

Feuerbachova kružnica i Simsonov pravac

Mikulić, Magdalena

Master's thesis / Diplomski rad

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:280669>

Rights / Prava: [In copyright](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2022-08-16**



Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Magdalena Mikulić

FEUERBACHOVA KRUŽNICA I
SIMSONOV PRAVAC

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Dijana Ilišević

Zagreb, lipanj 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Zahvaljujem se svojoj mentorici prof. dr. sc. D. Ilišević na razumijevanju, strpljenju i motivaciji.

Sadržaj

Sadržaj	iv
Uvod	1
1 Kružnica devet točkaka (Feuerbachova kružnica) i Feuerbachov teorem	2
1.1 Kružnica devet točkaka	2
1.2 Feuerbachov teorem	17
1.3 Konstruktivni zadaci	38
2 Simsonov pravac	41
2.1 Svojstva Simsonovog pravca	41
2.2 Veze Simsonovog pravca i kružnice devet točkaka	50
Bibliografija	55

Uvod

Iako je trokut najjednostavniji lik u ravnini, svejedno je u povijesti bio predmet brojnih istraživanja i proučavanja te su danas poznata brojna svojstva tog geometrijskog lika. Kada govorimo o trokutu, ne možemo ne spomenuti najvažnije njemu pridružene kružnice: opisane, upisane i pripisane kružnice. U ovom radu ćemo se baviti još jednom značajnom trokutu pridruženom kružnicom i njenim svojstvima, kao i jednim osobitim pravcem trokuta koji je s njom u bliskoj vezi. Pritom ćemo iskazati i dokazati neke od najljepših teorema geometrije trokuta.

Ovaj diplomski rad sastoji se od dva poglavlja. U prvom poglavlju proučavamo kružnicu devet točaka (Feuerbachovu kružnicu) i Feuerbachov teorem. Prvo ćemo dokazati da devet točaka svakog trokuta (polovišta stranica, nožišta visina te polovišta dužina kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi ortocentar trokuta) leže na istoj kružnici, a potom ćemo proučavati neka svojstva te kružnice. Jedno od svojstava kružnice devet točaka je iskazano Feuerbachovim teoremom koji tvrdi da kružnica devet točaka dodiruje trokutu upisanu i pripisane kružnice.

U drugom poglavlju proučavat ćemo svojstva Simsonovog pravca na kojem leže nožišta okomica spuštenih iz bilo koje točke opisane kružnice zadanog trokuta na pripadne stranice. Zatim ćemo proučiti veze između Simsonovog pravca i Feuerbachove kružnice.

Poglavlje 1

Kružnica devet točaka (Feuerbachova kružnica) i Feuerbachov teorem

1.1 Kružnica devet točaka

Proučavat ćemo kružnicu devet točaka, koja se u literaturi još pojavljuje pod nazivima Eulerova¹ kružnica ili Feuerbachova² kružnica. Teorem o kružnici devet točaka objavio je Leonhard Euler 1765. godine.

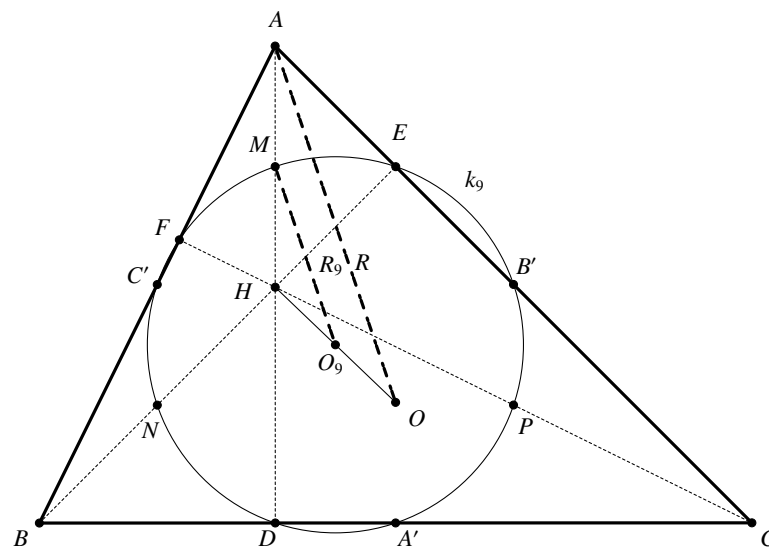
Teorem 1.1.1 (o kružnici devet točaka). *Neka su u trokutu ABC točke D, E, F nožišta visina, točke A', B', C' polovišta stranica te točke M, N, P polovišta dužina $\overline{HA}, \overline{HB}, \overline{HC}$, gdje je H ortocentar. Točke $D, E, F, A', B', C', M, N, P$ leže na jednoj kružnici k_9 koju nazivamo kružnicom devet točaka. Središte O_9 kružnice k_9 je polovište dužine \overline{HO} , gdje je O središte opisane kružnice trokuta ABC , a njen polumjer R_9 jednak je polovini polumjera R kružnice opisane trokutu ABC .*

Polovišta dužina $\overline{HA}, \overline{HB}, \overline{HC}$, gdje je H ortocentar trokuta ABC , tj. točke M, N, P , nazivaju se Eulerovim točkama.

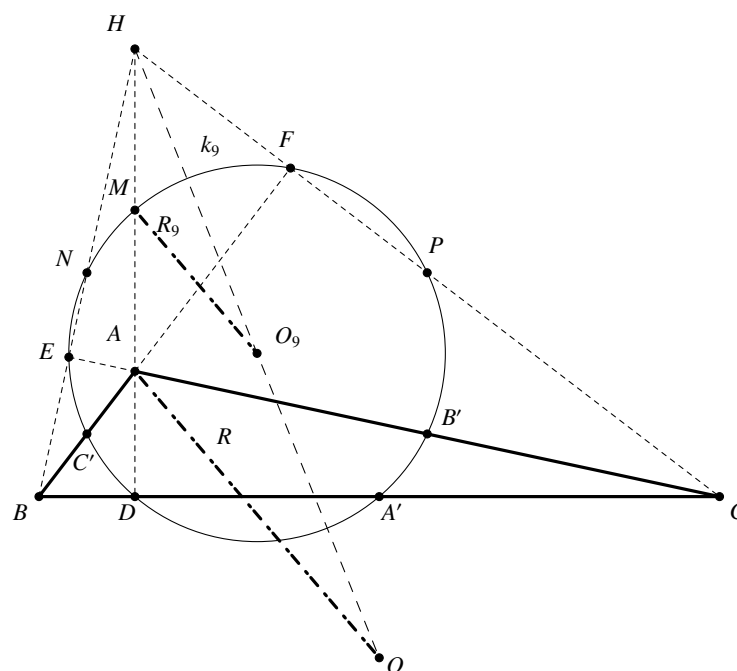
Slika 1.1 prikazuje šiljastokutan trokut i njegovu kružnicu devet točaka, slika 1.2 tupokutan trokut i njegovu kružnicu devet točaka, a slika 1.3 pravokutan trokut i njegovu kružnicu devet točaka. Uočimo da se u pravokutnom trokutu neke od tih devet točaka podudaraju: ako je ABC pravokutan trokut s pravim kutom pri vrhu A , tada se podudaraju točke C' i N , također i točke B' i P , a točke E, F i M se podudaraju s vrhom pravog kuta, tj. s vrhom A .

¹Leonhard Euler (1707. – 1783.), švicarski matematičar, fizičar i astronom

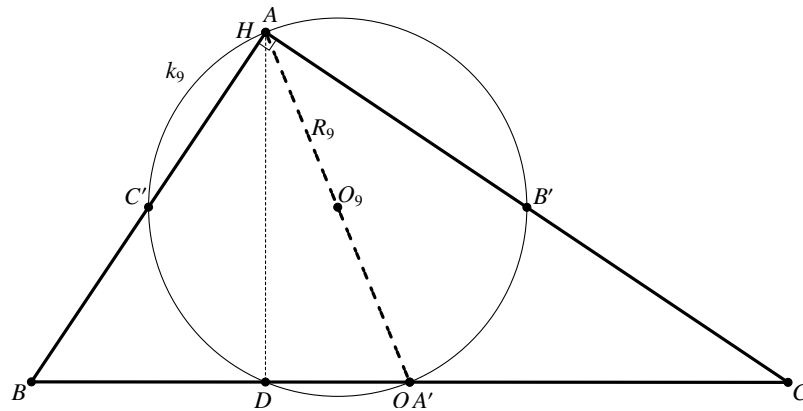
²Karl Wilhelm Feuerbach (1800. – 1834.), njemački matematičar



Slika 1.1: Šiljastokutan trokut i kružnica devet točaka



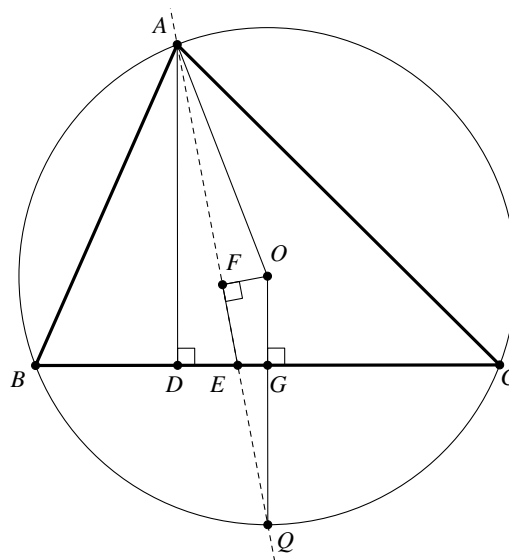
Slika 1.2: Tupokutan trokut i kružnica devet točaka



Slika 1.3: Pravokutan trokut i kružnica devet točaka

Za dokaz teorema o kružnici devet točaka bit će nam potrebne sljedeće dvije leme.

Lema 1.1.2. *Neka je trokutu ABC točka D nožište visine iz vrha A , a O središte tom trokutu opisane kružnice. Ako je \overline{OQ} onaj polumjer kružnice koji je okomit na \overline{BC} , tada točka Q leži na simetrali kuta $\sphericalangle DAO$. Simetrala kuta $\sphericalangle DAO$ je ujedno i simetrala kuta $\sphericalangle BAC$.*



Slika 1.4: Slika uz dokaz leme 1.1.2

Dokaz. Želimo dokazati da je pravac AQ simetrala kuta $\sphericalangle DAO$. Neka je točka F nožište okomice iz vrha O na pravac AQ . Nadalje, neka je točka E presjek pravca AQ i stranice

\overline{BC} trokuta ABC te neka je točka G presjek pravca OQ i stranice \overline{BC} . Promotrimo sada četverokut $OFEG$ na slici 1.4. Kako je $\sphericalangle OFE = 90^\circ$ i $\sphericalangle EGO = 90^\circ$, to je

$$\sphericalangle FOG = 180^\circ - \sphericalangle GEF. \quad (1.1)$$

Promotrimo sada trokute FOQ i DEA . Kutovi $\sphericalangle DEA$ i $\sphericalangle GEF$ su suplementarni, pa je

$$\sphericalangle DEA = 180^\circ - \sphericalangle GEF. \quad (1.2)$$

Iz jednakosti (1.1) i (1.2) slijedi

$$\sphericalangle DEA = \sphericalangle FOG = \sphericalangle FOQ.$$

Također vrijedi:

$$\sphericalangle EDA = \sphericalangle OFQ = 90^\circ.$$

Dva kuta trokuta DEA su sukladna kutovima trokuta FOQ , pa je i

$$\sphericalangle EAD = \sphericalangle FQO. \quad (1.3)$$

Nadalje, trokut AOQ je jednakokrtačan trokut jer su mu stranice \overline{AO} i \overline{OQ} polumjeri kružnice opisane trokutu ABC , pa su kutovi uz osnovicu tog trokuta sukladni, tj.

$$\sphericalangle OAQ = \sphericalangle AQO = \sphericalangle FQO. \quad (1.4)$$

Iz jednakosti (1.3) i (1.4) slijedi

$$\sphericalangle EAD = \sphericalangle OAQ,$$

a kako točka Q leži na kraku AE kuta $\sphericalangle EAD$, to je

$$\sphericalangle DAQ = \sphericalangle OAQ,$$

tj. točka Q leži na simetrali kuta $\sphericalangle DAO$. Polumjer \overline{OQ} leži na simetrali stranice \overline{BC} , pa je

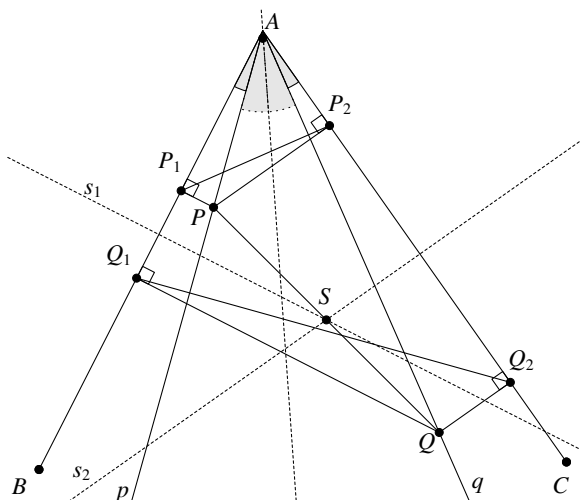
$$|BQ| = |QC|.$$

Uz to je i $|OB| = |OC|$, pa su trokuti OBQ i OCQ sukladni prema S-S-S teoremu o sukladnosti. Slijedi $\sphericalangle BOQ = \sphericalangle COQ$. Primjenom teorema o obodnom i središnjem kutu zaključujemo da vrijedi

$$\sphericalangle BAQ = \sphericalangle CAQ.$$

Iz prethodne jednakosti slijedi da točka Q leži na simetrali kuta $\sphericalangle BAC$ čime je lema dokazana. \square

Lema 1.1.3. *Neka je dan kut $\sphericalangle BAC$ te neka su p i q polupravci s početkom u vrhu A koji sa simetralom tog kuta čine sukladne kutove. Neka je P točka na polupravcu p , a Q točka na polupravcu q . Tada su nožišta P_1, P_2, Q_1, Q_2 okomica spuštenih iz točaka P i Q na krakove danog kuta koncikličke točke. Središte kružnice koju te točke određuju je polovište dužine \overline{PQ} .*



Slika 1.5: Slika uz dokaz leme 1.1.3

Dokaz. Promotrimo četverokute AP_1PP_2 i AQ_1QQ_2 na slici 1.5. Zbog pravih kutova, zbroj nasuprotnih kutova u oba četverokuta jednak je 180° , pa su četverokuti AP_1PP_2 i AQ_1QQ_2 tetivni i kut $\sphericalangle BAC$ im je zajednički. Promotrimo trokute AP_1P i AQ_2Q . Kako je $\sphericalangle PP_1A = \sphericalangle QQ_2A = 90^\circ$ i $\sphericalangle P_1AP = \sphericalangle Q_2AQ$ jer pravci p i q sa simetralom kuta $\sphericalangle ABC$ čine sukladne kutove, pa tada čine sukladne kutove i s krakovima kuta $\sphericalangle ABC$, to je i $\sphericalangle P_1PA = \sphericalangle Q_2QA$. Zaključujemo da su trokuti AP_1P i AQ_2Q slični prema K-K-K teoremu o sličnosti. Iz sličnosti danih trokuta slijedi

$$\frac{|AP_1|}{|AQ_2|} = \frac{|AP|}{|AQ|}. \quad (1.5)$$

Analogno se dokaže da su trokuti AP_2P i AQ_1Q sukladni iz čega slijedi

$$\frac{|AP_2|}{|AQ_1|} = \frac{|AP|}{|AQ|}. \quad (1.6)$$

Iz jednakosti (1.5) i (1.6) slijedi

$$|AP_1| \cdot |AQ_1| = |AP_2| \cdot |AQ_2|. \quad (1.7)$$

Neka je k kružnica određena točkama P_1, P_2, Q_1 . Potencija točke A obzirom na kružnicu k je $|AP_1| \cdot |AQ_1|$. Ako je R točka različita od Q_2 u kojoj pravac AP_2 siječe kružnicu k , tada je

$$|AP_1| \cdot |AQ_1| = |AP_2| \cdot |AR|. \quad (1.8)$$

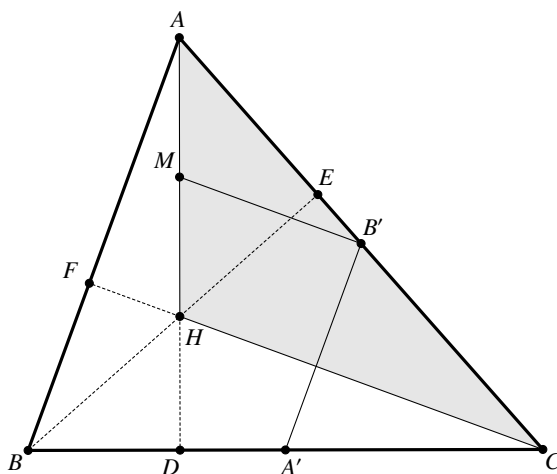
Iz jednakosti (1.7) i (1.8) slijedi da je $|AR| = |AQ_2|$, a kako su točke A, R, Q kolinearne, to se točke R i Q_2 podudaraju, pa točka Q_2 leži na kružnici k . Dakle, točke P_1, P_2, Q_1, Q_2 su koncikličke.

Dužine $\overline{P_1Q_1}$ i $\overline{P_2Q_2}$ su tetive kružnice k , pa je središte te kružnice sjecište simetrala tih tetiva. Na simetrali s_1 tetive $\overline{P_1Q_1}$ leži srednjica trapeza Q_1QPP_1 , a na simetrali s_2 tetive $\overline{P_2Q_2}$ leži srednjica trapeza QQ_2P_2P . Stranica \overline{PQ} je zajednička tim trapezima, pa će se pravci na kojima leže srednjice tih trapeza (a ti pravci su simetrale tetiva $\overline{P_1Q_1}$ i $\overline{P_2Q_2}$) sjeći u polovištu te stranice. Dakle, središte kružnice k je polovište S dužine \overline{PQ} . \square

Sada smo spremni dokazati teorem 1.1.1 o kružnici devet točaka.

