Postojanje meromorfnih funkcija na Riemannovim plohama

Milivojević, Aleksandar

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Aleksandar Milivojević

POSTOJANJE MEROMORFNIH FUNKCIJA NA RIEMANNOVIM PLOHAMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Goran Muić

Zagreb, lipanj, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **1**

1 Osnovne definicije i rezultati **3**
1.1 Topologija 3
1.2 Kompleksna analiza 11
1.3 Hilbertovi prostori 17

2 Riemannove plohe **21**
2.1 Osnovni pojmovi 21
2.2 Holomorfna preslikavanja 27

3 Postojanje meromorfnih funkcija **37**
3.1 Diferencijalne forme i integriranje 37
3.2 Prostor kvadratno integrabilnih 1-formi 52
3.3 Egzaktne harmonijske forme 63
3.4 Meromorfne 1-forme 68
3.5 Posljedice i primjene 71

Bibliografija **81**

Uvod

Sredinom 19. stoljeća Bernhard Riemann započinje svoje proučavanje jednodimenzionalnih kompleksnih mnogostrukosti, objekata koje danas nazivamo Riemannovim plohama. Uspostavilo se da one predstavljaju prirodno okruženje za poopćenje pojma holomorfnog preslikavanja na prostore s topologijom složenijom od kompleksne ravnine.

Nakon prvog poglavlja, koje služi kao pregled i podsjetnik terminologije i osnovnih rezultata koji će nam trebati, u drugom poglavlju definiramo Riemannove plohe i holomorfna preslikavanja među njima. Posebno, definiramo meromorfne funkcije kao holomorfna preslikavanja u tzv. Riemannovu sferu. Dokazujemo da je svaka holomorfna funkcija s kompaktne Riemannove plohe u kompleksnu ravninu konstantna. Definiramo kratnost i stupanj preslikavanja u točki, te dokazujemo da stupanj ne ovisi o izboru točke. Zatim definiramo red meromorfne funkcije u točki i dokazujemo da je zbroj redova po svim točkama na kompaktnoj Riemannovoj plohi jednak nuli.

U trećem, zadnjem, poglavlju razvijamo teoriju diferencijalnih formi na Riemannovoj plohi. Glavni objekt proučavanja su 1-forme, pa definiramo razne tipove ovih formi. Definiramo integrale 1-formi i 2-formi, pa uz pomoć Stokesovog teorema dekomponiramo kompleksan Hilbertov prostor kvadratno integrabilnih 1-formi na sumu ortogonalnih potprostora. Ispostavlja se da jedan od ovih sumanada čine harmonijske 1-forme, koje su usko povezane s holomorfnim 1-formama. Zatim konstruiramo 1-forme koje su harmonijske osim u nekom zadanog singulariteta. Pomoću ovakvih harmonijskih formi sa singularitetom dobivamo tzv. meromorfne 1-forme. Koristeći ovako dobivene meromorfne 1-forme lako dokazujemo postojanje nekonstantnih meromorfnih funkcija na promatranoj Riemannovoj plohi. Na kraju trećeg poglavlja promatramo isključivo kompaktne Riemannove plohe. Definiramo genus plohe, te definiramo glatke projektivne krivulje i algebarske krivulje. Iskazujemo Riemann-Rochov teorem pomoću kojeg dobivamo zaključak da su kompaktne Riemannove plohe, glatke projektivne krivulje i algebarske krivulje u nekom smislu tri imena za istu vrstu objekta.

Poglavlje 1

Osnovne definicije i rezultati

U ovom uvodnom poglavlju ukratko izlažemo osnovne definicije i rezultate iz topologije, kompleksne analize i teorije Hilbertovih prostora. Dokaze uglavnom izostavljamo, budući da će nam od značaja biti samo njihovi iskazi.

1.1 Topologija

Osnovne definicije

Definicija 1.1.1. *Neka je X skup. Familiju τ podskupova od X nazivamo* topologijom *(na X) ako vrijedi:*

(i) $\emptyset, X \in \tau$*;*

(ii) τ *je zatvoren na proizvoljne unije;*

(iii) τ *je zatvoren na konačne presjeke.*

Uređen par (X, τ) nazivamo topološkim prostorom*. Za elemente od τ kažemo da su* otvoreni skupovi*, a komplement otvorenog skupa nazivamo* zatvorenim skupom*.*

U raznim kategorijama imamo razne pojmove morfizama i izomorfizma; dva objekta smatramo „istim" ako postoji izomorfizam među njima. Na primjer, u kategoriji grupa su to homomorfizmi i bijektivni homomorfizmi, u kategoriji vektorskih prostora linearna preslikavanja i bijektivna linearna preslikavanja, dok su u kategoriji skupova morfizmi funkcije, a izomorfizmi bijekcije. U kategoriji topoloških prostora uloge morfizama odnosno izomorfizama preuzimaju *neprekidna preslikavanja* odnosno *homeomorfizmi.*

Definicija 1.1.2. *Neka su (X,τ) i (Y,τ') topološki prostori, te $f\colon X \to Y$ funkcija. Kažemo da je f* neprekidna *ako za svaki $V \in \tau'$ vrijedi $f^{-1}(V) \in \tau$, tj. ako je praslika svakog otvorenog skupa opet otvoren skup. Ako je f još i bijekcija, te je i njezin inverz $f^{-1}\colon Y \to X$ također neprekidna funkcija, kažemo da je f* homeomorfizam*. Ako između dva topološka prostora postoji homeomorfizam, kažemo da su ti prostori* homeomorfni*.*

Dakle, homeomorfne prostore smatramo „istim", topološki gledano. Primijetimo da homeomorfizam šalje otvorene skupove u otvorene skupove (budući da je inverz homeomorfizma neprekidna funkcija). Uočimo i da je praslika zatvorenog skupa po neprekidnoj funkciji i dalje zatvoren skup; to slijedi iz $f^{-1}(Y\backslash V) = f^{-1}(Y)\backslash f^{-1}(V) = X \setminus f^{-1}(V)$.

Topologija na nekom skupu može biti ogromna familija podskupova. Često je od koristi znati da od neke bitno manje podfamilije možemo zadati tu topologiju.

Definicija 1.1.3. *Neka je (X,τ) topološki prostor. Podskup*[1] *$\mathcal{B} \subset \tau$ nazivamo* bazom topologije *τ ako se svaki otvoren skup može dobiti kao (ne nužno konačna) unija elementa iz $\mathcal{B}$.*

Ako imamo topološki prostor (X,τ) i podskup $S \subset X$, na prirodan način možemo definirati topologiju na S koja se nasljeđuje od topologije τ.

Definicija 1.1.4. *Na $S \subset X$ definiramo topologiju $\tau' = \{V \cap S; V \in \tau\}$. Topološki prostor (S,τ') nazivamo* potprostorom *od X.*

Lako se provjeri da τ' zaista jest topologija na S. Primijetimo da u definiciji ne zahtijevamo $S \in \tau$. Uz iste oznake kao u definiciji, vrijedi sljedeći očekivan rezultat.

Propozicija 1.1.5. *Ako je $\mathcal{B}$ baza topologije τ, onda je $\mathcal{B}' = \{V \cap S; V \in \mathcal{B}\}$ baza topologije τ'.*

Ubuduće ćemo umjesto (X,τ) pisati samo X za topološki prostor, i $S \subset X$ će podrazumijevati da S promatramo kao potprostor od X.

Zabilježimo sada sljedeći trivijalan rezultat.

Lema 1.1.6. *Ako je $f\colon X \to Y$ homeomorfizam, tada je $f|_S\colon S \to f(S)$ homeomorfizam, pri čemu S i $f(S)$ promatramo kao potprostore od X odnosno Y.*

[1] Relaciju „je podskup od" ćemo označavati s $\subset$. Dakle, tu je uključen i slučaj jednakosti. Želimo li naglasiti da jednakost ne vrijedi, pisat ćemo $\subsetneq$.

Definicija 1.1.7. *Neka je $S \subset X$. Definiramo* interior *od S, u oznaci* $\operatorname{Int} S$, *kao unija svih otvorenih podskupova od S (ekvivalentno je promatramo li otvorene skupove u X ili otvorene skupove u potprostoru S). Presjek svih zatvorenih nadskupa od S zovemo* zatvaračem *S i označavamo s* $\operatorname{Cl} S$. *Skup* $\operatorname{Cl} S \cap \operatorname{Cl}(X \setminus S)$ *zovemo* rubom *od S i označavamo s ∂S.*

Propozicija 1.1.8. *Neka je $f\colon X \to Y$ homeomorfizam i $S \subset X$. Tada je $f(\operatorname{Int} S) = \operatorname{Int} f(S)$, $f(\operatorname{Cl} S) = \operatorname{Cl} f(S)$ i $f(\partial S) = \partial f(S)$.*

Neka topološka svojstva

Sad ćemo vidjeti nekoliko svojstava prostora koja su očuvana homeomorfizmima; takva svojstva nazivamo *topološkim svojstvima.*

Definicija 1.1.9. *Kažemo da je prostor X* Hausdorffov *ako za svake dvije točke $x, y \in X$ postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V takvi da je $x \in U$ i $y \in V$.*

Za otvoren skup koji sadrži točku x kažemo da je *otvorena okolina* od x. Hausdorffovi prostori su oni u kojima točke možemo „razdvojiti" otvorenim okolinama.

Propozicija 1.1.10. *Hausdorffovost je topološko svojstvo.*

Dokaz. Neka su X i Y topološki prostori, pri čemu je X Hausdorffov, i $f\colon X \to Y$ homeomorfizam među njima, te neka su $x, y \in Y$. Neka su U i V disjunktne otvorene okoline od $f^{-1}(x)$ i $f^{-1}(y)$. Tada su $f(U)$ i $f(V)$ disjunktne otvorene okoline od x i y. □

Podskup prostora X može biti i otvoren i zatvoren. Na primjer, takvi su uvijek $\emptyset$ i sam X. Ako postoji $\emptyset \neq S \subsetneqq X$ koji je otvoren i zatvoren, onda je i njegov komplement $\emptyset \neq X \setminus S \subsetneqq X$ otvoren i zatvoren. U tom slučaju je prostor X „razdvojen" na dva otvorena podskupa.

Definicija 1.1.11. *Prostor X je* povezan *ako su $\emptyset, X \subset X$ jedini potprostori od X koji su otvoreni i zatvoreni.*

Za $\emptyset \neq U \subset X$ koji je otvoren (u X) i povezan (kao potprostor) govorimo da je *područje.*

Na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ imamo kanonsku topologiju zadanu tako da otvorene skupove čine proizvoljne unije intervala oblika $\langle a,\, b\rangle$.

Definicija 1.1.12. *Za neprekidnu funkciju* $\gamma\colon [0,\, 1] \to X$ *(gdje je* $[0,\, 1]$ *potprostor od* $\mathbb{R}$ *s kanonskom topologijom) kažemo da je* put *u* X*. Put je* zatvoren *ako je* $\gamma(0) = \gamma(1)$*, a u tom slučaju kažemo da je* jednostavan *ako je* $\gamma|_{[0,\, 1\rangle}$ *injekcija. Kažemo da je* X povezan putevima *ako za svake dvije točke* $x, y \in X$ *postoji put* γ *u* X *takav da je* $\gamma(0) = x$ *i* $\gamma(1) = y$*.*

Propozicija 1.1.13. *Ako je prostor povezan putevima, onda je on i povezan.*

Propozicija 1.1.14. *Povezanost i povezanost putevima su očuvane neprekidnim funkcijama. Posebno, to su topološka svojstva.*

Definirajmo sada iznimno važan pojam kompaktnosti prostora. U tu svrhu definiramo *otvoren pokrivač* prostora X kao familija otvorenih skupova u X čija je unija jednaka cijelom X.

Definicija 1.1.15. *Kažemo da je topološki prostor* X kompaktan *ako za svaki otvoren pokrivač od* X *postoji konačan podskup tog pokrivača koji je i sam otvoren pokrivač od* X*.*

Za potprostor $S \subset X$ možemo ekvivalentno definirati kompaktnost na sljedeći način. Kažemo da je $S \subset X$ kompaktan potprostor ako za svaku familiju otvorenih skupova u X čija unija sadrži S postoji konačan podskup te familije čija unija i dalje sadrži S.

Za S potprostor od X kažemo da je *relativno kompaktan u* X ako je $\operatorname{Cl} S$ kompaktan potprostor od X.

Propozicija 1.1.16. *Neprekidna slika kompaktnog prostora jest kompaktan prostor. Posebno, kompaktnost je topološko svojstvo.*

Primjer 1.1.17. $[0,\, 1] \subset \mathbb{R}$ *je kompaktan potprostor od* $\mathbb{R}$ *s kanonskom topologijom.*

Korolar 1.1.18. *Slika puta u* X *je kompaktan potprostor od* X*.*

Dokaz. $[0,\, 1]$ je kompaktan prostor, pa po prethodnoj propoziciji slijedi da je $\gamma([0,\, 1])$ kompaktan prostor, tj. kompaktan potprostor od X, budući da je γ neprekidna funkcija. □

Lema 1.1.19. *Zatvoren skup u kompaktnom prostoru je i sam kompaktan (kao potprostor).*

Lema 1.1.20. *Kompaktan potprostor Hausdorffovog prostora* X *je zatvoren u* X*.*

Propozicija 1.1.21. *Ako je $f\colon X \to Y$ neprekidna bijekcija iz kompaktnog prostora X u Hausdorffov prostor Y, onda je f homeomorfizam.*

Dokaz. Jedino treba provjeriti da je f^{-1} neprekidno, tj. da f šalje otvorene skupove u X u otvorene skupove u Y. Budući da je f bijekcija, to je ekvivalentno tome da f šalje zatvorene skupove u zatvorene skupove. Neka je $F \subset X$ zatvoren. Tada je po lemi 1.1.19 F kompaktan, pa je po propoziciji 1.1.16 $f(F)$ kompaktan u Y, odakle slijedi da je $f(F)$ zatvoren u Y po lemi 1.1.20. $\square$

Definicija 1.1.22. *Kažemo da je topološki prostor X* diskretan *ako je za svaki $x \in X$ skup $\{x\} \subset X$ otvoren u X.*

Općenito kažemo da je točka $x \in X$ *izolirana* ako je $\{x\}$ otvoren skup u X. Dakle, diskretni prostori su oni u kojima su sve točke izolirane.

Propozicija 1.1.23. *Ako je S zatvoren i diskretan potprostor kompaktnog prostora X, onda je S konačan skup.*

Dokaz. S je kompaktan po lemi 1.1.19, pa svaki otvoren pokrivač ima konačan potpokrivač. Tvrdnja slijedi uzimanjem otvorenog pokrivača $\{\{x\}\,;x \in S\}$. $\square$

Definicija neprekidnosti s kojom ovdje radimo naizgled nije ista kao ona kod funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja kaže da je funkcija neprekidna ako komutira s limesima konvergentnih nizova. Općenito u topološkom prostoru X kažemo da niz $(x_n)_n$ *konvergira prema* x ako za svaku otvorenu okolinu U od x vrijedi $x_n \in X$ za svaki dovoljno velik n (i tada točku x nazivamo *limesom* tog niza).

Ključno svojstvo koje skup $\mathbb{R}$ zadovoljava koje čini ove dvije definicije neprekidnosti ekvivalentnim jest činjenica da svaka točka $x \in \mathbb{R}$ ima *prebrojivu*[2] *bazu okolina*.

Definicija 1.1.24. *Neka je X topološki prostor i $x \in X$. Kažemo da x ima* prebrojivu bazu okolina *ako postoji prebrojiva familija otvorenih skupova $\{U_n; x \in U_n\}$ takva da za svaku otvorenu okolinu V od x postoji U_n takav da je $x \in U_n \subset V$.*

Propozicija 1.1.25. *Neka je X topološki prostor takav da svaka točka ima prebrojivu bazu okolina, te neka je $A \subset X$. Za svaku točku $x \in X$ vrijedi da je $x \in \mathrm{Cl}\,A$ ako i samo ako postoji niz $(a_n)_n$ elemenata u A koji konvergira prema x. Nadalje, funkcija $f\colon X \to Y$ (gdje je Y proizvoljan topološki prostor) je neprekidna ako i samo ako za svaki konvergentan niz $(x_n)_n$ s limesom x u X vrijedi da niz $(f(x_n))_n$ konvergira prema $f(x)$.*

[2]Skup je prebrojiv ako je u bijekciji sa skupom prirodnih brojeva $\mathbb{N}$.

Primijetimo da ako za topološki prostor postoji prebrojiva baza, onda svaka točka u njemu ima prebrojivu bazu okolina. Takav je npr. prostor $\mathbb{R}$, gdje jednu prebrojivu bazu čini skup svih intervala $\langle q_1, q_2\rangle$ s racionalnim krajevima. Također je važno primijetiti da je u prostoru s prebrojivom bazom svaka familija međusobno disjunktnih otvorenih skupova najviše prebrojiva; to je tzv. *Suslinovo svojstvo.*

Neke konstrukcije topoloških prostora

Kompaktni Hausforffovi prostori se dobro ponašaju, što bi se moglo dati naslutiti iz propozicije 1.1.21. No, ako već ne radimo s kompaktnim prostorom, dobro je znati da ga možemo uz neke uvjete „smjestiti" u kompaktan Hausdorffov prostor koji je veći samo za jednu točku.

Definicija 1.1.26. *Kažemo da je prostor X* lokalno kompaktan *ako za svaku točku $x \in X$ postoji kompaktan skup C koji sadrži otvorenu okolinu od x.*

Primjer 1.1.27. *Jasno, svaki kompaktan prostor je lokalno kompaktan. Manje trivijalan primjer jest skup svih uređenih parova realnih brojeva, $\mathbb{R}^2$, s topologijom zadanom time da su otvoreni skupovi oni koji se mogu prikazati kao unija pravokutnika $\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$.*

Teorem 1.1.28. *Neka je X lokalno kompaktan Hausdorffov prostor. Tada postoji prostor Y takav da vrijedi*

(i) X je potprostor od Y;

(ii) $Y \setminus X$ se sastoji od jedne točke;

(iii) Y je kompaktan Hausdorffov prostor.

Za svaka dva ovakva prostora postoji homeomorfizam među njima koji je jednak identiteti na X.

Prostor Y iz prethodnog teorema se naziva *kompaktifikacija jednom točkom prostora X*. Otvorene skupove u Y čine otvoreni skupovi u X i skupovi oblika $Y \setminus C$ za kompaktan potprostor C od X.

Pogledajmo sada još jedan način dobivanja novih topoloških prostora. Ako imamo zadan prostor X, možemo na njemu identificirati neke podskupove, te promatrati novonastali prostor. Tu ideju formalizira pojam *kvocijentnog prostora.*

Definicija 1.1.29. *Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na topološkom prostoru X (tj. na pripadnom skupu, dakle ta relacija particionira X), te neka je $q\colon X \to X/{\sim}$ kanonska surjekcija koja svaki element šalje u pripadnu klasu. Na skupu $X/\sim$ definiramo topologiju na sljedeći način. Skup $U \subset X/{\sim}$ je otvoren ako i samo je $q^{-1}(U)$ otvoren u X. Ovaj prostor nazivamo* kvocijentnim prostorom, *a q* kvocijentnim preslikavanjem.

Iz konstrukcije kvocijentnog prostora se odmah vidi da je q neprekidno preslikavanje iz X u kvocijentni prostor.

Primjer 1.1.30. *Na disku $D^2 = \{(x,y); x^2+y^2 \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^2$ definirajmo*

$$\sim = \big\{\{(x,y)\}\,;(x,y) \in \operatorname{Int} D^2\big\} \cup \big\{\partial D^2\big\}$$

i pogledajmo $D^2/\sim$. Svaka točka u unutrašnjosti diska je sama u svojoj klasi, dok smo točke na rubu diska poistovijetili. Prostor $D^2/\sim$ je homeomorfan (bilo kojoj) sferi u $\mathbb{R}^3$.

Kvocijentni prostor $X/\sim$ zajedno s kvocijentnim preslikavanjem $q\colon X \to X/{\sim}$ karakterizira sljedeće univerzalno svojstvo u kategoriji topoloških prostora. Za svaki prostor Z i neprekidnu funkciju $g\colon X \to Z$ takvu da je, za svaki $x, y \in X$, $g(x) = g(y)$ ako je $x \sim y$, postoji jedinstvena funkcija $f\colon X/{\sim} \to Z$ takva da je $f \circ q = g$. To jest, sljedeći dijagram komutira.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X/{\sim} \arrow[r, dashed, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

Slika 1.1: Univerzalno svojstvo kvocijentnog prostora

Metrički prostori

Definicija 1.1.31. *Neka je X skup. Funkciju $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ takvu da za svaki $x, y, z \in X$ vrijedi*

(i) $d(x,y) \geqslant 0$;

(ii) $d(x,y) = 0$ *ako i samo ako je* $x = y$;

(iii) $d(x,y) = d(y,x)$;

(iv) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

nazivamo metrikom na X. *Uređen par* (X, d) *zovemo* metrički prostor.

Vrijednost $d(x, y)$ interpretiramo kao udaljenost između x i y. Skup svih točaka udaljenih od neke fiksne točke x za strogo manje od neke fiksne vrijednosti r zovemo *otvorenom kuglom oko x radijusa r* i označavamo s $K(x, r)$. Dakle,

$$K(x, r) = \{y \in X; d(x, y) < r\}.$$

Koristeći otvorene kugle, kao što ime daje naslutiti, može se definirati topologija na X. Proglasimo otvorenim one skupove koji se mogu prikazati kao unija otvorenih kugli. Dobivenu topologiju nazivamo *topologijom induciranom metrikom d*. Ubuduće ćemo podrazumijevati ovu topologiju ako je zadana samo metrika na X. Također ćemo pisati samo X umjesto (X, d), slično kao kod topoloških prostora.

Propozicija 1.1.32. *Neka je X metrički prostor. Tada svaka točka $x \in X$ ima prebrojivu bazu okolina.*

Dokaz. Primijetimo da okoline oblika $K(x, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$, čine prebrojivu bazu okolina oko točke x. $\square$

U metričkom prostoru X možemo govoriti o konvergenciji niza $(x_n)_n$ prema elementu x ako uzmemo u obzir induciranu topologiju i definiciju konvergencije u topološkom prostoru. Ovdje se ta definicija može preformulirati u sljedeći oblik. Niz $(x_n)_n$ konvergira prema x ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi $d(x_n, x)$ za dovoljno velike n. U tom slučaju često pišemo $x_n \to x$.

Postoji i sljedeće svojstvo niza koje je općenito slabije od konvergencije.

Definicija 1.1.33. *Kažemo da je niz $(x_n)_n$* Cauchyjev *ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ za dovoljno velike n, m. Prostor je* potpun *ako u njemu svaki Cauchyjev niz konvergira.*

Na svakom podskupu $S \subset X$ metričkog prostora možemo definirati metriku, jednostavno uzimajući restrikciju metrike na X. Topologija inducirana restringiranom metrikom je jednaka topologiji koju S nasljeđuje od X kao potprostor topološkog prostora. Zato nema dvoznačnosti ako kažemo „S je potprostor metričkog prostora X".

Propozicija 1.1.34. *Neka je (X, d) potpun metrički prostor, i $F \subset X$ zatvoren potprostor. Tada je i F potpun metrički prostor.*

Korisno će nam biti zabilježiti sljedeći intuitivno prihvatljiv rezultat da se svaka neprekidna funkcija s vrijednostima u $\mathbb{R}^n$ na zatvorenom podskupu tzv. *normalnog* prostora može proširiti do neprekidne funkcije na cijelom prostoru. Kažemo da je prostor normalan ako se disjunktni zatvoreni skupovi mogu odvojiti disjunktnim otvorenim okolinama, tj. ako za svaka dva F_1, F_2 zatvorena disjunktna skupa postoje disjunktni otvoreni U_1, U_2 takvi da je $F_1 \subset U_1$ i $F_2 \subset U_2$. Lako se pokaže da su metrički prostori (gledani kao topološki prostori s induciranom topologijom) normalni.

Teorem 1.1.35. *(Tietzeov teorem o proširenju) Neka je F zatvoren potprostor normalnog prostora X, te $f\colon F \to \mathbb{R}^n$ neprekidna funkcija. Tada je f može neprekidno proširiti na cijeli X.*

Vrijedi da su Riemannove plohe, koje ćemo kasnije definirati, normalni prostori (kao i sve n-dimenzionalne C^∞ mnogostrukosti, koje ćemo također definirati). U slučaju promatranja Riemannovih ploha je korisno znati da vrijedi i „glatki" analogon Tietzeovog teorema, tj. teorem vrijedi i ako neprekidnost zamijenimo sa zahtjevom na neprekidnost parcijalnih derivacija (do proizvoljne razine).

1.2 Kompleksna analiza

Kompleksni brojevi i derivacija

Definiramo polje *kompleksnih brojeva* kao skup svih uređenih parova realnih brojeva s operacijama zbrajanja i množenja zadanim s

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1),$$

za sve $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Element (x, y) od $\mathbb{C}$ označavamo s $x + iy$. Skupovno su $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}^2$ jednaki, te na $\mathbb{C}$ standardno uzimamo kanonsku topologiju na $\mathbb{R}^2$, pa se ponekad podsjetimo toga pišući $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$.

Za svaki kompleksan broj $z = x + iy$ sa $\bar{z}$ označavamo broj $x - iy$. Broj $\bar{z}$ zovemo *kompleksnim konjugatom* od z. Također, svakom kompleksnom broju $z = x + iy$ pridružujemo nenegativan realan broj $|z| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, tzv. *apsolutnu vrijednost* broja z. Pomoću apsolutne vrijednosti možemo definirati metriku na $\mathbb{C}$. Naime, stavimo $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ za svaka dva $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Definicija 1.2.1. *Neka je $U \subset \mathbb{C}$ područje i $z_0 \in \mathbb{C}$. Kažemo da je funkcija $f\colon U \to \mathbb{C}$* derivabilna u točki z_0 *ako postoji kompleksan broj $f'(z_0)$ takav da za svaki niz z_n koji* *konvergira prema z, niz*

$$\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0}$$

konvergira prema $f'(z_0)$. Ako je f diferencijabilna u svakoj točki svoje domene, kažemo da je ona holomorfna *te s f' označavamo funkciju $f'\colon U \to \mathbb{C}$ koja z šalje u $f'(z)$.*

Kompleksna derivacija zadovoljava sva standardna računska pravila kao derivacija realnih funkcija realne varijable – linearnost, pravilo produkta, kvocijenta, te lančano pravilo. Bitnu razliku u odnosu na realan slučaj je sadržaj sljedećeg teorema. Prije njegovog iskaza, komentirajmo da svaku kompleksnu funkciju kompleksne varijable $f(z)$ možemo prikazati u obliku $u(x,y) + iv(x,y)$, gdje je $z = (x,y)$ a u i v su realne funkcije dviju realnih varijabli.

Teorem 1.2.2. *(Cauchy-Riemannovi uvjeti) Neka je $f\colon U \to \mathbb{C}$ funkcija na području U, te napišimo $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$. Tada je f derivabilna u točki $z_0 = (x_0, y_0)$ ako i samo ako je (u,v) diferencijabilna u (x_0, y_0) (kao funkcija dviju realnih varijabli) i ako vrijede tzv.* Cauchy-Riemannovi uvjeti *u z_0:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \\
\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial y}{\partial x}(x_0, y_0).
\end{aligned}$$

Tada je $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$.

Primjer 1.2.3. *Funkcija $z \mapsto \bar{z}$ ne zadovoljava Cauchy-Riemannove uvjete ni u jednoj točki. Zaista, $\bar{z} = x - iy$, pa imamo $u(x,y) = x$ i $v(x,y) = -y$. Vidimo da je u svakoj točki $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, dok je $\frac{\partial v}{\partial y} = -1$. Za funkcije $f = u + iv$ takve da u i v imaju neprekidne parcijalne derivacije prvog reda je ovisnost o $\bar{z}$ u nekom smislu jedina „smetnja" holomorfnosti.*

Cauchy-Riemannovi uvjeti imaju dalekosežne posljedice; jedna od najupečatljivijih jest sljedeća.

