3.1.** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ raspršen topološki prostor.*

*Topologiju $\sigma$ nad $X$ nazivamo proširenjem topologije $\mathcal{T}$ koje čuva rang ako vrijedi $\sigma \supseteq \mathcal{T}$ te $\rho_{\mathcal{T}} = \rho_\sigma$.*

*Topologiju $\sigma$ nad $X$ nazivamo $\ell$-proširenjem ako je to proširenje topologije $\mathcal{T}$ koje čuva rang te vrijedi:*

*za svaki $\sigma$-otvoren skup $U$ i svaku točku $x \in U$ za koju $\rho_X(x)$ nije ordinal druge vrste, postoji $\mathcal{T}$-otvoren skup $V$ takav da vrijedi $x \in V \subseteq U$.*

*Proširenje koje čuva rang $\sigma$ topologije $\mathcal{T}$ nazivamo pravim ako vrijedi $\sigma \supset \mathcal{T}$.*

*Također, $\ell$-proširenje $\sigma$ topologije $\mathcal{T}$ nazivamo pravim ako vrijedi $\sigma \supset \mathcal{T}$.*

*Prostor $X$ nazivamo maksimalnim ako topologija $\mathcal{T}$ nema pravo proširenje koje čuva rang.*

*Prostor $X$ nazivamo $\ell$-maksimalnim ako topologija $\mathcal{T}$ nema pravo $\ell$-proširenje.*

Dakle, topologija $\ell$-proširenja je “finija” (veća) samo oko točaka čiji je rang granični ordinal.

Pojmove proširenja koje čuva rang dane topologije, $\ell$-proširenja dane topologije, pravog proširenja koje čuva rang dane topologije i pravog $\ell$-proširenja dane topologije ponekad koristimo i za cijeli prostor $(X, \mathcal{T})$. Tada se navedeni pojmovi odnose na topologiju $\mathcal{T}$ tog prostora. Slično, ponekad za topologiju $\mathcal{T}$ danog prostora $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je maksimalna ili $\ell$-maksimalna. Navedeni pojmovi se tada odnose na prostor $(X, \mathcal{T})$.

I proširenje koje čuva rang, i $\ell$-proširenje, čuvaju svojstvo raspršenosti. Naime, funkcija ranga je jednaka za sve te topologije, pa možemo koristiti teorem 2.2.5.

Sada nam je glavni cilj dokazati da za svaku topologiju postoje maksimalna $\ell$-proširenja. Sljedeća lema će nam koristiti u tom dokazu.

**Lema 2.3.2.** *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *proizvoljan raspršen topološki prostor. Označimo skup svih proširenja koje čuvaju rang topologije* $\mathcal{T}$ *s* $\mathcal{F}_r$*, te skup svih* $\ell$*-proširenja topologije* $\mathcal{T}$ *s* $\mathcal{F}_\ell$*.*

*Uvedimo binarnu relaciju* $\leq_r$ *na skupu* $\mathcal{F}_r$*, te binarnu relaciju* $\leq_\ell$ *na skupu* $\mathcal{F}_\ell$*, na sljedeći način:*

$\mathcal{T} \leq_r \sigma$ *ako je topologija* $\sigma$ *jedno proširenje koje čuva rang topologije* $\mathcal{T}$*;*

$\mathcal{T} \leq_\ell \sigma$ *ako je topologija* $\sigma$ *jedno* $\ell$*-proširenje topologije* $\mathcal{T}$*.*

*Tada su relacije* $\leq_r$ *i* $\leq_\ell$ *relacije parcijalnog uređaja.*

*Dokaz.* Topologija $\mathcal{T}$ je očito vlastito proširenje koje čuva rang. Topologjia $\mathcal{T}$ je i vlastito $\ell$-proširenje (u uvjetu za skup $V$ odabiremo skup $U$).

Neka je $\sigma$ proširenje topologije $\mathcal{T}$ koje čuva rang, te obratno. Tada vrijedi $\sigma \subseteq \mathcal{T}$ te $\sigma \supseteq \mathcal{T}$, pa vrijedi $\sigma = \mathcal{T}$. Kako je $\ell$-proširenje ujedno proširenje koje čuva rang, također vrijedi $\sigma = \mathcal{T}$.

Neka je $\mathcal{T}'$ proširenje topologije $\mathcal{T}$ koje čuva rang, te neka je $\mathcal{T}''$ proširenje topologije $\mathcal{T}'$ koje čuva rang. Kako su odnosi inkluzije i jednakosti tranzitivni, vrijedi da je $\mathcal{T}''$ proširenje topologije $\mathcal{T}$ koje čuva rang.

Neka je $\mathcal{T}'$ $\ell$-proširenje topologije $\mathcal{T}$, te neka je $\mathcal{T}''$ $\ell$-proširenje topologije $\mathcal{T}'$ . Tada je $\mathcal{T}''$ proširenje topologije $\mathcal{T}$ koje čuva rang. Dokažimo da je i $\ell$-proširenje. Za $\mathcal{T}''$-otvoren skup $U''$ i točku $x \in U''$ za koju $\rho_X(x)$ nije ordinal druge vrste, treba odrediti $\mathcal{T}$-otvoren skup $V''$ takav da vrijedi $x \in V'' \subseteq U''$. Iz činjenice da je $\mathcal{T}''$ jedno $\ell$-proširenje topologije $\mathcal{T}'$ slijedi da postoji neki $\mathcal{T}'$-otvoren skup $V'$ takav da vrijedi $x \in V' \subseteq U''$. Iz činjenice da je topologija $\mathcal{T}'$ jedno $\ell$-proširenje topologije $\mathcal{T}$ slijedi da postoji neki $\mathcal{T}$-otvoren skup $V$ takav da vrijedi $x \in V \subseteq V'$. Iz $V \subseteq V' \subseteq U''$ slijedi $V \subseteq U''$, pa za skup $V''$ možemo odabrati skup $V$. $\square$

Ponekad je činjenicu da je neka topologija proširenje koje čuva rang druge topologije lakše dokazati koristeći sljedeću karakterizaciju.

**Lema 2.3.3.** *Neka je* $(X, \sigma)$ *raspršen topološki prostor. Neka vrijedi* $\mathcal{T} \subseteq \sigma$*. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne.*

- *Topologija* $\sigma$ *je proširenje topologije* $\mathcal{T}$ *koje čuva rang.*
- *Preslikavanje* $\rho_\mathcal{T}$ *je otvoreno u odnosu na topologiju* $\sigma$*.*

*Dokaz.* Ako je topologija $\sigma$ proširenje topologije $\mathcal{T}$ koje čuva rang, vrijedi $\rho_\mathcal{T} = \rho_\sigma$, a $\rho_\sigma$ je otvoreno preslikavanje prema lemi 2.2.10.

Pretpostavimo sada da je preslikavanje $\rho_\mathcal{T}$ otvoreno. To znači da za svaki $\sigma$-otvoreni skup $O$ vrijedi da je $\rho_\mathcal{T}(O)$ ordinal.

Prema pretpostavci vrijedi $\mathcal{T} \subseteq \sigma$. Preostaje dokazati da vrijedi $\rho_{\mathcal{T}} = \rho_\sigma$.

Transfinitnom indukcijom po ordinalu $\alpha$ dokažimo da su za sve točke $c \in X$ ekvivalentne tvrdnje:

- $c \in \mathrm{d}_\sigma^\alpha X$ te
- $c \in \mathrm{d}_{\mathcal{T}}^\alpha X$.

Tvrdnja vrijedi za bazu indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za svaki ordinal $\beta$ manji od $\alpha$.

Neka je $\alpha$ ordinal prve vrste, tj. postoji ordinal $\alpha'$ takav da vrijedi $\alpha = \alpha' + 1$. Neka je $c$ proizvoljna točka iz prostora $X$. Pretpostavimo da vrijedi $c \in \mathrm{d}_\sigma^\alpha X$. Neka je $O$ proizvoljna $\mathcal{T}$-okolina točke $c$. Skup $O$ je i $\sigma$-okolina, jer vrijedi $\sigma \supseteq \mathcal{T}$. Iz činjenice da je $c$ gomilište skupa $\mathrm{d}_\sigma^{\alpha'} X$, slijedi da skup $O$ sadrži neku točku $c' \in X$ iz skupa $\mathrm{d}_\sigma^{\alpha'} X$. Stoga za točku $c$ vrijedi da je $\mathcal{T}$-gomilište skupa $\mathrm{d}_{\mathcal{T}}^{\alpha'} X$, odnosno $c \in \mathrm{d}_{\mathcal{T}}^\alpha X$. Pretpostavimo sada da vrijedi $c \in \mathrm{d}_{\mathcal{T}}^\alpha X$. Tada vrijedi $\rho_{\mathcal{T}}(c) \geq \alpha$. Neka je $O$ proizvoljna $\sigma$-okolina točke $c$. Tada je skup $\rho_{\mathcal{T}}(O)$, prema pretpostavci leme, ordinal. Kako vrijedi $\alpha' \leq \alpha \leq \rho_{\mathcal{T}}(c)$, slijedi $\alpha' \in \rho_{\mathcal{T}}(O)$. No to znači da postoji točka $c' \in O$ takva da vrijedi $\rho_{\mathcal{T}}(c') = \alpha'$. Po pretpostavci indukcije, slijedi $\rho_\sigma(c') = \alpha'$. Stoga za točku $c$ vrijedi da je $\sigma$-gomilište skupa $\mathrm{d}_\sigma^{\alpha'} X$, odnosno $c \in \mathrm{d}_\sigma^\alpha X$.

Slučaj kad je $\alpha$ ordinal druge vrste izravno slijedi iz pretpostavke indukcije. $\square$

Sada možemo dokazati da svaki prostor ima $\ell$-maksimalno $\ell$-proširenje.

**Lema 2.3.4.** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ raspršen topološki prostor. Tada:*

1. *Postoji maksimalno proširenje topologije $\mathcal{T}$ koje čuva rang.*
2. *Postoji $\ell$-maksimalno $\ell$-proširenje prostora $X$.*

*Dokaz.* Promatramo skup proširenja topologije $\mathcal{T}$ koja čuvaju rang, odnosno skup $\ell$-proširenja topologije $\mathcal{T}$, kao parcijalno uređene skupove (vidi lemu 2.3.2). Koristimo Zornovu lemu. Dokazat ćemo da svaki neprazan lanac ima gornju među.

- Neka je $S$ skup proširenja topologije $\mathcal{T}$ koja čuvaju rang. Neka je $L \subseteq S$ proizvoljan lanac iz skupa $S$. Označimo s $B_L$ uniju svih topologija iz lanca $L$. Ako su $O$ i $U$ neki članovi $B_L$, postoje topologije $\mathcal{T}'$ i $\mathcal{T}''$ iz lanca $L$ takve da vrijedi da je skup $O$ jedan $\mathcal{T}'$-otvoren skup, a skup $U$ jedan $\mathcal{T}''$-otvoren skup, Kako je $L$ lanac, jedna od topologija $\mathcal{T}'$ i $\mathcal{T}''$ sadrži drugu. Tada je i presjek skupova $O$ i $U$ otvoren u nekoj topologiji, pa je familija $B_L$ zatvorena na presjeke. To implicira da je familija $B_L$ baza za neku topologiju.

  Definiramo novu topologiju $\mathcal{T}_L$ kao topologiju generiranu bazom $B_L$.

Primijetimo da sve topologije iz lanca $L$ dijele zajedničku funkciju $\rho_X$. Za dani $\mathcal{T}_L$-otvoren skup $O$ prostora $X$, skup $\rho_X(O)$ je ordinal. Naime, skup $O$ se može promatrati kao unija otvorenih skupova koji se preslikavaju u ordinale, a unija ordinala je ponovno ordinal. Uz to vrijedi da je topologija $\mathcal{T}_L$ nadskup svih topologija iz lanca $L$. Stoga je prema lemi 2.3.3 topologija $\mathcal{T}_L$ proširenje koje čuva rang svih topologija iz lanca $L$.

- Neka je $S$ skup $\ell$-proširenja topologije $\mathcal{T}$. Neka je $L \subseteq S$ proizvoljan lanac iz skupa $S$. Gradimo topologiju $\mathcal{T}_L$ kao i ranije. Preostaje dokazati da je $\mathcal{T}_L$ jedno $\ell$-proširenje svake od topologija iz lanca $L$.

  Neka je $\mathcal{T}'$ proizvoljna topologija iz lanca $L$. Neka je $O$ proizvoljan $\mathcal{T}_L$-otvoren skup. Neka je točka $x \in O$ proizvoljna točka za koju $\rho_X(x)$ nije ordinal druge vrste. Treba dokazati da postoji $\mathcal{T}'$-otvoren skup $V$ takav da vrijedi $x \in V \subseteq O$. Činjenica da je $O$ jedan $\mathcal{T}_L$-otvoren skup povlači da je jednak uniji nekih otvorenih skupova iz baza topologija lanca $L$. Označimo s $O'$ neki otvoreni skup među njima koji sadrži $x$. Označimo sa $\sigma$ proizvoljnu topologiju kojoj pripada $O'$. Kako je $\sigma$ jedno $\ell$-proširenje topologije $\mathcal{T}$, slijedi da postoji $\mathcal{T}$-otvoren skup $V$ takav da vrijedi $x \in V \subseteq O'$. Skup $V$ je i $\mathcal{T}'$-otvoren, jer je $\mathcal{T}'$ jedno $\ell$-proširenje topologije $\mathcal{T}$. Vrijedi $O' \subseteq O$, pa postoji $\mathcal{T}'$-otvoren skup $V$ takav da vrijedi $x \in V \subseteq O$.

□

U sljedećoj karakterizaciji $\ell$-maksimalnih prostora izražava se ideja da je za svaku točku $x$ graničnog ranga, svaki dovoljno velik otvoreni skup $V$ ili vrlo "velik" ($V \cup \{x\}$ je okolina točke $x$), ili vrlo "mali" (postoji okolina $U$ točke $x$ takva da vrijedi $\rho_X(V \cap U) < \lambda$). Preformulirano, ne može se dogoditi da neki otvoreni skup sadrži točke iz okoline točke $x$ čiji je rang proizvoljno blizu ranga točke $x$, a da pritom taj otvoreni skup nije probušena okolina točke $x$.

**Lema 2.3.5.** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ raspršen prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

1. *Prostor $X$ je $\ell$-maksimalan.*

2. *(lm) Neka je rang proizvoljne točke $x \in X$ ordinal druge vrste $\lambda$. Neka je $V$ proizvoljan otvoreni skup čije sve točke imaju rang manji od $\lambda$. Vrijedi jedno od sljedećeg: $V \cup \{x\}$ je $\mathcal{T}$-otvoren skup, ili postoji okolina $U$ točke $x$ takva da vrijedi $\rho_X(V \cap U) < \lambda$.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da ne vrijedi uvjet (lm). Tada postoji točka $x \in X$ čiji je rang $\lambda$ ordinal druge vrste. Postoji otvoren skup $V$ čije točke imaju rang manji od $\lambda$. Skup $V \cup \{x\}$ nije otvoren, i za svaku okolinu $U$ točke $x$ vrijedi $\rho_X(V \cap U) \not< \lambda$.

Označimo $V_x = V \cup \{x\}$. Primijetimo da su $V$ i $U$ otvoreni skupovi, pa je i njihov presjek otvoren. Stoga je $\rho_X(V \cap U)$ ordinal (prema lemi 2.2.10, preslikavanje $\rho_X$ je otvoreno). Kako vrijedi $\rho_X(V) \leq \lambda$, slijedi $\rho_X(V \cap U) \leq \lambda$. Vrijedi i $\rho_X(V \cap U) \not< \lambda$, pa slijedi $\rho_X(V \cap U) = \lambda$.

Označimo sa $\sigma$ topologiju generiranu familijom $\mathcal{T} \cup \{V_x\}$. Dokažimo prvo da je prostor $(X, \sigma)$ raspršen. Neka je $S$ proizvoljan skup točaka iz prostora $X$. Tada postoji $\mathcal{T}$-otvoren skup točaka $O$ takav da je presjek $S \cap O$ jednočlan. Kako skup $V_x$ nije $\mathcal{T}$-otvoren, a jest $\sigma$-otvoren, slijedi $\mathcal{T} \subset \sigma$. Stoga je skup $O$ i $\sigma$-otvoren. Za proizvoljan skup točaka moguće je pronaći $\sigma$-otvoren skup koji izolira jednu točku iz tog skupa, pa je prostor $(X, \sigma)$ raspršen. Dokažimo da je topologija $\sigma$ pravo $\ell$-proširenje topologije $\mathcal{T}$.

Dokažimo prvo da je $\rho_{\mathcal{T}}$ otvoreno preslikavanje s obzirom na topologiju $\sigma$. Neka je $U'$ neki $\sigma$-otvoren skup. Ako za skup $U'$ vrijedi da je $\mathcal{T}$-otvoren, onda je prema lemi 2.2.10 skup $\rho_{\mathcal{T}}(U')$ otvoren. Inače je skup $U'$, prema definiciji topologije $\sigma$, jednak presjeku skupova $V_x$ i $O$, gdje je $O$ neki $\mathcal{T}$-otvoren skup. Ako točka $x$ ne pripada presjeku skupova $V_x$ i $O$, onda je skup $U'$ jednak i presjeku $\mathcal{T}$-otvorenih skupova $V$ i $O$. Kako za preslikavanje $\rho_{\mathcal{T}}$ vrijedi da je $\mathcal{T}$-otvoreno, slijedi da je $\rho_{\mathcal{T}}(U')$ otvoren skup. Pretpostavimo sada da $x$ pripada presjeku skupova $V_x$ i $O$. Iz činjenice da je točka $x$ ranga $\lambda$ te činjenice da vrijedi vrijedi $\rho_{\mathcal{T}}(V_x \cap U) = \rho_{\mathcal{T}}((V \cap U) \cup \{x\})$ slijedi $\rho_{\mathcal{T}}(V_x \cap U) = \lambda + 1$. Slika je otvoren skup, pa je preslikavanje $\rho_{\mathcal{T}}$ otvoreno s obzirom na topologiju $\sigma$. Prema lemi 2.3.3 slijedi da je topologija $\sigma$ proširenje topologije $\mathcal{T}$ koje čuva rang.

Preostaje dokazati uvjet $\ell$-proširenja. Neka je $U'$ neki $\sigma$-otvoren skup. Neka za točku $x' \in U'$ vrijedi da $\rho_X(x')$ nije ordinal druge vrste. Treba dokazati da tada postoji $\mathcal{T}$-otvoreni skup $V'$ takav da vrijedi $x' \in V' \subseteq U'$. Ako za skup $U'$ vrijedi da je $\mathcal{T}$-otvoren, onda za $V'$ odabiremo sam skup $U'$. Inače je skup $U'$, prema definiciji topologije $\sigma$, jednak presjeku skupova $V_x$ i $O$, gdje je $O$ neki $\mathcal{T}$-otvoren skup. Točke $x'$ i $x$ su, prema pretpostavkama, različitih rangova, te stoga različite. Stoga iz $x \in V_x$ slijedi $x' \in V$. No tada je točka $x'$ u presjeku $\mathcal{T}$-otvorenih skupova $V$ i $O$. Vrijedi $x' \in V \cap O \subset V_x \cap O = U$, pa za skup $V'$ odabiremo skup $V \cap O$.

Pretpostavimo sada da prostor $(X, \mathcal{T})$ nije $\ell$-maksimalan, Tada postoji pravo $\ell$-proširenje $\sigma$ topologije $\mathcal{T}$. Kako vrijedi $\mathcal{T} \subset \sigma$, postoji $\sigma$-otvoren skup $O$ koji nije ujedno $\mathcal{T}$-otvoren. Stoga postoji točka $x \in O$ takva da ne postoji $\mathcal{T}$-otvoren skup $O'$ takav da vrijedi $x \in O' \subseteq O$. U suprotnom bi skup $O$ bio unija takvih $\mathcal{T}$-otvorenih skupova $O'$, za svaki $x \in O$; no tada bi skup $O$ bio $\mathcal{T}$-otvoren. Odabiremo proizvoljno skup $O$ i pripadnu točku $x$ koji zadovoljavaju ta svojstvo, no uz uvjet da je $x$ najmanjeg mogućeg ranga. Kad bi točka $x$ imala rang koji je ordinal prve vrste, onda topologija $\sigma$ ne bi zadovoljavala uvjet $\ell$-proširenja (točka $x$ i njena okolina $O$ bi činili protuprimjer). Dakle, točka $x$ ima rang $\lambda$ koji je ordinal druge vrste.