Dokaz. Ortocentar H trokuta ABC nalazi se na visini iz vrha A . Prema lemi 1.1.2 pravci AH i AO sa simetralom kuta $\sphericalangle BAC$ čine sukladne kutove. Točke E, F, B', C' su nožišta okomica iz točaka H i O na stranice \overline{AB} i \overline{BC} trokuta ABC , pa prema lemi 1.1.3 leže na istoj kružnici k_1 čije se središte nalazi na polovištu dužine \overline{HO} . Analogno, ortocentar H leži i na visini iz vrha B , pa prema lemmama 1.1.2 i 1.1.3 točke A', D, F, C' leže na istoj kružnici k_2 čije se središte nalazi na polovištu dužine \overline{HO} . Točke C' i F leže na k_1 i k_2 , a središte im je ista točka, pa su kružnice k_1 i k_2 iste kružnice, tj. točke A', B', C', D, E, F leže na istoj kružnici čije je središte polovište dužine \overline{HO} , a tu kružnicu ćemo označiti sa k_9 .

Preostaje nam dokazati da točke M, N i P leže na kružnici k_9 . Promotrimo trokut AHC na slici 1.6.



Slika 1.6: Trokut AHC

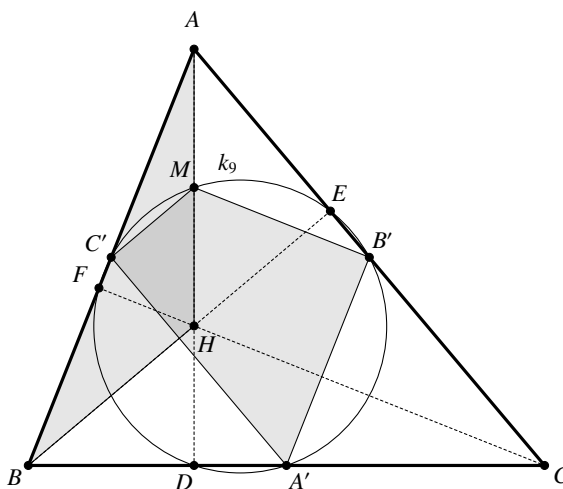
Točka M je polovište dužine \overline{AH} , a točka B polovište dužine \overline{AC} , pa je $\overline{MB'}$ srednjica trokuta AHC iz čega slijedi da je pravac $B'M$ paralelan pravcu HC , odnosno FC . Kako je $\overline{A'B'}$ srednjica trokuta ABC , to su pravci $A'B'$ i AB paralelni. Kako je \overline{FC} visina trokuta ABC iz vrha C , to su pravci AB i FC međusobno okomiti, a kako su pravci $B'M$ i FC paralelni te $A'B'$ i AB paralelni, zaključujemo da su pravci $A'B'$ i $B'M$ međusobno okomiti. Dakle,

$$\sphericalangle MB'A' = 90^\circ. \quad (1.9)$$

Analogno iz trokuta ABH (slika 1.7) zaključujemo da je

$$\sphericalangle MC'A' = 90^\circ. \quad (1.10)$$

Iz jednakosti (1.9) i (1.10) slijedi da je $A'B'MC'$ tetivni četverokut (slika 1.7), pa točka M



Slika 1.7: Trokut ABH i četverokut $A'B'MC'$

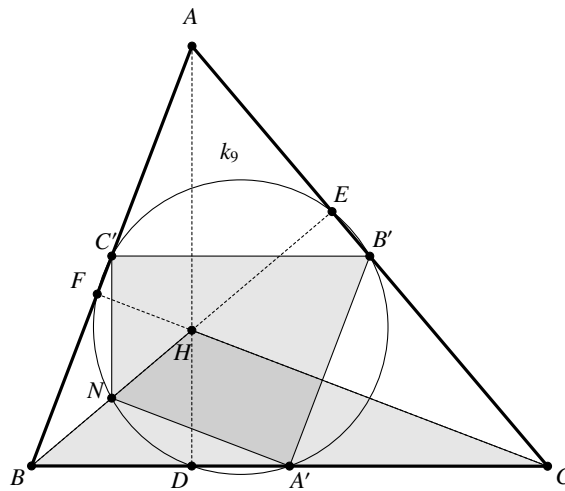
leži na kružnici koja je određena točkama A' , B' i C' , tj. točka M leži na kružnici k_9 .

Preostaje nam još dokazati da točke N i P leže na kružnici k_9 . Promotrimo četverokute $A'B'C'N$ i $A'PMC'$ na slikama 1.8 i 1.9. Analognim postupcima kao za točku M dokaže se da točke N i P leže na kružnici k_9 .

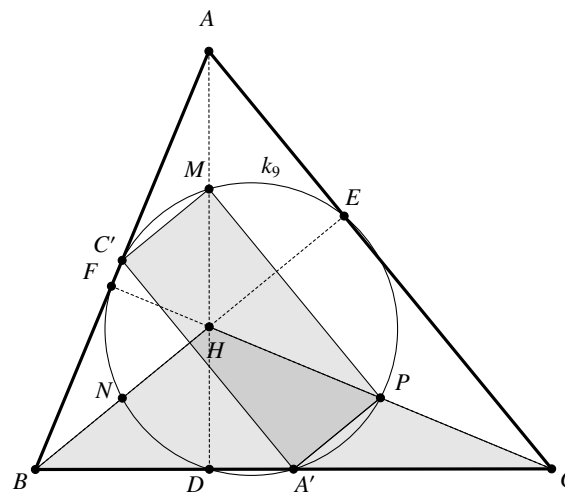
Time smo dokazali da točke $D, E, F, A', B', C', M, N, P$ leže na istoj kružnici k_9 čije je središte O_9 polovište dužine \overline{HO} .

Sada dokažimo da je polumjer kružnice k_9 jednak polovini polumjera kružnice opisane trokutu ABC , tj. da je

$$R_9 = \frac{1}{2}R.$$

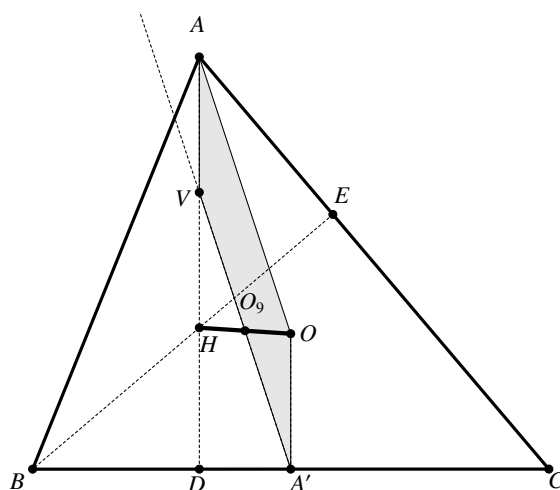


Slika 1.8: Trokut BHC i četverokut $A'B'C'N$



Slika 1.9: Trokut BHC i četverokut $A'PMC'$

Pravac $\overline{A'O_9}$ siječe visinu \overline{AD} u točki koju ćemo označiti sa V (slika 1.10). Kako je $|HO_9| = |OO_9|$, $\sphericalangle OO_9A' = \sphericalangle HO_9V$ jer su to vršni kutovi, $\sphericalangle O_9VH = \sphericalangle O_9A'O$ jer su to kutovi uz transversalu paralelnih pravaca AD i OA' (oba pravca su okomita na pravac BC), to su trokuti VHO_9 i $A'OO_9$ sukladni prema teoremu K-S-K o sukladnosti. Iz sukladnosti slijedi da je $|VO_9| = |A'O_9|$, pa točka V leži na kružnici k_9 . Kako točka V uz to leži i na visini iz vrha A , to se ona podudara s točkom M . Znači da je V polovište dužine \overline{HA} iz čega


 Slika 1.10: Paralelogram $AVA'O$

slijedi da je $|AV| = |VH|$. Četverokut $AVA'O$ je paralelogram, jer je $|AV| = |VH| = |A'O|$ i jer su dužine \overline{AV} i $\overline{OA'}$ paralelne (obje leže na okomicama na stranicu \overline{BC}). Iz toga proizlazi da je $|VA'| = |AO| = R$, a kako je $\overline{VA'}$ promjer kružnice k_9 , to je $|VA'| = 2R_9$, iz čega slijedi

$$R_9 = \frac{1}{2}R.$$

□

Napomena 1.1.4. Neka su u trokutu ABC točke A', B', C' polovišta stranica, O središte njemu opisane kružnice, a H ortocentar. Tada je

$$|AH| = 2|OA'|,$$

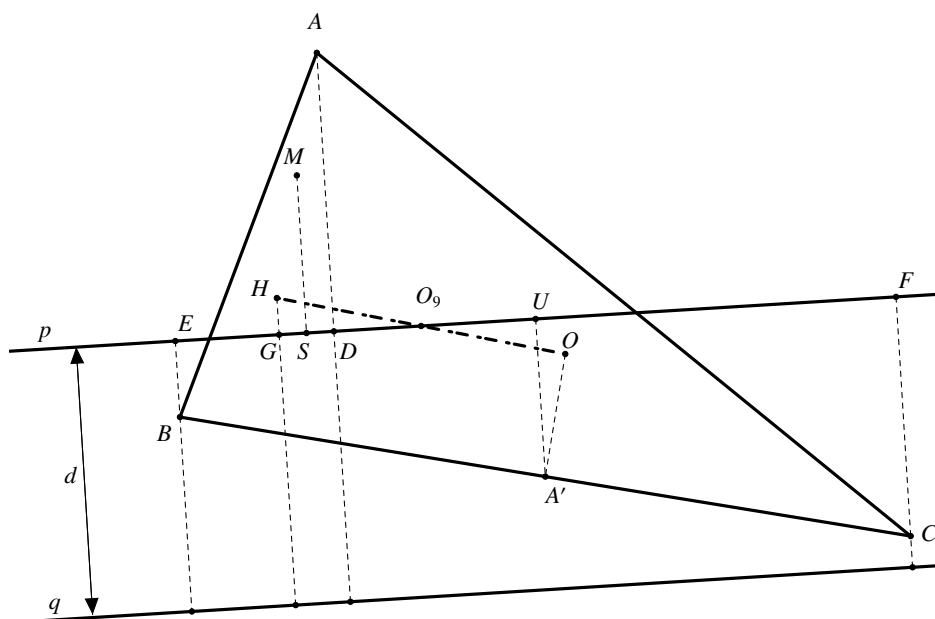
što smo dokazali na kraju dokaza teorema 1.1.1 (vidite sliku 1.10). Analogno bi se dokazalo i da je

$$|BH| = 2|OB'| \quad \text{i} \quad |CH| = 2|OC'|.$$

Teorem 1.1.5. Neka je sa p označen bilo koji pravac koji prolazi središtem O_9 kružnice devet točaka trokuta ABC . Neka su d_1, d_2, d_3 udaljenosti vrhova trokuta od pravca p , a d_4 udaljenost ortocentra H od pravca p . Tada vrijedi

$$\sum_{i=1}^4 (-1)^{k_i} d_i = 0,$$

pri čemu su k_1, k_2, k_3, k_4 prirodni brojevi koji su iste parnosti za točke koje leže s iste strane pravca p , a suprotne za točke koje leže sa suprotnih strana pravca p .



Slika 1.11: Slika uz dokaz teorema 1.1.5

Dokaz. Neka su točke D, E, F, G redom nožišta okomica iz točaka A, B, C, H na pravac p . Tada su $d_1 = |AD|$, $d_2 = |BE|$, $d_3 = |CF|$, $d_4 = |HG|$ udaljenosti navedenih točaka od pravca p . Promotrit ćemo dva slučaja, jedan u kojem se po dvije točke nalaze s različitih strana pravca p te onaj u kojem se tri točke nalaze s jedne strane, a četvrta točka s druge strane pravca p .

Promotrimo prvi slučaj. Neka je S nožište okomice iz polovišta M dužine \overline{AH} na pravac p , a U nožište okomice iz polovišta A' stranice \overline{BC} od pravca p . Promotrimo sliku 1.11. Pravci na kojima leže dužine \overline{BE} i \overline{CF} su okomiti na pravac p , pa su međusobno paralelni iz čega slijedi da je četverokut $BCFE$ trapez. Točka A' je polovište stranice \overline{BC} , pravci $A'U$ i p su međusobno okomiti, pa je dužina $\overline{A'U}$ srednjica trapeza $BCFE$. Tada vrijedi

$$|A'U| = \frac{|BE| + |CF|}{2} = \frac{d_2 + d_3}{2}. \quad (1.11)$$

Prema teoremu 1.1.1 o kružnici devet točaka, točke A' i M leže na toj kružnici, pa je $|MO_9| = |A'O_9|$, $\sphericalangle SO_9M = \sphericalangle UO_9A'$ jer su to vršni kutovi i $\sphericalangle MSO_9 = \sphericalangle A'UO_9 = 90^\circ$ pa su trokuti MO_9S i $A'O_9U$ sukladni prema K-S-K teoremu o sukladnosti, iz čega slijedi

$$|MS| = |A'U|. \quad (1.12)$$

Za četverokut $HGDA$ se analogno kao za četverokut $BCFE$ dokaže da je trapez, pa je dužina \overline{MS} srednjica tog trapeza te tada vrijedi

$$|MS| = \frac{|AD| + |HG|}{2} = \frac{d_1 + d_4}{2}. \quad (1.13)$$

Sada iz jednakosti (1.11), (1.12) i (1.13) slijedi

$$d_2 + d_3 = d_1 + d_4,$$

odnosno

$$d_1 + d_4 - d_2 - d_3 = 0.$$

Točke A i H se nalaze s jedne strane pravca p , a točke B i C sa suprotne strane, pa vrijedi

$$\sum_{i=1}^4 (-1)^{k_i} d_i = d_1 - d_2 - d_3 + d_4 = 0.$$

Promotrimo sada drugi slučaj. Neka je P_1 nožište okomice iz polovišta P dužine \overline{CH} na pravac p te neka je V nožište okomice iz polovišta C' stranice \overline{AB} na pravac p . Promotrimo sliku 1.12. Pravci BE i AD su okomiti na pravac p , pa su međusobno paralelni iz čega slijedi da je četverokut $BEDA$ trapez. Točka C' je polovište stranice \overline{AB} , pravci $C'V$ i p su međusobno okomiti, pa je dužina $\overline{C'V}$ srednjica trapeza $BEDA$. Tada vrijedi

$$|C'V| = \frac{|AD| + |BE|}{2} = \frac{d_1 + d_2}{2}. \quad (1.14)$$

Prema teoremu 1.1.1 o kružnici devet točaka, točke C' i P leže na toj kružnici, pa je $|PO_9| = |C'O_9|$, $\sphericalangle VO_9C' = \sphericalangle P_1O_9P$ jer su to vršni kutovi i $\sphericalangle CVO_9 = \sphericalangle PP_1O_9 = 90^\circ$ pa su trokuti $C'VO_9$ i PP_1O_9 sukladni prema K-S-K teoremu o sukladnosti, iz čega slijedi

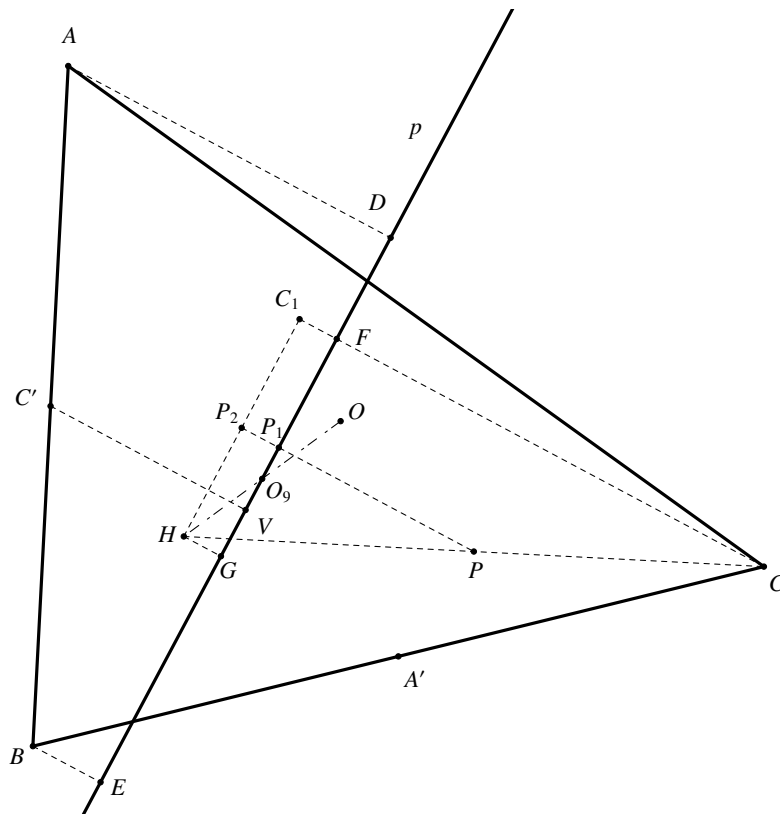
$$|C'V| = |P_1P|. \quad (1.15)$$

Povucimo sada točkom H paralelu s pravcem p . Ta paralela siječe pravac CF u točki koju označimo sa C_1 . Uočavamo da je $HGFC_1$ pravokutnik pa je

$$|C_1F| = |HG|. \quad (1.16)$$

Neka je točka P_2 točka u kojoj pravac P_1P siječe pravac C_1H . Promotrimo sada trokut C_1CH . Kako je P polovište stranice \overline{HC} i kako su pravci P_2P i C_1C paralelni to je $\overline{P_2P}$ srednjica trokuta C_1CH te stoga vrijedi

$$|P_2P| = \frac{1}{2}|C_1C|. \quad (1.17)$$



Slika 1.12: Slika uz dokaz teorema 1.1.5

Proučavajući sliku (1.12) i uzimajući u obzir (1.16) i (1.17), uočavamo da vrijedi:

$$\begin{aligned} |P_1P| &= |P_2P| - |P_2P_1| = \frac{|C_1C|}{2} - |C_1F| \\ &= \frac{|HG| + |FC|}{2} - |HG| = \frac{|FC| - |HG|}{2}, \end{aligned}$$

odnosno

$$|P_1P| = \frac{d_3 - d_4}{2}. \quad (1.18)$$

Sada iz jednakosti (1.14), (1.15) i (1.18) slijedi

$$d_1 + d_2 = d_3 - d_4$$

odnosno

$$d_1 + d_2 - d_3 + d_4 = 0.$$

Točke A, B, H se nalaze s jedne strane pravca p , a točka C sa suprotne strane, pa vrijedi

$$\sum_{i=1}^4 (-1)^{k_i} d_i = d_1 + d_2 - d_3 + d_4 = 0.$$

□

Teorem 1.1.6. *Zbroj udaljenosti vrhova danog trokuta ABC i njegova ortocentra H do bilo kojeg pravca q ravnine jednaka je četverostrukoj udaljenosti središta O_9 kružnice devet točaka k_9 do tog pravca q .*