Korolar 1.2.4. *Ako je funkcija $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorfna, tada ona ima derivaciju svakog reda. Posebno, zapišemo li $f = u+iv$, funkcije u i v imaju parcijalne derivacije svakog reda.*

Ako je f holomorfna funkcija, onda s $f^{(n)}$ označavamo njezinu n-tu derivaciju (koja postoji po prethodnom korolaru).

Teorem 1.2.5. *Neka je $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorfna i $K(z_0, r) \subset U$. Tada za svaki $z \in K(z_0, r)$ vrijedi*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Posebno, gornji red konvergira; štoviše, on konvergira lokalno uniformno prema funkciji f.

Dakle, holomorfne funkcije možemo lokalno prikazati kao red potencija. Zato se holomorfne funkcije često zovu i *analitičke*.

Klasa funkcija iz $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}$ koja ima neka slična svojstva holomorfnim funkcijama su tzv. *harmonijske funkcije*. To su funkcije f s neprekidnim parcijalnim derivacijama drugog reda takvim da je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Definicija se može proširiti i na funkcije $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Kažemo da je $f = u + iv$ harmonijska ako su u i v harmonijske (u smislu prethodne definicije). Iz Cauchy-Riemannovih uvjeta lako slijedi da za holomorfnu funkciju $f = u + iv$ vrijedi da su u i v harmonijske funkcije (pa onda je po definiciji i f harmonijska). Obratno, svaka realna harmonijska funkcija u jest realan dio neke holomorfne funkcije $f = u + iv$. Uzimajući u obzir da holomorfne funkcije imaju derivaciju svakog reda, odavde slijedi da svaka realna harmonijska funkcija ima parcijalne derivacije svakog reda.

Laurentov red, izolirani singulariteti i reziduumi

Holomorfne funkcije možemo razviti u red potencija na krugu oblika $K(z_0, r)$, no možemo to učiniti i na tzv. *vijencu*, tj skupu oblika

$$K(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C}; r_1 < |z - z_0| < r_2\}.$$

Pri tom je od koristi imati pojam obostrano beskonačnog reda

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

pri čemu uzimamo da taj red konvergira ako i samo ako konvergiraju redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, te sumu reda u tom slučaju definiramo kao sumu ta dva jednostrano beskonačna reda.

Teorem 1.2.6. *Neka je f holomorfna funkcija na vijencu $K(z_0, r_1, r_2)$. Tada je*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

pri čemu je $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}z$ za bilo koji pozitivno orijentiran po dijelovima neprekidno derivabilan zatvoren put $\gamma \subset K(z_0, r_1, r_2)$.

U iskazu se pojavljuje pojam integrala kompleksne funkcije po putu, koji se definira analogno onom u $\mathbb{R}^2$. Ako je $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$ neprekidno derivabilan put i f neprekidna funkcija, definiramo

$$\int_\gamma f(z) \,\mathrm{d}z = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t) \,\mathrm{d}t.$$

Za put kažemo da je *po dijelovima neprekidno derivabilan* ako postoji konačan podskup $\{t_1, \ldots, t_k\}$ od $[0, 1]$ takav da je γ neprekidno derivabilan na $[0, 1] \setminus \{t_1, \ldots, t_k\}$. U tom slučaju definiramo integral funkcije γ po putu kao suma integrala po povezanim komponentama od $[0, 1] \setminus \{t_1, \ldots, t_k\}$.

Definicija 1.2.7. *Točka $z_0 \in \mathbb{C}$ je* izoliran singularitet *funkcije f ako je f holomorfna na $K(z_0, 0, r) = K(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ za neki $r > 0$.*

Ako je z_0 izoliran singularitet funkcije f, onda po teoremu 1.2.6 imamo da je

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

na nekom vijencu $K(z_0, 0, r)$. Ako je $c_n = 0$ za sve $n \leqslant -1$, tada taj singularitet zovemo *uklonjivim.* U tom slučaju f možemo na jedinstven način dodefinirati ili redefinirati do holomorfne funkcije na cijelom $K(z_0, r)$ (jednostavno stavimo $f(z_0) = c_0$), stoga i naziv. Ako je $c_n = 0$ za sve $n \leqslant -m - 1$ te je $c_{-m} \neq 0$, tada z_0 zovemo *polom m-tog reda.* U tom slučaju postoji holomorfna funkcija g takva da je $g(z_0) \neq 0$ i $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$. Konkretno, $g(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+m}$.

Ako izoliran singularitet nije ni uklonjiv ni pol nekog (konačnog) reda, tada kažemo da je singularitet *bitan (esencijalan).*

Imamo sljedeću karakterizaciju izoliranih singulariteta.

Propozicija 1.2.8. *Neka je f holomorfna funkcija na $K(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Tada vrijedi:*

(i) *f ima uklonjiv singularitet u z_0 ako i samo ako je $|f|$ ograničena na nekoj okolini od z_0 (bez točke z_0);*

(ii) *f ima pol u z_0 ako i samo ako $|f(z_n)| \to \infty$ za svaki niz $z_n \to z$;*

(iii) *Ako ne vrijedi ni (i) ni (ii), onda f ima bitan singularitet u z_0.*

Važno svojstvo integriranja po putevima u kompleksnoj ravnini jest činjenica da se integriranje funkcije svodi na zbrajanje nekih vrijednosti pridruženih polovima, tzv. reziduuma.

Definicija 1.2.9. *Za holomorfnu funkciju $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ na $K(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ definiramo* reziduum od f u točki z_0 *s*

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = c_{-1}.$$

Primijetimo da je reziduum funkcije f jednak 0 u svim točkama gdje je f holomorfna.

Teorem 1.2.10. *Neka je $U \subset \mathbb{C}$ područje, $z_0 \in U$, i $f \colon U \setminus \{z_1, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Tada za svaki po dijelovima neprekidno derivabilan zatvoren put $\gamma \colon [0, 1] \to U \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ vrijedi*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} k_i \operatorname{res}_{z_i}(f),$$

pri čemu su k_i tzv. indeksi *od γ s obzirom na z_i, definirani s*

$$k_i = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_i}\,\mathrm{d}z.$$

Indeksi definirani u iskazu teorema intuitivno odgovaraju broju puta koliko γ „obilazi" točku z u pozitivnom smjeru. U skladu s ovom interpretacijom, može se pokazati da je indeks uvijek cijeli broj.

Neka svojstva holomorfnih funkcija

Sljedeći teorem je analogon rezultata o analitičkim realnim funkcijama i pokazuje „manjak slobode" koje holomorfne funkcije imaju sa svojim vrijednostima.

Teorem 1.2.11. *Neka je U područje u $\mathbb{C}$ te neka su f i g dvije holomorfne funkcije na U. Ako u skupu $\{z \in U; f(z) = g(z)\}$ postoji niz koji konvergira prema nekoj točki u U, tada su f i g jednake kao funkcije.*

Definicija 1.2.12. *Neka je $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija i $z_0 \in U$. Ako je $f(z_0) = 0$ i $m \in \mathbb{N}$ najmanji red derivacije za koje je $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, tada kažemo da je z_0* nultočka od f reda m. *Ako takav m ne postoji, onda kažemo da je z_0* nultočka beskonačnog reda. *Ako je $f(z_0) \neq 0$, govorimo o nultočki* nultog reda.

Propozicija 1.2.13. *Nultočke konačnog reda holomorfne funkcije su izolirane.*

Teorem 1.2.14. *Neka je $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija i $z_0 \in U$. Pretpostavimo da funkcija $z \mapsto f(z) - f(z_0)$ ima nultočku reda $m \in \mathbb{N}$ u točki z_0. Tada za svaki $\delta > 0$ za koji je $f(z) \neq f(z_0)$ na $\operatorname{Cl} K(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $w \in K(f(z_0), \varepsilon) \setminus \{f(z_0)\}$ postoji m različitih točaka $z_{w,1}, \ldots, z_{w,n}$ u $K(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ takvih da je $f(z_{w,i}) = w$ za sve $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Korolar 1.2.15. *Neka je $f\colon U \to \mathbb{C}$ nekonstantna holomorfna funkcija na području U. Tada je f* otvoreno preslikavanje, *tj. otvorene skupove šalje u otvorene skupove.*

Dokaz. Najprije komentirajmo da je otvoren skup u U isto što i otvoren skup u $\mathbb{C}$, budući da je U otvoren u $\mathbb{C}$. Sad, neka je $V \subset U$ otvoren, i pogledajmo skup $f(V)$. Neka je $w_0 \in V$ i $z_0 \in U$ takav da je $f(z_0) = w_0$. Budući da f nije konstantna funkcija, slijedi da je nultočka z_0 funkcije $f(z) - z_0$ konačnog reda. Zaista, kad bi bila beskonačnog reda, onda bi razvoj u red potencija funkcije f oko z_0 bio identički jednak 0 na nekom krugu oko z_0. Po teoremu 1.2.11 bi slijedilo da je $f(z) - f(z_0)$ nul-funkcija, tj. da je $f(z)$ konstantna funkcija, što nije slučaj. Dakle, $f(z) - f(z_0)$ ima u z_0 nultočku konačnog reda $m \in \mathbb{N}$. Po propoziciji 1.2.13 znamo da je ta nultočka izolirana, pa možemo naći (smanjivanjem δ ako je potrebno) $K(z_0, \delta) \subset V$, a onda i $K(w_0, \varepsilon)$ kao u iskazu teorema 1.2.14. Slijedi da je svaka točka u $K(w_0, \varepsilon)$ pogođena barem jednom od točki u $K(z_0, \delta)$, pa imamo $K(w_0, \varepsilon) \subset f(K(z_0, \delta)) \subset f(V)$.

Dakle, oko svake točke u $f(V)$ imamo otvoren skup koji je sadržan u $f(V)$, pa zaključujemo da je $f(V)$ unija otvorenih skupova, a stoga i sam otvoren. □

Korolar 1.2.16. *Ako je f bijektivna holomorfna funkcija, tada je i f^{-1} također holomorfna.*

Ideja u dokazu prethodnog rezultata je primijetiti da je u svakoj točki $f'(z) \neq 0$, jer bi inače po teoremu 1.2.14 bila narušena injektivnost. Zatim pokažemo da u svakoj točki slike vrijedi

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}.$$

1.3 Hilbertovi prostori

Vektorski prostori

Definicija 1.3.1. *Ako je $\mathbb{F}$ polje, onda $\mathbb{F}$-modul nazivamo* vektorskim prostorom.

Ako je V vektorski prostor (nad poljem $\mathbb{F}$), onda kažemo da je skup $\{v_i; i \in I\}$, pri čemu je I proizvoljan indeksni skup, *baza* vektorskog prostora V ako se svaki $v \in V$ može na jedinstven način prikazati u obliku

$$v = c_1 v_{i_1} + c_2 v_{i_2} + \cdots + c_n v_{i_n}$$

za neki konačan skup $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subset I$ i neke skalare $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$. Primijetimo sličnost s bazom u topološkom prostoru u tome da se svaki element prostora može prikazati preko elemenata baze. No, kod topoloških prostora ni po čemu ne zahtijevamo jedinstvenost prikaza, što je ovdje bitan zahtjev.

Pokazati da vektorski prostori kao što su $\mathbb{R}^2$ ili $\mathbb{R}^3$ (nad poljem $\mathbb{R}$) imaju bazu je lako; kao bazu možemo uzeti skup jediničnih koordinatnih vektora. No, ovo su primjeri tzv. *konačno dimenzionalnih* vektorskih prostora, gdje je broj elemenata baze konačan. No, vrijedi i da *beskonačno dimenzionalni* vektorski prostori imaju bazu. To je netrivijalna tvrdnja koja je ekvivalentna s aksiomom izbora unutar standardne Zermelo-Fraenkelove teorije skupove, i dokazuje se pomoću sljedećeg teorema.

Teorem 1.3.2. *(Zornova lema) Ako u parcijalno uređenom skupu svaki totalno uređen podskup ima gornju među, tada u tom parcijalno uređenom skupu postoji maksimalan element.*

Korolar 1.3.3. *Svaki vektorski prostor ima bazu.*

Ako je podskup W vektorskog prostora V i sam vektorski prostor (nad istim poljem), onda kažemo da je W *potprostor* od V. Slijedi jednostavan kriterij za utvrditi ovu relaciju.

Propozicija 1.3.4. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i W neprazan podskup od V. Tada je W potprostor od V ako i samo je $\alpha v_1 + v_2 \in W$, za sve $v_1, v_2 \in W$ i $\alpha \in \mathbb{F}$.*

Neka su sad W_1, W_2 dva potprostora od V takva da je $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ (s 0 označavamo nul-vektor, što svaki potprostor mora posjedovati). Tada je

$$W_1 \oplus W_2 = \{w_1 + w_2; w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

također potprostor od V, kojeg nazivamo *direktnom sumom* od W_1 i W_2. Štoviše, u direktnoj sumi vrijedi da je prikaz $w = w_1 + w_2$, s $w_1 \in W_1$ i $w_2 \in W_2$ jedinstven.

Unitarni prostori

Nadalje će $\mathbb{F}$ označavati polje $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$.

Definicija 1.3.5. Skalarni produkt *na vektorskom prostoru V nad poljem $\mathbb{F}$ je funkcija*

$$(\cdot,\cdot)\colon V \times V \to \mathbb{F}$$

koja za sve $v, w, x \in V$ i $\alpha \in \mathbb{F}$ zadovoljava:

(i) $(v, v) \geqslant 0$ *(posebno,* $(v, v) \in \mathbb{R}$*), te je* $(v, v) = 0$ *ako i samo ako je* $v = 0$*;*

(ii) $(\alpha v + w, x) = \alpha(v, x) + (w, x)$*;*

(iii) $(v, w) = \overline{(w, v)}$.

Vektorski prostor sa skalarnim produktom zovemo unitaran prostor*.*

Definicija 1.3.6. Norma *na vektorskom prostoru V nad poljem $\mathbb{F}$ je funkcija*

$$\|\cdot\|\colon V \to [0, \infty\rangle$$

koja za sve $v, w \in V$ i $\alpha \in \mathbb{F}$ zadovoljava:

(i) $\|v\| \geqslant 0$*, te je* $\|v\| = 0$ *ako i samo ako je* $v = 0$*;*

(ii) $\|\alpha v\| = |\alpha|\,\|v\|$*;*

(iii) $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$.

Vektorski prostor s normom zovemo normiran prostor*.*

Skalarni produkt $(\cdot,\cdot)$ na vektorskom prostoru na prirodan način inducira normu. Definiramo $\|v\| = (v, v)^{\frac{1}{2}}$. Pri dokazu da je to zaista norma je ključna sljedeća lema.

Lema 1.3.7. *(Cauchy-Schwarzova nejednakost) Za sve v, w u unitarnom prostoru V vrijedi*

$$|(v, w)|^2 \leqslant (v, v)(w, w).$$

Skalarni produkt inducira normu, a norma inducira metriku s $d(v, w) = \|v - w\|$. Dakle, unitarni prostori su posebno metrički prostori, pa na njima imamo topologiju. Stoga možemo govoriti, između ostalog, o zatvorenim potprostorima unitarnog prostora. Gledajući $\mathbb{R}$ kao topološki prostor, lako se pokaže da je norma kao funkcija između dva topološka prostora neprekidna, te je i skalarni produkt neprekidan u obje varijable.

Pomoću skalarnog produkta možemo definirati pojam *ortogonalnosti.* Kažemo da su dva vektora v, w ortogonalna ako je $(v, w) = 0$. Za dva potprostora W_1, W_2 od V kažemo da su ortogonalna ako je $(w_1, w_2) = 0$ za sve $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$. Za potprostor W označavamo s $W^\perp$ tzv. *ortogonalni komplement* od W, tj. skup svih vektora koji su ortogonalni sa svakim vektorom u W. Koristeći neprekidnost norme i propoziciju 1.1.25 dobije se da je $W^\perp$ zatvoren potprostor od V.

Propozicija 1.3.8. *Neka su W_1 potprostor unitarnog prostora V te W_2 i W_3 potprostori od V koji su ortogonalni s W_1. Tada vrijedi:*

(i) $\operatorname{Cl} W_1$ *je potprostor od V;*

(ii) $(\operatorname{Cl} W_1)^\perp = W_1^\perp$*;*

(iii) $W_1^{\perp\perp} = \operatorname{Cl} W_1$*;*

(iv) $(W_1 \oplus W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$*;*

(v) Ako su W_1 i W_2 zatvoreni, tada je i $W_1 \oplus W_2$ zatvoren potprostor;

(vi) Ako je $W_1 \oplus W_2 = W_1 \oplus W_3$, onda je $W_2 = W_3$.

Ilustrirajmo npr. kako se dokaže tvrdnja (*ii*). Inkluzija $(\operatorname{Cl} W_1)^\perp \subset W_1^\perp$ je trivijalna; obratno, ako je $v \in W_1^\perp$ i $x \in \operatorname{Cl} W_1$, tada po propoziciji 1.1.25 postoji niz $(x_n)_n$ u W_1 koji konvergira prema x. Koristeći neprekidnost skalarnog produkta slijedi da (x_n, v) konvergira prema (x, v). No, $(x_n, v) = 0$ za svaki n, pa je i $(x, v) = 0$.

Definicija 1.3.9. *Potpun unitaran prostor nazivamo* Hilbertovim prostorom.

Fundamentalan rezultat o Hilbertovim prostorima koji će nam biti važan jest sadržaj sljedećeg teorema.

Teorem 1.3.10. *Neka je F zatvoren potprostor Hilbertovog prostora H. Tada vrijedi*

$$H = F \oplus F^\perp.$$

Prostor kvadratno integrabilnih funkcija

Promatramo izmjerive funkcije iz $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Označimo izbor domene s X, a kodomene s $\mathbb{F}$. S λ označimo Lebesgueovu mjeru na pripadnom prostoru, te promatramo Lebesgueov integral u odnosu na mjeru λ. Kažemo da je izmjeriva funkcija $f\colon X \to \mathbb{F}$ *integrabilna* ako je $\int_X |f| \, \mathrm{d}\lambda$ konačna vrijednost. U nastavku podrazumijevamo da su sve funkcije izmjerive.

Označimo

$$\mathcal{L}^2(X, \mathbb{F}) = \left\{ f\colon X \to \mathbb{F};\, \int_X |f|^2 \, \mathrm{d}\lambda < \infty \right\}.$$

Pokaže se da je $\mathcal{L}^2(X, \mathbb{F})$ vektorski prostor. Htjeli bismo na ovom prostoru definirati skalarni produkt s $(f, g) = \int_X f \bar{g} \, \mathrm{d}\lambda$, pa bi inducirana norma bila dana s $\|f\| = \left(\int_X |f|^2 \, \mathrm{d}\lambda \right)^{\frac{1}{2}}$, odakle bismo mogli reći da je $\mathcal{L}^2(X, \mathbb{F})$ skup svih funkcija s konačnom normom. No, problem se javlja npr. s funkcijama koje su jednake 0 osim na skupu mjere 0. Na integral ne utječu vrijednosti na skupu mjere 0, pa bismo imali ne-nul funkcije s normom jednakom 0, što nije u skladu s definicijom norme. Da bismo izbjegli taj problem, uvedemo jednu relaciju ekvivalencije $\sim$ na $\mathcal{L}^2(X, \mathbb{F})$. Po definiciji stavimo da je $f \sim g$ ako se f i g razlikuju samo na skupu mjere 0. Definiramo onda

$$L^2(X, \mathbb{F}) = \mathcal{L}^2(X, \mathbb{F}) / \sim .$$

Često s f označavamo cijelu pripadnu klasu ekvivalencije; gore definirane funkcije $(\cdot, \cdot)$ i $\|\cdot\|$ sad zaista jesu skalarni produkt i norma. Štoviše, $L^2(X, \mathbb{F})$ s ovim skalarnim produktom je Hilbertov prostor.

Komentirajmo još da za $f, g \in L^2(X, \mathbb{F})$ vrijedi $|(f, g)| < \infty$. Zaista, po Cauchy-Schwarzovoj nejednakosti imamo $|(f, g)| \leqslant \|f\| \, \|g\| < \infty$.

Poglavlje 2

Riemannove plohe

2.1 Osnovni pojmovi

Uvodimo pojam Riemannove plohe, za što nam je najprije potreban pojam kompleksne strukture.

Definicija 2.1.1. Karta *na topološkom prostoru* (X, τ) *jest homeomorfizam* $\phi\colon U \to V$*, pri čemu je* U *otvoren skup u* X *i* V *otvoren skup u* $\mathbb{C}$*. Kažemo da su karte* $\phi_1\colon U_1 \to V_1$ *i* $\phi_2\colon U_2 \to V_2$ *na* X kompatibilne *ako je funkcija*

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1}\colon \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

holomorfna u slučaju da je $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$*. Za familiju* $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha\}_\alpha$ *karti* $\phi_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha$ *na* X *kažemo da je* atlas *na* X *ako su te karte u parovima kompatibilne te ako je* $\{U_\alpha\}_\alpha$ *pokrivač za* X*.*

Napomena 2.1.2. *Neka su* $\phi_1\colon U_1 \to V_1$ *i* $\phi_2\colon U_2 \to V_2$ *karte na* X*.*

(i) Karte ϕ_1 *i* ϕ_2 *su trivijalno kompatibilne ako je* $U_1 \cap U_2 = \emptyset$*.*

(ii) Budući da su ϕ_1 *i* ϕ_2 *homeomorfizmi, funkcija*

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1}\colon \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

je homeomorfizam. Ovu funkciju nazivamo tranzicijskom funkcijom *između karti* ϕ_1 *i* ϕ_2*.*

(iii) Definicija kompatibilnosti je simetrična. Zaista, budući da je

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1}\colon \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

holomorfna funkcija i homeomorfizam, slijedi da je i inverzna funkcija

$$\phi_1 \circ \phi_2^{-1} \colon \phi_2(U_1 \cap U_2) \to \phi_1(U_1 \cap U_2)$$

holomorfna (i homeomorfizam).

(iv) Atlase ćemo označavati i s $\{\phi_\alpha, U_\alpha\}_\alpha$, pri čemu su U_α domene karti $\phi_\alpha \colon U_\alpha \to \phi_\alpha(U_\alpha)$.

Na skupu svih atlasa na nekom prostoru X uvodimo relaciju ekvivalencije tako da će nam proizvoljan atlas na jedinstven način odrediti kompleksnu strukturu na X.

Definicija 2.1.3. *Kažemo da je atlas $\mathcal{A}$* ekvivalentan *atlasu $\mathcal{B}$ ako je svaka karta u $\mathcal{A}$ kompatibilna sa svakom kartom u $\mathcal{B}$.*

Lema 2.1.4. *Relacija „biti ekvivalentan" jest relacija ekvivalencija na skupu svih atlasa na prostoru X.*

Dokaz. Atlas $\mathcal{A}$ jest ekvivalentan samom sebi jer je po definiciji atlasa svaka karta u $\mathcal{A}$ kompatibilna sa svakom drugom kartom u $\mathcal{A}$. Također, iz simetričnosti definicije kompatibilnosti slijedi simetričnost promatrane relacije.

Preostaje dokazati tranzitivnost. Neka su $\{\phi_\alpha, U_\alpha\}_\alpha, \{\psi_\beta, V_\beta\}_\beta, \{\eta_\gamma, W_\gamma\}_\gamma$ atlasi takvi da je prvi ekvivalentan drugom te drugi ekvivalentan trećem. Uzmimo proizvoljne karte $\phi \colon U \to \phi(U)$ i $\eta \colon W \to \eta(W)$ iz prvog odnosno trećeg atlasa s $U \cap W \neq \emptyset$, i provjerimo da je $\eta \circ \phi^{-1} \colon \phi(U \cap W) \to \eta(U \cap W)$ holomorfna funkcija.

Budući da je $\{V_\beta\}_\beta$ pokrivač za X, vrijedi $U \cap W \subset \bigcup_\beta V_\beta$. Za svaki β takav da je $U \cap V_\beta \cap W \neq \emptyset$ po pretpostavci vrijedi da su $\psi_\beta \circ \phi^{-1} \colon \phi(U \cap V_\beta) \to \psi_\beta(U \cap V_\beta)$ i $\eta \circ \psi_\beta^{-1} \colon \psi_\beta(V_\beta \cap W) \to \eta(V_\beta \cap W)$ holomorfne funkcije, pa su i

$$\psi_\beta \circ \phi^{-1} \colon \phi(U \cap V_\beta \cap W) \to \psi_\beta(U \cap V_\beta \cap W)$$

i

$$\eta \circ \psi_\beta^{-1} \colon \psi_\beta(U \cap V_\beta \cap W) \to \eta(U \cap V_\beta \cap W)$$

holomorfne. Slijedi da je

$$\eta \circ \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\beta \circ \phi^{-1} = \eta \circ \phi^{-1} \colon \phi(U \cap V_\beta \cap W) \to \eta(U \cap V_\beta \cap W)$$

holomorfna funkcija za svaki β. Dakle, imamo da je $\eta \circ \phi^{-1}$ holomorfna na svakom članu otvorenog pokrivača skupa $U \cap W$, pa zaključujemo da je $\eta \circ \phi^{-1} \colon \phi(U \cap W) \to \eta(U \cap W)$ holomorfna funkcija. $\square$

Skup svih atlasa na X možemo promatrati kao parcijalno uređen skup s obzirom na skupovnu inkluziju. Standardnom primjenom Zornove leme slijedi da za svaki atlas $\mathcal{A}$ postoji neki maksimalan atlas $\mathcal{M}$ takav da je $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. No, ovaj maksimalan atlas je i jedinstven za odabrani $\mathcal{A}$.

Zaista, neka su $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$ dva različita maksimalna atlasa koja sadrže $\mathcal{A}$. Primijetimo sada da iz definicije ekvivalencije atlasa direktno slijedi da su dva atlasa ekvivalentna ako i samo ako je njihova unija također atlas. Budući da je $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_1$ i $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_2$, slijedi da su atlasi $\mathcal{A}$ i $\mathcal{M}_1$ te atlasi $\mathcal{A}$ i $\mathcal{M}_2$ ekvivalentni. Iz tranzitivnosti ove relacije sad slijedi da su $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$ ekvivalentni. No, onda je $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ atlas koji strogo sadrži $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$, što je u kontradikciji s maksimalnošću ovih atlasa.

Definicija 2.1.5. *Maksimalan atlas na X zovemo* kompleksnom strukturom.

Vidjeli smo da je kompleksna struktura jedinstveno određena odabirom atlasa na X, te da ekvivalentni atlasi određuju istu kompleksnu strukturu. Kompleksne strukture određene međusobno neekvivalentnim atlasima su također međusobno neekvivalentne.

Sada dolazimo do definicije Riemannove plohe.

Definicija 2.1.6. Riemannova ploha *jest povezan Hausdorffov topološki prostor s prebrojivom bazom na kojem je zadana kompleksna struktura. Ako je taj topološki prostor kompaktan, govorimo o* kompaktnoj Riemannovoj plohi.

Primjer 2.1.7. *(i) Skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ sa standardnom topologijom jest povezan i Hausdorffov topološki prostor s prebrojivom bazom. Jednu kompleksnu strukturu na ovom prostoru možemo zadati jednočlanim atlasom*

$$\{\mathrm{id} \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\} .$$

Neki atlasi ekvivalentni ovom atlasu su npr.

$$\begin{gathered}\{z \mapsto z \colon K(w,1) \to K(w,1)\}_{w \in \mathbb{C}} ,\\ \{z \mapsto z - w \colon K(w,1) \to K(0,1)\}_{w \in \mathbb{C}} ,\\ \{z \mapsto 2(z-w) \colon K(w,1) \to K(0,2)\}_{w \in \mathbb{C}} .\end{gathered}$$

Dakle, svi prethodno navedeni atlasi određuju istu kompleksnu strukturu na $\mathbb{C}$.

Pogledajmo i jednočlan atlas

$$\{z \mapsto \overline{z} \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\} .$$

Budući da je tranzicijska funkcija između $z \mapsto \overline{z} \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ i $\mathrm{id} \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funkcija

$$z \mapsto \overline{z} \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

koja nije holomorfna, slijedi da ovaj atlas nije ekvivalentan gornjima, dakle zadaje drugačiju (tj. neekvivalentnu) kompleksnu strukturu na $\mathbb{C}$.

