

# Numeričko rješavanje problema grede

---

**Mišak, Matija**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2016**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:487342>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-11**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Matija Mišak

**NUMERIČKO RJEŠAVANJE**  
**PROBLEMA GREDE**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc. dr. sc. Nela Bosner

Zagreb, Srpanj, 2016

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Analitičko rješenje problema grede</b>	<b>2</b>
1.1 Opis matematičkog modela grede . . . . .	2
1.2 Simuliranje deformacije grede . . . . .	3
1.3 Rješavanje problema grede . . . . .	6
1.4 Primjeri - Rješenja sustava za svojstvene vrijednosti . . . . .	12
<b>2 Generalizirani svojstveni problem</b>	<b>19</b>
2.1 QZ metoda . . . . .	20
2.2 Generalizirana Schurova Dekompozicija . . . . .	21
2.3 Hessenbergova Trokutasta Forma . . . . .	22
2.4 Deflacija . . . . .	24
2.5 QZ korak . . . . .	26
2.6 QZ Proces . . . . .	27
<b>3 Implementacija metode i rezultati</b>	<b>30</b>
3.1 Fiksiran - Fiksiran . . . . .	30
3.2 Slobodan - Slobodan . . . . .	32
3.3 Ovješeni - Ovješeni . . . . .	34
3.4 Zaključak . . . . .	37
<b>Bibliografija</b>	<b>38</b>

# Uvod

U fizici, rezonancija predstavlja titranje nekog sustava određenim frekvencijama koje doводи do sve većih amplituda i na kraju raspada (npr. pucanje štapa, rušenje mosta). Kako bismo izbjegli takvo ponašanje sustava, poželjno je poznavanje rezonantnih (svojstvenih) frekvencija.

Ovaj rad možemo podijeliti na tri dijela. U prvom dijelu ćemo koristeći fizikalne zakone opisati kako momenti utječu na izvijanje grede. Nakon toga pokazat ćemo kako se simulira ponašanje grede za realna testiranja i na tom modelu postaviti ćemo fizikalni problem. Koristeći relaciju momenata i izvijanja dobit ćemo sustav jednažbi i uvesti impedanciju. Postavit ćemo impedanciju na nulu što će nam dati problem iz kojeg ćemo moći izračunati svojstvene frekvencije. Iako je model zamišljen da se računa numerički, postaviti ćemo neke posebne uvjete te egzaktno izračunati prvu svojstvenu frekvenciju za različite rubne uvjete grede.

U drugom dijelu opisujemo numeričku metodu za rješavanje generaliziranog svojstvenog problema kojeg smo dobili u prvom dijelu. Najprije opisujemo matematičke alate koje ćemo koristiti; Givensove rotacije i Householderove reflektore. Nakon toga opisujemo korak po korak algoritme koji rješavaju naš problem.

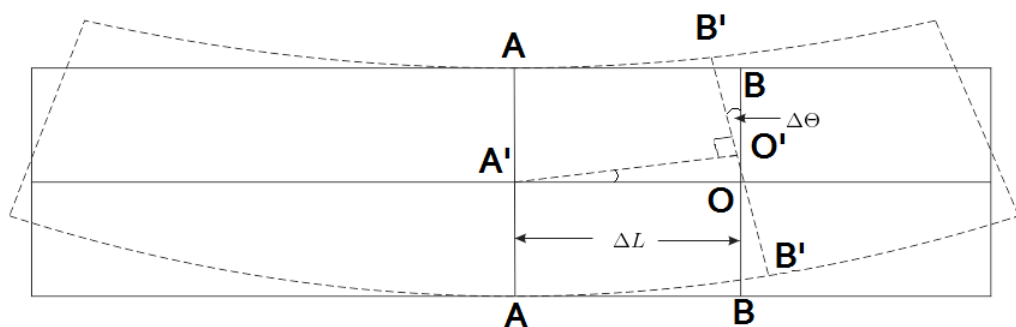
Na kraju, u trećem dijelu, opisani algoritam implementirat ćemo u programskom paketu MATLAB te predstaviti dobivene rezultate za razne rubne uvjete grede. U rezultate ćemo uključiti i grafove koji zorno prikazuju kako metoda sve bolje aproksimira svojstvene frekvencije i modove kod povećanja preciznosti diskretizacije.

# Poglavlje 1

## Analitičko rješenje problema grede

### 1.1 Opis matematičkog modela grede

U prvom koraku metode za rješavanje problema grede iskoristit ćemo osnovne relacije momenta na izvijanje grede.



Slika 1.1: Segment izvinate grede

Kad je izvijanje grede malo, može se uzeti da je izvnuti dio površnog sloja grede  $BB'$  paralelan nedeformiranoj centralnoj osi grede, te da je poprečni presjek grede (u smjeru  $OO'$ ) okomit na centralnu os grede. Ako dodatno uzmemo da je  $|\Delta L| = |OB|$  možemo zaključiti sljedeće:

- stranica  $\overline{BB'}$  je paralelna s nedeformiranom osi grede pa pravokutni trokuti  $\Delta A'O'O'$  i  $\Delta OBB'$  imaju jedan jednaki kut različit od pravog ( $\Delta\theta$ ) i jednaku katetu, stoga su kongruentni
- to znači da je  $|BB'| = |OO'|$  te da se smjerovi te dvije stranice razlikuju za  $90^\circ$

Jednadžba za moment koji djeluje na deformirani poprečni presjek grede  $B'B'$  je

$$M = EI \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta L} \quad (1.1)$$

gdje su:

- $M$  = moment
- $E$  = Youngov modul
- $\Delta\theta = \frac{BB'}{\Delta L}$  izražen u radijanima
- $I$  = moment inercije
- $\Delta L$  = duljina segmenta grede koji promatramo

Kako je moment produkt sile  $F$  i duljine kraka  $\Delta L$ , jednadžba (1.1) može biti zapisana kao

$$F \cdot \Delta L = EI \cdot \frac{|BB'|}{(\Delta L)^2} = EI \cdot \frac{|OO'|}{(\Delta L)^2} \quad (1.2)$$

ili

$$F = EI \cdot \frac{|OO'|}{(\Delta L)^3} \quad (1.3)$$

Krutost grede,  $K$ , jednaka je kvocijentu sile  $F$  i  $|OO'|$

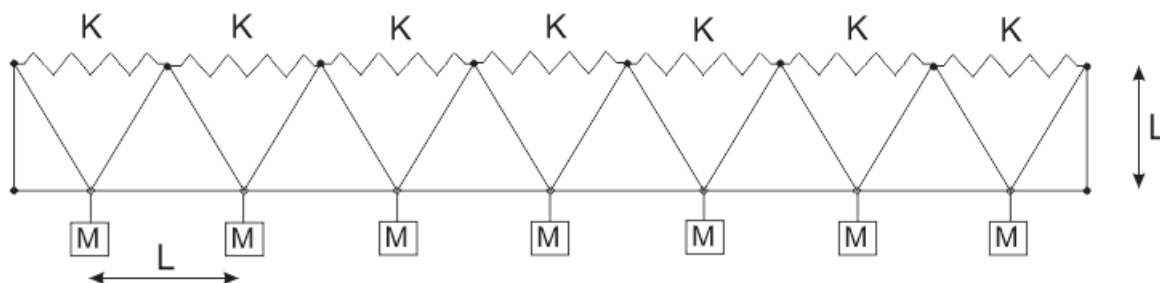
$$K = \frac{F}{|OO'|} = \frac{EI}{(\Delta L)^3} \quad (1.4)$$

Jednadžba (1.4) ima restrikcije da je izvijanje malo te da momenti koji djeluju na poprečni presjek djeluju preko kraka duljine  $\Delta L$ .

## 1.2 Simuliranje deformacije grede

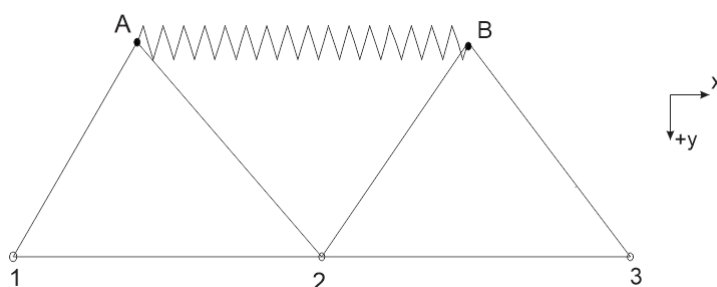
Kako bismo simulirali deformaciju grede, promatrat ćemo niz povezanih bezmasnih nosača koji imaju proizvoljno grupirane mase i krutosti kao na Slici 1.2.

Treba napomenuti da su svi efektivni pomaci točaka koje predstavljaju krajeve opruga u horizontalnom smjeru te svi pomaci ovjesa koji su u relaciji sa pomacima opruga u vertikalnom smjeru. Relacija ovih pomaka vodi na definiranje deformacije opruga u terminima pomaka u vertikalnom smjeru. Obratno, pomake u vertikalnom smjeru prikazat ćemo pomoću onih u horizontalnom. Svaki nosač je postavljen na bazu susjednih nosača. Kako smo



Slika 1.2: Model grede

napomenuli prije, ovakav model dopušta pomicanje ovjesa samo u vertikalnom smjeru. Svaki pomak ovjesa može se iskazati kao relativni okomiti pomak poprečnog segmenta od nedeformirane osi grede. Relativni vertikalni pomak jednog ovjesa prema susjednom u iznosu je jednak horizontalnom pomaku točke koja predstavlja kraj opruge (ovdje uzimamo u obzir jedan nosač, npr. ovjese 1 i 2 te kraj opruge  $A$  kao na Slici 1.3).



Slika 1.3: Model pomaka opruge

Definirat ćemo promjenu veličine opruge  $AB$ , kako je prikazano na slici 1.3, sa  $\Delta_{AB}$ , te pomake od  $A$  i  $B$  sa  $\Delta_A$  i  $\Delta_B$ . Analogno definiramo pomake od točaka 1, 2 i 3. Tada imamo:

$$\begin{aligned}\Delta_A &= \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_B &= \Delta_3 - \Delta_2 \\ \Delta_{AB} &= \Delta_B - \Delta_A = \Delta_3 - 2\Delta_2 + \Delta_1\end{aligned}\tag{1.5}$$



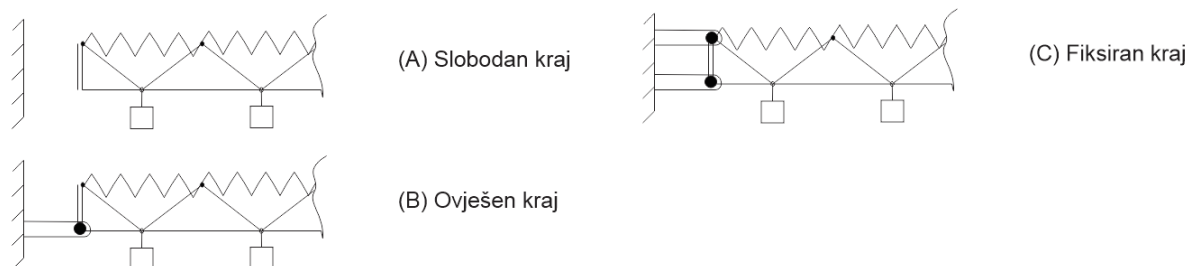
Napomena :

Kod pomaka točke  $A$  gledamo relativnu promjenu u odnosu na točke 1 i 2. Točke 1 i 2 se mogu pomicati samo u smjeru gore-dolje, a točka  $A$  samo u smjeru lijevo-desno. Ako pomaknemo točku 2 prema dolje (pozitivan smjer  $y$ -osi), a točka 1 ostane na svojem mjestu, točka  $A$  pomaknut će se udesno za isti iznos kao što se točka 2 pomaknula prema dolje. Ako još točku 1 pomaknemo prema gore, točka  $A$  će se pomaknuti udesno za iznos pomaka točke 2 i za iznos pomaka točke 1. Također, treba napomenuti da se trokut  $\Delta A12$  ne može deformirati. Nakon što smo izračunali relativne pomake od  $A$  i  $B$ , njihova razlika predstavlja promjenu veličine opruge.