Označimo $O_{<\lambda} = \{x \in O \mid \rho_\sigma(x) < \lambda\}$ te $O_{\leq\lambda} = \{x \in O \mid \rho_\sigma(x) \leq \lambda\}$. Očito vrijedi $O_{<\lambda} = O \cap \rho_\sigma^{-1}([0,\lambda\rangle)$, te su skupovi $O$ i $\rho_\sigma^{-1}([0,\lambda\rangle)$ otvoreni s obzirom na topologiju $\sigma$. Stoga je $O_{<\lambda}$ jedan $\sigma$-otvoren skup. Dokažimo da je $O_{<\lambda}$ i jedan $\mathcal{T}$-otvoren skup. Neka je $x'$ proizvoljna točka iz $O_{<\lambda}$, a $\lambda'$ njen rang. Iz minimalnosti ranga točke $x$ i činjenice da vrijedi $\lambda' < \lambda$, slijedi da postoji $\mathcal{T}$-okolina $O'$ točke $x'$ sadržana u $O$. Očito je tada njena okolina $O' \cap \rho_{\mathcal{T}}^{-1}([0,\lambda\rangle)$ sadržana u skupu $O_{<\lambda}$. Skup $O_{<\lambda}$ je dakle jednak uniji $\mathcal{T}$-otvorenih skupova za svaku točku $x$ skupa $O_{<\lambda}$. No tada je i skup $O_{<\lambda}$ jedan $\mathcal{T}$-otvoren skup. Skup $O_{<\lambda} \cup \{x\}$ nije $\mathcal{T}$-otvoren skup, inače bi vrijedilo $x \in O_{<\lambda} \cup \{x\} \subseteq O$. suprotno pretpostavci da ni za koji $\mathcal{T}$-otvoreni skup $O'$ ne vrijedi $x \in O' \subseteq O$.

Neka je $U$ proizvoljna $\mathcal{T}$-okolina točke $x$. Označimo $O_\lambda = U \cap O_{<\lambda}$. Kako bismo dovršili dokaz da uvjet (lm) nije ispunjen, potrebno je dokazati da ne vrijedi $\rho_X(O_\lambda) < \lambda$. Preslikavanje $\rho_X$ je diskretno po točkama (prema lemi 2.2.10). Stoga postoji otvoreni skup $I$ koji od svih točaka čiji je rang jednak $\lambda$ sadrži samo točku $x$. Dokažimo da vrijedi $\rho_X(O_\lambda) = \lambda$. Označimo $O_{\lambda x} = O_\lambda \cup \{x\}$. Dokažimo da se radi o otvorenom skupu. Vrijedi $O_{\lambda x} = O_\lambda \cup \{x\} = (U \cap O_{<\lambda}) \cup \{x\} = (U \cup \{x\}) \cap (O_{<\lambda} \cup \{x\}) = U \cap (O_{\leq\lambda} \cap I)$ . Vrijedi $O_{\leq\lambda} = O \cap \rho_\sigma^{-1}([0,\lambda+1\rangle)$. Stoga je $O_{\leq\lambda}$ otvoren skup, pa je i skup $O_{\lambda x}$ otvoren, jer je jednak presjeku otvorenog skupa i unije nekih otvorenih skupova. To povlači da je skup $\rho_X(O_{\lambda x})$ neki ordinal. Vrijedi $O_{\lambda x} = O_\lambda \cup \{x\}$ te $\rho_X(O_\lambda) \leq \lambda$ i $\rho_X(x) = \lambda$. Dakle, $\lambda$ je najveći rang točke u skupu $O_{\lambda x}$, pa slijedi $\rho_X(O_{\lambda x}) = \lambda + 1$. To znači da za svaki ordinal $\gamma < \lambda$ postoji točka $x'$ iz skupa $O_{\lambda x})$ čiji je rang jednak $\gamma$. Pritom je točka $x'$ različita od točke $x$, jer je rang točke $x$ jednak $\lambda$. Dakle, za svaki ordinal $\gamma < \lambda$ postoji točka $x'$ iz skupa $O_\lambda$ čiji je rang jednak $\gamma$. Kako vrijedi $\rho_X(O_\lambda) \leq \lambda$, slijedi $\rho_X(O_\lambda) = \lambda$.

□

Sada nam je cilj dokazati dvije leme o odnosu $\ell$-proširenja i d-preslikavanja. Na njih se nećemo pozivati u nastavku ovog rada, no imaju ulogu pri konstrukciji tzv. $\mathbf{J}_n$-morfizama (o njima ćemo kasnije reći nešto više).

**Lema 2.3.6.** *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \sigma)$ raspršeni topološki prostori, te $f : X \to Y$ jedno* d*-preslikavanje. Neka za prostor $(Y, \sigma)$ vrijedi da je $\ell$-maksimalan. Tada je $f : X' \to Y$ također* d*-preslikavanje, za svako $\ell$-proširenje $X' = (X, \mathcal{T}')$ prostora $X$.*

*Dokaz.* Treba dokazati da je preslikavanje $f : X' \to Y$ otvoreno, neprekidno i diskretno po točkama. Dokažimo prvo da je neprekidno. Neka je $A$ proizvoljan podskup skupa $Y$. Tada je $f^{-1}(A)$ jedan $\mathcal{T}$-otvoren skup. Kako vrijedi $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, skup $f^{-1}(A)$ je i $\mathcal{T}'$-otvoren skup. Neka je $y$ točka prostora $Y$. Tada skup $f^{-1}(\{y\})$ generira diskretan potprostor prostora $X$. Kako vrijedi $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, skup $f^{-1}(\{y\})$ generira diskretan potprostor prostora $X'$.

Dokažimo sada da je preslikavanje $f : X' \to Y$ otvoreno. Pretpostavimo da nije; neka je $x$ točka prostora $X'$ minimalnog ranga te $O$ neka njena $\mathcal{T}'$-okolina takva da nijedna okolina točke $f(x)$ nije sadržana u skupu $f(O)$. Tada skup $f(O)$ nije $\sigma$-otvoren skup. Označimo rang točke $x$ s $\lambda$. Primijetimo da za $\mathcal{T}'$-okolinu $O$ možemo odabrati skup u kojem je rang svih točaka osim točke $x$ manji od $\lambda$. Naime, prema lemi 2.2.10 skup $\rho_X^{-1}([0, \lambda + 1\rangle)$ je $\mathcal{T}'$-otvoren, i možemo pronaći okolinu $I$ točke $x$ koja ne sadrži druge točke istog ranga. Prema četvroj tvrdnji leme 2.1.8 slijedi da niti skup $f(O \cap \rho_X^{-1}([0, \lambda + 1\rangle) \cap I)$ ne sadrži neku okolinu točke $f(x)$. Stoga za skup $O$ odabiremo skup u kojem je rang svih točaka osim točke $x$ manji od $\lambda$.

Primijetimo da vrijedi $O \cap \rho_X^{-1}([0, \lambda\rangle) = O \setminus \{x\}$. Iz toga slijedi da je skup $O \setminus \{x\}$ otvoren, te su sve točke u njemu ranga manjeg od $\lambda$.

Dokažimo da je ordinal $\lambda$ jednak nuli ili je ordinal prve vrste. U suprotnom, što slijedi iz činjenice da je topologija $\mathcal{T}'$ jedno $\ell$-proširenje topologije $\mathcal{T}$, bi postojao $\mathcal{T}$-otvoreni podskup $O'$ skupa $O$. Tada bi okolina $f(O')$ točke $f(x)$ bila sadržana u skupu $f(O)$. No takva okolina, po definiciji točke $x$, ne postoji.

Prema trećoj tvrdnji korolara 2.2.11 slijedi da je rang točke $f(x)$ također $\lambda$. Primijetimo i da je zbog minimalnosti $\lambda$ skup $f(O \setminus \{x\})$ (čije su sve točke ranga manjeg od $\lambda$) otvoren.

Rang točke $f(x)$ je ordinal druge vrste $\lambda$, skup $f(O \setminus \{x\})$ je otvoren i sadrži točke ranga manjeg od $\lambda$, i skup $f(O)$ nije otvoren. Kako je prostor $Y$ $\ell$-maksimalan, prema lemi 2.3.5 slijedi da postoji okolina $U$ točke $f(x)$ takva da vrijedi $\rho_Y(U \cap f(O \setminus \{x\})) < \lambda$.

Označimo $\lambda' = \rho_Y(U \cap f(O \setminus \{x\}))$. Prema trećoj tvrdnji korolara 2.2.11 slijedi $\lambda' = \rho_X(f^{-1}(U) \cap (O \setminus \{x\}))$. Skup $f^{-1}(U)$ je $\mathcal{T}$-otvoren, pa stoga i $\mathcal{T}'$-otvoren, te sadrži $x$. Skup $O$ je $\mathcal{T}'$-otvoren te sadrži $x$. Slijedi da je skup $f^{-1}(U) \cap O$ jedna $\mathcal{T}'$-okolina točke $x$. Ta činjenica (iz otvorenosti preslikavanja $\rho_X$) povlači $\lambda' \in \rho_X(f^{-1}(U) \cap O)$. Kako točka $x$ nije ranga $\lambda'$, slijedi $\lambda' \in \rho_X(f^{-1}(U) \cap (O \setminus \{x\}))$. No to povlači $\lambda' \in \lambda'$, što je kontradikcija.

Stoga je preslikavanje $f : X' \to Y$ otvoreno. $\square$

**Lema 2.3.7.** *Neka su $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \sigma)$ i $Y' = (Y, \sigma')$ raspršeni topološki prostori, te $f : X \to Y$ jedno* d*-preslikavanje. Neka je prostor $Y'$ jedno $\ell$-maksimalno $\ell$-proširenje prostora $Y$. Tada postoji $\ell$-maksimalno $\ell$-proširenje $X' = (X, \mathcal{T}')$ prostora $X$ za koje vrijedi da je $f$ jedno* d*-preslikavanje u odnosu na topologije $\mathcal{T}'$ i $\sigma$'.*

*Dokaz.* Definiramo topologiju $\theta$ na $X$ generiranu bazom $B_\theta$:

$$B_\theta = \{U \cap f^{-1}(O) \mid U \in \mathcal{T}, O \in \sigma'\}.$$

Dokažimo da je $B_\theta$ doista baza za neku topologiju. Neka su $U_1 \cap f^{-1}(O_1)$ i $U_2 \cap f^{-1}(O_2)$ elementi familije $B_\theta$ za neke $\mathcal{T}$-otvorene skupove $U_1$ i $U_2$, te $\sigma'$-otvorene skupove $O_1$ i $O_2$. Općenito vrijedi $f^{-1}(O_1 \cap O_2) = f^{-1}(O_1) \cap f^{-1}(O_2)$. Stoga vrijedi $(U_1 \cap U_2) \cap f^{-1}(O_1 \cap O_2) = (U_1 \cap f^{-1}(O_1)) \cap (U_2 \cap f^{-1}(O_2))$. Stoga je i presjek skupova $U_1 \cap f^{-1}(O_1)$ i $U_2 \cap f^{-1}(O_2)$ u familiji $B_\theta$. To implicira da je familija $B_\theta$ baza neke topologije.

Dokažimo da je preslikavanje $f$ neprekidno u odnosu na topologije $\theta$ i $\sigma'$. Neka je $O$ neki $\sigma'$-otvoreni skup. Kako je skup $X \cap f^{-1}(O)$ element baze $B_\theta$, slijedi da je skup $f^{-1}(O)$ jedan $\theta$-otvoren skup.

Dokažimo da je preslikavanje $f$ diskretno po točkama u odnosu na topologije $\theta$ i $\sigma'$. Za proizvoljnu točku $y \in Y$ vrijedi da skup $f^{-1}(\{y\})$ generira diskretan potprostor prostora $X$. No kako vrijedi $\theta \supseteq \mathcal{T}$, skup $f^{-1}(\{y\})$ generira diskretan potprostor prostora $(X, \theta)$.

Dokažimo da je preslikavanje $f$ otvoreno u odnosu na topologije $\theta$ i $\sigma'$. Neka je $O$ neki $\theta$-otvoreni skup. Tada je skup $O$ jednak uniji nekih skupova iz familije $B_\theta$. Za dokazati da je skup $f(O)$ otvoren u prostoru $Y'$, dovoljno je dokazati da se svaki od skupova iz unije preslikava u $\sigma'$-otvoren skup. Stoga možemo pretpostaviti da je skup $O$ element familije $B_\theta$. To znači da postoje $\mathcal{T}$-otvoren skup $O'$ i $\sigma'$-otvoren skup $U$ takvi da vrijede $O = O' \cap f^{-1}(U)$. Skup $f(O')$ je $\sigma'$-otvoren jer je preslikavanje otvoreno u odnosu na topologije $\mathcal{T}$ i $\sigma$, te vrijedi $\sigma \subseteq \sigma'$. Općenito vrijedi $f(f^{-1}(U)) = U$, pa je skup $f(O)$ otvoren u prostoru $Y'$.

Stoga je preslikavanje $f$ jedno d-preslikavanje u odnosu na topologije $\theta$ i $\sigma'$. Iz korolara 2.2.11 slijedi da vrijedi $\rho_\theta = \rho_\mathcal{T}$. Stoga je topologija $\theta$ proširenje koje čuva rang topologije $\mathcal{T}$.

Dokažimo da je topologija $\theta$ jedno $\ell$-proširenje topologije $\mathcal{T}$. Neka je $O$ neki $\theta$-otvoren skup i točka $x$ proizvoljna točka prostora $X$ čiji rang nije ordinal druge vrste. Treba dokazati da postoji $\mathcal{T}$-otvoreni skup $V$ takav da vrijedi $x \in V \subseteq O$. Pretpostavimo da je skup $O$ član baze $B_\theta$, jer ako za takav skup $O$ pronađemo odgovarajući skup $V$, očito će tada skup $V$ biti i podskup izvornog skupa $O$.

Dakle, postoje $\mathcal{T}$-otvoren skup $O'$ i $\sigma'$-otvoren skup $U$ takvi da vrijede $O = O' \cap f^{-1}(U)$. Dokažimo da vrijedi $f(O) = f(O' \cap f^{-1}(U)) = f(O') \cap U$. Neka je $b$ proizvoljan element skupa $f(O' \cap f^{-1}(U))$. Tada postoji element $a \in O'$ takav da vrijedi $f(a) = b$, $a \in O'$ te $f(a) \in U$. Očito postoji element $a \in O'$ takav da vrijedi $f(a) = b$ te $b = f(a) \in U$. Pretpostavimo sada da je $b$ proizvoljan element skupa $f(O') \cap U$. Tada postoji element $a \in O'$ takav da vrijedi $f(a) = b$, te $b \in U$. Kako vrijedi $f(a) = b$, slijedi $a \in f^{-1}(U)$.

Skup $f(O') \cap U$ je stoga $\sigma'$-otvoren skup, jer je skup $O$ jedan $\theta$-otvoren skup, a preslikavanje $f$ otvoreno preslikavanje u odnosu na topologije $\theta$ i $\sigma'$.

Prema korolaru 2.2.11, točke $x$ i $f(x)$ imaju jednak rang. Stoga rang točke $f(x)$ nije ordinal druge vrste. Topologija $\sigma'$ je jedno $\ell$-proširenje topologije $\sigma$. Stoga postoji $\sigma$-otvoren skup $W$ takav da vrijedi $x \in W \subseteq f(O') \cap U$. Kako je preslikavanje

$f$ neprekidno u odnosu na topologije $\mathcal{T}$ i $\sigma$, slijedi da je skup $f^{-1}(W)$ jedan $\mathcal{T}$-otvoren skup. Vrijedi $W \subseteq f(O') \cap U$, pa slijedi $f^{-1}(W) \subseteq f^{-1}(f(O') \cap U) = O' \cap f^{-1}(U) = O$.

Prema lemi 2.3.4, postoji $\ell$-maksimalno $\ell$-proširenje $X' = (X, \mathcal{T}')$ prostora $(X, \theta)$. Kako je topologija $\theta$ jedno $\ell$-proširenje topologije $\mathcal{T}$, slijedi da je prostor $X'$ jedno $\ell$-maksimalno $\ell$-proširenje prostora $X$. Iz leme 2.3.6 slijedi da je preslikavanje $f$ jedno d-preslikavanje u odnosu na topologije $\mathcal{T}'$ i $\sigma'$.

□

## 2.4 GLP-prostori i lme-prostori

U prvom smo poglavlju vidjeli da je svaki relacijski okvir $(W, (R_n)_{n \in \omega})$ koji je adekvatan za **GLP** u jednom smislu trivijalan. Naime, sve relacije $R_i$, za $i \in \omega$, $i > 0$, su prazne.

Želimo ispuniti dva cilja do kraja ovog poglavlja. Prvi cilj je uvesti pojam **GLP**-prostora (koji su topološka analogija okvirima adekvatnima za **GLP**) i njihove podklase lme-prostora. Dokazat ćemo da, za razliku od okvira adekvatnih za **GLP**, lme-prostori nisu nužno trivijalni. Preciznije, lme-prostori nisu nužno diskretni. Ta činjenica motivira korištenje topološke (umjesto relacijske) semantike. Drugi cilj je doći do rezultata potrebnih u dokazu potpunosti sustava **GLP** u odnosu na klasu lme-prostora.

Do sada smo vidjeli da prostor ordinala s lijevom topologijom ima jedinstvenu ulogu kod d-preslikavanja. U nastavku ćemo koristiti i prostor ordinala s uređajnom topologijom. Taj će prostor imati nekoliko uloga u nastavku, od kojih je jedna osnova za konkretne lme-prostore u dokazu potpunosti. Podsjetimo ovdje da ti prostori već imaju povijest korištenja u logikama dokazivosti. Naime, u radovima [1] i [7] je dokazana potpunost sustava **GL** u odnosu na ordinal $\omega^\omega$ s uređajnom topologijom. Zatim, prvi primjer **GLP**-prostora s dvije nediskretne topologije je dao Leo Esakia (u privatnoj komunikaciji, vidi primjer 2.19 u [3]). Radilo se o prostoru ordinala gdje je jedna topologija lijeva, a druga uređajna.

Prisjetimo se da za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ oznakom $\mathcal{T}^+$ označavamo d-topologiju, odnosno topologiju generiranu familijom $\mathcal{T} \cup \{\mathrm{d}(A) \mid A \subseteq X\}$. Prostor $(X, \mathcal{T}^+)$ označavamo s $X^+$. Za preslikavanje $\rho_{X^+} : X^+ \to \rho(X^+)$ uvodimo oznaku $\rho^+_X$.

**Definicija 2.4.1.** *Politopološki prostor* $(X; \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \dots)$ *nazivamo* **GLP**-*prostorom ako su ispunjeni sljedeći uvjeti za svaki* $n \in \omega$:

- *prostor* $(X, \mathcal{T}_n)$ *je raspršen;*
- *vrijedi* $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{T}_{n+1}$*;*

- *za svaki podskup $S$ prostora $X$, skup $\mathrm{d}_{\mathcal{T}_n} S$ je $\mathcal{T}_{n+1}$-otvoren.*

U nastavku ćemo kad je riječ o **GLP**-prostoru umjesto $\mathrm{d}_{\mathcal{T}_n}$ pisati $\mathrm{d}_n$.

**Definicija 2.4.2.** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ raspršen topološki prostor. Politopološki prostor $(X; \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \ldots)$ nazivamo lme-prostorom utemeljenim na topologiji $\mathcal{T}$ ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:*

- *topologija $\mathcal{T}_0$ je $\ell$-maksimalno $\ell$-proširenje topologije $\mathcal{T}$;*
- *topologija $\mathcal{T}_{n+1}$ je $\ell$-maksimalno $\ell$-proširenje topologije $\mathcal{T}_n^+$, za svaki $n \in \omega$.*

*Ako je topologija jasna iz konteksta, za prostor $X$ kažemo i da je lme-prostor.*

Vrijedi da su lme-prostori podklasa **GLP**-prostora. To dokazujemo u sljedećoj propoziciji.

**Propozicija 2.4.3.** *Svaki lme-prostor je ujedno* **GLP***-prostor.*

*Dokaz.* Neka je $(X; \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \ldots)$ proizvoljan lme-prostor, te neka je $n \in \omega$ proizvoljan.

Neka je $S$ proizvoljan podskup prostora $X$. Tada postoji $\mathcal{T}$-otvoreni skup $O$ takav da je presjek $S \cap O$ jednočlan skup. Kako vrijedi $\mathcal{T}_n \supseteq \mathcal{T}$, skup $O$ je i $\mathcal{T}_n$-otvoren. Stoga je prostor $(X, \mathcal{T}_{n+1})$ raspršen.

Topologija $\mathcal{T}_{n+1}$ je $\ell$-proširenje topologije $\mathcal{T}_n^+$. Stoga vrijedi $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{T}_{n+1}$.

Topologija $\mathcal{T}_n^+$ sadrži skup $\mathrm{d}_{\mathcal{T}_n} S$ za svaki podskup $S$ prostora $X$. Topologija $\mathcal{T}_{n+1}$ je $\ell$-proširenje topologije $\mathcal{T}_n^+$, pa je skup $\mathrm{d}_n S$ i $\mathcal{T}_{n+1}$-otvoren. $\square$

Prvo dokazujemo korisnu karakterizaciju d-topologije kod $\ell$-maksimalnih prostora.