(ii) *Neka je X Riemannova ploha i $\{\phi_\alpha\}_\alpha$ atlas koji određuje njegovu kompleksnu strukturu. Za otvoren i povezan podskup $U \subset X$ je skup $\{\phi_\alpha|_U\}_\alpha$ atlas na njemu, pa i U možemo smatrati Riemannovom plohom.*

(iii) *Promatramo kompaktifikaciju jednom točkom topološkog prostora $\mathbb{C}$ (sa standardnom topologijom), koju označavamo s $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Uvedemo li konvenciju $\frac{1}{\infty} = 0$ i $\frac{1}{0} = \infty$, imamo atlas*

$$\left\{ z \mapsto z \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{z} \colon (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \right\}.$$

Da bismo provjerili da su ove dvije karte zaista kompatibilne, dovoljno je uočiti da je tranzicijska funkcija

$$\frac{1}{z} \colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

holomorfna.

Topološki prostor $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ je povezan, Hausdorffov i ima prebrojivu bazu, budući da je homeomorfan povezanom potprostoru od $\mathbb{R}^3$ (naime, jediničnoj sferi S^2). Kompleksna struktura određena promatranim atlasom ovaj prostor čini Riemannovom plohom, koju nazivamo Riemannovom sferom. *Uočimo da se radi o kompaktnoj Riemannovoj plohi.*

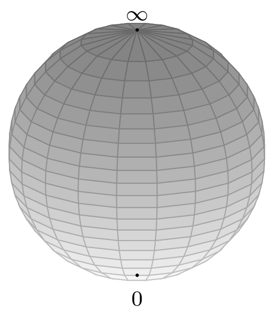
(iv) *Pogledajmo $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ (pri čemu $\mathbb{C}^2$ topološki gledamo kao $\mathbb{R}^4$, i 0 označava $(0,0)$) i relaciju ekvivalencije na njemu definiranu s $(z,w) \sim (\lambda z, \lambda w)$, za $z, w \in \mathbb{C}$ i $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Kvocijentni topološki prostor $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} /\sim$ nazivamo* kompleksnim projektivnim pravcem *i označavamo s $\mathbb{CP}^1$. Točku u $\mathbb{CP}^1$, tj. klasu ekvivalencije od (z,w), označavamo s $(z:w)$.*

Jedan otvoren pokrivač za $\mathbb{CP}^1$ čine

$$U_1 = \{(z:w); z \neq 0\} \;\; i \;\; U_2 = \{(z:w); w \neq 0\}.$$

Uočimo da se točka $(z:w) \in U_1$ može zapisati u obliku $(1 : \frac{w}{z})$, te da se točka $(z:w) \in U_2$ može zapisati u obliku $(\frac{z}{w} : 1)$. Dakle,

$$U_1 = \{(1:z); z \in \mathbb{C}\} = \mathbb{CP}^1 \setminus \{(0:1)\}$$



Slika 2.1: Riemannova sfera

i

$$U_2 = \{(z : 1); z \in \mathbb{C}\} = \mathbb{CP}^1 \setminus \{(1 : 0)\} .$$

Oba ova potprostora kompleksnog projektivnog pravca su homeomorfna s $\mathbb{C}$ *preko homeomorfizama* $\phi_1((1 : z)) = z$ *i* $\phi_2((z : 1)) = z$. *Tranzicijska funkcija*

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} \colon \phi_1(\{(z : w); z \neq 0, w \neq 0\}) \to \phi_2(\{(z : w); z \neq 0, w \neq 0\}),$$

tj.

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} \colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

šalje z *u* $\frac{1}{z}$, *dakle radi se o holomorfnoj funkciji. Zaključujemo da* $\phi_1 \colon U_1 \to \mathbb{C}$ *i* $\phi_2 \colon U_2 \to \mathbb{C}$ *čine atlas na* $\mathbb{CP}^1$.

Provjerimo još uvjete na topologiju od $\mathbb{CP}^1$ *da bismo zaključili da se radi o Riemannovoj plohi. Ovaj prostor je povezan kao slika povezanog prostora* $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ *po kvocijentnom preslikavanju. Dalje, budući da* U_1 *i* U_2 *čine konačan pokrivač od* $\mathbb{CP}^1$ *prostorima homeomorfnim prostorima s prebrojivom bazom, slijedi da i* $\mathbb{CP}^1$ *ima prebrojivu bazu.*

Konačno, provjerimo Hausdorffovost. Ako se točke $(z_1 : w_1)$ *i* $(z_2 : w_2)$ *nalaze u istom* U_i, $i = 1, 2$, *tada ih možemo razdvojiti otvorenim okolinama jer je taj* U_i *homeomorfan s Hausdorffovim prostorom* $\mathbb{C}$. *U suprotnom se radi o točkama* $(1 : 0)$ *i* $(0 : 1)$, *koje možemo razdvojiti okolinama* $\phi_1^{-1}(K(0, 1))$ *i* $\phi_2^{-1}(K(0, 1))$. *Zaista,* $\phi_1^{-1}(0) = (1 : 0)$, $\phi_2^{-1}(0) = (0 : 1)$, *te*

$$(z : w) \in \phi_1^{-1}(K(0, 1)) \cap \phi_2^{-1}(K(0, 1))$$

povlači $\frac{z}{w} \in K(0,1)$ *i* $\frac{w}{z} \in K(0,1)$*, što je nemoguće. Zaključujemo da je* $\mathbb{CP}^1$ *Riemannova ploha.*

No, s obzirom da za svaki $(z:w) \in \mathbb{CP}^1$ *vrijedi* $\left|\frac{w}{z}\right| \leqslant 1$ *ili* $\left|\frac{w}{z}\right| \leqslant 1$*, slijedi da* $\phi_1^{-1}\left(\overline{K(0,1)}\right)$ *i* $\phi_2^{-1}\left(\overline{K(0,1)}\right)$ *čine konačan pokrivač od kompleksnog projektivnog pravca kompaktnim skupovima (budući da se radi o neprekidnim slikama kompakata). Dakle,* $\mathbb{CP}^1$ *jest štoviše kompaktna Riemannova ploha.*

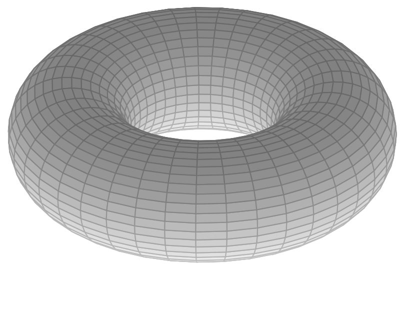
(v) Na $\mathbb{C}$ *uvedimo relaciju ekvivalencije*

$$z \sim w \text{ ako je } z - w \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

pri čemu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *smatramo podskupom kompleksne ravnine. Kvocijentni topološki prostor* $\mathbb{C}/\sim$ *s kompleksnom strukturom koju dobijemo prenošenjem standardne kompleksne strukture na* $\mathbb{C}$ *kvocijentnim preslikavanjem je primjer tzv.* kompleksnog torusa*; to je kompaktna Riemannova ploha. Općenito, kompleksne toruse dobivamo kao kvocijentni prostor kompleksne ravnine po relaciji*

$$z \sim w \text{ ako je } z - w \in L,$$

gdje je L *aditivna podgrupa od* $\mathbb{C}$ *razapeta s dva kompleksna broja* ω_1, ω_2 *koja su linearno nezavisna nad* $\mathbb{R}$*.*



Slika 2.2: Kompleksan torus

2.2 Holomorfna preslikavanja

Riemannova ploha nosi topološku strukturu, pa imamo pojam neprekidne funkcije između Riemannovih ploha. No, imamo i kompleksnu strukturu, pa bismo htjeli definirati i pojam holomorfnog preslikavanja.

Definicija 2.2.1. *Za neprekidnu funkciju $f\colon X \to Y$ između Riemannovih plohi X i Y kažemo da je* holomorfno preslikavanje *ako za svake dvije karte $\{\phi, U\}$, $\{\psi, V\}$ na X odnosno Y takve da je $U \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ vrijedi da je funkcija*

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}\colon \phi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V)$$

holomorfna kao kompleksna funkcija kompleksne varijable. Ako je f i bijekcija, kažemo da je f biholomorfno preslikavanje*.*

Ako je $f(X)$ jednočlan skup, kažemo da je preslikavanje konstantno*.*

Holomorfno preslikavanje $f\colon X \to \mathbb{C}$, pri čemu $\mathbb{C}$ gledamo kao Riemannovu plohu s kompleksnom strukturom određenom atlasom $\{\mathrm{id}, \mathbb{C}\}$, zovemo holomorfnom funkcijom*. Holomorfno preslikavanje $f\colon X \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, gdje je $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ Riemannova sfera, zovemo* meromorfnom funkcijom *ako $f(X) \neq \{\infty\}$.*

Napomena 2.2.2. *Za ustanoviti holomorfnost nekog preslikavanja $f\colon X \to Y$ nije nužno provjeravati definicijsko svojstvo na svakom paru karti na X i Y. Iz holomorfnosti tranzicijskih funkcija slijedi da je dovoljno fiksirati po jedan atlas za X i Y te provjeriti je li $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ holomorfna funkcija za svake dvije karte ϕ, ψ iz odgovarajućih atlasa.*

Holomorfna preslikavanja između Riemannovih ploha imaju slična svojstva „uobičajenim” holomorfnim funkcijama iz $\mathbb{C}$ u $\mathbb{C}$. Na primjer, vrijedi sljedeći rezultat.

Lema 2.2.3. *Ako holomorfno preslikavanje $f\colon X \to Y$ između Riemannovih plohi X i Y nije konstantno, onda je to otvoreno preslikavanje.*

Dokaz. Neka su $\{\phi, U\}$, $\{\psi, V\}$ proizvoljne karte na X odnosno Y takve da je $U \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$. Tada je, po definiciji, funkcija $\psi \circ f \circ \phi^{-1}\colon \phi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V)$ holomorfna. Budući da f nije konstantno preslikavanje, slijedi da ni ova funkcija nije konstantna, pa zato otvorene skupove preslikava u otvorene skupove. Komponiranjem s otvorenim preslikavanjima ψ^{-1} slijeva i ϕ zdesna dobivamo da je

$$f\colon U \cap f^{-1}(V) \to V$$

otvoreno preslikavanje. Dakle, $f(U \cap f^{-1}(V))$ je otvoren skup. Uzimanjem unije po svim ovakvim V dobivamo da je

$$f(U) = f\left(\bigcup_V U \cap f^{-1}(V)\right) = \bigcup_V f(U \cap f^{-1}(V))$$

unija otvorenih skupova, dakle otvoren skup. □

Korolar 2.2.4. *Ako je $f\colon X \to Y$ biholomorfno preslikavanje, onda je i $f^{-1}\colon Y \to X$ biholomorfno preslikavanje.*

Dokaz. Po prethodnoj lemi dobivamo da je f homeomorfizam. Dalje, budući da je

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}\colon \phi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V \cap f(U))$$

bijektivna holomorfna funkcija iz $\mathbb{C}$ u $\mathbb{C}$ za proizvoljne karte $\{\phi, U\}$ i $\{\psi, V\}$ takve da je $U \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$, slijedi da je i

$$\phi \circ f \circ \psi^{-1}\colon \psi(V \cap f(U)) \to \phi(U \cap f^{-1}(V))$$

holomorfna funkcija. Dakle, po definiciji je bijekcija f^{-1} i holomorfno preslikavanje.

□

Teorem 2.2.5. *Neka je $f\colon X \to Y$ holomorfno preslikavanje između kompaktne Riemannove plohe X i Riemannove plohe Y koje nije konstantno. Tada je f surjekcija, te je Y također kompaktna Riemannova ploha.*

Dokaz. Po prethodnoj lemi je f otvoreno preslikavanje, pa je $f(X)$ otvoren skup u Y. Dalje, zbog kompaktnosti prostora X je $f(X)$ kompaktan skup u Y. No, Y je Hausdorffov prostor, pa to povlači da je $f(X)$ i zatvoren u Y. Budući da je $f(X) \neq \emptyset$, povezanost prostora Y povlači $f(X) = Y$. Dakle, f je surjekcija.

Slika kompakta po neprekidnoj funkciji je kompakt, pa slijedi da je $Y = f(X)$ kompaktan topološki prostor, tj. Y je kompaktna Riemannova ploha. □

Korolar 2.2.6. *Holomorfna funkcija $f\colon X \to \mathbb{C}$ s kompaktne Riemannove plohe X je nužno konstantno preslikavanje.*

Dokaz. Kad bi f bila surjekcija, po prethodnom teoremu bi slijedilo da je $\mathbb{C}$ kompaktan topološki prostor. To nije slučaj, pa zaključujemo da f mora biti konstantno preslikavanje. □

Kod promatranja holomorfnih preslikavanja, korisno je uočiti da za proizvoljan $p \in X$ možemo odabrati kartu ϕ takvu da je $\phi(p) = 0$. Zaista, sigurno postoji karta na nekoj okolini od X; označimo je s $\tilde{\phi}$. Tada funkcija $\phi(w) = \tilde{\phi}(w) - \tilde{\phi}(p)$ šalje p u 0 te se radi o karti kompatibilnoj s $\tilde{\phi}$, budući da je tranzicijska funkcija između ϕ i $\tilde{\phi}$ translacija u $\mathbb{C}$. Po definiciji kompleksne strukture je zato i ϕ karta na X.

Propozicija 2.2.7. *Neka je $f \colon X \to Y$ nekonstantno holomorfno preslikavanje između Riemannovih ploha. Tada je za svaki $q \in Y$ skup $f^{-1}(q)$ diskretan u X.*

Dokaz. Neka je $q \in Y$ i $\psi \colon V \to \psi(V)$, $q \in V$ karta na Y takva da je $\psi(q) = 0$. Uzmimo $p \in f^{-1}(q)$ (ako takav p ne postoji, tvrdnja propozicije trivijalno vrijedi) i kartu $\phi \colon U \to \phi(U)$, $p \in U$ na X takvu da je $\phi(p) = 0$.

Budući da je $p \in U \cap f^{-1}(V)$, po definiciji je

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} \colon \phi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V)$$

holomorfna funkcija s otvorenog podskupa od $\mathbb{C}$ u $\mathbb{C}$, i vrijedi $\psi \circ f \circ \phi^{-1}(0) = \psi \circ f(p) = \psi(q) = 0$. Funkcija ϕ i ψ su bijekcije i f je nekonstantna, pa je i $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ nekonstantna. Dakle, radi se o nekonstantnoj holomorfnoj funkciji (u uobičajenom smislu) koja ima nultočku u 0. Nultočke ovakvih funkcija su izolirane, pa zaključujemo da postoji okolina $W \subset \phi(U \cap f^{-1}(V))$ oko 0 u kojoj je 0 jedina nultočka od $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$. Sad je $\phi^{-1}(W)$ okolina od p u kojoj je $f(w) \neq 0$ za svaki $w \neq p$. □

Korolar 2.2.8. *Neka je $f \colon X \to Y$ nekonstantno holomorfno preslikavanje između kompaktnih Riemannovih ploha. Tada je za svaki $q \in Y$ skup $f^{-1}(q)$ neprazan i konačan.*

Dokaz. Po teoremu 2.2.5 znamo da je f surjekcija, stoga je za svaki $q \in Y$ skup $f^{-1}(q)$ neprazan. Po prethodnoj propoziciji je $f^{-1}(q)$ diskretan podskup kompaktnog Hausdorffovog prostora X, pa je to konačan skup. □

Za nekonstantna holomorfna preslikavanja između kompaktnih Riemannovih plohi X i Y vrijedi više od samo toga da je praslika svake točke konačan skup. Vrijedi da je taj broj točaka u praslici, brojeći kratnost (pojam koji ćemo tek definirati), *konstantan* na cijelom Y. Da bismo došli do ovog rezultata, prvo moramo utvrditi da se svako nekonstantno holomorfno preslikavanje lokalno ponaša kao $z \mapsto z^k$ za neki prirodan broj k.

Propozicija 2.2.9. *Neka je $f \colon X \to Y$ nekonstantno holomorfno preslikavanje između Riemannovih plohi i $p \in X$. Postoji jedinstven prirodan broj k takav da* *za svaku kartu ψ na Y koja zadovoljava $\psi(f(p)) = 0$ postoji karta ϕ na X koja zadovoljava $\phi(p) = 0$ takva da vrijedi*

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}(z) = z^k$$

(pri tom kažemo da f u točki p ima oblik $z \mapsto z^k$*).*

Dokaz. Neka je ψ karta na Y kao u iskazu, i neka je $\tilde{\phi}$ proizvoljna karta na X takva da je $\tilde{\phi}(p) = 0$. Funkcija $\psi \circ f \circ \tilde{\phi}^{-1}$ nije konstantna i 0 šalje u 0, pa slijedi da je na nekoj okolini od 0 njezin Taylorov razvoj dan s

$$\psi \circ f \circ \tilde{\phi}^{-1}(z) = c_k z^k + c_{k+1} z^{k+1} + c_{k+2} z^{k+2} + \dots,$$

pri čemu je $k \geqslant 1$ i $c_k \neq 0$. Dakle, $\psi \circ f \circ \tilde{\phi}^{-1}(z) = z^k g(z)$, gdje je

$$g(z) = c_k + c_{k+1} z + c_{k+2} z^2 + \dots$$

holomorfna i $g(0) \neq 0$. Budući da je $g(0) \neq 0$, na nekoj okolini od 0 (možemo uzeti da je ta okolina sadržana u okolini na kojoj promatramo Taylorov razvoj) je definiran $\ln g(z)$. Definirajmo sada $h(z) = e^{\frac{1}{k} \ln g(z)}$, i primijetimo da vrijedi $h(z)^k = g(z)$. Stoga imamo

$$\psi \circ f \circ \tilde{\phi}^{-1}(z) = z^k g(z) = \left(z h(z)\right)^k.$$

Označimo $\eta(z) = z h(z)$, i definirajmo kartu oko točke p sa $\phi = \eta \circ \tilde{\phi}$. Budući da je $\eta'(0) = h(0) \neq 0$ imamo da je η injektivna holomorfna funkcija na nekoj okolini od 0, pa je $\eta \circ \tilde{\phi}$ zaista homeomorfizam. Primijetimo i da je $\phi(p) = \eta \circ \tilde{\phi}(p) = \eta(0) = 0$. Ova karta je i kompatibilna s $\tilde{\phi}$, budući da je tranzicijska funkcija između ϕ i $\tilde{\phi}$ upravo η, koja je holomorfna. Dakle, ϕ pripada kompleksnoj strukturi na X, tj. radi se o karti na promatranoj Riemannovoj plohi. Sad imamo

$$\begin{aligned}
\psi \circ f \circ \phi^{-1}(z) &= \psi \circ f \circ \tilde{\phi}^{-1} \circ \eta^{-1}(z) \\
&= c_k \left(\eta^{-1}(z)\right)^k + c_{k+1} \left(\eta^{-1}(z)\right)^{k+1} + c_{k+2} \left(\eta^{-1}(z)\right)^{k+2} + \dots \\
&= \left(\eta^{-1}(z) h(\eta^{-1}(z))\right)^k \\
&= z^k.
\end{aligned}$$

Jedinstvenost broja k slijedi iz činjenice da postoje okoline $p \in U$ i $f(p) \in V$ takve da svaka točka $y \neq f(p)$ u V ima točno k elemenata u svojoj praslici u U (a ovo slijedi iz istog svojstva holomorfnih funkcija iz $\mathbb{C}$ u $\mathbb{C}$). Kad bi postojale karte takve da se f lokalno ponaša kao $z \mapsto z^m$, za neki $m > k$, onda bi restringiranjem tih karata na U i V došli do kontradikcije s prethodno navedenim svojstvom. Iz simetričnosti slijedi da ne može biti ni $m < k$. $\square$

Definicija 2.2.10. *Neka je $f\colon X \to Y$ nekonstantno holomorfno preslikavanje i $p \in X$.* Kratnost od f u točki p, *u oznaci* $\mathrm{mult}_p(f)$, *jest prirodan broj k takav da f u točki p ima oblik $z \mapsto z^k$.*

Prethodna propozicija jamči da je kratnost preslikavanja u točki dobro definiran pojam. Pomislilo bi se isprva da je npr. za funkciju $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$, kratnost u svakoj točki $p \in \mathbb{C}$ jednaka 2. No, jedino je u točki 0 kratnost jednaka 2, a u svim ostalim točkama je kratnost 1.

Prvo primijetimo da uzimanjem trivijalne karte $\mathrm{id}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ u domeni i kodomeni odmah dobivamo da f u točki $p = 0$ ima oblik $z \mapsto z^2$. Pogledajmo $p \neq 0$. Neka je $\psi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ karta oko $f(p) = p^2$ definirana s $\psi(z) = z - p^2$ (i primijetimo da je $\psi(p^2) = 0$), te neka je $\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ karta oko p definirana s $\phi(z) = z - p$ (i opet primijetimo da je $\phi(p) = 0$). Sad je

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}(z) = \psi \circ f(z + p) = \psi((z + p)^2) = z^2 + 2zp = z(z + 2p).$$

Označimo li sada $g(z) = z + 2p$, uočimo da se možemo priključiti dokazu propozicije 2.2.9, budući da je $g(0) = 2p \neq 0$ i $\psi \circ f \circ \phi^{-1}(z) = (z(z + 2p))^1$. Slijedi da je kratnost od f u točki $p \neq 0$ jednaka 1.

Činjenica da kratnost holomorfnog preslikavanja ne može biti 2 (ili više) u svakoj točki je trivijalna posljedica sljedećeg općenitijeg fenomena.

Nadalje u tekstu ispuštamo znak komponiranja funkcija; stoga npr. umjesto $\psi \circ \phi$ pišemo $\psi\phi$.

Korolar 2.2.11. *Neka je $f\colon X \to Y$ nekonstantno holomorfno preslikavanje. Skup točaka $p \in X$ takvih da je* $\mathrm{mult}_p(f) \geqslant 2$ *jest diskretan u X.*

Dokaz. Neka je $p \in X$ točka takva da je $\mathrm{mult}_p(f) \geqslant 2$ i pokažimo da je ona izolirana u X. Neka su $\phi\colon U_1 \to \phi(U_1)$, $\phi(p) = 0$, i $\psi\colon U_2 \to \psi(U_2)$, $\psi(f(p)) = 0$, karte kao u iskazu propozicije 2.2.9. Pretpostavimo da postoji točka $q \in U_1 \cap f^{-1}(U_2)$ takva da je $\mathrm{mult}_q(f) \geqslant 2$. Uzmimo kartu $\tilde{\psi}\colon U_2 \to \tilde{\psi}(U_2)$ oko $f(q)$ definiranu s $\tilde{\psi}(z) = \psi(z) - \psi(f(q))$. Tada postoji karta $\tilde{\phi}\colon \tilde{U}_1 \to \tilde{\phi}(\tilde{U}_1)$ oko p, $\tilde{\phi}(p) = 0$, takva da uz ove dvije karte funkcija ima oblik $z \mapsto z^{\mathrm{mult}_q(f)}$ oko q . Primijetimo sada da ψ i $\tilde{\psi}$ imaju jednake domene, te je $\tilde{U}_1 \cap U_1 \neq \emptyset$, pa su tranzicijske funkcije $\phi\tilde{\phi}^{-1}$ i $\tilde{\psi}\psi^{-1}$ definirane.

Budući da je $\mathrm{mult}_p(f) \geqslant 2$ i $\mathrm{mult}_q(f) \geqslant 2$, vrijedi

$$\left(\psi f \phi^{-1}\right)'(0) = \left(\tilde{\psi} f \tilde{\phi}^{-1}\right)'(0) = 0.$$

Dalje, tranzicijske funkcije su uvijek injektivne holomorfne funkcije, pa im je u svakoj točki derivacija različita od 0. Stoga imamo

$$\begin{aligned}\left(\tilde{\psi}f\tilde{\phi}^{-1}\right)'(0) &= \left(\tilde{\psi}\psi^{-1}\psi f\phi^{-1}\phi\tilde{\phi}^{-1}\right)'(0) \\ &= \left(\tilde{\psi}\psi^{-1}\right)'(\psi f\tilde{\phi}^{-1}(0)) \cdot (\psi f\phi^{-1})'(\phi\tilde{\phi}^{-1}(0)) \cdot \left(\phi\tilde{\phi}^{-1}\right)'(0) \\ &\neq 0,\end{aligned}$$

budući da se radi o umnošku tri broja različita od 0. Ovo je u kontradikciji s $\left(\tilde{\psi}f\tilde{\phi}^{-1}\right)'(0) = 0$, pa zaključujemo da je p jedina točka kratnosti strogo veće od jedan u svojoj okolini $U_1 \cap f^{-1}(U_2)$. $\square$

Definicija 2.2.12. *Neka je $f\colon X \to Y$ nekonstantno holomorfno preslikavanje. Točku $p \in X$ takvu da je $\operatorname{mult}_p(f) \geqslant 2$ zovemo* točkom razgrananja (ramifikacije) *za f. Sliku točke ramifikacije zovemo* točkom grananja.

U korolaru 2.2.11 smo vidjeli da točke ramifikacije čine diskretan podskup od X. Odavde slijedi da i točke grananja čine diskretan podskup od Y, budući da je preslikavanje f holomorfno i nekonstantno, pa stoga otvoreno (po lemi 2.2.3). Ako je X kompaktna Riemannova ploha, onda točki ramifikacije ima konačno mnogo, pa stoga i točki grananja.

O točkama grananja preslikavanja $f\colon X \to Y$ valja razmišljati kao o onim točkama oko kojih bi inverz od f morao biti višeznačno preslikavanje. Sjetimo se primjera funkcije $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$. Vidjeli smo da je 0 jedina točka ramifikacije, pa slijedi da je 0 i jedina točka grananja. Ni za koju okolinu ove točke grananja 0 ne možemo izabrati okolinu točke ramifikacije 0 tako da između njih imamo jednoznačno definiran pojam „drugog korijena”. Oko drugih točaka nemamo taj problem. Za $q \neq 0$, označimo s p_1, p_2 točke čiji je kvadrat jednak q. Tada možemo izabrati okolinu od q i disjunktne okoline od p_1 i p_2 takve da imamo dobro definiran drugi korijen u svakoj od njih; jedino treba izabrati hoće li se q poslati u p_1 ili u p_2.

Primjer 2.2.13. *Uz gornji neformalni opis točki ramifikacije se lakše procjenjuje postoje li takve točke za neko dano preslikavanje. Npr. pogledajmo meromorfnu funkciju Riemannove sfere $f\colon \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ danu s $f(z) = \frac{1}{z}$. Na prvi pogled nije jasno što bi ovdje bila kratnost točke $p \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (budući da kratnost mora biti prirodan broj). No, vidimo da se oko svake točke u kodomeni funkcija f može invertirati, pa očekujemo da je $\operatorname{mult}_p(f) = 1$ za svaki $p \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.*

Preciznije, neka je $p \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Uzmimo prvo da je $p \neq \infty$. Tada je $\frac{1}{p} \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{0\}$, pa uzmimo kartu $\phi\colon (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $\phi(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{p}$. Vrijedi

$\phi(p) = 0$ i $\phi^{-1}(z) = \frac{1}{z+\frac{1}{p}}$. Oko $f(p) = \frac{1}{p} \neq \infty$ uzmimo kartu $\psi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiranu s $\psi(z) = z - \frac{1}{p}$. Sad oko $0 \in \mathbb{C}$ (promatrana okolina je čak cijeli $\mathbb{C}$) imamo

$$\psi f \phi^{-1}(z) = \psi f \left(\frac{1}{z + \frac{1}{p}} \right) = \psi \left(z + \frac{1}{p} \right) = z.$$

Dakle $mult_p(f) = 1$.

Preostaje slučaj $p = 0$. Sada oko p uzmemo kartu $\mathrm{id}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ i kartu $\psi\colon (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $\psi(z) = \frac{1}{z}$, oko $f(p) = \infty$. Na okolini nule vrijedi

$$\mathrm{id}^{-1} f \psi(z) = f \left(\frac{1}{z} \right) = z,$$

pa je i u $p = 0$ kratnost od f jednaka 1.