Konstante opruga i mase tijela ovješeneh na ovjese ne moraju biti jednaki za analitičko rješenje, no rješavanje sustava se znatno pojednostavljuje ako su svi nosači jednake duljine osim onih na krajevima koji su polovične duljine. To u praksi dijeli gredu na segmente jednakih duljina između ovjesa, dok su krajevi polu-segmenata.

Na slici 1.4 možemo vidjeti rubne uvjete koji se najčešće javljaju u problemima grede. Sve razlike u ovim rubnim uvjetima moći ćemo jednostavno ubaciti kod krajnjeg rješavanja grede. Značenje rubnih uvjeta:

- "slobodan" → kraj grede može se slobodno gibati u vertikalnom smjeru
- "ovješeni" → kraj grede je učvršćen samo s donje ili gornje strane tako da greda može slobodno rotirati oko tog učvršćenja, dok efektivnih vertikalnih pomaka nema
- "fiksiran" → kraj grede je fiksiran što znači da se ne može ni gibati ni rotirati



Slika 1.4: Primjeri rubnih uvjeta

Prigušenje još nije uključeno u problem. Rješenje koje uključuje prigušenje titranja je moguće, no nije praktično za našu situaciju i pretpostavke koje smo postavili.

Model koji smo postavili do ove točke prikladan je za slobodne ne-vibrirajuće sustave. Kako bismo predstavili karakteristike sustava uvest ćemo pojam impedancije. To je veličina koja mjeri kako se struktura opire kretanju kad je izložena harmoničnoj sili. Ovisi o

frekvenciji kojom djelujemo na strukturu i najmanja je baš za karakteristične frekvencije.

$$\begin{aligned} Z &= i\omega M + \frac{K(1 + i\eta)}{i\omega} \\ &= i\omega M + \frac{K}{i\omega} + \frac{K\eta}{\omega} \end{aligned} \quad (1.6)$$

gdje su:

- $Z$  = impedancija
- $M$  = masa
- $K$  = krutost
- $\eta$  = faktor prigušenja
- $\omega$  = kutna frekvencija

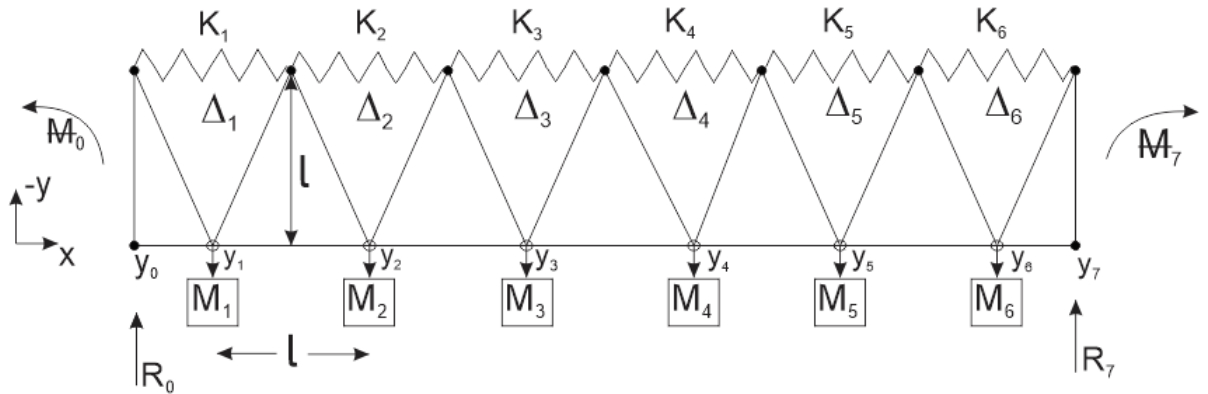
Sila  $F$ , dana je u sljedećoj relaciji sa pomakom  $\Delta$ :

$$F = Z \cdot i\omega\Delta \quad (1.7)$$

Simulirani sistem prikazan na slici 1.2 može se riješiti koristeći standardne jednažbe neprekidnosti sile i momenta. Prigušenje može biti uključeno u jednažbu za impedanciju. Mi ćemo riješiti sustav bez prigušenja, tj. zanemarit ćemo faktor  $\frac{K\eta}{\omega}$ .

### 1.3 Rješavanje problema grede

Kod rješavanja problema grede koristimo skup jednadžbi koje uzimaju u obzir relaciju sile i momenta. Na slici 1.5 možemo vidjeti tipični model grede sa šest točaka. Svo pomicanje grede dopušteno je samo u  $\pm y$  smjeru. Rubni uvjeti mogu uključivati potpornu silu  $R$  i/ili moment  $M$ . Na rubovima možemo uključiti točke  $y_0$  i/ili  $y_7$ . Svaki element mase  $M_i$  može imati zasebnu vrijednost. Također, svaki koeficijent krutosti opruge  $K_i$  može imati zasebnu vrijednost. Mi ćemo promatrati uniformno distribuirani sistem opruga u kojem će sve vrijednosti masa  $M_i$  biti jednake i svi koeficijenti opruga  $K_i$  biti jednaki.



Slika 1.5: Model šest masa

Moment  $M_0$  koji djeluje u pozitivnom smjeru se uzima kao pozitivan. Moment  $M_7$  koji djeluje u negativnom smjeru se također uzima kao pozitivan. Taj način je uobičajen kod rješavanja grede. Pomicanje točaka  $y_i$  uzimamo da je pozitivno u smjeru prema dolje. Pomaci opruga su pozitivni u smjeru prema desno. Obje potporne sile  $R_0$  i  $R_7$  uzimaju se kao pozitivne u smjeru prema gore.

Prvi skup jednadžbi koje uključujemo u račun su jednadžbe koje slijede iz modela pomaka opruge, tj. jednadžbe (1.5). Definiramo  $\Delta_i$  kao mjeru promjene oblika opruge  $K_i$ , za  $i = 1, 2, \dots, 6$ . Pozitivna vrijednost veličine  $\Delta_i$  reflektira se kao izduženje opruge  $K_i$ . Također, treba podsjetiti da je duljina kraka preko kojeg moment sile djeluje na oprugu jednake duljine kao razmak između ovjesa. Općeniti oblik jednadžbe za  $\Delta_i$  slijedi iz jednadžbe (1.5):

$$0 = -\Delta_i + y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} \quad (1.8)$$

U ovim jednadžbama javljaju se neki nepostojeći čvorovi. To su čvorovi koji dolaze simetrično od čvorova  $y_1$  i  $y_6$  s obzirom na  $y_0$  i  $y_7$ . Nazovimo ih  $y_{-1}$  i  $y_8$ . Tih čvorova ćemo se riješiti tako da čvorove  $y_0$  i  $y_7$  izrazimo kao aritmetičke sredine čvorova  $y_{-1}, y_1, y_6, y_8$  te dobijemo:

$$y_{-1} = 2y_0 - y_1 \text{ i } y_8 = 2y_7 - y_6$$

Koristeći ove jednakosti i opću formulu (1.8) dobivamo sljedeće jednadžbe za  $\Delta_i$ :

$$0 = -\Delta_1 + y_2 - 3y_1 + 2y_0 \quad (1.9)$$

$$0 = -\Delta_2 + y_3 - 2y_2 + y_1 \quad (1.10)$$

$$0 = -\Delta_3 + y_4 - 2y_3 + y_2 \quad (1.11)$$

$$0 = -\Delta_4 + y_5 - 2y_4 + y_3 \quad (1.12)$$

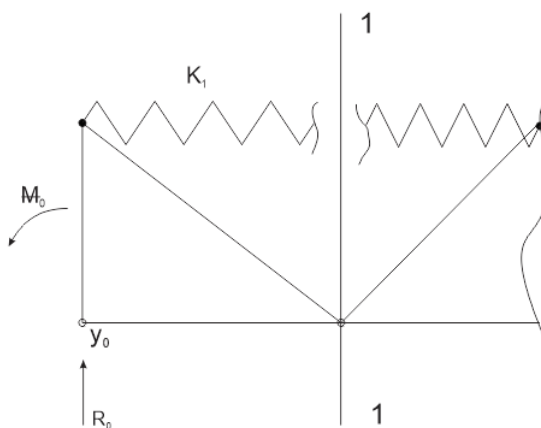
$$0 = -\Delta_5 + y_6 - 2y_5 + y_4 \quad (1.13)$$

$$0 = -\Delta_6 + 2y_7 - 3y_6 + y_5 \quad (1.14)$$

Sljedeći korak je promotriti momente koji djeluju na poprečni presjek kod čvora  $y_1$ . Pomak opruge  $K_1$  (slika 1.6) induciran je na bilo kojoj strani segmenta  $\overline{11}$  momentima jednakim po iznosu te suprotnog smjera. Radi jednostavnosti uzimamo momente na lijevoj strani. Tada iz kontinuiteta momenata koji djeluju na segment  $\overline{11}$  slijedi:

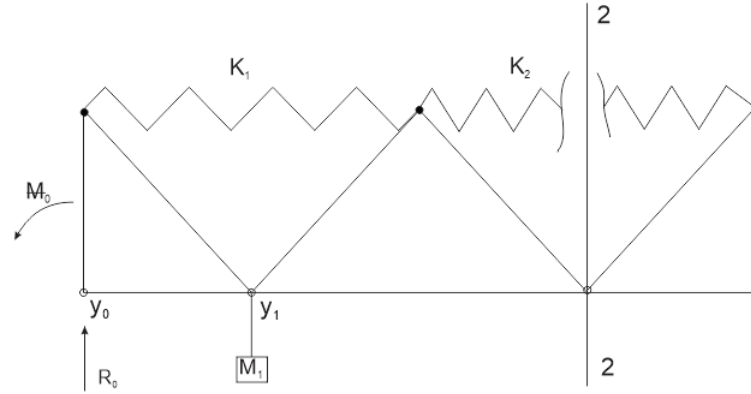
$$\begin{aligned} \Delta_1 K_1 l &= M_0 - \frac{l}{2} R_0 \\ 0 &= \Delta_1 K_1 - \frac{M_0}{l} + 0.5 R_0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Treba primijetiti da sile  $M_0$  i  $R_0$  rezultiraju u momentima suprotnih predznaka jer se odupiru jedna drugoj. Poprečni presjek  $\overline{22}$  (slika 1.7) kod čvora  $y_2$  uključuje nešto više od



Slika 1.6: Poprečni presjek kod čvora  $y_1$

samog rubnog uvjeta u jednadžbi za moment. Kako opruge na pozicijama osim one koju promatramo samo prenose moment, njih ne uključujemo u jednadžbu.  $M_0$  i  $R_0$ , kao vanjski čimbenici, ne utječu na fizičke karakteristike grede. S druge strane, masa ovješena na