Dokaz. Označimo sa p pravac koji je paralelan s pravcem q i prolazi točkom O_9 (vidite slike 1.11 i 1.12). Označimo sa d_1, d_2, d_3 udaljenosti vrhova danog trokuta od pravca p , sa d'_1, d'_2, d'_3 njihove udaljenosti od pravca q , sa d_4 udaljenost ortocentra od pravca p i sa d'_4 udaljenost ortocentra od pravca q . Sa d ćemo označiti udaljenost pravaca p i q , tj. udaljenost pravca q od točke O_9 . Uočimo da je

$$d'_i = (-1)^{k_i} d_i + d, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

pri čemu su k_1, k_2, k_3, k_4 prirodni brojevi iste parnosti za točke koje leže s iste strane pravca p , a suprotne za točke koje leže sa suprotnih strana pravca p . Zbrajanjem se dobije

$$\sum_{i=1}^4 d'_i = \sum_{i=1}^4 ((-1)^{k_i} d_i + d) = \sum_{i=1}^4 (-1)^{k_i} d_i + 4d = 4d$$

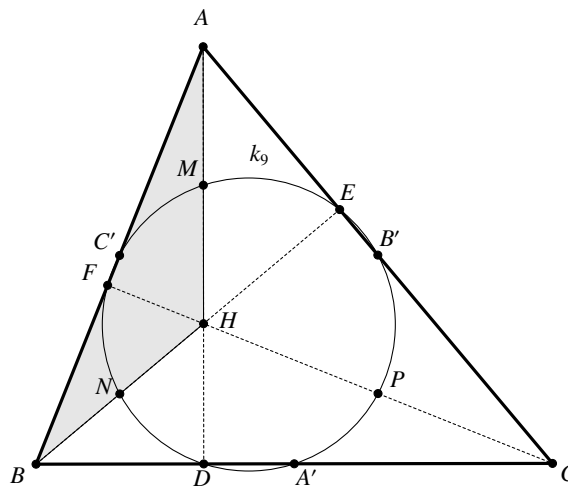
jer je

$$\sum_{i=1}^4 (-1)^{k_i} d_i = 0$$

prema prethodnom teoremu. □

Teorem 1.1.7. *Ako ABC nije pravokutan trokut, tada četiri trokuta ABC, ABH, BCH, ACH , gdje je H ortocentar trokuta ABC , imaju zajedničku kružnicu devet točaka. Kružnice opisane tim trokutima imaju jednak polumjer R .*

Dokaz. Neka je k_9 kružnica devet točaka trokuta ABC . Na njoj leže nožišta visina (točka D je nožište visine iz vrha A , točka E iz vrha B , a točka F iz vrha C), polovišta stranica (točka A' je polovište dužine \overline{BC} , točka B' dužine \overline{AC} , a točka C' dužine \overline{AB}) i polovišta dužina koje spajaju ortocentar s vrhovima trokuta (točka M je polovište dužine \overline{HA} , točka N dužine \overline{HB} , a točka P dužine \overline{HC}). Promotrimo prvo trokut ABH (slika 1.13).

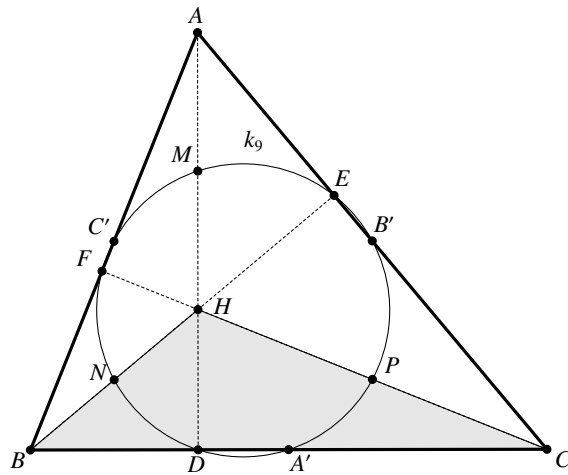

 Slika 1.13: Trokut ABH

Pravac BH se podudara s pravcem na kojem leži visina iz vrha B u trokutu ABC , pa je nožište te visine jednako nožištu visine iz vrha A na stranicu \overline{BH} trokuta ABH , a to je točka E . Pravac AH se podudara s pravcem na kojem leži visina iz vrha A u trokutu ABC , pa je nožište te visine jednako nožištu visine iz vrha B na stranicu \overline{AH} trokuta ABH , a to je točka D . Pravac CH se podudara s pravcem na kojem leži visina iz vrha C u trokutu ABC , pa je nožište te visine jednako nožištu visine iz vrha H na stranicu \overline{AB} trokuta ABH , a to je točka F . Polovište stranice \overline{AB} je točka C' , polovište stranice \overline{BH} je točka N , polovište stranice \overline{HA} je točka M . Sve navedene točke pripadaju kružnici k_9 . Pravci na kojima leže visine trokuta ABH sijeku se u točki C , pa je točka C ortocentar trokuta ABH . Točka A' je polovište dužine \overline{BC} , točka P je polovište dužine \overline{HC} i točka B' je polovište dužine \overline{AC} , a te tri točke leže na kružnici k_9 . Uočavamo da smo za trokut ABH dobili istih devet točaka kao i za trokut ABC , tj. trokuti ABH i ABC imaju zajedničku kružnicu devet točaka k_9 . Analogno bi se dokazalo i da trokuti BCH i ACH imaju k_9 za svoju kružnicu devet točaka (slike 1.14 i 1.15).

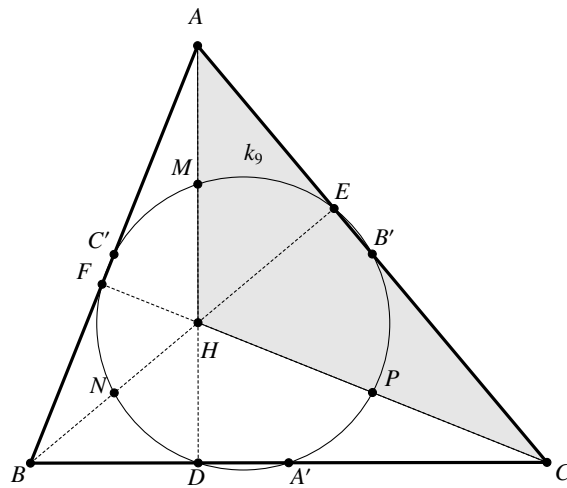
Dokažimo sada da opisane kružnice sva četiri trokuta imaju jednak polumjer R . Kao što smo prethodno dokazali, trokuti ABC , ABH , BCH , ACH imaju zajedničku kružnicu devet točaka k_9 polumjera R_9 . Prema teoremu 1.1.1, polumjer kružnice opisane trokutu je

$$R = 2R_9,$$

a s obzirom na to da svi trokuti imaju zajedničku kružnicu devet točaka k_9 , tada će i svi polumjeri opisanih kružnica biti jednaki. \square



Slika 1.14: Trokut BCH



Slika 1.15: Trokut AHC

1.2 Feuerbachov teorem

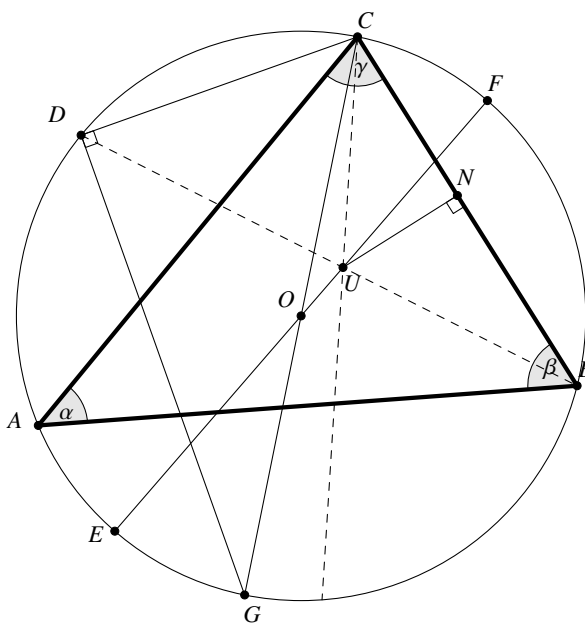
Prije Feuerbachovog teorema ćemo izreći i dokazati nekoliko teorema koje ćemo koristiti u daljnjim dokazima teorema vezanih uz kružnicu devet točaka (Feuerbachovu kružnicu).

Teorem 1.2.1. *Udaljenost središta O opisane kružnice k_o i središta U upisane kružnice danog trokuta ABC dana je sa*

$$|OU|^2 = R^2 - 2Rr,$$

gdje je R polumjer trokutu ABC opisane kružnice, a r polumjer tom trokutu upisane kružnice.

Dokaz. Označimo sa α kut pri vrhu A , sa β kut pri vrhu B te sa γ kut pri vrhu C . Neka je točka D sjecište pravca BU i kružnice k_o opisane trokutu ABC . Pravac BU je simetrala kuta β , a pravac CU je simetrala kuta γ . Neka su E i F sjecišta pravca OU i kružnice opisane trokutu (slika 1.16).



Slika 1.16: Slika uz dokaz teorema 1.2.1

Točke E i F leže na k_o , pa je potencija p točke U obzirom na kružnicu k_o jednaka

$$p = |UF| \cdot |UE|, \quad (1.19)$$

a kako točke B i D također leže na kružnici k_o , vrijedi

$$p = |UB| \cdot |UD|. \quad (1.20)$$

Izjednačavanjem jednakosti (1.19) i (1.20) dobivamo

$$|UB| \cdot |UD| = |UF| \cdot |UE|. \quad (1.21)$$

Nadalje, vrijedi

$$|UF| \cdot |UE| = (R - |OU|) \cdot (R + |OU|) = R^2 - |OU|^2. \quad (1.22)$$

Iz (1.21) i (1.22) slijedi

$$|OU|^2 = R^2 - |UD| \cdot |UB|. \quad (1.23)$$

Sada nam preostaje dokazati da je $|UD| \cdot |UB| = 2Rr$. Kutovi $\sphericalangle DBA$ i $\sphericalangle DCA$ su obodni kutovi nad lukom \widehat{DA} , pa vrijedi $\sphericalangle DBA = \sphericalangle DCA$. Kako je DB simetrala kuta β , to je $\sphericalangle DBA = \sphericalangle DBC = \frac{\beta}{2}$, a kako je CU simetrala kuta γ , to je $\sphericalangle ACU = \sphericalangle BCU = \frac{\gamma}{2}$. Iz toga slijedi

$$\sphericalangle DCU = \sphericalangle DCA + \sphericalangle ACU = \sphericalangle DBA + \sphericalangle ACU = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}. \quad (1.24)$$

Kut $\sphericalangle DUC$ je vanjski kut trokuta BCU , pa je

$$\sphericalangle DUC = \sphericalangle DBC + \sphericalangle BCU = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}. \quad (1.25)$$

Iz jednakosti (1.24) i (1.25) slijedi da je $\sphericalangle DCU = \sphericalangle DUC$, iz čega zaključujemo da je trokut DUC jednakokratan s krakovima \overline{UD} i \overline{DC} , tj.

$$|UD| = |DC|. \quad (1.26)$$

Neka je N nožište okomice iz točke U na stranicu \overline{BC} te neka je G sjecište pravca CO i kružnice k_o . Prema Talesovom teoremu o kutu nad promjerom kružnice, $\sphericalangle CDG = 90^\circ$ i stoga je $\sphericalangle CDG = \sphericalangle UNB$. Uz to je i $\sphericalangle DGC = \sphericalangle DBC = \sphericalangle UBN$, jer su kutovi $\sphericalangle DGC$ i $\sphericalangle DBC$ obodni kutovi nad lukom \widehat{DC} , pa su trokuti DCG i NUB slični prema K-K-K teoremu o sličnosti. Iz sličnosti slijedi

$$\frac{|UB|}{|GC|} = \frac{|NU|}{|DC|},$$

odnosno

$$\frac{|UB|}{2R} = \frac{r}{|DC|},$$

pa uzimajući u obzir (1.26) dobivamo

$$|UB| \cdot |UD| = 2Rr.$$

Uvrštavanjem prethodne jednakosti u jednakost (1.23) konačno zaključujemo

$$|OU|^2 = R^2 - 2Rr.$$

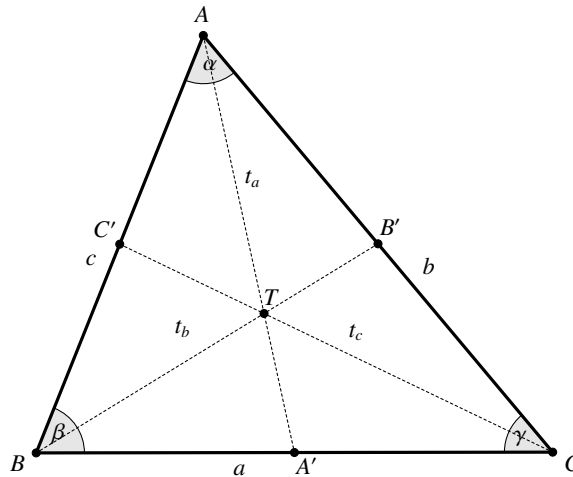
□

Teorem 1.2.2. Neka je dan trokut ABC sa stranicama duljina $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ te neka su A', B', C' redom polovišta stranica $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$. Za duljine težišnica t_a, t_b, t_c vrijedi:

$$t_a = |AA'| = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2},$$

$$t_b = |BB'| = \frac{1}{2} \sqrt{2(c^2 + a^2) - b^2},$$

$$t_c = |CC'| = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$



Slika 1.17: Slika uz dokaz teorema 1.2.2

Dokaz. Neka je točka A' polovište stranice \overline{BC} . Tada je dužina $\overline{AA'}$ težišnica trokuta ABC iz vrha A . Neka je β kut pri vrhu B . Primjenom teorema o kosinusu na trokut ABC dobivamo:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad (1.27)$$

a primjenom teorema o kosinusu na trokut ABA' :

$$\cos \beta = \frac{c^2 + \frac{a^2}{4} - t_a^2}{2 \cdot c \cdot \frac{a}{2}}. \quad (1.28)$$

Izjednačavanjem jednakosti (1.27) i (1.28) dobivamo

$$\frac{c^2 + \frac{a^2}{4} - t_a^2}{2 \cdot c \cdot \frac{a}{2}} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

iz čega slijedi

$$t_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

Analogno, za težišnice t_b i t_c dobivamo

$$t_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}, \quad t_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

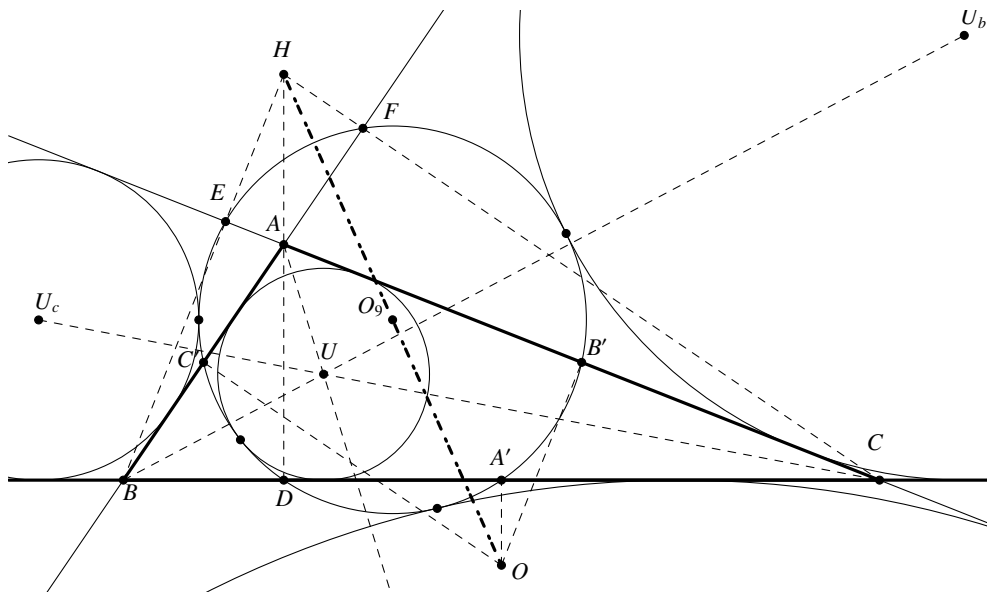
□

Sljedeći teorem je otkrio i dokazao Karl Wilhelm Feuerbach 1822. godine.