Dokažimo sada najavljeni rezultat o broju elemenata u praslici holomorfnog preslikavanja između kompaktnih Riemannovih ploha.

Teorem 2.2.14. *Neka je $f\colon X \to Y$ nekonstantno holomorfno preslikavanje između kompaktnih Riemannovih ploha, i definirajmo* stupanj *od f u točki $q \in Y$ s*

$$\deg_q(f) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \mathrm{mult}_p(f).$$

Tada je $\deg_q(f)$ konstanta na Y, tj. ne ovisi o q.

Dokaz. Neka je $q \in Y$, i neka je $f^{-1}(q) = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Označimo $k_i = \mathrm{mult}_{p_i}(f)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Izaberimo kartu $\psi\colon V \to \psi(V)$ oko q takvu da je $\psi(q) = 0$ te da je $\psi(V)$ disk oko $0 \in \mathbb{C}$ (ovakav ψ možemo dobiti restringiranjem bilo koje karte oko q na prasliku diska po toj karti). Sad oko točki $p_1, \ldots, p_n$ izaberimo karte

$$\phi_i\colon U_i \to \phi_i(U_i)$$

takve da je $\phi_i(p_i) = 0$ i da je f lokalno oblika $z \mapsto z^{k_i}$. Ove karte možemo restringirati tako da domene budu disjunktne i zatim skalirati tako da slike budu jedinični disk $K(0,1)$ oko nule (tranzicijska funkcija između skalirane i neskalirane karte jest množenje s nekom konstantom, što je holomorfna funkcija, pa su ove dvije karte kompatibilne). Za svaki $1 \leqslant i \leqslant n$ zatim možemo skalirati ψ do karte ψ_i tako da je $\psi_i(V) = K(0,1)$ jedinični disk oko nule.

Ovime smo postigli da za svaki p_i imamo lokalno preslikavanje oblika $z \mapsto z^{k_i}$ s jediničnog diska u jedinični disk, koje je surjektivno. Po definiciji je $\deg_q(f) = \sum_{i=1}^n k_i$. Za točke y u okolini od q pridružene ne-nul vrijednosti u $K(0,1)$ vrijedi da ima točno k_i točaka u praslici pri svakom ovom lokalnom preslikavanju $z \mapsto z^{k_i}$; kao kod primjera $z \mapsto z^2$ zaključimo da svaka ta točka u praslici ima kratnost 1. Kad bi spomenute točke iscrpile skup $f^{-1}(y)$, imali bismo $\deg_y(f) = k_1 \cdot 1 + \cdots + k_n \cdot 1 = \deg_q(f)$.

Dokažimo da to zaista jest tako (tj. da praslike po ovim lokalnim preslikavanjima čine cijelu prasliku od y po f) za točke dovoljno blizu točki q. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji niz $(y_n)_n$ koji konvergira prema q takav da za svaki n postoji $x_n \in f^{-1}(y_n)$ koji se ne nalazi ni u jednoj od prethodno definiranih okolina točaka p_i homeomorfnih s jediničnim diskom (tu smo iskoristili činjenicu da Y ima prebrojivu bazu, pa svaka točka ima prebrojivu bazu okolina). Sad, budući da u prostoru s prebrojivom bazom kompaktnost povlači nizovnu kompaktnost, X jest nizovno kompaktan prostor. Stoga niz $(x_n)_n$ sadrži konvergentan podniz x_{n_m} koji konvergira k nekom x. Budući da je f neprekidno, $f(x_{n_m})$ konvergira k $f(x)$. No, $f(x_{n_m}) = y_{n_m}$ konvergira k y. Y je Hausdorffov prostor, pa je limes jedinstven, stoga je $f(x) = y$. Dakle, $x \in \{p_1, \ldots, p_n\}$, i dobivamo kontradikciju s činjenicom da postoje okoline točaka $p_1, \ldots, p_n$ disjunktne s nizom $(x_n)_n$.

Zaključujemo da je na nekoj okolini točke q vrijednost funkcije $y \mapsto \deg_y(f)$ konstantna. Ovim razmatranjem dobivamo da je skup $\Sigma_n = \{y \in Y; \deg_y(f) = n\}$ otvoren u Y, za svaki prirodan broj n. Iz povezanosti prostora Y slijedi da samo jedan od ovih skupova može biti neprazan. Dakle, $Y = \Sigma_{\deg_q(f)}$, tj. $\deg_y(f) = \deg_q(f)$ za svaki $y \in Y$. □

Korolar 2.2.15. *Neka je $f\colon X \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ nekonstantna meromorfna funkcija. Točku $x \in X$ takvu da je $f(x) = \infty$ zovemo* polom *od f. Brojeći kratnosti, f ima jednak broj polova i nultočaka.*

Dokaz. Po prethodnom teoremu, $\deg_\infty(f) = \deg_0(f)$. □

Komentirajmo sada singularitete holomorfnih funkcija na Riemannovoj plohi X. *Punktiranom okolinom* točke $p \in X$ ćemo zvati skup $U \setminus \{p\}$, gdje je U otvoren skup u X koji sadrži p.

Definicija 2.2.16. *Neka je f funkcija koja je holomorfna na punktiranoj okolini točke $p \in X$. Kažemo da f u točki p ima* uklonjiv singularitet *(*pol, bitan singularitet*) ako postoji karta $\phi\colon U \to \phi(U)$ oko p takva da $f\phi^{-1}$ ima uklonjiv singularitet (pol, bitan singularitet) u točki $\phi(p)$ (u smislu definicije u kompleksnoj ravnini).*

Tip singulariteta ne ovisi o karti, tj. možemo zaključiti je li se radi o uklonjivom singularitetu, polu ili bitnom singularitetu uzimajući bilo koju kartu oko p.

Vrijedi sljedeća karakterizacija singulariteta analogna propoziciji 1.2.8.

Propozicija 2.2.17. *Neka je f holomorfna funkcija na punktiranoj okolini točke $p \in X$. Tada vrijedi:*

(i) f ima uklonjiv singularitet u p ako i samo ako je $|f|$ ograničena na nekoj punktiranoj okolini od p;

(ii) f ima pol u p ako i samo ako $|f(p_n)| \to \infty$ za svaki niz $(p_n)_n$ koji konvergira prema p;

(iii) Ako ne vrijedi ni (i) ni (ii), onda f ima bitan singularitet u z_0.

Pomoću prethodne propozicije možemo zaključiti da su meromorfne funkcije na Riemannovoj plohi X upravo holomorfne funkcije i funkcije koje su holomorfne na $X \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$ za neke točke $p_1, \ldots, p_n$ u kojima funkcija ima polove.

Kao u slučaju kompleksne ravnine, funkciju koja je holomorfna na punktiranoj okolini neke točke možemo razviti u Laurentov red. Ako je f holomorfna na punktiranoj okolini od $p \in X$, birajući kartu ϕ oko p dobivamo Laurentov razvoj od $f\phi^{-1}$ na punktiranoj okolini točke $z_0 = \phi(p)$,

$$f\phi^{-1}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Laurentov red ovisi o izboru karte ϕ, no ipak možemo donijeti zaključak o tipu singulariteta neovisno o izabranoj karti. Naime, f ima uklonjiv singularitet u p ako je $c_n = 0$ za sve $n \leqslant -1$, pol u p ako je $c_n = 0$ za sve $n \leqslant -m - 1$ te je $c_{-m} \neq 0$ (za neki prirodan broj m), i bitan singularitet ako je $c_n \neq 0$ za beskonačno mnogo $n \leqslant -1$. U slučaju pola, broj

$$\mathrm{ord}_p(f) = \min \{n; c_n \neq 0\}$$

zovemo *red* od f u p.

Navedimo neka svojstva reda koja se sada lako provjere.

Lema 2.2.18. *Neka je f meromorfna funkcija na Riemannovoj plohi X. Tada vrijedi:*

(i) Ako je p nultočka od f, tada je $\operatorname{ord}_p(f) = \operatorname{mult}_p(f)$*;*

(ii) Ako je p pol od f, tada je $\operatorname{ord}_p(f) = -\operatorname{mult}_p(f)$*;*

(iii) Ako p nije ni nultočka ni pol od f, tada je $\operatorname{ord}_p(f - f(p)) = \operatorname{mult}_p(f)$.

Pomoću prva dva svojstva iz gornje leme dokazujemo da je suma redova na kompaktnoj Riemannovoj plohi jednaka 0.

Propozicija 2.2.19. *Neka je f nekonstantna meromorfna funkcija na kompaktnoj Riemannovoj plohi X. Tada je*

$$\sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(f) = 0.$$

Dokaz. Prvo komentirajmo da su nultočke i polovi od f jedine točke na X u kojima je red od f različit od nule. Budući da takvih točaka ima konačno mnogo, gornja suma je u stvari konačna. Označimo s $p_1, \ldots, p_k$ nultočke, a s $q_1, \ldots, q_l$ polove. Koristeći korolar 2.2.15 i prethodnu lemu, imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(f) &= \sum_{i=1}^{k} \operatorname{ord}_{p_i}(f) + \sum_{j=1}^{l} \operatorname{ord}_{q_j}(f) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \operatorname{mult}_{p_i}(f) - \sum_{j=1}^{l} \operatorname{mult}_{q_j}(f) \\
&= \deg_0(f) - \deg_\infty(f) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Poglavlje 3

Postojanje meromorfnih funkcija

3.1 Diferencijalne forme i integriranje

Pristupamo problemu konstruiranja nekonstantnih meromorfnih funkcija na Riemannovoj plohi. Meromorfnu funkciju ćemo dobiti kao omjer dviju meromorfnih diferencijalnih formi; takve diferencijalne forme nalazimo u obliku holomorfnih formi sa singularitetima, a holomorfne forme dobivamo preko harmonijskih formi. Razvijmo zato alat diferencijalnih formi na Riemannovoj plohi. Pri tom će važnu ulogu igrati činjenica da Riemannovu plohu možemo promatrati kao orijentiranu C^∞ mnogostrukost.

Definicija 3.1.1. *Neka je X povezan Hausdorffov topološki prostor s prebrojivom bazom i $n \in \mathbb{N}$. Homeomorfizam $\phi\colon U \to V$, pri čemu su $U \subset X$ i $V \subset \mathbb{R}^n$ otvoreni, zovemo n-*dimenzionalnom realnom kartom*. Kažemo da su dvije karte $\phi_1\colon U_1 \to V_1$ i $\phi_2\colon U_2 \to V_2$ *C^∞-kompatibilne* ako je funkcija*

$$\phi_2\phi_1^{-1}\colon \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_2 \cap U_2)$$

takva da su ona i njezin inverz C^∞ funkcije iz $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^n$. Skup kompatibilnih karata čije domene pokrivaju X zovemo C^∞ atlasom *na X; maksimalan atlas (u smislu inkluzije) zovemo C^∞* strukturom. *Prostor X zajedno s C^∞ strukturom nazivamo* n-dimenzionalnom C^∞ mnogostrukosti.

Budući da je $\mathbb{C}$ izomorfan s $\mathbb{R}^2$ kao realan vektorski prostori, te je općenito holomorfna funkcija $f(x+iy)$ klase C^∞ u varijablama x i y, slijedi da su Riemannove plohe ujedno i dvodimenzionalne C^∞ mnogostrukosti. Zaista, tranzicijske funkcije između atlasa na Riemannovoj plohi su holomorfni homeomorfizmi, pa su i njihovi inverzi holomorfne funkcije. Slijedi da su sve tranzicijske funkcije (pa i njihovi inverzi) klase C^∞

kao funkcije iz $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^2$, pri čemu kompleksnu funkciju $z = x + iy \mapsto f(z)$ shvaćamo kao funkciju $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$, gdje su $u(x, y)$ i $v(x, y)$ realne funkcije takve da je $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Trebat će nam i pojam C^1, C^2, te C^∞ funkcije na Riemannovoj plohi X. U tu svrhu promatrajmo Riemannovu plohu kao dvodimenzionalnu C^∞ mnogostrukost.

Definicija 3.1.2. *Kažemo da je funkcija $f\colon X \to \mathbb{R}$ klase C^m u točki $p \in X$, $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, ako postoji karta $\phi\colon U \to V$ oko točke p takva da je funkcija $f\phi^{-1}$ klase C^m u točki $\phi(p) \in V$. Kompleksna funkcija $f\colon X \to \mathbb{C}$ je klase C^m u točki p ako su* $\operatorname{Re} f$ *i* $\operatorname{Im} f$ *klase C^m u p. U oba slučaja kažemo da je funkcija klase C^m ako je klase C^m u svakoj točki na X.*

Iz glatkosti tranzicijskih funkcija između karti slijedi da prethodna definicija ne ovisi o odabiru karte oko točke p; funkcija f je klase C^m u p ako i samo ako je $f\phi^{-1}$ klase C^m u $\phi(p)$ za svaku kartu ϕ oko p.

Treba nam i dobro definiran pojam integrala na Riemannovoj plohi. Objekte koje ćemo integrirati su tzv. diferencijalne forme (ili, kratko, *forme*).

Istaknimo sada da ćemo ubuduće karte na Riemannovoj plohi označavati sa $z = x + iy$ umjesto ϕ ili ψ, te ćemo na domeni te karte reći da su to *lokalne koordinate* (i pri tom će se podrazumijevati i domena i karta). Funkciju f definiranu na toj domeni ćemo izražavati preko lokalnih koordinata, i pisat ćemo $f(z)$, pri čemu $f(z(p))$ poistovjećujemo s $f(p)$ za točku p u promatranoj domeni.

Definicija 3.1.3. 0-forma *na Riemannovoj plohi X jest neprekidna (realna ili kompleksna) funkcija na X.* 1-forma *na X jest pridruživanje uređenog para (f, g) neprekidnih funkcija svakoj lokalnoj koordinati $z = x + iy$ tako da vrijedi sljedeće: Ako je $\tilde{z}$ druga lokalna koordinata na X s netrivijalnim presjekom domene sa z i pridruženim parom funkcija $(\tilde{f}, \tilde{g})$, tada je na presjeku domena*

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}(\tilde{z}) \\ \tilde{g}(\tilde{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial x}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z(\tilde{z})) \\ g(z(\tilde{z})) \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

pri čemu $f(z(\tilde{z})), g(z(\tilde{z}))$ shvaćamo kao $f(z^{-1}(\tilde{z}(p)))$, $g(z^{-1}(\tilde{z}(p)))$. U lokalnim koordinatama 1-formu zapisujemo u obliku $f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$. 2-forma *na X jest priduživanje neprekidne funkcije f svakoj lokalnoj koordinati $z = x + iy$ tako da za svaku drugu lokalnu koordinatu $\tilde{z}$ s netrivijalnim presjekom domena sa z i pridruženom funkcijom*

$\tilde{f}$ vrijedi

$$\tilde{f}(\tilde{z}) = f(z(\tilde{z})) \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial x}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{y}} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

U lokalnim koordinata 2-formu zapisujemo u obliku $f\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

Uočimo da je matrica koja se pojavljuje u (3.1) i (3.2) upravo Jacobian tranzicijske funkcije $z\tilde{z}^{-1}$ gledane kao funkcija dviju realnih varijabli s vrijednostima u $\mathbb{R}^2$.

Mogu se definirati i forme višeg reda, no za naše potrebe su dovoljne 0-, 1- i 2-forme; 1-forme najčešće označavamo s ω, a 2-forme s Ω.

Komentirajmo odnos izraza $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ i $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

Prvo, istaknimo da u lokalnoj koordinati $z = x + iy$ svaka 1-forma ima jedinstven prikaz kao linearna kombinacija (gdje su koeficijenti neprekidne funkcije) $\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}y$, a 2-forma ima jedinstven prikaz kao neprekidna funkcija uz $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. *Vanjski produkt* $\wedge$ jest funkcija definirana na parovima 1-formi s

$$(f_1\,\mathrm{d}x + g_1\,\mathrm{d}y) \wedge (f_2\,\mathrm{d}x + g_2\,\mathrm{d}y) = (f_1 g_2 - f_2 g_1)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Definicija je vođena zahtjevom da vrijedi $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y = 0$ i $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Vanjski produkt se može općenito definirati za k-formu i l-formu (i pri tom je produkt $(k+l)$-forma), no, opet, to nama neće biti potrebno.

Kao što je za očekivati, integriranje 1-forme će intuitivno odgovarati krivuljnom integralu, a integriranje 2-forme plošnom integralu. Zato $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y = 0$ odgovara tome da ne možemo imati plošni integral po samo jednoj varijabli, a $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ odgovara promjeni predznaka kod promjene „orijentacije”. Neformalno, za dvodimenzionalnu realnu plohu kažemo da je *orijentabilna* ako u svakoj točki možemo izabrati „normalu” tako da ta normala varira neprekidno po plohi (i takav odabir onda zovemo *orijentacijom* plohe). Lokalno je svaka ploha homeomorfna otvorenom podskupu od $\mathbb{R}^2$, za koji možemo na prirodan način izabrati orijentaciju. Pitanje (globalne) orijentabilnosti jest onda pitanje kompatibilnosti orijentacija na presjecima lokalnih karti. Formalno, imamo sljedeću definiciju.

Definicija 3.1.4. *Kažemo da je dvodimenzionalna C^∞ mnogostrukost* orijentirana *ako za svake dvije karte z i $\tilde{z}$ vrijedi*

$$\det \nabla(\tilde{z}z^{-1})(p) > 0$$

u svakoj točki zajedničke domene (gdje je $\nabla(\tilde{z}z^{-1})$ Jacobian tranzicijske funkcije). Ovakav atlas zovemo orijentacijom *pripadne mnogostrukosti. Kažemo da je mnogostrukost* orijentabilna *ako postoji orijentacija za nju.*

Sad primijetimo olakšavajuću okolnost da su Riemannove plohe već same po sebi orijentirane.

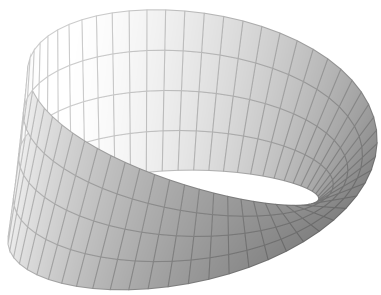
Propozicija 3.1.5. *Riemmanova ploha, gledana kao dvodimenzionalna C^∞ mnogostrukost, jest orijentirana.*

Dokaz. Pogledajmo proizvoljnu tranzicijsku funkciju $\zeta = \tilde{z}z^{-1}$ između dviju karti na plohi. Označimo li $\zeta = u + iv$, zbog holomorfnosti od ζ iz Cauchy-Riemannovih uvjeta imamo $u_x = v_y$ i $u_y = -v_x$. Gledano kao funkcija iz $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^2$ je $\zeta = (u, v)$, pa je

$$\nabla\zeta = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix},$$

pa je $\det \nabla\zeta = u_x^2 + u_y^2 > 0$ u svakoj točki. □

Iz prethodnog odmah slijedi da na neorijentabilnim plohama, npr. *Möbiusovoj vrpci*, ne možemo definirati kompleksnu strukturu.



Slika 3.1: Möbiusova vrpca

Definirajmo sada integral 1-forme i 2-forme na Riemannovoj plohi.

Neka je $\gamma\colon [0, 1] \to X$ *krivulja*, tj. neprekidna po dijelovima C^∞ funkcija; po definiciji uzimamo da to znači da postoje $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = 1$ takvi da je slika od

$$\gamma_i = \gamma\big|_{[a_{i-1},\, a_i]}\colon [a_{i-1},\, a_i] \to X$$

sadržana u jednoj lokalnoj koordinati z_i na X, te je $z_i\gamma_i\colon [a_{i-1},\, a_i] \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija koja je beskonačno puta derivabilna na $\langle a_{i-1},\, a_i\rangle$.

Pretpostavimo sada da je slika od γ sadržana u domeni jedne lokalne koordinate $z = x + iy$ (tj. da je γ jednak jedan od prethodno definiranih γ_i). Definiramo integral 1-forme $\omega = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$ po krivulji γ s

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \Big(f(z(\gamma(t)))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + g(z(\gamma(t)))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big)\,\mathrm{d}t.$$

Neka je sada T homeomorfna slika trokuta[1] u $\mathbb{R}^2$ sadržana u domeni jedne lokalne koordinate $z = x + iy$ te neka je 2-forma Ω na toj karti dana s $f\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Definiramo integral 2-forme Ω na T s

$$\int_D \Omega = \int_{z(T)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gdje $z(T)$ shvaćamo kao podskup od $\mathbb{R}^2$, pa uzimamo $z = (x, y)$ i integriramo po dvije realne varijable.

Uvjeti (3.1) i (3.2) iz definicije diferencijalnih formi nam osiguravaju da se gornji integral (zasad definiran samo unutar domene jedne lokalne koordinate) dobro ponaša pri promjeni lokalnih koordinata. Na primjer, pogledajmo integral 1-forme uz oznake iz (3.1). Vrijedi, uz oznake $\tilde{z} = \tilde{z}(\gamma(t))$ i $z = z(\gamma(t))$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Big(\tilde{f}(\tilde{z})\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}t} + \tilde{g}(\tilde{z})\frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}t}\Big)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \Big(\tilde{f}(\tilde{z})\frac{\mathrm{d}\tilde{x}(x,y)}{\mathrm{d}t} + \tilde{g}(\tilde{z})\frac{\mathrm{d}\tilde{y}(x,y)}{\mathrm{d}t}\Big)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \left(\tilde{f}(\tilde{z})\left(\frac{\partial\tilde{x}}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\tilde{x}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) + \tilde{g}(\tilde{z})\left(\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\tilde{y}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \left(\Big(\tilde{f}(\tilde{z})\frac{\partial\tilde{x}}{\partial x} + \tilde{g}(\tilde{z})\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x}\Big)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \Big(\tilde{f}(\tilde{z})\frac{\partial\tilde{x}}{\partial y} + \tilde{g}(\tilde{z})\frac{\partial\tilde{y}}{\partial y}\Big)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \left(f(z)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + g(z)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti iskoristili upravo jednakost (3.1).

Za općenitu krivulju γ, uz prijašnje oznake, definiramo

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \omega.$$

[1]Notacijski je ponekad lakše uzeti kvadrat $[0,\,1]^2$ umjesto trokuta, a i svejedno je za ovu definiciju, budući da su trokut i kvadrat u $\mathbb{R}^2$ homeomorfni.

Ova definicija je dobra, tj. ne ovisi o podjeli krivulje γ na dijelove γ_i.

Za 2-forme definiciju integrala proširujemo na tzv. *triangulabilne* skupove. To su skupovi koji se mogu dobiti kao unija homemorfnih slika trokuta u $\mathbb{R}^2$ za koje vrijedi da se svaka dva ili ne sijeku ili imaju jednu zajedničku stranicu, te se slike tog eventualnog presjeka podudaraju. Taj skup homeomorfizama, a i njegovu sliku, nazivamo *triangulacijom* skupa. Može se pokazati da su Riemannove plohe (općenito, dvodimenzionalne C^∞ mnogostrukosti) triangulabilne.

Neka je D triangulabilan zatvoren skup u X. Uzmimo neku triangulaciju od D, te profinimo tu triangulaciju (tj. uzmimo triangulaciju svakog trokuta T) takvu da je u toj profinjenoj triangulaciji, označimo je s $\{T_i\}_{i\in I}$, svaki trokut T_i sadržan u domeni neke lokalne koordinate z_i. Definiramo

$$\int_D \Omega = \sum_{i\in I} \int_{T_i} \Omega.$$

Ako je skup D konačan, onda možemo promatrati samo konačne triangulacije, pa je gornja suma konačna. U suprotnom ćemo integrirati samo forme koje su jednake 0 van nekog kompaktnog skupa, pa je i u tom slučaju suma konačna i gornji izraz ima smisla.

Integral 2-forme ne ovisi o izboru profinjenja triangulacije. Ideja dokaza ove tvrdnje, a i tvrdnje da integral 1-forme ne ovisi o podjeli krivulje γ , jest pokazati da se vrijednost integrala ne mijenja ako uzmemo finiju triangulaciju od trenutačne, odnosno finiju podjelu krivulje γ. Onda za svake dvije triangulacije odnosno podjele od γ nađemo zajedničko profinjenje, odakle slijedi da se vrijednosti integrala za te dvije triangulacije odnosno podjele podudaraju.

Komentirajmo sada jednu konstrukciju; željeli bismo integrirati 1-forme po rubu triangulabilnih skupova. Neka je T trokut[2] sadržan unutar domene jedne lokalne koordinate, i to takav da je ∂T krivulja. Na toj domeni lokalne koordinate imamo neku orijentaciju, pa možemo orijentirati i ∂T „u smjeru suprotnom kazaljke na satu". Sad, ako je D triangulabilan zatvoren skup, nađimo dovoljno finu triangulaciju takvu da je svaki trokut sadržan u domeni neke lokalne koordinate. U slučaju dvodimenzionalnih C^∞ mnogostrukosti možemo uzeti da su triangulacije takve da je rub svakog trokuta krivulja. Rub svakog trokuta sad ima svoju orijentaciju; zbog orijentabilnosti Riemannovih ploha će u našem slučaju te orijentacije biti *usklađene*. To znači da će pri obilasku jednog od dva trokuta koji dijele jedan rub integral biti suprotnog predznaka nego pri obilasku susjednog trokuta. Zato će se te vrijednosti na tom rubu skratiti, i preživjet će samo integral po orijentiranom rubu od D.

[2] Trokutom ćemo zvati i homeomorfne slike trokuta u $\mathbb{R}^2$.

Formalno, vrijedi sljedeći teorem. To je poseban slučaj općenitijeg Stokesovog teorema.

Teorem 3.1.6. *(Stokes) Neka je ω C^1 1-forma i D triangulabilan zatvoren skup na Riemannovoj plohi X. Tada vrijedi*

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D \mathrm{d}\omega.$$

Sad ćemo definirati nekoliko operatora nad diferencijalnim formama. Pri tom će nam nekad dobro doći umjesto baze $\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y\}$ za 1-forme promatrati bazu $\{\mathrm{d}z, \mathrm{d}\bar{z}\}$, gdje

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y,$$
$$\mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - i\,\mathrm{d}y.$$

Lema 3.1.7. *Skup $\{\mathrm{d}z, \mathrm{d}\bar{z}\}$ čini bazu za prostor 1-formi u lokalnoj koordinati, a za 2-forme bazu čini $\{\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}\}$.*

Dokaz. Rješavanjem jednostavnog sustava vidimo da je forma $\omega = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$ jednaka $\frac{f-ig}{2}\,\mathrm{d}z + \frac{f+ig}{2}\,\mathrm{d}\bar{z}$. Druga tvrdnja slijedi iz

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} &= (\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) \wedge (\mathrm{d}x - i\,\mathrm{d}y)\\ &= \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x - i\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + i\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y\\ &= -2i\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

□

U nastavku ćemo govoriti o formama s nekom razinom glatkosti – kažemo da je forma klase C^k ako su joj takvi koeficijenti (u svakoj lokalnoj koordinati).

Definicija 3.1.8. *Za C^1 0-formu f definiramo*

$$\mathrm{d}f = f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y;$$

za C^1 1-formu $\omega = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$ definiramo

$$\mathrm{d}\omega = (g_x - f_y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y;$$

za 2-formu Ω stavljamo

$$\mathrm{d}\Omega = 0.$$

Definicija operatora d za 1-forme je vođena zahtjevom da vrijedi sljedeći (a priori formalan) račun:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}(f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(f\,\mathrm{d}x) + \mathrm{d}(g\,\mathrm{d}y) = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}y \\ &= (f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}x + (g_x\,\mathrm{d}x + g_y\,\mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}y = f_y\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + g_x\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= (g_x - f_y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Zabilježimo da vrijedi $\mathrm{d}(f\,\mathrm{d}x) = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x$, $\mathrm{d}(g\,\mathrm{d}y) = \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}y$ te da je d aditivan na 1-formama.