 Slika 1.7: Poprečni presjek kod čvora  $y_2$ 

čvoru ima utjecaja jer ulazi u jednadžbu za impedanciju. Moment za poprečni presjek  $\overline{22}$  induciran impedancijom  $Z_1$  sa pomakom  $y_1$  jest:

$$\mathfrak{M}(Z_1) = (Z_1)(i\omega y_1)l$$

Za  $Z_1$  možemo substituirati  $i\omega M_1$  da dobijemo  $\mathfrak{M}(M_1) = -\omega^2 M_1 y_1 l$ . Jednadžba za moment na poprečni presjek  $\overline{22}$  može se izraziti na sljedeći način:

$$0 = \Delta_2 K_2 - \frac{M_0}{l} + 1.5R_0 - \omega^2 y_1 M_1 \quad (1.16)$$

Analogno, možemo izraziti jednadžbe za momente koji se javljaju kod poprečnih presjeka  $\overline{33}$ ,  $\overline{44}$ , itd. Za sistem šest masa, sustav jednadžbi koji opisuje djelovanje momenata jest:

$$0 = \Delta_1 K_1 - \frac{M_0}{l} + 0.5R_0 \quad (1.17)$$

$$0 = \Delta_2 K_2 - \frac{M_0}{l} + 1.5R_0 - \omega^2 y_1 M_1 \quad (1.18)$$

$$0 = \Delta_3 K_3 - \frac{M_0}{l} + 2.5R_0 - 2\omega^2 y_1 M_1 - \omega^2 y_2 M_2 \quad (1.19)$$

$$0 = \Delta_4 K_4 - \frac{M_0}{l} + 3.5R_0 - 3\omega^2 y_1 M_1 - 2\omega^2 y_2 M_2 - \omega^2 y_3 M_3 \quad (1.20)$$

$$0 = \Delta_5 K_5 - \frac{M_0}{l} + 4.5R_0 - 4\omega^2 y_1 M_1 - 3\omega^2 y_2 M_2 - 2\omega^2 y_3 M_3 - \omega^2 y_4 M_4 \quad (1.21)$$

$$0 = \Delta_6 K_6 - \frac{M_0}{l} + 5.5R_0 - 5\omega^2 y_1 M_1 - 4\omega^2 y_2 M_2 - 3\omega^2 y_3 M_3 - 2\omega^2 y_4 M_4 - \omega^2 y_5 M_5 \quad (1.22)$$

Jednadžba za moment kod čvora  $y_7$  jest:

$$0 = -\frac{M_0}{l} + \frac{M_7}{l} + 6R_0 - 5.5\omega^2 y_1 M_1 - 4.5\omega^2 y_2 M_2 - 3.5\omega^2 y_3 M_3 - 2.5\omega^2 y_4 M_4 - 1.5\omega^2 y_5 M_5 - 0.5\omega^2 y_6 M_6 \quad (1.23)$$

Ako sad kombiniramo jednadžbe (1.9) – (1.14) s jednadžbama (1.17) – (1.22), dobijemo sustav sa sljedećim nepoznicama:  $y_0, M_0, R_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, M_7, R_7$ .

Bilo koji izbor rubnih uvjeta smanjuje skup nepoznanica za četiri elementa, što nakon toga daje osam nepoznanica. To znači da za sad imamo sedam jednadžbi i osam nepoznanica. Moramo konstruirati još jednu jednadžbu kako bismo mogli riješiti sustav. U sustavima titranja izazvanim vanjskom silom suma sila koje djeluju u smjeru okomitom na nedeformiranu centralnu liniju grede mora biti nula. Okomite sile koje uključujemo u jednadžbu su  $R_0$  i  $R_7$  te inercijske sile masa ovisjenih na čvorovima. Tako dobivamo osmu jednadžbu sustava:

$$0 = -R_0 - R_7 + \omega^2 y_1 M_1 + \omega^2 y_2 M_2 + \omega^2 y_3 M_3 + \omega^2 y_4 M_4 + \omega^2 y_5 M_5 + \omega^2 y_6 M_6 \quad (1.24)$$

Na taj način opisali smo jedan sustav jednadžbi koji praktičnije možemo napisati u obliku

$$Ay = 0 \quad (1.25)$$

gdje su matrica koeficijenata  $A$  i vektor nepoznanica  $y$  zadani na sljedeći način:

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 2K_1 & -3K_1 & K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & K_2 - \omega^2 M_1 & -2K_2 & K_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.5 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & -2\omega^2 M_1 & K_3 - \omega^2 M_2 & -2K_3 & K_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.5 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & -3\omega^2 M_1 & -2\omega^2 M_2 & K_4 - \omega^2 M_3 & -2K_4 & K_4 & 0 & 0 & 0 \\ 4.5 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & -4\omega^2 M_1 & -3\omega^2 M_2 & -2\omega^2 M_3 & K_5 - \omega^2 M_4 & -2K_5 & K_5 & 0 & 0 \\ 5.5 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & -5\omega^2 M_1 & -4\omega^2 M_2 & -3\omega^2 M_3 & -2\omega^2 M_4 & K_6 - \omega^2 M_5 & -3K_6 & 2K_6 & 0 \\ 6 & 0 & -\frac{1}{l} & +\frac{1}{l} & 0 & -5.5\omega^2 M_1 & -4.5\omega^2 M_2 & -3.5\omega^2 M_3 & -2.5\omega^2 M_4 & -1.5\omega^2 M_5 & -0.5\omega^2 M_6 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 M_1 & \omega^2 M_2 & \omega^2 M_3 & \omega^2 M_4 & \omega^2 M_5 & \omega^2 M_6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \left[ R_0 \quad R_7 \quad M_0 \quad M_7 \quad y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \quad y_5 \quad y_6 \quad y_7 \right]^T$$

Jednadžba (1.25) predstavlja kompletan generalni matematički model grede. Matrica sustava  $A$  dimenzije  $8 \times 12$  će se reducirati na kvadratnu  $8 \times 8$  matricu kad jednom izaberemo rubne uvjete problema. Isto vrijedi i za vektor nepoznanica  $y$ . Za rubne uvjete vrijedi sljedeće:

Lijeva strana

$$\text{Slobodan kraj:} \quad M_0 = 0, R_0 = 0$$

$$\text{Fiksiran kraj:} \quad y_0 = 0, y_1 = 0$$

$$\text{Ovješeni kraj:} \quad y_0 = 0, M_0 = 0$$

Desna strana

$$\text{Slobodan kraj:} \quad M_7 = 0, R_7 = 0$$

$$\text{Fiksiran kraj:} \quad y_6 = 0, y_7 = 0$$

$$\text{Ovješeni kraj:} \quad y_7 = 0, M_7 = 0$$

Dakle, kad jednom izaberemo rubne uvjete, četiri nepoznanice će imati vrijednost 0, a naš sustav postaje kvadratni sustav sa osam nepoznanica. Kako svaki od rubnih uvjeta reducira broj nepoznanica za dva, rubni uvjeti na lijevoj i desnoj strani ne moraju biti jednaki. Matricna jednadžba koju smo postavili prihvaća bilo koju kombinaciju rubnih uvjeta. Kako matrica sustava ne ovisi o uniformnim konstantama, ovaj model nudi rješenje i za nesimetrične fizičke konfiguracije. U formalnom smislu, model je ograničen na konfiguracije koje su uniformne po dijelovima (segmentima). No, i ta ideja se može proširiti pa možemo na primjer uzeti da masa ovješena na čvorovima linearno utječe na točke u tom segmentu.

$$M_n = \int_{X_{n-1}}^{X_n} \rho(t) dt$$

Gdje je:

- $M_n$  = Masa  $n$ -tog segmenta grede
- $\rho$  = Gustoća mase grede
- $X$  = Udaljenost uzduž centralne horizontalne osi grede

U ovom slučaju, podrazumijeva se da je izvijanje grede linearno i izračuni se moraju napraviti za svaki segment iregularne grede.

Kako bismo analitički riješili sustav  $Ay = 0$ , pretpostavit ćemo da je greda simetrična. To znači da uzimamo da je  $R_0 = R_7$ ,  $M_0 = M_7$ ,  $y_0 = y_7$ ,  $y_1 = y_6$ ,  $y_2 = y_5$  i  $y_3 = y_4$  te da su sve mase ovještene na čvorovima jednake i sve konstante opruga jednake. Tada dobivamo

pojednostavljeni sustav:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -l^{-1} & 2K & -3K & K & 0 \\ 1.5 & -l^{-1} & 0 & K - \omega^2 M & -2K & K \\ 2.5 & -l^{-1} & 0 & -2\omega^2 M & K - \omega^2 M & -K \\ 3.5 & -l^{-1} & 0 & -3\omega^2 M & K - 2\omega^2 M & -K - \omega^2 M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_{0,7} \\ M_{0,7} \\ y_{0,7} \\ y_{1,6} \\ y_{2,5} \\ y_{3,4} \end{bmatrix} = 0 \quad (1.26)$$

Koristimo ovaj pojednostavljeni model jer dopušta ručno računanje sustava kako bismo predstavili rješenja grede. Za praktičnu primjenu koristi se sustav višeg reda uz rješavanje na računalu.

Kad reduciramo pravokutnu matricu sustava na kvadratnu (izborom rubnih uvjeta) jednadžba  $Ay = 0$  predstavlja impedanciju sustava. Za svaku prirodnu (rezonantnu) frekvenciju reaktivna impedancija mora biti nula. Kako je samo reaktivna impedancija bila uključena u jednadžbu (izbacili smo prigušenje), vrijednosti  $\omega$  za koje je ona nula su rješenja prirodnih frekvencija. Takve vrijednosti  $\omega$  nazivamo svojstvene vrijednosti sustava.

Varijable u vektoru nepoznanica predstavljaju odziv sustava. Svaka rezonantna frekvencija ima konačan skup odziva. Takva rješenja odziva nazivamo svojstvenim vektorima sustava. Nakon što izračunamo  $\omega$  i supstituiramo ga natrag, sustav  $Ay = 0$  još uvijek neće biti jedinstveno rješiv, kako je bilo i za očekivati, pošto svojstveni vektor sustava nije jedinstven. To znači da možemo izračunati samo relativna izvijanja koristeći svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore. Ta relativna izvijanja opisuju oblik modova za svaku prirodnu frekvenciju.

## 1.4 Primjeri - Egzaktna rješenja uniformne grede

Generalni matematički model grede, jednadžba (1.25) se vrlo često u primjeni može reducirati, npr. kad je greda simetrična i uniformna. Štoviše, jednadžba (1.26) je prvi korak u reduciranju sustava. Kad je greda simetrična, ona sadrži paran broj masa, te se kao rješenja promatraju samo neparni modovi. Svaki otklon s desne strane centra mora imati isti takav simetričan otklon s lijeve strane centra. Također, momenti i potporne sile na krajevima su jednaki. Supstitucijom jednih veličina s drugima, sustav (1.25) može biti reduciran na pola. Slijede sustavi koji predstavljaju problem uniformne simetrične grede sa šest masa reducirani na  $4 \times 4$  sustave. Ovi sustavi su jednostavni za računanje na ruke i poslužit će nam za provjeru točnosti generalnog modela. Promatrat ćemo sljedeće kombinacije rubnih uvjeta:



• Fiksiran - Fiksiran

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -l^{-1} & K & 0 \\ 1.5 & -l^{-1} & -2K & K \\ 2.5 & -l^{-1} & K - \omega^2 M & -K \\ 3.5 & -l^{-1} & K - 2\omega^2 M & -K - \omega^2 M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_{0,7} \\ M_{0,7} \\ y_{2,5} \\ y_{3,4} \end{bmatrix} = 0 \quad (1.27)$$

• Ovješten - Ovješten

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -3K & K & 0 \\ 1.5 & K - \omega^2 M & -2K & K \\ 2.5 & -2\omega^2 M & K - \omega^2 M & -K \\ 3.5 & -3\omega^2 M & K - 2\omega^2 M & -K - \omega^2 M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_{0,7} \\ y_{1,6} \\ y_{2,5} \\ y_{3,4} \end{bmatrix} = 0 \quad (1.28)$$

• Slobodan - Slobodan

$$\begin{bmatrix} 2K & -3K & K & 0 \\ 0 & K - \omega^2 M & -2K & K \\ 0 & -2\omega^2 M & K - \omega^2 M & -K \\ 0 & -3\omega^2 M & K - 2\omega^2 M & -K - \omega^2 M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{0,7} \\ y_{1,6} \\ y_{2,5} \\ y_{3,4} \end{bmatrix} = 0 \quad (1.29)$$