Teorem 1.2.3 (Feuerbachov teorem). *Kružnica devet točaka k_9 dira upisanu kružnicu k_u i sve tri pripisane kružnice k_a, k_b, k_c danog trokuta ABC . Pri tome upisana kružnica k_u dira kružnicu k_9 iznutra, dok je ostale pripisane kružnice diraju izvana. Nadalje, ako je O_9 središte kružnice k_9 , R polumjer trokutu ABC opisane kružnice, a $k_u = k(U, r)$, $k_a = k(U_a, r_a)$, $k_b = k(U_b, r_b)$, $k_c = k(U_c, r_c)$, tada vrijedi*

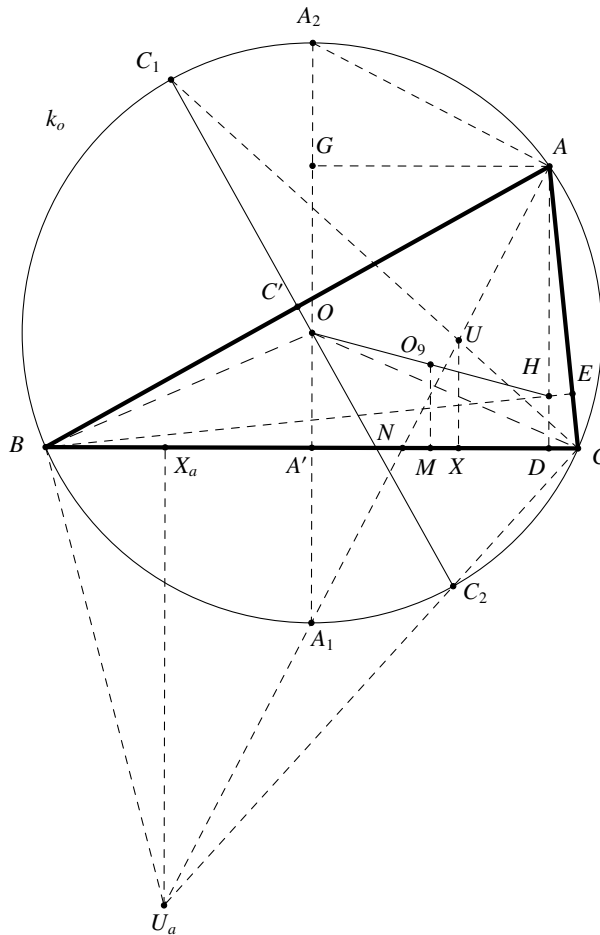
$$|O_9U| = \frac{R}{2} - r, \quad |O_9U_a| = \frac{R}{2} + r_a,$$

$$|O_9U_b| = \frac{R}{2} + r_b, \quad |O_9U_c| = \frac{R}{2} + r_c.$$



Slika 1.18: Kružnica devet točaka dodiruje upisanu i pripisane kružnice trokuta ABC

Dokaz. Neka su A_1 i A_2 točke presjeka kružnice k_o opisane trokutu ABC i pravca OA' , pri čemu je točka O središte kružnice k_o , a točka A' polovište stranice \overline{BC} (slika 1.19). Kako je OA' simetrala stranice \overline{BC} , a točka A_1 leži na toj simetrali, to su trokuti BOA_1 i



Slika 1.19: Slika uz teorem 1.2.3

COA_1 sukladni prema S-S-S teoremu o sukladnosti. Sada slijedi da je $\sphericalangle BOA_1 = \sphericalangle COA_1$, a primjenom teorema o središnjem i obodnom kutu zaključujemo da je $\sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle A_1AC$, iz čega slijedi da je AA_1 simetrala kuta pri vrhu A . Neka su sada C_1 i C_2 točke presjeka kružnice k_o opisane trokutu ABC i pravca OC' , pri čemu je točka C' polovište stranice \overline{AB} . Analogno zaključujemo da je CC_1 simetrala kuta pri vrhu C . Neka je G nožište okomice iz vrha A na dužinu $\overline{A_1A_2}$ te neka su točke M i D redom nožišta okomica iz središta O_9 kružnice devet točaka i vrha A na stranicu \overline{BC} . Svi kutovi četverokuta $A'DAG$ su pravi i

zato vrijedi

$$|GA'| = |AD|, \quad |GA| = |A'D|. \quad (1.29)$$

Kako je $|AH| = 2|OA'|$, pri čemu je točka H ortocentar trokuta ABC (vidite napomenu 1.1.4), to je

$$\begin{aligned} |OG| &= |GA'| - |OA'| = |AD| - |OA'| = |AH| + |HD| - |OA'| \\ &= 2|OA'| + |HD| - |OA'| = |OA'| + |HD|. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Kako su pravci OA' , O_9M , HD paralelni i točka O_9 je prema teoremu 1.1.1 polovište dužine \overline{OH} , to je četverokut $OA'DH$ trapez, a dužina $\overline{O_9M}$ mu je srednjica. Tada iz (1.30) slijedi

$$|OG| = 2 \cdot \frac{|OA'| + |HD|}{2} = 2|O_9M|,$$

odnosno

$$|O_9M| = \frac{|OG|}{2}. \quad (1.31)$$

Neka je X nožište okomice iz središta U trokutu upisane kružnice na stranicu \overline{BC} te neka je točka N presjek pravaca A_1A i BC . Promotrimo trokute AGA_2 i UXN . Kut $\sphericalangle A_2AA_1$ je kut nad promjerom $\overline{A_2A_1}$ kružnice k_o pa je $\sphericalangle A_2AA_1 = 90^\circ$, te su stoga pravci A_2A i UN okomiti. Pravci UX i GA su okomiti jer su pravci GA i BC paralelni, a pravci BC i UX su međusobno okomiti. Sada uočavamo da su krakovi kutova $\sphericalangle A_2AG$ i $\sphericalangle NUX$ međusobno okomiti i $\sphericalangle AGA_2 = \sphericalangle UXN = 90^\circ$ pa su stoga trokuti AGA_2 i UXN slični prema K-K-K teoremu o sličnosti. Stoga vrijedi

$$\frac{|A_2G|}{|AG|} = \frac{|NX|}{|UX|},$$

iz čega primjenom jednakosti (1.29) slijedi

$$\frac{|A_2G|}{|A'D|} = \frac{|NX|}{|UX|}.$$

Prema tome,

$$|A_2G| \cdot |UX| = |A'D| \cdot |NX|. \quad (1.32)$$

Ranije smo dokazali da je $\sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle A_1AC$, a kako je kut $\sphericalangle BCA_1$ također obodni kut nad lukom $\overline{BA_1}$ kao i kut $\sphericalangle BAA_1$ te kako točka N leži na stranici \overline{BC} , to je

$$\sphericalangle A_1AC = \sphericalangle BCA_1 = \sphericalangle NCA_1.$$

Trokutima A_1AC i A_1CN još je kut $\sphericalangle AA_1C$ zajednički, pa su tada ta dva trokuta slična prema K-K-K teoremu o sličnosti te stoga vrijedi

$$\frac{|A_1N|}{|A_1C|} = \frac{|A_1C|}{|A_1A|}. \quad (1.33)$$

Promotrimo sada trokut A_1UC . Kut $\sphericalangle A_1UC$ je vanjski kut trokuta UAC , pa vrijedi

$$\sphericalangle A_1UC = \sphericalangle UAC + \sphericalangle UCA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}, \quad (1.34)$$

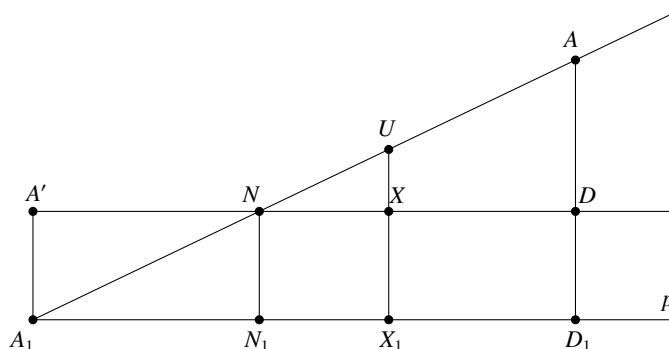
pri čemu su α i γ kutovi trokuta ABC pri vrhu A , odnosno C . Nadalje,

$$\sphericalangle UCA_1 = \sphericalangle UCB + \sphericalangle BCA_1 = \sphericalangle UCB + \sphericalangle BAA_1 = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2}. \quad (1.35)$$

Iz jednakosti (1.34) i (1.35) slijedi da je $\sphericalangle UCA_1 = \sphericalangle A_1UC$, pa je trokut UA_1C jednako-kračan trokut te je tada $|A_1C| = |A_1U|$. Uvrštavanjem dobivene jednakosti u jednakost (1.33) dobivamo

$$\frac{|A_1N|}{|A_1U|} = \frac{|A_1U|}{|A_1A|}. \quad (1.36)$$

Promotrimo sada posebno dio slike 1.19 na slici 1.20.



Slika 1.20: Slika uz teorem 1.2.3

Neka je p pravac koji prolazi točkom A_1 i paralelan je s pravcem $A'D$. Neka su N_1, X_1, D_1 redom nožišta okomica iz točaka N, X, D na pravac p , a znamo da je A_1 nožište okomice iz točke A' na taj pravac. Sada prema Talesovom teoremu o proporcionalnosti vrijedi

$$\frac{|A_1N|}{|A_1U|} = \frac{|A_1N_1|}{|A_1X_1|}, \quad (1.37)$$

te

$$\frac{|A_1U|}{|A_1A|} = \frac{|A_1X_1|}{|A_1D_1|}. \quad (1.38)$$

Sada iz jednakosti (1.36) te (1.37) i (1.38) slijedi

$$\frac{|A_1N_1|}{|A_1X_1|} = \frac{|A_1X_1|}{|A_1D_1|}. \quad (1.39)$$

U četverokutu $A'NN_1A_1$ svi kutovi su pravi pa je taj četverokut pravokutnik te je

$$|A_1N_1| = |A'N|. \quad (1.40)$$

Analogno zaključujemo da je četverokut $A'DD_1A_1$ pravokutnik te stoga vrijedi

$$|A_1D_1| = |A'D|. \quad (1.41)$$

Također,

$$|A_1X_1| = |A'X|. \quad (1.42)$$

Sada iz jednakosti (1.39), (1.40), (1.41) i (1.42) slijedi

$$\frac{|A'N|}{|A'X|} = \frac{|A'X|}{|A'D|},$$

pa je

$$|A'X^2| = |A'N| \cdot |A'D| \quad (1.43)$$

te se sada možemo vratiti promatranju slike 1.19. Jednakost (1.43) možemo proširiti na sljedeći način:

$$|A'X| \cdot |A'D| - |A'X|^2 = |A'X| \cdot |A'D| - |A'N| \cdot |A'D|,$$

iz čega slijedi

$$|A'X|(|A'D| - |A'X|) = |A'D|(|A'X| - |A'N|),$$

pa promatranjem slike konačno zaključujemo da vrijedi

$$|A'X| \cdot |XD| = |A'D| \cdot |NX|. \quad (1.44)$$

Iz jednakosti (1.32) i (1.44) sada imamo

$$|A_2G| \cdot |UX| = |A'X| \cdot |XD|. \quad (1.45)$$

Promatrajući sliku 1.19 uočavamo da vrijedi

$$|O_9U|^2 = (|UX| - |O_9M|)^2 + (|A'X| - |A'M|)^2.$$

Kako je točka M polovište dužine $\overline{A'D}$, to je

$$|A'M| = \frac{|A'D|}{2}. \quad (1.46)$$

Sada uz primjenu jednakosti (1.31) i (1.46) vrijedi

$$\begin{aligned} |O_9U|^2 &= \left(|UX| - \frac{|OG|}{2}\right)^2 + \left(|A'X| - \frac{|A'D|}{2}\right)^2 \\ &= |UX|^2 - |UX| \cdot |OG| + \frac{1}{4}|OG|^2 + |A'X|^2 - |A'X| \cdot |A'D| + \frac{1}{4}|A'D|^2 \\ &= \frac{1}{4}|OG|^2 + \frac{1}{4}|A'D|^2 + |UX|^2 - |OG| \cdot |UX| - |A'X|(|A'D| - |A'X|). \end{aligned}$$

Uz primjenu Pitagorinog teorema na trokut OAG i jednakosti (1.29), odatle dobivamo

$$|O_9U|^2 = \frac{1}{4}|OA|^2 + |UX|^2 - |OG| \cdot |UX| - |A'X| \cdot |DX|.$$

Primjenom jednakosti (1.45) imamo dalje

$$\begin{aligned} |O_9U|^2 &= \frac{1}{4}|OA|^2 + |UX|^2 - |OG| \cdot |UX| - |A_2G| \cdot |UX| \\ &= \frac{1}{4}|OA|^2 + |UX|^2 - |UX|(|OG| + |A_2G|) \\ &= \frac{1}{4}|OA|^2 + |UX|^2 - |OA_2| \cdot |UX| \\ &= \frac{1}{4}R^2 + r^2 - Rr \\ &= \left(\frac{R}{2} - r\right)^2. \end{aligned}$$

Prema teoremu 1.2.1 vrijedi

$$R^2 - 2Rr \geq 0,$$

iz čega slijedi

$$\frac{R}{2} \geq r.$$

Sada konačno zaključujemo

$$|O_9U| = \frac{R}{2} - r. \quad (1.47)$$

Iz posljednje jednakosti vidimo da je udaljenost središta O_9 kružnice devet točaka i središta upisane kružnice U jednaka razlici njihovih polumjera što dokazuje da se te dvije kružnice dodiruju, pri čemu se upisana kružnica (kružnica s manjim polumjerom) nalazi unutar kružnice devet točaka pa dodiruje kružnicu k_9 iznutra.

Sada trebamo dokazati da kružnica devet točaka dodiruje pripisanu kružnicu k_a izvana. Neka su X_a, Y_a, Z_a dirališta pripisane kružnice k_a s odgovarajućim stranicama trokuta ABC (slika 1.21).

Kako je udaljenost neke točke ravnine od oba dirališta tangenata položenih tom točkom na neku kružnicu jednaka (jer su trokuti kojima su vrhovi jedno diralište, točka iz koje je položena tangenta i središte kružnice, sukladni prema S-S-K[>] teoremu o sukladnosti), to za udaljenosti točaka A, B, C od dirališta X_a, Y_a, Z_a trokutu pripisane kružnice i odgovarajućih stranica trokuta vrijedi

$$|AZ_a| = |AY_a|, \quad |BZ_a| = |BX_a|, \quad |CX_a| = |CY_a|. \quad (1.49)$$

Uvrštavajući jednakosti iz (1.49) u formulu za opseg trokuta, dobivamo

$$o = |AB| + |AC| + |BC| = |AZ_a| - |BZ_a| + |AY_a| - |CY_a| + |BX_a| + |CX_a| = 2|AZ_a|,$$

iz čega slijedi

$$|AZ_a| = s,$$

pri čemu je s poluopseg trokuta ABC . Primjenom prethodne jednakosti dobivamo

$$|BX_a| = |BZ_a| = |AZ_a| - |AB| = s - |AB|. \quad (1.50)$$

Analogno za udaljenosti vrhova trokuta ABC od dirališta X, Y, Z trokutu upisane kružnice i odgovarajućih stranica trokuta vrijedi

$$|AZ| = |AY|, \quad |BZ| = |BX|, \quad |CY| = |CX|, \quad (1.51)$$

pa je opseg trokuta ABC jednak

$$o = |AB| + |AC| + |BC| = |AZ| + |BZ| + |AY| + |CY| + |BX| + |CX| = 2(|AY| + |BX| + |CX|),$$

iz čega slijedi

$$|AY| + |BX| + |CX| = \frac{o}{2} = s.$$

Iz posljednje jednakosti i (1.51) dobivamo

$$|CX| = s - (|AY| + |BX|) = s - (|AZ| + |BZ|) = s - |AB|. \quad (1.52)$$

Uočavamo da su desne strane jednakosti (1.50) i (1.52) jednake te stoga vrijedi

$$|BX_a| = |CX|.$$

Točke X_a i X leže na stranici \overline{BC} kojoj je točka A' polovište pa su točke X_a i X simetrične obzirom na točku A' tj. vrijedi

$$|A'X| = |A'X_a|. \quad (1.53)$$

Sada jednakost (1.43) možemo zapisati kao

$$|A'X_a|^2 = |A'N| \cdot |A'D|$$

iz čega analognim postupcima kao u dokazu jednakosti (1.44) dolazimo do

$$|A'X_a| \cdot |DX_a| = |A'D| \cdot |X_aN|. \quad (1.54)$$

Sada iz jednakosti (1.48) i (1.54) slijedi

$$|A_2G| \cdot |X_aU_a| = |A'X_a| \cdot |DX_a|. \quad (1.55)$$

Promatrajući sliku 1.19 te koristeći Pitagorin teorem uočavamo da vrijedi

$$|O_9U_a|^2 = (|O_9M| + |X_aU_a|)^2 + (|A'X_a| + |A'M|)^2,$$

odnosno, uz primjenu jednakosti (1.46) i (1.31),

$$\begin{aligned} |O_9U_a|^2 &= (|O_9M| + |X_aU_a|)^2 + (|A'X_a| + |A'M|)^2 \\ &= \left(\frac{|OG|}{2} + |X_aU_a|\right)^2 + \left(|A'X_a| + \frac{|A'D|}{2}\right)^2 \\ &= \frac{|OG|^2}{4} + \frac{|A'D|}{4} + |X_aU_a|^2 + |OG| \cdot |X_aU_a| + |A'X_a|(|A'X_a| + |A'D|). \end{aligned}$$