Iskoristimo sada kompleksnu notaciju; iz $z = x+iy$, $\bar{z} = x-iy$ slijedi $x = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$ i $y = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$, pa formalno imamo sljedeće:

$$\begin{aligned}f_z &= \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \tfrac{1}{2}(f_x - if_y), \\ f_{\bar{z}} &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \tfrac{1}{2}(f_x + if_y).\end{aligned}$$

Stavimo zato po definiciji, za C^1 0-formu f,

$$\begin{aligned}f_z &= \tfrac{1}{2}(f_x - if_y), \\ f_{\bar{z}} &= \tfrac{1}{2}(f_x + if_y).\end{aligned}$$

Definicija 3.1.9. *Za C^1 0-formu f definiramo*

$$\begin{aligned}\partial f &= f_z\,\mathrm{d}z \\ \bar{\partial} f &= f_{\bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z};\end{aligned}$$

za C^1 1-formu $\omega = u\,\mathrm{d}z + v\,\mathrm{d}\bar{z}$ definiramo

$$\begin{aligned}\partial\omega &= v_z\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} \\ \bar{\partial}\omega &= -u_{\bar{z}}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z};\end{aligned}$$

za C^1 2-formu Ω stavljamo

$$\partial\Omega = \bar{\partial}\Omega = 0.$$

Prethodna definicija za 1-forme je motivirana sljedećim računom (slično kao kod operatora d):

$$\begin{aligned}\partial\omega &= \partial(u\,\mathrm{d}z + v\,\mathrm{d}\bar{z}) = \partial u \wedge \mathrm{d}z + \partial v \wedge \mathrm{d}\bar{z} \\ &= u_z\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z + v_z\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = v_z\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}, \\ \bar{\partial}\omega &= \bar{\partial}u \wedge \mathrm{d}z + \bar{\partial}v \wedge \mathrm{d}\bar{z} = u_{\bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z + v_{\bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}\bar{z} \\ &= -u_{\bar{z}}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z};\end{aligned}$$

direktnim računom se provjeri da vrijedi $\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z = \mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}\bar{z} = 0$ i $\mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z = -\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}$.

Operatore d, ∂ i $\bar{\partial}$ nazivamo diferencijalnim operatorima.

Definicija 3.1.10. *Za 1-formu $\omega = u\,\mathrm{d}z + v\,\mathrm{d}\bar{z}$ definiramo* konjugat *od ω,*

$$\bar{\omega} = \bar{v}\,\mathrm{d}z + \bar{u}\,\mathrm{d}\bar{z}.$$

Za 2-formu $\Omega = u\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}$ definiramo konjugat s

$$\overline{\Omega} = -\bar{u}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}.$$

Definicija 3.1.11. *Za C^1 1-formu $\omega = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$ definiramo 1-formu*

$$^*\omega = -g\,\mathrm{d}x + f\,\mathrm{d}y.$$

Operator * zovemo Hodge-zvijezdom*, a formu $^*\omega$* zvjezdastim konjugatom *od ω.*

Trebalo bi provjeriti da su sve prethodno definirane forme dobro definirane, tj. da zadovoljavaju uvjete (3.1) odnosno (3.2). Provjerimo to, na primjer, za zvjezdast konjugat 1-forme ω. Neka je na presjeku domena lokalnih koordinata ω dana s $f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$ i $\tilde{f}\,\mathrm{d}\tilde{x} + \tilde{g}\,\mathrm{d}\tilde{y}$. Tada je $^*\omega$ jednak $-g\,\mathrm{d}x + f\,\mathrm{d}y$ i $-\tilde{g}\,\mathrm{d}\tilde{x} + \tilde{f}\,\mathrm{d}\tilde{y}$. Trebamo provjeriti da vrijedi

$$\begin{pmatrix} -\tilde{g}(\tilde{z}) \\ \tilde{f}(\tilde{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial x}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -g(z(\tilde{z})) \\ f(z(\tilde{z})) \end{pmatrix},$$

pa zato pomnožimo jednakost u (3.1) slijeva s rotacijskom matricom $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Ta matrica komutira s matricama oblika $\left(\begin{smallmatrix} A & -B \\ B & A \end{smallmatrix}\right)$, a upravo je tog oblika (zbog Cauchy-Riemannovih uvjeta) Jacobian tranzicijske funkcije koji se javlja u (3.1). Stoga imamo

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{f}(\tilde{z}) \\ \tilde{g}(\tilde{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial x}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z(\tilde{z})) \\ g(z(\tilde{z})) \end{pmatrix},$$

što postaje tražena jednakost.

Skupimo sada nekoliko jednostavnih računskih rezultata o definiranim formama koje će nam služiti u daljnjem računu.

Propozicija 3.1.12. *Neka su $\omega = u\,\mathrm{d}z + v\,\mathrm{d}\bar{z}$, $\omega_1 = u_1\,\mathrm{d}z + v_1\,\mathrm{d}\bar{z}$ i $\omega_2 = u_2\,\mathrm{d}z + v_2\,\mathrm{d}\bar{z}$ C^1 1-forme i f C^1 0-forma. Tada vrijedi:*

(i) *Ako je f klase C^2, tada je* $\mathrm{d}^2 f = \mathrm{dd} f = 0$. *Ukratko,* $\mathrm{d}^2 = 0$;

(ii) $\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}$;

(iii) $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$;

(iv) $f_{\bar{z}} = 0$ *ako i samo ako je f holomorfna funkcija. Ekvivalentno,* $\bar{\partial} f = 0$ *ako i samo ako je f holomorfna;*

(v) $^*\omega = -iu\,\mathrm{d}z + iv\,\mathrm{d}\bar{z}$;

(vi) $^{**}\omega = -\omega$;

(vii) $\overline{f_z} = \bar{f}_{\bar{z}}$, $\overline{f_{\bar{z}}} = \bar{f}_z$;

(viii) $\overline{\mathrm{d}f} = \mathrm{d}\bar{f}$;

(ix) $\overline{^*\omega} = {}^*\bar{\omega}$;

(x) $^*(-\omega) = -{}^*\omega$;

(xi) $\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1$;

(xii) $(-\omega_1) \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge (-\omega_2) = -\omega_1 \wedge \omega_2$;

(xiii) $^*\omega_1 \wedge {}^*\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2$;

(xiv) $\overline{\omega_1 \wedge \omega_2} = \overline{\omega_1} \wedge \overline{\omega_2}$.

Dokaz.

(i) $\mathrm{dd}f = \mathrm{d}(f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y) = (f_{yx} - f_{xy})\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0$, pri čemu smo iskoristili Schwarzovo pravilo.

(ii)

$$\begin{aligned}
\partial f + \bar{\partial} f &= \tfrac{1}{2}(f_x - if_y)\,\mathrm{d}z + \tfrac{1}{2}(f_x + if_y)\,\mathrm{d}\bar{z} \\
&= \tfrac{1}{2}(f_x - if_y)(\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) + \tfrac{1}{2}(f_x + if_y)(\mathrm{d}x - i\,\mathrm{d}y) \\
&= f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}f
\end{aligned}$$

(iii) Ako je f klase C^2, imamo $\partial\partial f = \partial(f_z\,\mathrm{d}z) = 0$, i slično $\bar{\partial}\bar{\partial} f = 0$. Dalje,

$$\partial\bar{\partial} f + \bar{\partial}\partial f = \partial(f_{\bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z}) + \bar{\partial}(f_z\,\mathrm{d}z) = f_{\bar{z}z}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} - f_{z\bar{z}}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = 0,$$

što opet slijedi iz Schwarzovog pravila.

(iv) Napišimo $f = u+iv$. Sad, $f_{\bar z} = \frac{1}{2}(f_x+if_y) = \frac{1}{2}(u_x+iv_x+iu_y-v_y)$, pa je $f_{\bar z} = 0$ ako i samo ako je $u_x = v_y$ i $v_x = -u_y$, a to su upravo Cauchy-Riemannovi uvjeti za holomorfnost C^1 funkcije $f(z)$.

(v) Iz $\omega = u\,\mathrm{d}z + v\,\mathrm{d}\bar z$ lako dobijemo $\omega = (u+v)\,\mathrm{d}x + i(u-v)\,\mathrm{d}y$. Sad je ${}^*\omega = i(v-u)\,\mathrm{d}x+(u+v)\,\mathrm{d}y$, a to je po dokazu leme 2.1.6 jednako ${}^*\omega = -iu\,\mathrm{d}z+iv\,\mathrm{d}\bar z$.

(vi) ${}^{**}(u\,\mathrm{d}z + v\,\mathrm{d}\bar z) ={}^* (-iu\,\mathrm{d}z + iv\,\mathrm{d}\bar z) = -u\,\mathrm{d}z - v\,\mathrm{d}\bar z$.

(vii) Napišimo $f = u+iv$. Naprije primijetimo da je $\overline{f_x} = \bar f_x$ i $\overline{f_y} = \bar f_y$. Sad,

$$\overline{f_z} = \overline{\tfrac{1}{2}(f_x - if_y)} = \tfrac{1}{2}(\overline{f_x} + i\overline{f_y}) = \tfrac{1}{2}(\bar f_x + i\bar f_y) = \bar f_{\bar z}.$$

Analogno se dobije druga tvrdnja.

(viii) Po *(ii)*, *(vii)* i *(viii)* vrijedi

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{d}f} &= \overline{\partial f + \bar\partial f} = \overline{f_z\,\mathrm{d}z + f_{\bar z}\,\mathrm{d}\bar z} = \overline{f_{\bar z}}\,\mathrm{d}z + \overline{f_z}\,\mathrm{d}\bar z\\ &= \bar f_z\,\mathrm{d}z + \bar f_{\bar z}\,\mathrm{d}\bar z = \partial\bar f + \bar\partial\bar f\\ &= \mathrm{d}\bar f.\end{aligned}$$

(ix) Po *(v)* imamo

$$\begin{aligned}\overline{{}^*\omega} &= \overline{-iu\,\mathrm{d}z + iv\,\mathrm{d}\bar z} = -i\bar v\,\mathrm{d}z + i\bar u\,\mathrm{d}\bar z\\ &= {}^*(\bar v\,\mathrm{d}z + \bar u\,\mathrm{d}\bar z)\\ &= {}^*\bar\omega.\end{aligned}$$

(x) ${}^*(-\omega) = {}^*(-u\,\mathrm{d}z - v\,\mathrm{d}\bar z) = iu\,\mathrm{d}z - iv\,\mathrm{d}\bar z = -{}^*\omega$.

(xi) Slijedi odmah iz $\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar z = -\,\mathrm{d}\bar z\wedge\mathrm{d}z$.

(xii) Slično kao *(xii)*.

(xiii) Koristeći *(v)* imamo

$$\begin{aligned}{}^*\omega_1\wedge{}^*\omega_2 &= (-iu_1\,\mathrm{d}z + iv_1\,\mathrm{d}\bar z)\wedge(-iu_2\,\mathrm{d}z + iv_2\,\mathrm{d}\bar z) = (u_1v_2 - u_2v_1)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar z\\ &= \omega_1\wedge\omega_2.\end{aligned}$$

(xiv) Vrijedi

$$\omega_1\wedge\omega_2 = (u_1\,\mathrm{d}z + v_1\,\mathrm{d}\bar z)\wedge(u_2\,\mathrm{d}z + v_2\,\mathrm{d}\bar z) = (u_1v_2 - u_2v_1)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar z,$$

pa je

$$\overline{\omega_1 \wedge \omega_2} = -\overline{(u_1 v_2 - u_2 v_1)}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}.$$

S druge strane je

$$\begin{aligned}\overline{\omega_1} \wedge \overline{\omega_2} &= (\bar{v_1}\,\mathrm{d}z + \bar{u_1}\,\mathrm{d}\bar{z}) \wedge (\bar{v_2}\,\mathrm{d}z + \bar{u_2}\,\mathrm{d}\bar{z}) \\ &= (\bar{v_1}\bar{u_2} - \bar{v_2}\bar{u_1})\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}.\end{aligned}$$

□

Definicija 3.1.13. *Za C^2 0-formu f definiramo 2-formu Δf, tzv.* Laplacian *od f, s*

$$\Delta f = (f_{xx} + f_{yy})\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

u svakoj lokalnoj koordinati $z = x + iy$.

Opet, provjeri se da je ova definicija dobra, tj. da zadovoljava (3.2).

Lema 3.1.14. $\Delta f = -2i\bar{\partial}\partial f = \mathrm{d}^*\mathrm{d}f$.

Dokaz. Imamo $\bar{\partial}\partial f = \bar{\partial}(f_z\,\mathrm{d}z) = -f_{z\bar{z}}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}$. Sad,

$$\begin{aligned}f_{z\bar{z}} &= \left(\tfrac{1}{2}(f_x - if_y)\right)_{\bar{z}} = \tfrac{1}{2}\left((f_x)_{\bar{z}} - i(f_y)_{\bar{z}}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}(f_{xx} + if_{xy}) - \tfrac{i}{2}(f_{yx} + if_{yy})\right) \\ &= \tfrac{1}{4}(f_{xx} + f_{yy}).\end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned}\bar{\partial}\partial f &= -\tfrac{1}{4}(f_{xx} + f_{yy})\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} \\ &= \tfrac{i}{2}(f_{xx} + f_{yy})\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= \tfrac{i}{2}\Delta f.\end{aligned}$$

Dalje,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^*\mathrm{d}f &= \mathrm{d}^*(f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(-f_y\,\mathrm{d}x + f_x\,\mathrm{d}y) \\ &= (f_{xx} + f_{yy})\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= \Delta f.\end{aligned}$$

□

Imenujmo sada nekoliko posebnih vrsta formi, te ispitajmo odnose među njima.

Definicija 3.1.15. *Za C^2 0-formu f kažemo da je* harmonijska *ako je $\Delta f = 0$ (što je ekvivalentno tome da je $f_{xx} + f_{yy} = 0$ u svakoj lokalnoj koordinati $z = x + iy$).*

Definicija 3.1.16. *Neka je ω C^1 1-forma na Riemannovoj plohi X. Kažemo da je ona*

- harmonijska *ako je u svakoj lokalnoj koordinati dana s $\omega = \mathrm{d}f$ za neku 0-formu f koja je harmonijska u toj lokalnoj koordinati;*
- zatvorena *ako je $\mathrm{d}\omega = 0$;*
- kozatvorena *ako je $^*\omega$ zatvorena;*
- egzaktna *ako je $\omega = \mathrm{d}f$ za neku C^2 0-formu f na X;*
- koegzaktna *ako je $^*\omega$ egzaktna;*
- holomorfna *ako je u svakoj lokalnoj koordinati dana s $\omega = \mathrm{d}f$ za neku 0-formu f koja je holomorfna u toj koordinati (0-forma f je holomorfna ako je to holomorfna funkcija lokalne koordinate, tj. ako je $f(z)\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija).*

Uočimo da su harmoničnost i holomorfnost forme lokalni zahtjevi, dok je egzaktnost (pa i koegzaktnost) globalan zahtjev.

Također primijetimo da je zbog $\mathrm{d}^2 = 0$ svaka egzaktna forma ujedno i zatvorena. Obrat općenito ne vrijedi, no vrijedi analogon rezultata iz kompleksne ravnine:

Teorem 3.1.17. *(Poincaréova lema) Neka je ω C^1 1-forma na Riemannovoj plohi X takva da je $\mathrm{d}\omega = 0$ u okolini neke točke $p \in X$. Tada postoji okolina točke p na kojoj je $\omega = \mathrm{d}f$ za neku C^2 0-formu f.*

Dakle, (ko)zatvorene forme su lokalno (ko)egzaktne. Primijetimo još da iz $^*\omega = \mathrm{d}f$ za kozatvorene forme slijedi $^{**}\omega = {}^*\,\mathrm{d}f$, tj. $\omega = -^*\,\mathrm{d}f$. Stoga je $\omega = {}^*\,\mathrm{d}(-f)$.

Propozicija 3.1.18. *C^1 1-forma ω je harmonijska ako i samo je zatvorena i kozatvorena.*

Dokaz. Ako je ω harmonijska forma, onda je lokalno $\omega = \mathrm{d}f$ gdje je f harmonijska. Tada je $\mathrm{d}\omega = \mathrm{dd}f = 0$, dakle ω je zatvorena. Dalje, pokažimo da je ω kozatvorena, tj. da je $^*\omega$ zatvorena. Po lemi 3.1.14 imamo

$$\mathrm{d}^*\omega = \mathrm{d}^*\mathrm{d}f = \Delta f = 0,$$

budući da je f harmonijska.

Obratno, po komentaru prije propozicije su zatvorene forme lokalno egzaktne, pa lokalno imamo $\omega = \mathrm{d}f$. Budući da je ${}^*\omega$ zatvorena, imamo $\mathrm{d}^*\mathrm{d}f = 0$, pa opet iskoristimo lemu 3.1.14 da bismo zaključili da je $\Delta f = 0$. Dakle, ω je lokalno oblika $\mathrm{d}f$ za lokalno harmonijsku funkciju f. □

Propozicija 3.1.19. *1-forma $\omega = u\,\mathrm{d}z + v\,\mathrm{d}\bar{z}$ je holomorfna ako i samo ako je u holomorfna funkcija lokalne koordinate i $v = 0$.*

Dokaz. Ako je ω holomorfna forma, onda je lokalno dana s $\omega = \mathrm{d}f$ uz holomorfnu funkciju f. Iskoristimo $\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}$, pa imamo $\omega = \partial f + \bar{\partial} f = f_z\,\mathrm{d}z + f_{\bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z}$. Izjednačavanjem

$$f_z\,\mathrm{d}z + f_{\bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z} = u\,\mathrm{d}z + v\,\mathrm{d}\bar{z}$$

slijedi $f_z = u$ i $f_{\bar{z}} = v$. No, f je holomorfna, pa je $f_{\bar{z}} = 0$, dakle $v = 0$. Budući da je f holomorfna, onda je i f_z, tj. u, holomorfna. □

Korolar 3.1.20. *Ako je f harmonijska funkcija na Riemannovoj plohi X, onda je ∂f holomorfna forma.*

Dokaz. Po lemi 3.1.14 iz $\Delta f = 0$ slijedi $\bar{\partial}\partial f = 0$. Po definiciji je $\partial f = f_z\,\mathrm{d}z$, pa imamo $\bar{\partial}(f_z\,\mathrm{d}z) = 0$. Slijedi $-f_{z\bar{z}}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = 0$, tj. $f_{z\bar{z}} = 0$. Zaključujemo da je f_z holomorfna funkcija, pa iz $\partial f = f_z\,\mathrm{d}z$ i prethodne propozicije slijedi da je ∂f holomorfna forma. □

Propozicija 3.1.21. *Neka je $\omega = u\,\mathrm{d}z + v\,\mathrm{d}\bar{z}$ C^1 harmonijska 1-forma. Tada postoje holomorfne forme ω_1, ω_2 takve da je*

$$\omega = \omega_1 + \overline{\omega_2}.$$

Dokaz. Prvo pogledajmo

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \partial\omega + \bar{\partial}\omega = (v_z - u_{\bar{z}})\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z},\\
\mathrm{d}^*\omega &= (\partial + \bar{\partial})(-iu\,\mathrm{d}z + iv\,\mathrm{d}\bar{z}) = i(u_{\bar{z}} + v_z)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}.
\end{aligned}$$

Budući da je ω harmonijska, po propoziciji 3.1.18 slijedi

$$(v_z - u_{\bar{z}})\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = i(u_{\bar{z}} + v_z) = 0.$$

Odavde dobivamo $u_{\bar{z}} = v_z = 0$. Dakle, u je holomorfna 1-forma. Iz $\bar{v}_{\bar{z}} = \overline{v_z} = 0$ zaključujemo da je $\bar{v}$ također holomorfna.

Definirajmo forme $\omega_1 = u\,\mathrm{d}z$ i $\omega_2 = \bar{v}\,\mathrm{d}z$. Iz propozicije 3.1.19 slijedi da su ω_1 i ω_2 holomorfne, a i vidimo da je $\omega = \omega_1 + \overline{\omega_2}$. □

Teorem 3.1.22. *1-forma ω je holomorfna ako i samo ako postoji harmonijska forma α takva da je*

$$\omega = \alpha + i^*\alpha.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $\omega = \alpha + i^*\alpha$ za harmonijsku formu α. Iz dokaza prethodne propozicije znamo da je

$$\alpha = u\,\mathrm{d}z + v\,\mathrm{d}\bar{z},$$

pri čemu su u i v holomorfne. Slijedi

$$\alpha + i^*\alpha = u\,\mathrm{d}z + v\,\mathrm{d}\bar{z} + i(-iu\,\mathrm{d}z + v\,\mathrm{d}\bar{z}) = 2u\,\mathrm{d}z,$$

što je holomorfna forma zbog holomorfnosti od u.

Obratno, neka je ω holomorfna forma, tj. lokalno oblika $\omega = \mathrm{d}f$ za harmonijsku 0-formu f. Iz Cauchy-Riemannovih uvjeta lako slijedi da je holomorfna funkcija harmonijska, pa imamo da je ω harmonijska forma.

Sad, napišimo $f = u + iv$. Uspoređivanjem realnih i imaginarnih dijelova odmah slijedi da je $f_{xx} + f_{yy} = 0$ ekvivalentno s $u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0$. Odavde odmah slijedi da je $\bar{f}$ također harmonijska. Dakle, i $\bar{\omega} = \overline{\mathrm{d}f} = \mathrm{d}\bar{f}$ je harmonijska forma. Harmonijske funkcije čine kompleksan vektorski prostor, pa definiramo li

$$\alpha = \frac{\omega - \bar{\omega}}{2} = \frac{\mathrm{d}f - \mathrm{d}\bar{f}}{2} = \mathrm{d}\left(\frac{f - \bar{f}}{2}\right),$$

to je također harmonijska forma. Sad pogledajmo

$$\begin{aligned} {}^*\alpha &= {}^*\tfrac{1}{2}(\partial + \bar{\partial})(f - \bar{f}) \\ &= {}^*\tfrac{1}{2}\left(f_z\,\mathrm{d}z + f_{\bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z} - \bar{f}_z\,\mathrm{d}z - \bar{f}_{\bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z}\right) \\ &= -\tfrac{i}{2}(f_z - \bar{f}_z)\,\mathrm{d}z + \tfrac{i}{2}(f_{\bar{z}} - \bar{f}_{\bar{z}})\,\mathrm{d}\bar{z}. \end{aligned}$$

Budući da je f holomorfna, vrijedi $f_{\bar{z}} = 0$. Odatle slijedi i $\overline{f_{\bar{z}}} = 0$, tj. $\bar{f}_z = 0$. Dakle

$$\begin{aligned} \omega &= \mathrm{d}f = f_z\,\mathrm{d}z + f_{\bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z} = f_z\,\mathrm{d}z, \\ \bar{\omega} &= \mathrm{d}\bar{f} = \bar{f}_z\,\mathrm{d}z + \bar{f}_{\bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z} = \bar{f}_{\bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z}. \end{aligned}$$

Sad imamo

$${}^*\alpha = -\tfrac{i}{2}f_z\,\mathrm{d}z - \tfrac{i}{2}\bar{f}_{\bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z} = -\tfrac{i}{2}(\omega + \bar{\omega}).$$

Zbrajanjem slijedi $\omega = \alpha + i^*\alpha$. □

Korolar 3.1.23. *1-forma ω je holomorfna ako i samo ako je zatvorena i ako vrijedi $^*\omega = -i\omega$.*

Dokaz. Ako je ω holomorfna, onda znamo po propoziciji 3.1.19 da je oblika $\omega = \mathrm{d}f = f_z\,\mathrm{d}z$ za neku harmonijsku 0-formu f. Vidimo onda da je $^*\omega = -if_z\,\mathrm{d}z == -i\omega$ i $\mathrm{d}\omega = \mathrm{dd}f = 0$.

Obratno, općenito je $\omega = u\,\mathrm{d}z + v\,\mathrm{d}\bar{z}$, pa je $^*\omega = -iu\,\mathrm{d}z + iv\,\mathrm{d}\bar{z}$. Izjednačavanjem $-i\omega = -iu\,\mathrm{d}z - iv\,\mathrm{d}\bar{z} = -iu\,\mathrm{d}z + iv\,\mathrm{d}\bar{z}$ slijedi $v = 0$, dakle $\omega = u\,\mathrm{d}z$. Imamo

$$\mathrm{d}\omega = (\partial + \bar{\partial})u\,\mathrm{d}z = -u_{\bar{z}}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z},$$

pa zbog zatvorenosti od ω slijedi $u_{\bar{z}} = 0$, tj. u je holomorfna. Dakle, ω je holomorfna forma. □

3.2 Prostor kvadratno integrabilnih 1-formi

Na Riemannovim plohama možemo na smislen način reći kada je neki skup „tanak”. Kažemo da je $S \subset X$ skup *mjere 0* ako za svaku kartu ϕ vrijedi da je $\phi(S)$ skup mjere 0 u $\mathbb{C}$. Na integral po 2-formi na Riemannovoj plohi ne utječu promjene na skupu mjere 0, kao u slučaju integriranja u realnoj ravnini.

Fiksirajmo sada otvoren, povezan skup D na Riemannovoj plohi X. Ako u definiciji 3.1.3 diferencijalne 1-forme zahtjev neprekidnost funkcija zamijenimo s olakšanim zahtjevom izmjerivosti funkcija, novodefiniran pojam nazivamo *1-formom izmjerivom na D*. Pri tom promatramo samo one lokalne koordinate čije su domene sadržane u D. Opet, za funkciju f na Riemannovoj plohi kažemo da je izmjeriva ako je ona izmjeriva funkcija lokalne koordinate, tj. ako je $f\phi^{-1}$ izmjeriva funkcija kompleksne varijable za neku kartu ϕ (odakle slijedi i izmjerivost u svakoj drugoj lokalnoj koordinati).

Dakle, koristeći $\{\mathrm{d}z, \mathrm{d}\bar{z}\}$ umjesto $\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y\}$, izmjerive 1-forme su diferencijalne forme oblika $\omega = u\,\mathrm{d}z + v\,\mathrm{d}\bar{z}$ za funkcije u, v izmjerive u lokalnoj koordinati (i koje zadovoljavaju pravilo prijelaza (3.1)). One (po definiciji) čine najširu klasu formi koje se mogu integrirati na D. Na toj klasi bismo htjeli definirati skalarni produkt na sljedeći način:

$$(\omega_1, \omega_2)_D = \int_D \omega_1 \wedge {}^*\overline{\omega_2}. \tag{3.3}$$

Sjetimo se diskusije na kraju potpoglavlja 1.3. Da bi formulom (3.3) bio dan skalarni produkt, moramo umjesto 1-formi promatrati klase 1-formi, gdje su u istoj klasi forme koje su jednake osim eventualno na skupu mjere 0. Zato nadalje radimo s klasama diferencijalnih formi. Oznake će ostati iste, kao i terminologija. Tvrdnje tipa „ω je forma klase C^∞" će značiti da je ω jednaka nekoj C^∞ formi osim eventualno na skupu mjere 0, tj. u klasi u kojoj se nalazi ω se nalazi i neka forma klase C^∞. Ispostavi se da se u svakoj klasi nalazi najviše jedna neprekidna forma, pa se posebno u svakoj klasi nalazi najviše jedna C^1, C^2 ili C^∞ forma. Ako diferencijalnim operatorom djelujemo na formu u čijoj se klasi nalazi C^1 forma, onda djelovanje tog operatora provedemo nad tom pripadnom C^1 formom.

Uzimajući prethodno u obzir, provjerimo da se u (3.3) zaista radi o skalarnom produktu (pri čemu sada ω_1, ω_2 označavaju klase 1-formi, u skladu s prethodnim dogovorom). Integral je invarijantan na promjene 2-forme na skupu mjere 0, pa je dobro definiran pojam integriranja po nekoj klasi diferencijalne 2-forme; naime, jednostavno uzmemo nekog predstavnika te klase i integriramo. Sad, linearnost od (3.3) slijedi iz linearnosti integrala, pozitivna definitnost slijedi iz

$$\begin{aligned}\omega \wedge {}^*\bar{\omega} &= (u\,\mathrm{d}z + v\,\mathrm{d}\bar{z}) \wedge (-i\bar{v}\,\mathrm{d}z + i\bar{u}\,\mathrm{d}\bar{z}) = (iu\bar{u} + iv\bar{v})\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}\\ &= i(|u|^2 + |v|^2)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = 2(|u|^2 + |v|^2)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z},\end{aligned}$$

a antisimetričnost iz

$$\begin{aligned}\overline{(\omega_1, \omega_2)_D} &= \overline{\int_D \omega_1 \wedge {}^*\overline{\omega_2}} = \int_D \overline{\omega_1 \wedge {}^*\overline{\omega_2}}\\ &= \int_D \overline{\omega_1} \wedge {}^*\omega_2 = \int_D {}^*\overline{\omega_1} \wedge {}^{**}\omega_2\\ &= \int_D {}^*\overline{\omega_1} \wedge (-\omega_2) = -\int_D {}^*\overline{\omega_1} \wedge \omega_2\\ &= \int_D \omega_2 \wedge {}^*\overline{\omega_1} = (\omega_2, \omega_1)_D.\end{aligned}$$

Normu induciranu ovim skalarnim produktom ćemo označavati s

$$\|\omega\|_D = \left(\int_D \omega \wedge {}^*\overline{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Označimo s $L^2(D)$ kompleksan unitaran prostor 1-formi izmjerivih na D s konačnom normom. Koristeći $\omega \wedge {}^*\bar{\omega} = 2(|u|^2 + |v|^2)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}$ se pokaže, slično kao kod $L^2(\mathbb{C})$ (koristeći Lebesgueove teoreme o monotonoj i dominiranoj konvergenciji), da je taj prostor potpun. Dakle, $L^2(D)$ je Hilbertov prostor. Elemente tog prostora nazivamo *kvadratno integrabilnim formama*.

Zapišimo dva pomoćna rezultata o prethodno definiranom skalarnom produktu.

Lema 3.2.1. *Vrijedi* $({}^*\omega_1, {}^*\omega_2)_D = (\omega_1, \omega_2)_D$.

Dokaz.

$$\begin{aligned}({}^*\omega_1, {}^*\omega_2)_D &= \int_D {}^*\omega_1 \wedge {}^{**}\overline{\omega_2} = \int_D {}^{**}\omega_1 \wedge {}^{***}\overline{\omega_2} \\ &= \int_D (-\omega_1) \wedge (-{}^*\overline{\omega_2}) \\ &= \int_D \omega_1 \wedge {}^*\overline{\omega_2} = (\omega_1, \omega_2)_D.\end{aligned}$$

□

Lema 3.2.2. *Vrijedi* $(\mathrm{d}f, \mathrm{d}\bar{g})_D = (\mathrm{d}g, \mathrm{d}\bar{f})_D$.

Dokaz.

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}f, \mathrm{d}\bar{g})_D &= \overline{(\mathrm{d}\bar{g}, \mathrm{d}f)_D} = \overline{\int_D \mathrm{d}\bar{g} \wedge {}^*\overline{\mathrm{d}f}} \\ &= \int_D \overline{\mathrm{d}\bar{g}} \wedge {}^*\overline{\overline{\mathrm{d}f}} = \int_D \mathrm{d}g \wedge {}^*\overline{\mathrm{d}\bar{f}} \\ &= (\mathrm{d}g, \mathrm{d}\bar{f})_D.\end{aligned}$$

Pri analizi prostora $L^2(D)$ će nam ključnu ulogu igrati Stokesov teorem. Pogledajmo zato neke bitne posljedice tog rezultata.

Propozicija 3.2.3. *(Parcijalno integriranje) Neka je D relativno kompaktan otvoren podskup Riemannove plohe X kojem je rub krivulja. Neka su f i ω 0-forma odnosno 1-forma koje su C^1 na nekoj okolini od* $\mathrm{Cl}\, D$. *Tada vrijedi*

$$\int_{\partial D} f\omega = \int_D f\, \mathrm{d}\omega - \int_D \omega \wedge \mathrm{d}f.$$

Dokaz. Napišimo $\omega = g\, \mathrm{d}x + h\, \mathrm{d}y$. Tada je $f\omega = fg\, \mathrm{d}x + fh\, \mathrm{d}y$, pa je

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(f\omega) &= ((fv)_x - (fu)_y)\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= (f_x v + f v_x - f_y u - f u_y)\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Vrijedi

$$f\, \mathrm{d}\omega = f(v_x - u_y)\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = (f v_x - f u_y)\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

i

$$\mathrm{d}f \wedge \omega = (f_x \,\mathrm{d}x + f_y \,\mathrm{d}y) \wedge (u \,\mathrm{d}x + v \,\mathrm{d}y) = (f_x v - f_y u) \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

pa zbrajanjem dobivamo

$$\mathrm{d}(f\omega) = f \,\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}f \wedge \omega.$$

Sad primjenjujući Stokesov teorem na 1-formu $f\omega$ slijedi

$$\int_{\partial D} f\omega = \int_D \mathrm{d}(f\omega) = \int_D f \,\mathrm{d}\omega - \int_D \omega \wedge \mathrm{d}f.$$

□

Korolar 3.2.4. *Neka su D i ω kao u iskazu prethodne propozicije. Ako je ω još i zatvorena forma, vrijedi*

$$\int_{\partial D} \omega = 0.$$

Dokaz. Uzimajući $f \equiv 1$, iz formule parcijalne integracije dobivamo

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D \mathrm{d}\omega = 0,$$

budući da je $\mathrm{d}f = 0$ i $\mathrm{d}\omega = 0$ jer je ω zatvorena forma. □

Propozicija 3.2.5. *Uz D kao gore i 0-forme f i g koje su C^2 na okolini od* $\mathrm{Cl}\, D$ *vrijedi*

$$(\mathrm{d}f, \mathrm{d}g)_D = -\int_D f\overline{\Delta g} + \int_{\partial D} f^*\overline{\mathrm{d}g}.$$

Dokaz. Koristeći lemu 3.1.14 i parcijalno integriranje (i, naravno, propoziciju 3.1.12) imamo

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} f^*\overline{\mathrm{d}g} = \int_{\partial D} f^*\mathrm{d}\bar{g} &= \int_D f \,\mathrm{d}^*\mathrm{d}\bar{g} - \int_D {}^*\mathrm{d}\bar{g} \wedge \mathrm{d}f \\
&= \int_D f\overline{\mathrm{d}^*\mathrm{d}g} + \int_D \mathrm{d}f \wedge {}^*\overline{\mathrm{d}g} \\
&= \int_D f\overline{\Delta g} + (\mathrm{d}f, \mathrm{d}g)_D.
\end{aligned}$$

□

Korolar 3.2.6. *Neka je D relativno kompaktan otvoren podskup Riemannove plohe X kojem je rub krivulja, te neka su f i g 0-forme koje su C^2 na okolini od $\operatorname{Cl} D$. Tada vrijedi*

$$\int_D (f\Delta g - g\Delta f) = \int_{\partial D} (f^*\mathrm{d}g - g^*\mathrm{d}f).$$

Dokaz. Po prethodnoj propoziciji vrijedi

$$(\mathrm{d}f, \mathrm{d}\bar{g})_D = -\int_D f\overline{\Delta \bar{g}} + \int_{\partial D} f^*\overline{\mathrm{d}\bar{g}} = -\int_D f\Delta g + \int_{\partial D} f^*\mathrm{d}g.$$

Analogno,

$$(\mathrm{d}g, \mathrm{d}\bar{f})_D = -\int_D g\Delta f + \int_{\partial D} g^*\mathrm{d}f.$$

Po lemi 3.2.2 vrijedi $(\mathrm{d}f, \mathrm{d}\bar{g})_D = (\mathrm{d}g, \mathrm{d}\bar{f})_D$, pa izjednačavanjem dobivamo traženu jednakost. □

Neka je X Riemannova ploha i $L^2(X)$ Hilbertov prostor kvadratno integrabilnih 1-formi na X sa prethodno definiranim skalarnim produktom. Cilj nam je napraviti dekompoziciju ovog prostora koja će nam pomoći u krajnjem cilju nalaženja nekonstantnih meromorfnih funkcija.

Kažemo da je diferencijalna forma klase C_c^∞ ako je to C^∞ forma s kompaktnim zatvaračem (dakle, identički je jednaka 0 izvan nekog kompaktnog podskupa od X). Definiramo skup

$$E = \operatorname{Cl}_{L^2(X)} \{\mathrm{d}f; f \text{ je } C_c^\infty \text{ 0-forma }\}^{3},$$

te skup

$$E^* = \left\{\omega \in L^2(X); {}^*\omega \in E\right\}.$$

Iz činjenice da je $\{\mathrm{d}f; f \text{ je } C_c^\infty \text{ 0-forma }\}$ potprostor od $L^2(X)$ slijedi da je E također potprostor od $L^2(X)$. Zatim, koristeći da je općenito ${}^*(f\omega_1 + g\omega_2) = f^*\omega_1 + g^*\omega_2$ odmah izlazi da je i E^* potprostor od $L^2(X)$.

E^*, kao i E, je zatvoren u $L^2(X)$. Zaista, neka je (ω_n) niz u E^* takav da $\|\omega_n - \omega\|_X \to 0$ za neki $\omega \in L^2(X)$. Iz leme 3.2.1 odmah izlazi da norma ostaje očuvana djelovanjem Hodge-zvijezde, pa imamo $\|{}^*\omega_n - {}^*\omega\|_X \to 0$. Po definiciji je ${}^*\omega_n$ u zatvorenom prostoru E, stoga je ${}^*\omega \in E$, tj. $\omega \in E^*$.

Propozicija 3.2.7. *Neka je $\omega \in L^2(X)$ kvadratno integrabilna C^1 1-forma na X. Tada vrijedi:*

[3] $\operatorname{Cl}_{L^2(X)}$ označava zatvarač u prostoru $L^2(X)$.

(i) $\omega \in (E^*)^\perp$ *ako i samo ako je zatvorena;*

(ii) $\omega \in E^\perp$ *ako i samo ako je kozatvorena.*

Dokaz. Najprije primijetimo da iz činjenice da je $\{\mathrm{d}f; f \text{ je } C_c^\infty \text{ 0-forma na } X\}$ gust u E slijedi da je $\{^*\mathrm{d}f; f \text{ je } C_c^\infty \text{ 0-forma na } X\}$ gust u E^*. Zaista, za $\omega \in E^*$ je po definiciji $^*\omega \in E$, pa postoji niz C_c^∞ 0-formi (f_n) takvih da vrijedi $\|^*\omega - \mathrm{d}f_n\|_X \to 0$. Djelovanjem Hodge-zvijezdom dobivamo $\|\omega - {}^*\mathrm{d}(-f_n)\|_X \to 0$, odakle slijedi tvrdnja. Dakle, $\omega \in E^{*\perp}$ ako i samo ako je $(\omega, {}^*\mathrm{d}f)_X = 0$ za svaku C_c^∞ 0-formu f.

Neka je sad ω zatvorena, i neka je f 0-forma klase C_c^∞ s nosačem sadržanim u relativno kompaktnom području D. Imamo

$$\begin{aligned}
(\omega, {}^*\mathrm{d}f)_X &= \int_X \omega \wedge {}^{**}\overline{\mathrm{d}f} = \int_D \omega \wedge {}^{**}\overline{\mathrm{d}f} \\
&= -\int_D \omega \wedge \overline{\mathrm{d}f} = \int_D \mathrm{d}\bar{f} \wedge \omega \\
&= \int_D \mathrm{d}(\bar{f}\omega) - \int_D \bar{f}\,\mathrm{d}\omega = \int_D \mathrm{d}(\bar{f}\omega) \\
&= \int_{\partial D} \bar{f}\omega = 0,
\end{aligned}$$

gdje smo iskoristili $\mathrm{d}\bar{f}\omega = \mathrm{d}\bar{f} \wedge \omega + \bar{f}\,\mathrm{d}\omega$, formulu parcijalnog integriranja te činjenicu da je $f = 0$ na ∂D. Dakle, $\omega \in E^{*\perp}$.

Obratno, ako je $\omega \in E^{*\perp}$, za svaku C_c^∞ 0-formu f imamo

$$\begin{aligned}
(\omega, {}^*\mathrm{d}f)_X &= \int_D \mathrm{d}(\bar{f}\omega) - \int_D \bar{f}\,\mathrm{d}\omega = \int_{\partial D} \bar{f}\omega - \int_D \bar{f}\,\mathrm{d}\omega \\
&= -\int_D \bar{f}\,\mathrm{d}\omega = -\int_M \bar{f}\,\mathrm{d}\omega,
\end{aligned}$$

to jest

$$\int_M \bar{f}\,\mathrm{d}\omega = 0.$$

Odavde slijedi (po tzv. *osnovnoj lemi varijacijskog računa*) da je $\mathrm{d}\omega = 0$, dakle vrijedi tvrdnja (i).

Neka je sad ω kozatvorena forma. Tada je po definiciji $^*\omega$ zatvorena, pa je po upravo dokazan $^*\omega \in E^{*\perp}$, tj. $(^*\omega, {}^*\mathrm{d}f) = 0$ za svaku C_c^∞ 0-formu f. Odavde i iz leme 3.2.1 slijedi $(\omega, \mathrm{d}f) = 0$, za svaki takav f, pa zaključujemo da je $\omega \in E^\perp$. Primijetimo da ovo rezimiranje prolazi i u drugom smjeru, dakle vrijedi tvrdnja (ii).

$\square$

Korolar 3.2.8. *Prostori E i E^* su ortogonalni.*

Dokaz. Označimo $S = \{\mathrm{d}f; f \text{ je } C_c^\infty \text{ 0-forma }\}$ i pogledajmo $\mathrm{d}f \in S$. To je zatvorena C^1 forma, pa je po prethodnoj propoziciji $\mathrm{d}f \in E^{*\perp}$. Dakle, $S \subset E^{*\perp}$, odakle slijedi $E^* \subset S^\perp = E^\perp$. □

Prostori E i E^* su, dakle, zatvoreni i ortogonalni, pa je stoga i njihova direktna suma $E \oplus E^*$ zatvoren potprostor od $L^2(X)$. Zato imamo ortogonalnu dekompoziciju Hilbertovog prostora

$$L^2(X) = E \oplus E^* \oplus (E \oplus E^*)^\perp = E \oplus E^* \oplus \left(E^\perp \cap E^{*\perp}\right).$$

Označimo

$$H = E^\perp \cap E^{*\perp}.$$

Cilj nam je sad pokazati da su to upravo kvadratno integrabilne harmonijske forme na X.

Sad ćemo svakoj jednostavnoj zatvorenoj krivulji na X pridružiti jednu zatvorenu formu. Neka je γ takva krivulja. Odaberimo okolinu V od γ takvu da je $V \setminus \gamma = V^+ \cup V^-$ disjunktna unija dva otvorena vijenca[4] (budući da je slika od γ kompaktan skup, možemo ga pokriti s konačno mnogo domena lokalnih koordinata, pa suzimo te domene po potrebi), i to takva da se orijentacija od ∂V^- podudara s orijentacijom od γ. Odaberimo još jednu okolinu V_0 od γ strogo sadržanu u V te označimo $V_0^+ = V_0 \cap V^+$ i $V_0^- = V_0 \cap V^-$; to su također vijenci oko γ (slika 3.2). Sad odaberimo realnu 0-formu f na X takvu da je ona C^∞ na $X \setminus \gamma$ te

$$f\big|_{V_0^- \cup \gamma} = 1, \quad f\big|_{X \setminus (V^- \cup \gamma)} = 0.$$

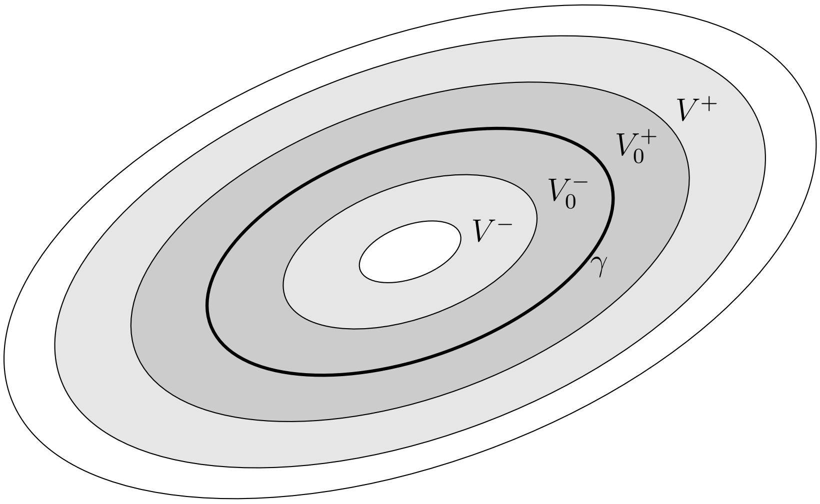
Definiramo C^∞ 1-formu η_γ s

$$\eta_\gamma\big|_{V \setminus \gamma} = \mathrm{d}f, \quad \eta_\gamma\big|_{(X \setminus V) \cup \gamma} = 0.$$

Ovu formu nazivamo *formom pridruženom krivulji* γ. Primijetimo da je to realna zatvorena C^∞ 1-forma. Također, za svaku zatvorenu C^1 formu ω u $L^2(X)$ vrijedi

$$(\omega, {}^*\eta_\gamma)_X = \int_\gamma \omega. \tag{3.4}$$

[4]Ovdje pod „vijencem” podrazumijevamo skup homeomorfan s vijencem u kompleksnoj ravnini.



Slika 3.2: Vijenci oko krivulje γ

Zaista, koristeći da je η_γ realna forma te Stokesov teorem imamo

$$\begin{aligned}(\omega, {}^*\eta_\gamma)_X &= \int_X \omega \wedge \overline{{}^{**}\eta_\gamma} = -\int_X \omega \wedge \eta_\gamma = \int_{V^-} \mathrm{d}f \wedge \omega \\ &= \int_{V^-} \mathrm{d}(f\omega) - \int_{V^-} f\,\mathrm{d}\omega = \int_{V^-} \mathrm{d}(f\omega) \\ &= \int_{\partial V^-} f\omega = \int_\gamma \omega,\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti iskoristili da je $f = 0$ na jednom dijelu ∂V^-, a na drugom dijelu (tj. na γ) je $f = 1$.

Propozicija 3.2.9. *Neka je $\omega \in L^2(X)$ forma klase C^1. Tada vrijedi:*

(i) ω je egzaktna ako i samo ako je $(\omega, \beta)_X = 0$ za svaku kozatvorenu C_c^∞ formu β;

(ii) ω je koegzaktna ako i samo ako je $(\omega, \beta)_X = 0$ za svaku zatvorenu C_c^∞ formu β;

Dokaz. Neka je ω egzaktna, tj. $\omega = \mathrm{d}f$ za neki f, i neka je β kozatvorena forma klase C_c^∞ s nosačem u relativno kompaktnom području D. Tada je

$$\begin{aligned}(\omega,\beta)_X &= \int_X \mathrm{d}f \wedge {}^*\overline{\beta} = \int_D \mathrm{d}f \wedge {}^*\overline{\beta} \\ &= \int_D \mathrm{d}(f^*\bar{\beta}) - \int_D f\, \mathrm{d}^*\bar{\beta} = \int_{\partial D} f^*\bar{\beta} - \int_D f\overline{\mathrm{d}^*\beta} \\ &= \int_{\partial D} f^*\bar{\beta} = 0.\end{aligned}$$

Obratno, budući da su forme oblika ${}^*\,\mathrm{d}f$ za f klase C_c^∞ kozatvorene (zaista, $\mathrm{d}^{**}\,\mathrm{d}f = \mathrm{dd}(-f) = 0$), imamo da je $(\omega, {}^*\,\mathrm{d}f)_X = 0$ za svaku takvu formu, pa zaključujemo da je $\omega \in E^{*\perp}$. Sad, ω zadovoljava uvjete propozicije 3.2.7; slijedi da je ω zatvorena. Neka je sad γ jednostavna zatvorena krivulja na X i η_γ njoj pridružena forma. Komentirali smo da je η_γ zatvorena C_c^∞ forma, pa je ${}^*\eta_\gamma$ kozatvorena i klase C_c^∞. Stoga je po pretpostavci $(\omega, {}^*\eta_\gamma)_X = 0$, a opet iz diskusije koja je prethodila propoziciji imamo da je zato $\int_\gamma \omega = 0$. Iz proizvoljnosti od γ zaključujemo da je ω egzaktna, dakle dokazana je tvrdnja (i). Tvrdnja (ii) sad slijedi primjenjujući upravo dokazanu tvrdnju na formu ${}^*\omega$. □

Korolar 3.2.10. *Ako je $\omega \in E$ klase C^1, onda je ω egzaktna forma. Ako je $\omega \in E^*$ klase C^1, onda je ω koegzaktna.*

Dokaz. Za dokazati prvu tvrdnju je po prethodnoj propoziciji dovoljno provjeriti da je $(\omega,\beta)_X = 0$ za svaku kozatvorenu C_c^∞ formu β. No, takve forme β su kvadratno integrabilne (zbog neprekidnosti i kompaktnog nosača), pa po propoziciji 3.2.7 slijedi da je $\beta \in E^\perp$. Stoga, zbog $\omega \in E$, slijedi tvrdnja. Druga tvrdnja je analogna. □

Sjetimo se, želimo dokazati da je H jednak potprostoru harmonijskih formi unutar $L^2(X)$. Jedan smjer sad lako slijedi; ako je ω harmonijska forma, lokalno dana s $\mathrm{d}f$, tada je ona zatvorena ($\mathrm{dd}f = 0$) i kozatvorena (po lemi 3.1.14 je $\mathrm{d}^*\mathrm{d}f = \Delta f = 0$), pa budući da je ω klase C^1, iz propozicije 3.2.7 slijedi $\omega \in E^\perp \cap E^{*\perp} = H$.

Obrat je nešto suptilniji. Po propoziciji 3.1.18 znamo da je forma harmonijska ako i samo ako je i zatvorena i kozatvorena. Za kvadratno integrabilne forme nam propozicija 3.2.7 daje zaključak da je forma iz $E^\perp \cap E^{*\perp}$ zatvorena i kozatvorena, dakle harmonijska, ali uz dodatnu pretpostavku da se radi o C^1 formi. Vidjet ćemo da su forme u $E^\perp \cap E^{*\perp}$ nužno klase C^1, no najprije ćemo napraviti jednu malu (potrebnu) digresiju.

Neka je f kvadratno integrabilna funkcija na jediničnom krugu $D = K(0,1) \subset \mathbb{C}$ (što promatramo kao Riemannovu plohu sa standardnom kompleksnom strukturom), i pretpostavimo da je f harmonijska funkcija. Neka je g funkcija klase C_c^∞ na D; postoji $r < 1$ takav da je nosač od g sadržan u $K(0, r)$. Po korolaru 3.2.6 imamo

$$\int_{K(0,r)} (f\Delta g - g\Delta f) = \int_{\partial K(0,r)} (f^* \mathrm{d}g - g^* \mathrm{d}f) = 0,$$

budući da g i $\mathrm{d}g$ iščezavaju na $\partial K(0, r)$. Uzimajući sad u obzir da je f harmonijska, imamo

$$\int_D f\Delta g = \int_{K(0,r)} f\Delta g = \int_{K(0,r)} g\Delta f = 0.$$

Upravo smo vidjeli da za kvadratno integrabilnu harmonijsku funkciju f na D vrijedi

$$\int_D f\Delta g = 0$$

za svaku funkciju g klase C_c^∞. No, vrijedi i obrat; to je sadržaj tzv. *Weylove leme*, koju zatim možemo iskoristiti i na područjima na Riemannovim plohama.

Teorem 3.2.11. *(Weylova lema) Za kvadratno integrabilnu funkciju f na D vrijedi da je harmonijska ako i samo ako vrijedi*

$$\int_D f\Delta g = 0$$

za svaku funkciju g klase C_c^∞ na D.

Vratimo se prethodnoj diskusiji. Želimo pokazati da je svaka 1-forma $\omega \in H = E^\perp \cap E^{*\perp}$ harmonijska. Pogledajmo proizvoljnu kartu na X čija je domena homeomorfna s jediničnom kuglom u $\mathbb{C}$; označimo lokalno $\omega = p\,\mathrm{d}x + q\,\mathrm{d}y$ za p i q izmjerive funkcije. Neka je g proizvoljna realna funkcija klase C_c^∞ s nosačem u D. Cilj nam je sad pokazati da je p harmonijska funkcija koristeći Weylovu lemu. Primijetimo da je za Weylovu lemu dovoljno promatrati samo realne „test funkcije” g, što će olakšati račun. Imamo

$$\begin{aligned}
(\omega, \mathrm{d}g_x)_X &= \int_D \omega \wedge {}^*\overline{\mathrm{d}g_x} = \int_D (p\,\mathrm{d}x + q\,\mathrm{d}y) \wedge {}^*(g_{xx}\,\mathrm{d}x + g_{xy}\,\mathrm{d}y) \\
&= \int_D (p\,\mathrm{d}x + q\,\mathrm{d}y) \wedge (-g_{xy}\,\mathrm{d}x + g_{xx}\,\mathrm{d}y) \\
&= \int_D (pg_{xx} + qg_{xy})\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \\
(\omega, {}^*\mathrm{d}g_y)_X &= \int_D \omega \wedge {}^{**}\overline{\mathrm{d}g_y} = -\int_D \omega \wedge \mathrm{d}g_y \\
&= -\int_D (p\,\mathrm{d}x + q\,\mathrm{d}y) \wedge (g_{yx}\,\mathrm{d}x + g_{yy}\,\mathrm{d}y) \\
&= -\int_D (pg_{yy} - qg_{xy})\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Budući da je $\omega \in E^\perp \cap E^{*\perp}$, vrijedi $(\omega, \mathrm{d}g_x)_X = (\omega, {}^*\mathrm{d}g_y)_X = 0$, pa oduzimanjem slijedi

$$\int_D p(g_{xx} + g_{yy})\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \int_D p\Delta g = 0.$$

Po Weylovoj lemi sad zaključujemo da je p harmonijska, pa posebno klase C^1.

Primjenjujući gornje rezimiranje na ${}^*\omega = -q\,\mathrm{d}x + p\,\mathrm{d}y$ dobivamo da je i $-q$, odnosno q klase C^1 (zbog $\omega \in E^\perp \cap E^{*\perp}$ vrijedi i ${}^*\omega \in E^\perp \cap E^{*\perp}$; to slijedi iz $({}^*\omega, \mathrm{d}f)_X = (\omega, {}^*\mathrm{d}f)_X$ i $({}^*\omega, {}^*\mathrm{d}f)_X = (\omega, \mathrm{d}f)_X$).

Dakle, ω je klase C^1, pa diskusija prije Weylove leme daje zaključak da je ω harmonijska forma; tj. dokazali smo sljedeći teorem.

Teorem 3.2.12. *Prostor H čine kvadratno integrabilne harmonijske 1-forme na X.*

Sad možemo uspostaviti dovoljan (i u slučaju kompaktne plohe, nužan) uvjet za postojanje ne-nul harmonijske forme na X.

Teorem 3.2.13. *Ako na Riemannovoj plohi X postoji kvadratno integrabilna zatvorena 1-forma koja nije egzaktna, tada postoji ne-nul harmonijska forma na X. Obrat vrijedi ako je X kompaktna Riemannova ploha.*

Dokaz. Neka je $\omega \in L^2(X)$ zatvorena forma koja nije egzaktna. Po propoziciji 3.2.7 je $\omega \in E^{*\perp}$. Pogledajmo sad sljedeće dvije dekompozicije od $L^2(X)$.

$$\begin{aligned}
L^2(X) &= E \oplus E^* \oplus H, \\
L^2(X) &= E^* \oplus E^{*\perp},
\end{aligned}$$

odakle slijedi

$$E^{*\perp} = E \oplus H.$$

Dakle, $\omega = \alpha + \beta$ za neki $\alpha \in E$ i $\beta \in H$. Po teoremu 3.2.12 znamo da je β harmonijska forma, pa je to posebno zatvorena forma (po lemi 3.1.18). Forme ω i β su klase C^1 (zatvorene forme su takve po definiciji), stoga je i $\alpha = \omega - \beta$ klase C^1. Nadalje, imamo $\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\omega - \mathrm{d}\beta = 0$, pa po propoziciji 3.2.7 slijedi $\alpha \in E^{*\perp}$.

Sad, ω nije egzaktna, pa postoji (jednostavna) zatvorena krivulja γ takva da je $\int_\gamma \omega \neq 0$, i neka je η_γ njoj pridružena forma. Koristeći (3.4) imamo da je

$$\int_\gamma \alpha = (\alpha, {}^*\eta_\gamma)_X = 0,$$

budući da je $\alpha \in E^{*\perp}$ (i uzimajući u obzir definiciju od η_γ). (Mogli smo ovdje alternativno iskoristiti korolar 3.2.10 da zaključimo da je α egzaktna, pa je integral po zatvorenoj krivulji jednak 0.) Dakle,

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \alpha + \int_\gamma \beta = \int_\gamma \beta \neq 0,$$

stoga je $\beta \neq 0$ ne-nul harmonijska forma na X.

Neka je sad X kompaktna Riemannova ploha i $\beta \neq 0$ harmonijska 1-forma na X. Primijetimo da su, zbog kompaktnosti od X, sve neprekidne forme ujedno i kvadratno integrabilne, dakle $\beta \in H$. Opet zbog kompaktnosti od X vidimo da su sve forme oblika $\mathrm{d}f$ za f funkciju klase C^∞ na X u prostoru E. Budući da za harmonijske funkcije vrijedi da su one klase C^∞, kad bi β bila egzaktna forma, ona bi se onda nalazila u E. No, $\beta \in H \subset E^\perp$, odakle bi slijedilo $\beta \in E \cap E^\perp$, tj. $\beta = 0$. Dakle, β nije egzaktna; našli smo ne-egzaktnu kvadratno integrabilnu zatvorenu formu. $\square$

3.3 Egzaktne harmonijske forme

Vidjeli smo da na kompaktnim Riemannovim plohama ne postoje egzaktne harmonijske forme. Da bismo dobili nešto kao egzaktnu harmonijsku formu, moramo dopustiti da ta forma ima singularitete.

Neka je $p_0 \in X$, i neka je $z = x + iy$ lokalna koordinata na okolini D koja se preslikava u jedinični disk $K(0, 1) \subset \mathbb{C}$ uz $z(p_0) = 0$. Neka je $a \in \langle 0, 1\rangle$. Izrazima tipa D_a ili $\{|z| < a\}$ ćemo označavati skup svih $p \in D$ takvih da je $|z(p)| < a$. Za točke $q \notin D$ ćemo pisati $|z(q)| \geqslant 1$.

Neka je h funkcija na X, sa (jedinstvenim) singularitetom u p_0, koja je harmonijska na $D \setminus \{p_0\}$, jednaka 0 na $\{|z| > a\}$ (dakle, 0 je na $X \setminus \operatorname{Cl} D_a$) i takva da je ${}^*\mathrm{d}h = 0$ na $\{|z| = a\}$ i $\mathrm{d}h \in L^2(D_a \setminus \operatorname{Cl} D_{\frac{a}{2}})$. (Kasnije ćemo vidjeti primjer takve funkcije.) Definirajmo i funkciju θ takvu da je $\theta = h$ na $\left\{z \geqslant \frac{a}{2}\right\}$ i takva da je θ klase C^∞ na $\{|z| < a\}$. Dakle, θ je klase C^∞ tamo gdje h ima singularitet. Primijetimo da θ nije nužno klase C^∞ (čak ni neprekidna) na $\{|z| = a\}$ (budući da nemamo taj zahtjev na h). No, θ jest klase C^∞ na $X \setminus \{|z| = a\}$.

Na $X \setminus \{|z| = a\}$ možemo promatrati formu $\mathrm{d}\theta$, no označimo istom oznakom formu proširenu na cijeli X (s mogućim prekidom na $\{|z| = a\}$). Taj prekid na skupu mjere 0 nam neće utjecati na integriranje koje slijedi.

Iz definicije od θ vidimo da je $\mathrm{d}\theta \in L^2(X) = E \oplus E^\perp$. Dakle, $\mathrm{d}\theta = \alpha + \omega$ za neki $\alpha \in E$ i $\omega \in E^\perp$. Primijetimo da zbog prekida na $\{|z| = a\}$ ne možemo zaključiti da je $\mathrm{d}\theta$ zatvorena forma, pa onda i element od $E^{*\perp}$.

Promotrimo sada α; pozivat ćemo se na Weylovu lemu slično kao u teoremu 3.2.12. Neka je $q_0 \in X$ i U okolina te točke koja je homeomorfna s $K(0,1)$ preko lokalne koordinate $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$ takve da je $\tilde{z}(q_0) = 0$. Pišimo $\alpha = p\,\mathrm{d}\tilde{x} + q\,\mathrm{d}\tilde{y}$ na U. Neka je f proizvoljna realna C_c^∞ funkcija s nosačem unutar U. Kao u dokazu teorema 3.2.12 dobijemo

$$(\alpha, {}^*\mathrm{d}f_{\tilde{y}})_X = \int_U (-pf_{\tilde{y}\tilde{y}} + qf_{\tilde{x}\tilde{y}})\,\mathrm{d}\tilde{x} \wedge \mathrm{d}\tilde{y}.$$

S druge strane je $(\alpha, {}^*\mathrm{d}f_{\tilde{y}})_X = 0$ zbog $\alpha \in E \subset E^{*\perp}$ (po korolaru 3.2.8). Slično, koristeći da je $\omega \in E^\perp$ dobivamo

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}f_{\tilde{x}})_X &= (\alpha, \mathrm{d}f_{\tilde{x}})_X + (\omega, \mathrm{d}f_{\tilde{x}})_X = (\omega, \mathrm{d}f_{\tilde{x}})_X \\ &= \int_U (pf_{\tilde{x}\tilde{x}} + qf_{\tilde{x}\tilde{y}})\,\mathrm{d}\tilde{x} \wedge \mathrm{d}\tilde{y},\end{aligned}$$

pa oduzimajući dobiveno slijedi

$$(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}f_{\tilde{x}})_X = \int_U p(f_{\tilde{x}\tilde{x}} + f_{\tilde{y}\tilde{y}})\,\mathrm{d}\tilde{x} \wedge \mathrm{d}\tilde{y} = \int_U p\Delta f.$$

Pokažimo da je ovaj integral jednak 0 za $U \subset X \setminus \operatorname{Cl} D_{\frac{a}{2}}$, odakle će primjenom Weylove leme (uz komentar da je dovoljno promatrati realne funkcije f kao u teoremu 3.2.12) slijediti da je p klase C^1 na U.

Dakle, neka je $U \subset X \setminus \operatorname{Cl} D_{\frac{a}{2}}$, i promatramo

$$\int_U p\Delta f = (\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}f_{\tilde{x}})_X = (\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}f_{\tilde{x}})_{D_{\frac{a}{2}}} + (\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}f_{\tilde{x}})_{D_a \setminus \operatorname{Cl} D_{\frac{a}{2}}} + (\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}f_{\tilde{x}})_{X \setminus \operatorname{Cl} D_a}.$$

Gornji rastav vrijedi jer su izbačeni samo skupovi mjere 0. Budući da je nosač od f unutar U, vrijedi $\mathrm{d}f_{\tilde{x}} = 0$ na $D_{\frac{a}{2}}$, te vrijedi $\mathrm{d}\theta = 0$ na $X \setminus \mathrm{Cl}\, D_a$. Stoga je $(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}f_{\tilde{x}})_{D_{\frac{a}{2}}} = (\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}f_{\tilde{x}})_{X\setminus \mathrm{Cl}\, D_a} = 0$. Ostaje nam pokazati da je $(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}f_{\tilde{x}})_{D_a \setminus \mathrm{Cl}\, D_{\frac{a}{2}}} = 0$. Budući da izvan D_a vrijedi $\mathrm{d}\theta = 0$, možemo bez smanjenja općenitosti uzeti $U \subset D$, pa onda i $\tilde{z} = z$.

Koristeći propoziciju 3.2.5 imamo

$$(\mathrm{d}f_{\tilde{x}}, \mathrm{d}\theta)_{D_a\setminus \mathrm{Cl}\, D_{\frac{a}{2}}} = -\int_{D_a\setminus \mathrm{Cl}\, D_{\frac{a}{2}}} f_x \Delta\theta + \int_{\partial(D_a\setminus \mathrm{Cl}\, D_{\frac{a}{2}})} f_x {}^*\overline{\mathrm{d}\theta} = 0,$$

budući da je θ harmonijska na $D_a \setminus \mathrm{Cl}\, D_{\frac{a}{2}}$ i $f_x = 0$ na $\left\{|z| = \frac{a}{2}\right\}$ te ${}^*\mathrm{d}\theta = 0$ na $\{|z| = a\}$ (jer je ondje ${}^*\mathrm{d}h = 0$). Zaključujemo da je $(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}f_{\tilde{x}})_{D_a\setminus \mathrm{Cl}\, D_{\frac{a}{2}}} = 0$; sad po Weylovoj lemi slijedi da je p harmonijska, pa posebno klase C^∞ na U, a zbog proizvoljnosti od $U \subset X \setminus \mathrm{Cl}\, D_{\frac{a}{2}}$ zaključujemo da je p klase C^∞ na $X \setminus \mathrm{Cl}\, D_{\frac{a}{2}}$. Sličnim postupkom, koristeći

$$(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}f_{\tilde{y}})_X = \int_U q\Delta f$$

dobijemo da je q klase C^∞ na $X \setminus \mathrm{Cl}\, D_{\frac{a}{2}}$.

Sad znamo da je α klase C^∞. Budući da je i $\alpha \in E$, po korolaru 3.2.10 slijedi da je α egzaktna na $X \setminus \mathrm{Cl}\, D_{\frac{a}{2}}$, pa je posebno zatvorena na $X \setminus \mathrm{Cl}\, D_{\frac{a}{2}}$. Pokažimo sad da je α i kozatvorena na tom skupu. Uzmimo proizvoljan f klase C_c^∞ s nosačem unutar $U \subset X \setminus \mathrm{Cl}\, D_{\frac{a}{2}}$ kao gore, i vidimo da je

$$\begin{aligned}(\alpha, \mathrm{d}f)_X &= (\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}f)_X - (\omega, \mathrm{d}f)_X \\ &= (\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}f)_U,\end{aligned}$$

pri čemu smo iskoristili da je $\omega \in E^\perp$. Kao gore dobijemo $(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}f)_U = 0$. Dakle, $(\alpha, \mathrm{d}f)_X = 0$, pa koristeći da je α klase C^∞ i propoziciju 3.2.7 zaključujemo da je α kozatvorena na $X \setminus \mathrm{Cl}\, D_{\frac{a}{2}}$. Po propoziciji 3.2.12 slijedi da je α harmonijska forma na $X \setminus \mathrm{Cl}\, D_{\frac{a}{2}}$.

Sad pogledajmo što se događa oko singulariteta, unutar skupa D_a. Neka je f C^∞ funkcija s kompaktnim nosačem unutar D_a. Imamo

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}f_x)_X = (\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}f_x)_{D_a} &= \int_{D_a} \mathrm{d}\theta \wedge {}^*\overline{\mathrm{d}f_x} \\ &= \int_{D_a} (\theta_x\, \mathrm{d}x + \theta_y\, \mathrm{d}y) \wedge (-f_{xy} dx + f_{xx}\, \mathrm{d}y) \\ &= \int_{D_a} (\theta_x f_{xx} + \theta_y f_{yy})\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,\end{aligned}$$

i slično

$$(\mathrm{d}\theta, {}^*\mathrm{d}f_y)_X = -\int_{D_a} (\theta_x f_{yy} - \theta_y f_{xy})\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

S druge strane, primjenjujući propoziciju 3.2.7 na formu $\mathrm{d}\theta$ koja je klase C^∞ i zatvorena na D_a, vrijedi $(\mathrm{d}\theta, {}^*\mathrm{d}f_y)_X = 0$. Iz ovih jednakosti sad slijedi

$$(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}f_x)_X = \int_{D_a} \theta_x(f_{xx} + f_{yy})\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \int_{D_a} \theta_x \Delta f,$$

pa zajedno s ranije izvedenom jednakosti $(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}f_x)_X = \int_{D_a} p\Delta f$ dobivamo

$$\int_{D_a} (p - \theta_x)\Delta f.$$

Zbog proizvoljnosti od f, po Weylovoj lemi zaključujemo da je $p - \theta_x$ harmonijska, pa posebno klase C^∞, na D_a. Sličnim postupkom dobijemo da je $q - \theta_y$ klase C^∞ na D_a. Uzimajući u obzir da je θ klase C^∞ na D_a, slijedi da su p i q klase C^∞ na D_a.

Zaključujemo da je α forma klase C^∞ na X. Sad, to zajedno s $\alpha \in E$ po korolaru 3.2.10 povlači da je α egzaktna na X. Dakle, postoji funkcija g klase C^∞ na X takva da je $\alpha = \mathrm{d}g$. Ustanovili smo da je α harmonijska na $X \setminus \mathrm{Cl}\, D_{\frac{a}{2}}$, odakle slijedi da je g harmonijska funkcija na $X \setminus \mathrm{Cl}\, D_{\frac{a}{2}}$. Dalje, $\theta - g$ je klase C^∞ na D_a, pa i $\mathrm{d}(\theta - g) = \mathrm{d}\theta - \alpha = \omega \in E^\perp$; po propoziciji 3.2.7 slijedi da je $\mathrm{d}(\theta - g)$ kozatvorena na D_a. Očigledno je i zatvorena na tom skupu, pa zaključujemo da je $\mathrm{d}(\theta - g)$ harmonijska forma na D_a. Odatle slijedi da je $\theta - g$ harmonijska funkcija na D_a.

Definirajmo sada jednu funkciju na X,

$$u = g - \theta + h.$$

Na D_a je $g - \theta$ harmonijska, a na $D_a \setminus \{p_0\}$ je h harmonijska (po definiciji). Dakle, u je harmonijska na $D_a \setminus \{p_0\}$. No, na $\left\{|z| > \frac{a}{2}\right\}$ je $h = \theta$ pa je na tom dijelu $u = g$, za koju smo ustanovili da je tamo harmonijska. Dakle, u je harmonijska funkcija na $X \setminus \{p_0\}$. Dalje, zbog $\mathrm{d}u = \mathrm{d}g$ na $\left\{|z| \geqslant \frac{a}{2}\right\}$ i $\mathrm{d}g = \alpha \in E \subset L^2(X)$, te činjenice da su $\mathrm{d}(g - \theta) = -\omega$ i $\mathrm{d}h$ kvadratno integrabilni na $D_a \setminus \mathrm{Cl}\, U$ za svaku okolinu U oko singulariteta p_0, slijedi da je $\|\mathrm{d}u\|_{X \setminus \mathrm{Cl}\, U} < \infty$. Forma $\mathrm{d}u$ je kvadratno integrabilna na $X \setminus \mathrm{Cl}\, U$ i na tom skupu je, kao što smo vidjeli, harmonijska. Po teoremu 3.2.12 slijedi da je $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}f)_X = (\mathrm{d}u, {}^*\mathrm{d}f)_X = 0$ za svaku funkciju f klase C_c^∞ s nosačem izvan U.

Uzmimo sada jednu konkretnu funkciju h koja zadovoljava uvjete prethodne diskusije. Takva je npr. funkcija

$$h(z) = \frac{1}{z^n} + \frac{\bar{z}^n}{a^{2n}}, \text{za } |z| \leqslant a, \text{ i } 0 \text{ inače.}$$

Primijetimo izoliran singularitet u 0 (tj. u točki p_0). Također uočimo da su funkcije $\frac{1}{z^n}$ i $\frac{\bar{z}^n}{a^{2n}}$ harmonijske.

Uzimajući ovu funkciju h i cjelokupnu raniju diskusiju u obzir, dobili smo sljedeći teorem.

Teorem 3.3.1. *Neka je X Riemannova ploha i z lokalna koordinata oko točke p_0 takva da je $z(p_0) = 0$. Postoji funkcija u na M koja je harmonijska na $X \setminus \{p_0\}$ takva da za svaku dovoljno malu okolinu U oko p_0 vrijedi:*

- $u - \frac{1}{z^n}$ *je harmonijska na* U;
- $\mathrm{d}u \in L^2(X \setminus \mathrm{Cl}\, U)$;
- $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}f)_X = (\mathrm{d}u, {}^*\mathrm{d}f)_X = 0$ *za svaku funkcije f klase C_c^∞ na X s nosačem unutar* $X \setminus \mathrm{Cl}\, U$.

Dakle, konstruirali smo na X formu koja je „skoro” harmonijska i egzaktna, zahvaljujući singularitetu u $p_0 \in X$.

No, mogli smo unparijed zadati i dvije točke singulariteta umjesto jedne te dobiti sličan rezultat gornjem teoremu. Definirajmo

$$h(z) = \ln \left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{z - \frac{a^2}{\overline{z_1}}}{z - \frac{a^2}{\overline{z_2}}} \right|, \text{za } |z| \leqslant a, \text{ i 0 inače,}$$

gdje su $z_1 = z_1(p_1)$, $z_2 = z_2(p_2)$ koordinate točaka singulariteta izražene preko lokalne koordinate z (primijetimo, p_1 i p_2 se istovremeno nalaze u domeni jedne lokalne koordinate). Uzimajući ovu funkciju h i provodeći analogan postupak onome prije iskaza teorema 3.3.1 dobivamo sljedeći rezultat.

Teorem 3.3.2. *Neka je X Riemannova ploha i z_1, z_2 lokalne koordinate oko točke $p_1 \in X$ odnosno $p_2 \in X$ takve da je $z_1(p_1) = z_2(p_2) = 0$. Postoji (realna) funkcija u na M koja je harmonijska na $X \setminus \{p_1, p_2\}$ takva da za sve dovoljno male okoline U_1 i U_2 oko p_1 odnosno p_2 vrijedi:*

- $u - \ln |z_1|$ *je harmonijska na* U_1 *i* $u + \ln |z_2|$ *je harmonijska na* U_2;
- $\mathrm{d}u \in L^2(X \setminus \mathrm{Cl}(U_1 \cup U_2))$;
- $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}f)_X = (\mathrm{d}u, {}^*\mathrm{d}f)_X = 0$ *za svaku funkcije f klase C_c^∞ na X s nosačem unutar* $X \setminus \mathrm{Cl}(U_1 \cup U_2)$.

Zaista, ako se točke p_1 i p_2 ne nalaze istovremeno u domeni neke lokalne koordinate, onda radimo sljedeće. Povežemo p_1 i p_2 putem (ovo je moguće zbog povezanosti od X; zaista, skup svih točaka s kojima se p_1 može povezati je otvoren, što odmah slijedi iz činjenice da oko svake točke možemo uzeti lokalnu koordinatu čija je domena homeomorfna s putevima povezanim prostorom $K(0,1) \subset \mathbb{C}$, a i skup svih točaka s kojima se p_1 ne može povezati je otvoren, pa zbog nepraznosti prvog skupa slijedi da je on jednak cijelom X). Taj put je kompaktan kao neprekidna slika kompaktnog prostora, pa ga možemo pokriti s konačno mnogo domena lokalnih koordinata $V_1, V_2, \ldots, V_n$ takvim da je $p_1 \in V_1$ i $p_2 \in V_n$. Za svaki $1 \leqslant i \leqslant n-1$ izaberimo točku $p_i \in V_i \cap V_{i+1}$. Sad unutar svakog U_i možemo primijeniti iskaz teorema na točke p_i i p_{i+1} i naći funkciju u_i s navedenim svojstvima.

Definiramo

$$u = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

Primijetimo da se singulariteti u točkama $p_2, \ldots, p_{n-1}$ uklone (tj. skrate), a u p_1 i p_n imamo singularitete; u je tražena funkcija.

3.4 Meromorfne 1-forme

Sjetimo se da su holomorfne forme oblika $u\,\mathrm{d}z$ za neku holomorfnu funkciju u. Diferencijalnu 1-formu ćemo zvati *meromorfnom* ako je lokalno oblika $f\,\mathrm{d}z$ za neku meromorfnu funkciju f, te ako vrijedi pravilo prijelaza (3.1). Jednakost (3.1) je iskazana u terminima $\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}y$; u našem slučaju to pravilo postaje $\tilde{f}(\tilde{z}) = f(z(\tilde{z}))(z\tilde{z}^{-1})'(\tilde{z})$.

Teorem 3.4.1. *Neka je $p_0 \in X$ i z lokalna koordinata oko p_0 takva da je $z(p_0) = 0$. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Postoji meromorfna forma koja je holomorfna na $X \setminus \{p_0\}$ sa singularitetom oblika $\frac{1}{z^{n+1}}$ u p_0.*

Dokaz. Uzmimo funkciju u koju smo konstruirali u dokazu teorema 3.3.1, te stavimo $\alpha = \mathrm{d}u$. To je harmonijski diferencijal na $X \setminus \{p_0\}$, pa znamo po teoremu 3.1.22 da je forma

$$\omega = \alpha + i^*\alpha$$

holomorfna na $X \setminus \{p_0\}$.

Jedini singularni dio funkcije $u = g - \theta + h$ je bio $\frac{1}{z^n}$ oko p_0, pa pogledajmo

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(\frac{1}{z^n}\right) &= \left(\frac{1}{z^n}\right)_z \mathrm{d}z + \left(\frac{1}{z^n}\right)_{\bar{z}} \mathrm{d}\bar{z} = \frac{-n}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z, \\ {}^*\mathrm{d}\left(\frac{1}{z^n}\right) &= -i\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{z^n}\right) = i\frac{n}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Odavde slijedi da ω u točki p_0 ima singularitet oblika $\frac{-2n}{z^{n+1}}$. Dakle, tražena meromorfna forma je $\frac{-1}{2n}\omega$. □

Slično, iz teorema 3.3.2 (i korištenjem pripadne funkcije h) dobivamo i sljedeći rezultat.

Teorem 3.4.2. *Neka su $p_1, p_2 \in X$ i z_1, z_2 lokalne koordinate oko točke $p_1 \in X$ odnosno $p_2 \in X$ takve da je $z_1(p_1) = z_2(p_2) = 0$. Postoji meromorfna forma koja je holomorfna na $X \setminus \{p_0, p_1\}$ sa singularitetima oblika $\frac{1}{z_1}$ u p_1 i $\frac{-1}{z_2}$ u p_2.*

Za meromorfnu formu ω i točku $p \in X$ definiramo *red* od ω u p s

$$\operatorname{ord}_p(\omega) = \operatorname{ord}_0(f),$$

gdje je f takva da je ω dana s $\omega = f\,\mathrm{d}z$ na lokalnoj koordinati z oko p takvoj da je $z(p) = 0$. Iz činjenice da je red funkcije u točki dobro definiran slijedi da je i red forme u točki dobro definiran.

Uz takvu lokalnu koordinatu vrijedi

$$\omega = f(z)\,\mathrm{d}z = \left(\sum_{k=-n}^{\infty} c_n z^n\right)\mathrm{d}z,$$

gdje smo iskoristili Laurentov razvoj od f; vrijedi $\operatorname{ord}_p(\omega) = \operatorname{ord}_0(f) = -n$. Definiramo *reziduum 1-forme ω u točki p* s

$$\operatorname{res}_p(\omega) = c_{-1}.$$

Možemo bez smanjenja općenitosti uzeti da domena lokalne koordinate z ne sadrži nijednu točku singulariteta osim p, budući da su takve točke izolirane. Sad, ako je γ krivulja oko točke p sadržana u ovoj domeni, tada imamo

$$\int_\gamma \omega = \int_{z\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{z\gamma}\left(\sum_{k=-n}^{\infty} c_n z^n\right)\mathrm{d}z = c_{-1},$$

po teoremu o reziduumima u kompleksnoj ravnini. Odavde slijedi da je reziduum u p dobro definiran, iako Laurentov red ne mora biti.

Sad dolazimo do našeg glavnog rezultata.

Teorem 3.4.3. *Neka su $p_1, \ldots, p_n$, $n \geqslant 2$, različite točke na Riemannovoj plohi X, te neka su $a_1, \ldots, a_n$ kompleksni brojevi takvi da je $\sum_{i=1}^n c_i = 0$. Tada postoji meromorfna forma ω na X koja je holomorfna na $X \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$ i takva da za svaki $1 \leqslant i \leqslant n$ vrijedi $\operatorname{ord}_{p_i}(\omega) = -1$ i $\operatorname{res}_{p_i}(\omega) = a_i$.*

Dokaz. Odaberimo točku $p_0 \in X \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ i lokalne koordinate z_i takve da je $z_i(p_i) = 0$ za $0 \leqslant i \leqslant n$. Iskoristimo teorem 3.4.2 da bismo našli meromorfne forme u_i kao u iskazu, takve da je u p_i singularitet oblika $\frac{1}{z_i}$ a u p_0 singularitet oblika $\frac{-1}{z_0}$, za svaki $1 \leqslant i \leqslant n$. Primijetimo da je $\operatorname{ord}_{p_i}(\omega) = -1$ i $\operatorname{res}_{p_i}(\omega_i) = 1$.

Definiramo meromorfnu formu

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i \omega_i.$$

Vidimo da u točkama $p_1, \dots, p_n$, zbog oblika formi ω_i, vrijedi $\operatorname{ord}_{p_i}(\omega) = -1$ i $\operatorname{res}_{p_i}(\omega) = c_i$. Nadalje, ω je holomorfna u p_0 zbog uvjeta $\sum_{i=1}^{n} c_i = 0$; dakle ω je holomorfna na $X \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$. □

Teorem 3.4.4. *Na Riemannovoj plohi X postoje nekonstantne meromorfne funkcije.*

Dokaz. Odaberimo tri različite točke $p_1, p_2, p_3 \in X$. Koristeći prethodni teorem, možemo naći meromorfnu formu α na X, holomorfnu na $X \setminus \{p_1, p_2\}$, takvu da je $\operatorname{ord}_{p_1}(\alpha) = \operatorname{ord}_{p_2}(\alpha) = -1$ i $\operatorname{res}_{p_1}(\alpha) = 1, \operatorname{res}_{p_2}(\alpha) = -1$. Također možemo naći meromorfnu formu β na X, holomorfnu na $X \setminus \{p_2, p_3\}$, takvu da je $\operatorname{ord}_{p_2}(\beta) = \operatorname{ord}_{p_3}(\beta) = -1$ i $\operatorname{res}_{p_2}(\beta) = 1, \operatorname{res}_{p_3}(\beta) = -1$. Definiramo funkciju f na X s

$$f = \frac{\alpha}{\beta},$$

tj. ako lokalno, na domeni U_i lokalne koordinate z_i, vrijedi $\alpha = f_{\alpha,i}\, \mathrm{d}z_i$ i $\beta = f_{\beta,i}\, \mathrm{d}z_i$, onda je po definiciji $f = \frac{f_{\alpha,i}}{f_{\beta,i}}$ na U_i.

Provjerimo najprije da je ovo uopće dobro definirana funkcija na X. Uzmimo dvije lokalne koordinate z_i i z_j s pripadnim domenama U_i i U_j s nepraznim presjekom. Tada imamo

$$\begin{aligned} f\big|_{U_j}(p) = \frac{f_{\alpha,j}(p)}{f_{\beta,j}(p)} &= \frac{f_{\alpha,i}(p)(z_i z_j^{-1})'(z_j(p))}{f_{\beta,i}(p)(z_i z_j^{-1})'(z_j(p))} \\ &= \frac{f_{\alpha,i}}{f_{\beta,i}}(p) = f\big|_{U_j}(p), \end{aligned}$$

stoga je f dobro definiran.

Preostaje provjeriti da je f nekonstantna funkcija. Budući da je β holomorfna u p_1, $f = \frac{\alpha}{\beta}$ ima pol (reda barem 1) u p_1. Posebno, $f(p_1) \neq 0$. U točki p_3 je α holomorfna, a β ima pol. Koristeći lokalnu koordinatu takvu da je $z(p_3) = 0$ imamo

$$f = \frac{g}{\frac{1}{z} h},$$

gdje su f i g holomorfne oko p_3, te je $h(p_3) \neq 0$. Stoga je $f = z\frac{g}{h}$, pri čemu je $\frac{g}{h}$ holomorfna oko p_3. Dakle, $f(p_3) = 0$. Zaključujemo da je f nekonstantna meromorfna funkcija na X. $\square$

3.5 Posljedice i primjene

Pogledajmo sada neke važne posljedice postojanja nekonstantnih meromorfnih funkcija na Riemannovoj plohi X. Nadalje promatramo kompaktne Riemannove plohe.

Genus kompaktne Riemannove plohe

Uzmimo proizvoljnu (konačnu) triangulaciju kompaktne Riemannove plohe X, te označimo s α_0 broj vrhova, s α_1 broj bridova, te s α_2 broj trokuta u toj triangulaciji. Broj

$$\chi = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$$

nazivamo *Euler-Poincaréovom karakteristikom* od X. Pokaže se da je χ topološka invarijanta (pa posebno ne ovisi o triangulaciji jedne fiksne Riemannove plohe) te da je oblika $\chi = 2 - 2g$, gdje broj g nazivamo *genusom* od X. Genus intuitivno broji koliko ploha X ima „rupa". Tako je, na primjer, genus od Riemannove sfere jednak 0, a genus kompleksnog torusa jednak 1. Genus možemo shvatiti i kao broj puta na koji možemo uzastopno izbaciti iz plohe po jednu jednostavnu zatvorenu krivulju a da ploha ostane povezana.

Neka je $f\colon X \to Y$ nekonstantno holomorfno preslikavanje između kompaktnih Riemannovih ploha. Po teoremu 2.2.14 je dobro definiran *stupanj* od f, dan s

$$\deg(f) = \deg_p(f),$$

gdje je p proizvoljna točka na X. Vidjeli smo kao posljedicu korolara 2.2.11 da je broj točaka ramifikacije od f konačan, pa je dobro definiran i *potpun broj grananja*

$$B(f) = \sum_{p \in R} (\mathrm{mult}_p(f) - 1),$$

gdje je $R \subset X$ skup točaka ramifikacije. Stupanj od f, potpun broj grananja, genus g_X od X i genus g_Y od Y povezuje sljedeća formula.

Teorem 3.5.1. *(Riemann-Hurwitzova formula) Uz gornje oznake, vrijedi*

$$g_X = \deg(f)(g_Y - 1) + \frac{B(f)}{2} + 1.$$

Dokaz. Triangulirajmo Y tako da je svaka točka grananja vrh triangulacije. Uzimanjem praslike po f, ova triangulacija inducira triangulaciju od X. Označimo li s α_0 broj vrhova, s α_1 broj bridova, te s α_2 broj trokuta ove triangulacije od Y, slijedi da inducirana triangulacija od X ima $\deg(f)\alpha_0 - B(f)$ vrhova, $\deg(f)\alpha_1$ bridova i $\deg(f)\alpha_2$ trokuta. Dakle, po definiciji Euler-Poincaréove karakteristike imamo

$$\begin{aligned} 2 - 2g_Y &= \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2, \\ 2 - 2g_X &= \deg(f)\alpha_0 - B(f) - \deg(f)\alpha_1 + \deg(f)\alpha_2, \end{aligned}$$

odakle dobivamo traženu jednakost. □

Budući da je genus kompaktne Riemannove plohe cijeli broj, odmah iz Riemann-Hurwitzove relacije vidimo da je potpun broj grananja holomorfnog preslikavanja između kompaktnih Riemannovih ploha paran broj. Također čitamo da $g_X = 0$ povlači da je $g_Y = 0$. Zato, na primjer, ne postoje nekonstantna holomorfna preslikavanja iz Riemannove sfere u kompleksan torus.

Divizori

Da bismo formirali posljedice postojanja meromorfnih funkcija na kompaktnoj Riemannovoj plohi X, treba nam vokabular divizora.

Definicija 3.5.2. Divizor *na X jest element slobodne abelove grupe čiju bazu čini skup svih točki $p \in X$. Tu grupu označavamo s* $\mathrm{Div}(X)$.

Divizor $D \in \mathrm{Div}(X)$ zapisujemo u obliku

$$D = \sum_{p \in X} D(p) \cdot p,$$

pri čemu su svi $D(p)$ osim njih konačno mnogo jednaki 0. Definiramo i *stupanj* divizora, $\deg(D)$, s

$$\deg(D) = \sum_{p \in X} D(p).$$

(Formalno, zbrajamo samo ne-nul vrijednosti $D(p)$; njih ima konačno mnogo. Nadalje će se podrazumijevati ovaj formalizam kod sumiranja naizgled beskonačnih suma.) Za ne-nul meromorfnu funkciju f definiramo *divizor funkcije f* s

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{p \in X} \mathrm{ord}_p(f) \cdot p.$$

Divizor na X koji je dobiven na ovaj način zovemo *glavnim divizorom.* Skup glavnih divizora označavamo s $\mathrm{PDiv}(X)$. Slično, za meromorfnu 1-formu ω na X definiramo *divizor 1-forme* ω s

$$\operatorname{div}(\omega) = \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(\omega) \cdot p.$$

Ovako dobiven divizor zovemo *kanonskim divizorom.* Skup kanonskih divizora označavamo s $\mathrm{KDiv}(X)$.

Meromorfne funkcije na X čine polje. Lako se vidi da za njihove divizore, tj. glavne divizore na X vrijede sljedeće relacije.

Lema 3.5.3. *Neka su f i g ne-nul meromorfne funkcije na X. Vrijedi:*

(i) $\operatorname{div}(fg) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(g)$*;*

(ii) $\operatorname{div}(\frac{f}{g}) = \operatorname{div}(f) - \operatorname{div}(g)$*;*

(iii) $\operatorname{div}(\frac{1}{f}) = -\operatorname{div}(f)$*.*

Propozicija 2.2.19 nam odmah daje sljedeći rezultat.

Lema 3.5.4. *Ako je f ne-nul meromorfna funkcija na X, tada je* $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$.

Definicija 3.5.5. *Neka je f ne-nul meromorfna funkcija na X.* Divizor nula *od f definiramo s*

$$\operatorname{div}_0(f) = \sum_{p,\, \operatorname{ord}_p(f)>0} \operatorname{ord}_p(f) \cdot p,$$

te definiramo divizor polova *od f s*

$$\operatorname{div}_\infty(f) = \sum_{p,\, \operatorname{ord}_p(f)<0} (-\operatorname{ord}_p(f)) \cdot p.$$

Primijetimo da je

$$\operatorname{div}(f) = \operatorname{div}_0(f) - \operatorname{div}_\infty(f).$$

Sad, uzmimo meromorfnu 0-formu f i 1-formu ω na X. Provjeri se da vrijedi

$$\operatorname{div}(f\omega) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(\omega).$$

Dakle, vidimo da je razlika ova dva kanonska divizora koja se pojavljuju u jednakosti jednaka glavnom divizoru. No, iz sljedeće leme, čiji je dokaz u biti sadržan u dokazu teorema 3.4.4, će slijediti da to vrijedi i općenito.

Lema 3.5.6. *Neka su ω_1 i ω_2 ne-nul meromorfne 1-forme na X. Tada postoji jedinstvena 0-forma f na X takva da je $\omega_2 = f\omega_1$.*

Korolar 3.5.7. *Razlika dva kanonska divizora je glavni divizor. Drugim riječima,*

$$\mathrm{KDiv}(X) \in \mathrm{Div}(X)/\mathrm{PDiv}(X).$$

Ovo nas vodi do sljedeće definicije.

Definicija 3.5.8. *Za divizore D_1 i D_2 na X kažemo da su* linearno ekvivalentni*, u oznaci $D_1 \sim D_2$, ako je $D_1 - D_2$ glavni divizor.*

Odmah se provjeri da se radi o relaciji ekvivalencije. Također, ako su D_1 i D_2 linearno ekvivalentni, pri čemu je $D_1 - D_2 = \mathrm{div}(f)$ za meromorfnu funkciju f, onda iz leme 3.5.4 slijedi

$$\deg(D_1) = \deg(D_2 + \mathrm{div}(f)) = \deg(D_2) + \deg(\mathrm{div}(f)) = \deg(D_2).$$

Dakle, linearno ekvivalentni divizori na kompaktnoj Riemannovoj plohi imaju jednaki stupanj. Dalje, iz $\mathrm{div}(f) = \mathrm{div}_0(f) - \mathrm{div}_\infty(f)$ čitamo da je divizor nula meromorfne funkcije jednak njezinom divizoru polova.

Primjer 3.5.9. *Neka su $p, q \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, i definirajmo divizore $D_p = 1 \cdot p$, $D_q = 1 \cdot q$. Pokažimo da su ova dva divizora linearno ekvivalentna. Ako $p \neq \infty$ i $q \neq \infty$, uzmimo meromorfnu funkciju $f(z) = \frac{z-p}{z-q}$ (eksplicitno pišemo oblik samo u koordinati z na $\mathbb{C} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) i primijetimo da je $\mathrm{div}(f) = 1 \cdot p - 1 \cdot q$. Ako je, na primjer, $q = \infty$, onda uzmemo $f = z - p$. Vidimo da je $\mathrm{ord}_p(f) = 1$. Ako je $q = \infty$, uzmemo funkciju $f(z) = z - p$, i tada je $\mathrm{ord}_p(f) = 1$, $\mathrm{ord}_q(f) = -1$, pa je $\mathrm{div}(f) = 1 \cdot p - 1 \cdot q$.*

Za daljnja razmatranja će biti korisno uvesti konvenciju da je $\mathrm{ord}_p(f) = \infty$ za točke p na čijoj je okolini funkcija f identički jednaka 0.

Definicija 3.5.10. *Za divizor D pišemo $D \geqslant 0$ ako je $D(p) \geqslant 0$ za svaki $p \in X$. Ako za divizore D_1, D_2 vrijedi $D_1 - D_2 \geqslant 0$, pišemo $D_1 \geqslant D_2$. Definiramo* prostor meromorfnih funkcija na X s polovima omeđenim s D *s*

$$L(D) = \{f;\ f \text{ je meromorfna funkcija takva da je } \mathrm{div}(f) \geqslant -D\}.$$

Definiramo i prostor meromorfnih 1-formi s polovima omeđenim s D *s*

$$L^{(1)}(D) = \{\omega;\ \omega \text{ je meromorfna 1-forma na } X \text{ takva da je } \mathrm{div}(\omega) \geqslant -D\}.$$

Znači, ako je $D(p) = n > 0$, onda $f \in L(D)$ ne smije imati pol reda strogo većeg od n u točki p. Ako je $D(p) = -n < 0$, onda mora vrijediti $\operatorname{ord}_p(f) \geqslant n$, tj. do na translaciju koordinate, f ima nultočku reda barem n u točki p. Analogno razmatranje vrijedi za $L^{(1)}(D)$.

Prostori $L(D)$ i $L^{(1)}(D)$ su kompleksni vektorski prostori. Vidimo da za $D_1 \geqslant D_2$ vrijedi $L(D_1) \supset L(D_2)$ i $L^{(1)}(D_1) \supset L^{(1)}(D_2)$. Primijetimo da je meromorfna funkcija f holomorfna ako i samo ako je $\operatorname{ord}_p(f) \geqslant 0$ u svakoj točki p, tj. ako i samo ako je $\operatorname{div}(f) \geqslant 0$. Dakle, $L(0)$ je prostor holomorfnih funkcija na X. Slično, $L^{(1)}(0)$ je prostor holomorfnih 1-formi na X. Budući da su po korolaru 2.2.6 holomorfne funkcije na kompaktnoj Riemannovoj plohi konstantne, imamo

$$L(0) \cong \mathbb{C}$$

(pri čemu $\mathbb{C}$ shvaćamo kao jednodimenzionalan kompleksan vektorski prostor). Napomenimo da odavde *ne* slijedi da je $L^{(1)}(0) = \{0\}$, jer holomorfne forme dobivamo djelovanjem diferencijalnog operatora na *lokalno* definirane holomorfne funkcije. Štoviše, vidjet ćemo da je $L^{(1)}(0)$ g-dimenzionalan vektorski prostor, gdje je g genus od X.

Lema 3.5.11. *Neka je D divizor na kompaktnoj Riemannovoj plohi X. Ako je $\deg(D) < 0$, onda je $L(D) = \{0\}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji ne-nul funkcija $f \in L(D)$. Pogledajmo divizor $D_1 = \operatorname{div}(f) + D$. Koristeći lemu 3.5.4, imamo

$$\deg(D_1) = \deg(\operatorname{div}(f)) + \deg(D) = \deg(D) < 0.$$

S druge strane, budući da je $f \in L(D)$, dobivamo $\deg(D_1) \geqslant 0$. $\square$

Koristeći kompaktnost od X i iskazane rezultate, može se dokazati sljedeća propozicija.

Propozicija 3.5.12. *Prostori $L(D)$ su konačno dimenzionalni.*

Za kanonski divizor $K = \operatorname{div}(\omega)$ i proizvoljan divizor D, lako se provjeri da je funkcija

$$\mu_\omega\colon L(D + K) \to L^{(1)}(D)$$

definirana s $\mu_\omega(f) = f\omega$ izomorfizam kompleksnih vektorskih prostora.

Korolar 3.5.13. *Prostori $L^{(1)}(D)$ su konačno dimenzionalni.*

Algebarske krivulje

Sjetimo se kompleksnog projektivnog pravca $\mathbb{CP}^1$. Na analogan način definiramo *kompleksan projektivan prostor* $\mathbb{CP}^n$. Na $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ (gdje 0 označava ishodište) definiramo relaciju ekvivalencije $\sim$ tako da je $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \sim (w_1, \ldots, w_{n+1})$ ako postoji $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ takav da je $(z_1, \ldots, z_{n+1}) = (\lambda w_1, \ldots, \lambda w_{n+1})$. Definiramo kompleksan projektivan prostor kao kvocijentan topološki prostor $\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^{n+1}/\sim$. Točke u $\mathbb{CP}^n$ označavamo s $(z_1 : \ldots : z_n)$. Kao što smo već definirali, za $n = 1$ govorimo o kompleksnom projektivnom pravcu, a za $n = 2$ o *kompleksnoj projektivnoj ravnini*. Nadalje ispuštamo pridjev „kompleksan".

Za polinom f u n varijabli kažemo da je *homogen* ako su mu svi monomi jednakog stupnja. Na primjer, polinom $f(x, y, z) = x^5 + x^3y^2 + xyz^3$ je homogen polinom u tri varijable. Za homogen polinom u $n + 1$ varijabli vrijedi

$$f(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_{n+1}) = \lambda^n f(z_1, \ldots, z_{n+1}).$$

Stoga, uzmemo li $(z_1 : \ldots : z_{n+1}) \in \mathbb{CP}^n$, ne bi bila dobra definicija $f(z_1 : \ldots : z_{n+1}) = f(z_1, \ldots, z_{n+1})$. No, ipak je dobro definirano je li $f(z_1 : \ldots : z_{n+1}) = f(z_1, \ldots, z_{n+1})$ jednako 0 ili različito od 0. Stoga ima smisla promatrati podskup od $\mathbb{CP}^n$, tzv. *projektivnu hiperplohu*, definiranu s

$$V(f) = \{(z_1 : \ldots : z_{n+1}) \in \mathbb{CP}^n ; f(z_1, \ldots, z_{n+1}) = 0\}.$$

Usredotočimo se sada na projektivnu ravninu $\mathbb{CP}^2$. Uzmimo homogen polinom f u tri varijable x, y, z za koji vrijedi da sustav jednadžbi

$$f = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

nema rješenja. Takav polinom nazivamo *nesingularnim.* Koristeći nesingularnost od f, provjeri se da na $V(f) \subset \mathbb{CP}^2$ možemo definirati kompleksnu strukturu. Naime, svaka točka $p = (x : y : z)$ ima barem jednu koordinatu različitu od nule (ako je jedna koordinata različita od nule u jednom reprezentantu od p, onda je ta koordinata različita od nule u svim reprezentantima). Uzmimo bez smanjenja općenitosti da je x koordinata takva. Onda na okolini $\mathbb{CP}^2 \cap \{x \neq 0\}$ od p definiramo kartu

$$\phi(x : y : z) = \frac{y}{x}.$$

Analogno definiramo karte i u ostalim slučajevima. Provjeri se da su ovako definirane karte kompatibilne; dakle, hiperplohu u projektivnoj ravnini pridruženu nesingularnom homogen polinomu možemo smatrati Riemannovom plohom. Takve Riemannove plohe nazivamo *glatkim projektivnim ravninskim krivuljama.*

Bili smo pokazali da je $\mathbb{CP}^1$ kompaktan prostor. Analogno se dokaže da je svaki projektivan prostor kompaktan. Budući da je glatka projektivna ravninska krivulja zatvoren skup u projektivnoj ravnini, zaključujemo da je ta krivulja štoviše kompaktna Riemannova ploha.

Sad, definirajmo što je to glatka projektivna krivulja u općenitom projektivnom prostoru.

Definicija 3.5.14. *Neka je X Riemannova ploha koja je podskup projektivnog prostora $\mathbb{CP}^n$. Kažemo da je X* holomorfno uložena *u $\mathbb{CP}^n$ ako za svaki $p \in X$ postoji koordinata z_j takva da vrijedi:*

(i) z_j koordinata od p je različita od nule;

(ii) za svaki k je $\frac{z_k}{z_j}$ holomorfna funkcija na nekoj okolini od p;

(iii) postoji koordinata z_i takva da je $\frac{z_i}{z_j}$ lokalna koordinata oko p.

Riemannovu plohu uloženu u projektivnom prostoru zovemo glatkom projektivnom krivuljom*.*

Pogledajmo sada polje meromorfnih funkcija na Riemannovoj plohi X. Kažemo da ono *razlikuje točke* na X ako za svake dvije točke $p, q \in X$ postoji meromorfna funkcija f na X takva da je $f(p) \neq f(q)$. Dalje, kažemo da *razlikuje tangente* ako za svaki $p \in X$ postoji meromorfna funkcija f takva da je $\mathrm{mult}_p(f) = 1$.

Definicija 3.5.15. *Kompaktnu Riemannovu plohu čije polje meromorfnih funkcija razlikuje točke i razlikuje tangente zovemo* algebarskom krivuljom*.*

Provjeri se da su glatke projektivne ravninske krivulje i, općenito, glatke projektivne krivulje primjeri algebarskih krivulja. Možda se na prvi pogled ova definicija algebarske krivulje čini neobičnom, no pomoću nje se brzo dolazi do rezultata koji ju opravdava.

Koristeći činjenicu da imamo „dovoljno” meromorfnih funkcija na algebarskoj krivulji, služeći se uvedenim pojmovima za divizore se može dokazati sljedeći važan teorem.

Teorem 3.5.16. *(Riemann-Roch) Neka je X algebarska krivulja genusa g. Tada za svaki divizor D i svaki kanonski divizor K na X vrijedi*

$$\dim L(D) - \dim(K - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Uočimo odmah da uvrštavanjem $D = 0$ čitamo

$$\dim L(0) - \dim L(K) = \deg(0) + 1 - g.$$

Koristeći prethodno uočenu činjenicu da je $L(0) \cong \mathbb{C}$, imamo $\dim L(0) = 1$. Također smo spomenuli da vrijedi $L(K + D) \cong L^{(1)}(D)$. U našem slučaju, za $D = 0$ to znači da je $L(K)$ izomorfan prostoru holomorfnih 1-formi na X. Budući da je $\deg(0) = 0$, gornja formula postaje $\dim L(K) = g$. Dakle, vidimo da je kompleksan vektorski prostor holomorfnih 1-formi na X dimenzije g.

Fiksirajmo sada kanonski divizor K. Ako je D divizor takav da je $\deg(D) > \deg(K)$, onda je $\deg(K - D) < 0$, pa je po lemi 3.5.11 $L(K - D) = \{0\}$. Može se pokazati da na algebarskoj krivulji genusa g postoji kanonski divizor stupnja $2g - 2$. Koristeći korolar 3.5.7 i lemu 3.5.4 slijedi da je svaki kanonski divizor na algebarskoj krivulji genusa g stupnja $2g - 2$. Kombinirajući sve ovo, dobivamo sljedeći rezultat.

Propozicija 3.5.17. *Ako je D divizor na algebarskoj krivulji X takav da je* $\deg(D) \geqslant 2g - 1$*, onda vrijedi*

$$\dim L(D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Okrenimo se sada pitanju ulaganja algebarske krivulje u projektivan prostor.

Definicija 3.5.18. *Funkcija $\phi\colon X \to \mathbb{CP}^n$ iz Riemannove plohe X u projektivan prostor $\mathbb{CP}^n$ je* holomorfna *u točki $p \in X$ ako postoji okolina od p u X takva da na toj okolini vrijedi $\phi(x) = (f_0(x) : \ldots : f_{n+1}(x))$, gdje su $f_0, \ldots, f_{n+1}$ holomorfne funkcije na toj okolini koje nisu sve jednake nuli u točki p. Funkcija ϕ je* holomorfna *ako je holomorfna u svakoj točki na X.*

Zanima nas pod kojim uvjetima je $\phi(X) \subset \mathbb{CP}^n$ Riemannova ploha koja je biholomorfna (dakle, ekvivalentna u kategoriji Riemannovih ploha i holomorfnih preslikavanja) s X.

Definicija 3.5.19. *Kažemo da je divizor D na X* slobodan baznih točki *ako za svaku točku $p \in X$ vrijedi* $\dim L(D - D_p) = \dim L(D) - 1$*, gdje je D_p divizor $1 \cdot p$.*

Neka je D neki divizor na X slobodan baznih točki. Može se pokazati da tada postoji $n \in \mathbb{N}$ i holomorfna funkcija $\phi_D\colon X \to \mathbb{CP}^n$ koja je jedinstveno određena s $L(D)$.

Divizora nisu općenito slobodni baznih točki. No, olakšavajuća okolnost je da se svaki divizor D može „modificirati" do divizora koji je slobodan baznih točaka. Naime, D se prikaže kao suma dva divizora, tzv. *fiksnog dijela* F i *pokretnog dijela*

$D - F$. Pokretan dio je slobodan baznih točki, a što se tiče holomorfnih funkcija koje nas zanimaju je svejedno promatramo li divizor ili njegov pokretan dio, budući da je $L(D - F) = L(D)$.

Propozicija 3.5.20. *Neka je X kompaktna Riemannova ploha i D divizor na X koji je slobodan baznih točki. Pretpostavimo da za svake dvije točke (ne nužno različite) $p, q \in X$ vrijedi* $\dim L(D - D_p - D_q) = \dim L(D) - 2$ *(gdje je $D_p = 1 \cdot p$ i $D_q = 1 \cdot q$). Neka je $\phi_D \colon X \to \mathbb{CP}^n$ pripadna holomorfna funkcija. Tada je $\phi_D(X) \subset \mathbb{CP}^n$ Riemannova ploha, te je ϕ_D štoviše biholomorfno preslikavanje između X i $\phi_D(X)$ i vrijedi da je $\phi_D(X)$ holomorfno uložena u projektivnom prostoru $\mathbb{CP}^n$.*

Neka je sad X algebarska krivulja genusa g, i pretpostavimo da smo našli divizor D na X takav da je $\deg(D) \geqslant 2g + 1$. Neka su $p, q \in X$ proizvoljne točke, i označimo s D_p odnosno D_q pripadne divizore $1 \cdot p$ i $1 \cdot q$. Budući da je $\deg(D) \geqslant 2g - 1$ i $\deg(D - D_p) \geqslant 2g - 1$, po propoziciji 3.5.17 imamo

$$\dim L(D - D_p) = \deg(D - D_p) + 1 - g = \deg(D) - g$$

i

$$\dim L(D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Stoga je

$$\dim L(D - D_p) = \dim L(D) - 1,$$

pa zaključujemo da je D slobodan baznih točki. Nadalje, po istoj propoziciji analognim računom dobijemo

$$\dim L(D - D_p - D_q) = \dim L(D) - 2.$$

Stoga smo u uvjetima propozicije 3.5.20, pa možemo X promatrati kao Riemannovu plohu uloženu u projektivan prostor.

Dakle, nađemo li „dovoljno velik” divizor na algebarskoj krivulji, tu krivulju možemo smjestiti u neki projektivan prostor. No, to uvijek možemo; jednostavno uzmemo divizor $(2g + 1) \cdot p$, gdje je g genus krivulje, a p proizvoljna točka na njoj. Dakle, svaku algebarsku krivulju možemo holomorfno uložiti u projektivan prostor, tj. radi se o glatkoj projektivnoj krivulji.

Sad, sjetimo se dokaza teorema 3.4.4. Ne samo da smo dokazali da postoje nekonstantne meromorfne funkcije na Riemannovoj plohi X, nego smo u biti pokazali i da polje meromorfnih funkcija na X razlikuje i točke i tangente. Dakle, svaka kompaktna Riemannova ploha je algebarska krivulja.

Skupimo li dosadašnje rezultate, dokazali smo sljedeći teorem.

Teorem 3.5.21. *Do na biholomorfno preslikavanje, za Riemannovu plohu X je ekvivalentno:*

(i) *X je kompaktna Riemannova ploha;*

(ii) *X je algebarska krivulja;*

(iii) *X je glatka projektivna krivulja.*

Bibliografija

[1] H.M. Farkas, I. Kra, *Riemann surfaces*, sv.71, Springer New York, 1992.

[2] R. Miranda, *Algebraic curves and Riemann surfaces*, sv.5, American Mathematical Soc., 1995.

Sažetak

Ovaj rad je uvod u teoriju Riemannovih ploha. Definiramo Riemannove plohe i holomorfna preslikavanja među njima i dokazujemo neka njihova osnovna svojstva. Zatim tehnikama iz kompleksne analize pristupamo pitanju postojanja meromorfnih funkcija na proizvoljnoj Riemannovoj plohi. Proučavamo diferencijalne 1-forme i činimo dekompoziciju Hilbertovog prostora kvadratno integrabilnih 1-formi. Pomoću te dekompozicije dokazujemo da postoje meromorfne 1-forme s unaprijed zadanim singularitetima, odakle dobivamo i meromorfne funkcije. Zatim se usredotočimo na kompaktne Riemannove plohe. Definiramo algebarske krivulje, te ukratko izlažemo teoriju potrebnu da bi se iskazao Riemann-Rochov teorem, koji povezuje stupanj divizora i dimenziju pripadnog prostora meromorfnih funkcija na algebarskoj krivulji. Pomoću tog teorema dokazujemo da se svaka algebarska krivulja može uložiti u projektivan prostor, te komentiramo da prethodno dokazan rezultat o postojanju meromorfnih funkcija na Riemannovoj plohi povlači da je svaka kompaktna Riemannova ploha algebarska krivulja.

Summary

This thesis is an introduction to the theory of Riemann surfaces. We define Riemann surfaces and holomorphic maps between them, and prove some basic properties. We then apply complex analytic techniques to address the question of existence of meromorphic functions on an arbitrary Riemann surface. We study differential 1-forms and decompose the Hilbert space of square-integrable 1-forms. Using this decomposition, we prove that there exist meromorphic 1-forms with prescribed singularities, whence we obtain the existence of meromorphic functions as well. Our focus then narrows to compact Riemann surfaces. We define algebraic curves, and then briefly expound the necessary theory to state the Riemann-Roch theorem, which links the degree of a divisor to the dimension of a related meromorphic function space on an algebraic curve. Applying this theorem, we prove that every algebraic curve can be embedded into projective space. We then comment on the fact that the previously proven result on the existence of meromorphic functions on Riemann surfaces implies that all Riemann surfaces are algebraic curves.

Životopis

Rođen sam 5. rujna 1992. u Bonnu. Veći dio ranog školovanja sam proveo u SAD-u, u saveznim državama New Jersey i New York. Osnovnu školu sam završio u Dubrovniku, a srednju školu u Zagrebu. Tijekom svog školovanja u Gimnaziji Lucijana Vranjanina u Zagrebu sam sudjelovao na državnim natjecanjima iz matematike, latinskog jezika, engleskog jezika i filozofije. 2010. godine sam upisao preddiplomski sveučilišni studij *Matematika* na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, a 2013. godine diplomski sveučilišni studij *Teorijska matematika* na istom fakultetu. Bio sam demonstrator iz kolegija *Linearna algebra 1, Linearna algebra 2, Vjerojatnost, Mjera i integral, Metrički prostori i Teorija skupova*, a krajem preddiplomskog i diplomskog studija sam nagrađen Priznanjem za izniman uspjeh na studiju. U veljači 2015. sam primljen na doktorski studij na sveučilištu *State University of New York at Stony Brook* s početkom u akademskoj godini 2015./16.