Koristit ćemo sljedeći model za ručno računanje  $4 \times 4$  determinante sustava:

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ M & N & P & Q \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} F & G & H \\ J & K & L \\ N & P & Q \end{vmatrix} - B \begin{vmatrix} E & G & H \\ I & K & L \\ M & P & Q \end{vmatrix} + C \begin{vmatrix} E & F & H \\ I & J & L \\ M & N & Q \end{vmatrix} - D \begin{vmatrix} E & F & G \\ I & J & K \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

$$= AFKQ + AGLN + AHJP - AFPL - AJGQ - ANKH - BEKQ - BGLM - BHIP + BEPL + BIGQ + BMKH + CEJQ + CFLM + CHIN - CENL - CIFQ - CMJH - DEJP - DFKM - DGIN + DENK + DIFP + DMJG$$

**Rubni uvjet: Fiksiran - Fiksiran**

Razvoj determinante za jednadžbu (1.27) računat ćemo pomoću sljedeće tablice:

$+AFKQ =$	$0.5(-l^{-1})(K - \omega^2 M)(-K - \omega^2 M)$	$=$	$0.5l^{-1}K^2$	$-0.5l^{-1}\omega^4 M^2$
$+AGLN =$	$0.5(-2K)(-K)(-l^{-1})$	$=$	$-l^{-1}K^2$	
$+AHJP =$	$0.5(K)(-l^{-1})(K - 2\omega^2 M)$	$=$	$-0.5l^{-1}K^2$	$+l^{-1}K\omega^2 M$
$-AFPL =$	$-0.5(-l^{-1})(K - 2\omega^2 M)(-K)$	$=$	$-0.5l^{-1}K^2$	$+l^{-1}K\omega^2 M$
$-AJGQ =$	$-0.5(-l^{-1})(-2K)(-K - \omega^2 K)$	$=$	$l^{-1}K^2$	$+l^{-1}K\omega^2 M$
$-ANKH =$	$-0.5(-l^{-1})(K - \omega^2 M)(K)$	$=$	$0.5l^{-1}K^2$	$-0.5l^{-1}K\omega^2 M$
$-BEKQ =$	$l^{-1}(1.5)(K - \omega^2 M)(-K - \omega^2 M)$	$=$	$-1.5l^{-1}K^2$	$+1.5l^{-1}\omega^4 M^2$
$-BGLM =$	$l^{-1}(-2K)(-K)(3.5)$	$=$	$7l^{-1}K^2$	
$-BHIP =$	$l^{-1}(K)(2.5)(K - 2\omega^2 M)$	$=$	$2.5l^{-1}K^2$	$-5l^{-1}K\omega^2 M$
$+BEPL =$	$-l^{-1}(1.5)(K - 2\omega^2 M)(-K)$	$=$	$1.5l^{-1}K^2$	$-3l^{-1}K\omega^2 M$
$+BIGQ =$	$-l^{-1}(2.5)(-2K)(-K - \omega^2 M)$	$=$	$-5l^{-1}K^2$	$-5l^{-1}K\omega^2 M$
$+BMKH =$	$-l^{-1}(3.5)(K - \omega^2 M)(K)$	$=$	$-3.5l^{-1}K^2$	$+3.5l^{-1}K\omega^2 M$
$+CEJQ =$	$K(1.5)(-l^{-1})(-K - \omega^2 M)$	$=$	$1.5l^{-1}K^2$	$+1.5l^{-1}K\omega^2 M$
$+CFLM =$	$K(-l^{-1})(-K)(3.5)$	$=$	$3.5l^{-1}K^2$	
$+CHIN =$	$K(K)(2.5)(-l^{-1})$	$=$	$-2.5l^{-1}K^2$	
$-CENL =$	$-K(1.5)(-l^{-1})(-K)$	$=$	$-1.5l^{-1}K^2$	
$-CIFQ =$	$-K(2.5)(-l^{-1})(-K - \omega^2 M)$	$=$	$-2.5l^{-1}K^2$	$-2.5l^{-1}K\omega^2 M$
$-CMJH =$	$-K(3.5)(-l^{-1})(K)$	$=$	$3.5l^{-1}K^2$	

Jednadžba (1.27) predstavlja rješenja uniformne simetrične grede s rubnim uvjetima fiksiran-fiksiran. Determinanta sustava mora biti nula za bilo koju prirodnu frekvenciju. Sumiranjem tablice i množenjem sa  $l$  dobivamo jednadžbu:

$$\omega^4 M^2 - 8\omega^2 MK + 3K^2 = 0$$

Jednadžbu rješavamo za  $\omega^2$  koristeći kvadratnu formulu.

$$\omega^2 = \frac{8MK \pm \sqrt{64M^2K^2 - 12M^2K^2}}{2M^2}$$

$$\omega^2 = \frac{8MK \pm \sqrt{52M^2K^2}}{2M^2}$$

$$\omega^2 = \frac{8MK \pm 7.2111MK}{2M^2}$$

$$\omega^2 = \frac{0.394K}{M}, \frac{7.605K}{M}$$

Sad možemo iskoristiti relaciju  $K = \frac{EI}{l^3}$ , pa dobijemo

$$\omega_1^2 = \frac{0.394EI}{Ml^3}$$

Standardna jednadžba za prvu prirodnu frekvenciju grede s rubnim uvjetima fiksiran-fiksiran jest

$$\omega_1^2 = \frac{(22.4)^2 EI}{M_t L^3}$$

Kod nas vrijedi da je  $M_t = 6M$  i  $L = 6l$ . Kad supstituiramo te vrijednosti, dobijemo

$$\omega_1^2 = \frac{0.386EI}{Ml^3}$$

Dakle, greška u korištenju matematičkog modela, tj. jednadžbe (1.27), u terminima  $\omega^2$  jest:

$$\text{Greška} = \frac{394 - 386}{386} \cdot 100 = 2.1\%$$

Greška u terminima  $\omega$  jest  $100 \cdot \frac{\sqrt{394} - \sqrt{386}}{\sqrt{386}} = \frac{20}{19.65} = 1.04\%$ . Kako je vrijednost

$\omega_2^2$  dvadesetak puta vrijednosti  $\omega_1^2$ , jasno je da  $\omega_2^2$  ne predstavlja treći mod. Dakle, možemo zaključiti da  $4 \times 4$  sustav može poslužiti samo za računanje prve, najmanje prirodne frekvencije. Kada bismo iskoristili  $8 \times 8$  sustav, greška za prvu frekvenciju bi bila manja te bismo dobili rješenje za treću frekvenciju. Također, treba napomenuti da korištenje simetričnog modela ne daje rješenja za parne modove.

**Rubni uvjet: Ovješ - Ovješ**

Jednadžba (1.28) je matricna jednadžba za uniformnu simetričnu gredu koja je ovješena s obje strane. Jednostavnije, možemo reći da greda leži na potpornim stupovima. Razvoj determinante računamo pomoću sljedeće tablice:

+AFKQ =	$0.5(K - \omega^2 M)(K - \omega^2 M)(-K - \omega^2 M)$	=	$0.5\omega^6 M^3$	$+0.5\omega^4 M^2 K$	$+0.5\omega^2 MK^2$	$-0.5K^3$
+AGLN =	$0.5(-2K)(-K)(-3\omega^2 M)$	=				$-3\omega^2 MK^2$
+AHJP =	$0.5(K)(-2\omega^2 M)(K - 2\omega^2 M)$	=		$2\omega^4 M^2 K$		$-\omega^2 MK^2$
-AFPL =	$-0.5(K - \omega^2 M)(K - 2\omega^2 M)(-K)$	=		$\omega^4 M^2 K$	$-1.5\omega^2 MK^2$	$+0.5K^3$
-AJGQ =	$-0.5(-2\omega^2 M)(-2K)(-K - \omega^2 K)$	=		$2\omega^4 M^2 K$		$+2\omega^2 MK^2$
-ANKH =	$-0.5(-3\omega^2 M)(K - \omega^2 M)(K)$	=		$-1.5\omega^4 M^2 K$		$+1.5\omega^2 MK^2$
-BEKQ =	$3K(1.5)(K - \omega^2 M)(-K - \omega^2 M)$	=		$4.5\omega^4 M^2 K$		$-4.5K^3$
-BGLM =	$3K(-2K)(-K)(3.5)$	=				$21K^3$
-BHIP =	$3K(K)(2.5)(K - 2\omega^2 M)$	=			$-15\omega^2 MK^2$	$+7.5K^3$
+BEPL =	$-3K(1.5)(K - 2\omega^2 M)(-K)$	=			$-9\omega^2 MK^2$	$+4.5K^3$
+BIGQ =	$-3K(2.5)(-2K)(-K - \omega^2 M)$	=			$-15\omega^2 MK^2$	$-15K^3$
+BMKH =	$-3K(3.5)(K - \omega^2 M)(K)$	=			$10.5\omega^2 MK^2$	$-10.5K^3$
+CEJQ =	$K(1.5)(-2\omega^2 M)(-K - \omega^2 M)$	=		$3\omega^4 M^2 K$		$+3\omega^2 MK^2$
+CFLM =	$K(K - \omega^2 M)(-K)(3.5)$	=			$3.5\omega^2 MK^2$	$-3.5K^3$
+CHIN =	$K(K)(2.5)(3\omega^2 M)$	=			$-7.5\omega^2 MK^2$	
-CENL =	$-K(1.5)(-3\omega^2 M)(-K)$	=			$-4.5\omega^2 MK^2$	
-CIFQ =	$-K(2.5)(K - \omega^2 M)(-K - \omega^2 M)$	=		$-2.5\omega^4 M^2 K$		$+2.5K^3$
-CMJH =	$-K(3.5)(-2\omega^2 M)(K)$	=				$7\omega^2 MK^2$

Sumiranjem tablice dobijemo:

$$0.5\omega^6 M^3 + 9\omega^4 M^2 K - 28.5\omega^2 MK^2 + 2K^3 = 0$$

Dijeljenjem jednadžbe sa  $K^3$  i supstitucijom  $\omega^2 = \frac{xK}{M}$  dobijemo jednadžbu:

$$0.5x^3 + 9x^2 - 28.5x + 2 = 0$$

Kako nas interesiraju rješenja za "male" vrijednosti  $x$ , možemo zanemariti faktor  $x^3$ . Kvadratnu jednadžbu rješavamo koristeći kvadratnu formulu.

$$x = \frac{28.5 \pm \sqrt{28.5^2 - 72}}{18} = 0.0718$$

Kao i u prvom primjeru, rješenje neće biti dobro za treću prirodnu frekvenciju. Vratimo supstituciju:

$$\omega^2 = \frac{0.0718K}{M} = \frac{0.0718EI}{l^3 M}$$

Standardna jednažba za prvu prirodnu frekvenciju grede s rubnim uvjetima ovješeno-ovješeno jest

$$\omega_1^2 = \frac{0.0752EI}{l^3 M}$$

Greška u korištenju matematičkog modela u terminima  $\omega^2$  jest:

$$\text{Greška} = \frac{0.0752 - 0.0718}{0.0752} \cdot 100 = 4.5\%$$

Greška u terminima  $\omega$  jest  $100 \cdot \frac{\sqrt{752} - \sqrt{718}}{\sqrt{752}} = 2.3\%$ . Kako je već napomenuto,  $4 \times 4$  sustav ne aproksimira egzaktno rješenje dovoljno dobro.