Sada uz primjenu Pitagorinog teorema na trokut OAG i jednakosti (1.29) dalje vrijedi

$$|O_9U_a|^2 = \frac{|OA|^2}{4} + |X_aU_a|^2 + |OG| \cdot |X_aU_a| + |A'X_a| \cdot |DX_a|.$$

Primjenom jednakosti (1.55) imamo dalje

$$\begin{aligned} |O_9U_a|^2 &= \frac{1}{4}|OA|^2 + |X_aU_a|^2 + |OG| \cdot |X_aU_a| + |A_2G| \cdot |X_aU_a| \\ &= \frac{1}{4}|OA|^2 + |X_aU_a|^2 + |X_aU_a|(|OG| + |A_2G|) \\ &= \frac{1}{4}|OA|^2 + |X_aU_a|^2 + |X_aU_a|(|OA_2|) \\ &= \frac{1}{4}R^2 + r_a^2 + r_aR \\ &= \left(\frac{R}{2} + r_a\right)^2, \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$|O_9U_a| = \frac{R}{2} + r_a.$$

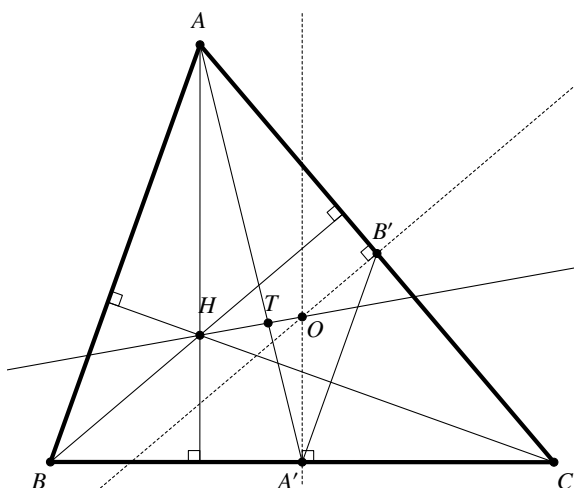
Iz posljednje jednakosti vidimo da je udaljenost središta pripisane kružnice U_a i središta O_9 kružnice devet točaka jednaka zbroju njihovih polumjera što dokazuje da se te dvije kružnice dodiruju izvana. Analogno se dokaže da i kružnice k_b i k_c izvana dodiruju kružnicu devet točaka k_9 , tj. da vrijede jednakosti

$$|O_9U_b| = \frac{R}{2} + r_b, \quad |O_9U_c| = \frac{R}{2} + r_c.$$

□

Teorem 1.2.4. Središte O opisane kružnice, težište T i ortocentar H nekog trokuta ABC leže na jednom pravcu p kojeg nazivamo Eulerovim pravcem tog trokuta. Pritom se T nalazi između H i O te vrijedi

$$|HT| = 2|TO|.$$



Slika 1.22: Slika uz dokaz teorema 1.2.4

Dokaz. Neka je u trokutu ABC točka A' polovište stranice \overline{BC} , a B' polovište stranice \overline{AC} . Tada je $A'B'$ srednjica trokuta ABC , pa su pravci $A'B'$ i AB paralelni i $|A'B'| = \frac{1}{2}|AB|$. Kako je pravac AH okomit na BC i $A'O$ okomit na BC , to su pravci AH i $A'O$ paralelni. Pravac BH je okomit na AC i $B'O$ je okomit na AC , pa su pravci BH i $B'O$ paralelni. Zaključujemo da su odgovarajuće stranice trokuta ABH i $A'B'O$ paralelne. Stoga su šiljasti kutovi $\angle HAB$ i $\angle OA'B'$ s paralelnim kracima međusobno sukladni, kao i kutovi $\angle ABH$ i $\angle A'B'O$. Dakle, trokuti ABH i $A'B'O$ su slični prema K-K-K teoremu o sličnosti, pa vrijedi

$$\frac{|AH|}{|A'O|} = \frac{|AB|}{|A'B'|} = 2. \quad (1.56)$$

Neka je točka T_1 presjek pravaca HO i AA' . Kako su pravci AH i $A'O$ paralelni, a točke A, A', T_1 odnosno H, O, T_1 kolinearne, to su trokuti AHT_1 i $A'OT_1$ slični prema K-K-K teoremu o sličnosti. Iz te sličnosti i jednakosti (1.56) slijedi

$$\frac{|AT_1|}{|A'T_1|} = \frac{|AH|}{|A'O|} = 2. \quad (1.57)$$

Dužina $\overline{AA'}$ je težišnica trokuta ABC i za težište T tog trokuta vrijedi

$$\frac{|AT|}{|A'T|} = 2. \quad (1.58)$$

Izjednačavanjem (1.57) i (1.58) dobivamo

$$\frac{|AT_1|}{|A'T_1|} = \frac{|AT|}{|A'T|}.$$

Točke T i T_1 pripadaju dužini $\overline{AA'}$ i dijele je u istom omjeru što znači da se točke T i T_1 podudaraju. Dakle, točka T leži na pravcu HO , tj. točke T, H, O su kolinearne. Kako su trokuti AHT i $A'OT$ slični, to je

$$\frac{|TH|}{|TO|} = \frac{|AT|}{|A'T|} = 2,$$

pa je prema tome

$$|TH| = 2|TO|.$$

Dokazana tvrdnja će vrijediti za svaki trokut jer se težište uvijek nalazi između točaka O i H . Naime, težišnica iz bilo kojeg vrha trokuta uvijek se nalazi između visine trokuta iz tog vrha i simetrale nasuprotne stranice tog trokuta, pa je prema tome i težište trokuta uvijek između ortocentra H i središta O kružnice opisane trokutu. \square

Teorem 1.2.5. *Za središte O_9 kružnice devet točaka trokuta ABC i središta U_a, U_b, U_c tom trokutu pripisanih kružnica vrijedi*

$$|UO_9| + |U_aO_9| + |U_bO_9| + |U_cO_9| = 6R,$$

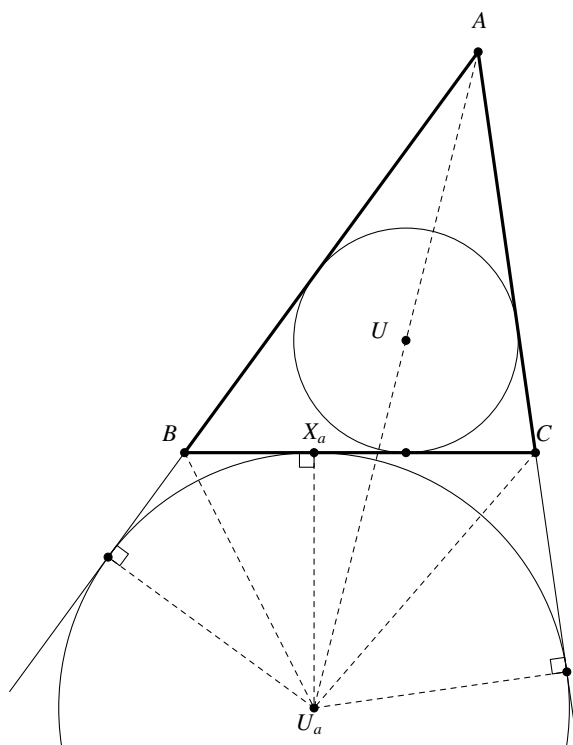
pri čemu je R polumjer kružnice opisane trokutu ABC .

Dokaz. Prema teoremu 1.2.3 vrijedi

$$\begin{aligned} |UO_9| &= \frac{R}{2} - r, & |U_aO_9| &= \frac{R}{2} + r_a, \\ |U_bO_9| &= \frac{R}{2} + r_b, & |U_cO_9| &= \frac{R}{2} + r_c, \end{aligned}$$

pri čemu su r_a, r_b, r_c polumjeri kružnica pripisanih trokutu ABC , a r polumjer kružnice upisane tom trokutu. Zbrajanjem navedenih udaljenosti dobivamo

$$|UO_9| + |U_aO_9| + |U_bO_9| + |U_cO_9| = 2R + r_a + r_b + r_c - r. \quad (1.59)$$



Slika 1.23: Slika uz dokaz teorema 1.2.3

Neka je P površina trokuta ABC , te neka su a, b, c duljine stranica trokuta ABC . Promatrajući sliku 1.23 uočavamo da površinu trokuta ABC možemo izraziti preko površina trokuta ABU_a, ACU_a, BCU_a na sljedeći način:

$$P = P(ABU_a) + P(ACU_a) - P(BCU_a).$$

Kako je visina svakog tog trokuta iz vrha U_a jednaka r_a , to je

$$P = \frac{cr_a}{2} + \frac{br_a}{2} - \frac{ar_a}{2} = \frac{r_a}{2}(c + b - a) = r_a(s - a),$$

pri čemu je s poluopseg trokuta ABC . Iz toga slijedi

$$r_a = \frac{P}{s - a}.$$

Analogno se dokaže da je

$$r_b = \frac{P}{s-b} \quad \text{i} \quad r_c = \frac{P}{s-c}.$$

Primjenom Heronove formule na dobivene izraze dobivamo

$$r_a = \frac{P}{s-a} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}} = \frac{s(s-b)(s-c)}{P}. \quad (1.60)$$

Analogno slijedi

$$r_b = \frac{s(s-a)(s-c)}{P}, \quad r_c = \frac{s(s-a)(s-b)}{P}. \quad (1.61)$$

Iz poznate formule za površinu trokuta $P = rs$ slijedi

$$r = \frac{P}{s} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{P}. \quad (1.62)$$

Iz jednakosti (1.60), (1.61), (1.62) dobivamo

$$\begin{aligned} r_a + r_b + r_c - r &= \frac{s(s-b)(s-c)}{P} + \frac{s(s-a)(s-c)}{P} + \frac{s(s-a)(s-b)}{P} - \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{P} \\ &= \frac{s(s-c)(s-b-(s-a))}{P} + \frac{(s-a)(s-b)(s-(s-c))}{P} \\ &= \frac{s(s-c)(2s-a-b)}{P} + \frac{(s-a)(s-b)c}{P} \\ &= \frac{s(s-c)c}{P} + \frac{(s-a)(s-b)c}{P} \\ &= \frac{c(s^2 - sc + s^2 - sb - sa + ab)}{P} \\ &= \frac{c(2s^2 - s(a+b+c) + ab)}{P} \\ &= \frac{c(s(2s-a-b-c) + ab)}{P} \\ &= \frac{abc}{P}. \end{aligned}$$

Kako površinu trokuta možemo izraziti i kao

$$P = \frac{abc}{4R},$$

to zaključujemo

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R.$$

Ovo uvrstimo u (1.59) i konačno dobivamo

$$|UO_9| + |U_aAO_9| + |U_bO_9| + |U_cO_9| = 6R.$$

□

Teorem 1.2.6. *Za središte opisane kružnice O , težište trokuta T i središte O_9 kružnice devet točaka trokuta ABC vrijedi*

$$|OT| = 2|TO_9|.$$

Dokaz. Prema teoremu 1.1.1, središte kružnice k_9 je polovište dužine \overline{OH} pa je $|OO_9| = \frac{1}{2}|OH|$, a prema teoremu 1.2.4 je $|HT| = 2|OT|$, ili

$$|OT| = \frac{1}{3}|OH|. \quad (1.63)$$

Također prema teoremu 1.2.4, točke O, H, T su kolinearne, a kako je točka O_9 polovište dužine \overline{OH} , to su sve četiri točke kolinearne. Stoga je

$$|O_9T| = |OO_9| - |OT| = \frac{1}{2}|OH| - \frac{1}{3}|OH| = \frac{1}{6}|OH|. \quad (1.64)$$

Iz jednakosti (1.63) i (1.64) slijedi

$$|OT| : |O_9T| = \frac{1}{3}|OH| : \frac{1}{6}|OH| = 2 : 1,$$

tj.

$$|OT| = 2|O_9T|.$$

□

Teorem 1.2.7. *Neka su a, b, c duljine stranica trokuta ABC , a R polumjer tom trokutu opisane kružnice. Za udaljenost težišta T i središta O opisane kružnice vrijedi*

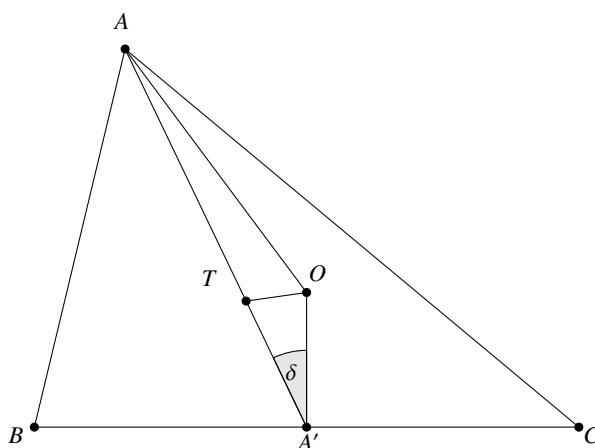
$$|OT|^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Dokaz. Neka je A' polovište stranice \overline{BC} trokuta ABC te neka je $\delta = \angle OA'A = \angle OA'T$. Primjenom teorema o kosinusu na trokut $OA'T$ dobivamo

$$\cos \delta = \frac{|OA'|^2 + |A'T|^2 - |OT|^2}{2|OA'| \cdot |A'T|},$$

a primjenom na trokut OAA' dobivamo

$$\cos \delta = \frac{|OA'|^2 + |AA'|^2 - |OA|^2}{2|AA'| \cdot |OA'|},$$



Slika 1.24: Slika uz dokaz teorema 1.2.7

te stoga slijedi

$$\frac{|OA'|^2 + |A'T|^2 - |OT|^2}{2|OA'| \cdot |A'T|} = \frac{|OA'|^2 + |AA'|^2 - |OA|^2}{2|AA'| \cdot |OA'|},$$

tj.

$$|AA'|(|OA'|^2 + |A'T|^2 - |OT|^2) = |A'T|(|OA'|^2 + |AA'|^2 - |OA|^2). \quad (1.65)$$

Kako je

$$|A'T| = \frac{1}{3}|AA'|,$$

jednakost (1.65) postaje

$$|AA'|(|OA'|^2 + \frac{1}{9}|AA'|^2 - |OT|^2) = \frac{1}{3}|AA'|(|OA'|^2 + |AA'|^2 - |OA|^2),$$

tj.

$$|OA'|^2 + \frac{1}{9}|AA'|^2 - |OT|^2 = \frac{1}{3}(|OA'|^2 + |AA'|^2 - |OA|^2),$$

iz čega slijedi

$$|OT|^2 = \frac{1}{3}|OA|^2 + \frac{2}{3}|OA'|^2 - \frac{2}{9}|AA'|. \quad (1.66)$$

Uočimo da je

$$|OA| = R. \quad (1.67)$$

Primjenom Pitagorinog teorema u trokutu BOA' dobivamo

$$|OA'| = \sqrt{|BO|^2 - |BA'|^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - a^2}. \quad (1.68)$$

Prema teoremu 1.2.2 vrijedi

$$|AA'| = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}. \quad (1.69)$$

Uvrštavanjem izraza iz jednakosti (1.67), (1.68) i (1.69) u jednakost (1.66) dobivamo

$$\begin{aligned} |OT|^2 &= \frac{1}{3}R^2 + \frac{1}{6}(4R^2 - a^2) - \frac{1}{18}(2(b^2 + c^2) - a^2) \\ &= \frac{1}{3}R^2 + \frac{2}{3}R^2 - \frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{9}b^2 - \frac{1}{9}c^2 + \frac{1}{18}a^2 \\ &= R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

□

Teorem 1.2.8. *Neka su a, b, c duljine stranica trokuta ABC , a R polumjer tom trokutu opisane kružnice. Zbroj kvadrata udaljenosti središta O_9 kružnice devet točaka k_9 do vrhova trokuta ABC dan je sa*

$$|AO_9|^2 + |BO_9|^2 + |CO_9|^2 = \frac{1}{4}(3R^2 + a^2 + b^2 + c^2).$$

Dokaz. Neka su A_1, B_1, C_1 redom nožišta okomica spuštenih iz vrhova A, B, C na pravac O_9T . Primjenom teorema o kosinusu na trokute ATO_9, BTO_9, CTO_9 dobivamo

$$\begin{aligned} |AO_9|^2 &= |AT|^2 + |O_9T|^2 - 2|O_9T| \cdot |AT| \cos \sphericalangle ATO_9, \\ |BO_9|^2 &= |BT|^2 + |O_9T|^2 - 2|O_9T| \cdot |BT| \cos \sphericalangle BTO_9, \\ |CO_9|^2 &= |CT|^2 + |O_9T|^2 - 2|O_9T| \cdot |CT| \cos \sphericalangle CTO_9. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Primjenom trigonometrije pravokutnog trokuta na trokute AA_1T, BB_1T, CC_1T dobivamo

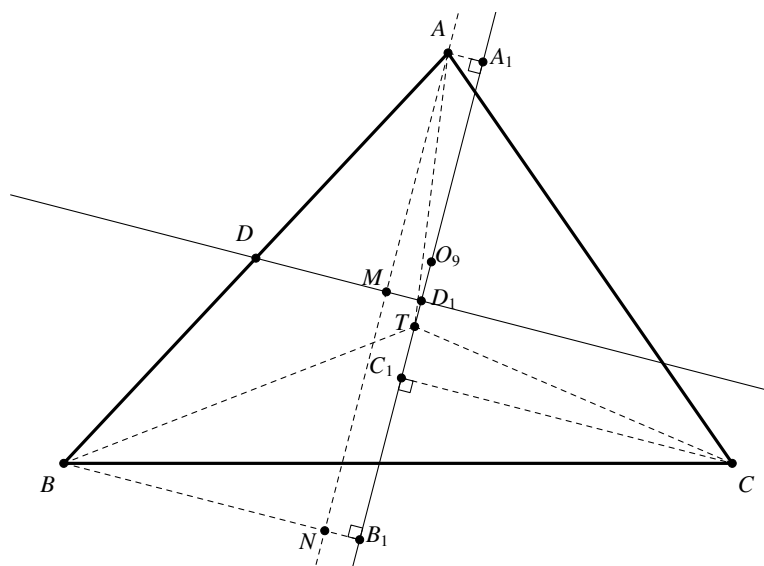
$$\cos \sphericalangle ATA_1 = \frac{|A_1T|}{|AT|}, \quad \cos \sphericalangle BTB_1 = \frac{|B_1T|}{|BT|}, \quad \cos \sphericalangle CTC_1 = \frac{|C_1T|}{|CT|},$$

tj.