**Lema 2.4.4.** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ jedan $\ell$-maksimalan prostor. Tada je topologija $\mathcal{T}^+$ generirana familijom $\mathcal{T} \cup \{\mathrm{d}^{\beta+1} X \mid \beta \in \rho(X)\}$.*

*Dokaz.* Označimo:

$$\begin{aligned} B_{\mathcal{T}^+} &= \mathcal{T} \cup \{\mathrm{d}(A) \mid A \subseteq X\}, \\ B_{\mathcal{T}'} &= \mathcal{T} \cup \{\mathrm{d}^{\beta+1} X \mid \beta \in \rho(X)\}. \end{aligned}$$

Prostor $X^+ = (X, \mathcal{T}^+)$ je generiran familijom $B_{\mathcal{T}^+}$. Označimo s $X' = (X, \mathcal{T}')$ prostor generiran familijom $B_{\mathcal{T}'}$. Topološki će se pojmovi u nastavku dokaza, tamo gdje nije drugačije navedeno, odnositi na početni prostor, odnosno topologiju $\mathcal{T}$. Primijetimo da su prostori $X^+$ i $X'$ raspršeni, jer sadrže topologiju $\mathcal{T}$.

Treba dokazati da vrijedi $\mathcal{T}' = \mathcal{T}^+$. Neka je $S$ proizvoljan član familije $B_{\mathcal{T}'}$. Ako je $S$ neki $\mathcal{T}$-otvoren skup, očito pripada i familiji $B_{\mathcal{T}^+}$. Inače je $S$ oblika $\mathrm{d}^{\beta+1} X$ za $\beta \in \rho(X)$. Tada vrijedi $S = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{\beta} X)$ i $\mathrm{d}^{\beta} X \subseteq X$, pa $S$ pripada familiji $B_{\mathcal{T}^+}$.

Preostaje dokazati $\mathcal{T}^+ \subseteq \mathcal{T}'$. Neka je $S$ proizvoljan član familije $B_{\mathcal{T}^+}$. Ako je $S$ neki $\mathcal{T}$-otvoren skup, očito pripada i familiji $B_{\mathcal{T}'}$. Inače je $S$ oblika $\mathrm{d}\,A$ za neki podskup $A$ prostora $X$. Pretpostavimo stoga da je $A$ proizvoljan podskup prostora $X$. Treba dokazati da je skup $\mathrm{d}\,A$ jedan $\mathcal{T}'$-otvoren skup.

Dovoljno je dokazati da svaka točka $x \in \mathrm{d}\,A$ ima $\mathcal{T}'$-okolinu sadržanu u $\mathrm{d}\,A$.

Ako je rang točke $x$ jednak nula, točka $x$ nije gomilište prostora $X$, pa prema šestoj tvrdnji leme 2.2.3 niti gomilište skupa $A$.

Ako točka $x$ ima rang koji je ordinal prve vrste, onda za neki ordinal $\alpha$ točka $x$ pripada skupu $\mathrm{d}^{\alpha+1} X$ i ne pripada skupu $\mathrm{d}^{\alpha+2} X$. Skup $\mathrm{d}^{\alpha+1} X$ je otvoren s obzirom na topologiju $\mathcal{T}'$. Skup $\rho_{\mathcal{T}'}^{-1}([0, \alpha+2\rangle)$ je otvoren jer je $\rho_{\mathcal{T}'}$ neprekidno preslikavanje. Skup $\rho_{\mathcal{T}'}^{-1}(\{\alpha+1\})$ generira diskretan potprostor prostora $X$ jer je preslikavanje $\rho_{\mathcal{T}'}$ diskretno po točkama. Presjek skupova $\mathrm{d}^{\alpha+1} X$ i $\rho_{\mathcal{T}'}^{-1}([0, \alpha+2\rangle)$ očito sadrži samo točke čiji je rang jednak $\alpha+1$. Kako skup $\rho_{\mathcal{T}'}^{-1}(\{\alpha+1\})$ generira diskretan potprostor prostora $X$, postoji $\mathcal{T}'$-otvoreni skup $I$ koji od svih točaka ranga $\alpha+1$ sadrži samo točku $x$. Stoga vrijedi $I \cap \rho_{\mathcal{T}'}^{-1}([0, \alpha+2\rangle) \cap \mathrm{d}^{\alpha+1} X = \{x\}$. Kako je skup $\{x\}$ jednak presjeku nekih otvorenih skupova, i sam je otvoren. Dakle, ako je rang točke $x$ ordinal prve vrste, postoji $\mathcal{T}'$-okolina točke $x$ sadržana u skupu $\mathrm{d}\,A$.

Pretpostavimo sada da točka $x$ ima rang $\lambda$ koji je ordinal druge vrste. Označimo $I = \mathrm{int}\{x \in \rho_{\mathcal{T}}^{-1}([0, \lambda\rangle) \mid x \notin A\}$. Kako je točka $x$ gomilište skupa $A$, u svakoj se okolini nalazi i neka druga točka skupa $A$. No, skup $I \cup \{x\}$ ne sadrži niti jednu drugu točku skupa $A$. Kako svaka okolina točke $x$ sadrži neku drugu točku iz $A$, slijedi da skup $I \cup \{x\}$ nije okolina točke $x$, Stoga skup skup $I \cup \{x\}$ nije ni $\mathcal{T}$-otvoren skup.

Sada iz leme 2.3.5 slijedi da postoji okolina $U$ točke $x$ takva da vrijedi $\rho_{\mathcal{T}}(I \cap U) < \lambda$. Označimo $\rho_{\mathcal{T}}(I \cap U) = \beta$. Skup $U \cap \mathrm{d}^{\beta+1} X$ je $\mathcal{T}'$-otvoren jer je jednak presjeku nekih $\mathcal{T}'$-otvorenih skupova. Iz leme 2.2.12 slijedi da postoji okolina $V$ točke $x$ koja je podskup okoline $U \cap \mathrm{d}^{\beta+1} X$, te u kojoj točka $x$ ima najveći rang.

Dokažimo da vrijedi $V \subseteq \mathrm{d}\,A$. Pretpostavimo suprotno, tj. neka postoji točka $t$ skupa $V$ koja nije ujedno sadržana u skupu $\mathrm{d}\,A$. Činjenica da točka $t$ nije gomilište skupa $A$ povlači da postoji okolina $O'$ točke $t$ koja u presjeku sa skupom $A$ sadrži samo točku $t$. Iz leme 2.2.12 slijedi da postoji okolina $O$ točke $t$ koja je podskup okoline $O'$, te u kojoj točka $t$ ima najveći rang. Rang točke $t$ je manji od $\lambda$, jer točka $t$ pripada skupu $V$. Stoga možemo rastaviti skup $O$ kao disjunktnu uniju skupova $O_t$ i $\{t\}$, gdje točke skupa $O_t$ imaju rang manji od $\lambda$ te je skup $O_t$ disjunktan sa skupom $A$. Skup $O_t$ sadrži točke ranga manjeg od ranga točke $t$, pa vrijedi $O_t = O \cap \rho_{\mathcal{T}}^{-1}([0, \rho_{\mathcal{T}}(t)\rangle)$. Stoga je skup $O_t$ otvoren. No tada vrijedi $O_t \subseteq I$, pa vrijedi $\rho_{\mathcal{T}}(O \cap U) < \beta$. Točka $t$ pripada skupovima $O$ i $U$, te stoga i njihovu presjeku. No, točka $t$ ima rang barem $\beta+1$, što je kontradikcija s rezultatom $\rho_{\mathcal{T}}(O \cap U) < \beta$.

Dakle, vrijedi $x \in V \subseteq \mathrm{d}\,A$.

$\square$

Trenutni cilj nam je dokazati da se funkcija ranga prostora $X^+$ može izraziti koristeći funkciju ranga prostora $X$ i funkciju ranga ordinala s uređajnom topologijom. Za to su nam potrebne dvije leme.

**Lema 2.4.5.** *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \sigma)$ raspršeni topološki prostori. Neka je prostor $X$ jedan $\ell$-maksimalan prostor. Neka je $f : X \to Y$ jedno* d*-preslikavanje. Tada je $f$ također* d*-preslikavanje u odnosu na topologije $\mathcal{T}^+$ i $\sigma^+$.*

*Dokaz.* Dokažimo da je $f$ jedno d-preslikavanje u odnosu na topologije $\mathcal{T}^+$ i $\sigma^+$. Neka je $O$ proizvoljan $\mathcal{T}^+$-otvoren skup. Prema lemi 2.4.4 možemo pretpostaviti da vrijedi $O = O' \cap \mathrm{d}^{\beta+1} X$ za neki $\mathcal{T}$-otvoreni skup $O'$ i ordinal $\beta$. Kako je preslikavanje $f$ otvoreno u odnosu na topologije $\mathcal{T}$ i $\sigma$, skup $f(O')$ je jedan $\sigma$-otvoren skup. Stoga je skup $f(O')$ i jedan $\sigma^+$-otvoren skup. Kako prema lemi 2.2.6 d-preslikavanje čuva rang, skup $f(\mathrm{d}^{\beta+1} X)$ je jednak $\sigma^+$-otvorenom skupu $\mathrm{d}^{\beta+1} Y$. Stoga je skup $f(\mathrm{d}^{\beta+1} X)$ jedan $\sigma^+$-otvoren skup. Općenito vrijedi $f(O' \cap \mathrm{d}^{\beta+1} X) \subseteq f(O') \cap f(\mathrm{d}^{\beta+1} X)$. Dokažimo da vrijedi i druga inkluzija. Neka vrijedi $y \in f(O') \cap f(\mathrm{d}^{\beta+1} X)$. Tada postoji točka $x \in O'$ koja je original točke $y$, te je $y$ ranga barem $\beta + 1$. Slijedi da je rang $x$ također barem $\beta + 1$. No tada vrijedi $y \in f(O' \cap \mathrm{d}^{\beta+1} X)$. Skup $f(O' \cap \mathrm{d}^{\beta+1} X)$ je presjek dva otvorena skupa, pa je i sam otvoren.

Dokažimo da je $f$ neprekidno preslikavanje u odnosu na topologije $\mathcal{T}^+$ i $\sigma^+$. Neka je $O$ proizvoljan $\sigma^+$-otvoren skup. Prema lemi 2.4.4 možemo pretpostaviti da vrijedi $O = O' \cap \mathrm{d}^{\beta+1} Y$ za neki $\sigma$-otvoreni skup $O'$ i ordinal $\beta$. Skup $f^{-1}(O')$ je $\mathcal{T}$-otvoren zbog neprekidnosti preslikavanja $f$ u odnosu na topologije $\mathcal{T}$ i $\sigma$. Kao i ranije, vrijedi $f^{-1}(\mathrm{d}^{\beta+1} Y) = \mathrm{d}^{\beta+1} X$. Općenito vrijedi $f^{-1}(O' \cap \mathrm{d}^{\beta+1} X) = f^{-1}(O') \cap f^{-1}(\mathrm{d}^{\beta+1} X)$. Skupovi $f^{-1}(O')$ i $f^{-1}(\mathrm{d}^{\beta+1} X)$ su otvoreni, pa je i njihov presjek otvoren.

Dokažimo da je preslikavanje $f$ diskretno po točkama u odnosu na topologije $\mathcal{T}$ i $\sigma$. Neka je točka $y \in Y$ proizvoljna. Kako vrijedi $y \in Y$ i preslikavanje $f$ je diskretno po točkama u odnosu na topologije $\mathcal{T}$ i $\sigma$, skup $f^{-1}(\{y\})$ generira diskretan potprostor prostora $X$. No kako topologija $\mathcal{T}^+$ sadrži topologiju $\mathcal{T}$, skup $f^{-1}(\{y\})$ generira i diskretan potprostor prostora $X^+$.

□

Ranije smo spomenuli da je prvi pronađen primjer **GLP**-prostora s dvije nediskretne topologije bio ordinal s lijevom i uređajnom topologijom. Iako sljedeću lemu ne izričemo s tim ciljem, spomenimo ovdje da se taj rezultat temeljio na toj lemi.

**Lema 2.4.6.** *Ako je $\Omega$ ordinal i $\mathcal{T}$ lijeva topologija na skupu $\Omega$, onda je $\mathcal{T}^+$ uređajna topologija.*

*Dokaz.* Neka je $O$ proizvoljan $\mathcal{T}^+$-otvoren skup. Ako je $O$ neki $\mathcal{T}$-otvoren skup, onda je otvoren i u uređajnoj topologiji. Inače možemo pretpostaviti da vrijedi

$O = U \cap \mathrm{d}\, V$ za neki $\mathcal{T}$-otvoren skup $U$ i neki skup $V \subseteq \Omega$. Skup $U$ je otvoren i u uređajnoj topologiji. Primijetimo da je skup $\mathrm{d}\, V$ jednak $\langle \min V, \Omega \rangle$. Naime, svaka točka tog skupa (i nijedna izvan njega) u svakoj svojoj $\mathcal{T}$-okolini sadrži barem jednu točku skupa $V$. Kako su skupovi $U$ i $\mathrm{d}\, V$ otvoreni u uređajnoj topologiji, slijedi da je i njihov presjek otvoren u uređajnoj topologiji.

Pretpostavimo sada da je $O$ otvoren skup u uređajnoj topologiji. Pretpostavit ćemo da je element baze uređajne topologije, tj. da je ili oblika $[0, \beta\rangle$, ili oblika $\langle \alpha, \beta \rangle$, za neke ordinale $\alpha$ i $\beta$. Skup $[0, \beta\rangle$ je očito $\mathcal{T}$-otvoren. Zatim, vrijedi $\langle \alpha, \beta \rangle = [\alpha + 1, \beta\rangle = \mathrm{d}^{\alpha+1}\, \beta$. To je otvoren skup jer je ordinal $\beta$, promatran kao skup, jednak $[0, \beta\rangle$, što je otvoren skup u lijevoj topologiji. □

Kad nije drugačije navedeno, podrazumijevamo da prostor $\rho(X)$ promatramo kao ordinal s lijevom topologijom. Tada iz upravo dokazane leme slijedi da je prostor $\rho(X)^+$ ordinal s uređajnom topologijom. Funkcija ranga tog prostora je $\rho_{\rho(X)^+}$. Sada dokazujemo ranije najavljenu tvrdnju o funkciji ranga prostora $X^+$, te primjenjujemo tu tvrdnju na lme-prostore.

**Korolar 2.4.7.** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ jedan $\ell$-maksimalan prostor. Tada vrijedi $\rho_X^+ = \rho_{\rho(X)^+} \circ \rho_X$.*

*Dokaz.* Iz leme 2.4.5 slijedi da je $\rho_X : X^+ \to \rho(X)^+$ jedno d-preslikavanje. Preslikavanje $\rho_{\rho(X)^+} : \rho(X)^+ \to \rho(\rho(X)^+)$ je također d-preslikavanje. Kompozicija tih preslikavanja je također d-preslikavanje (prema drugoj tvrdnji korolara 2.2.11). Kako se radi o d-preslikavanju kojem je kodomena ordinal s lijevom topologijom, prema lemi 2.2.10 slijedi $\rho_X^+ = \rho_{\rho(X)^+} \circ \rho_X$. □

**Korolar 2.4.8.** *Neka je $(X; \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \dots)$ jedan lme-prostor. Tada vrijedi $\rho_{n+1} = \rho_{\rho(X)^+} \circ \rho_n$, za svaki $n \in \omega$.*

*Dokaz.* Kako je $\mathcal{T}_{n+1}$ jedno $\ell$-proširenje topologije $\mathcal{T}_n^+$, slijedi $\rho_{n+1} = \rho_n^+$. Prema korolaru 2.4.7 slijedi $\rho_{n+1} = \rho_{\rho(X)^+} \circ \rho_n$. □

Želimo lme-prostor koji nije diskretan (ili barem metodu konstrukcije lme-prostora sa zadanim brojem nediskretnih topologija). Razlozi za to će biti jasniji u sljedećem poglavlju, no spomenimo unaprijed da bez takvog prostora ne možemo izgraditi protuprimjer formuli $[i]\bot$ za svaki $i \in \omega$ (želimo to moći jer ta formula nije teorem sustava **GLP**, ni za jedan $i \in \omega$).

**Lema 2.4.9.** *Neka je $(\epsilon_0; \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \dots)$ jedan lme-prostor utemeljen na uređajnoj topologiji. Označimo funkciju ranga ovako definiranog prostora $\epsilon_0$ s $r$, tj. definirajmo $r = \rho_{\rho(\epsilon_0)^+}$. Tada za sve ordinale $\alpha \in \epsilon_0$, vrijedi $r(\omega^\alpha) = \alpha$.*

*Dokaz.* Tvrdnju dokazujemo transfinitnom indukcijom po ordinalu $\alpha$. Tvrdnja vrijedi za bazu indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve ordinale manje od $\alpha$. Neka je $\alpha$ ordinal prve vrste. Tada postoji ordinal $\beta$ takav da vrijedi $\alpha = \beta + 1$. Tada vrijedi $\omega^\alpha = \sup\{\omega^\beta, \omega^\beta \cdot 2, \omega^\beta \cdot 3, \dots\}$. Neka je $S$ proizvoljan podskup ordinala $\omega^\beta$ promatranog kao skup. Primijetimo da je ordinal $\gamma$ gomilište odabranog skupa $S$ ako i samo ako je ordinal $\omega^\beta \cdot n + \gamma$ gomilište skupa $\{\omega^\beta \cdot n + \delta \mid \delta \in S\}$ za svaki $n \in \omega$. Stoga vrijedi $\mathrm{d}^\beta \omega^\alpha = \{\omega^\beta, \omega^\beta \cdot 2, \omega^\beta \cdot 3, \dots\}$. Jedino gomilište skupa $\mathrm{d}^\beta \omega^\alpha$ je ordinal $\omega^\beta \cdot \omega = \omega^{\beta+1} = \omega^\alpha$. Dakle, vrijedi $\mathrm{d}^\alpha \omega^\alpha = \mathrm{d}\,\mathrm{d}^\beta \omega^\alpha = \{\omega^\alpha\}$. Vrijedi $\mathrm{d}\,\mathrm{d}^\alpha \omega^\alpha = \mathrm{d}\{\omega^\alpha\} = \emptyset$, pa je rang točke $\omega^\alpha$ doista jednak $\alpha$.

Promotrimo slučaj kad je $\alpha$ ordinal druge vrste. Tada vrijedi $\omega^\alpha = \sup\{\omega^\beta \mid \beta < \alpha\}$. Po pretpostavci indukcije, za svaki ordinal $\gamma < \alpha$ vrijedi $\mathrm{d}^\gamma \omega^\alpha = \{\omega^\beta | \gamma \leq \beta < \alpha\}$. Točka $\omega^\alpha$ je gomilište skupa $\{\omega^\beta \mid \gamma \leq \beta < \alpha\}$, pa onda i skupa $\mathrm{d}^\gamma \omega^\alpha$, za svaki ordinal $\gamma < \alpha$. No tada vrijedi $\omega^\alpha \in \mathrm{d}^\alpha \omega^\alpha$. Ordinal $\omega^\alpha$ je i jedino gomilište tog skupa. Naime, za svaki manji ordinal $\alpha'$ vrijedi pretpostavka indukcije, a za svaki veći ordinal $\alpha'$ promotrimo skup $\langle \omega^\alpha, \alpha' + 1\rangle$. Ta okolina točke $\alpha'$ očito ne sadrži niti jedan ordinal iz skupa $\{\omega^\beta \mid \gamma \leq \beta < \alpha\}$, pa točka $\alpha'$ nije gomilište tog skupa. □

Konačno, dokazujemo teorem o postojanju nediskretnog **GLP**-prostora.

**Teorem 2.4.10.** *Postoji lme-prostor $(X; \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \dots)$ gdje je skup $X$ prebrojiv, te za svaki $n \in \omega$ topologija $\mathcal{T}_n$ nije diskretna.*

*Dokaz.* Neka je $(\epsilon_0; \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \dots)$ jedan lme-prostor utemeljen na uređajnoj topologiji.

Označimo funkciju ranga ovako definiranog prostora $\epsilon_0$ s $r$, tj. definirajmo $r = \rho_{\rho(\epsilon_0)^+}$. Neka vrijedi $n \in \omega$. Prema korolaru 2.4.8 slijedi $\rho_n = r^n \circ \rho_0$. Kako ovdje imamo $\rho_0 = r$, slijedi $\rho_n = r^{n+1}$. Dokazat ćemo da vrijedi $r(\epsilon_0) = \epsilon_0$. Očito će tada slijediti $r^{n+1}(\epsilon_0) = \epsilon_0$, odnosno $\rho_n(\epsilon_0) = \epsilon_0$. Kako vrijedi $\epsilon_0 > 0$, slijedit će da niti za jedan $n \in \omega$ topologija $\mathcal{T}_n$ nije diskretna (prema lemi 2.1.8, samo za diskretan prostor $(Y, \sigma)$ vrijedi $\mathrm{d}_\sigma(Y) = 0$).