### Rubni uvjet: Slobodan - Slobodan

Determinanta sustava koji uključuje rubni uvjet "Slobodan - Slobodan" reducira se na  $3 \times 3$  determinantu:

$$2K \begin{vmatrix} K - \omega^2 M & -2K & K \\ -2\omega^2 M & K - \omega^2 M & -K \\ -3\omega^2 M & K - 2\omega^2 M & -K - \omega^2 M \end{vmatrix}$$

Kako vrijednost determinante mora biti nula, dobivamo sljedeću jednažbu:

$$0 = -2\omega^6 M^3 K + 16\omega^4 M^2 K^2 - 6\omega^2 M K^3$$

Dijelimo sa  $-\omega^2 M K^3$  i koristimo supstituciju  $x = \frac{\omega^2 M}{K}$ , pa jednažba poprima oblik:

$$0 = 2x^2 - 16x + 6$$

Rješenje kvadratne jednažbe je:

$$\omega_1^2 = \frac{0.395K}{M} = \frac{0.395EI}{l^3 M}$$

Standardna jednažba za prvu prirodnu frekvenciju grede s rubnim uvjetima slobodan-slobodan jest

$$\omega_1^2 = \frac{0.386EI}{Ml^3}$$

Greška u korištenju matematičkog modela u terminima  $\omega^2$  jest:

$$\text{Greška} = 100 \cdot \frac{0.395 - 0.386}{0.395} = 2.3\%$$

$$\text{Greška u terminima } \omega \text{ jest } 100 \cdot \frac{\sqrt{395} - \sqrt{386}}{\sqrt{396}} = 1.1\%.$$

## Poglavlje 2

# Generalizirani svojstveni problem

Za kvadratnu matricu  $A$  i skalar  $\lambda \in \mathbb{C}$  kažemo da je  $\lambda$  svojstvena vrijednost za  $A$  ako vrijedi

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

i taj problem nazivamo svojstveni problem.

Ako zamijenimo jediničnu matricu  $I$  nekom drugom kvadratnom matricom  $B$  i promatramo  $A - \lambda B$ , tada kažemo da rješavamo generalizirani svojstveni problem.

Najprije navodimo neke osnovne pojmove koje ćemo koristiti u ovom poglavlju.

Kažemo da je matrica  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  **ortogonalna** ako vrijedi da je  $Q^T Q = Q Q^T = I_n$ .

Nadalje, neka je  $v \in \mathbb{R}^n$  vektor različit od nul-vektora. Tada se matrica  $P$  u formi

$$P = I - \frac{2}{v^T v} v v^T$$

naziva **Householderov reflektor**. Ako neki vektor  $x$  množimo sa  $P$ , tada se kao rezultat dobije njegova refleksija u odnosu na hiperravninu  $\text{span}\{v\}^\perp$ . Householderovi reflektori korisni su za poništavanje svih elemenata u nekom vektoru osim prvog. Kada je potrebno pažljivije poništavati elemente u matrici koriste se **Givensove rotacije**. To su ortogonalne matrice sljedećeg oblika:

$$G(i, k, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & c & \dots & s & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & -s & \dots & c & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

gdje je  $c = \cos(\theta)$  i  $s = \sin(\theta)$ . Elementi  $c$  nalaze se na pozicijama  $(i, i)$  i  $(k, k)$ , dok se element  $s$  nalazi na poziciji  $(i, k)$  te element  $-s$  na poziciji  $(k, i)$ . Množenje s lijeve strane sa  $G(i, k, \theta)^T$  daje kao rezultat rotaciju za  $\theta$  radijana u  $(i, k)$  koordinatnoj ravnini. Tada, koristeći određene vrijednosti za  $c$  i  $s$  lako možemo poništiti željenu vrijednost u određenoj matrici.

## 2.1 QZ metoda za $Ax = \lambda Bx$

Neka su  $A$  i  $B$  dvije  $n \times n$  matrice. Skup svih matrica koje imaju formu  $A - \lambda B$ , gdje je  $\lambda \in \mathbb{C}$  nazivamo **pramen**. Svojstvene vrijednosti pramena su elementi skupa  $\lambda(A, B)$  definirani sljedećom relacijom:

$$\lambda(A, B) = \{z \in \mathbb{C} : \det(A - zB) = 0\}$$

Za svojstvenu vrijednost  $\lambda \in \lambda(A, B)$  i za

$$Ax = \lambda Bx, \text{ gdje je } x \neq 0$$

kažemo da je  $x$  svojstveni vektor za  $A - \lambda B$ .

U ovom poglavlju kratko opisujemo matematička svojstva generaliziranog svojstvenog problema i prezentiramo stabilnu metodu za njegovo rješenje.

### Pozadina problema

Najprije trebamo primijetiti da za generalizirani svojstveni problem postoji  $n$  svojstvenih vrijednosti ako i samo ako je rang matrice  $B$  jednak  $n$ . Ako je rang matrice  $B$  manji od  $n$ , tada  $\lambda(A, B)$  može biti konačan, prazan ili beskonačan.

#### Primjer 2.1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda(A, B) = \{1\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda(A, B) = \emptyset$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda(A, B) = \mathbb{C}$$

- Ako je  $0 \neq \lambda \in \lambda(A, B)$ , tada je  $\frac{1}{\lambda} \in \lambda(B, A)$
- ako je  $B$  regularna tada je  $\lambda(A, B) = \lambda(B^{-1}A, I) = \lambda(B^{-1}A)$



Ova razmatranja predlažu jednu metodu za rješavanje  $A - \lambda B$  u slučaju kad je  $B$  regularna:

1. Riješiti  $BC = A$  za  $C$  koristeći npr. Gaussove eliminacije s pivotiranjem
2. Koristeći  $QR$  algoritam izračunati svojstvene vrijednosti za  $C$

### Primjer 2.2

$$\text{Neka su } A = \begin{bmatrix} 1.746 & 0.940 \\ 1.246 & 1.898 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{bmatrix}$$

Tada je  $\lambda(A, B) = \{2, 1.07 \times 10^6\}$ . Koristeći aritmetiku pomičnog zareza sa sedam decimala, dobijemo da je  $\lambda(fl(AB^{-1})) = \{1.562539, 1.01 \times 10^6\}$ . Loša aproksimacija manje svojstvene vrijednosti izlazi iz činjenice da je  $\kappa(B) \approx 2 \times 10^6$ . S druge strane, proizlazi da je

$$\lambda(I, fl(A^{-1}B)) \approx \{2.000001, 1.06 \times 10^6\}$$

Točnost manje svojstvene vrijednosti je poboljšana jer vrijedi da je  $\kappa(A) \approx 4$ . Ovdje  $\kappa$  označava uvjetovanost matrice.

Primjer 2.2 pokazuje da trebamo pronaći bolji pristup problemu  $A - \lambda B$ . Jedan takav pristup jest da izračunamo dobro-uvjetovane matrice  $Q$  i  $Z$  takve da vrijedi:

$$A_1 = Q^{-1}AZ, \quad B_1 = Q^{-1}BZ \quad (2.1)$$

gdje su matrice  $A_1$  i  $B_1$  obje u kanonskoj formi. Tada je  $\lambda(A, B) = \lambda(A_1, B_1)$  jer

$$Ax = \lambda Bx \Leftrightarrow A_1y = \lambda B_1y, \quad x = Zy$$

Kažemo da su prameni  $A - \lambda B$  i  $A_1 - \lambda B_1$  **ekvivalentni** ako (2.1) vrijedi za regularne  $Q$  i  $Z$ .

## 2.2 Generalizirana Schurova Dekompozicija

### **Teorem 2.2.1. Generalizirana Schurova Dekompozicija**

Ako su  $A$  i  $B$  dvije matrice iz  $\mathbb{C}^{n \times n}$ , tada postoje unitarne matrice  $Q$  i  $Z$  takve da su  $Q^H A Z = T$  i  $Q^H B Z = S$  gornjetrokutaste matrice. Ako su za neki  $k$  dijagonalni elementi  $t_{kk}$  i  $s_{kk}$  jednaki nuli, tada je  $\lambda(A, B) = \mathbb{C}$ . U suprotnom vrijedi:

$$\lambda(A, B) = \left\{ \frac{t_{ii}}{s_{ii}} : s_{ii} \neq 0 \right\}$$

*Dokaz.* Neka je  $\{B_k\}$  niz regularnih matrica koje konvergiraju k  $B$ . Za svaki  $k$  uzmemo  $Q_k^H(AB_k^{-1})Q_k = R_k$  - Schurovu dekompoziciju od  $AB_k^{-1}$ . Neka je  $Z_k$  unitarna matrica takva da je  $Z_k^H(B_k^{-1}Q_k) \equiv S_k^{-1}$  gornjetrokutasta matrica. Matricu  $Z_k$  možemo izraziti kao  $B_k^{-1}Q_kS_k$ . Tada slijedi da su i matrice  $Q_k^HAZ_k = Q_k^HAB_k^{-1}Q_kS_k = R_kS_k$  i  $Q_k^HB_kZ_k = Q_k^HB_kB_k^{-1}Q_kS_k = S_k$  gornjetrokutaste. Po Bolzano-Weierstrassovom teoremu znamo da ograničeni niz  $\{(Q_k, Z_k)\}$  ima konvergentan podniz, tj.  $\lim(Q_{k_i}, Z_{k_i}) = (Q, Z)$ . Tada se lako vidi da su  $Q$  i  $Z$  unitarne matrice te da su  $Q^HAZ$  i  $Q^HBZ$  gornjetrokutaste matrice. Tvrdnje o  $\lambda(A, B)$  slijede iz relacije:

$$\det(A - \lambda B) = \det(QZ^H) \prod_{i=1}^n (t_{ii} - \lambda s_{ii})$$

□

Ako su matrice  $A$  i  $B$  realne, tada nam je od interesa sljedeći teorem koji dajemo bez dokaza.

**Teorem 2.2.2. Generalizirana Realna Schurova Dekompozicija**

Ako su  $A$  i  $B$  dvije matrice iz  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , tada postoje ortogonalne matrice  $Q$  i  $Z$  takve da je  $Q^T AZ$  gornje kvazi-trokutasta i  $Q^T BZ$  gornjetrokutasta.

Kažemo da je matrica **kvazi-trokutasta** ako na dijagonali ima  $1 \times 1$  ili  $2 \times 2$  blokove, tj. neki poddijagonalni elementi  $a_{i+1,i}$  su različiti od nule. Primjer kvazi-trokutaste matrice:

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

## 2.3 Hessenbergova Trokutasta Forma

Prvi korak u računanju generalizirane Schurove dekompozicije para  $(A, B)$  jest reduciranje matrice  $A$  na gornju Hessenbergovu formu i  $B$  na gornjetrokutastu koristeći ortogonalne transformacije. Najprije tražimo ortogonalnu matricu  $U$  takvu da je  $U^T B$  gornjetrokutasta. Naravno, da bismo sačuvali svojstvene vrijednosti, iste transformacije radimo i na matrici  $A$ . Prikazat ćemo korak po korak što se dešava u slučaju  $n = 5$ :

$$A = U^T A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}, B = U^T B = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

Nakon toga reduciramo matricu  $A$  na gornje Hessenbergovu i pritom čuvamo trokutastu formu matrice  $B$ . Givensova rotacija  $Q_{45}$  nam služi da bismo eliminirali član  $a_{51}$ :

$$A = Q_{45}^T A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}, B = Q_{45}^T B = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

Element  $b_{54}$  koji nam se pojavio u matrici  $B$  može se eliminirati koristeći Givensovu rotaciju  $Z_{45}$ :

$$A = AZ_{45} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}, B = BZ_{45} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

Analogno se poništavaju elementi  $a_{41}$  te  $a_{31}$ :

$$A = Q_{34}^T A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}, B = Q_{34}^T B = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

$$A = AZ_{34} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}, B = BZ_{34} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

$$A = Q_{23}^T A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}, B = Q_{23}^T B = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

$$A = AZ_{23} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}, B = BZ_{23} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

Matrica  $A$  je sada u gornje Hessenbergovoj formi po prvom stupcu. Reduciranje se završava tako da eliminiramo elemente  $a_{52}$ ,  $a_{42}$  i  $a_{53}$ . Kako je prikazano, dvije ortogonalne transformacije su potrebne kako bi se eliminirao svaki element  $a_{ij}$  - jedna za eliminiranje  $a_{ij}$ , a druga za vraćanje matrice  $B$  u trokutastu formu. U svakom koraku se mogu koristiti Givensove rotacije ili Householderove transformacije. Sve zajedno imamo sljedeći algoritam:

**Algoritam: Hessenberg-Trokutasta Redukcija**

Za dane matrice  $A$  i  $B$  iz  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , sljedeći algoritam vraća matrice  $Q^T A Z$  u gornjoj Hessenbergovoj formi i  $Q^T B Z$  u gornjetrokutastoj formi. Matrice  $Q$  i  $Z$  su ortogonalne.