$$\cos \sphericalangle ATO_9 = \frac{|A_1T|}{|AT|}, \quad \cos \sphericalangle BTO_9 = -\frac{|B_1T|}{|BT|}, \quad \cos \sphericalangle CTO_9 = -\frac{|C_1T|}{|CT|}.$$

Kada to uvrstimo u (1.70) dobivamo

$$\begin{aligned} |AO_9|^2 &= |AT|^2 + |O_9T|^2 - 2|O_9T| \cdot |A_1T|, \\ |BO_9|^2 &= |BT|^2 + |O_9T|^2 + 2|O_9T| \cdot |B_1T|, \end{aligned}$$



Slika 1.25: Slika uz dokaz teorema 1.2.8

$$|CO_9|^2 = |CT|^2 + |O_9T|^2 + 2|O_9T| \cdot |C_1T|.$$

Zbrajanjem tih triju jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} |AO_9|^2 + |BO_9|^2 + |CO_9|^2 &= |AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 + 3|O_9T|^2 \\ &\quad - 2|O_9T|(|A_1T| - |B_1T| - |C_1T|). \end{aligned} \quad (1.71)$$

Neka je sada točka N nožište okomice iz vrha A na BB_1 , točka D polovište dužine \overline{AB} , a točka M polovište dužine \overline{AN} . Tada je dužina \overline{MD} srednjica trokuta ABN , pa su pravci DM i BB_1 paralelni. Kako su pravci BB_1 i O_9T okomiti, to su i pravci DM i O_9T okomiti. Označimo sa D_1 sjecište ta dva okomita pravca. Očito je da su četverokuti NB_1D_1M i MD_1A_1A pravokutnici te kako je $|AM| = |MN|$ to je $|A_1D_1| = |B_1D_1|$. Kako su $\angle CTC_1$ i $\angle DTD_1$ vršni, to je $\angle CTC_1 = \angle DTD_1$, a $\angle CC_1T = \angle DD_1T = 90^\circ$, pa su trokuti CC_1T i DD_1T slični prema K-K-K teoremu o sličnosti. Stoga slijedi

$$\frac{|C_1T|}{|D_1T|} = \frac{|CT|}{|DT|} = 2, \quad (1.72)$$

jer je \overline{DC} težišnica trokuta ABC , a točka T ju dijeli u omjeru $2 : 1$. Iz (1.72) slijedi da je

$$|C_1T| = 2|D_1T|,$$

pa sada imamo

$$\begin{aligned}
 |A_1T| &= |A_1D_1| + |D_1T| = |B_1D_1| + |D_1T| \\
 &= |B_1T| + |D_1T| + |D_1T| = |B_1T| + 2|D_1T| \\
 &= |B_1T| + |C_1T|.
 \end{aligned}$$

Uvrštavanjem prethodne jednakosti u (1.71) dobivamo

$$|AO_9|^2 + |BO_9|^2 + |CO_9|^2 = |AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 + 3|O_9T|^2. \quad (1.73)$$

Kako je

$$\begin{aligned}
 |AT| &= \frac{1}{3} \sqrt{(2(b^2 + c^2) - a^2)}, \\
 |BT| &= \frac{1}{3} \sqrt{(2(a^2 + c^2) - b^2)}, \\
 |CT| &= \frac{1}{3} \sqrt{(2(a^2 + b^2) - c^2)},
 \end{aligned}$$

pri čemu su t_a, t_b, t_c duljine težišnica trokuta ABC , to iz teorema 1.2.2 slijedi

$$|AT| = \frac{1}{3} \sqrt{(2(b^2 + c^2) - a^2)}, \quad |BT| = \frac{1}{3} \sqrt{(2(a^2 + c^2) - b^2)}, \quad |CT| = \frac{1}{3} \sqrt{(2(a^2 + b^2) - c^2)},$$

pa je

$$|AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2). \quad (1.74)$$

Prema teoremu 1.2.7,

$$|O_9T| = \frac{1}{2}|OT|,$$

pa jednakost (1.73) postaje

$$|AO_9|^2 + |BO_9|^2 + |CO_9|^2 = |AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 + \frac{3}{4}|OT|^2.$$

Sada primjenom teorema 1.2.7 i jednakosti (1.74) dobivamo

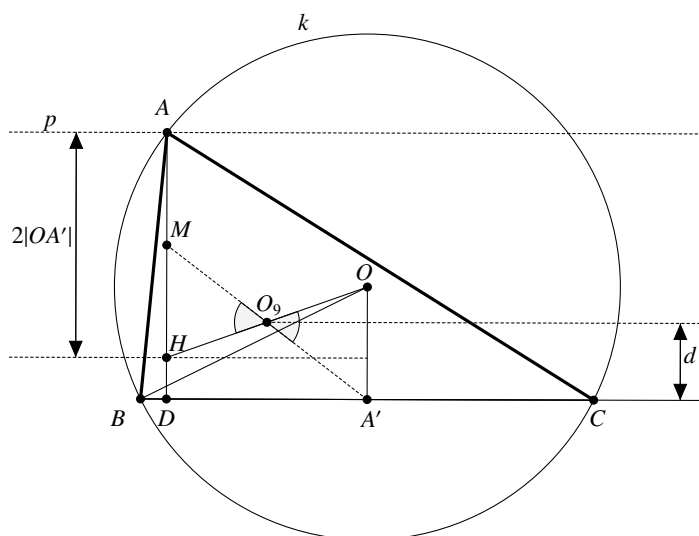
$$\begin{aligned}
 |AO_9|^2 + |BO_9|^2 + |CO_9|^2 &= \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{3}{4}\left(R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)\right) \\
 &= \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{3}c^2 + \frac{3}{4}R^2 - \frac{1}{12}a^2 - \frac{1}{12}b^2 - \frac{1}{12}c^2 \\
 &= \frac{1}{4}(3R^2 + a^2 + b^2 + c^2).
 \end{aligned}$$

□

1.3 Konstruktivni zadaci

Sada ćemo riješiti nekoliko konstruktivnih zadataka vezanih za kružnicu devet točaka.

Primjer 1.3.1. *Konstruirajte trokut ABC kojemu je zadana stranica \overline{BC} , polumjer opisane kružnice R i udaljenost d središta O_9 Feuerbachove kružnice od stranice \overline{BC} .*



Slika 1.26: Slika uz primjer 1.3.1

Obzirom da je zadana stranica \overline{BC} i polumjer opisane kružnice R , možemo konstruirati jednakokraki trokut BOC s kracima duljine R i time smo konstruirali središte O opisane kružnice k . Prema teoremu 1.1.1, točka O_9 je polovište dužine \overline{HO} pri čemu je H ortocentar trokuta ABC . Neka je D nožište okomice iz ortocentra H na stranicu \overline{BC} , a A' nožište okomice iz središta O opisane kružnice na tu istu stranicu. Sa slike 1.26 uočavamo da je

$$|OA'| = |HD| + (d - |HD|) + (d - |HD|)$$

odakle možemo izraziti udaljenost ortocentra H do stranice \overline{BC} :

$$|HD| = 2d - |OA'|. \quad (1.75)$$

Kako je

$$|AH| = 2 \cdot |OA'|$$

(vidite napomenu 1.1.4), to je visina iz vrha A trokuta ABC jednaka

$$|AD| = |HD| + 2 \cdot |OA'|. \quad (1.76)$$

Iz jednakosti (1.75) i (1.76) slijedi

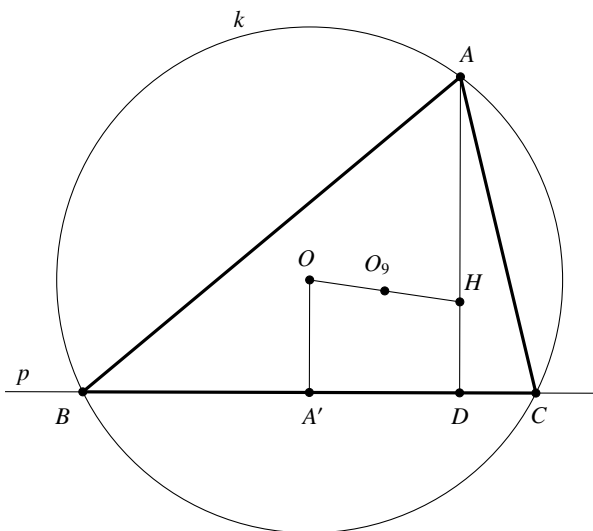
$$|AD| = 2d + |OA'|. \quad (1.77)$$

Sada konstruiramo pravac p paralelan s pravcem BC i udaljen od njega za $|AD|$. Točka u kojoj pravac p siječe kružnicu k je točka A . Zadatak će imati rješenje ako je $|AD| \leq |OA'| + R$ odnosno, zbog jednakosti (1.77), ako je

$$2d \leq R.$$

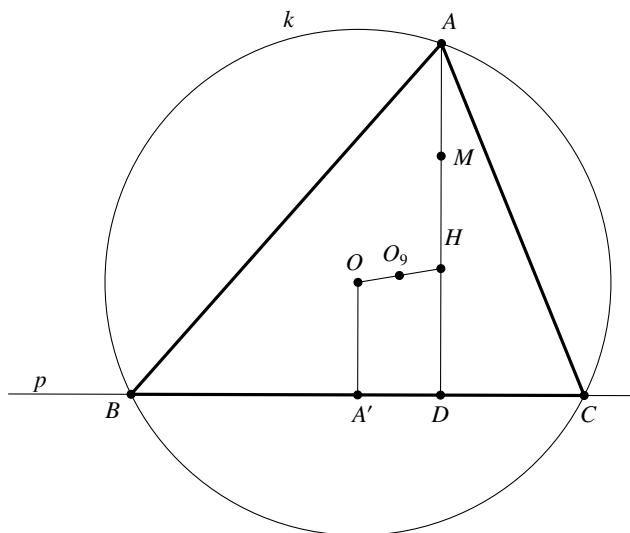
Primjer 1.3.2. *Konstruirajte trokut ABC ako su mu zadani položaji ortocentra H , središta Feuerbachove kružnice O_9 i nožišta D visine iz vrha A .*

Kako su zadani položaji točaka H i O_9 , a prema teoremu 1.1.1 znamo da je točka O_9 polovište dužine \overline{HO} , tada znamo odrediti središte O opisane kružnice trokuta ABC . Točkom D položimo okomicu p na HD . Na toj okomici se nalaze točke B i C . Nožište okomice iz točke O na p označimo sa A' . Uočimo da je $|AH| = 2 \cdot |OA'|$ (napomena 1.1.4), pa na pravac HD nanesimo dužinu $\overline{OA'}$ dva puta i tako dobijemo vrh A , s tim da su točke D i A na različitim stranama pravca HD u odnosu na točku H (slika 1.27). Sada oko točke O opišemo kružnicu k polumjera duljine \overline{OA} i točke koje su presjeci kružnice i pravca p su vrhovi B i C trokuta ABC .



Slika 1.27: Slika uz primjer 1.3.2

Primjer 1.3.3. *Konstruirajte trokut ABC ako su mu zadani položaji vrha A , središte Feuerbachove kružnice O_9 i središte opisane kružnice O .*



Slika 1.28: Slika uz primjere 1.3.3 i 1.3.4

Opišemo kružnicu k sa središtem u točki O polumjera $|OA|$. Kao i u prethodnom zadatku, uz primjenu teorema 1.1.1 znamo odrediti položaj ortocentra H , tako da je O_9 polovište dužine \overline{OH} . Potom odredimo polovište M dužine \overline{AH} te točkom O položimo pravac paralelan s pravcem AH i na tom pravcu odredimo točku A' tako da je $|OA'| = |AM|$. Sada točkom A' položimo okomicu p na pravac OA' . Presjeci pravca p i kružnice k su vrhovi B i C trokuta ABC .

Primjer 1.3.4. *Konstruirajte trokut ABC kojem je zadan položaj vrha A , ortocentar H i središte O_9 Feuerbachove kružnice.*

Odredimo prvo polovište M dužine \overline{AH} . Kako su zadani položaji točkaka H i O_9 , a prema teoremu 1.1.1 znamo da je točka O_9 polovište dužine \overline{HO} , znamo odrediti središte O opisane kružnice trokuta ABC . Središte O opisane kružnice leži na pravcu HO_9 tako da je O_9 polovište dužine \overline{OH} . Opišimo kružnicu $k(O, |OA|)$. Zatim točkom O položimo pravac paralelan pravcu MH , i na tom pravcu odredimo točku A' tako da je $|OA'| = |AM|$. Točkom A' položimo okomicu p na pravac OA' . Presjeci pravca p i kružnice k su točke B i C trokuta ABC .

Poglavlje 2

Simsonov pravac

2.1 Svojstva Simsonovog pravca

U prvom dijelu ovog poglavlja proučavat ćemo svojstva Simsonovog¹ pravca.

Teorem 2.1.1. *Neka je dan trokut ABC i njemu opisana kružnica k_o . Nožišta A_1, B_1, C_1 okomica spuštenih iz neke točke P kružnice k_o na stranice danog trokuta ABC su kolinearne točke. Pravac s na kojem leže nožišta A_1, B_1, C_1 zovemo Simsonovim pravcem točke P s obzirom na trokut ABC .*

Dokaz. Kako je $\sphericalangle PC_1B = \sphericalangle PA_1B = 90^\circ$, to su kutovi $\sphericalangle PC_1B$ i $\sphericalangle PA_1B$ kutovi nad promjerom \overline{BP} kružnice opisane tom četverokutu te je stoga četverokut C_1PA_1B tetivni. Kutovi $\sphericalangle BPC_1$ i $\sphericalangle BA_1C_1$ su obodni kutovi nad istim lukom te stoga vrijedi

$$\sphericalangle BPC_1 = \sphericalangle BA_1C_1 = \delta.$$

Analogno zaključujemo da je četverokut PCB_1A_1 tetivni četverokut, pa vrijedi

$$\sphericalangle CPB_1 = \sphericalangle CA_1B_1 = \varepsilon.$$

Kako su trokuti PBC_1 i PCB_1 pravokutni, to vrijedi

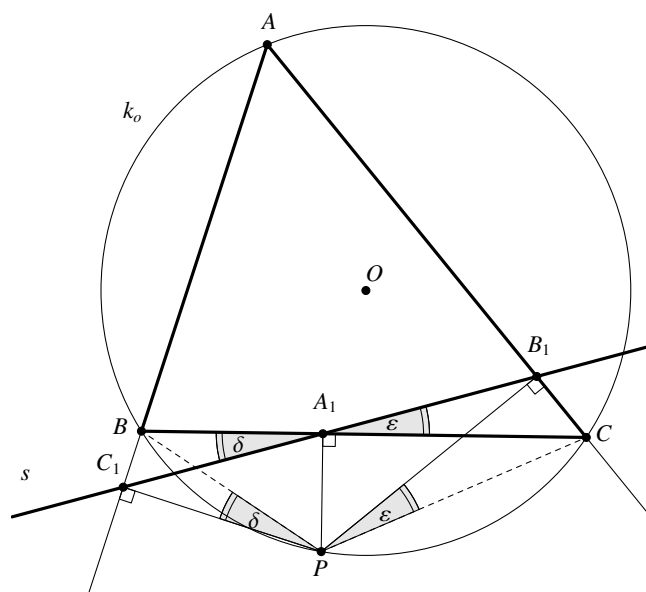
$$\sphericalangle PBC_1 = 90^\circ - \delta, \tag{2.1}$$

$$\sphericalangle ACP = \sphericalangle PCB_1 = 90^\circ - \varepsilon. \tag{2.2}$$

Četverokut $ABPC$ je tetivni pa uz primjenu jednakosti (2.1) vrijedi

$$\sphericalangle ACP = 180^\circ - \sphericalangle ABP = \sphericalangle PBC_1 = 90^\circ - \delta. \tag{2.3}$$

¹Robert Simson (1687. – 1768), škotski matematičar



Slika 2.1: Simsonov pravac točke P s obzirom na trokut ABC

Sada iz jednakosti (2.2) i (2.3) slijedi da je $\delta = \varepsilon$. Time smo dokazali da je

$$\sphericalangle BA_1C_1 = \sphericalangle CA_1B_1,$$

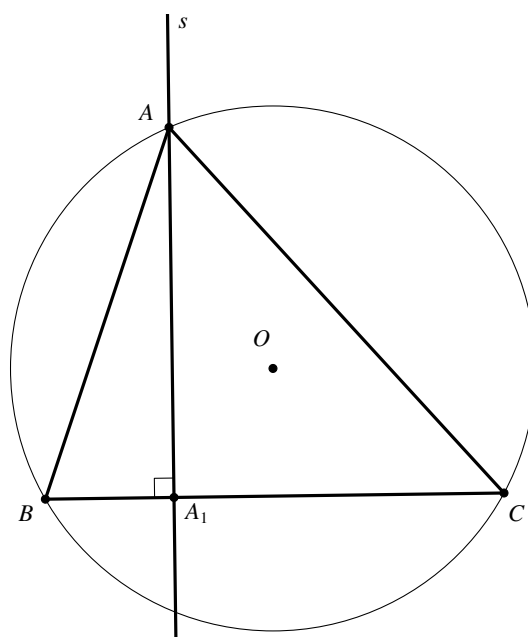
što znači da su kutovi $\sphericalangle BA_1C_1$ i $\sphericalangle CA_1B_1$ vršni kutovi pa im se po dva kraka nadopunjuju na pravac iz čega slijedi da točke A_1, B_1, C_1 leže na istom pravcu. \square