Prema lemi 2.4.9 vrijedi $r(\omega^{\epsilon_0}) = \epsilon_0$. Kako uz to vrijedi $\epsilon_0 = \omega^{\epsilon_0}$, slijedi $r(\epsilon_0) = \epsilon_0$. □

# Poglavlje 3

# Topološka semantika

## 3.1 Modeli bazirani na topološkim prostorima

Jezik sustava **GL** jednak je jeziku sustava **GLP**, osim što su umjesto prebrojivo mnogo operatora oblika $[n]$ i $\langle n \rangle$, za $n \in \omega$, dostupni samo operatori $[0]$ i $\langle 0 \rangle$. Kada promatramo sustav **GL** umjesto $[0]$ ćemo pisati $\Box$, a umjesto $\langle 0 \rangle$ pišemo $\Diamond$.

Slično relacijskoj semantici, (topološka) valjanost se definira preko klase topoloških prostora (umjesto relacijskih okvira). Pojedini topološki model (dalje: model) je par takvog prostora i relacije forsiranja između točaka prostora i propozicijskih varijabli.

U literaturi se koristi više definicija istinitosti u modelu. Kao i u relacijskoj semantici, definira se istinitost formule u točki modela.

U najčešćem[1] pristupu (koji se u nastavku neće koristiti) formula oblika $\Diamond F$ istinita je u topološkom zatvorenju točaka u kojima je istinita formula $F$. Taj je pristup prihvatljiv za sustave koji su nadogradnja sustava **S4**, tj. sustave koji sadrže instance shema refleksivnosti ($\Box F \to F$) i tranzitivnosti ($\Box F \to \Box\Box F$). Taj pristup nije prihvatljiv za sustav **GL** (kao ni za sustav **GLP**), jer instance sheme $\Box F \to F$ nisu teoremi sustava **GL**.

Stoga će se koristiti drugi pristup, prema kojemu je skup točaka u kojima je istinita formula oblika $\Diamond F$ jednak skupu gomilišta (vidi definiciju 2.1.5) skupa točaka u kojima vrijedi $F$.

Prije intepretacije sustava **GLP** uz pomoć **GLP**-prostora, uvest ćemo sustav **GL**. Dokazat ćemo ranije najavljen rezultat da d-preslikavanje čuva valjanost.

**Definicija 3.1.1.** *(Topološki) model $\mathcal{M}$ je par $((X, \mathcal{T}), V)$ gdje je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, a $V$ je binarna relacija između skupa $X$ i skupa propozicijskih varijabli.*

[1] Vidi npr. [5], str. 256, te [5], str 261.

**Definicija 3.1.2.** *Neka je dan model $\mathcal{M}$ i $w \in X$. Rekurzivno definiramo istinitost formule $F$ u točki $w$ (pišemo $w \Vdash F$):*

- *ako $F = \bot$, onda $w \nVdash F$;*
- *ako $F = p$, onda $w \Vdash F$ ako i samo ako vrijedi $wVp$;*
- *ako $F = (G \to H)$, onda $w \Vdash F$ ako i samo ako vrijedi: $w \nVdash G$ ili $w \Vdash H$;*
- *ako $F = \Box G$, onda $w \Vdash F$ ako i samo ako postoji $\mathcal{T}$-okolina točke $w$ u čijim je preostalim točkama istinita formula $G$.*

Kako je operator $\Diamond$ pokrata od $\neg\Box\neg$, slijedi da vrijedi $w \Vdash \Diamond G$ ako i samo ako u svakoj $\mathcal{T}$-okolini točke $w$ postoji neka točka različita od $w$ u kojoj je $G$ istinita formula.

Pošto $\{\bot, \to\}$ čine jednu bazu bulovskih veznika tada uvjete istinitosti koji se odnose na ostale logičke veznike nije potrebno posebno isticati.

**Napomena 3.1.3.** *Neka je $X$ prostor gdje je skup točaka ordinal, a topologija uređajna. Nula i ordinali sljedbenici imaju otvoren skup koji sadrži samo njih. Stoga u njima ne može vrijediti formula oblika $\Diamond G$.*

**Napomena 3.1.4.** *Slično kao u relacijskoj semantici, ako je neka formula $F$ istinita u svim točkama nekog modela $\mathcal{M}$, reći ćemo da je globalno istinita na modelu $\mathcal{M}$ (pišemo $\mathcal{M} \vDash F$). Ako je neka formula globalno istinita na svim modelima nad nekim topološkim prostorom $\mathcal{F}$, reći ćemo da je valjana na samom topološkom prostoru (pišemo $\mathcal{F} \vDash F$). Ako je neka formula valjana na svim prostorima, reći ćemo da je valjana.*

Sada definiramo spomenuti fragment sustava **GLP**, sustav **GL**.

**Definicija 3.1.5.** *Sustav* **GL** *je najmanji skup formula sa sljedećim svojstvima:*

- *sadrži sve tautologije propozicijske logike;*
- *za formule $F$ i $G$ vrijedi $\Box(F \to G) \to (\Box F \to \Box G) \in$* **GL***; (shema aksioma K')*
- *za formulu $F$ vrijedi $\Box(\Box F \to F) \to \Box F \in$* **GL***; (shema aksioma L')*
- *za formule $F, F \to G \in$* **GL***, vrijedi $G \in$* **GL***; (zatvorenje pravilom modus ponens)*
- *za formulu $F \in$* **GL***, vrijedi $\Box F \in$* **GL***. (zatvorenje pravilom generalizacije)*

Ponekad ćemo radi lakših dokaza transformirati neke formule u lokalno ekvivalentne formule.

**Definicija 3.1.6.** *Neka su $F$ i $G$ proizvoljne formule. Formule $F$ i $G$ nazivamo lokalno ekvivalentnim formulama ako za svaku točku $w$ svakog modela $\mathcal{M}$ vrijedi:*

$$\mathcal{M}, w \Vdash F \text{ ako i samo ako } \mathcal{M}, w \Vdash G.$$

U udžbeniku [12] mogu se pronaći odgovarajući teoremi o zamjeni za logiku sudova (propozicijsku logiku) i logiku prvog reda.

**Lema 3.1.7** (Lema o zamjeni)**.** *Neka su $G$ i $G'$ lokalno ekvivalentne formule, te neka su $F$ i $F'$ proizvoljne formule. Ako se zamjenom nijedne, nekih ili svih pojava formule $G$ u formuli $F$ formulom $G'$ dobije formula $F'$, onda su $F$ i $F'$ lokalno ekvivalentne formule.*

*Dokaz.* Složenost formule je broj svih pojava unarnih i binarnih veznika i operatora u toj formuli.

Neka su $G$ i $G'$ lokalno ekvivalentne formule. Označimo s $F[G'/G]$ formulu nastalu iz formule $F$ zamjenom nijedne, neke ili svih pojava formule $G$ s formulom $G'$. Dakle, treba dokazati da su formule $F[G'/G]$ i $F$ lokalno ekvivalentne. Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom po složenosti formule $F$.

Za bazu indukcije treba provjeriti formule složenosti $k = 0$. Neka je $\mathcal{M}$ proizvoljan topološki model. Neka je $w \in \mathcal{M}$ proizvoljna točka tog modela. Kako formula $F$ ima složenost jednaku nuli, slijedi da se radi o propozicijskoj varijabli ili logičkoj konstanti. Promotrimo slučaj $F = G$. Kako vrijedi $F[G'/G] = G'$ te je formula $G'$ lokalno ekvivalentna formuli $G$, slijedi da je formula $F[G'/G]$ lokalno ekvivalentna formuli $G$. Kako vrijedi $F = G$, slijedi da je formula $F[G'/G]$ lokalno ekvivalentna formuli $F$. Promotrimo slučaj $G \neq F$. Tada slijedi da je formula $F[G'/G]$ lokalno ekvivalentna formuli $F$ jer su to iste formule ($F[G'/G] = F$).

Pretpostavimo da tvrdnja indukcije vrijedi za sve formule složenosti manje od $n$. Neka je formula $F$ složenosti jednake $n$. Promotrimo slučaj $F = G$. Tada imamo $F[G'/G] = G'$. Kako su formule $G$ i $G'$ lokalno ekvivalentne, slijedi da su formule $F$ i $F[G'/G]$ lokalno ekvivalentne. Promotrimo sada slučaj $F \neq G$. Neka je $\mathcal{M}$ proizvoljan topološki model. Neka je $w \in \mathcal{M}$ proizvoljna točka tog modela. Promotrimo slučajeve $F = [i]H$ za $i \in \omega$ te $F = H \to J$. Promotrimo prvo slučaj $F = [i]H$ za neku formulu $H$ te $i \in \omega$. Ako je formula $F$ istinita u točki $w$, postoji $\mathcal{T}_i$-okolina $U$ točke $w$ takva da je u svim točkama skupa $U \setminus \{w\}$ istinita formula $H$. Zbog pretpostavke indukcije vrijedi da su formule $H$ i $H[G'/G]$ lokalno ekvivalentne. Stoga je u svim točkama skupa $U \setminus \{w\}$ istinita formula $H[G'/G]$. No tada je u točki $w$ istinita formula $[i]H[G/G']$, odnosno formula $F[G'/G]$, za svaki $i \in \omega$. Analogno iz pretpostavke da je formula $F[G'/G]$ istinita u točki $w$ slijedi da je u točki $w$ istinita i formula $F$. Promotrimo sada slučaj $F = H \to J$. Ako je formula $F$ istinita u točki $w$, onda je u točki $w$ istinita formula $J$ ili neistinita formula $H$. Tada je u točki $w$ po pretpostavci indukcije istinita formula $J[G'/G]$ ili neistinita formula $H[G'/G]$. Tada je u točki $w$ istinita formula $H[G'/G] \to J[G'/G]$, odnosno formula $F[G'/G]$. Analogno iz pretpostavke da je formula $F[G'/G]$ istinita u točki $w$ slijedi da je u točki $w$ istinita i formula $F$.

□

Sljedeći dokaz adekvatnosti provodimo prvenstveno kako bismo ga kasnije mogli iskoristiti u dokazu adekvatnosti **GLP**-prostora za sustav **GLP**.

**Teorem 3.1.8.** *Svaki je teorem sustava* **GL** *valjan na svakom raspršenom topološkom prostoru.*

*Dokaz.* Neka je $(X, \mathcal{T})$ neki raspršen topološki prostor. Neka je $\mathcal{M}$ proizvoljan model nad $X$. Dokazat ćemo da je u proizvoljnoj točki $w$ modela $\mathcal{M}$ istinit svaki teorem sustava **GL**.

Dio definicije istinitosti koji se odnosi na logičke veznike jednak je definiciji istinitosti u propozicijskoj logici. Stoga su tautologije propozicijske logike istinite u točki $w$. Ako su formule $F$ te $F \to G$ istinite u točki $w$, prema definiciji istinitosti slijedi $w \Vdash F$ i jedno od sljedećeg: $w \nVdash F$ ili $w \Vdash G$. Preostaje samo druga mogućnost pa je valjanost formula na raspršenim prostorima očuvana na pravilo izvoda modus ponens.

Pretpostavimo da je $F$ valjana formula. Želimo dokazati da je i $\Box F$ valjana formula, odnosno da je istinita i u točki $w$.

Prema definiciji istinitosti za formule oblika $\Box F$ potrebno je pronaći okolinu točke $w$ u kojoj u svim točkama, osim možda u točki $w$, vrijedi $F$. Zbog valjanosti formule $F$, jedna takva okolina je sam skup $X$. Stoga je valjanost formula na raspršenim prostorima očuvana na pravilo generalizacije.

Koristeći se lemom 3.1.7 te ekvivalencijama iz propozicijske logike preformulirajmo shemu $K'$ na sljedeći način: $\Diamond G \to (\neg\Diamond F \to \Diamond(G \wedge \neg F))$. Pretpostavimo $w \Vdash \Diamond G$ i $w \Vdash \neg\Diamond F$. Iz definicije istinitosti i činjenice da je u točki $w$ istinita formula $\neg\Diamond F$, slijedi da postoji neka okolina $O$ točke $w$ takva da u je svim njenim točkama, osim možda u točki $w$, istinita formula $\neg F$. Iz činjenice da je u točki $w$ istinita formula $\Diamond G$ slijedi da u okolini $O$ postoji neka točka $x$ različita od točke $w$, u kojoj je istinita formula $G$. Točka $x$ je različita od točke $w$ pa slijedi $w \Vdash \Diamond(G \wedge \neg F)$. Stoga je svaka instanca sheme $K'$ istinita u točki $w$.

Koristeći se lemom 3.1.7 te ekvivalencijama iz propozicijske logike preformulirajmo shemu $L'$ na sljedeći način: $\Diamond F \to \Diamond(\neg\Diamond F \wedge F)$. Pretpostavimo da vrijedi

$w \Vdash \Diamond F$. Tada svaka okolina točke $w$ sadrži neku drugu točku u kojoj je istinita formula $F$. Uzmimo jednu proizvoljnu okolinu $O$. Označimo s $[F]$ skup točaka skupa $O$ u kojima je istinita formula $F$. Kako je prostor $X$ raspršen, slijedi da postoji otvoren skup $U$ koji sadrži točno jednu točku $x$ skupa $[F]$. Tada okolina $O \cap U$ točke $x$ ne sadrži niti jednu drugu točku u kojoj je istinita formula $F$. Stoga vrijedi $x \Vdash F \wedge \neg\Diamond F$. Okolina $O$ točke $w$ je bila proizvoljna pa slijedi $w \Vdash \Diamond(\neg\Diamond F \wedge F)$. Stoga je svaka instanca sheme $L'$ istinita u točki $w$. □

Sljedeću propoziciju smo već najavili. U njoj ilustriramo važnost d-preslikavanja za topološku interpretaciju sustava **GLP**.

**Propozicija 3.1.9.** *Neka je $f : X \to X'$ surjektivno* d*-preslikavanje između raspršenih prostora $(X, \mathcal{T})$ i $(X', \mathcal{T}')$. Neka je $F$ proizvoljna formula.*

1. *Neka su $\mathcal{M} = (X, V)$ i $\mathcal{M}' = (X', V')$ neki modeli, te za sve točke $w \in X$ i sve propozicijske varijable $p$ vrijedi: $wVp$ ako i samo $f(w)V'p$. Tada za svaku formulu $G$ vrijedi:*

$$\mathcal{M}, w \Vdash G \text{ ako i samo ako } \mathcal{M}', f(w) \Vdash G.$$

2. *Ako vrijedi $X \vDash F$, onda vrijedi $X' \vDash F$.*

*Dokaz.* Dokažimo prvu tvrdnju. Indukcijom po složenosti formule dokazujemo da za svaku formulu $G$ vrijedi:

$$\mathcal{M}, w \Vdash G \text{ ako i samo ako } \mathcal{M}', f(w) \Vdash G.$$

Baza indukcije slijedi izravno iz definicije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve formule složenosti (strogo) manje od $k \in \omega$. Neka je formula $G$ složenosti jednake $k$. Ako formula $G$ ima oblik $H \to J$, koristimo semantiku kondicionala te pretpostavku indukcije za formule $H$ i $J$. Pogledajmo detaljnije slučaj kad je formula $G$ oblika $\Box H$.

Neka vrijedi $\mathcal{M}, w \Vdash G$. Tada postoji okolina $O$ točke $w$ takva da je u svakoj njenoj točki, osim možda u točki $w$, istinita formula $H$. Kako je $f$ otvorena funkcija, slijedi da je skup $f(O)$ otvoren u prostoru $X'$. Po pretpostavci indukcije, u svim točkama iz skupa $f(O)$, osim možda točke $f(w)$, je istinita formula $H$. No tada je u točki $f(w)$ istinita formula $\Box H$.

Neka vrijedi $\mathcal{M}', f(w) \Vdash G$. Tada postoji okolina $O'$ točke $f(w)$ takva da je u svakoj njenoj točki, osim možda u točki $f(w)$, istinita formula $H$. Kako je $f$ neprekidna funkcija, slijedi da je skup $f^{-1}(O)$ otvoren u prostoru $X$. Kako je funkcija $f$ diskretna po točkama, slijedi da skup $f^{-1}(\{f(w)\})$ generira diskretan potprostor domene. Iz toga slijedi da za bilo koji original točke $f(w)$ postoji okolina koja izolira samo taj original. Označimo s $I$ onu okolinu koja izolira točku $w$. Definiramo i okolinu $P$ kao presjek otvorenih skupova $I$ i $f^{-1}(O)$. Po pretpostavci indukcije, u svim točkama skupa $P$, osim možda točke $w$, je istinita formula $H$. No tada je u točki $f(w)$ istinita formula $\Box H$.

Dokažimo sada drugu tvrdnju. Pretpostavimo da je $F$ formula te vrijedi $X \vDash F$. Neka je $\mathcal{M}' = (X', V')$ proizvoljan model nad $X'$. Treba dokazati da vrijedi $\mathcal{M}' \vDash F$.

Konstruiramo model $\mathcal{M} = (X, V)$ gdje relaciju $V$ definiramo na sljedeći način: $wVp$ ako i samo $f(w)V'p$. Prema prvoj tvrdnji propozicije: za svaku formulu $G$ vrijedi $\mathcal{M}, w \Vdash G$ ako i samo ako vrijedi $\mathcal{M}', f(w) \Vdash G$. Kako vrijedi $\mathcal{M} \vDash F$, za svaku točku $w$ modela $\mathcal{M}$ vrijedi $\mathcal{M}, w \Vdash F$. Iz činjenice da je funkcija $f$ surjekcija, za svaku točku $w'$ modela $\mathcal{M}'$ vrijedi $\mathcal{M}', w' \Vdash F$. Stoga vrijedi $\mathcal{M}' \vDash F$. Model $\mathcal{M}'$ je bio proizvoljan model nad prostorom $X'$ pa slijedi $X' \vDash F$.

□

## 3.2 Modeli bazirani na politopološkim prostorima

U ovom dijelu rada povezujemo dosadašnje rezultate s nekoliko novih konstrukcija. Radi se o stablastim **J**-okvirima te $\mathbf{J}_n$-morfizmima. Za to će nam biti potreban još jedan sustav modalne logike, sustav **J**. To je fragment sustava **GLP** koji ima zadovoljavajuću relacijsku semantiku (sustav **J** je adekvatan i potpun u odnosu na klasu tzv. stablastih **J**-okvira). Zatim, postoji prirodno preslikavanje između modalnih formula koje svakom teoremu sustava **GLP** pridružuje teorem sustava **J**, a svakoj formuli koja je **GLP**-nedokaziva pridružuje formulu koja je **J**-nedokaziva. Konačno, $\mathbf{J}_n$-morfizam je preslikavanje koje čuva valjanost (u smislu spomenutog preslikavanja formula) između **GLP**-prostora i stablastih **J**-okvira. Dakle, $\mathbf{J}_n$-morfizam ima sličnu ulogu kao d-preslikavanje, no između drugačijih struktura.

Dokažimo za početak adekvatnost **GLP**-prostora za sustav **GLP**. Koristimo prethodno dokazan teorem adekvatnosti za sustav **GL** (teorem 3.1.8) u dokazu adekvatnosti topološke semantike za sustav **GLP**.

**Teorem 3.2.1.** *Svaki je teorem sustava* **GLP** *valjan na svakom* **GLP***-prostoru.*

*Dokaz.* U dokazu adekvatnosti topološke semantike za sustav **GL** vidljivo je da su tautologije propozicijske logike te sve instance shema $K'$ i $L'$ valjane na raspršenim prostorima. Iz istog razloga je valjanost očuvana na pravila izvoda modus ponens i pravilo generalizacije.

Zbog raspršenosti prostora $(X, \mathcal{T}_n)$ za svaki $n \in \omega$, slijedi i da će instance polimodalnih inačica tih shema ($K$ i $L$) biti valjane na **GLP**-prostorima, a valjanost je očuvana na pravilo generalizacije i pravilo izvoda modus ponens. Ostaje provjeriti sheme *P1* i *P2*. Neka je dan **GLP**-prostor $(X; \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \dots)$, te $n, m \in \omega$, $n > m$.

**Shema *P1***. Pretpostavimo da je u točki $x \in X$ istinita formula $[m]F$. U nekoj $\mathcal{T}_m$-okolini $O$ točke $x$ u svim točkama $y \in O \setminus \{x\}$ je istinita formula $F$. Kako topologija $\mathcal{T}_n$ sadrži topologiju $\mathcal{T}_m$, onda je skup $O$ također i $\mathcal{T}_n$-otvoren skup. Skup $O$ je jedna $\mathcal{T}_n$-okolina te je u svakoj točki $y \in O \setminus \{x\}$ istinita formula $F$. Zbog toga po definiciji istinitosti slijedi da je u točki $x$ istinita formula $[n]F$.