---

**Algorithm 1**

---

Zamijeni matricu  $B$  sa  $Q^T B = R$ , gdje je  $Q$  ortogonalna a  $R$  gornjetrokutasta

$A = Q^T A$

**for**  $j = 1 : n - 2$  **do**

**for**  $i = n - 1 : j + 2$  **do**

$[c, s] = \text{givens}(A(i - 1, j), A(i, j))$

$A(i - 1 : i, j : n) = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}^T A(i - 1 : i, j : n)$

$B(i - 1 : i, i - 1 : n) = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}^T B(i - 1 : i, i - 1 : n)$

$[c, s] = \text{givens}(-B(i, i), B(i, i - 1))$

$B(1 : i, i - 1 : i) = B(1 : i, i - 1 : i) \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$

$A(1 : n, i - 1 : i) = A(1 : n, i - 1 : i) \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$

**end for**

**end for**

---

Za izvršavanje algoritma potrebno je otprilike  $8n^3$  operacija. Da bi se dobile matrice  $Q$  i  $Z$  potrebno je  $4n^3$ , odnosno  $3n^3$  operacija.

Redukcija  $A - \lambda B$  do Hessenberg-trokutaste forme služi nam kao početni korak za generaliziranu  $QR$  iteraciju poznatu kao  $QZ$  iteracija.

## 2.4 Deflacija

U opisu  $QZ$  iteracije možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je  $A$  nereducirana gornje Hessenbergova i da je  $B$  regularna gornjetrokutasta matrica. Prva pretpostavka je

očita, jer ako je  $a_{k+1,k} = 0$ , tada je

$$A - \lambda B = \begin{bmatrix} A_{11} - \lambda B_{11} & A_{12} - \lambda B_{12} \\ 0 & A_{22} - \lambda B_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} k \\ n-k \\ k \\ n-k \end{matrix}$$

pa možemo nastaviti s rješavanjem dva manja problema  $A_{11} - \lambda B_{11}$  i  $A_{22} - \lambda B_{22}$ . S druge strane, ako je  $b_{kk} = 0$  za neki  $k$ , tada je moguće dobiti nulu na mjestu  $(n, n-1)$  u matrici  $A$  i time svesti na deflaciju. Ilustrirat ćemo ovu situaciju s primjerom. Neka je  $n = 5$  i  $k = 3$ :

$$A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

Nulu na dijagonali u matrici  $B$  možemo "gurnuti" prema poziciji  $(5, 5)$  koristeći Givensove rotacije:

$$A = Q_{34}^T A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}, B = Q_{34}^T B = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

$$A = AZ_{23} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}, B = BZ_{23} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

$$A = Q_{45}^T A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix}, B = Q_{45}^T B = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = AZ_{34} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}, B = BZ_{34} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = AZ_{45} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}, B = BZ_{45} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Prikazana metoda "naganjanja nule" je potpuno generalna i može se iskoristiti da se poništi  $a_{n,n-1}$  bez obzira gdje se nula pojavljuje u dijagonali od  $B$ .

## 2.5 QZ korak

Sada smo u poziciji gdje možemo opisati  $QZ$  korak. Bez smanjenja općenitosti uzimamo da je matrica  $B$  regularna, tj. kada je pretvorimo u trokutastu neće imati nule na dijagonali. Osnovna ideja je da transformiramo  $A$  i  $B$  tako da se dobije

$$(\bar{A} - \lambda\bar{B}) = \bar{Q}^T (A - \lambda B)\bar{Z},$$

gdje je  $\bar{A}$  gornje Hessenbergova,  $\bar{B}$  je gornjetrokutasta,  $\bar{Q}$  i  $\bar{Z}$  su obje ortogonalne. Neka je  $M = AB^{-1}$  (gornje Hessenbergova) i neka  $v$  predstavlja prvi stupac gornje 2-Hessenbergove matrice  $(M - aI)(M - bI)$ , gdje su  $a$  i  $b$  svojstvene vrijednosti  $2 \times 2$  donje podmatrice matrice  $M$ . Ako je  $Q_0$  Householderova matrica takva da je  $Q_0v$  višekratnik od  $e_1$ , tada je:

$$A = Q_0A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$B = Q_0B = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

Ideja je sada vratiti ove dvije matrice u Hessenberg-trokutastu formu natjeravanjem neželjenih netrivialnih elemenata niz dijagonalu.

Dakle, prvo tražimo par Householderovih matrica  $Z_1$  i  $Z_2$  da poništimo elemente  $b_{31}, b_{32}$  i

$b_{21}$ :

$$A = AZ_1Z_2 = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$B = BZ_1Z_2 = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

Nakon toga koristimo Householderovu matricu  $Q_1$  da poništimo elemente  $a_{31}$  i  $a_{41}$ :

$$A = Q_1A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$B = Q_1B = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

Vidimo da koristeći ovaj korak neželjeni nenul elementi su pomaknuti prema dolje te prema desno od originalne pozicije. Time smo opisali tipični korak u  $QZ$  iteraciji. Također, primijetimo da matrica  $Q = Q_0Q_1 \dots Q_{n-2}$  ima jednak prvi stupac kao  $Q_0$ .

## 2.6 QZ Proces

Koristeći niz  $QZ$  koraka na Hessenberg-trokutastom pramenu  $A - \lambda B$ , moguće je reducirati  $A$  na kvazi-trokutastu formu. U sljedećem koraku dajemo kompletan algoritam.

---

**Algorithm 2 (QZ korak)** Za danu nereduciranu gornje Hessenbergovu matricu  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  i za nesingularnu gornjetrokutastu matricu  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sljedeći algoritam mijenja matricu  $A$  sa gornje Hessenbergovom matricom  $Q^T A Z$  i  $B$  sa gornjetrokutastom matricom  $Q^T B Z$  gdje su  $Q$  i  $Z$  ortogonalne matrice.

---

Neka je  $M = AB^{-1}$  i računamo  $(M - aI)(M - bI)e_1 = (x, y, z, 0, \dots, 0)$ , gdje su  $a$  i  $b$  svojstvene vrijednosti donje  $2 \times 2$  podmatrice matrice  $M$ .

**for**  $k = 1 : n - 2$  **do**

Pronađi Householder  $Q_k$  tako da je  $Q_k = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

$A = \text{diag}(I_{k-1}, Q_k, I_{n-k-2})A$

$B = \text{diag}(I_{k-1}, Q_k, I_{n-k-2})B$

Pronađi Householder  $Z_{k1}$  tako da:

$\begin{bmatrix} b_{k+2,k} & b_{k+2,k+1} & b_{k+2,k+2} \end{bmatrix} Z_{k1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * \end{bmatrix}$

$A = A \text{diag}(I_{k-1}, Z_{k1}, I_{n-k-2})$

$B = B \text{diag}(I_{k-1}, Z_{k1}, I_{n-k-2})$

Pronađi Householder  $Z_{k2}$  tako da:

$\begin{bmatrix} b_{k+1,k} & b_{k+1,k+1} \end{bmatrix} Z_{k2} = \begin{bmatrix} 0 & * \end{bmatrix}$

$A = A \text{diag}(I_{k-1}, Z_{k2}, I_{n-k-1})$

$B = B \text{diag}(I_{k-1}, Z_{k2}, I_{n-k-1})$

$x = a_{k+1,k}; y = a_{k+2,k}$

**if**  $k < n - 2$  **then**

$z = a_{k+3,k}$

**end if**

**end for**

Pronađi Householder  $Q_{n-1}$  tako da  $Q_{n-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix}$

$A = \text{diag}(I_{n-2}, Q_{n-1})A$

$B = \text{diag}(I_{n-2}, Q_{n-1})B$

Pronađi Householder  $Z_{n-1}$  tako da:

$\begin{bmatrix} b_{n,n-1} & b_{n,n} \end{bmatrix} Z_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & * \end{bmatrix}$

$A = A \text{diag}(I_{n-2}, Z_{n-1})$

$B = B \text{diag}(I_{n-2}, Z_{n-1})$

---



---

**Algorithm 3** Za dane matrice  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , sljedeći algoritam računa ortogonalne matrice  $Q$  i  $Z$  takve da je  $Q^T A Z = T$  gornje kvazi-trokutasta i  $Q^T B Z = S$  je gornjetrokutasta. Na kraju je  $A$  zamijenjena sa  $T$  i  $B$  sa  $S$ .

---

Koristeći Algoritam 1 mijenjamo  $A$  sa  $Q^T A Z$  (gornje Hessenbergova) i  $B$  sa  $Q^T B Z$  (gornjetrokutasta)

**while**  $q \neq n$  **do**

Stavi na nulu sve poddijagonalne elemente iz  $A$  takve da je  $|a_{i,i-1}| \leq \epsilon(|a_{i-1,i-1}| + |a_{ii}|)$

Pronađi najveći nenegativan  $q$  i najmanji nenegativan  $p$  takve da ako je

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & & \\ 0 & A_{22} & A_{23} & & \\ 0 & 0 & A_{33} & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} p \\ n-p-q \\ q \\ \\ \end{matrix}$$

tada je  $A_{33}$  gornje kvazi-trokutasta i  $A_{22}$  je nereducirana gornje Hessenbergova.

Particioniraj  $B$ :

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & & \\ 0 & B_{22} & B_{23} & & \\ 0 & 0 & B_{33} & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} p \\ n-p-q \\ q \\ \\ \end{matrix}$$

**if**  $q < n$  **then**

**if**  $B_{22}$  je singularna **then**

Poništi  $a_{n-q,n-q-1}$

**else**

Primijeni Algoritam 2 na  $A_{22}$  i  $B_{22}$

$A = \text{diag}(I_p, Q, I_q)^T A \text{diag}(I_p, Z, I_q)$

$B = \text{diag}(I_p, Q, I_q)^T B \text{diag}(I_p, Z, I_q)$

**end if**

**end if**

**end while**

---

## Poglavlje 3

# Implementacija metode i rezultati

U ovom dijelu predstavljamo rezultate dobivene korištenjem prethodno opisane metode u programskom jeziku MATLAB. Rješavamo jednadžbu (1.25) na način da matricu  $A$  podijelimo na dva dijela:  $A = A - B\omega^2$ . Dakle, u  $B$  stavljamo sve koeficijente koji se pojavljuju uz varijablu  $\omega^2$ , dok u matricu  $A$  stavljamo sve ostale "slobodne" članove. Nakon toga,  $\omega^2$  (rezonantne frekvencije) nam predstavljaju svojstvene vrijednosti generaliziranog svojstvenog problema.

### 3.1 Rubni uvjet: Fiksiran - Fiksiran

Rubni uvjet daje nam  $y_0 = y_1 = y_{n-2} = y_{n-1} = 0$ . Dakle, iz matrice koeficijenata izbacujemo peti i šesti, te predposljednji i posljednji stupac.