Korolar 2.1.2. *Simsonov pravac trokuta pridružen jednom vrhu tog trokuta podudara se s pravcem visine trokuta povučene iz tog vrha.*

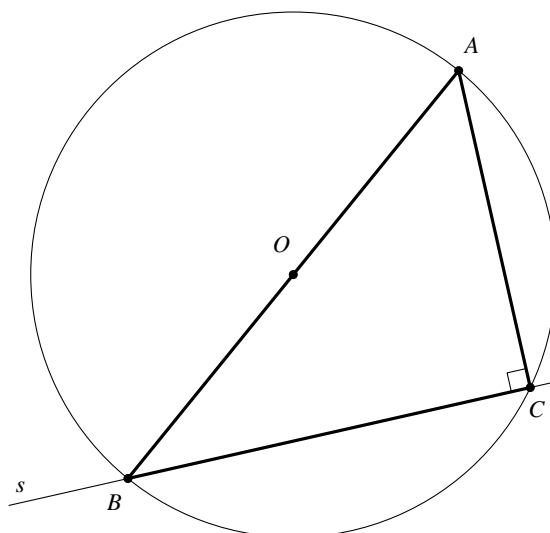
Dokaz. Ako iz bilo kojeg vrha trokuta spustimo okomice na priležeće stranice, nožišta će biti baš u tom vrhu, a ako spustimo okomicu na nasuprotnu stranicu, okomica će se podudarati s pravcem visine iz tog vrha (slika 2.2). Iz toga slijedi da se Simsonov pravac pridružen nekom vrhu trokuta podudara s pravcem visine iz tog vrha. \square

Korolar 2.1.3. *Simsonov pravac pravokutnog trokuta pridružen jednom vrhu hipotenuze podudara se s pravcem katete kojoj pripada taj vrh.*

Dokaz. Ako iz bilo kojeg vrha hipotenuze spustimo okomice na priležeće stranice, nožišta će biti baš u tom vrhu, a ako spustimo okomicu na nasuprotnu stranicu, okomica će se podudarati s pravcem katete kojoj pripada taj vrh (slika 2.3). \square



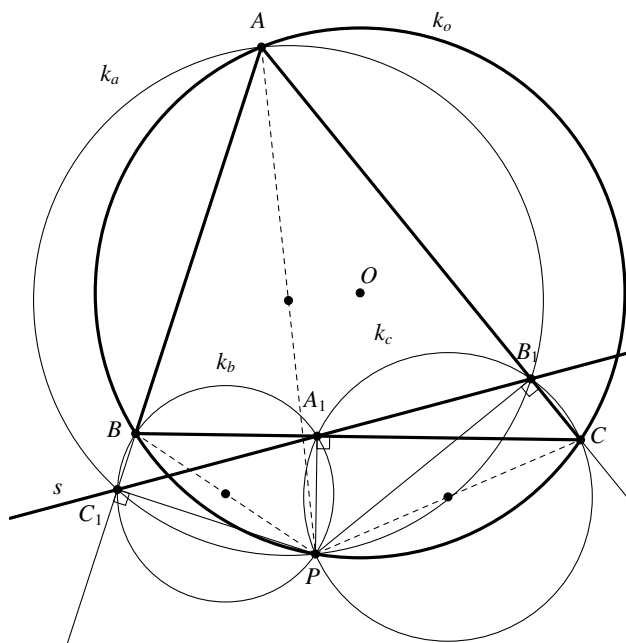
Slika 2.2: Simsonov pravac pridružen jednom vrhu trokuta (vrhu A)



Slika 2.3: Simsonov pravac pravokutnog trokuta pridružen jednom vrhu hipotenuze (vrhu B)

Teorem 2.1.4. *Točkom P dane kružnice k_o povucimo tri različite tetive \overline{PA} , \overline{PB} , \overline{PC} . Konstruirajmo tri kružnice k_a, k_b, k_c kojima su te tetive promjeri. Osim što sve te tri kružnice prolaze točkom P , sijeku se još u parovima u tri kolinearne točke A_1, B_1, C_1 .*

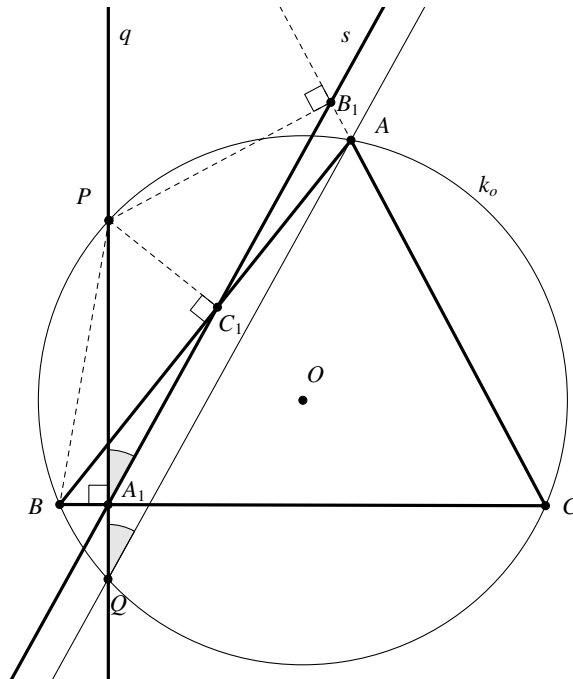
Dokaz. Neka je točka A_1 drugo sjecište kružnica k_b i k_c (slika 2.4). Tada su kutovi $\sphericalangle PA_1C$ i $\sphericalangle PA_1B$ pravi jer su to obodni kutovi nad promjerima \overline{PB} i \overline{PC} kružnica k_b i k_c . Iz toga slijedi da su točke B, C, A_1 kolinearne, a tada je točka A_1 nožište okomice iz točke P na stranicu \overline{BC} trokuta ABC . Analogno se dokaže da su točke B_1 i C_1 nožišta okomica iz točke P na stranice \overline{AC} i \overline{AB} . Prema prethodnom teoremu, nožišta A_1, B_1, C_1 okomica spuštenih iz točke P na opisanoj kružnici k_o trokuta ABC na stranice tog trokuta leže na Simsonovom pravcu s . □



Slika 2.4: Slika uz teorem 2.1.4

Teorem 2.1.5. *Neka je s Simsonov pravac određen točkom P kružnice k_o opisane trokutu ABC te neka je pravac q položen točkom P okomit na BC i siječe kružnicu k u točki Q . Tada je pravac AQ paralelan s pravcem s .*

Dokaz. Točka A_1 leži na kraku PQ kuta $\sphericalangle PQA$ što znači da kutovi $\sphericalangle PA_1C_1$ i $\sphericalangle PQA$ imaju jedan zajednički krak pa samo trebamo dokazati da je $\sphericalangle PA_1C_1 = \sphericalangle PQA$. Četverokut BA_1C_1P je tetivni četverokut jer je $\sphericalangle PC_1B = \sphericalangle PA_1B = 90^\circ$, pa su kutovi $\sphericalangle PC_1B$ i $\sphericalangle PA_1B$



Slika 2.5: Slika uz dokaz teorema 2.1.5

kutovi nad promjerom \overline{BP} kružnice opisane tom četverokutu. Kutovi $\angle PBC_1$ i $\angle PA_1C_1$ su obodni kutovi nad istim lukom te stoga vrijedi

$$\angle PBC_1 = \angle PA_1C_1. \quad (2.4)$$

Kako su kutovi $\angle PQA$ i $\angle PBA$ obodni kutovi nad lukom \widehat{PA} , to vrijedi

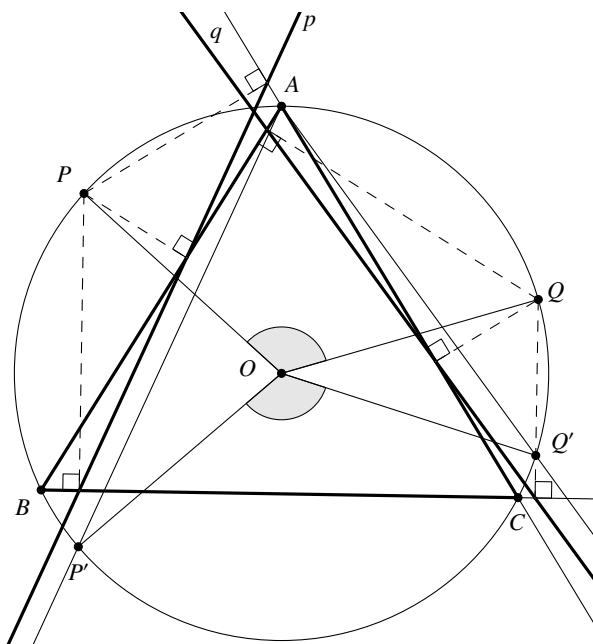
$$\angle PQA = \angle PBA = \angle PBC_1. \quad (2.5)$$

Iz jednakosti (2.4) i (2.5) slijedi

$$\angle PA_1C_1 = \angle PQA,$$

čime je tvrdnja teorema dokazana. □

Teorem 2.1.6. *Ako su p i q dva Simsonova pravca određena točkama P i Q kružnice k_o opisane trokutu ABC , tada je $\langle(p, q) = \frac{1}{2}\angle QOP$, pri čemu je O središte opisane kružnice danog trokuta.*



Slika 2.6: Slika uz dokaz teorema 2.1.6

Dokaz. Neka su P' i Q' sjecišta kružnice k_o i okomica iz točaka P i Q na pravac BC . Prema prethodnom teoremu vrijedi $p \parallel P'A$ i $q \parallel Q'A$, iz čega slijedi

$$\sphericalangle(p, q) = \sphericalangle(P'A, Q'A) = \sphericalangle Q'AP'.$$

Primjenom teorema o središnjem i obodnom kutu dobivamo

$$\sphericalangle(p, q) = \frac{1}{2} \sphericalangle Q'OP'. \tag{2.6}$$

Kako su pravci PP' i QQ' paralelni, to je četverokut $P'Q'QP$ trapez, a s obzirom na to da točke P, Q', Q, P' leže na istoj kružnici, taj trapez je tetivni. Prema tome, četverokut $P'Q'QP$ je jednakokračni trapez. Dakle, $|PQ'| = |P'Q|$, pa su trokuti $P'Q'O$ i PQO sukladni prema S-S-S teoremu iz sukladnosti. Iz toga slijedi

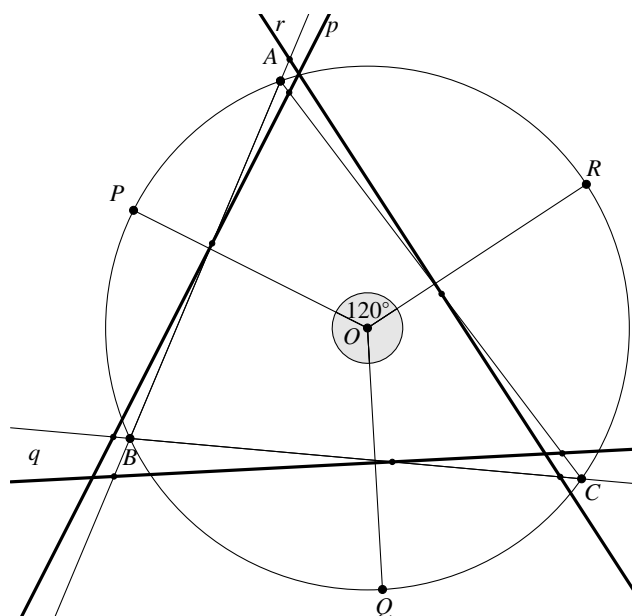
$$\sphericalangle Q'OP' = \sphericalangle QOP,$$

pa tada iz jednakosti (2.6) slijedi

$$\sphericalangle(p, q) = \frac{1}{2} \sphericalangle QOP.$$

□

Teorem 2.1.7. *Točke P, Q, R određuju na kružnici k_o tri jednaka luka. Simsonovi pravci p, q, r tih točaka, s obzirom na bilo koji trokut upisan u kružnicu k_o , određuju jednakostraničan trokut.*



Slika 2.7: Slika uz dokaz teorema 2.1.7

Dokaz. Ako je O središte kružnice k_o , tada je

$$\sphericalangle POQ = \sphericalangle QOR = \sphericalangle ROP = 120^\circ.$$

Prema teoremu 2.1.6 vrijedi:

$$\sphericalangle(p, q) = \frac{1}{2} \sphericalangle POQ = 60^\circ,$$

$$\sphericalangle(q, r) = \frac{1}{2} \sphericalangle QOR = 60^\circ,$$

$$\sphericalangle(r, p) = \frac{1}{2} \sphericalangle ROP = 60^\circ,$$

pa pravci p, q, r određuju jednakostraničan trokut. □

Teorem 2.1.8. Za nožišta okomica A_1, B_1, C_1 spuštenih iz točke P na opisanoj kružnici k_o danog trokuta ABC na stranice tog trokuta vrijedi

$$|PA| \cdot |PA_1| = |PB| \cdot |PB_1| = |PC| \cdot |PC_1| = 2Rd,$$

gdje je R polumjer tom trokutu opisane kružnice k_o , a d udaljenost točke P od pripadnog Simsonovog pravca s .

Dokaz. Točke A_1, B_1, C_1 leže na Simsonovom pravcu s trokuta ABC određenog točkom P . Kako je $\sphericalangle PB_1C = \sphericalangle PA_1C = 90^\circ$, to su kutovi $\sphericalangle PB_1C$ i $\sphericalangle PA_1C$ kutovi nad promjerom \overline{PC} kružnice opisane tom četverokutu te je stoga četverokut A_1CPB_1 tetivni, pa vrijedi

$$\sphericalangle A_1PC = \sphericalangle A_1B_1C. \quad (2.7)$$

Analogno se dokaže da je četverokut AB_1PC_1 tetivni iz čega slijedi:

$$\sphericalangle C_1B_1A = \sphericalangle C_1PA. \quad (2.8)$$

Kako su kutovi $\sphericalangle A_1B_1C$ i $\sphericalangle C_1B_1A$ vršni, to znači da su sukladni, pa tada iz jednakosti (2.7) i (2.8) slijedi

$$\sphericalangle A_1PC = \sphericalangle C_1PA = \delta.$$

Iz prethodne jednakosti slijedi da su pravokutni trokuti PA_1C i PC_1A slični prema K-K-K teoremu o sličnosti, iz čega sad slijedi

$$|PA_1| : |PC_1| = |PC| : |PA|,$$

odnosno

$$|PA_1| \cdot |PA| = |PC| \cdot |PC_1|. \quad (2.9)$$

Analogno iz sličnosti trokuta PAB_1 i PBA_1 slijedi

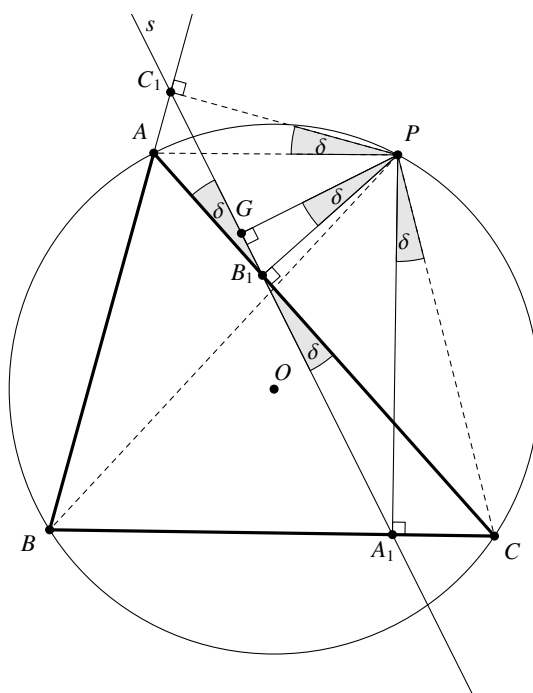
$$|PA_1| \cdot |PA| = |PB| \cdot |PB_1|. \quad (2.10)$$

Sada iz jednakosti (2.9) i (2.10) dobivamo

$$|PA_1| \cdot |PA| = |PB| \cdot |PB_1| = |PC| \cdot |PC_1|. \quad (2.11)$$

Neka je točka G nožište okomice iz točke P na pravac s . Tada je $|GP| = d$. Kako kutovi $\sphericalangle A_1B_1C$ i $\sphericalangle GPB_1$ imaju u paru okomite krakove, to je $\sphericalangle GPB_1 = \sphericalangle A_1B_1C = \delta$, pa su pravokutni trokuti A_1CP i GB_1P slični prema K-K-K teoremu o sličnosti, iz čega slijedi

$$|PA_1| : |PC| = |PG| : |PB_1|,$$



Slika 2.8: Slika uz dokaz teorema 2.1.8

odnosno

$$|PA_1| \cdot |PB_1| = d \cdot |PC|. \quad (2.12)$$

Izrazimo sada površinu trokuta BCP pomoću visine trokuta, te pomoću polumjera R tom trokutu opisane kružnice:

$$P = \frac{|BC| \cdot |PA_1|}{2} \quad \text{i} \quad P = \frac{|BC| \cdot |PC| \cdot |PB|}{4R}.$$

Izjednačavanjem desnih strana ovih jednakosti slijedi

$$\frac{|BC| \cdot |PA_1|}{2} = \frac{|BC| \cdot |PC| \cdot |PB|}{4R},$$

iz čega dobivamo

$$2R \cdot |PA_1| = |PC| \cdot |PB|. \quad (2.13)$$

Dijeljenjem jednakosti (2.13) sa (2.12) dobivamo

$$\frac{2R \cdot |PA_1|}{|PA_1| \cdot |PB_1|} = \frac{|PC| \cdot |PB|}{d \cdot |PC|},$$

pa je

$$2Rd = |PB_1| \cdot |PB|. \quad (2.14)$$

Konačno iz jednakosti (2.11) i (2.14) zaključujemo

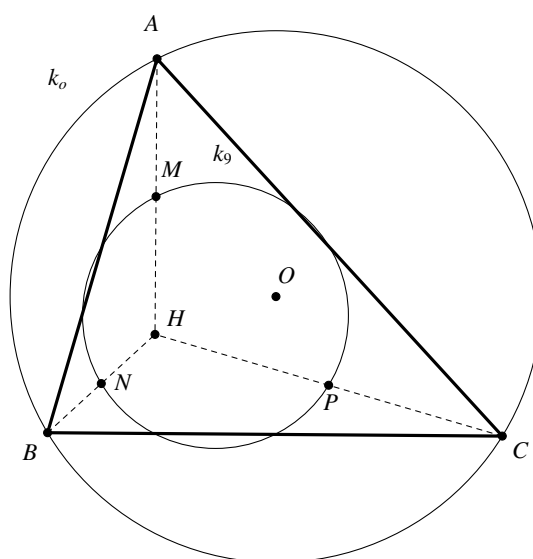
$$|PA_1| \cdot |PA| = |PB| \cdot |PB_1| = |PC| \cdot |PC_1| = 2Rd.$$

□

2.2 Veze Simsonovog pravca i kružnice devet točaka

U ovom poglavlju bavit ćemo se vezom između kružnice devet točaka i Simsonovog pravca. Na početku ovog poglavlja dokazat ćemo dva teorema koji će nam kasnije trebati.