**Shema *P2***. Pretpostavimo da je u točki $x \in X$ istinita formula $\langle m \rangle F$. Tada je u svakoj $\mathcal{T}_m$-okolini $O$ točke $x$ moguće pronaći neku točku $y$ u kojoj je istinito $F$. Označimo s $[F]$ skup svih točaka prostora u kojima je istinita formula $F$. Skup $\mathrm{d}_m[F]$ sadrži točku $x$ zbog činjenice da je u točki $x$ istinita formula $\langle n \rangle F$. Zbog toga što se radi o **GLP**-prostoru, skup $\mathrm{d}_m[F]$ je $\mathcal{T}_n$-otvoren. Po definiciji operatora $\mathrm{d}_n$, u svakoj $\mathcal{T}_m$-okolini svake točke iz skupa $\mathrm{d}_m[F]$ možemo pronaći neku točku u kojoj vrijedi $F$. Pronašli smo $\mathcal{T}_n$-okolinu točke $x$ takvu da u svim $\mathcal{T}_m$-okolinama svih njenih točaka postoji neka točka u kojoj vrijedi $F$.

$\square$

Kao što je najavljeno, potreban nam je sustav modalne logike **J**. Radi se o fragmentu sustava **GLP** (za dokaz činjenice da se radi o fragmentu vidi npr. [2]), koji za razliku od sustava **GLP** ima zadovoljavajuću relacijsku semantiku.

**Definicija 3.2.2.** *Sustav* **J** *je najmanji skup formula sa sljedećim svojstvima:*

- *sadrži sve tautologije propozicijske logike.*
- *za formule $F$ i $G$ te $n \in \omega$ vrijedi $[n](F \to G) \to ([n]F \to [n]G) \in$* **J**; *(shema aksioma K)*
- *za formulu $F$ te $n \in \omega$, vrijedi $[n]([n]F \to F) \to [n]F \in$* **J**; *(shema aksioma L)*
- *za formulu $F$ te $n, m \in \omega$, $n > m$, vrijedi $[m]F \to [n][m]F \in$* **J**; *(shema aksioma P1-a)*
- *za formulu $F$ te $n, m \in \omega$, $n > m$, vrijedi $[m]F \to [m][n]F \in$* **J**; *(shema aksioma P1-b)*
- *za formulu $F$ te $n \in \omega$, vrijedi $\langle m \rangle F \to [n]\langle m \rangle F \in$* **J**; *(shema aksioma P2)*
- *za formule $F, F \to G \in$* **J**, *vrijedi $G \in$* **J**; *(zatvorenje pravilom modus ponens)*
- *za formulu $F \in$* **J** *te $n \in \omega$, vrijedi $[n]F \in$* **J**. *(zatvorenje pravilom generalizacije)*

Umjesto sheme aksioma *P1* iz sustava **GLP**, sustav **J** uvodi dvije sheme aksioma, *P1-a* i *P1-b*. U idućoj je propoziciji dana jedna klasa adekvatnih okvira za sustav **J**.

U kasnijim dokazima će nam trebati jedna njena podklasa, tzv. stablasti **J**-okviri. No tu je klasu teže opisati (iako su sami okviri jednostavniji), pa dokaz adekvatnosti provodimo za općenitiju klasu adekvatnih okvira. Adekvatnost stablastih **J**-okvira će biti jednostavna posljedica.

**Propozicija 3.2.3.** *Neka je $\mathcal{F} = (W, (R_n)_{n\in\omega})$ okvir sa sljedećim svojstvima:*

- *relacija $R_n$ je tranzitivna, dobro fundirana i inverzno dobro fundirana relacija, za svaki $n \in \omega$;*
- *za sve $m, n \in \omega$, $m < n$, te sve točke $x, y, z \in W$ takve da vrijedi $xR_ny$, vrijedi $xR_mz$ ako i samo ako vrijedi $yR_mz$;*
- *za sve $m, n \in \omega$, $m < n$, te sve točke $x, y, z \in W$ takve da vrijedi $xR_my$ i $yR_nz$, vrijedi $xR_mz$.*

*Tada je svaki teorem sustava* **J** *valjan na okviru $\mathcal{F}$.*

*Dokaz.* Neka je $\mathcal{M}$ proizvoljan model nad $\mathcal{F}$, te $w$ proizvoljna točka iz modela $\mathcal{M}$.

Dokažimo da su svi teoremi sustava **J** istiniti u točki $w$. Dio definicije istinitosti koji se odnosi na logičke veznike jednak je definiciji istinitosti u propozicijskoj logici. Stoga su tautologije propozicijske logike istinite u točki $w$.

Ako su formule $F$ te $F \to G$ istinite u točki $w$, prema definiciji istinitosti slijedi $w \Vdash F$ i jedno od sljedećeg: $w \nVdash F$ ili $w \Vdash G$.

Preostaje samo druga mogućnost pa je valjanost očuvana na pravilo izvoda modus ponens.

Neka je proizvoljno odabrana formula $F$ valjana. Tada su iz svake točke svakog modela $n$-dostižive samo točke u kojima je istinita formula $F$, za svaki $n \in \omega$. Stoga je u svim točkama istinita formula $[n]F$. Stoga je valjanost formula očuvana na pravilo generalizacije.

Neka su formule $F$ i $G$ proizvoljne. Pretpostavimo da su u točki $w$ istinite formule $[n](F \to G)$ te $[n]F$. U proizvoljnoj točki $u$ takvoj da vrijedi $wR_nu$ je tada, prema definiciji istinitosti, istinita formula $F \to G$ i $F$. No tada je u točki $u$ istinita formula $G$. Zbog proizvoljnosti odabira točke $u$ je tada u točki $w$ istinita formula $[n]G$. Stoga je u točki $w$ istinita svaka instanca sheme $K$.

Prema propoziciji 1.1.4 u točki $w$ je istinita i svaka instanca sheme $L$.

Prema propoziciji 1.1.6 u točki $w$ je istinita i svaka instanca sheme *P2*.

Preostaje dokazati istinitost instanca shema *P1-a* te *P1-b*.

Neka je $m$ proizvoljan prirodan broj manji od $n$. Neka za formulu $F$ vrijedi da je u točki $w$ istinita formula $[m]F$.

Dokažimo da je u točki $w$ istinita formula $[n][m]F$. Neka je $u$ proizvoljna točka koja je $R_n$-dostiživa iz točke $w$. Neka je $v$ proizvoljna točka koja je $R_m$-dostiživa iz točke $u$. Iz svojstava okvira tada slijedi $wR_mv$. Kako je u točki $w$ istinita formula $[m]F$, u točki $v$ je istinita formula $F$.

Dokažimo da je u točki $w$ istinita formula $[m][n]F$. Neka je $u$ proizvoljna točka koja je $R_m$-dostiživa iz točke $w$. Neka je $v$ proizvoljna točka koja je $R_n$-dostiživa iz točke $u$. Iz svojstava okvira tada slijedi $wR_mv$. Kako je u točki $w$ istinita formula $[m]F$, u točki $v$ je istinita formula $F$.

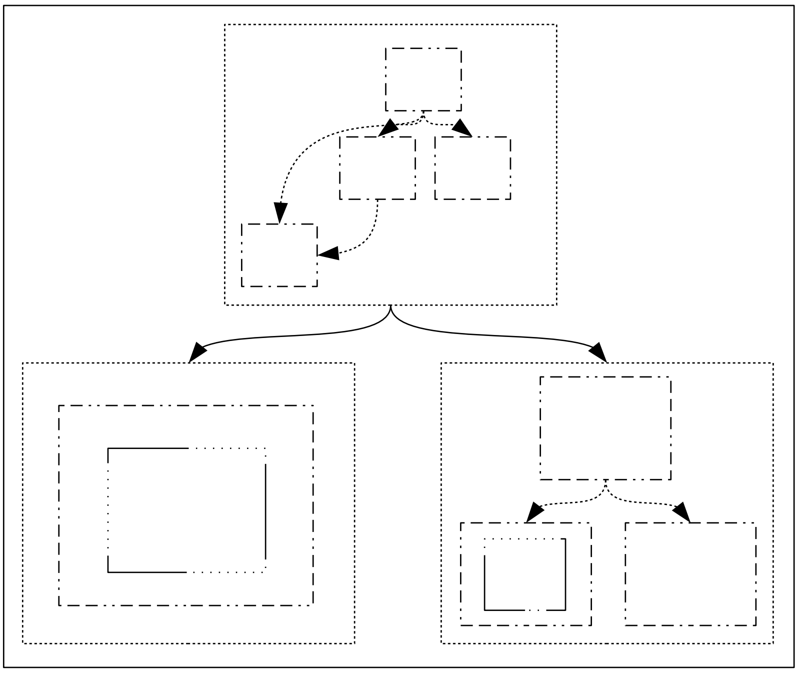
$\square$

Primijetimo da uvjeti iz prethodne propozicije impliciraju sljedeći uvjet:

$$wR_iu,\ uR_jv \Rightarrow wR_{\min\{i,j\}}v, \tag{$\star$}$$

za sve točke $w, u, v \in W$ te $i, j \in \omega$.

Prije nego definiramo što je stablasti **J**-okvir, opišimo kako takav okvir izgleda.



Slika 3.1: Na slici je jedan stablasti **J**-okvir, kod kojeg su prve četiri relacije neprazne. Punom su crtom nacrtane 0-plohe (u ovom primjeru je samo jedna 0-ploha) te veze relacije $R_0$. Točkastom su crtom nacrtane 1-plohe i veze relacije $R_1$. Sve 2-plohe i 3-plohe također imaju zaseban stil crte. Interpretacija veza relacija $R_i$, za $0 \leq i \leq 3$, je sljedeća. Ako postoji veza iz $(i+1)$-plohe $P$ u $(i+1)$-plohu $Q$, onda za sve točke iz $(i+1)$-plohe $P$ vrijedi da im je $R_i$-dostiživa svaka točka iz $(i+1)$-plohe $Q$.

Jednostavan stablasti **J**-okvir možemo izgraditi kroz sljedeći iterativni postupak. Odabiremo proizvoljan skup točaka. Na početku je samo jedna "ploha posljednje razine", i to je skup svih točaka. U svakoj iteraciji radimo sljedeće za svaku plohu posljednje razine. Napravimo proizvoljnu particiju $P$ svih točaka unutar trenutne plohe. Međusobno povežemo klase particije $P$ u proizvoljno (tranzitivno) stablo. Svaka klasa particije $P$ je u idućoj iteraciji ploha posljednje razine. Svaki put kad smo povezali klase particije $P$ u (tranzitivno) stablo, dodali smo $R_i$-veze iz svih točaka klase-pretka u svaku točku klase-potomka u stablu, gdje je $i \in \omega$ redni broj iteracije (počevši od nule).

**Definicija 3.2.4** (Stablasti **J**-okvir, nasljedni $k$-korijen, neusmjereni $(n,k)$-put)**.** *Neka je $(W, (R_n)_{n\in\omega})$ proizvoljan okvir.*

*S $R_n^*$ označimo relaciju $\bigcup_{n'\geq n} R_{n'}$. S $E_n$ označimo refleksivno, simetrično i trazitivno zatvorenje relacije $R_n^*$. Za $n \in \omega$, svaku klasu ekvivalencije relacije $E_n$ nazivamo $n$-plohom.*

*Nad $(n+1)$-plohama definiramo relaciju uređaja na sljedeći način:*

$$P < Q \text{ ako i samo ako postoje točke } p \in P \text{ te } q \in Q \text{ takve da vrijedi } pR_nq.$$

*Stablasti **J**-okvir je okvir $(W, (R_n)_{n\in\omega})$ koji ispunjava sljedeća svojstva:*

1. *relacija $R_n$ je tranzitivna, dobro fundirana i inverzno dobro fundirana relacija, za svaki $n \in \omega$;*

2. *za sve $m, n \in \omega$, $m < n$, te sve točke $x, y, z \in W$ takve da vrijedi $xR_ny$, vrijedi $xR_mz$ ako i samo ako vrijedi $yR_mz$;*

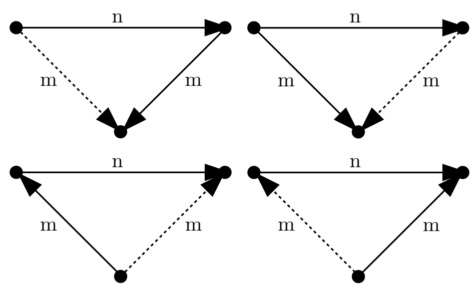
3. *za sve $m, n \in \omega$, $m < n$, te sve točke $x, y, z \in W$ takve da vrijedi $xR_my$ i $yR_nz$, vrijedi $xR_mz$;*

4. *za sve $n \in \omega$, skup $(n+1)$-ploha koje su podskupi pojedine $n$-plohe čini tranzitivno stablo s obzirom na relaciju uređaja između ploha;*

5. *za sve $n \in \omega$, za svake dvije $(n+1)$-plohe $P$ i $Q$ za koje vrijedi $P < Q$, za sve točke iz skupa $Q$ vrijedi da su $R_n$-dostižive iz svih točaka iz skupa $P$.*

*Za točku $w \in W$ danog stablastog **J**-okvira $(W, (R_n)_{n\in\omega})$ kažemo da je nasljedni $k$-korijen ako $w$ nije $R_j$-dostiživa niti iz jedne točke, ni za koji $j \in \omega$, $j \geq k$.*

*Za svaki pozitivan $k \in \omega$, za vektor $v = (v_1, ..., v_k)$ iz $W^k$ kažemo da je neusmjeren $(n,k)$-put između točaka $v_1$ i $v_k$ ako za sve $i \in \omega$, $1 \leq i < k$, vrijedi: $v_iR_n^*v_{i+1}$ ili $v_{i+1}R_n^*v_i$.*




Slika 3.2: Drugi i treći uvjet iz definicije stablastog **J**-okvira. Na sve četiri slike vrijedi $m, n \in \omega$ te $m < n$. Ako vrijede pune veze, vrijede i točkaste veze. Posljednja slika predstavlja uvjet koji nije eksplicitno naveden u definiciji, ali slijedi iz preostalih uvjeta.

Primijetimo da točke $x$ i $y$ pripadaju istoj $n$-plohi ako i samo ako između njih postoji neusmjereni $(n, k)$-put, za neki $k \in \omega$, $k > 0$.

**Teorem 3.2.5.** *Formula je teorem sustava* **J** *ako i samo ako je valjana na klasi stablastih* **J***-okvira.*

Adekvatnost slijedi iz propozicije 3.2.3. Dokaz potpunosti se može pogledati u [2].

Ranije smo spomenuli da postoji prirodno preslikavanje između formula sustava **GLP** i **J**. Opišimo detaljnije kako to preslikavanje izgleda. Neka je $F$ formula. Označimo $n = \max\{i \in \omega \mid [i]G \text{ je potformula formule } F, \text{ gdje je } G \text{ neka formula}\}$. Uvedimo sljedeće oznake:

$$M(F) = \bigwedge_{[i]G \text{ je potformula formule } F} \bigwedge_{k=i}^{n} ([i]G \to [k]G),$$

$$M^{+}(F) = M(F) \wedge \bigwedge_{k \leq n} [k]M(F).$$

O operatoru $M^{+}$ možemo razmišljati kao o “konačnoj aproksimaciji” sheme aksioma *P1* iz definicije 1.1.3 u sustavu **J**. U članku [2] dokazuje se sljedeći teorem:

**Teorem 3.2.6.** *Proizvoljna formula $F$ je dokaziva u sustavu* **GLP** *ako i samo ako je formula $M^{+}(F) \to F$ dokaziva u sustavu* **J**.

U nastavku ćemo ponekad raditi sa skupovima formula koji sadrže samo konačno mnogo modalnih operatora.

**Definicija 3.2.7.** *Sustavi* $\mathbf{GLP}_n$ *i* $\mathbf{J}_n$ *su skupovi formula dobiveni iz sustava* $\mathbf{GLP}$ *(vidi definiciju 1.1.3) i* $\mathbf{J}$ *(vidi definiciju 3.2.2), odabirom samo formula u kojima se od modalnih operatora ne javljaju operatori* $[m]$ *(ni* $\langle m\rangle$*) za* $m \in \omega$, $m > n$.

Pod pojmom stablastog $\mathbf{J}_n$-okvira podrazumijevamo stablasti $\mathbf{J}$-okvir $(W, (R_n)_{n\in\omega})$ u kojem vrijedi $R_m = \emptyset$ za sve $m \in \omega$, $m > n$. Dokažimo neka korisna svojstva.

**Lema 3.2.8.** *Neka je* $\mathcal{F} = (W, (R_n)_{n\in\omega})$ *stablasti* $\mathbf{J}_r$*-okvir za neki* $r \in \omega$. *Neka je* $n \in \omega$, $n \leq r$, *proizvoljan. Neka je* $w$ *proizvoljna točka okvira* $\mathcal{F}$.

1. *Neka je* $u$ *proizvoljna točka okvira* $\mathcal{F}$. *Ako su točke* $w$ *i* $u$ *u istoj* $n$*-plohi, onda nisu* $R_m$*-usporedive ni za koji* $m \in \omega$, $m < n$.

2. *Za sve* $k \in \omega$, $k \leq n$, *postoji nasljedni* $(k+1)$*-korijen* $u$, *takav da vrijedi* $u = w$ *ili* $uR_k^* w$.

*Dokaz.* Dokažimo prvo pomoćnu tvrdnju: ako su točke $w$ i $u$ u istoj $n$-plohi te su $R_m$-usporedive za neki $m \in \omega$, $m < n$, onda postoji točka $x$ koja je i $R_n^*$-usporediva i $R_m$-usporediva s točkom $u$. Točke $w$ i $u$ pripadaju istoj $n$-plohi pa između njih postoji neusmjereni $(n,k)$-put, za neki $k \in \omega$. Proizvoljno fiksiramo $k \in \omega$ te vektor $v \in W^k$ takve da je $v$ jedan neusmjereni $(n,k)$-put između točaka $w$ i $u$. Pretpostavimo bez smanjenja općenitosti da vrijedi $v_1 R_m v_k$ (drugi slučaj ima sasvim analogan dokaz). Dokažimo da su tada i točke $v_2$ i $v_k$ međusobno $R_m$-usporedive. Promotrimo slučaj $v_1 R_n^* v_2$ (slučaj $v_2 R_n^* v_1$ ima sasvim analogan dokaz). Očito tada za neki $p \in \omega$, $p \geq n$, vrijedi $v_1 R_p v_2$. Kako se radi o točkama stablastog $\mathbf{J}_r$-okvira te vrijedi $m < p$, slijedi $v_2 R_m v_k$. Primjenom istog argumenta na točke $v_3, ..., v_{k-1}$, slijedi $v_{k-1} R_m v_k$. Očito su točke $v_{k-1}$ te $v_k = u$ i $R_n^*$-usporedive i $R_m$-usporedive.

Prema upravo dokazanoj pomoćnoj tvrdnji slijedi da postoji točka $x$ koja je i $R_n^*$-usporediva i $R_m$-usporediva s točkom $u$. Pretpostavimo da vrijedi $xR_n^* u$ (dokaz za slučaj $uR_n^* x$ je sasvim analogan). Očito tada za neki $p \in \omega$, $p \geq n$, vrijedi $xR_p u$. Tada prema svojstvima okvira vrijedi $xR_m u$ ako i samo ako vrijedi $uR_m u$. Kako je okvir $\mathcal{F}$ dobro fundiran, ujedno je i irefleksivan, pa ne vrijedi $uR_m u$. No tada ne vrijedi $xR_m u$. Zatim, iz činjenice da vrijedi $xR_p u$ slijedi da $xR_m x$ vrijedi ako i samo ako vrijedi $uR_m x$. Ponovno koristimo irefleksivnost, pa slijedi da ne vrijedi $uR_m x$. Time smo dokazali da ne vrijedi niti $xR_m u$ niti $uR_m x$, pa točke $u$ i $x$ nisu $R_m$-usporedive.

Dokažimo sada drugu tvrdnju. Pretpostavimo da točka $w$ nije nasljedni $(k+1)$-korijen. To znači da postoji točka $u$ takva da za neki $j \in \omega$, $j \geq k+1$, vrijedi $uR_j w$. Pretpostavimo da smo točku $u$ odabrali tako da je $j \in \omega$ minimalan. Označimo $(j+1)$-plohu kojoj pripada točka $w$ s $P$. Prema svojstvima $\mathbf{J}_r$-okvira, postoji $(j+1)$-ploha $K$ koja je korijen stabla nekih $(j+1)$-ploha među kojima se nalazi i $(j+1)$-ploha $P$. Kako ploha $P$ nije korijen tog stabla (ploha $P$ ima bar jednog pretka, $(j+1)$-plohu kojoj pripada točka $u$), slijedi da su $P$ i $K$ različite $(j+1)$-plohe. Stoga za točku $w$ vrijedi da je $R_j$-dostiživa iz svih točaka $(j+1)$-plohe $K$. Prema svojstvima $\mathbf{J}_r$-okvira, u $(j+1)$-plohi $K$ postoji korijenska $(j+2)$ ploha $K_2$. Slično, u $(j+2)$-plohi $K_2$ postoji korijenska $(j+3)$ ploha $K_3$. Možemo nastaviti odabir ploha $K_4, \ldots, K_{r+1-j}$. Kako vrijedi $R_{r+1} = \emptyset$, ploha $K_{r+1-j}$ sadrži samo neku točku $v$. Prema definiciji skupova $K, K_2, \ldots, K_{r+1-j}$ slijedi da je točka $v$ jedan nasljedni $j$-korijen. Dokažimo da je ovako definirana točka $v$ također i nasljedni $(k+1)$-korijen. Pretpostavimo da nije, te označimo minimalan $l \in \omega$, $k \leq l < j$, takav da postoji točka $x \in W$ takva da vrijedi $xR_lv$. Prema svojstvu $(\star)$ sa stranice 49, slijedi $xR_lw$. No zbog $l < j$, to je u kontradikciji s definicijom točke $v$. Dakle, točka $v$ je nasljedni $(k+1)$-korijen.

□

Pod pojmom $\mathbf{GLP}_n$-prostora podrazumijevamo $\mathbf{GLP}$-prostor $(X; \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \ldots)$ u kojem je topologija $\mathcal{T}_m$ diskretna za sve $m \in \omega$, $m > n$.

Sada definiramo još jedan tip preslikavanja koji čuva valjanost. Prisjetimo se da ograničeni morfizmi čuvaju valjanost između relacijskih okvira, a d-preslikavanje čuva valjanost između topoloških prostora. Preslikavanje koje sada definiramo je $\mathbf{J}_n$-morfizam, te čuva valjanost između topoloških prostora i relacijskih okvira.

**Definicija 3.2.9.** *Neka je dan stablasti $\mathbf{J}_n$-okvir $\mathcal{F} = (X, (R_n)_{n\in\omega})$. Pod oznakom $X$ podrazumijevamo i politopološki prostor $(X; \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \ldots)$ gdje je topologija $\mathcal{T}_i$ generirana sljedećom bazom:*[2]

$$B_i = \{R_i(w) \cup \{w\} \mid w \in X\},$$

*za sve $i \in \omega$. Neka je dan $\mathbf{GLP}_n$-prostor $(X'; \mathcal{T}'_0, \mathcal{T}'_1, \ldots)$.*

*Za preslikavanje $f : X' \to X$ kažemo da je $\mathbf{J}_n$-morfizam ako vrijedi:*

$(j_1)$ *funkcija $f$ je* d*-preslikavanje u odnosu na topologije $\mathcal{T}'_n$ i $\mathcal{T}_n$;*

$(j_2)$ *funkcija $f$ je otvoreno preslikavanje u odnosu na topologije $\mathcal{T}'_k$ i $\mathcal{T}_k$ za sve $k \in \omega$, $k < n$;*

$(j_3)$ *za sve $k \in \omega$, $k < n$, i nasljedni $(k+1)$-korijen $w \in X$, skupovi $f^{-1}(R^*_k(w))$ i $f^{-1}(R^*_k(w) \cup \{w\})$ su $\mathcal{T}'_k$-otvoreni;*

$(j_4)$ *za sve $k \in \omega$, $k < n$ i nasljedni $(k+1)$-korijen $w \in X$, skup $f^{-1}(\{w\})$ generira diskretan potprostor prostora $(X', \mathcal{T}'_k)$.*

[2] Prema primjeru 2.1.9 familija $B_i$ je doista baza za neku topologiju $\mathcal{T}_i$, za koju vrijedi da je $(X, \mathcal{T}_i)$ raspršen topološki prostor.

Primijetimo da su uvjeti $(j_2)$ - $(j_4)$ vrlo nalik uvjetima za d-preslikavanje; razlika je u tome što se neprekidnost ne zahtijeva za sve otvorene skupove, a diskretnost po točkama se ne zahtijeva za sve točke kodomene.

Sada dokazujemo dvije leme potrebne u nastavku.

**Lema 3.2.10.** *Neka je dan stablasti $\mathbf{J}_n$-okvir $\mathcal{F} = (X, (R_n)_{n\in\omega})$, te $\mathbf{GLP}_n$-prostori $(X'; \mathcal{T}'_0, \mathcal{T}'_1, \dots)$ i $(X''; \mathcal{T}''_0, \mathcal{T}''_1, \dots)$, za neki $n \in \omega$. Neka za preslikavanje $g : X'' \to X'$ vrijedi da je* d*-preslikavanje u odnosu na topologije $\mathcal{T}''_k$ i $\mathcal{T}'_k$ za sve $k \in \omega$, $k \leq n$. Neka je $f : X' \to X$ jedan $\mathbf{J}_n$-morfizam. Tada je preslikavanje $f \circ g$ također $\mathbf{J}_n$-morfizam.*

*Dokaz.* Uvjet $(j_1)$ je zadovoljen iz definicije $\mathbf{J}_n$-morfizma i korolara 2.2.11.

Neka vrijedi $k < n$. Preslikavanje $g : X'' \to X'$ je otvoreno u odnosu na topologije $\mathcal{T}''_k$ i $\mathcal{T}'_k$, jer je to, po pretpostavci leme, d-preslikavanje. Neka je $O$ jedan $\mathcal{T}''_k$-otvoren skup prostora $X''$. Tada je $g(O)$ jedan $\mathcal{T}'_k$-otvoren skup prostora $X'$. Prema $(j_2)$, skup $f(g(O))$ je jedan $\mathcal{T}_k$-otvoren skup prostora $X$.

Pretpostavimo da je za neki $k \in \omega$, $k < n$, točka $w \in X$ nasljedni $(k+1)$-korijen. Iz činjenice da je $f$ preslikavanje koje je $\mathbf{J}_n$-morfizam slijedi da skupovi $f^{-1}(R^*_k(w))$ i $f^{-1}(R^*_k(w) \cup \{w\})$ pripadaju topologiji $\mathcal{T}'_k$. Kako za preslikavanje $g$ vrijedi da je neprekidno, slijedi i da skupovi $g^{-1}(f^{-1}(R^*_k(w)))$ i $g^{-1}(f^{-1}(R^*_k(w) \cup \{w\}))$ pripadaju topologiji $\mathcal{T}''$. Vrijedi da je $g$ preslikavanje koje je neprekidno i diskretno po točkama, te $f^{-1}(\{w\})$ generira diskretan potprostor prostora $X'$. Stoga prema prvoj tvrdnji korolara 2.2.11 skup $(f \circ g)^{-1}(\{w\})$ generira diskretan potprostor prostora $X''$. $\square$

**Lema 3.2.11.** *Uvjeti $(j_3)$ i $(j_4)$ iz definicije $\mathbf{J}_n$-morfizma (tj. definicije 3.2.9) ekvivaletni su sljedećoj tvrdnji: za svaki nasljedni $(k+1)$-korijen $w$ imamo*

$$f^{-1}(R^*_k(w) \cup \{w\}) \subseteq \widetilde{\mathrm{d}}_k f^{-1}(R^*_k(w)). \qquad (\triangle)$$

*Dokaz.* Pretpostavimo da je $w$ nasljedni $(k+1)$-korijen.

Pretpostavimo da vrijedi $(\triangle)$. Dokažimo prvo da je skup $f^{-1}(R^*_k(w))$ moguće zapisati kao uniju otvorenih skupova (te je stoga i taj skup otvoren). Neka vrijedi $x \in f^{-1}(R^*_k(w))$. Tada vrijedi $x \in f^{-1}(R^*_k(w) \cup \{w\})$. Tada prema $(\triangle)$ vrijedi $x \in \widetilde{\mathrm{d}}_k f^{-1}(R^*_k(w))$. Tada prema trećoj tvrdnji leme 2.1.8 postoji probušena okolina $P_x$ točke $x$ koja je sadržana u skupu $f^{-1}(R^*_k(w))$. Označimo $O_x = P_x \cup \{x\}$. Kako je $P_x$ probušena okolina točke $x$, slijedi da je $O_x$ okolina točke $x$. Tada vrijedi $O_x \subseteq f^{-1}(R^*_k(w))$. Slijedi $f^{-1}(R^*_k(w)) = \bigcup_{x\in f^{-1}(R^*_k(w))} O_x$. Dokažimo sada da je skup $f^{-1}(R^*_k(w) \cup \{w\})$ moguće zapisati kao uniju otvorenih skupova. Slično kao ranije, za $x \in f^{-1}(R^*_k(w) \cup \{w\})$ možemo pronaći probušenu okolinu $P_x$ točke $x$ sadržanu u skupu $f^{-1}(R^*_k(w))$. Tada je probušena okolina $P_x$ sadržana i u skupu $f^{-1}(R^*_k(w) \cup \{w\})$. Označimo $O_x = P_x \cup \{x\}$. Tada vrijedi $O_x \subseteq f^{-1}(R^*_k(w) \cup \{w\})$. Slijedi $f^{-1}(R^*_k(w) \cup \{w\}) = \bigcup_{x\in f^{-1}(R^*_k(w)\cup\{w\})} O_x$.

Dokažimo da skup $f^{-1}(\{w\})$ generira diskretan potprostor prostora $X'$. Dovoljno je za svaku točku $t \in f^{-1}(\{w\})$ pronaći okolinu koja ima jednočlan presjek s $f^{-1}(\{w\})$. To je ekvivalentno pronalaženju probušene okoline točke $t$ koja je disjunktna s $f^{-1}(\{w\})$. Neka vrijedi $t \in f^{-1}(\{w\})$. Prema ($\triangle$) slijedi da skup $f^{-1}(R_k^*(w))$ sadrži probušenu okolinu $P_t$ točke $t$. Skupovi $f^{-1}(\{w\})$ i $f^{-1}(R_k^*(w))$ su disjunktni (stablasti $\mathbf{J}_n$-okviri su irefleksivni), pa su posebno disjunktni i skupovi $P_t$ te $f^{-1}(R_k^*(w))$.

Pretpostavimo sada da vrijede uvjeti $(j_3)$ i $(j_4)$. Neka vrijedi $x \in f^{-1}(R_k^*(w) \cup \{w\})$. Očito tada vrijedi $x \in f^{-1}(R_k^*(w))$ ili $x \in f^{-1}\{w\})$. Skupovi $f^{-1}(R_k^*(w) \cup \{w\})$ i $f^{-1}(R_k^*(w))$ su otvoreni prema $(j_3)$. Ako vrijedi $x \in f^{-1}(R_k^*(w))$, slijedi da je skup $f^{-1}(R_k^*(w)) \setminus \{x\}$ jedna probušena okolina točke $x$. Probušena okolina $f^{-1}(R_k^*(w)) \setminus \{x\}$ je podskup skupa $f^{-1}(R_k^*(w))$, pa tvrdnja slijedi. Ako vrijedi $x \in f^{-1}(\{w\})$, prema $(j_4)$ postoji okolina $O$ točke $x$ takva da vrijedi $O \cap f^{-1}(\{w\}) = \{x\}$. Označimo $U = O \cap f^{-1}(R_k^*(w) \cup \{w\})$. Označimo $P_x = U \setminus \{x\}$. Kako je $U$ očito okolina točke $x$ (jednaka je presjeku otvorenih skupova), skup $P_x$ je probušena okolina točke $x$. Dakle, u oba slučaja ($x \in f^{-1}(R_k^*(w))$ i $x \in f^{-1}(\{w\})$) vrijedi $x \in \widetilde{\mathrm{d}}_k f^{-1}(R_k^*(w))$. $\square$

U nastavku će nam u jednom trenutku zatrebati mogućnost promatranja proizvoljne točke stablastog $\mathbf{J}_n$-okvira kao jednog nasljednog 0-korijena. Preciznije, trebat ćemo podokvir u kojem je neka promatrana točka nasljedni 0-korijen. Pritom ćemo trebati sačuvati skup valjanih formula. To možemo postići uz pomoć tzv. generiranog podokvira.

U udžbeniku [12] moguće je pronaći odgovarajuću definiciju generiranog podokvira za sustave modalne logike s jednim modalnim operatorom. Sljedeća definicija je prirodno proširenje te konstrukcije.

**Definicija 3.2.12** (Generirani podokvir). *Neka su $(W, (R_n)_{n\in\omega})$ i $(W', (R'_n)_{n\in\omega})$ neki okviri. Kažemo da je okvir $W'$ generiran točkom $w$ okvira $W$ ako vrijedi:*

- $W' = \{w\} \cup R_0^*(w)$;
- $R'_i = R_i \cap (W' \times W')$ *za sve* $i \in \omega$.

Sada dokazujemo da prililom "izvlačenja" generiranog podokvira iz stablastog $\mathbf{J}$-okvira ne gubimo svojstvo stablastog $\mathbf{J}$-okvira u generiranom podokviru. Zatim, dokazujemo da se ne mijenja skup formula koje su istinite u korijenu generiranog podokvira.

**Lema 3.2.13** (O generiranom podokviru $\mathbf{J}_n$-okvira). *Neka je $(W, (R_n)_{n\in\omega})$ neki stablasti $\mathbf{J}_n$-okvir. Neka je okvir $(W', (R'_n)_{n\in\omega})$ generiran proizvoljnom točkom $w \in W$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

1. *Za sve $i \in \omega$ te sve točke $x \in W'$, vrijedi da su točke $w$ i $x$ u zajedničkoj $i$-plohi okvira $W$, ili su sve točke $i$-plohe kojoj pripada točka $x$ dostižive iz točke $w$.*

2. *Za sve $i \in \omega$ te sve točke $x \in W'$ vrijedi da su točke $w$ i $x$ u zajedničkoj $i$-plohi okvira $W'$ ako i samo ako su u zajedničkoj $i$-plohi okvira $W$.*

3. *Za sve $i \in \omega$ te sve točke $x, y \in W'$ vrijedi da su točke $x$ i $y$ u zajedničkoj $i$-plohi okvira $W'$ ako i samo ako su u zajedničkoj $i$-plohi okvira $W$.*

4. *Okvir $(W', (R'_n)_{n \in \omega})$ je stablasti $\mathbf{J}_n$-okvir.*

5. *Neka je $F$ proizvoljna formula neistinita u točki $w$ nekog modela $\mathcal{M}$ nad $W$. Označimo relaciju forsiranja modela $\mathcal{M}$ s $V$. Tada je formula $F$ neistinita u točki $w$ modela $\mathcal{M}' = (W', V')$, gdje je relacija forsiranja $V'$ restrikcija relacije forsiranja $V$ na okvir $W'$.*

*Dokaz.* Dokažimo prvu tvrdnju. Pretpostavimo da tvrdnja ne vrijedi za neki $i \in \omega$. Fiksirajmo najmanji takav $i \in \omega$ (vrijedi $i > 0$ jer sve točke pripadaju zajedničkoj 0-plohi). Točke $w$ i $x$ pripadaju nekim različitim $i$-plohama $P_{i,w}$ i $P_{i,x}$, te neka točka $u$ iz $i$-plohe $P_{i,x}$ nije dostiživa iz točke $w$. Odaberimo minimalan $m \in \omega$ takav da točke $w$ i $x$ nisu u istoj $m$-plohi (vrijedi $m > 0$). Označimo $m$-plohe kojima pripadaju točke $w$ i $x$ s $P_{m,w}$ i $P_{m,x}$. Kako skup svih $m$-ploha unutar pojedine $(m-1)$-plohe čini stablo, slijedi da vrijedi $wR_{m-1}x$ ili $xR_{m-1}w$. No ne vrijedi $xR_{m-1}w$ jer vrijedi $wR_0^*x$ (inače bi vrijedilo $wR_0^*w$, zbog svojstva $(\star)$ sa stranice 49, ali relacije $R_i$ su irefleksivne za sve $i \in \omega$). Dakle vrijedi $wR_{m-1}x$, pa stoga i $P_{m,w} < P_{m,x}$. No tada za sve točke $m$-plohe $P_{m,x}$ vrijedi da su $R_{m-1}$-dostižive iz $w$. Vrijedi $P_{i,x} \subseteq P_{m,x}$. No, tada ne postoji točka $u$ iz $i$-plohe $P_{i,x}$ koja nije dostiživa iz točke $w$.

Dokažimo sada drugu tvrdnju. Pretpostavimo da tvrdnja ne vrijedi za neki $i \in \omega$. Fiksirajmo najmanji takav $i \in \omega$. Primijetimo da ako su točke $w$ i $x$ u zajedničkoj $i$-plohi okvira $W'$, onda su sigurno u zajedničkoj $i$-plohi okvira $W$ (relacije $R'_i$ su podskup relacija $R_i$). Stoga pretpostavimo da ne vrijedi druga implikacija. Kako su točke $w$ i $x$ u istoj $i$-plohi okvira $W$, slijedi da između njih postoji neusmjeren $(i, m)$-put $v$, za neki $m \in \omega$. Vrijedi da su sve točke $i$-plohe kojoj pripada točka $x$ dostižive iz točke $w$ (prema prvoj tvrdnji propozicije). Kako za sve točke $v_1, \ldots, v_m$ vrijedi da su u istoj $i$-plohi kao točka $x$ slijedi da su te točke dostižive iz točke $w$. No tada su te točke sadržane i u okviru $W'$. To povlači i da put $v$ postoji u okviru $W'$ pa točke $w$ i $x$ pripadaju istoj $i$-plohi i u okviru $W'$, suprotno pretpostavci.

Dokažimo sada treću tvrdnju. Pretpostavimo da tvrdnja ne vrijedi za neki $i \in \omega$. Fiksirajmo najmanji takav $i \in \omega$. Primijetimo da ako su točke $x$ i $y$ u zajedničkoj $i$-plohi okvira $W'$, onda su sigurno u zajedničkoj $i$-plohi okvira $W$ (relacije $R'_i$ su podskup relacija $R_i$). Stoga pretpostavimo da ne vrijedi druga implikacija. Prema drugoj tvrdnji propozicije slijedi da su točke $x$ i $y$ različite od točke $w$. Zatim, kako su sve točke okvira $W'$ dostižive iz točke $w$, slijedi $i > 0$. Razlikujemo slučajeve kad su točke $x$ i $y$ u istoj $i$-plohi okvira $W$ kao i točka $w$, te kad nisu. Promotrimo prvi slučaj. Tada iz činjenice da su sve tri točke u istoj $i$-plohi okvira $W$ i prve tvrdnje leme 3.2.8 slijedi da točke $w$ i $x$, te točke $w$ i $y$, nisu $R_m$-usporedive, za $m \in \omega$, $m < i$. Kako su točke $x$ i $y$ dostižive iz točke $w$ (nalaze se u okviru $W'$), slijedi da vrijedi $wR_{i+j}x$ te $wR_{i+k}y$ za neke $j, k \in \omega$. No tada su očito točke $x$ i $y$ u zajedničkoj $i$-plohi okvira $W'$, suprotno pretpostavci. Promotrimo sada slučaj kad točke $x$ i $y$ nisu u istoj $i$-plohi kao i točka $w$. Kako su točke $x$ i $y$ u istoj $i$-plohi okvira $W$, slijedi da između njih postoji neusmjeren $(i, m)$-put $v$, za neki $m \in \omega$. Vrijedi da su sve točke $i$-plohe kojoj pripadaju točke $x$ i $y$ dostižive iz točke $w$ (prema prvoj tvrdnji propozicije). Kako za sve točke $v_1, \ldots, v_m$ vrijedi da su u istoj $i$-plohi kao točke $x$ i $y$, slijedi da su te točke dostižive iz točke $w$. No tada su te točke sadržane i u okviru $W'$, pa točke $x$ i $y$ pripadaju istoj $i$-plohi i u okviru $W'$, suprotno pretpostavci.

Dokažimo sada četvrtu tvrdnju. Provjeravamo svojstva iz definicije 3.2.4. Prva tri svojstva na relacije $R'_i$ su očito ispunjena jer ih ispunjavaju i relacije $R_i$ a relacije $R'_i$ su njihova restrikcija na $W' \times W'$ za sve $i \in \omega$. Provjerimo četvrto i peto svojstvo. Četvto svojstvo tvrdi da za sve $i \in \omega$, skup $(i + 1)$-ploha unutar pojedine $i$-plohe $P'$ okvira $W'$ čini stablo. Peto svojstvo tvrdi da za sve $i \in \omega$, za svake dvije $(i+1)$-plohe $P'$ i $Q'$ za koje vrijedi $P' < Q'$, za sve točke iz skupa $Q'$ vrijedi da su $R'_i$-dostižive iz svih točaka iz skupa $P'$. Prema trećoj tvrdnji propozicije, slijedi da je svaka $(i + 1)$-ploha unutar $i$-plohe $P'$ podskup neke $(i+1)$-plohe unutar neke $i$-plohe $P$ okvira $W$. Neka su $P'$ i $Q'$ proizvoljne $(i + 1)$-plohe okvira $W'$. Tada su one podskup nekih $(i + 1)$-ploha $P$ i $Q$ okvira $W$. Pretpostavimo bez smanjenja općenitosti da vrijedi $P < Q$ (dokaz za slučaj $Q < P$ je sasvim analogan) pa slijedi da za sve točke skupa $Q$ vrijedi da su $R_i$-dostižive iz skupa $P$. Stoga za sve točke skupa $Q'$ vrijedi da su $R'_i$-dostižive iz skupa $P'$. Posebno tada vrijedi i $Q' < P'$.

Dokažimo sada petu tvrdnju. Indukcijom po složenosti formule $G$ dokazujemo da za sve točke $x \in W'$ vrijedi: $\mathcal{M}, x \Vdash G$ ako i samo ako $\mathcal{M}', x \Vdash G$. Baza indukcije slijedi izravno iz definicije relacije forsiranja. Korak indukcije za slučaj kondicionala slijedi jednostavno iz semantike kondicionala i pretpostavke indukcije. Promotrimo korak indukcije za slučaj $G = [i]H$, za neki $i \in \omega$ te neku formulu $H$. Pretpostavimo da vrijedi $\mathcal{M}, x \Vdash G$. Tada je u svim točkama koje su $R_i$-dostižive iz $x$ istinita formula $H$. Vrijedi $R'_i \subseteq R_i$, pa je u svim točkama koje su $R'_i$-dostižive iz $x$ također istinita formula $H$. Pretpostavimo sada da vrijedi $\mathcal{M}', x \Vdash G$. Neka je točka $y \in W$ proizvoljna točka koja je $R_i$-dostiživa iz točke $x$. Kako vrijedi $x \in W'$, slijedi $w = x$ ili $wR_0^*x$. U oba slučaja vrijedi $wR_0^*y$. Dakle, točka $y$ pripada okviru $W'$ pa je $R'_i$-dostiživa iz točke $x$. No tada vrijedi $\mathcal{M}', y \Vdash H$. U proizvoljnoj točki koja je $R_i$-dostiživa iz točke $w$ je istinita formula $H$. Slijedi $\mathcal{M}, x \Vdash G$. □

Dokaz sljedeće leme može se pogledati u [4].

**Lema 3.2.14** ("Glavna lema"). *Neka je $T$ jedan stablasti $\mathbf{J}_n$-okvir. Tada postoje ordinal $\lambda$, $\lambda < \epsilon_0$, lme-prostor $X = ([1, \lambda], \mathcal{T}_0, ..., \mathcal{T}_n)$ i surjektivni $\mathbf{J}_n$-morfizam $f : X \to T$.*

Sada dokazujemo teorem koji ima ključnu ulogu u dokazu potpunosti. Povezujemo lme-prostore i stablaste $\mathbf{J}$-okvire pomoću $\mathbf{J}_n$-morfizama.

**Teorem 3.2.15.** *Neka je $(Y, (S_n)_{n\in\omega})$ stablast $\mathbf{J}_n$-okviri. Neka je $F$ proizvoljna formula u kojoj se ne javljaju operatori $[m]$ za $m \in \omega$, $m > n$. Neka postoji model nad okvirom $Y$ takav da u nekoj njegovoj točki nije istinita formula $M^+(F) \to F$. Tada postoji ordinal $\lambda$ manji od $\epsilon_0$ takav da formula $F$ nije valjana na nekom lme-prostoru $X' = ([1, \lambda], \mathcal{T}_0', ..., \mathcal{T}_n')$.*

*Dokaz.* Neka je $(X, (R_n)_{n\in\omega})$ okvir generiran točkom $w$ okvira $Y$. Prema propoziciji 3.2.13 slijedi da je $X$ jedan stablasti $\mathbf{J}_n$-okvir, te postoji model $\mathcal{M} = (X, V)$ nad okvirom $X$ takav da u točki $w$ nije istinita formula $M^+(F) \to F$. Primijetimo da je točka $w$ nasljedni 0-korijen (u suprotnom bi vrijedilo $uR_0^*w$ za neku točku $u$, no zbog $wR_0^*u$ bi tada vrijedilo i $wR_0^*w$, što je zbog irefleksivnosti stablastog $\mathbf{J}_n$-okvira nemoguće).

Prema lemi 3.2.14 postoje ordinal $\lambda$, $\lambda < \epsilon_0$, lme-prostor $X' = ([1, \lambda], \mathcal{T}_0', ..., \mathcal{T}_n')$ i surjektivni $\mathbf{J}_n$-morfizam $f : X' \to X$.

Očito vrijedi $w \Vdash M^+(F)$ i $w \nVdash F$. Definirajmo model $\mathcal{M}' = (X', V')$, gdje za relaciju forsiranja $V'$ vrijedi:

$$x'V'p \text{ ako i samo ako } f(x')Vp,$$

za sve točke $x' \in X'$. Dokažimo indukcijom po složenosti da za svaku potformulu $G$ formule $F$ vrijedi: $x' \Vdash G$ ako i samo ako $f(x') \Vdash G$. Baza indukcije ($k = 0$) slijedi izravno iz definicije relacije forsiranja. Korak indukcije za slučaj kondicionala jednostavno slijedi iz pretpostavke indukcije i semantike kondicionala. Pretpostavimo da je formula $G$ oblika $[i]H$ za neki $i \in \omega$, $i \leq n$. Ako vrijedi $G = [n]H$, tvrdnja slijedi prema prvoj tvrdnji propozicije 3.1.9 te $(j_1)$ uvjetu $\mathbf{J}_n$-morfizma.

Promotrimo sada slučaj $G = [i]H$ za neki $i \in \omega$, $i < n$. Pretpostavimo da vrijedi $x' \Vdash G$. Tada postoji probušena okolina $O$ točke $x'$ takva da je u svim njenim točkama istinita formula $H$. Skup $O \cup \{x'\}$ je $\mathcal{T}_i'$-otvoren. Prema $(j_2)$ uvjetu $\mathbf{J}_n$-morfizma slijedi da za skup $f(O \cup \{x'\})$ vrijedi da je $\mathcal{T}_i$-otvoren. Po pretpostavci indukcije, u svim točkama probušene okoline $f(O)$ točke $f(x')$ je tada također istinita formula $H$. Stoga je u točki $f(x')$ istinita formula $[i]H$.

Pretpostavimo zatim da vrijedi $f(x) \Vdash G$. Prema lemi 3.2.8, postoji točka $v \in X$ koja je nasljedni $(i+1)$-korijen, te vrijedi $v = f(x)$ ili $vR_i^* f(x)$. Stoga vrijedi $x \in f^{-1}(R_i^*(v) \cup \{v\})$. Iz leme 3.2.11 tada slijedi $x \in \widetilde{\mathrm{d}}_i f^{-1}(R_i^*(v))$.

Točke $v$ i $f(x)$ su u istoj $(i+1)$-plohi (zbog toga što vrijedi $v = f(x)$ ili $vR_i^* f(x)$). Kako su točkama u pojedinoj $(i+1)$-plohi međusobno $R_i$-dostižive iste druge točke (prema uvjetima $(j_3)$ i $(j_4)$ iz definicije stablastog $\mathbf{J}_n$-okvira), slijedi $R_i(v) = R_i(f(x))$. Kako istinitost formule $[i]H$ u točki $v$ ovisi samo o istinitosti formule $H$ u točkama skupa $R_i(v)$, slijedi $v \Vdash [i]H$. Kako vrijedi $v \in X$, slijedi $v = w$ ili $wR_0^* v$. Iz činjenice da vrijedi $w \vDash M^+(F)$, slijedi $v \vDash [i]H \to [j]H$ za $j \geq i$. Imamo $v \vDash [i]H \to [j]H$ i $v \Vdash [i]H$ pa slijedi $v \Vdash [j]H$, za svaki $j \geq i$. Stoga je u svim točkama skupa $R_i^*(v)$ istinita formula $H$.

Označimo s $[H]$ i $[H]'$ podskupe okvira $X$ odnosno prostora $X'$ koje čine sve njihove točke u kojima vrijedi $H$.

Dokažimo da za točku $z \in \mathcal{M}'$ vrijedi: $z \Vdash G$ ako i samo ako $z \in \widetilde{\mathrm{d}}_i(f^{-1}([H]))$. Ako vrijedi $z \Vdash G$, postoji probušena okolina $O$ točke $z$ koja je potpuno sadržana u skupu $[H]'$. Po pretpostavci indukcije vrijedi $[H]' = f^{-1}([H])$. Prema lemi 2.1.8 vrijedi $z \in \widetilde{\mathrm{d}}_i(f^{-1}([H]))$. Pretpostavimo sada da vrijedi $z \in \widetilde{\mathrm{d}}_i(f^{-1}([H]))$. Tada postoji probušena okolina $O$ točke $z$ koja je potpuno sadržana u skupu $f^{-1}([H])$. Tada je okolina $O$ potpuno sadržana u skupu $[H]'$. No tada vrijedi $z \Vdash G$.

Kako je u svim točkama skupa $R_i^*(v)$ istinita formula $H$, slijedi $R_i^*(v) \subseteq [H]$. Stoga $\widetilde{\mathrm{d}}_i(f^{-1}(R_i^*(v))) \subseteq \widetilde{\mathrm{d}}_i(f^{-1}([H]))$. Kako vrijedi $x \in \widetilde{\mathrm{d}}_i(f^{-1}(R_i^*(v)))$, slijedi $x \in \widetilde{\mathrm{d}}_i(f^{-1}([H]))$. Iz $x \in \widetilde{\mathrm{d}}_i(f^{-1}([H]))$ sada slijedi $x \Vdash G$.

Time smo dokazali da za svaku potformulu $G$ formule $F$ vrijedi:

$$x' \Vdash G \text{ ako i samo ako } f(x') \Vdash G.$$

Vrijedi $w \nVdash F$. Zbog surjektivnosti preslikavanja $f$ postoji original $x'$ točke $w$. Slijedi $x' \nVdash F$, pa $\mathcal{M}' \nvDash F$. Tada $X' \nvDash F$, što je i traženo.

□

## 3.3 Potpunost sustava GLP

U ovom trenutku imamo sve što je potrebno za dokaz potpunosti sustava **GLP** u odnosu na klasu lme-prostora. Nakon tog rezultata dokazat ćemo da vrijedi i više. Dokazat ćemo da postoji jedan prostor na kojem je oboriva svaka **GLP**-nedokaziva formula. Nažalost, ne znamo kako točno taj prostor izgleda. Naime, $\ell$-maksimalne prostore nećemo eksplicitno konstruirati. Njihovo postojanje je u lemi 2.3.4 na nekonstruktivan način osigurala Zornova lema.

**Teorem 3.3.1** (Potpunost sustava **GLP** u odnosu na topološku semantiku)**.** *Ako vrijedi* $\mathbf{GLP} \nvdash F$*, onda postoji ordinal* $\lambda$*,* $\lambda < \epsilon_0$*, te lme-prostor* $([1,\lambda], \mathcal{T}_0', ..., \mathcal{T}_n')$ *na kojem formula* $F$ *nije valjana.*

*Dokaz.* Pretpostavimo $\mathbf{GLP} \nvdash F$. Tada prema teoremu 3.2.6 vrijedi $\mathbf{J} \nvdash M^+(F) \to F$. Prema teoremu 3.2.5 slijedi da postoji stablasti $\mathbf{J}_n$-okvir $(X, (R_n)_{n\in\omega})$ na kojem nije valjana formula $M^+(F) \to F$. Iz teorema 3.2.15 tada slijedi da postoji ordinal $\lambda$, $\lambda < \epsilon_0$, te lme-prostor $([1,\lambda], \mathcal{T}_0', ..., \mathcal{T}_n')$ na kojem formula $F$ nije valjana. □

Sad uvodimo način na koji se lme-prostor sa skupom točaka $[1,\alpha]$ može nadopuniti do lme-prostora čiji je skup točaka $[0,\alpha] = \alpha + 1$.

**Lema 3.3.2.** *Neka je* $\alpha$ *ordinal. Neka je* $X' = ([1,\alpha]; \mathcal{T}_0', \mathcal{T}_1', \dots)$ *lme-prostor. Tada postoji lme-prostor* $X = (\alpha+1; \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \dots)$ *koji je homeomorfan prostoru* $X'$*.*

*Dokaz.* Neka je $f : \alpha + 1 \to [1,\alpha]$ preslikavanje koje konačnom ordinalu pridružuje njegov sljedbenik, a na ostatku domene je inkluzija.

Očito je preslikavanje $f$ bijekcija. Za proizvoljnu topologiju $\sigma$, označimo s $f^{-1}(\sigma)$ topologiju koja sadrži sve skupove $O$ takve da je skup $f(O)$ član $\sigma$. Za sve $i \in \omega$ definirajmo:

$$\mathcal{T}_i = f^{-1}(\mathcal{T}_i').$$

Dokažimo da vrijedi otvorenost i neprekidnost preslikavanja $f$. Neka je $i \in \omega$ proizvoljan. Po definiciji topologije $\mathcal{T}_i$, svaki skup je $\mathcal{T}_i$-otvoren ako i samo ako je njegova slika $\mathcal{T}_i'$-otvorena. Dakle, prostori $X$ i $X'$ su homeomorfni. □

Ranije spomenuti prostor s obzirom na kojeg je sustav **GLP** potpun ćemo dobiti "spajanjem" svih (manjih) prostora na kojima se može izgraditi protuprimjer **GLP**-nedokazivim formulama.

**Lema 3.3.3.** *Neka je* $(X_n)_{n\in\omega}$ *neki niz lme-prostora. Tada je i disjunktna unija* $\sqcup_{n\in\omega} X_n$ *jedan lme-prostor.*

*Dokaz.* Za sve $s \in \omega$ označimo $X_s = (X_s; \mathcal{T}_0^{(s)}, \mathcal{T}_1^{(s)}, \dots)$. Označimo s $X = (\sqcup_{n\in\omega} X_n; \mathcal{T}_0^{\sqcup}, \mathcal{T}_1^{\sqcup}, \dots)$ disjunktnu uniju svih prostora $X_n$ s obzirom na topologije $\mathcal{T}_n^{(s)}$, za $s, n \in \omega$. U nastavku pretpostavljamo da su prostori u nizu $(X_n)_{n\in\omega}$ međusobno disjunktni (po potrebi preimenujemo elemente).

Dokažimo da je prostor $X$ raspršen u odnosu na topologiju $\mathcal{T}_n^{\sqcup}$, za sve $n \in \omega$. Neka je $S$ proizvoljan neprazan skup točaka. Neka je $t \in S$ proizvoljna točka. Tada točka $t$ pripada skupu $X_s$ za neki $s \in \omega$. Kako je prostor $X_s$ raspršen s obzirom na topologiju $\mathcal{T}_n^{(s)}$, tada postoji otvoren skup $O$ koji sadrži točno jednu točku skupa $S \cap X_s$. Kako niz $(X_n)_{n\in\omega}$ sadrži disjunktne prostore, skup $O$ ne sadrži niti jednu drugu točku skupa $S$. Kako je skup $O$ također i $\mathcal{T}_n^{\sqcup}$-otvoren, vrijedi raspršenost.

Neka su $s, n \in \omega$ proizvoljni. Dokažimo prvo da je inkluzija $e_s : X_s \to X$ jedno d-preslikavanje u odnosu na topologije $\mathcal{T}_n^{(s)}$ i $\mathcal{T}_n^{\sqcup}$. Otvorenost i diskretnost po točkama očito vrijede. Dokažimo da vrijedi neprekidnost. Neka je $O$ neki $\mathcal{T}_n^{\sqcup}$-otvoren skup. Tada je $O \cap X_s$ otvoren skup. Kako vrijedi $f^{-1}(O) = O \cap X_s$, tada je skup $f^{-1}(O)$ otvoren. Kako postoji d-preslikavanje između $X_s$ i $X$ u odnosu na topologije $\mathcal{T}_n^{(s)}$ i $\mathcal{T}_n^{\sqcup}$, slijedi da je $\mathcal{T}_n^{\sqcup}$-rang svih točaka jednak njihovom $\mathcal{T}_n^{(s)}$-rangu, za sve $s, n \in \omega$.

Dokažimo sada da za topologiju $\mathcal{T}_n^{\sqcup}$ vrijedi da je $\ell$-maksimalna, za sve $n \in \omega$. Neka je $x \in X$ proizvoljna točka čiji je rang ordinal druge vrste $\lambda$, a $V$ proizvoljan $\mathcal{T}_n^{\sqcup}$-otvoren skup čije sve točke imaju rang manji od $\lambda$. Prema lemi 2.3.5 potrebno je dokazati da vrijedi jedno od sljedećeg: $V \cup \{x\}$ je $\mathcal{T}_n^{\sqcup}$-otvoren skup, ili postoji okolina $U$ točke $x$ takva da vrijedi $\rho_n(V \cap U) < \lambda$. Kako je skup $V$ jedan $\mathcal{T}_n^{\sqcup}$-otvoren skup, vrijedi $V = \bigcup_{s \in \omega} V_s$, gdje su skupovi $V_s$ definirani na sljedeći način: $V_s = V \cap X_s$, za svaki $s \in \omega$. Prema $\ell$-maksimalnosti prostora $X_s$, za svaki $s \in \omega$, vrijedi jedno od sljedećeg: $V_s \cup \{x\}$ je $\mathcal{T}_n^{(s)}$-otvoren skup, ili postoji okolina $U_s$ točke $x$ takva da vrijedi $\rho_n(V \cap U_s) < \lambda$. Ako za bilo koji skup $V_s$, $s \in \omega$, vrijedi da je $V_s \cup \{x\}$ jedan $\mathcal{T}_n^{(s)}$-otvoren skup, onda je skup $V \cup \{x\}$ jednak uniji otvorenih skupova $V$ i $V_s$, pa je i sam otvoren. Inače definiramo $U = U_s$, gdje je $U_s$ otvoreni skup prostora $X_s$ koji sadrži točku $x$. Kako je skup $X_s$ disjunktan sa skupovima $X_r$ za $r \in \omega$, $r \neq s$, skup $U_s$ je također disjunktan sa skupovima $X_r$ za $r \in \omega$, $r \neq s$. Tada vrijedi $U \cap V = U_s \cap V_s$, pa slijedi da postoji okolina $U$ točke $x$ takva da vrijedi $\rho_n(V \cap U) < \lambda$.

Svaka topologija u lme-prostoru je $\ell$-maksimalno $\ell$-proširenje neke druge topologije. Označimo sa $\sigma_n^{(s)}$ topologiju na skupu $X_s$ čije je $\ell$-maksimalno $\ell$-proširenje topologija $\mathcal{T}_n^{(s)}$, za sve $s, n \in \omega$. Označimo s $Y = (\sqcup_{n \in \omega} X_n; \sigma_0, \sigma_1, \dots)$ disjunktnu uniju svih prostora $X_n$ s obzirom na topologije $\sigma_n^{(s)}$, za $n \in \omega$. Dokažimo da je topologija $\mathcal{T}_n^{\sqcup}$ jedno proširenje koje čuva rang topologije $\sigma_n$, za sve $n \in \omega$. Fiksirajmo $n \in \omega$. Topologija $\sigma_n$ je podskup topologije $\mathcal{T}_n^{\sqcup}$ jer je topologija $\sigma_n^{(s)}$ podskup topologije $\mathcal{T}_n^{(s)}$, za svaki $s \in \omega$. Ranije smo dokazali da točke imaju jednak rang u disjunktnim unijama kao u polazišnim prostorima. Stoga za točku $x \in Y$ vrijedi $\rho_Y(x) = \rho_{\sigma_j}(x) = \rho_{\mathcal{T}_j}(x) = \rho_X(x)$. Dakle, topologija $\mathcal{T}_n^{\sqcup}$ je proširenje koje čuva rang topologije $\sigma_n$. Konačno, dokažimo da je topologija $\mathcal{T}_n^{\sqcup}$ jedno $\ell$-proširenje topologije $\sigma_n$. Neka je $U$ jedan $\mathcal{T}_n^{\sqcup}$-otvoren skup te $x \in U$ proizvoljna točka čiji rang nije ordinal druge vrste. Treba dokazati da postoji $\sigma_n$-otvoren skup $V$ tako da vrijedi $x \in V \subseteq U$. Označimo s $X_s$ skup kojem pripada točka $x$. Kako je topologija $\mathcal{T}_n^{(s)}$ jedno $\ell$-proširenje topologije $\sigma_n^{(s)}$, postoji $\sigma_n$-otvoren skup $V_s$ tako da vrijedi $x \in V_s \subseteq U$. Skup $V_s$ je $\mathcal{T}_n^{\sqcup}$-otvoren skup, pa definiramo $V = V_s$.

□

Konačno, dokazujemo potpunost u odnosu na jedinstveni lme-prostor utemeljen na uređajnoj topologiji.

**Teorem 3.3.4.** *Postoji lme-prostor $X = (\epsilon_0; \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \dots)$ takav da za sve formule $F$ vrijedi:*

$$X \vDash F \text{ ako i samo ako } \mathbf{GLP} \vdash F.$$

*Dokaz.* Traženi ordinalni lme-prostor $X$ ćemo definirati kao disjunktnu uniju jednog niza prostora. U tom nizu je po jedan prostor $X_n$ za svaku **GLP**-nedokazivu formulu $F_n$, i to tako da vrijedi da postoji model na prostoru $X_n$ na kojem **GLP**-nedokaziva formula $F_n$ nije globalno istinita. Izgradit ćemo i prostor $X_\Lambda$, i to ponovno od spomenutog niza prostora. No ovaj put ćemo "nadovezivati" prostore jedan na drugog. Dokazat ćemo da su prostori $X_\Lambda$ i $X$ homeomorfni, tj. da se radi o istim strukturama. Tada će iz činjenice da je $X$ jedan lme-prostor slijediti da je i $X_\Lambda$ jedan lme-prostor.

Neka je $(F_n)_{n\in\omega}$ niz koji sadrži sve **GLP**-nedokazive formule (proizvoljno poredane).

Za svaki $n \in \omega$, formuli $F_n$ možemo pridružiti neki lme-prostor $X'_n = ([1, \lambda_n]; \mathcal{T}_0'^{(n)}, \mathcal{T}_1'^{(n)}, \dots)$ na kojem nije valjana, za neki $\lambda_n < \epsilon_0$ (prema teoremu 3.3.1). Prema lemi 3.3.2 tada postoji lme-prostor $X_n = (\lambda_n + 1; \mathcal{T}_0^{(n)}, \mathcal{T}_1^{(n)}, \dots)$ homeomorfan prostoru $X'_n$. Stoga formula $F_n$ nije valjana formula ni na prostoru $X_n$, za svaki $n \in \omega$.

Označimo $\Lambda_0 = 0$ te $\Lambda_n = \sum_{m<n}(\lambda_m + 1)$ za svaki $n \in \omega \setminus \{0\}$. Uz to označimo $\Lambda = \sum_{n<\omega} \lambda_n$. Motivacija iza oznake $\Lambda_n$ je označiti ordinal kojim započinju ordinali prostora $X_n$. Ordinal $\Lambda$ je prvi ordinal nakon svih blokova ordinala polaznih prostora, tj. prvi "neiskorišteni" ordinal.

Označimo s $X = (\sqcup_{i\in\omega}(\lambda_i + 1); \mathcal{T}_0^{\sqcup}, \mathcal{T}_1^{\sqcup}, \dots)$ disjunktnu uniju svih prostora $X_i$, za $i \in \omega$. Definirajmo preslikavanje $f$ između skupova $\Lambda$ i $\sqcup_{i\in\omega}(\lambda_i+1)$. Ovo preslikavanje povezuje ordinale iz izvornih prostora $X_i$ s ordinalima u skupu $\Lambda$. Pojedinom ordinalu u skupu $\Lambda$ pridružuje se odgovarajući ordinal iz nekog od skupova $\lambda_n + 1$. Za $x \in \Lambda$ označimo $m_x = \min\{m \in \omega \mid x \geq \Lambda_m\}$. Stavimo $f(x) = y$ ako i samo ako vrijedi $x = \Lambda_{m_x} + y$ i $y \in \lambda_{m_x} + 1$.

Dokažimo da je ovako definirano preslikavanje injektivno. Neka su $x$ i $x'$ međusobno različiti ordinali manji od $\Lambda$. Ako vrijedi $m_x = m_{x'}$, onda imamo $x = \Lambda_{m_x} + f(x)$ te $x' = \Lambda_{m_x} + f(x')$. Tada mora biti $f(x) \neq f(x')$. Ako ne vrijedi $m_x = m_{x'}$, slijedi $f(x') \notin X_{m_x}$. No vrijedi $f(x) \in \lambda_{m_x} + 1$, pa slijedi $f(x) \neq f(x')$.

Dokažimo da je preslikavanje $f$ surjektivno. Neka je $y \in \sqcup_{i\in\omega}(\lambda_i + 1)$ proizvoljan. Tada vrijedi $y \in \lambda_m + 1$, za neki $m \in \omega$.[3] Označimo $x = \Lambda_m + y$. Iz $y \in \lambda_m + 1$ slijedi $y < \lambda_{m+1}$. Stoga vrijedi $\Lambda_m + y < \Lambda_{m+1} \leq \Lambda$, pa slijedi $x \in \Lambda$. Prema definiciji $f$, slijedi $f(x) = y$.

Dakle, preslikavanje $f$ je bijekcija između skupova $\Lambda$ i $\sqcup_{i\in\omega}(\lambda_i + 1)$.

Za proizvoljnu topologiju $\mathcal{T}$ nad nekim od skupova $\lambda_i + 1$ za $i \in \omega$ definiramo familiju $f^{-1}(\mathcal{T})$ kao familiju skupova $f^{-1}(O)$ za svaki $\mathcal{T}$-otvoren skup $O$. Familija

[3] Razlikujemo ordinale ovisno o tome kojem nosaču $\lambda_i + 1$ pripadaju; stoga je $m \in \omega$ jedinstven.

$f^{-1}(\mathcal{T})$ je topologija na nekom od skupova $f^{-1}(\lambda_i+1)$ jer je preslikavanje $f$ bijekcija. Primijetimo da vrijedi $f^{-1}(\lambda_i+1)=[\Lambda_i,\Lambda_{i+1}\rangle$.

Neka je $n\in\omega$ proizvoljan. Dokažimo da je unija $U_n=\bigcup_{s<\omega} f^{-1}(\mathcal{T}_n^{(s)})$ baza za neku topologiju na skupu $\Lambda$. Neka su $A$ i $B$ proizvoljni članovi familije $U_n$. Topologije $f^{-1}(\mathcal{T}_n^{(s_1)})$ i $f^{-1}(\mathcal{T}_n^{(s_2)})$ pokrivaju međusobno disjunktne skupove $[\Lambda_{s_1},\Lambda_{s_1+1}\rangle$ i $[\Lambda_{s_2},\Lambda_{s_2+1}\rangle$ za različite $s_1$ i $s_2$. Stoga, ako su skupovi $A$ i $B$ članovi topologija $f^{-1}(\mathcal{T}_n^{(s_1)})$ i $f^{-1}(\mathcal{T}_n^{(s_2)})$, za neke različite $s_1,s_2\in\omega$, njihov je presjek prazan skup. Prazan skup je očito član $U_n$. Ako su skupovi $A$ i $B$ članovi iste topologije $f^{-1}(\mathcal{T}_n^{(s)})$, onda je njihov presjek također član topologije $f^{-1}(\mathcal{T}_n^{(s)})$. Dakle, familija $U_n$ je zatvorena na presjeke, pa stoga i baza za neku topologiju na skupu $\Lambda$.

Prostor $X_\Lambda=(\Lambda;\mathcal{T}_0,\mathcal{T}_1,\dots)$ definiramo na sljedeći način:

$$\text{topologija } \mathcal{T}_n \text{ je generirana familijom } \bigcup_{s<\omega} f^{-1}(\mathcal{T}_n^{(s)}),$$

za svaki $n\in\omega$.

Dokažimo da je preslikavanje $f$ otvoreno u odnosu na topologije $\mathcal{T}_n$ i $\mathcal{T}_n^{\sqcup}$, za svaki $n\in\omega$. Neka je $O$ neki $\mathcal{T}_n$-otvoren skup. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je skup $O$ član baze $U_n$ (svaki otvoreni skup $O$ je unija nekih elemenata baze, pa je slika skupa $O$ otvorena ako je jednaka uniji slika odgovarajućih elemenata baze). Tada je skup $O$ neki $f^{-1}(\mathcal{T}_n^{(s)})$-otvoren skup, za neki $s\in\omega$. Iz definicije preslikavanja $f$ slijedi da je skup $f(O)$ jedan $\mathcal{T}_n^{(s)}$-otvoren skup. Presjek skupa $\lambda_i+1$ s $f(O)$ je ili jednak ($\mathcal{T}_n^{(s)}$-otvorenom) skupu $f(O)$, za $i=s$, ili jednak (također otvorenom) praznom skupu, za $i\neq s$. Prema definiciji topologije za disjunktne unije (definicija 2.1.5) slijedi $f(O)\in\mathcal{T}_n^{\sqcup}$.

Dokažimo da je preslikavanje $f$ neprekidno u odnosu na topologije $\mathcal{T}_n$ i $\mathcal{T}_n^{\sqcup}$, za svaki $n\in\omega$. Neka je $O$ proizvoljan $\mathcal{T}_n^{\sqcup}$-otvoren skup. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je skup $O$ jedan $\mathcal{T}_n^{(s)}$-otvoren skup. Naime, skup $O$ je, prema definiciji topologije disjunktne unije, unija skupova koji su otvoreni u topologijama oblika $\mathcal{T}_n^{(s)}$ za $s\in\omega$. Ako dokažemo da je praslika takvog skupa otvoren skup, očito će praslika proizvoljnog $\mathcal{T}_n^{\sqcup}$-otvorenog skupa biti unija otvorenih skupova, pa time i sama otvoren skup. Skup $f^{-1}(O)$ je, prema definiciji topologije $f^{-1}(\mathcal{T}_n^{(s)})$, jedan $f^{-1}(\mathcal{T}_n^{(s)})$-otvoren skup. No tada se skup $f^{-1}(O)$ nalazi u bazi topologije $\mathcal{T}_n$, pa slijedi i da je $\mathcal{T}_n$-otvoren.

Time smo dokazali da je preslikavanje $f$ otvorena i neprekidna bijekcija (homeomorfizam) u odnosu na topologije $\mathcal{T}_n$ i $\mathcal{T}_n^{\sqcup}$ za svaki $n\in\omega$.

Neka je $F$ formula. Ako vrijedi $\mathbf{GLP}\vdash F$, prema lemi 2.4.3 i teoremu 3.2.1 vrijedi $X\vDash F$. Pretpostavimo da ne vrijedi $\mathbf{GLP}\vdash F$. Tada je $F$ neka od formula $F_n$, za neki $n\in\omega$. Kako tada $F$ nije valjana na prostoru $X_n$, postoji model $\mathcal{M}_n=(X_n,V_n)$

takav da vrijedi $\mathcal{M}_n \nvDash F$. Definiramo relaciju forsiranja $V$ za prostor $X$ na sljedeći način:

$$xVp \text{ ako i samo ako } \begin{cases} xV_np, & \text{za } x \in \lambda_n + 1 \\ \text{proizvoljno}, & \text{inače} \end{cases},$$

za sve propozicijske varijable $p$ i sve točke $x$ prostora $X$. Želimo dokazati da i za model $\mathcal{M} = (X, V)$ vrijedi $\mathcal{M} \nvDash F$. Dokažimo da vrijedi

$$\mathcal{M}, x \Vdash G \text{ ako i samo ako } \mathcal{M}_n, x \Vdash G,$$

za svaku formulu $G$ i točku $x \in \lambda_n + 1$. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po složenosti formule $G$.

Baza indukcije slijedi iz definicije relacije $V$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za formule složenosti $j \in \omega$, $j < k$. Neka je $G$ formula složenosti jednake $k$. Ako je $G$ formula oblika $H \to J$, tvrdnja slijedi pozivanjem na pretpostavku indukcije i semantiku kondicionala. Pretpostavimo zatim da vrijedi $G = [i]H$ za $i \in \omega$ i neku formulu $H$. Ako vrijedi $\mathcal{M}, x \Vdash G$, postoji $\mathcal{T}_i^{\sqcup}$-okolina $O$ točke $x$ takva da je u svim njenim točkama, osim možda u točki $x$, istinita formula $H$. Kako vrijedi $x \in O$, slijedi da postoji neka $\mathcal{T}_i^{(n)}$-okolina koja je podskup skupa $O$, te u čijim je svim točkama, osim možda u točki $x$, istinita formula $H$. No tada vrijedi $\mathcal{M}_n, x \Vdash [i]H$. Ako vrijedi $\mathcal{M}_n, x \Vdash G$, postoji $\mathcal{T}_i^{(n)}$-okolina $O$ točke $x$ takva da je u svim njenim točkama, osim možda u točki $x$, istinita formula $H$. Vrijedi $\mathcal{T}_i^{(n)} \subseteq \mathcal{T}_i^{\sqcup}$, pa je $O$ također $\mathcal{T}_i^{\sqcup}$-otvoren skup. No tada vrijedi $\mathcal{M}, x \Vdash G$,

Dakle, vrijedi $\mathcal{M}, w \nvDash F$, za neku točku $w \in \lambda_n + 1$. Prema lemi 3.3.3 prostor $X$ je lme-prostor. Preslikavanje $f$ je homeomorfizam prostora $X$ i $X_\Lambda$, pa je i prostor $X_\Lambda$ jedan lme-prostor.

Dokažimo da vrijedi $\Lambda = \epsilon_0$. Pretpostavimo da vrijedi $\Lambda < \epsilon_0$. Označimo $\omega_1 = \omega$ te $\omega_n = \omega^{\omega_{n-1}}$ za $n \in \omega$, $n \geq 2$. Označimo $\omega_m = \min\{\omega_i \,|\, \Lambda \leq \omega_i\}$. Iz leme 2.4.9 slijedi $\rho_m(\omega_m) = r^{m+1}(\omega_m) = 0$. To povlači da je topologija $\mathcal{T}_m$ diskretna. Stoga je u svim modelima istinita formula $[m]\bot$ (napomena 3.1.3). Ta formula nije teorem sustava **GLP** (prema teoremu 2.4.10 postoji **GLP**-prostor u kojem nijedna topologija nije diskretna). $\square$

Posljednjim je teoremom dokazano postojanje lme-prostora na kojem je oboriva svaka **GLP**-nedokaziva formula. Pritom je taj lme-prostor utemeljen na ordinalu $\epsilon_0$ s uređajnom topologijom. Može se dokazati (vidi npr. [7]) da je svaka **GL**-nedokaziva formula oboriva na ordinalu $\omega^\omega$ s uređajnom topologijom. Jedna bitna razlika između ta dva teorema potpunosti sastoji se u tome što topologije lme-prostora nisu zadane eksplicitno, već je za dokaz njihova postojanja korištena Zornova lema. Ta činjenica ostavlja otvorenim pitanje postojanja **GLP**-prostora s obzirom na kojeg je sustav **GLP** potpun, a čije su topologije prirodnije definirane.

# Bibliografija


[1] M. Abashidze, *Ordinal completeness of the Gödel-Löb modal system*, Intensional logics and the logical structure of theories (1985), 49–73.

[2] L. Beklemishev, *Kripke Semantics for Provability Logic GLP*, Utrecht Logic Group Preprint Series (2007), `http://dspace.library.uu.nl/handle/1874/26716`.

[3] L. Beklemishev i D. Gabelaia, *Topological interpretations of provability logic*, ArXiv e-prints (2012), `http://arxiv.org/abs/1210.7317`.

[4] ———, *Topological Completeness of the Provability Logic GLP*, Annals of Pure and Applied Logic **164** (2013), br. 12, 1201–1223.

[5] G. Bezhanishvili i J. van Benthem, *Modal Logics of Space*, Handbook of Spatial Logics (M. Aiello, I. Pratt-Hartmann i J. van Benthem, ur.), Springer Netherlands, Dordrecht, 2007, str. 217–299.

[6] P. Blackburn, M. de Rijke i Y. Venema, *Modal Logic*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[7] A. Blass, *Infinitary Combinatorics and Modal Logic*, The Journal of Symbolic Logic **55** (1990), br. 2, 761–778.

[8] G. Boolos, *The Logic of Provability*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.

[9] L. Esakia, *Diagonal constructions, Löb's formula and Cantor's scattered space*, Academic Press, Tbilisi, 1981.

[10] ———, *Intuitionistic logic and modality via topology*, Annals of Pure and Applied Logic **127** (2004), br. 1–3, 155 – 170.

[11] G. Japaridze, *The polymodal logic of provability*, Intensional Logics and Logical Structure of Theories (1988).

[12] M. Vuković, *Matematička logika*, Element, Zagreb, 2009.

[13] ______, *Teorija Skupova (materijal za predavanja)*, PMF - Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2015, https://www.math.pmf.unizg.hr/sites/default/files/pictures/ts-skripta-2015.pdf.

# Sažetak

Sustav **GLP** je sustav modalne logike kojeg je 1986. uveo Giorgi Japaridze. Ovaj sustav sadrži prebrojivo mnogo modalnih operatora $[n]$, po jedan za sve $n \in \omega$. Ako je dana "dovoljno snažna" teorija aritmetike, onda sustav **GLP** adekvatno i potpuno opisuje jedan njen fragment.

Većina sustava modalne logike ima tzv. relacijsku semantiku (poznatu i kao Kripkeova semantika, ili semantika mogućih svjetova). U određenom smislu, ne postoji zadovoljavajuća relacijska semantika za sustav **GLP**. Postoje i drugi tipovi semantika. Lev Beklemishev i David Gabelaia su 2011. dokazali da je **GLP** potpun u odnosu na jednu klasu politopoloških prostora. Glavni cilj ovog rada je predstaviti taj dokaz.

U prvom se poglavlju bavimo relacijskom semantikom. Osnovni cilj je prikazati probleme koji se javljaju kad se sustavu **GLP** pokuša dati (uobičajena) relacijska semantika.

U drugom poglavlju, uvodimo topološke konstrukcije potrebne u dokazu teorema potpunosti. To uključuje tzv. lme-prostore, jednu klasu politopoloških prostora s poželjnim svojstvima.

U trećem poglavlju se bavimo dokazom potpunosti. Pritom koristimo relacijsku semantiku još jednog sustava modalne logike, tzv. sustava **J**. Teoremi sustava **GLP** su u određenom smislu reducibilni na teoreme sustava **J**. Može se dokazati da za svaki **J**-adekvatan relacijski okvir postoji lme-prostor i preslikavanje između njih koje čuva valjanost. Koristeći te činjenice, za svaku **GLP**-nedokazivu formulu možemo izgraditi topološki model na kojem nije globalno istinita.

# Summary

System **GLP** is a system of modal logic introduced by Giorgi Japaridze in 1986. This system contains countably many modal operators $[n]$, one for each $n \in \omega$. Given a "sufficiently strong" theory of arithmetic $A$, system **GLP** provides a sound and complete description of a fragment of $A$.

Most systems of modal logic can be given a certain type of semantics known as relational semantics (also known as Kripke semantics, or possible world semantics). In a certain sense, such semantics cannot be given to **GLP** in a satisfactory way. There are other types of semantics. In 2011, Lev Beklemishev and David Gabelaia proved that **GLP** is complete with respect to a certain class of polytopological spaces. The main goal of this thesis is to present the proof of topological completeness.

In the first chapter, we work with relational semantics. This is mainly to showcase the issues that arise when trying to give **GLP** a (typical) relational interpretation.

In the second chapter, we introduce topological constructions needed to prove the completeness theorem. These include lme-spaces, a certain well-behaved class of polytopological spaces.

In the third chapter, we present the proof of completeness. This is done by exploiting relational semantics of another system of modal logic, known as system **J**. Theorems of **GLP** are, in a certain sense, reducible to theorems of **J**. It can be shown that for any **J**-sound relational frame there exists a lme-space and a validity-preserving morphism between them. By exploiting these facts, we can build a topological model that falsifies any formula that is not provable in **GLP**.

# Životopis

Rođen sam 19. ožujka 1993. u Varaždinu, gdje ostajem do završetka nižih razreda osnovne škole. Osnovnu i srednju školu sam završio u Zadru. Kroz osnovnu i srednju školu sam sudjelovao na natjecanjima iz astronomije, informatike, logike i filozofije. Najznačajniji rezultati su mi prvo mjesto na državnom natjecanju iz logike, te kvalifikacija i osvajanje četvrte nagrade na međunarodnoj olimpijadi iz filozofije (IPO).

Nakon srednje škole upisujem preddiplomski studij informatike i (analitičke) filozofije na Sveučilištu u Rijeci. Godinu dana kasnije, paralelno upisujem i kolegije sa studija matematike. Za vrijeme preddiplomskog studija povremeno sudjelujem u nastavi kao demonstrator na kolegijima vezanima uz matematiku i logiku. Također sudjelujem na dva projekta na Odjelu za informatiku, jedan vezan uz obradu prirodnog jezika, a drugi uz strojno učenje. Dobitnik sam dekanove nagrade za najboljeg studenta u generaciji. Studij završavam s prosjekom ocjena 4.98. Za vrijeme studija sam paralelno položio i sve kolegije s prve godine studija matematike (s prosjekom 5.00).

Po završetku preddiplomskog studija upisujem diplomski studij Računarstvo i Matematika na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu, gdje sam u trenutku pisanja ovog rada još uvijek student. Nakon diplomiranja ću se vjerojatno upisati na poslijediplomski studij u području matematičke logike ili teorijskog računarstva.