Koristimo sljedeće rezultate iz teorije elastičnosti → jednadžbe za pojedine svojstvene frekvencije grede:

$$\text{Mod 1: } \omega^2 = \frac{(22.40)^2 EI}{M_t L^3}$$

$$\text{Mod 2: } \omega^2 = \frac{(61.70)^2 EI}{M_t L^3}$$

$$\text{Mod 3: } \omega^2 = \frac{(121.0)^2 EI}{M_t L^3}$$

$$\text{Mod 4: } \omega^2 = \frac{(199.9)^2 EI}{M_t L^3}$$

$$\text{Mod 5: } \omega^2 = \frac{(298.6)^2 EI}{M_t L^3}$$

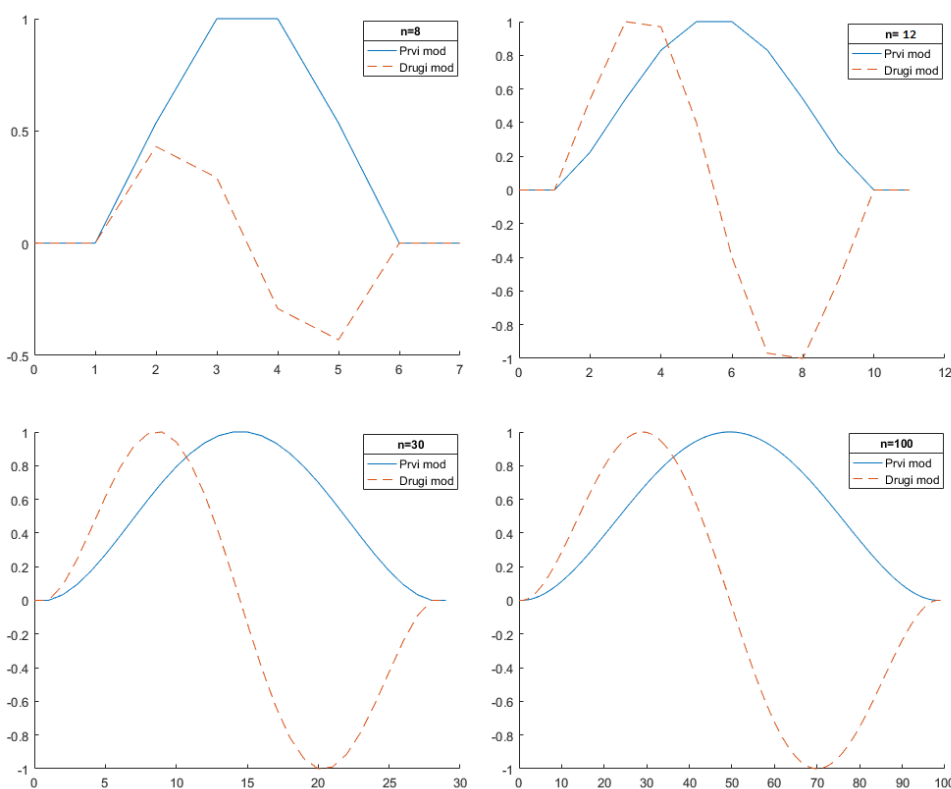
Gdje nam je  $M_t = (n - 2)M$  i  $L = (n - 2)l$ . U sljedećoj tablici prikazujemo razliku između kvadrata egzaktnih i numerički dobivenih prvih pet svojstvenih frekvencija za različiti broj segmenata. Treba napomenuti da povećanje broja  $n$  ne znači profinjenje jedne grede konstantne duljine. Gredu koja promatramo ima konstantnu debljinu  $l$  a povećanje broja  $n$  znači

povećanje broja segmenata od kojih se greda sastoji i koji su širine  $l$ . Grešku za kvadrat  $i$ -te svojstvene frekvencije ćemo označiti sa  $Err_i$ .

$n$	$Err_1$	$Err_2$	$Err_3$	$Err_4$	$Err_5$
8	0.073	0.3226	3.6915	17.4482	$\infty$
12	3.5600e-04	0.0118	0.1551	0.8331	2.9538
16	3.5247e-05	0.0015	0.0198	0.1078	0.3961
30	8.7028e-07	2.5279e-05	3.2155e-04	0.0016	0.0061
50	1.8261e-07	1.3971e-06	1.5423e-05	6.6042e-05	2.4275e-04
100	1.2376e-08	4.6835e-08	4.0469e-07	1.0415e-06	3.5597e-06

Nadalje prikazujemo modove za prve četiri svojstvenih frekvencija i različite veličine broja  $n$ .

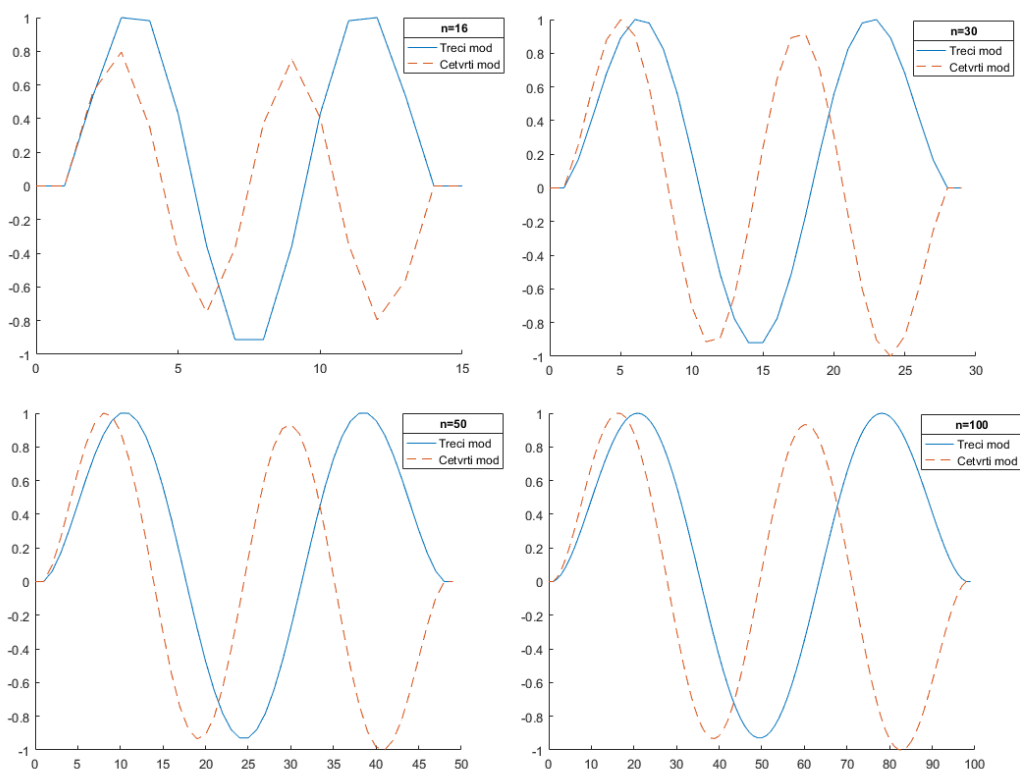
**Prvi i drugi mod**



Slika 3.1: Modovi 1 i 2 za  $n = 8, n = 12, n = 30$  i  $n = 100$

Za modove 3 i 4 moramo krenuti sa većim  $n$ -ovima jer iz tablice vidimo da za npr.  $n = 8$  sustav ne daje rješenja za treću i četvrtu svojstvenu frekvenciju, pa tako neće biti dobri niti svojstveni vektori.

### Treći i četvrti mod



Slika 3.2: Modovi 3 i 4 za  $n = 16, n = 30, n = 50$  i  $n = 100$

## 3.2 Rubni uvjet: Slobodan - Slobodan

Rubni uvjet daje nam  $M_0 = R_0 = M_{n-1} = R_{n-1} = 0$ . Dakle, iz matrice koeficijenata izbacujemo prva četiri stupca.

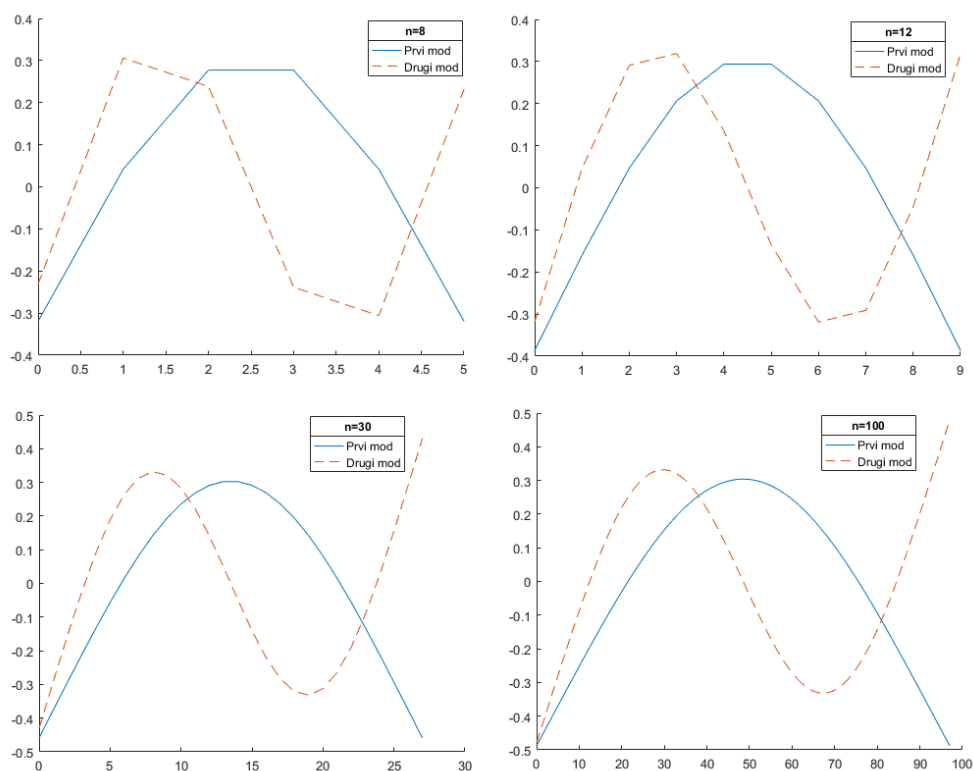
Jednadžbe za pojedine svojstvene frekvencije su jednake kao za rubni uvjet fiksiran - fiksiran.

U tablici prikazujemo razliku između kvadrata egzaktnih i numerički dobivenih prvih pet svojstvenih frekvencija za različiti broj segmenata.

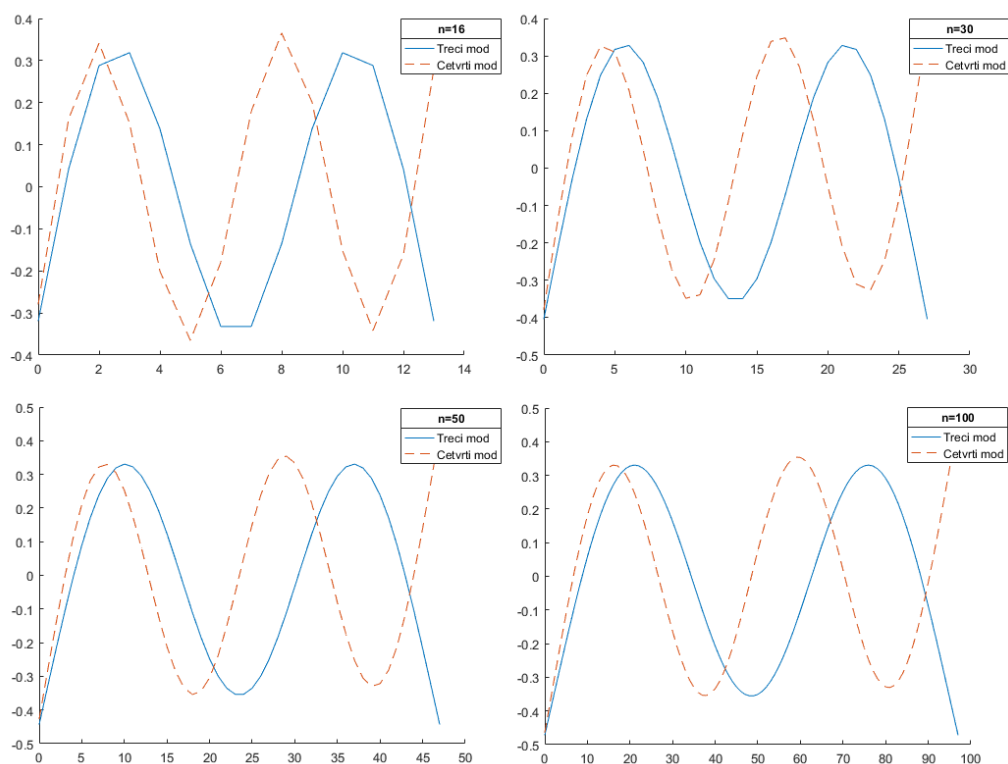
$n$	$Err_1$	$Err_2$	$Err_3$	$Err_4$	$Err_5$
8	0.073	2.9374	8.6822	23.2278	55.4126
12	3.5600e-04	0.3807	1.0952	2.6870	5.7533
16	3.5247e-05	0.0991	0.2835	0.6789	1.3886
30	8.7028e-07	0.0062	0.0177	0.0415	0.0817
50	1.8261e-07	7.1714e-04	0.0020	0.0048	0.0093
100	1.2376e-08	4.1273e-05	1.1751e-04	2.7490e-04	5.3447e-04

Nadalje prikazujemo modove za prve četiri svojstvene frekvencije i različite veličine broja  $n$ . Kako dijelovi grede između čvorova  $y_0$  i  $y_1$  te  $y_{n-2}$  i  $y_{n-1}$  predstavljaju polu-segmente, njih nećemo uključiti u graf. Dakle za dani  $n$  prikazujemo središnjih  $n - 2$  čvora.

**Prvi i drugi mod**



Slika 3.3: Modovi 1 i 2 za  $n = 8, n = 12, n = 30$  i  $n = 100$

**Treći i četvrti mod**Slika 3.4: Modovi 3 i 4 za  $n = 16, n = 30, n = 50$  i  $n = 100$ **3.3 Rubni uvjet: Ovješ - Ovješ**

Rubni uvjet daje nam  $y_0 = y_{n-1} = M_0 = M_{n-1} = 0$ . Dakle, iz matrice koeficijenata izbacujemo treći, četvrti, peti i posljednji stupac.

Koristimo sljedeće rezultate iz teorije elastičnosti  $\rightarrow$  jednačbe za pojedine svojstvene frekvencije grede:

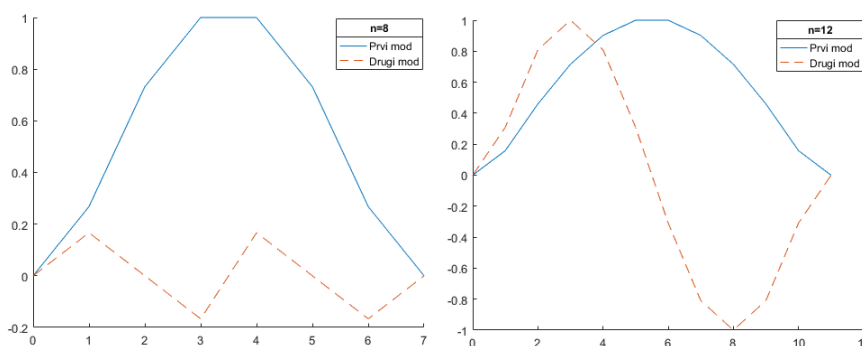
$$\begin{aligned} \text{Mod 1: } \omega^2 &= \frac{(9.87)^2 EI}{M_t L^3} & \text{Mod 2: } \omega^2 &= \frac{(39.5)^2 EI}{M_t L^3} \\ \text{Mod 3: } \omega^2 &= \frac{(88.9)^2 EI}{M_t L^3} & \text{Mod 4: } \omega^2 &= \frac{(157.9)^2 EI}{M_t L^3} \\ \text{Mod 5: } \omega^2 &= \frac{(246.8)^2 EI}{M_t L^3} \end{aligned}$$

Gdje nam je  $M_t = (n - 2)M$  i  $L = (n - 2)l$ . U tablici prikazujemo razliku između kvadrata egzaktnih i numerički dobivenih prvih pet svojstvenih frekvencija za različiti broj segmenata.

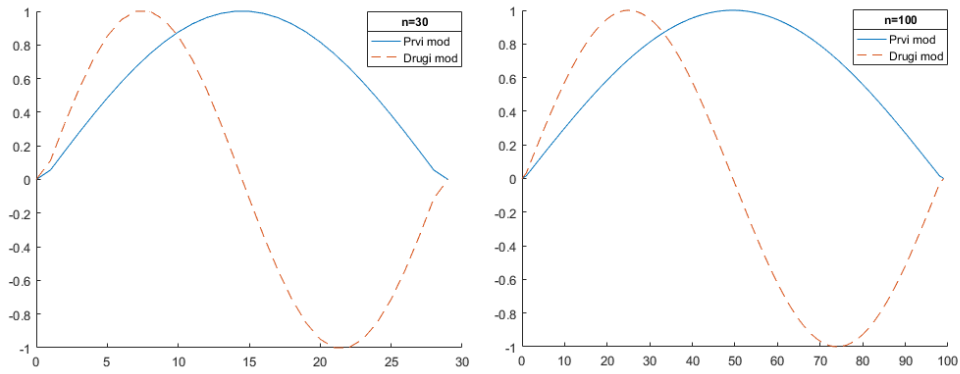
n	$Err_1$	$Err_2$	$Err_3$	$Err_4$	$Err_5$
8	0.0034	0.2039	2.0982	5.3098	30.9986
12	0.1362	0.5237	1.1195	1.5068	0.7631
16	0.0367	0.1498	0.3613	0.6329	0.8324
30	0.0024	0.0101	0.0264	0.0534	0.0913
50	2.7441e-04	0.0012	0.0032	0.0066	0.0117
100	1.5829e-05	6.8495e-05	1.8393e-04	3.8692e-04	6.9989e-04

Nadalje prikazujemo modove za prve četiri svojstvenih frekvencija i različite veličine broja  $n$ .

**Prvi i drugi mod**

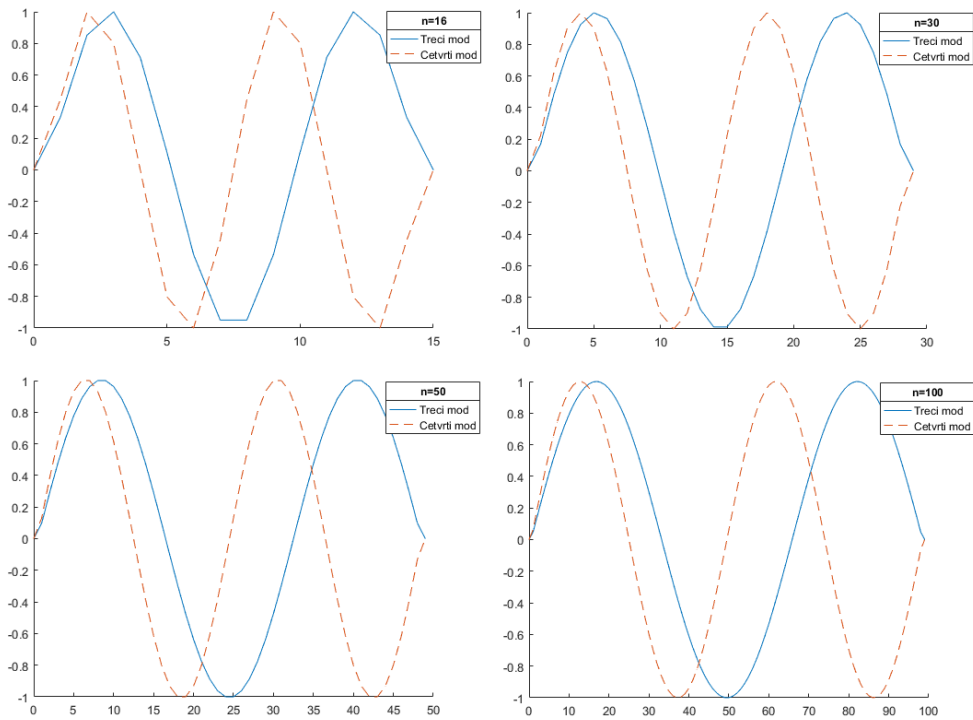


Slika 3.5: Modovi 1 i 2 za  $n = 8, n = 12$



Slika 3.6: Modovi 1 i 2 za  $n = 30$  i  $n = 100$

**Treći i četvrti mod**



Slika 3.7: Modovi 3 i 4 za  $n = 16, n = 30, n = 50$  i  $n = 100$



### **3.4 Zaključak**

Kao zaključak možemo istaknuti da se ovakav matematički model ponaša prilično dobro, tj. numerička aproksimacija je izuzetno dobra već za male diskretizacije ( $n=100$ ). Iako su svi ovi rezultati već poznati, opisani model može se primijeniti na kompletno generalnu, nesimetričnu gredu s različitim duljinama nosača. U tom slučaju, kada nam svojstvene frekvencije nisu egzaktno poznate možemo iskoristiti ovaj model za dobru numeričku aproksimaciju.

# Bibliografija

- [1] I.P.Vatz. *A general mathematical model for beam and plate vibration in bending modes using lumped parameters*, NASA Technical Note. TN D-3387, Washington D. C., 1966.
- [2] I. Aganović i K. Veselić. *Jednadžbe matematičke fizike*. Školska knjiga, Zagreb, 1985.
- [3] G.H. Golub and C.F. van Loan. *Matrix Computations, Third Edition*. M.D.Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1996.
- [4] Singiresu S. Rao. *Vibration of continuous systems*. John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2007.

# Sažetak

Ovaj rad sastoji se od tri dijela. U prvom dijelu opisujemo fizikalni model grede te kako simulirati njenu deformaciju. Nakon toga postavljamo sustav koji opisuje relaciju momenta i izvijanja. Uz pomoć impedancije definiramo svojstvene frekvencije i modove, kao rješenja generaliziranog svojstvenog problema.

U drugom dijelu opisujemo numeričku metodu koja rješava dobiveni generalizirani svojstveni problem.

Na kraju, u trećem dijelu implementiramo opisanu numeričku metodu u programskom paketu MATLAB, te prikazujemo dobivene rezultate za svojstvene frekvencije i modove.

# Summary

This thesis consists of three major parts. In the first part we describe physical model of the beam and the way to simulate its deformation. After that we set up a system of equations that relates moments to deflection. By means of impedance we define natural frequencies and mode shapes as solutions of a generalized eigenvalue problem.

In the second part we describe numerical method that solves generalized eigenvalue problem.

Finally, in the third part we implement described method in programming software MATLAB and present obtained results.

# Životopis

Rođen sam u Varaždinu 16.3.1991. godine. Pohađao sam osnovnu školu u Trnovcu Bartolovečkom, mjestu u kojem živim. Nakon toga, upisao sam I. Gimaziju Varaždin. 2009. godine nakon završetka gimnazije upisao sam studij matematike na Prirodoslovno-Matematičkom fakultetu u Zagrebu. 2013. godine završio sam taj studij nakon čega sam upisao diplomski studij primijenjene matematike.