Teorem 2.2.1. *Za dani trokut ABC su njegova kružnica devet točaka k_9 i njemu opisana kružnica k_o homotetične kružnice sa središtem homotetije u ortocentru H i konstantom homotetije $k = \frac{1}{2}$.*



Slika 2.9: Slika uz dokaz teorema 2.2.1

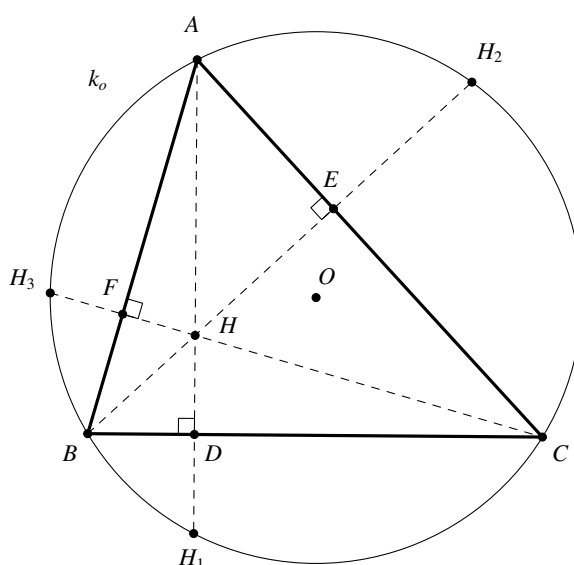
Dokaz. Neka su točke M, N, P redom polovišta dužina $\overline{AH}, \overline{BH}, \overline{CH}$. Neka je sa h označena homotetija sa središtem u ortocentru H koja preslikava točku A u M , točku B u N , a točku C u P . Kako je

$$|MH| = \frac{1}{2}|AH|,$$

koeficijent homotetije je očito $k = \frac{1}{2}$. Svaka kružnica je jednoznačno određena s tri točke. Kružnica k_o jednoznačno određena točkama A, B, C se homotetijom h preslika u kružnicu k određenu točkama M, N, P . Prema teoremu 1.1.1 te točke leže na kružnici devet točaka k_9 , pa je kružnica k upravo kružnica k_9 . \square

Korolar 2.2.2. Neka je H ortocentar trokuta ABC . Za bilo koju točku T koja leži na kružnici opisanoj trokutu ABC , polovište dužine \overline{HT} leži na kružnici devet točaka tog trokuta.

Lema 2.2.3. Točke H_1, H_2, H_3 , koje su simetrične ortocentru H s obzirom na stranice $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ danog trokuta ABC , leže na opisanoj kružnici tog trokuta.



Slika 2.10: Slika uz dokaz leme 2.2.3

Dokaz. Neka su točke D, E, F redom nožišta okomica iz vrhova A, B, C na nasuprotne stranice. Tada vrijedi

$$\sphericalangle HEA + \sphericalangle AFH = 180^\circ,$$

iz čega slijedi da je četverokut $AFHE$ tetivni, pa vrijedi i

$$\sphericalangle EAF + \sphericalangle EHF = 180^\circ. \quad (2.15)$$

Promatrajući sliku 2.10 uočavamo, da zbog simetrije točaka H i H_1 s obzirom na pravac BC , vrijedi

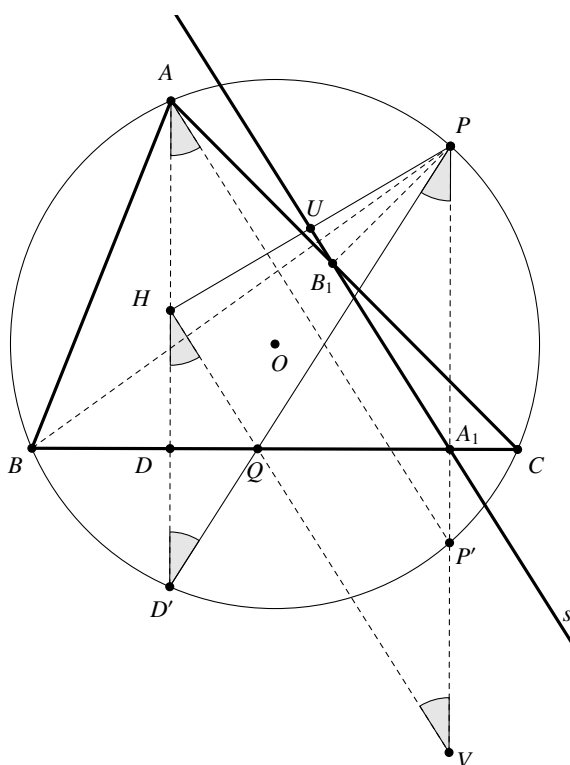
$$\sphericalangle BH_1C = \sphericalangle BHC = \sphericalangle EHF,$$

jer su kutovi $\sphericalangle BHC$ i $\sphericalangle EHF$ vršni. Sada jednakost (2.15) postaje

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle BH_1C = 180^\circ,$$

pa je četverokut ABH_1C tetivni, tj. točka H_1 leži na kružnici k_o . Analogno se dokaže za točke H_2 i H_3 . \square

Teorem 2.2.4. *Simsonov pravac s neke točke P , koja leži na trokutu ABC opisanoj kružnici k_o , siječe dužinu \overline{PH} u njezinom polovištu U , pri čemu je H ortocentar trokuta ABC . Pritom točka U leži na Feuerbachovoj kružnici k_9 .*



Slika 2.11: Slika uz dokaz teorema 2.2.4

Dokaz. Neka je točka D nožište visine iz vrha A na stranicu \overline{BC} te neka je točka D' presjek pravca te visine i kružnice k_o . Nadalje, neka je točka A_1 nožište okomice iz točke P na stranicu \overline{BC} , a točka P' presjek te okomice i kružnice k_o . Neka je točka Q presjek pravca $D'P$ i stranice \overline{BC} , a točka V presjek pravca HQ i PP' . Promotrimo sada trokute HDQ i $D'DQ$ na slici 2.11. Kutovi pri vrhu D u oba trokuta su pravi. Prema lemi 2.2.3 vrijedi

$$|DH| = |DD'|,$$

a kako je stranica \overline{DQ} zajednička stranica promatranih trokuta HDQ i $D'DQ$, to su oni sukladni prema S-K-S teoremu o sukladnosti. Stoga vrijedi

$$\sphericalangle DHQ = \sphericalangle DD'Q. \quad (2.16)$$

Kutovima $\sphericalangle DD'Q$ i $\sphericalangle D'PP'$ jedan krak leži na pravcu $D'P$, a drugi leže na paralelnim pravcima (DD' i PP' koji su oba okomiti na BC), pa je

$$\sphericalangle DD'Q = \sphericalangle D'PP'. \quad (2.17)$$

Kutovi $\sphericalangle D'PP'$ i $\sphericalangle D'AP'$ su obodni kutovi nad istim lukom pa vrijedi

$$\sphericalangle D'PP' = \sphericalangle D'AP'. \quad (2.18)$$

Iz (2.16), (2.17) i (2.18) slijedi

$$\sphericalangle DHQ = \sphericalangle D'AP'.$$

Kako tim kutovima po jedan krak leži na istom pravcu, to pravci na kojima leže druga dva kraka moraju biti paralelni, pa vrijedi

$$HV \parallel AP'.$$

Prema teoremu 2.1.5,

$$s \parallel AP',$$

pa je

$$HV \parallel s.$$

Nadalje, trokuti $HD'Q$ i PVQ su slični prema K-K-K teoremu o sličnosti jer im odgovarajuće stranice leže na međusobno paralelnim pravcima. Kako je točka D polovište dužine $\overline{HD'}$, to je točka A_1 polovište dužine $\overline{P'V}$. Promotrimo sada trokut PHV . Simsonov pravac s paralelan je sa HV i siječe $\overline{P'V}$ u točki A_1 koja je polovište dužine $\overline{P'V}$, pa tada siječe i stranicu \overline{HP} u njenom polovištu U . Dokazali smo da je točka U polovište dužine \overline{HP} , a prema korolaru 2.2.2 ona leži na kružnici k_9 . \square

Teorem 2.2.5. *Neka su P_1 i P_2 dijametralno suprotne točke opisane kružnice k_o trokuta ABC . Simsonovi pravci s_1 i s_2 takvih točaka međusobno su okomiti pravci i sijeku se u točki V na Feuerbachovoj kružnici.*

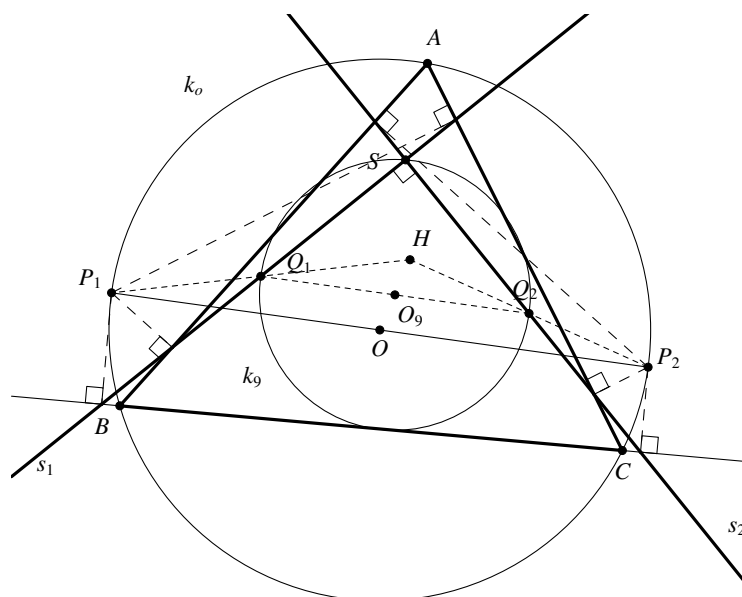
Dokaz. Kako su točke P_1 i P_2 dijametralno suprotne točke opisane kružnice k_o , to je

$$\sphericalangle P_1OP_2 = 180^\circ,$$

a prema teoremu 2.1.6 vrijedi

$$\sphericalangle (s_1, s_2) = \frac{1}{2} \sphericalangle P_1OP_2 = 90^\circ,$$

tj. pravci s_1 i s_2 su okomiti. \square



Slika 2.12: Slika uz dokaz teorema 2.2.5

Neka je točka S sjecište pravaca s_1 i s_2 te neka su točke Q_1 i Q_2 polovišta dužina $\overline{P_1H}$ i $\overline{P_2H}$, gdje je H ortocentar promatranog trokuta. Te točke prema teoremu 2.2.4 leže na pravcu s_1 , odnosno s_2 , a prema tom istom teoremu leže i na kružnici devet točaka k_9 . Prema teoremu 2.2.1 postoji homotetija h sa središtem u ortocentru H trokuta ABC i koeficijentom $k = \frac{1}{2}$ koja opisane kružnicu k_o preslikava u kružnicu devet točaka k_9 . Tada će ta homotetija preslikati promjer $\overline{P_1P_2}$ kružnice k_o u promjer $\overline{Q_1Q_2}$ kružnice k_9 . Kako su pravci s_1 i s_2 , odnosno Q_1S i Q_2S međusobno okomiti, to prema Talesovom teoremu o kutu nad promjerom kružnice točka S pripada kružnici kojoj je $\overline{Q_1Q_2}$ promjer, tj. pripada kružnici k_9 .

Bibliografija

- [1] D. Ilišević, M. Bombardelli, *Elementarna geometrija*, skripta, (2007), dostupno na <http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf> (svibanj 2015.).
- [2] A. Marić, *Neki poučci o Simsonovom pravcu*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike – mentore **14** (2005), 58 – 64.
- [3] D. Palman, *Simsonov pravac trokuta*, Matematika **XIV** (1985), br. 2, 38 – 45.
- [4] D. Palman, *Kružnica devet točaka i Feuerbachov teorem*, Matematika **XV** (1986), br.1, 54 – 64.
- [5] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, 2004.

Sažetak

U ovom radu proćavali smo kružnicu devet toćaka (Feuerbachovu kružnicu), Feuerbachov teorem i Simsonov pravac.

Za svaki trokut ABC , polovišta stranica A', B', C' , nožišta visina D, E, F te toćke M, N, P koje su polovišta dužina $\overline{AH}, \overline{BH}, \overline{CH}$, pri ćemu je H ortocentar danog trokuta, leže na kružnici k_9 koju nazivamo kružnicom devet toćaka ili Feuerbachovom kružnicom. Središte te kružnice je polovište dužine \overline{HO} , gdje je O središte opisane kružnice trokuta ABC , a njen polumjer je jednak polovini polumjera opisane kružnice.

Prema Feuerbachovom teoremu, kružnica devet toćaka dodiruje trokutu ABC upisanu i sve tri pripisane kružnice, te vrijedi:

$$|O_9U| = \frac{R}{2} - r, \quad |O_9U_a| = \frac{R}{2} + r_a,$$
$$|O_9U_b| = \frac{R}{2} + r_b, \quad |O_9U_c| = \frac{R}{2} + r_c,$$

pri ćemu je toćka O_9 središte kružnice devet toćaka, R polumjer trokutu opisane kružnice, U, U_a, U_b, U_c središta upisane odnosno pripisanih kružnica te r, r_a, r_b, r_c redom njihovi polumjeri.

Simsonov pravac je pravac na kojem leže nožišta okomica spuštenih iz neke toćke opisane kružnice trokuta na stranice tog trokuta.

Ako je H ortocentar danog trokuta, Simsonov pravac neke toćke P koja leži na opisanoj kružnici tog trokuta sijeće dužinu \overline{PH} u njenom polovištu i to polovište leži na Feuerbachovoj kružnici tog trokuta.

Nadalje, Simsonovi pravci dijametralno suprotnih toćaka opisane kružnice danog trokuta su međusobno okomiti i sijeku se na Feuerbachovoj kružnici tog trokuta.

Summary

In this thesis we studied the nine-point circle (Feuerbach's circle), Feuerbach's theorem and the Simson line.

For each triangle ABC , the midpoints A', B', C' of its sides, the feet D, E, F of its altitudes, and points M, N, P which are the midpoints of line segments $\overline{AH}, \overline{BH}, \overline{CH}$, where H is the orthocentre of a given triangle, lie on a circle which is called the nine-point circle or Feuerbach's circle. The centre of that circle is the midpoint of line segment \overline{HO} , where O is the centre of the circumscribed circle of the triangle ABC , and its radius is half of the radius of the circumscribed circle.

According to Feuerbach's theorem, the nine-point circle touches the inscribed circle and all three escribed circles of triangle, and the following holds true:

$$|O_9U| = \frac{R}{2} - r, \quad |O_9U_a| = \frac{R}{2} + r_a,$$
$$|O_9U_b| = \frac{R}{2} + r_b, \quad |O_9U_c| = \frac{R}{2} + r_c,$$

where O_9 is the centre of the nine-point circle, R is the radius of the triangle's inscribed circle, U, U_a, U_b, U_c are the centres of inscribed and escribed circles and r, r_a, r_b, r_c are their radii, respectively.

The Simson line is a line through the feet of perpendiculars from a point of the triangle's circumscribed circle to the sides of that triangle.

If H is the orthocentre of a given triangle, the Simson line of a point P that lies on that triangle's circumscribed circle intersects the line segment \overline{PH} in its midpoint and that midpoint lies on Feuerbach's circle of that triangle.

Furthermore, the Simson lines of diametrically opposite points of the circumscribed circle of given triangle are perpendicular and they intersect on that triangle's Feuerbach's circle.

Životopis

Rođena sam 15.1.1989. godine u Đakovu, gdje 1995. upisujem Osnovnu školu Vladimira Nazora. Nakon osnovne škole, upisujem Opću gimnaziju A. G. Matoša, koju pohađam do 2007. godine, kada upisujem preddiplomski studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno – matematičkog fakulteta u Zagrebu. Godine 2012. završavam preddiplomski studij i upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički.