

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Petar Mlinarić

**APROKSIMACIJA LINEARNIH  
DINAMIČKIH SISTEMA U PROSTORU**

$$\mathcal{H}_2^{p \times m}(\mathbb{C}_+)$$

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof.dr.sc. Zlatko Drmač

Zagreb, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Motivacijski primjer</b>	<b>3</b>
1.1 Optimalno hlađenje čeličnih profila . . . . .	3
<b>2 Teorija linearnih sistema</b>	<b>7</b>
2.1 Osnovni pojmovi . . . . .	7
2.2 Stabilnost . . . . .	9
2.3 Upravlјivost i osmotrivost . . . . .	9
2.4 Lјapunovljeve јednadžbe i gramijani . . . . .	13
2.5 Prijenosna funkcija . . . . .	16
<b>3 Teorija Hardyjevih prostora</b>	<b>23</b>
3.1 Lebesgueovi prostori i Fourierova pretvorba . . . . .	23
3.2 Hardyjevi prostori . . . . .	27
3.3 Hardyjevi prostori i Laplaceova pretvorba . . . . .	29
<b>4 Primjene gramijana</b>	<b>33</b>
4.1 Računanje $\mathcal{H}_2$ -norme . . . . .	33
4.2 Balansirano rezanje . . . . .	35
<b>5 Interpolacijska redukcija modela</b>	<b>41</b>
5.1 Redukcija projekcijom . . . . .	41
5.2 Tangencijalna Hermiteova interpolacija . . . . .	42
5.3 Pol-reziduum forma i skalarni produkt u prostoru $\mathcal{H}_2$ . . . . .	46
5.4 Optimalna $\mathcal{H}_2$ aproksimacija . . . . .	49
5.5 Implementacija IRKA-e . . . . .	53
5.6 Neovisnost o realizaciji . . . . .	57

<b>6 Numerički primjeri</b>	<b>65</b>
6.1 Problemi . . . . .	65
6.2 Rezultati . . . . .	66
6.3 Usporedba IRKA-e i balansiranog rezanja . . . . .	68
<b>Bibliografija</b>	<b>73</b>

# Uvod

Dinamički sistemi su svuda oko nas, od raznih prirodnih do industrijskih procesa. Za te procese se razvijaju modeli, koji se onda koriste za simuliranje ponašanja procesa i/ili za upravljanje nad njima. U svrhu povećanja preciznosti, javljaju se sve kompliciraniji modeli s kojima nije moguće efektivno računati. Stoga je potrebno tražiti reducirane modele, modele koji su jednostavniji, a dovoljno bliski kompliciranim modelima.

Modeli mogu biti sustavi algebarskih, običnih diferencijalnih, parcijalnih diferencijalnih, diferencijalnih, linearnih, nelinearnih jednadžbi i njihovih kombinacija. Za svaki od tih tipova modela je moguće promatrati problem redukcije modela. Ovdje ćemo se baviti linearnim sistemima, i nećemo promatrati diferencijske, odnosno diskretno-vremenske jednadžbe, već samo neprekidno-vremenske jednadžbe. Većim dijelom ćemo se baviti konačnodimenzionalnim sistemima, tj. onima koji se mogu opisati s konačno mnogo običnih diferencijalnih i algebarskih jednadžbi.

Konačnodimenzionalni, neprekidno-vremenski, linearni, vremensko-invarijantni sistemi, kojima ćemo se primarno baviti, se mogu prikazati s

$$\begin{aligned}Ex'(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\y(t) &= Cx(t) + Du(t),\end{aligned}$$

gdje je  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  stanje,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  ulaz i  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  izlaz sistema, a  $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  i  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$  su dane konstantne matrice. Dodatno ćemo pretpostavljati da je  $E$  regularna matrica,  $E^{-1}A$  stabilna matrica (sve svojstvene vrijednosti od  $E^{-1}A$  imaju negativne realne dijelove) i  $D = 0$ .

Problem redukcije uvedenog modela je pronaći reducirani model

$$\begin{aligned}E_r x_r'(t) &= A_r x_r(t) + B_r u(t), \\y_r(t) &= C_r x_r(t),\end{aligned}$$

gdje je  $x_r(t) \in \mathbb{R}^r$  za  $r \ll n$  tako da  $y_r$  dovoljno dobro aproksimira  $y$ , u nekom smislu, za iste ulaze  $u$ .

Početni sustav, korištenjem Laplaceove pretvorbe i uz početni uvjet  $x(0) = 0$ , se može zapisati kao  $\widehat{y}(s) = H(s)\widehat{u}(s)$ , gdje je  $H(s) = C(sE - A)^{-1}B$ . Funkciju  $H$  zovemo prijenosna funkcija i ona daje prikaz sistema u frekvencijskoj domeni. Može se pokazati da je

$H$  matrična funkcija reda  $p \times m$  čija je svaka komponenta racionalna funkcija s polovima u lijevoj otvorenoj poluravnini kompleksne ravnine. Također, uz gornje pretpostavke se pokazuje da je funkcija  $H$  element Hardyjevog prostora  $\mathcal{H}_2^{p \times m}(\mathbb{C}_+)$ , koji je Hilbertov prostor. Posebno, na  $\mathcal{H}_2^{p \times m}(\mathbb{C}_+)$  je definirana norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_2}$ .

Ako je  $H_r(s) = C_r(sE_r - A_r)^{-1}B_r$  prijenosna funkcija za reducirani model, slijedi da je  $\widehat{y}(s) - \widehat{y}_r(s) = (H(s) - H_r(s))\widehat{u}(s)$ . Pokazuje se da iz toga slijedi

$$\|y - y_r\|_{\infty} \leq \|H - H_r\|_{\mathcal{H}_2} \|u\|_{L^2}, \text{ za sve } u \in L^2([0, +\infty)).$$

Stoga minimizacijom greške u prijenosnoj funkciji  $\|H - H_r\|_{\mathcal{H}_2}$  minimiziramo gornju ogradu za grešku izlaza  $\|y - y_r\|_{\infty}$ , za sve ulaze  $u \in L^2([0, +\infty))$ . Ovime smo postavili problem  $\mathcal{H}_2$ -optimalne redukcije modela, što je tema ovog rada.

U Poglavlju 1 započinjemo s motivacijskim primjerom iz industrije. Kao uvod u problematiku minimizacije  $\mathcal{H}_2$ -greške, u Poglavlju 2 dajemo potrebnu teoriju linearnih sistema, u Poglavlju 3 teoriju Hardyjevih prostora te u Poglavlju 4 algoritam za računanje  $\mathcal{H}_2$ -greške i popularni algoritam za redukciju modela zvani balansirano rezanje. Iterative Rational Krylov Algorithm (IRKA), algoritam za nalaženje (lokalnog) minimizatora  $\mathcal{H}_2$ -greške, opisujemo u Poglavlju 5. Transfer Function IRKA (TF-IRKA), algoritam baziran na Loewnerovim matricama koji koristi samo prijenosnu funkciju, je također opisan u Poglavlju 5. Konačno, u Poglavlju 6 dajemo rezultate korištenja IRKA-e i balansirano rezanja na benchmark primjerima iz NICONET i Oberwolfach baze [7, 12].

# Poglavlje 1

## Motivacijski primjer

### 1.1 Optimalno hlađenje čeličnih profila

Prilikom proizvodnje čeličnih tračnica (slika 1.1), sirovina se kreće kroz različite stadije. Prije ulaska u sljedeći stadij, potrebno je postići određenu temperaturu sirovine. U slučaju da je materijal potrebno ohladiti prije ulaska u novi stadij, želja je to učiniti u što kraćem vremenu.

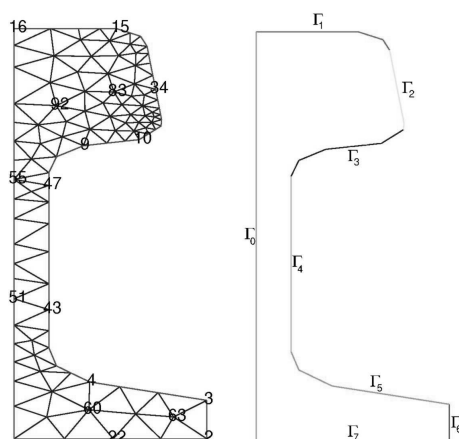


Slika 1.1: Proizvodnja čeličnih tračnica [1]

Ipak, pokazuje se da se prebrzim hlađenjem smanjuje kvaliteta konačnog produkta. Naime, hlađenje se vrši prskanjem rashladne tekućine po površini sirovine, čime se povećava gradijent temperature unutar sirovine. Preveliki gradijent temperature je uzrok degradacije materijala zbog varirajuće volumne ekspanzije unutar metala. Stoga je uz smanjivanje temperature potrebno očuvati dovoljno niski gradijent temperature kako bi konačni pro-

dukt zadovoljio zadane standarde kvalitete. Ovo je problem upravljanja, i njime se nećemo baviti, već ćemo samo proučavati model i njegovu kompleksnost te time ilustrirati potrebu za traganjem za jednostavnijim modelima.

Početni model je jednačba provođenja topline za trodimenzionalnu tračnicu. Pretpostavkom da je tračnica beskonačne duljine, problem postaje dvodimenzionalan promatranjem samo presjeka tračnice. Korištenjem simetrije presjeka, problem se može rješavati samo na polovici domene, kako je prikazano na Slici 1.2.



Slika 1.2: Polovica presjeka tračnice [1]: lijeva slika prikazuje triangulaciju domene, a desna podjelu ruba domene na osam krivulja

Kao model se dobiva jednačba provođenja topline uz zadani početni uvjet i rubne uvjete koji predstavljaju kontrolni ulazi [6]:

$$\begin{aligned} \partial_t y(t, x) - \alpha \Delta y(t, x) &= 0 & \text{za } (t, x) \in \langle 0, +\infty \rangle \times \Omega \\ y(0, x) &= y_0(x) & \text{za } x \in \Omega \\ \lambda \nabla y(t, x) \cdot n &= g(t, x) & \text{za } (t, x) \in \langle 0, +\infty \rangle \times \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.1)$$

Metodom konačnih elemenata (koristeći triangulaciju na Slici 1.2, uz potencijalna dodatna profinjenja mreže), model (1.1) se aproksimira linearnim dinamičkim sistemom:

$$\begin{aligned} E x'(t) &= A x(t) + B u(t), \\ y(t) &= C x(t), \end{aligned} \quad (1.2)$$

gdje su  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  stanje,  $u(t) \in \mathbb{R}^7$  ulaz i  $y(t) \in \mathbb{R}^6$  izlaz sistema te  $A, E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times 7}$  i  $C \in \mathbb{R}^{6 \times n}$  konstantne matrice. Pritom su komponente od  $u$  jakosti odgovarajućih prskalica,



a komponente od  $y$  temperature i parcijalne derivacije temperature u nekim točkama unutar domene.

Komponente od  $x$  su vrijednosti temperatura na domeni (točna mjesta ovise o triangulaciji i vrsti konačnih elemenata), ali ovdje nam je manje važan  $x$  sam za sebe, već više kao put između ulaza  $u$  i izlaza  $y$ . Ovisno o finoći triangulacije, vektor  $x$  je dimenzije u desecima ili stotinama tisuća [1]. Ovdje uočavamo da, radi povećanja preciznosti, dolazi se do vrlo velikih sistema. Zbog toga se javlja potreba za redukcijom modela, tj. nalaženjem jednostavnijeg modela koji dobro aproksimira početni. Kako nas ovdje samo zanima preslikavanje  $u \mapsto y$ , nije nam bitno što su stanja  $x$ , pa možemo pokušati smanjiti njihov broj.

U današnje doba sve bržih i boljih računala razumno je postaviti pitanje zašto se uopće baviti problemom redukcije modela. Doista, relativno jednostavan način za ubrzanjem izvršavanja programa je nabava bržeg računala. Ipak, taj pristup ima značajnih mana. Kao prvo, pojavljuju se sve složeniji modeli i brzine procesora se približavaju svojim fizikalnim granicama, tako da je vrlo upitno hoće li postojati dovoljno brzo računalo za određeni problem. Druga mana je što će i brzo računalo morati izvršiti veliki broj operacija te će zbog akumulacije grešaka zaokruživanja krajni rezultat biti potencijalno beskoristan. Redukcija modela omogućava bržu simulaciju modela i rješavanje problema upravljanja, a uz veliku vjernost početnom modelu.

Osnovi pristup redukciji modela oblika (1.2) je redukcija projekcijom, gdje se za zadani red  $r < n$  reduciranog modela nalaze matrice  $V_r, W_r \in \mathbb{R}^{n \times r}$  i definira se reducirani model s

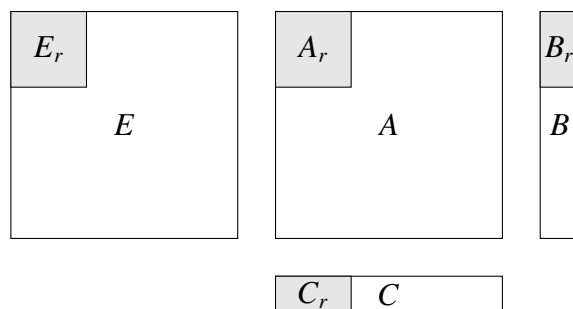
$$\begin{aligned} E_r x_r'(t) &= A_r x_r(t) + B_r u(t), \\ y_r(t) &= C_r x_r(t), \end{aligned} \quad (1.3)$$

i

$$E_r = W_r^T E V_r \in \mathbb{R}^{r \times r}, \quad A_r = W_r^T A V_r \in \mathbb{R}^{r \times r}, \quad B_r = W_r^T B \in \mathbb{R}^{r \times m}, \quad C_r = C V_r \in \mathbb{R}^{p \times r}.$$

Ovdje je glavna ideja da se rješenje  $x(t)$  sistema (1.2) može dobro aproksimirati s  $V_r x_r(t)$ , odnosno vrijednostima iz  $r$ -dimenzionalnog potprostora generiranog stupcima od  $V_r$ . Postupak redukcije je grafički prikazan na Slici 1.3. Dakle, redukcija modela je samo uzimanje prvih  $r$  stanja i jednadžbi (nakon promjene baze).

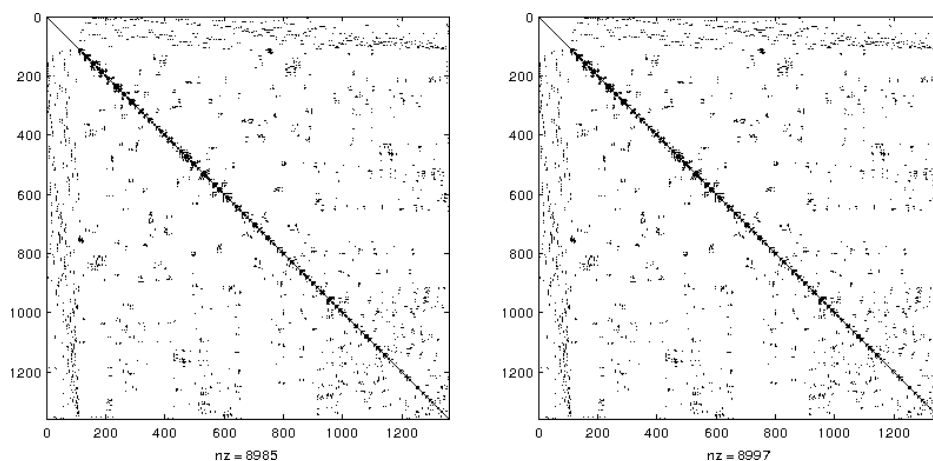
Cilj redukcije modela je da su izlazi  $y$  sistema (1.2) i  $y_r$  sistema (1.3) što bliži, u nekom smislu, za iste ulaze  $u$ . To znači da preslikavanje  $u \mapsto y_r$  treba aproksimirati preslikavanje  $u \mapsto y$ . Vrlo korisnim se pokazuje pojam prijenosne funkcije sistema. Laplaceovom pretvorbom iz (1.2), uz početni uvjet  $x(0) = 0$  i eliminiranjem  $\widehat{x}(s)$ , se dobiva  $\widehat{y}(s) = H(s)\widehat{u}(s)$ , gdje je  $H(s) = C(sE - A)^{-1}B$  i zove se prijenosna funkcija sistema (1.2). Dakle, funkcija  $H$  reprezentira preslikavanje  $u \mapsto y$  u  $s$ -domeni. Analogno se dobije  $\widehat{y}_r(s) = H_r(s)\widehat{u}(s)$ , gdje je  $H_r(s) = C_r(sE_r - A_r)^{-1}B_r$ . Slijedi da je  $\widehat{y}(s) - \widehat{y}_r(s) = (H(s) - H_r(s))\widehat{u}(s)$ , iz čega naslućujemo da ako je  $H_r$  „blizu”  $H$ , onda je i  $y_r$  „blizu”  $y$ .



Slika 1.3: Vizualizacija redukcije modela

Vidi se da su  $H$  i  $H_r$  matrične racionalne funkcije reda  $p \times m$  i pokazuje se da su one, uz neke uvjete, elementi Hardyjevog prostora  $\mathcal{H}_2^{p \times m}(\mathbb{C}_+)$ . To je Hilbertov prostor, pa je posebno na tom prostoru definirana norma. Tako onda možemo mjeriti udaljenost njihovu udaljenost. Time dolazimo da problema  $\mathcal{H}_2^{p \times m}(\mathbb{C}_+)$ -optimalne redukcije modela, čime ćemo se baviti u ovom radu. Može se pokazati da je  $\|y - y_r\|_{L^\infty} \leq \|H - H_r\|_{\mathcal{H}_2} \|u\|_{L^2}$ , što pokazuje da minimizacijom izraza  $\|H - H_r\|_{\mathcal{H}_2}$  minimiziramo najveću moguću vrijednost od  $\|y - y_r\|_{L^\infty}$  za fiksni ulaz  $u$ .

Na kraju želimo pronaći numeričku metodu za (lokalno)  $\mathcal{H}_2^{p \times m}(\mathbb{C}_+)$ -optimalnu redukciju modela, a da bude upotrebljiva i za velike sisteme. Na Slici 1.4 prikazani su profili matrica  $A$  i  $E$  za  $n = 1357$ . Uočavamo da su obje matrice rijetko popunjene. Ovo je često istina za velike sisteme, i to svojstvo je bitno za iskoristiti u metodi za redukciju. Postoje metode temeljene na rješavanju Ljapunovljevih jednadžbi i/ili na SVD dekompoziciji, koje su stoga vremenski kubne složenosti, neovisno o popunjenosti matrice.

Slika 1.4: Profili matrica  $A$  i  $E$

# Poglavlje 2

## Teorija linearnih sistema

Ovdje izlažemo osnove teorije linearnih sistema potrebnih u kasnijim razmatranjima. Uvod u teoriju linearnih sistema se može pronaći u mnogim knjigama s temom iz teorije kontrole, npr. [2], [8] i [9].

### 2.1 Osnovni pojmovi

Skup jednadžbi

$$Ex'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (2.2)$$

zovemo *neprekidno vremenski, linearni, vremensko invarijantni dinamički sistem* i kraće ga zapisujemo kao petorku  $(E, A, B, C, D)$ . Neprekidno vremenski znači da sve varijable  $(x, u$  i  $y)$  kao domenu imaju skup  $\mathbb{R}$  ili neki podinterval od  $\mathbb{R}$ . Gornji dinamički sistem je linearan i vremenski invarijantan jer su  $E, A, B, C$  i  $D$  konstantne matrice. U nastavku rada bavit ćemo se samo ovim tipom dinamičkog sistema, pa više nećemo spominjati njegove atribute. Napominjemo samo da se promatraju i diskretno vremenski sistemi te da postoji puno analogija u ta dva područja.

Jednadžbu (2.1) zovemo *jednadžba stanja*, a (2.2) *jednadžba izlaza*. Varijable  $x, u$  i  $y$  redom zovemo *stanje, ulaz* i *izlaz* sistema. Nadalje ćemo pretpostavljati da je  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  i  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ , gdje su  $n, m, p \in \mathbb{N}$  takvi da je  $m \leq n$  i  $p \leq n$ . Vidimo da je  $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  i  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ . Ovdje smo implicitno pretpostavili da je sistem realan, i to ćemo nastaviti činiti, iako će teorija vrijediti i za kompleksne sisteme (uz možda prikladne modifikacije).

Ako je  $m = p = 1$ , govorimo o SISO sistemu (single-input single-output), a ako je  $m > 1$  i  $p > 1$ , govorimo o MIMO sistemu (multiple-input multiple-output). U ostalim

situacijama koriste se termini SIMO i MISO. U nastavku ćemo većinom promatrati općeniti slučaj i ponekad isticati posebne slučajeve, npr. SISO sisteme jer se za njih neke tvrdnje pojednostavljaju.

Matrica  $D$  opisuje direktnu vezu ulaza i izlaza. Od sada ćemo uvijek pretpostavljati da je  $D = 0$  te ćemo umjesto  $(E, A, B, C, 0)$  pisati  $(E, A, B, C)$ . Ova pretpostavka je istinita u većini primjera iz primjene. No, pravi razlog za ovu pretpostavku nije jasan na ovom mjestu i povezan je s ulaganjem sistema u prostor  $\mathcal{H}_2^{p \times m}(\mathbb{C}_+)$ . Može se pokazati da sistemi  $(E, A, B, C, D)$ , za  $D \neq 0$ , nisu elementi tog prostora. Ipak, za problem kojim se bavi ovaj rad, općenitiji problem za sistem  $(E, A, B, C, D)$  se može svesti na problem za sistem  $(E, A, B, C)$ , čime je dodatno opravdana pretpostavka  $D = 0$ .

Ograničit ćemo se i na slučaj kad je  $E$  regularna matrica. Time se jednadžba stanja (2.1) pojednostavljuje na ekvivalentnu jednadžbu  $x'(t) = E^{-1}Ax(t) + E^{-1}Bu(t)$ . Čitatelj se sada može zapitati zašto jednostavno ne pretpostavljamo da je  $E = I$ . Ipak, istina je da se u literaturi redovito promatraju takvi sistemi.

Razlog je numeričke prirode. U nekim primjerima sistem je zadan s  $E \neq I$  i tada ne želimo računati  $E^{-1}A$  i  $E^{-1}B$  jer su te operacije osjetljive na greške zaokruživanja i možemo izgubiti korisnu strukturu matrica (npr. ako je  $E$  rijetko popunjena matrica, za  $E^{-1}$  ne mora vrijediti isto svojstvo). Kako se u literaturi uzima da je  $E = I$ , iskazat ćemo potrebne teoreme za te sisteme i generalizirati ih primjenom na sistem  $(I, E^{-1}A, E^{-1}B, C)$ .

Izraz za rješenje sistema  $(I, E^{-1}A, E^{-1}B, C)$  je poznat. Ako zadamo početni uvjet  $x(0) = x_0$ , onda je

$$y(t) = Ce^{E^{-1}At}x_0 + C \int_0^t e^{E^{-1}A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau.$$

Sistem ćemo često shvaćati kao preslikavanje  $u \mapsto y$  (npr. dano gornjim izrazom) i dinamički sistem  $(E, A, B, C, D)$  ćemo zvati *realizacijom*. Postavlja se pitanje postoji li više realizacija istog sistema, i odgovor je pozitivan. Zapravo, postoji puno takvih realizacija. Neka su  $S$  i  $T$  proizvoljne regularne matrice. Definiramo novo stanje  $\tilde{x}$  s  $\tilde{x}(t) = T^{-1}x(t)$ . Tada vrijedi

$$SET\tilde{x}'(t) = SETT^{-1}x'(t) = SEx'(t) = S(Ax(t) + Bu(t)) = SAT\tilde{x}(t) + SBu(t)$$

i

$$y(t) = Cx(t) = CT\tilde{x}(t).$$

Time smo dobili sistem  $(SET, SAT, SB, CT)$  i kažemo da je on *ekvivalentan* sistemu  $(E, A, B, C)$ . Kako nam je preslikavanje  $u \mapsto y$  bitnije od bilo koje zadane realizacije, za svako novo svojstvo dinamičkih sistema ćemo provjeriti prenosi li se na ekvivalentne sisteme.

## 2.2 Stabilnost

Za linearni autonomni sistem  $x'(t) = Ax(t)$  kažemo da je *asimptotički stabilan* ako za proizvoljan početni uvjet  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  vrijedi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\|_2 = 0,$$

gdje je  $\|\cdot\|_2$  euklidska norma na  $\mathbb{R}^n$ . Pokazuje se da je asimptotička stabilnost ekvivalentna tvrdnji da su svi realni dijelovi svojstvenih vrijednosti od  $A$  strogo manje od nule, tj.  $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_-$ , gdje je  $\mathbb{C}_-$  otvorena lijeva poluravnina. U tom slučaju matricu  $A$  zovemo *stabilnom* i sistem  $(E, A, B, C)$  zovemo stabilnim ako je  $E^{-1}A$  stabilna matrica.

Iz

$$(SET)^{-1}SAT = T^{-1}E^{-1}S^{-1}SAT = T^{-1}E^{-1}AT$$

vidimo da svojstvo stabilnosti ne ovisi o reprezentaciji sistema. Dodatno, vidimo da je  $\sigma(E^{-1}A)$  ne ovisi o reprezentaciji.

Nadalje, ako ne kažemo suprotno, podrazumijevat ćemo da je sistem koji promatramo stabilan.

## 2.3 Upravlјivost i osmotrivost

Upravlјivost i osmotrivost su dva potencijalna svojstva sistema koja se mogu jednostavno objasniti, a imaju i jednostavnu algebarsku karakterizaciju. Kasnije ćemo vidjeti da oni vode do numeričke metode za mjerenje „veličine” sistema i „udaljenosti” dva sistema, posebno za mjeru grešku pri aproksimaciji sistema.

Promotrimo sistem

$$\begin{aligned} Ex'(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned}$$

uz neki početni uvjet u trenutku  $t = 0$ . Odabirom različitih ulaza, općenito postizemo različite vrijednosti stanja u nekom trenutku  $t > 0$ . Jednostavnim riječima, reći ćemo da je sistem upravljiv ako pravilnim odabirom ulaza, iz bilo kojeg stanja možemo doći bilo koje stanje u bilo kojem trenutku.

**Definicija 2.1.** Kažemo da je sistem  $(E, A, B, C)$  upravljiv ako za sva stanja  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$  i svaki trenutak  $t_1 > 0$  postoji ulaz  $u: [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tako da, uz početni uvjet  $x(0) = x_0$  i ulaz  $u$ , vrijedi  $x(t_1) = x_1$ .

Važno je uočiti da upravljivost sistema ne ovisi o matrici  $C$  jer samo jednadžba stanja utječe na vrijednost stanja u nekom trenutku.

Iskazujemo teorem o karakterizaciji upravljivosti sistema za sistem  $(I, A, B, C)$ .

**Teorem 2.2.** *Neka su  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  i  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  proizvoljni. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) *Sistem  $(I, A, B, C)$  je upravljiv.*

(ii) *Matrica reda  $n \times nm$*

$$C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

*je punog ranga  $n$ .*

(iii) *Kvadratna matrica reda  $n$*

$$P_t = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$$

*je regularna za svaki  $t > 0$ .*

*Dokaz.* Radi se o dijelu Teorema 6.2.1 iz [8]. □

Matricu  $C$  iz Teorema 2.2 zovemo *matrica upravljivosti*, a matricu  $P_t$  *gramijan upravljivosti u trenutku  $t$* . Može se pokazati da je  $P_t$  uvijek simetrična, pozitivno semidefinitna matrica te da je pozitivno definitna ako i samo ako je sistem  $(I, A, B, C)$  upravljiv.

Teorem 2.2 lako poopćujemo na slučaj sistema  $(E, A, B, C)$ .

**Korolar 2.3.** *Neka su  $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  i  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  proizvoljni, gdje je  $E$  regularna. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) *Sistem  $(E, A, B, C)$  je upravljiv.*

(ii) *Matrica reda  $n \times nm$*

$$C = \begin{bmatrix} E^{-1}B & E^{-1}AE^{-1}B & (E^{-1}A)^2E^{-1}B & \dots & (E^{-1}A)^{n-1}E^{-1}B \end{bmatrix}$$

*je punog ranga  $n$ .*

(iii) *Kvadratna matrica reda  $n$*

$$P_t = \int_0^t e^{E^{-1}A\tau} E^{-1} B B^T E^{-T} e^{A^T E^{-T} \tau} d\tau$$

*je regularna za svaki  $t > 0$ .*

*Dokaz.* Kako su jednadžbe  $Ex'(t) = Ax(t) + Bu(t)$  i  $x'(t) = E^{-1}Ax(t) + E^{-1}Bu(t)$  ekvivalentne, slijedi da je sistem  $(E, A, B, C)$  upravljiv ako i samo ako je sistem  $(I, E^{-1}A, E^{-1}B, C)$  upravljiv. Iz Teorema 2.2 slijedi tvrdnja Korolara.  $\square$

Provjerimo kako se matrica i gramijan upravljivosti mijenjaju za ekvivalentne sisteme. Neka su  $(E, A, B, C)$  i  $(\tilde{E}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$  sistemi takvi da je  $\tilde{E} = SET$ ,  $\tilde{A} = SAT$ ,  $\tilde{B} = SB$  i  $\tilde{C} = CT$  za neke regularne matrice  $S$  i  $T$ . Tada je

$$\begin{aligned}\tilde{C} &= \left[ \tilde{E}^{-1}\tilde{B} \quad \tilde{E}^{-1}\tilde{A}\tilde{E}^{-1}\tilde{B} \quad \dots \quad (\tilde{E}^{-1}\tilde{A})^{n-1}\tilde{E}^{-1}\tilde{B} \right] \\ &= \left[ T^{-1}E^{-1}B \quad T^{-1}E^{-1}AE^{-1}B \quad \dots \quad (T^{-1}E^{-1}AT)^{n-1}T^{-1}E^{-1}B \right] \\ &= \left[ T^{-1}E^{-1}B \quad T^{-1}E^{-1}AE^{-1}B \quad \dots \quad T^{-1}(E^{-1}A)^{n-1}E^{-1}B \right] \\ &= T^{-1} \left[ E^{-1}B \quad E^{-1}AE^{-1}B \quad \dots \quad (E^{-1}A)^{n-1}E^{-1}B \right] \\ &= T^{-1}C\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\tilde{P}_t &= \int_0^t e^{\tilde{E}^{-1}\tilde{A}\tau} \tilde{E}^{-1} \tilde{B} \tilde{B}^T \tilde{E}^{-T} e^{\tilde{A}^T \tilde{E}^{-T} \tau} d\tau \\ &= \int_0^t e^{T^{-1}E^{-1}AT\tau} T^{-1} E^{-1} B B^T E^{-T} T^{-T} e^{T^T A^T E^{-T} T^{-T} \tau} d\tau \\ &= T^{-1} \left( \int_0^t e^{E^{-1}A\tau} E^{-1} B B^T E^{-T} e^{A^T E^{-T} \tau} d\tau \right) T^{-T} \\ &= T^{-1} P_t T^{-T}.\end{aligned}$$

Vidimo da je  $C$  punog ranga ako i samo ako je  $\tilde{C}$  punog rang te da je  $P_t$  regularna ako i samo ako je  $\tilde{P}_t$  regularna.

Razmotrimo sada osmotrivost sistema. Neka je zadan sistem  $(E, A, B, C)$ . Zanima nas je li moguće na temelju mjerenja izlaza odrediti početno stanje sistema, pretpostavljajući da nema ulaza.

**Definicija 2.4.** *Kažemo da je sistem  $(E, A, B, C)$  osmotriv ako za svaki  $t > 0$  i zadane izlazne vrijednosti  $y(\tau)$  za  $\tau \in [0, t]$ , početna vrijednost stanja  $x_0$ , koja uz ulaz  $u = 0$  kao izlaz daje zadani  $y$ , je jedinstvena.*

Iskazujemo teorem analogan Teoremu 2.2.

**Teorem 2.5.** Neka su  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  i  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  proizvoljni. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(i) Sistem  $(I, A, B, C)$  je osmotriv.

(ii) Matrica reda  $np \times n$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

je punog ranga  $n$ .

(iii) Kvadratna matrica reda  $n$

$$Q_t = \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau$$

je regularna za svaki  $t > 0$ .

*Dokaz.* Vidi Teorem 6.3.1 u [8]. □

Slično kao za upravljivost, matricu  $O$  iz Teorema 2.5 zovemo *matrica osmotrivosti* i matricu  $Q_t$  *gramijan osmotrivosti u trenutku  $t$* . Iskazujemo generalizaciju prethodnog rezultata.

**Korolar 2.6.** Neka su  $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  i  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  proizvoljni, gdje je  $E$  regularna. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(i) Sistem  $(E, A, B, C)$  je osmotriv.

(ii) Matrica reda  $np \times n$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CE^{-1}A \\ C(E^{-1}A)^2 \\ \vdots \\ C(E^{-1}A)^{n-1} \end{bmatrix}$$

je punog ranga  $n$ .



(iii) *Kvadratna matrica reda  $n$*

$$Q_t = \int_0^t e^{A^T E^{-T} \tau} C^T C e^{E^{-1} A \tau} d\tau$$

je regularna za svaki  $t > 0$ .

Analogno kao prije možemo pokazati da je  $\tilde{O} = OT$  i  $\tilde{Q}_t = T^T Q_t T$ .

U ostatku rada ćemo podrazumijevati da su sistemi koji proučavamo upravljivi i osmotrivi ako ne kažemo suprotno. Kod numeričkih primjera nećemo provjeravati ta svojstva jer je rang matrice osjetljiv na male perturbacije i matrice punog ranga čine gust podskup skupa matrica. Zato je u primjeni važnije znati koliko je sistem udaljen od nekog koji nije npr. upravljiv.

## 2.4 Ljapunovljeve jednadžbe i gramijani

U ovoj sekciji uvodimo Ljapunovljeve jednadžbe i demonstriramo njihovu važnost u teoriji linearnih sistema, kako teorijsku, tako i numeričku.

Za matrice  $A, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrične jednadžbe u  $X$

$$AX + XA^T + Q = 0 \text{ i } A^T X + XA + Q = 0$$

zovemo *Ljapunovljevim jednadžbama*. Dodatno, za tri matrice  $E, A, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,

$$AXE^T + EXA^T + Q = 0 \text{ i } A^T XE + E^T XA + Q = 0$$

zovemo *generaliziranim Ljapunovljevim jednadžbama*. Primijetimo da su to sve linearni sustavi jednadžbi reda  $n^2$ . Primjerice, korištenjem operacije  $\text{vec}: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ , iz  $AX + XA^T + Q = 0$  dobivamo  $(I \otimes A + A \otimes I) \text{vec}(X) = -\text{vec}(Q)$ , gdje je  $\otimes$  Kroneckerov produkt. Time dobivamo nužan i dovoljan uvjet za egzistenciju rješenja Ljapunovljeve jednadžbe.

**Teorem 2.7.** *Ljapunovljeva jednadžba  $AX + XA^T + Q = 0$  ima jedinstveno rješenje za svaki  $Q$  ako i samo ako je  $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$ , za  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , gdje su  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  svojstvene vrijednosti od  $A$ .*

*Dokaz.* Prije iskaza Teorema smo pokazali da su  $AX + XA^T + Q = 0$  i  $(I \otimes A + A \otimes I) \text{vec}(X) = -\text{vec}(Q)$  ekvivalentne jednadžbe. Stoga  $AX + XA^T + Q = 0$  ima jedinstveno rješenje za svaki  $Q$  ako i samo ako je  $I \otimes A + A \otimes I$  regularna matrica.

Može se pokazati da su svojstvene vrijednosti od  $I \otimes A + A \otimes I$  točno  $\lambda_i + \lambda_j$ , za  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Kako je matrica regularna ako i samo ako su joj sve svojstvene vrijednosti različite od nule, dobivamo tvrdnju Teorema.  $\square$

Uočimo da je uvjet u Teoremu 2.7 ispunjen kada je  $A$  stabilna matrica. Sljedeći teorem nam daje izraz za rješenje Ljapunovljeve jednadžbe u tom slučaju.

**Teorem 2.8.** *Neka su  $A$  i  $Q$  kvadratne matrice, te neka je  $A$  stabilna. Tada je*

$$X = \int_0^{\infty} e^{A\tau} Q e^{A^T \tau} d\tau$$

*jedinstveno rješenje Ljapunovljeve jednadžbe  $AX + XA^T + Q = 0$ .*

*Dokaz.* Dobiva se zamjenom  $A$  i  $A^T$  u Teoremu 4.1 u [9]. □

Ovdje uočavamo vezu Ljapunovljevih jednadžbi i gramijana. Matricu

$$P = \int_0^{\infty} e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau = \lim_{t \rightarrow +\infty} P_t$$

zovemo *gramijan upravljivosti* za sistem  $(I, A, B, C)$ , a matricu

$$Q = \int_0^{\infty} e^{A^T \tau} C^T C e^{A\tau} d\tau = \lim_{t \rightarrow +\infty} Q_t$$

*gramijan osmotrivosti*. Teorem 2.8 pokazuje da je

$$AP + PA^T + BB^T = 0 \text{ i } A^T Q + QA + C^T C = 0.$$

Sljedeći teoremi pokazuju da su  $P$  i  $Q$  pozitivno definitne ako je sistem  $(I, A, B, C)$  stabilan, upravljiv i osmotriv.

**Teorem 2.9.** *Neka je  $(I, A, B, C)$  sistem i neka vrijedi  $AX + XA^T + BB^T = 0$ . Tada svake dvije od sljedećih tvrdnji povlače treću:*

- (i)  *$A$  je stabilna matrica.*
- (ii) *Sistem  $(I, A, B, C)$  je upravljiv.*
- (iii)  *$X$  je pozitivno definitna matrica.*

*Dokaz.* Teorem 7.2.9 u [8]. □

**Teorem 2.10.** *Neka je  $(I, A, B, C)$  sistem i neka vrijedi  $A^T X + XA + C^T C = 0$ . Tada svake dvije od sljedećih tvrdnji povlače treću:*

- (i)  $A$  je stabilna matrica.
- (ii) Sistem  $(I, A, B, C)$  je osmotriv.
- (iii)  $X$  je pozitivno definitna matrica.

*Dokaz.* Teorem 7.2.6 u [8]. □

Odredimo sada što vrijedi za gramijane sistema  $(E, A, B, C)$ . Po definiciji, oni su jednaki gramijanima sistema  $(I, E^{-1}A, E^{-1}B, C)$ , iz čega slijedi da su pozitivno definitni i zadovoljavaju sljedeće jednadžbe:

$$\begin{aligned} E^{-1}AP + PA^T E^{-T} + E^{-1}BB^T E^{-T} &= 0, \\ A^T E^{-T}Q + QE^{-1}A + C^T C &= 0. \end{aligned}$$

Množenjem prve jednadžbe slijeva s  $E$  i zdesna s  $E^T$  te supstitucijom  $Q = E^T Q' E$  u drugu jednadžbu, dobivamo:

$$\begin{aligned} APE^T + EPA^T + BB^T &= 0, \\ A^T Q'E + E^T Q'A + C^T C &= 0, \end{aligned}$$

što su dvije generalizirane Ljapunovljeve jednadžbe.

Gramijani su nam korisni iz dva razloga. Jedan je efikasno računanje  $\mathcal{H}_2$  norme, potrebne za mjeru greške aproksimacije sistema. Ta metoda će biti opisana u kasnijem poglavlju. Drugi razlog je što gramijani daju mjeru upravljivosti i osmotrivosti stanja, što je polazište popularne metode redukcije sistema — *balansirano rezanje*. Sljedeći teorem daje te mjere.

**Teorem 2.11.** *Neka je  $(I, A, B, C)$  stabilan, upravljiv i osmotriv sistem.*

*Definiramo preslikavanje  $\Psi_c : L^2(\langle -\infty, 0]) \rightarrow \mathbb{R}^n$  s*

$$\Psi_c u = \int_{-\infty}^0 e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau,$$

*tj.  $\Psi_c u$  je stanje sistema u trenutku  $t = 0$  uz početni uvjet  $x(-\infty) = 0$ . Tada je  $\Psi_c \Psi_c^* = P$  i za svaki  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  je  $u_{opt} := \Psi_c^* P^{-1} x_0$  element skupa*

$$\{u \in L^2(\langle -\infty, 0]) : \Psi_c u = x_0\}$$

*s najmanjom normom. Vrijedi  $\|u_{opt}\|_2^2 = x_0^T P^{-1} x_0$ .*

Definiramo preslikavanje  $\Psi_o: \mathbb{R}^n \rightarrow L^2([0, +\infty))$  s

$$\Psi_o x_0 = \begin{cases} Ce^{At} x_0, & t \geq 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

tj.  $\Psi_o x_0$  je izlaz sistema uz početni uvjet  $x(0) = x_0$  i ulaz  $u = 0$ . Tada je  $\Psi_o^* \Psi_o = Q$ . Za izlaz  $y = \Psi_o x_0$  vrijedi  $\|y\|_2^2 = x_0^T Q x_0$ .

*Dokaz.* Dokazi su dani u sekcijama 4.2 i 4.3 u [9]. □

**Teorem 2.11** direktno generaliziramo na sistem  $(E, A, B, C)$ . Time dobivamo da je  $x_0^T P^{-1} x_0$  najmanja energija potrebna da se sistem dovede iz ishodišta u stanje  $x_0$ , dok je  $x_0^T Q x_0$  energija izlaza sistema kada je početno stanje  $x_0$ . Stoga za dva stanja  $x_1$  i  $x_2$  jednake norme, ako vrijedi  $x_1^T P^{-1} x_1 < x_2^T P^{-1} x_2$ , kažemo da je stanje  $x_1$  *upravljivije* od stanja  $x_2$  (jer je lakše dovesti sistem u stanje  $x_1$  nego u  $x_2$ ). Također, ako je  $x_1^T Q x_1 > x_2^T Q x_2$ , kažemo da je stanje  $x_1$  *osmotrivije* od stanja  $x_2$  (jer je lakše detektirati izlaz sistema koji prouzroči stanje  $x_1$  nego stanje  $x_2$ ).

Zbog veze svojstvenog problema za neku matricu  $M$  i kvadratne forme  $x^T M x$ , možemo zaključiti da, među stanjima iz skupa  $S := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ , najupravljivije je ono koje je svojstveni vektor pridružen najmanjoj svojstvenoj vrijednosti od  $P^{-1}$ , odnosno najvećoj svojstvenoj vrijednosti od  $P$ . Nasuprot, najslabije upravljivo stanje iz skupa  $S$  je ono koje je svojstveni vektor pridružen najmanjoj svojstvenoj vrijednosti od  $P$ . Analogno zaključujemo i za osmotrivost: svojstveni vektor pridružen najvećoj (najmanjoj) svojstvenoj vrijednosti od  $Q$  je najosmotrivije (najslabije osmotrivo).

## 2.5 Prijenosna funkcija

Primjenom Laplaceove pretvorbe (uz pretpostavku da postoje Laplaceove pretvorbe od  $x$ ,  $u$  i  $y$ ) na

$$\begin{aligned} E x'(t) &= A x(t) + B u(t), \\ y(t) &= C x(t), \end{aligned}$$

dobivamo

$$\begin{aligned} E(s\widehat{x}(s) - x_0) &= A\widehat{x}(s) + B\widehat{u}(s), \\ \widehat{y}(s) &= C\widehat{x}(s). \end{aligned}$$

Eliminiranjem  $\widehat{x}(s)$  iz tog sustava slijedi

$$\widehat{y}(s) = C(sE - A)^{-1} E x_0 + C(sE - A)^{-1} B \widehat{u}(s).$$

Ako je  $x_0 = 0$ , dobivamo da je  $\widehat{y}(s) = H(s)\widehat{u}(s)$ , gdje je  $H(s) = C(sE - A)^{-1}B$  matricna funkcija dimenzije  $p \times m$  koju zovemo *prijenosna funkcija*. Provjerimo da je prijenosna funkcija ista za ekvivalentne sisteme:

$$\begin{aligned} CT(sSET - SAT)^{-1}SB &= CT(S(sE - A)T)^{-1}SB = CTT^{-1}(sE - A)^{-1}S^{-1}SB \\ &= C(sE - A)^{-1}B. \end{aligned}$$

Uočimo da je  $H(s)$  definirano za sve  $s$  za koje je  $sE - A$  regularna matrica. Tvrdimo da je  $sE - A$  singularna kada je  $s$  svojstvena vrijednost matrice  $E^{-1}A$ .

Definirajmo najprije generalizirane svojstvene vrijednosti i vektore proizvoljnog para kvadratnih matrica  $(A, B)$ .

**Definicija 2.12.** *Neka su  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Kažemo da je  $\lambda \in \mathbb{C}$  generalizirana svojstvena vrijednost para matrica  $(A, B)$  ako postoji  $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  takav da je  $Ax = \lambda Bx$ . Takav  $x$  zovemo generalizirani svojstveni vektor para matrica  $(A, B)$  pridružen svojstvenoj vrijednosti  $\lambda$ . Skup generaliziranih svojstvenih vrijednosti para matrica  $(A, B)$  označavamo s  $\sigma(A, B)$ .*

Proučimo sada generalizirani svojstveni problem za par matrica  $(A, E)$ . Neka vrijedi  $Ax = \lambda Ex$ , za neki  $\lambda \in \mathbb{C}$  i  $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ . Kako je  $E$  regularna,  $Ax = \lambda Ex$  je ekvivalentno s  $E^{-1}Ax = \lambda x$ . Dakle, generalizirane svojstvene vrijednosti para matrica  $(A, E)$  su jednake svojstvenim vrijednostima matrice  $E^{-1}A$ , tj.  $\sigma(A, E) = \sigma(E^{-1}A)$ , s istim pripadnim svojstvenim vektorima.

Na drugi način, možemo uočiti da je  $\sigma(A, E)$  jednak skupu nultočaka polinoma  $\det(sE - A)$ , kojeg zovemo *karakteristični polinom para matrica  $(A, E)$* . Po Binet-Cauchyjevom teoremu je  $\det(sE - A) = \det(E) \det(sI - E^{-1}A)$ , iz čega vidimo da su karakteristični polinomi za par matrica  $(A, E)$  i za matricu  $E^{-1}A$  jednaki do na ne-nul multiplikativnu konstantu. Tako ponovo zaključujemo da je  $\sigma(A, E) = \sigma(E^{-1}A)$ . Sada vidimo da je prijenosna funkcija  $H$  definirana na  $\mathbb{C} \setminus \sigma(E^{-1}A)$ . Posebno, ako je  $(E, A, B, C)$  stabilan sistem, onda je  $H$  definirana na zatvorenoj desnoj poluravnini  $\overline{\mathbb{C}_+}$ .

Koristeći formulu  $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \text{adj}(M)$  ( $\text{adj}(M)$  je adjunkta od  $M$ ), zaključujemo da je  $(sE - A)^{-1}$  matricna funkcija po  $s$  kojoj je svaka komponenta prava racionalna funkcija, pa isto vrijedi i za  $H$ . Time dobivamo da su komponente od  $H$  holomorfne na  $\mathbb{C} \setminus \sigma(E^{-1}A)$  i da u svojstvenim vrijednostima od  $E^{-1}A$  ima uklonjive singularitete ili polove.

Prijenosna funkcija  $H$  je matricna funkcija reda  $p \times m$ . Označimo njene komponente s  $H_{ij}$ , za  $i = 1, 2, \dots, p$  i  $j = 1, 2, \dots, m$ . Komponentu  $H_{ij}$  zovemo *prijenosna funkcija iz  $j$ -tog ulaza u  $i$ -ti izlaz*. Objasnimo razlog za taj naziv. Neka je  $u(t) = u_j(t)e_j$ , gdje je  $e_j$   $j$ -ti vektor u kanonskoj bazi od  $\mathbb{R}^m$ . Tada je  $\widehat{y}_i(s) = [H(s)\widehat{u}(s)]_i = H_{ij}(s)\widehat{u}_j(s)$ . Dakle,  $H_{ij}$  je prijenosna funkcija za sistem  $(E, A, Be_j, e_i^T C)$ .

Vrijednost  $H_{ij}(i\omega)$ , za  $\omega > 0$ , ima korisnu interpretaciju koju ćemo sada pokazati. Neka je  $u(t) = u_j(t)e_j$ , uz  $u_j(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$ . Iz računa

$$\begin{aligned}\widehat{u}_j(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} u_j(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} a \sin(\omega t + \varphi) dt \\ &= -\frac{1}{s} e^{-st} a \sin(\omega t + \varphi) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{\omega}{s} e^{-st} a \cos(\omega t + \varphi) dt \\ &= \frac{a}{s} \sin \varphi - \frac{\omega}{s^2} e^{-st} a \cos(\omega t + \varphi) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{\omega^2}{s^2} e^{-st} a \sin(\omega t + \varphi) dt \\ &= \frac{a}{s} \sin \varphi + \frac{a\omega}{s^2} \cos \varphi - \frac{\omega^2}{s^2} \widehat{u}_j(s)\end{aligned}$$

slijedi da je

$$\widehat{u}_j(s) = \frac{\frac{a}{s} \sin \varphi + \frac{a\omega}{s^2} \cos \varphi}{1 + \frac{\omega^2}{s^2}} = a \frac{s \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{s^2 + \omega^2}.$$

Sada vidimo da  $\widehat{y}_i(s) = H_{ij}(s)\widehat{u}_j(s)$  ima polove lijevoj otvorenoj poluravnini i dva pola ( $i\omega$  i  $-i\omega$ ) na imaginarnoj osi. Promotrimo dva pola na imaginarnoj osi:

$$\begin{aligned}& \operatorname{res}[\widehat{y}_i(s), i\omega] \frac{1}{s - i\omega} + \operatorname{res}[\widehat{y}_i(s), -i\omega] \frac{1}{s + i\omega} \\ &= \operatorname{res}[H_{ij}(s)\widehat{u}_j(s), i\omega] \frac{1}{s - i\omega} + \operatorname{res}[H_{ij}(s)\widehat{u}_j(s), -i\omega] \frac{1}{s + i\omega} \\ &= H_{ij}(i\omega) \frac{\operatorname{res}[\widehat{u}_j(s), i\omega]}{s - i\omega} + H_{ij}(-i\omega) \frac{\operatorname{res}[\widehat{u}_j(s), -i\omega]}{s + i\omega} \\ &= aH_{ij}(i\omega) \frac{i \sin \varphi + \cos \varphi}{2i(s - i\omega)} + a\overline{H_{ij}(i\omega)} \frac{i \sin \varphi - \cos \varphi}{2i(s + i\omega)} \\ &= aH_{ij}(i\omega) \frac{e^{i\varphi}}{2i(s - i\omega)} - a\overline{H_{ij}(i\omega)} \frac{e^{-i\varphi}}{2i(s + i\omega)} \\ &= a|H_{ij}(i\omega)| \frac{e^{i(\varphi + \arg H_{ij}(i\omega))}}{2i(s - i\omega)} - a|H_{ij}(i\omega)| \frac{e^{-i(\varphi + \arg H_{ij}(i\omega))}}{2i(s + i\omega)} \\ &= a|H_{ij}(i\omega)| \frac{e^{i(\varphi + \arg H_{ij}(i\omega))}(s + i\omega) - e^{-i(\varphi + \arg H_{ij}(i\omega))}(s - i\omega)}{2i(s^2 + \omega^2)} \\ &= a|H_{ij}(i\omega)| \frac{2is \sin(\varphi + \arg H_{ij}(i\omega)) + 2i\omega \cos(\varphi + \arg H_{ij}(i\omega))}{2i(s^2 + \omega^2)}\end{aligned}$$

$$= a|H_{ij}(i\omega)| \frac{s \sin(\varphi + \arg H_{ij}(i\omega)) + \omega \cos(\varphi + \arg H_{ij}(i\omega))}{s^2 + \omega^2}.$$

Vidimo da je inverzna Laplaceova pretvorba posljednjeg izraza jednaka

$$a|H_{ij}(i\omega)| \sin(\omega t + \varphi + \arg H_{ij}(i\omega)).$$

Zaključujemo da

$$y_i(t) - \left( a|H_{ij}(i\omega)| \sin(\omega t + \varphi + \arg H_{ij}(i\omega)) \right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0,$$

jer Laplaceova pretvorba te funkcije ima polove samo u lijevoj otvorenoj poluravnini. Dakle, za dovoljno velike  $t$  vrijedi

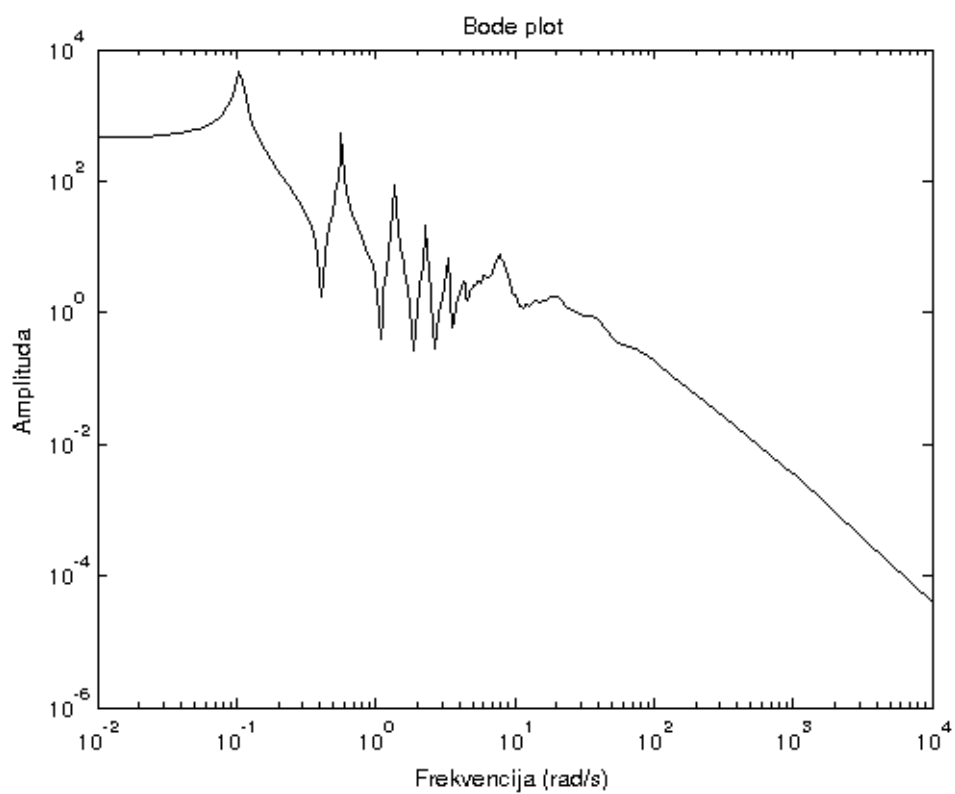
$$y_i(t) \approx a|H_{ij}(i\omega)| \sin(\omega t + \varphi + \arg H_{ij}(i\omega)).$$

Tako nam  $H_{ij}(i\omega)$  daje kako se s ulaza na izlaz mijenja amplituda i fazni pomak signala kutne frekvencije  $\omega$ , što moguće mjeriti u nekim slučajevima. Dodatno se i često za vizualizaciju skalarne prijenosne funkcije koristi Bode plot, što je log-log plot od  $|H_{ij}(i\omega)|$  i log-linearni plot od  $\arg H_{ij}(i\omega)$ . Za matricnu prijenosnu funkciju se promatra Bode plot za svaku komponentu. Koristit ćemo samo amplitudni Bode plot, jer on dovoljno opisuje sistem, i nadalje ćemo izostavljati riječ „amplitudni”.

Na Slici 2.1 je prikazan primjer Bode plota. Radi se o Beam modelu iz NICONET baze primjera [7], SISO sistemu s 348 stanja. Na Slici 2.2 je prikazan Bode plot za CDplayer iz iste baze primjera. Ovo je MIMO sistem s 120 stanja, dva ulaza i dva izlaza, stoga su potrebna četiri grafa, jedan za svaki par ulaza i izlaza. Kao što je i poredak elemenata u prijenosnoj funkciji, svaki stupac se odnosi na jedan ulaz, a svaki redak na jedan izlaz. Dakle, Bode plot za prijenosnu funkciju  $H_{ij}$  je prikazan u  $i$ -tom retku i  $j$ -tom stupcu.

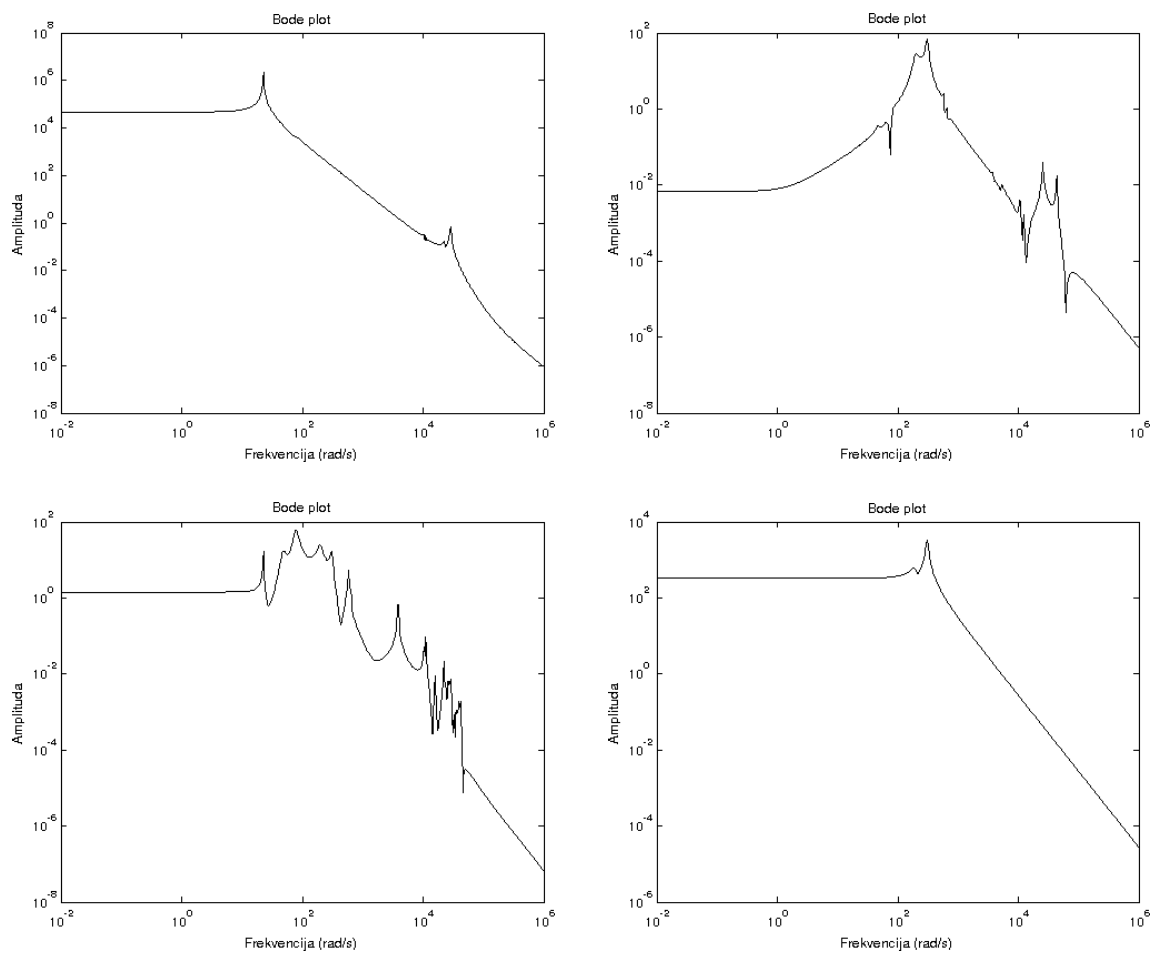
Ono što možemo uočiti na svakom grafu prikazanom na Slikama 2.1 i 2.2 su šiljci. Oni su posljedica polova prijenosne funkcije koji se pojavljuju blizu imaginarne osi. Mogli bi reći da tako vidimo što se pojavljuje iza Bode plotu.

Kao što smo pokazali, amplituda prijenosne funkcije na imaginarnoj osi govori koliko se koja ulazna frekvencija pojačava ili prigušuje. Stoga je za reducirani model važno da dobro aproksimira što veći broj dominantnih šiljaka, jer oni opisuju ponašanje sistema. Zato Bode plot može sugerirati koji bi red reduciranog modela mogao biti odgovarajući.



Slika 2.1: Bode plot za Beam model iz NICONET baze primjera [7] je jednim ulazom i jednim izlazom





Slika 2.2: Bode plot za CDplayer model iz NICONET baze primjera [7] s dva ulaza i dva izlaza (stupci se odnose na ulaze, a reci na izlaze)



## Poglavlje 3

# Teorija Hardyjevih prostora

### 3.1 Lebesgueovi prostori i Fourierova pretvorba

Uveli smo prijenosne funkcije linearnih sistema. To su matrične funkcije dobivene primjenom Laplaceove pretvorbe na jednadžbe sistema. Promatrat ćemo ih kao elemente Hardyjevog prostora, a da bi njih uveli, potrebni su nam  $L^p$  prostori klasa matričnih funkcija te Fourierova i Laplaceova pretvorba nad tim prostorima. U konačnici ćemo se ograničiti na  $p = 2$  i  $p = \infty$ , ali za sada ćemo promatrati općenitiji slučaj radi potpunije slike. Ovdje ćemo samo iskazivati potrebne propozicije i teoreme čiji se dokazi mogu naći u [13].

Pretpostavljamo da su čitatelju poznati prostori  $L^p(X, \mathcal{F}, \mu; \mathbb{F})$ , gdje je  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  prostor mjere i  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  polje. Elementi tih prostora su klase funkcija, s domenom  $X$  i kodomenom  $\mathbb{F}$ , izmjerivih u paru  $\sigma$ -algebri  $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{F}))$ . Ovdje ćemo za domenu uzimati  $\mathbb{R}$  (ili  $i\mathbb{R}$ ), dok za kodomenu proizvoljan kompleksan konačnodimenzionalan normirani prostor  $V$  s normom  $\|\cdot\|_V$ . Dakle, birat ćemo specijalnije domene i generalnije kodomene. Vezano za odabir  $\sigma$ -algebre i mjere, nadalje ćemo podrazumijevati da je  $\sigma$ -algebra Borelova i mjera Lebesgueova.

Za početak definiramo  $L^p$  prostore koje ćemo koristiti.

**Definicija 3.1.** Za  $p \in [1, \infty)$  definiramo

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}; V) := \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow V : f \text{ je Borelova i } \int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|_V^p dt < \infty \right\}$$

i

$$\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}; V)}: \mathcal{L}^p(\mathbb{R}; V) \rightarrow \mathbb{R}, \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}; V)} := \left( \int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|_V^p dt \right)^{1/p}.$$

Za  $p = \infty$  definiramo

$$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}; V) := \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow V : f \text{ je Borelova i } \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|_V < \infty \right\}$$

i

$$\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}; V)}: \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}; V) \rightarrow \mathbb{R}, \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}; V)} := \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|_V.$$

Za  $p \in [1, \infty]$ , neka je relacija  $\sim$  na  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}; V)$  definirana s

$$f \sim g \Leftrightarrow \|f - g\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}; V)} = 0.$$

Tada definiramo

$$L^p(\mathbb{R}; V) := \mathcal{L}^p(\mathbb{R}; V) / \sim,$$

tj.  $L^p(\mathbb{R}; V)$  je skup klasa ekvivalencija funkcija iz  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}; V)$  po relaciji  $\sim$ . Za  $[f] \in L^p(\mathbb{R}; V)$  definiramo

$$\|[f]\|_{L^p(\mathbb{R}; V)} := \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}; V)}.$$

Za  $M \subseteq \mathbb{R}$  definiramo

$$L^p(M; V) := \{[f] \in L^p(\mathbb{R}; V) : f = 0 \text{ g.s. na } M\} \subseteq L^p(\mathbb{R}; V).$$

**Napomena 3.2.** Može se pokazati (za  $p \in [1, \infty]$ ):

- (i)  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}; V)$  su vektorski prostori.
- (ii)  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}; V)}$  je polunorma na  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}; V)$ .
- (iii)  $\sim$  je relacija ekvivalencije.
- (iv)  $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}; V)}$  je dobro definirano preslikavanje.
- (v)  $L^p(\mathbb{R}; V)$  je vektorski prostor.
- (vi)  $(L^p(\mathbb{R}; V), \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}; V)})$  je normirani prostor.
- (vii)  $L^p(M; V)$  je potprostor od  $L^p(\mathbb{R}; V)$  za svaki  $M \subseteq \mathbb{R}$ , a time i normiran prostor uz naslijeđenu normu.

**Napomena 3.3.** Nadalje ćemo poistovjećivati prostore  $L^p(\mathbb{R}; V)$  i  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}; V)$ , kad god to neće voditi do dvosmislenosti. Tako ćemo često umjesto  $[f]$  pisati  $f$ , npr.  $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}; V)}$  i  $f \in L^p(\mathbb{R}; V)$ .

Prvo iskazujemo tvrdnju o potpunosti tih prostora (analognu tvrdnji za  $L^p(X, \mathcal{F}, \mu; \mathbb{F})$  prostore) te definiramo skalarni produkt na  $L^2(\mathbb{R}; V)$ .

**Propozicija 3.4.** Za svaki  $p \in [1, \infty]$  je  $L^p(\mathbb{R}; V)$  Banachov prostor. Ako je  $V$  unitaran prostor sa skalarnim produktom  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ , onda je  $L^2(\mathbb{R}; V)$  sa skalarnim produktom

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}; V)} := \int_{\mathbb{R}} \langle f(t), g(t) \rangle_V dt$$

*Hilbertov prostor.*

Kasnije ćemo za  $V$  odabrati prostor kompleksnih matrica određenog reda. Za normu ćemo birati spektralnu ili Frobeniusovu normu. Uz Frobeniusovu normu ćemo vezati i Frobeniusov skalarni produkt, tako da ćemo u tom slučaju  $V$  promatrati kao unitaran prostor.

Promotrimo odnos prostora  $L^p(\mathbb{R}; V)$ , za  $p \in [1, \infty]$ , kao skupova. Pokažimo da su oni u općenitom položaju, tj. ne vrijedi  $L^{p_1}(\mathbb{R}; V) \subseteq L^{p_2}(\mathbb{R}; V)$  ni  $L^{p_1}(\mathbb{R}; V) \supseteq L^{p_2}(\mathbb{R}; V)$ , gdje su  $p_1, p_2 \in [1, \infty]$ ,  $p_1 \neq p_2$ . Možemo se ograničiti na slučaj  $(V, \|\cdot\|_V) = (\mathbb{C}, |\cdot|)$ . Najprije, uočimo da za konstantnu funkciju  $f \equiv 1$  vrijedi  $f \in L^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  i  $f \notin L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ , za  $p \in [1, \infty)$ . Obratno, za  $p \in [1, \infty)$  i funkciju  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definiranu s

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^{1/(2p)}}, & t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

vrijedi  $g \in L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  i  $g \notin L^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ . Uzmimo sada  $p_1, p_2 \in [1, \infty)$  takve da je  $p_1 < p_2$ . Tada za

$$f_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^{1/p_2}}, & t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad \text{i} \quad f_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^{1/p_1}}, & t \in \langle 1, \infty \rangle \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

vrijedi  $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \setminus L^{p_2}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  i  $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \setminus L^{p_1}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ .

Uočimo da je  $f \in L^2(\mathbb{R}; V)$ , gdje je  $V$  prostor matrica uz Frobeniusovu normu, ako i samo ako je svaka komponenta od  $f$  element  $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ . To vidimo iz toga što je kvadrat Frobeniusove norme neke matrice jednak sumi kvadrata njenih komponenti.

Važni potprostori od  $L^p(\mathbb{R}; V)$  su  $L^p(\mathbb{R}_-; V)$  i  $L^p(\mathbb{R}_+; V)$ , gdje je  $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$  i  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ . Može se pokazati da je  $L^2(\mathbb{R}; V) = L^2(\mathbb{R}_-; V) \oplus L^2(\mathbb{R}_+; V)$ .

Sljedeće definiramo prostore  $L^p(i\mathbb{R}; V)$ , gdje je  $i\mathbb{R} := \{i\omega : \omega \in \mathbb{R}\}$ . Zbog izomorfности s  $L^p(\mathbb{R}; V)$ , dobivamo korolar Propozicije 3.4.

**Korolar 3.5.** *Skup*

$$L^p(i\mathbb{R}; V) := \{\widehat{f}: i\mathbb{R} \rightarrow V : (\omega \mapsto \widehat{f}(i\omega)) \in L^p(\mathbb{R}; V)\}$$

s normom

$$\|\widehat{f}\|_{L^p(i\mathbb{R}; V)} := \begin{cases} \left\| \frac{1}{(2\pi)^{1/p}} \omega \mapsto \widehat{f}(i\omega) \right\|_{L^p(\mathbb{R}; V)}, & \text{ako je } p \in [1, \infty) \\ \left\| \omega \mapsto \widehat{f}(i\omega) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}; V)}, & \text{ako je } p = \infty \end{cases}$$

je Banachov prostor.

Ako je  $V$  unitaran prostor, onda je  $L^2(i\mathbb{R}; V)$  Hilbertov prostor sa skalarnim produktom

$$\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle_{L^2(i\mathbb{R}; V)} := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \langle \widehat{f}(i\omega), \widehat{g}(i\omega) \rangle_V d\omega.$$

Uočimo konstantu  $\frac{1}{2\pi}$  koja se javlja u definiciji norme  $\|\cdot\|_{L^2(i\mathbb{R}; V)}$ . To čini razliku između  $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}; V)}$  i  $\|\cdot\|_{L^2(i\mathbb{R}; V)}$ . Time se postiže izometričnost operatora koje ćemo kasnije definirati. Započinjemo s definicijom Fourierove pretvorbe.

**Definicija 3.6.** Neka je  $f \in L^1(\mathbb{R}; V)$ . Tada, za  $i\omega \in i\mathbb{R}$ ,

$$(\mathcal{F}f)(i\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} f(t) dt$$

zovemo Fourierov integral, ako postoji.

**Napomena 3.7.** Odabir gornje definicije Fourierove pretvorbe (točnije odabira skupa  $i\mathbb{R}$  za domenu od  $\mathcal{F}f$  i  $e^{-i\omega t}$  za jezgru) najbolje odgovara u kontekstu Hardyjevih prostora.

Iz definicije Fourierove pretvorbe je jasno da je ona dobro definirana na  $L^1(\mathbb{R}; V)$ . Sljedeće dvije propozicije govore da se može definirati  $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}; V) \rightarrow L^2(i\mathbb{R}; V)$  te da je to unitaran operator (ako je  $V$  unitaran prostor).

**Propozicija 3.8.** Fourierova pretvorba

$$\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}; V) \cap L^2(\mathbb{R}; V) \rightarrow L^2(i\mathbb{R}; V)$$

je dobro definiran i linearan ograničen operator. Ako je  $V$  unitaran prostor, onda je  $\mathcal{F}$  izometričan, tj.

$$(\forall f \in L^1(\mathbb{R}; V) \cap L^2(\mathbb{R}; V)) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}; V)} = \|\mathcal{F}f\|_{L^2(i\mathbb{R}; V)}.$$

**Teorem 3.9** (Plancherel). Neka je  $V$  unitaran prostor. Tada postoji jedinstveno proširenje od  $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}; V) \cap L^2(\mathbb{R}; V) \rightarrow L^2(i\mathbb{R}; V)$  na cijeli  $L^2(\mathbb{R}; V)$  tako da vrijedi

$$(\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}; V)) \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}; V)} = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle_{L^2(i\mathbb{R}; V)}.$$

Pokazali smo da je  $L^2(\mathbb{R}; V) \setminus L^1(\mathbb{R}; V) \neq \emptyset$  i može se vidjeti da  $\mathcal{F}f$  ne mora biti definirano u svakoj točki ako je  $f \in L^2(\mathbb{R}; V) \setminus L^1(\mathbb{R}; V)$ . Stoga Propoziciju 3.9 shvaćamo kao rezultat koji pokazuje da se  $\mathcal{F}$  može proširiti po neprekidnosti na  $L^2(\mathbb{R}; V)$ , ali da to proširenje nije nužno povezano s definicijom od  $\mathcal{F}$ .

## 3.2 Hardyjevi prostori

Prije definicije Hardyjevih prostora moramo znati što znači da je neka funkcija s vrijednostima u  $V$  holomorfna. Iskoristit ćemo poznatu definiciju holomorfnosti kompleksne funkcije kompleksne varijable i konačnodimenzionalnost prostora  $V$ .

**Definicija 3.10.** *Neka je  $\{e_1, \dots, e_n\}$  baza za  $V$  i  $F: \Omega \rightarrow V$  funkcija, gdje je  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  otvoren skup. Neka su  $F_1, \dots, F_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  funkcije takve da je  $F = F_1 e_1 + \dots + F_n e_n$ . Tada kažemo da je  $F$  holomorfna (na  $\Omega$ ) ako su  $F_1, \dots, F_n$  holomorfne (na  $\Omega$ ).*

**Napomena 3.11.** *Može se pokazati da Definicija 3.10 ne ovisi o izboru baze za  $V$ .*

Krećemo s definicijom Hardyjevih prostora.

**Definicija 3.12.** *Za  $p > 0$  definiramo Hardyjev prostor na otvorenoj desnoj poluravnini  $\mathbb{C}_+$*

$$\mathcal{H}_p(\mathbb{C}_+; V) := \left\{ F: \mathbb{C}_+ \rightarrow V : \begin{array}{l} F \text{ je holomorfna i} \\ \sup_{x>0} \int_{\mathbb{R}} \|F(x + i\omega)\|_V^p d\omega < \infty \end{array} \right\}$$

i

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\mathcal{H}_p(\mathbb{C}_+; V)}: \mathcal{H}_p(\mathbb{C}_+; V) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \|F\|_{\mathcal{H}_p(\mathbb{C}_+; V)} &:= \left( \sup_{x>0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \|F(x + i\omega)\|_V^p d\omega \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Definiramo i Hardyjeve prostore na otvorenoj lijevoj poluravnini  $\mathbb{C}_-$

$$\mathcal{H}_p(\mathbb{C}_-; V) := \left\{ F: \mathbb{C}_- \rightarrow V : \begin{array}{l} F \text{ je holomorfna i} \\ \sup_{x<0} \int_{\mathbb{R}} \|F(x + i\omega)\|_V^p d\omega < \infty \end{array} \right\}$$

uz

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\mathcal{H}_p(\mathbb{C}_-; V)}: \mathcal{H}_p(\mathbb{C}_-; V) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \|F\|_{\mathcal{H}_p(\mathbb{C}_-; V)} &:= \left( \sup_{x<0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \|F(x + i\omega)\|_V^p d\omega \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Za  $p = \infty$  definiramo

$$\mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+; V) := \left\{ F: \mathbb{C}_+ \rightarrow V : \begin{array}{l} F \text{ je holomorfna i} \\ \sup_{\operatorname{Re} s > 0} \|F(s)\|_V < \infty \end{array} \right\}$$

$s$

$$\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+; V)}: \mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+; V) \rightarrow \mathbb{R}, \|F\|_{\mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_+; V)} := \sup_{\operatorname{Re} s > 0} \|F(s)\|_V$$

i  $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_-; V)$  s  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\infty(\mathbb{C}_-; V)}$  analogno.

**Napomena 3.13.** Preslikavanje

$$\mathcal{H}_p(\mathbb{C}_+; V) \ni F \mapsto (s \mapsto F(-s)) \in \mathcal{H}_p(\mathbb{C}_-; V)$$

je linearni izometrički izomorfizam između  $\mathcal{H}_p(\mathbb{C}_+; V)$  i  $\mathcal{H}_p(\mathbb{C}_-; V)$ . Stoga u ostatku ove sekcije formuliramo svojstva samo za Hardyjeve prostore na desnoj poluravnini. Analogna svojstva su onda također istinita i za Hardyjeve prostore na lijevoj poluravnini.

Kao i Lebesgueovi prostori, Hardyjevi prostori su također potpuni.

**Propozicija 3.14.** Za  $p \in [1, \infty]$  je  $\mathcal{H}_p(\mathbb{C}_+; V)$  Banachov prostor.

Sljedeća propozicija pokazuje da se funkcije iz Hardyjevih prostora mogu proširiti na  $\overline{\mathbb{C}_+}$ , da su u potpunosti određene vrijednostima proširenja na imaginarnoj osi i da je lakše računati normu u tim prostorima nego što se to iz definicije isprva čini.

**Teorem 3.15** (Fatou). Neka je  $p \in [1, \infty]$ . Tada postoji linearni operator

$$\mathcal{B}_p^+: \mathcal{H}_p(\mathbb{C}_+; V) \rightarrow L^p(i\mathbb{R}; V), F \mapsto \widetilde{F} = \mathcal{B}_p^+ F$$

tako da

(i)  $\widetilde{F}$  je rubna funkcija od  $F$ :

$$\widetilde{F}(i\omega) = \lim_{x \searrow 0} F(x + i\omega) \text{ za gotovo svaki } i\omega \in i\mathbb{R}.$$

(ii)  $\mathcal{B}_p^+$  je izometrija:

$$(\forall F \in \mathcal{H}_p(\mathbb{C}_+; V)) \|F\|_{\mathcal{H}_p(\mathbb{C}_+; V)} = \|\mathcal{B}_p^+ F\|_{L^p(i\mathbb{R}; V)}.$$

(iii)  $F$  je potpuno određena svojom rubnom funkcijom  $\widetilde{F}$ :

$$(\forall x > 0)(\forall \omega_0 \in \mathbb{R}) F(x + i\omega_0) = \frac{x}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\widetilde{F}(i\omega)}{x^2 + (\omega_0 - \omega)^2} d\omega.$$

Ako je  $p < \infty$ , onda:

$$(\forall z \in \mathbb{C}_+) F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\widetilde{F}(i\omega)}{z - i\omega} d\omega.$$



Uočimo da iz (ii) slijedi

$$\|F\|_{\mathcal{H}_p(\mathbb{C}_+; V)} = \begin{cases} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \|F(i\omega)\|_V^p d\omega \right)^{1/p}, & \text{ako je } p \in [1, \infty) \\ \text{ess sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \|F(i\omega)\|_V, & \text{ako je } p = \infty \end{cases},$$

gdje  $F$  shvaćamo kao proširenje na  $\overline{\mathbb{C}_+}$ .

Prema Napomeni 3.13 također postoji operator  $\mathcal{B}_p^-: \mathcal{H}_p(\mathbb{C}_-; V) \rightarrow L^p(i\mathbb{R}; V)$  s analognim svojstvima kao operator  $\mathcal{B}_p^+$  u Propoziciji 3.15. Konkretno, za svaki  $H \in \mathcal{H}_p(\mathbb{C}_-; V)$  je

$$(\mathcal{B}_p^- H)(i\omega) = \lim_{x \nearrow 0} H(x + i\omega) \text{ za gotovo svaki } i\omega \in i\mathbb{R}$$

i

$$\|\mathcal{B}_p^- H\|_{L^p(i\mathbb{R}; V)} = \|H\|_{\mathcal{H}_p(\mathbb{C}_-; V)}.$$

**Definicija 3.16.** *Definiramo prostore rubnih funkcija za funkcije iz  $\mathcal{H}_p(\mathbb{C}_+; V)$  i  $\mathcal{H}_p(\mathbb{C}_-; V)$ ,  $p \in [1, \infty]$ :*

$$\mathcal{H}_p^+(i\mathbb{R}; V) := \text{Im}(\mathcal{B}_p^+), \quad \mathcal{H}_p^-(i\mathbb{R}; V) := \text{Im}(\mathcal{B}_p^-).$$

Kao posljedicu Propozicija 3.14 i 3.15 dobivamo sljedeći korolar.

**Korolar 3.17.** *Neka je  $p \in [1, \infty]$ . Tada su potprostori  $\mathcal{H}_p^+(i\mathbb{R}; V)$  i  $\mathcal{H}_p^-(i\mathbb{R}; V)$  od  $L^p(i\mathbb{R}; V)$  potpuni i*

$$\mathcal{H}_p^+(i\mathbb{R}; V) \cong \mathcal{H}_p(\mathbb{C}_+; V) \text{ i } \mathcal{H}_p^-(i\mathbb{R}; V) \cong \mathcal{H}_p(\mathbb{C}_-; V).$$

*Dodatno, ako je  $V$  unitaran prostor, onda su  $\mathcal{H}_2^+(i\mathbb{R}; V)$  i  $\mathcal{H}_2^-(i\mathbb{R}; V)$  Hilbertovi prostori sa skalarnim produktom od  $L^2(i\mathbb{R}; V)$ .*

Dobivamo da možemo poistovjetiti prostore  $\mathcal{H}_p(\mathbb{C}_+; V)$  i  $\mathcal{H}_p^+(i\mathbb{R}; V)$ . Shvaćamo ih i kao funkcije definirane na  $\overline{\mathbb{C}_+}$ . Ako je  $V$  unitaran prostor, prostori  $\mathcal{H}_2(\mathbb{C}_+; V)$  i  $\mathcal{H}_2^+(i\mathbb{R}; V)$  su Hilbertovi prostori s skalarnim produktom

$$\langle F, G \rangle_{\mathcal{H}_2(\mathbb{C}_+; V)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \langle F(i\omega), G(i\omega) \rangle_V d\omega.$$

### 3.3 Hardyjevi prostori i Laplaceova pretvorba

**Definicija 3.18.** *Neka je  $f \in L^1(\mathbb{R}; V)$ . Tada, za  $s \in \mathbb{C}$ ,*

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{-st} f(t) dt$$

zovemo Laplaceov integral, ako postoji.

U literaturi se često Laplaceov integral definira pomoću jednostranog integrala, tj.  $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ . S obzirom da je to tek poseban slučaj kada je  $f \in L^1(\mathbb{R}_+; V)$ , odlučili smo se za danu definiciju. Dodatno, imamo vezu s Fourierovim integralom:

$$\mathcal{F}f = (\mathcal{L}f)|_{i\mathbb{R}}.$$

Slijedi osnovni rezultat o egzistenciji Laplaceovog integrala.

**Propozicija 3.19.** *Neka je  $f: \mathbb{R} \rightarrow V$  takva da je  $f(t) = 0$  za sve  $t < 0$  i*

$$(t \mapsto e^{-s_0 t} f(t)) \in L^1(\mathbb{R}_+; V),$$

za neki  $s_0 \in \mathbb{R}$ . Tada Laplaceov integral

$$(\mathcal{L}f)(s) \in V \text{ postoji za sve } s \in \mathbb{C}_{\text{Re} \geq s_0} := \{s \in \mathbb{C} : \text{Re } s \geq s_0\}.$$

Može se pokazati da je Laplaceova pretvorba funkcije dodatno holomorfna, kao što tvrdi sljedeća propozicija.

**Propozicija 3.20.** *Pretpostavimo da je  $f: \mathbb{R} \rightarrow V$  takva da vrijedi  $f(t) = 0$  za sve  $t < 0$  te da Laplaceov integral  $F(s) = (\mathcal{L}f)(s)$  postoji na  $\mathbb{C}_{\text{Re} > \beta}$  za neki  $\beta \in \mathbb{R}$ . Tada je  $F: \mathbb{C}_{\text{Re} > \beta} \rightarrow V$  holomorfna.*

Sljedeća propozicija i teorem pokazuju da se Laplaceova pretvorba, kao i Fourierova pretvorba, može definirati na  $L^2$  prostoru i pritom će kodomena biti prostor  $\mathcal{H}_2$ .

**Propozicija 3.21.** *Desnostrana Laplaceova pretvorba*

$$\mathcal{L}^+ : L^1(\mathbb{R}_+; V) \cap L^2(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow \mathcal{H}_2(\mathbb{C}_+; V), f \xrightarrow{\mathcal{L}^+} \mathcal{L}f$$

i lijevostrana Laplaceova pretvorba

$$\mathcal{L}^- : L^1(\mathbb{R}_-; V) \cap L^2(\mathbb{R}_-; V) \rightarrow \mathcal{H}_2(\mathbb{C}_-; V), g \xrightarrow{\mathcal{L}^-} \mathcal{L}g$$

su dobro definirani linearni operatori. Laplaceova pretvorba

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}^+ \cup \mathcal{L}^-$$

$$\mathcal{L} : (L^1(\mathbb{R}_+; V) \cap L^2(\mathbb{R}_+; V)) \cup (L^1(\mathbb{R}_-; V) \cap L^2(\mathbb{R}_-; V)) \rightarrow \mathcal{H}_2(\mathbb{C}_+; V) \cup \mathcal{H}_2(\mathbb{C}_-; V)$$

je ograničen operator.

Ako je  $V$  unitaran prostor, onda je  $\mathcal{L}$  izometričan, tj.

$$(\forall f \in L^1(\mathbb{R}_+; V) \cap L^2(\mathbb{R}_+; V)) \quad \|\mathcal{L}f\|_{\mathcal{H}_2(\mathbb{C}_+; V)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}; V)}$$

i

$$(\forall g \in L^1(\mathbb{R}_-; V) \cap L^2(\mathbb{R}_-; V)) \quad \|\mathcal{L}g\|_{\mathcal{H}_2(\mathbb{C}_-; V)} = \|g\|_{L^2(\mathbb{R}; V)}.$$

**Teorem 3.22** (Paley-Wiener). *Postoje jedinstvena proširenja operatora  $\mathcal{L}^+$  i  $\mathcal{L}^-$  do linearnih izomorfizama*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^+ : L^2(\mathbb{R}_+; V) &\rightarrow \mathcal{H}_2(\mathbb{C}_+; V) \text{ i} \\ \mathcal{L}^- : L^2(\mathbb{R}_-; V) &\rightarrow \mathcal{H}_2(\mathbb{C}_-; V).\end{aligned}$$

*Proširena Laplaceova pretvorba*

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}^+ \cup \mathcal{L}^-$$

*je tada ograničen operator.*

*Ako je  $V$  unitaran prostor, onda je  $\mathcal{L}$  izometrija i nadalje*

$$L^2(i\mathbb{R}; V) = \mathcal{H}_2^+(i\mathbb{R}; V) \oplus \mathcal{H}_2^-(i\mathbb{R}; V).$$

U narednim poglavljima ćemo se usredotočiti na prostor

$$\mathcal{H}_2^{p \times m}(\mathbb{C}_+) := \mathcal{H}_2(\mathbb{C}_+; \mathbb{C}^{p \times m}), \text{ za } p, m \in \mathbb{N}.$$

Pritom je prostor  $\mathbb{C}^{p \times m}$  objedinjen Frobeniusovom normom. Pisat ćemo često  $\mathcal{H}_2$  umjesto  $\mathcal{H}_2^{p \times m}(\mathbb{C}_+)$  radi jednostavnosti i kada će biti jasno iz konteksta koji se prostor promatra. Uočimo da za  $G, H \in \mathcal{H}_2^{p \times m}(\mathbb{C}_+)$  vrijedi

$$\langle G, H \rangle_{\mathcal{H}_2} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \text{tr}(G(i\omega)^T \overline{H(i\omega)}) d\omega$$

i

$$\|H\|_{\mathcal{H}_2} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \|H(i\omega)\|_F^2 d\omega}. \quad (3.1)$$

Osim  $\mathcal{H}_2$  prostora, najčešće se promatraju i  $\mathcal{H}_\infty$  prostori, gdje je prostor  $\mathbb{C}^{p \times m}$  objedinjen spektralnom normom. Vrijedi

$$\|H\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}(H(i\omega)),$$

gdje je  $\sigma_{\max}(\cdot)$  najveća singularna vrijednost matrice..



# Poglavlje 4

## Primjene gramijana

Ovdje pokazujemo dva mjesta na kojima ćemo koristiti gramijane, redom za računanje  $\mathcal{H}_2$ -norme sistema i za balansirano rezanje. Prvo nam omogućava da izbjegnemo računanje nepravog integrala, a drugo je popularna metoda za redukciju modela s kojom ćemo usporediti redukciju interpolacijom.

### 4.1 Računanje $\mathcal{H}_2$ -norme

Izraz za računanje  $\mathcal{H}_2$ -norme pomoću gramijana je dan u sljedećoj propoziciji.

**Propozicija 4.1.** *Neka je  $(I, A, B, C)$  stabilan sistem s prijenosnom funkcijom  $H(s)$ . Tada je*

$$\|H\|_{\mathcal{H}_2} = \sqrt{\text{tr}(B^T Q B)} = \sqrt{\text{tr}(C P C^T)}. \quad (4.1)$$

*Dokaz.* Dokaz je dan u točki 7.2.4 u [8]. □

Dokazujemo općenitiju tvrdnju.

**Korolar 4.2.** *Neka je  $(E, A, B, C)$  stabilan sistem s prijenosnom funkcijom  $H(s)$ . Tada je*

$$\|H\|_{\mathcal{H}_2} = \sqrt{\text{tr}(B^T Q' B)} = \sqrt{\text{tr}(C P C^T)},$$

*gdje je  $Q'$  rješenje generalizirane Ljapunovljeve jednadžbe  $A^T X E + E^T X A + C^T C = 0$ .*

*Dokaz.* Zamjenom  $A \rightarrow E^{-1}A$  i  $B \rightarrow E^{-1}B$  u (4.1) dobivamo

$$\begin{aligned} \|H\|_{\mathcal{H}_2} &= \sqrt{\text{tr}(B^T E^{-T} Q E^{-1} B)} = \sqrt{\text{tr}(B^T Q' B)} \\ &= \sqrt{\text{tr}(C P C^T)}, \end{aligned}$$

jer vrijedi  $Q = E^T Q' E$ . □

Važno je istaknuti da je ovime pokazano da je prijenosna funkcija proizvoljnog stabilnog realnog dinamičkog sistema  $(E, A, B, C)$  element prostora  $\mathcal{H}_2^{p \times m}(\mathbb{C}_+)$ . Stoga nam se isplatilo proučavati teoriju Hardyjevih prostora i ponekad ćemo poistovjećivati prikaz u prostoru stanja s prijenosnom funkcijom.

**Primjer 4.3.** Izračunajmo, na više načina, normu sistema koji odgovara prigušenom harmonijskom oscilatoru  $y'' = -y - y' + u$ :

$$(E, A, B, C) = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

Iskoristio prvo formulu (3.1). Najprije nam treba prijenosna funkcija:

$$H(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s(s+1)+1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + s + 1}.$$

Slijedi da je

$$\begin{aligned} \|H\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|-\omega^2 + i\omega + 1|^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\omega^2 - 1)^2 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega^4 - \omega^2 + 1} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \pi = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Provjerimo hoćemo li dobiti isti rezultat pomoću (4.1). Računom se dobije

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ i } Q = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Vidimo da je  $\text{tr}(CPC^T) = \text{tr}(B^TQB) = \frac{1}{2} = \|H\|_{\mathcal{H}_2}^2$ .

Javlja se pitanje kako računati udaljenost dva sistema. Udaljenost u normiranom prostoru se definira kao norma razlike, pa moramo vidjeti što dobivamo razlikom dvije prijenosne funkcije. Neka je  $(E_i, A_i, B_i, C_i)$  sistem s  $n_i$  stanja,  $m$  ulaza i  $p$  izlaza s pripadnom prijenosnom funkcijom  $H_i$ , za  $i = 1, 2$ . Tada je

$$\begin{aligned} (H_1 - H_2)(s) &= H_1(s) - H_2(s) \\ &= C_1(sE_1 - A_1)^{-1}B_1 - C_2(sE_2 - A_2)^{-1}B_2 \\ &= \begin{bmatrix} C_1 & -C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sE_1 - A_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (sE_2 - A_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_1 & -C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sE_1 - A_1 & 0 \\ 0 & sE_2 - A_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= [C_1 \quad -C_2] \left( s \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

Time smo pokazali da je  $H_1 - H_2$  prijenosna funkcija sistema

$$\left( \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, [C_1 \quad -C_2] \right)$$

s  $n_1 + n_2$  stanja,  $m$  ulaza i  $p$  izlaza. Odredimo gramijan upravljivosti dobivenog sistema. Označimo ga s

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_{12} \\ P_{12}^T & P_2 \end{bmatrix}.$$

Vrijedi

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_{12} \\ P_{12}^T & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1^T & 0 \\ 0 & E_2^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_{12} \\ P_{12}^T & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^T & 0 \\ 0 & A_2^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1^T & B_2^T \end{bmatrix} = 0.$$

Množenjem dobivamo tri različite jednadžbe:

$$\begin{aligned} A_1 P_1 E_1^T + E_1 P_1 A_1^T + B_1 B_1^T &= 0 \\ A_1 P_{12} E_2^T + E_1 P_{12} A_2^T + B_1 B_2^T &= 0 \\ A_2 P_2 E_2^T + E_2 P_2 A_2^T + B_2 B_2^T &= 0 \end{aligned}$$

Iz prve i treće jednadžbe uočavamo da su  $P_1$  i  $P_2$  gramijani upravljivosti za prvi i drugi sistem. Dobivamo da je

$$\begin{aligned} \|H_1 - H_2\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \text{tr} \left( [C_1 \quad -C_2] \begin{bmatrix} P_1 & P_{12} \\ P_{12}^T & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^T \\ -C_2^T \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{tr} (C_1 P_1 C_1^T - C_1 P_{12} C_2^T - C_2 P_{12}^T C_1^T + C_2 P_2 C_2^T) \\ &= \text{tr} (C_1 P_1 C_1^T - 2C_1 P_{12} C_2^T + C_2 P_2 C_2^T) \\ &= \|H_1\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \|H_2\|_{\mathcal{H}_2}^2 - 2 \text{tr} (C_1 P_{12} C_2^T). \end{aligned}$$

## 4.2 Balansirano rezanje

Definirat ćemo Hankelove singularne vrijednosti sistema i balansiranu realizaciju sistema. Vidjet ćemo kako su ti pojmovi povezani te koju ulogu imaju u metodi balansiranog rezanja.

Za sistem  $(I, A, B, C)$  se *Hankelove singularne vrijednosti* definiraju kao korijeni svojstvenih vrijednosti matrice  $QP$ . Na isti način definiramo i Hankelove singularne vrijednosti sistema  $(E, A, B, C)$ . Uočavamo da za ekvivalentni sistem  $(\tilde{E}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$  vrijedi  $\tilde{Q}\tilde{P} = T^T QPT^{-T}$ . Dakle,  $QP$  i  $\tilde{Q}\tilde{P}$  su slične matrice, pa imaju iste svojstvene vrijednosti, čime smo pokazali da Hankelove singularne vrijednosti ne ovise o promjeni u ekvivalentni sistem.

Polazište za metodu balansiranog rezanja je balansirana realizacija sistema. Pokazali smo da gramijani  $P$  i  $Q$  daju informaciju o upravljivosti i osmotrivosti pojedinih stanja. Ideja je dobiti sistem nižeg reda odbacivanjem stanja koja su slabo upravljiva i osmotriva. Problem je što neko stanje može istovremeno biti jako upravljivo i slabo osmotrivo ili obratno. Sljedeći primjer to pokazuje.

**Primjer 4.4.** Za  $\varepsilon > 0$  definiramo

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\varepsilon}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{\varepsilon}{2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{bmatrix} \text{ i } C = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Direktnim računom se može pokazati da su

$$P = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} \end{bmatrix} \text{ i } Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

gramijani za sistem  $(I, A, B, C)$ . Dakle, stanje  $x_1$  može biti proizvoljno jako upravljivo i slabo osmotrivo ili obratno (analogno za stanje  $x_2$ ).

Postavlja se pitanje je li moguće dobrim odabirom matrice  $T$  postići da slabo upravljiva i osmotriva stanja budu lakše uočljivija. Sljedeći teorem daje pozitivan odgovor (dokaz je preuzet iz sekcije 14.2.1 u [8]).

**Teorem 4.5.** Neka su  $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  pozitivno definitne matrice. Tada postoji regularna matrica  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  takva da je  $T^{-1}PT^{-T} = T^TQT = \Sigma$ , gdje je  $\Sigma$  dijagonalna matrica koja na dijagonali ima korijene svojstvenih vrijednosti od  $QP$  u padajućem poretku.

*Dokaz.* Neka su  $P = R_P^T R_P$  i  $Q = R_Q^T R_Q$  Cholesky faktorizacije i  $R_Q R_P^T = U \Sigma V^T$  SVD dekompozicija. Definiramo  $T := R_P^T V \Sigma^{-1/2}$ . Tada je

$$T^{-1}PT^{-T} = \Sigma^{1/2} V^T R_P^{-T} R_P^T R_P R_P^{-1} V \Sigma^{1/2} = \Sigma$$

i

$$T^TQT = \Sigma^{-1/2} V^T R_P R_Q^T R_Q R_P^T V \Sigma^{-1/2} = \Sigma^{-1/2} V^T V \Sigma U^T U \Sigma V^T V \Sigma^{-1/2} = \Sigma.$$

Uočimo da je

$$R_Q R_P^T R_P R_Q^T = U \Sigma V^T V \Sigma U^T = U \Sigma^2 U^T.$$



Kako su  $R_Q R_P^T R_P R_Q^T$  i  $R_Q^T R_Q R_P^T R_P = QP$  slične matrice, slijedi da su svojstvene vrijednosti od  $QP$  jednake kvadratima dijagonalnih elemenata matrice  $\Sigma$ . Zbog svojstva SVD dekompozicije zaključujemo da su elementi na dijagonali od  $\Sigma$  poredani padajuće.  $\square$

Teorem 4.5 kaže da je uvijek moguće simultano dijagonalizirati gramijane  $P$  i  $Q$  te da dobivena dijagonalna matrica za dijagonalne elemente ima Hankelove singularne vrijednosti. Također je dana jedna metoda određivanja matrice  $T$ . Ekvivalentni sistem kojem su gramijani dvije jednake dijagonalne matrice, s Hankelovim singularnim vrijednostima na dijagonali u padajućem poretku, zovemo *balansirana realizacija*.

Odredimo algoritam za određivanje balansirane realizacije sistema  $(E, A, B, C)$ . Prvi korak je računanje Cholesky faktora gramijana. Umjesto rješavanja (generalizirane) Ljapunovljeve jednadžbe i računanja Cholesky faktora dobivenog rješenja, razvijene su metode za direktno računanje Cholesky faktora pozitivno definitnog rješenja Ljapunovljeve jednadžbe (algoritam 8.6.1 u [8]). Razlog korištenja takve metode je mogućnost da rješenje Ljapunovljeve jednadžbe, dobiveno numeričkom metodom, nije pozitivno definitno. U Matlab-u je metoda za direktno određivanje Cholesky faktora rješenja (generalizirane) Ljapunovljeve jednadžbe implementirana u funkciji `lyapchol`.

Ovime smo odredili metodu za određivanje Cholesky faktora gramijana upravljivosti, ali ne i gramijana osmotrivosti. Naime, gramijan upravljivosti je rješenje generalizirane Ljapunovljeve jednadžbe  $AXE^T + EXA^T + BB^T = 0$ , dok je gramijan osmotrivosti jednak  $E^T Q' E$ , gdje je  $Q'$  rješenje jednadžbe  $A^T XE + E^T XA + C^T C = 0$ . Dakle, možemo efikasno odrediti  $R_P$  i  $R_{Q'}$ , ali  $R_Q$  je Cholesky faktor od  $E^T R_{Q'}^T R_{Q'} E$ , što je produkt matrica velikog reda koji želimo izbjeći računati.

Uočimo da je  $QP = E^T Q' E P = E^T R_{Q'}^T R_{Q'} E R_P^T R_P$ . Tvrdimo da je za matricu  $T$  dobar izbor  $R_P^T V \Sigma^{-1/2}$ , gdje je  $U \Sigma V^T$  SVD dekompozicija od  $R_{Q'} E R_P^T$ . Računamo:

$$T^{-1} P T^{-T} = \Sigma^{1/2} V^T R_P^{-T} R_P^T R_P R_P^{-1} V \Sigma^{1/2} = \Sigma,$$

$$T^T Q T = \Sigma^{-1/2} V^T R_P E^T R_{Q'}^T R_{Q'} E R_P^T V \Sigma^{-1/2} = \Sigma^{-1/2} V^T V \Sigma U^T U \Sigma V^T V \Sigma^{-1/2} = \Sigma.$$

Time smo pokazali tvrdnju. Slično kao u dokazu Teorema 4.5 se može pokazati da dijagonalni elementi od  $\Sigma$  čine Hankelove singularne vrijednosti. Algoritam za određivanje balansiranje realizacije je dan u 4.1.

Kao što smo rekli, ideja metode balansiranog rezanja je eliminiranje stanja koja su slabo upravljiva i osmotriva. To postizemo odbacivanjem nekoliko stanja s najvećim indeksima u balansiranoj realizaciji. Doista, ako označimo s  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$  Hankelove singularne vrijednosti, onda za balansiranu realizaciju vrijedi

$$P = Q = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix},$$

**Algoritam 4.1** Određivanje balansirane realizacijeUlaz: sistem  $(E, A, B, C)$ Izlaz: balansirana realizacija  $(\tilde{E}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ 

- 1: Izračunati  $R_P$  i  $R_Q$  kao Cholesky faktore rješenja generaliziranih Ljapunovljevih jednadžbi  $AXE^T + EXA^T + BB^T = 0$  i  $A^T XE + E^T XA + C^T C = 0$
- 2: Izračunati SVD dekompoziciju  $R_Q ER_P^T = U\Sigma V^T$
- 3:  $T = R_P^T V \Sigma^{-1/2}$
- 4:  $\tilde{E} = ET, \tilde{A} = AT, \tilde{B} = B, \tilde{C} = CT$

iz čega vidimo da su stanja s najvećim indeksima najmanje upravljiva i osmotriva. Iskazujemo teorem koji govori o reduciranom modelu dobivenim balansiranim rezanjem.

**Teorem 4.6.** *Neka je  $H$  stabilan, upravljiv i osmotriv sistem s balansiranom realizacijom  $(I, A, B, C)$ . Neka su  $\sigma_i, i = 1, 2, \dots, n$ , Hankelove singularne vrijednosti sistema  $H$  takve da je  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$ . Neka je  $H_1$  sistem s realizacijom  $(I, A_1, B_1, C_1)$  reda  $r$  dobivenom uzimanjem prvih  $r$  stanja u  $(I, A, B, C)$ . Tada vrijedi:*

1.  $H_1$  je stabilan sistem.
2. Ako je  $\sigma_r > \sigma_{r+1}$ , onda je  $H_1$  upravljiv i osmotriv sistem te je

$$\|H - H_1\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)',$$

gdje se višestruke Hankelove singularne vrijednosti u gornjoj sumi' pojavljuju samo jednom.

*Dokaz.* Ovo je reformulacija Teorema 7.9 iz [2]. □

Teorem 4.6 daje dovoljne uvjete da sistem dobiven balansiranim rezanjem bude stabilan, upravljiv i osmotriv te ocjenu na grešku u  $\mathcal{H}_\infty$ -normi, koja je korisna kod odabira reda reduciranog modela. Gornje ograde za grešku u  $\mathcal{H}_2$ -normi se mogu naći u [2, §7.2.2].

Sada imamo jednostavni algoritam za balansirano rezanje sistema  $(E, A, B, C)$ . Koristeći matricu  $T$  iz Algoritma 4.1 dobivamo balansiranu realizaciju

$$(I, T^{-1}E^{-1}AT, T^{-1}E^{-1}B, CT),$$

od koje onda uzimamo prvih nekoliko stanja i jednadžbi. Dakle, ako s  $I_{n,r}$  označimo matricu reda  $n \times r$  dobivenom izdvajanjem prvih  $r$  stupaca iz jedinične matrice reda  $n \times n$ , reducirani sistem je

$$(I, I_{n,r}^T T^{-1} E^{-1} A T I_{n,r}, I_{n,r}^T T^{-1} E^{-1} B, C T I_{n,r}). \quad (4.2)$$

Uočimo da je sistem (4.2) jednak sistemu

$$(W_r^T E V_r, W_r^T A V_r, W_r^T B, C V_r)$$

uz  $V_r = T I_{n,r}$  i  $W_r = E^{-T} T^{-T} I_{n,r}$ . Vidimo da je  $T^{-T} = E^T R_Q^T U \Sigma^{-1/2}$ , prema čemu je  $W_r = R_Q^T U \Sigma^{-1/2} I_{n,r}$ . Stoga prilikom redukcije nije potrebno računati inverz od  $E$  (ili rješavati sustav linearnih jednačnji s  $E$  kao matricom sustava).

Kako matrice  $V_r$  i  $W_r$  mogu biti loše uvjetovane i dovoljno nam je da numerička metoda kao rezultat vrati sistem ekvivalentan sistemu (4.2), za redukciju možemo koristiti neke bolje uvjetovane matricu, uz uvjet da one razapinju iste potprostore. Odlučujemo se za četvrtu metodu u [2, §7.2], koju smo zapisali u Algoritmu 4.2.

---

**Algoritam 4.2** Balansirano rezanje
 

---

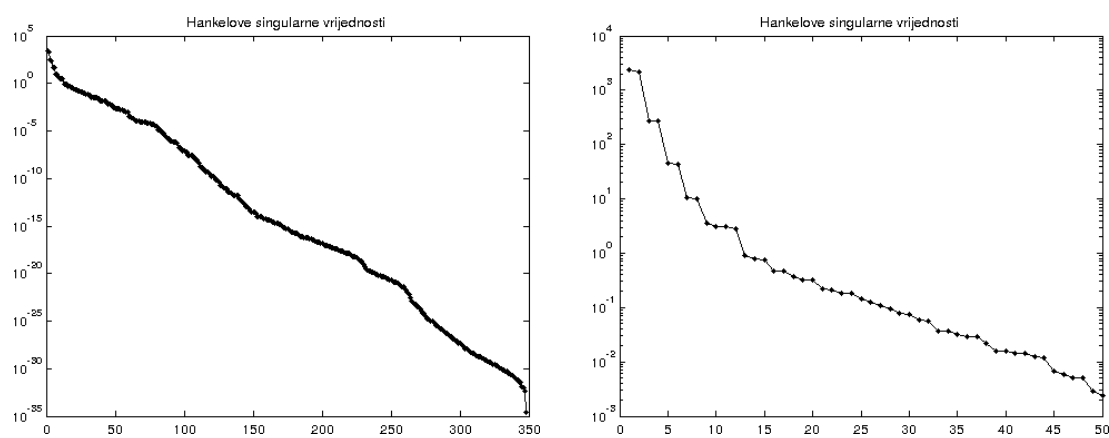
Ulaz: sistem  $(E, A, B, C)$  i red  $r$

Izlaz: reducirani sistem  $(\tilde{E}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$

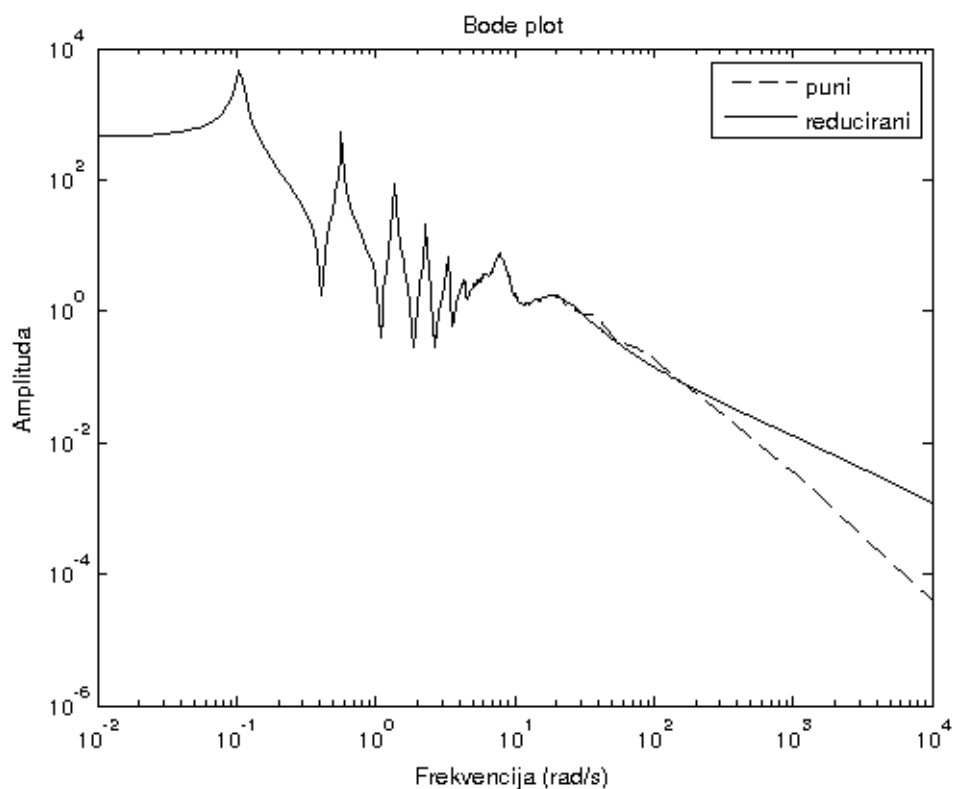
- 1: Izračunati  $R_P$  i  $R_Q$  kao Cholesky faktore rješenja generaliziranih Ljapunovljevih jednačnji  $AXE^T + EXA^T + BB^T = 0$  i  $A^T XE + E^T XA + C^T C = 0$
  - 2: Izračunati SVD dekompoziciju  $R_Q^T E R_P^T = U \Sigma V^T$
  - 3: Odrediti parcijalne QR faktorizacije  $R_P^T V I_{n,r} = V_r R_1$  i  $R_Q^T U I_{n,r} = W_r R_2$
  - 4:  $\tilde{E} = W_r^T E V_r$ ,  $\tilde{A} = W_r^T A V_r$ ,  $\tilde{B} = W_r^T B$ ,  $\tilde{C} = C V_r$
- 

Demonstriramo rezultat redukcije metodom balansiranog rezanja na primjeru Beam modela iz NICONET baze [7]. Na Slici 4.1 su prikazane Hankelove singularne vrijednosti tog sistema. S obzirom da ih je puno i da brzo padaju, izdvojeno je i prvih 50 Hankelovih singularnih vrijednosti. Odlučili smo se za  $r = 20$ , bez nekog posebnog razloga. Suma svih Hankelovih singularnih vrijednosti je 5220, a suma onih s indeksima većim od 20 je 1.84, i omjer suma je  $3.52 \cdot 10^{-4}$ .

Na Slici 4.2 je prikazan Bode plot Beam modela i reduciranog modela. Uočavamo da su svi šiljci Beam modela prekriveni reduciranim modelom. Relativna  $\mathcal{H}_2$ -greška iznosi  $2.7377 \cdot 10^{-3}$ .



Slika 4.1: Hankelove singularne vrijednosti (sve i prvih 50) Beam modela iz NICONET baze [7]



Slika 4.2: Bode plot Beam modela i reduciranog modela reda  $r = 20$  dobivenom balansiranim rezanjem

# Poglavlje 5

## Interpolacijska redukcija modela

### 5.1 Redukcija projekcijom

Neka je zadan sistem

$$\begin{aligned} Ex'(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \tag{5.1}$$

gdje su  $A, E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  i  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  konstantne matrice te  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  stanje,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  ulaz i  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  izlaz sistema. Tražimo reducirani sistem

$$\begin{aligned} E_r x_r'(t) &= A_r x_r(t) + B_r u(t), \\ y_r(t) &= C_r x_r(t), \end{aligned} \tag{5.2}$$

s  $A_r, E_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $B_r \in \mathbb{R}^{r \times m}$  i  $C_r \in \mathbb{R}^{p \times r}$ . Želimo da je  $r \ll n$ , a da preslikavanje  $u \mapsto y_r$  dobro aproksimira  $u \mapsto y$ .

Opišimo najprije općeniti postupak određivanja reduciranog sistema, poznat kao *redukcija projekcijom* ili *Petrov-Galerkinova projektivna aproksimacija*. Najprije uočimo da je (5.1) ekvivalentno s

$$\begin{aligned} x(t) &\in \mathbb{C}^n, \quad Ex'(t) - Ax(t) - Bu(t) \perp \mathbb{C}^n, \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned}$$

Redukcija projekcijom se sastoji od zadavanja  $r$ -dimenzionalnih potprostora  $\mathcal{V}_r, \mathcal{W}_r \subseteq \mathbb{C}^n$  i reduciranog sistema s

$$\begin{aligned} v(t) &\in \mathcal{V}_r, \quad Ev'(t) - Av(t) - Bu(t) \perp \mathcal{W}_r, \\ y_r(t) &= Cv(t). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Odabirom baza za  $\mathcal{V}_r$  i  $\mathcal{W}_r$  dolazimo do matrica  $V_r, W_r \in \mathbb{C}^{n \times r}$  takvih da je  $\mathcal{V}_r = \text{Im}(V_r)$  i  $\mathcal{W}_r = \text{Im}(W_r)$ . Tada možemo pisati  $v(t) = V_r x_r(t)$  uz  $x_r(t) \in \mathbb{C}^r$ , za svaki  $t \in \mathbb{R}$ , i sistem

(5.3) zapisati kao

$$\begin{aligned} W_r^T (EV_r x_r'(t) - AV_r x_r(t) - Bu(t)) &= 0, \\ y_r(t) &= CV_r x_r(t), \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} W_r^T EV_r x_r'(t) &= W_r^T AV_r x_r(t) + W_r^T Bu(t) \\ y_r(t) &= CV_r x_r(t). \end{aligned}$$

Dakle, uzimajući

$$E_r = W_r^T EV_r, \quad A_r = W_r^T AV_r, \quad B_r = W_r^T B \quad \text{i} \quad C_r = CV_r,$$

dolazimo do prikaza (5.2)

## 5.2 Tangencijalna Hermiteova interpolacija

Opisali smo općeniti postupak redukcije sistema. Preostaje pitanje kako odabrati potprostore  $\mathcal{V}_r$  i  $\mathcal{W}_r$ , odnosno matrice  $V_r$  i  $W_r$ . Metoda ćemo ovdje objasniti, i kasnije koristiti, zasniva se na *tangencijalnoj Hermiteovoj interpolaciji*.

Neka je zadan sistem (5.1) s prijenosnom funkcijom  $H$  te *interpolacijske točke*  $\{\sigma_i\}_{i=1}^r \subset \mathbb{C}$ , *desni tangencijalni smjerovi*  $\{b_i\}_{i=1}^r \subset \mathbb{C}^m$  i *lijevi tangencijalni smjerovi*  $\{c_i\}_{i=1}^r \subset \mathbb{C}^p$ . Želimo naći sistem (5.2) s prijenosnom funkcijom  $H_r$  koja je tangencijalni Hermiteov interpolant za  $H$  u zadanim interpolacijskim točkama s zadanim tangencijalnim smjerovima:

$$\begin{aligned} H(\sigma_i)b_i &= H_r(\sigma_i)b_i, \\ c_i^T H(\sigma_i) &= c_i^T H_r(\sigma_i), \quad i = 1, \dots, r. \\ c_i^T H'(\sigma_i)b_i &= c_i^T H'_r(\sigma_i)b_i, \end{aligned}$$

Sljedeći teorem (modifikacija Teorema 1 u [3]) govori kako odabrati  $V_r$  i  $W_r$  tako da se postigne interpolacija.

**Teorem 5.1.** *Neka je  $\sigma \in \mathbb{C}$  takav da su  $\sigma E - A$  i  $\sigma E_r - A_r$  regularne matrice,  $V_r, W_r \in \mathbb{C}^{n \times r}$  punog ranga te  $b \in \mathbb{C}^m$  i  $c \in \mathbb{C}^p$  fiksni netrivialni vektori. Tada*

(a) *ako je  $(\sigma E - A)^{-1} Bb \in \text{Im}(V_r)$ , onda vrijedi  $H(\sigma)b = H_r(\sigma)b$ ,*

(b) *ako je  $(c^T C(\sigma E - A)^{-1})^T \in \text{Im}(W_r)$ , onda vrijedi  $c^T H(\sigma) = c^T H_r(\sigma)$ ,*

(c) *ako vrijede pretpostavke u (a) i (b), onda dodatno vrijedi  $c^T H'(\sigma)b = c^T H'_r(\sigma)b$ .*

*Dokaz.* Definirajmo

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_r(z) &= V_r(zE_r - A_r)^{-1}W_r^T(zE - A) \text{ i} \\ \mathcal{Q}_r(z) &= (zE - A)\mathcal{P}_r(z)(zE - A)^{-1} = (zE - A)V_r(zE_r - A_r)^{-1}W_r^T.\end{aligned}$$

Uočimo da su  $\mathcal{P}_r(z)$  i  $\mathcal{Q}_r(z)$  analitičke funkcije s matičnim vrijednostima u okolini  $z = \sigma$ . Iz

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_r(z)^2 &= V_r(zE_r - A_r)^{-1}W_r^T(zE - A)V_r(zE_r - A_r)^{-1}W_r^T(zE - A) \\ &= V_r(zE_r - A_r)^{-1}\left(zW_r^T E V_r - W_r^T A V_r\right)(zE_r - A_r)^{-1}W_r^T(zE - A) \\ &= V_r(zE_r - A_r)^{-1}(zE_r - A_r)(zE_r - A_r)^{-1}W_r^T(zE - A) \\ &= V_r(zE_r - A_r)^{-1}W_r^T(zE - A) \\ &= \mathcal{P}_r(z)\end{aligned}$$

slijedi da je  $\mathcal{P}_r(z)$  projektor, za  $z$  iz okoline od  $\sigma$ . Slično se može pokazati da je i  $\mathcal{Q}_r(z)$  projektor. Iz definicija od  $\mathcal{P}_r(z)$  i  $\mathcal{Q}_r(z)$  te tvrdnji da su to projektori, slijedi da je  $\mathcal{V}_r = \text{Im}(\mathcal{P}_r(z)) = \text{Ker}(I - \mathcal{P}_r(z))$  i  $\mathcal{W}_r^\perp = \text{Ker}(\mathcal{Q}_r(z)) = \text{Im}(I - \mathcal{Q}_r(z))$ , za svaki  $z$  iz okoline od  $\sigma$ .

Uočimo da je

$$\begin{aligned}H(z) - H_r(z) &= C(zE - A)^{-1}B - C_r(zE_r - A_r)^{-1}B_r \\ &= C(zE - A)^{-1}B - CV_r(zE_r - A_r)^{-1}W_r^T B \\ &= C\left[(zE - A)^{-1} - V_r(zE_r - A_r)^{-1}W_r^T\right]B \\ &= C\left[I - V_r(zE_r - A_r)^{-1}W_r^T(zE - A)\right](zE - A)^{-1}B \\ &= C(I - \mathcal{P}_r(z))(zE - A)^{-1}B \\ &= C(I - \mathcal{P}_r(z))^2(zE - A)^{-1}B \\ &= C(zE - A)^{-1}(zE - A)(I - \mathcal{P}_r(z))(I - \mathcal{P}_r(z))(zE - A)^{-1}B \\ &= C(zE - A)^{-1}\left[(zE - A) - (zE - A)V_r(zE_r - A_r)^{-1}W_r^T(zE - A)\right] \\ &\quad \cdot (I - \mathcal{P}_r(z))(zE - A)^{-1}B \\ &= C(zE - A)^{-1}\left[I - (zE - A)V_r(zE_r - A_r)^{-1}W_r^T\right](zE - A) \\ &\quad \cdot (I - \mathcal{P}_r(z))(zE - A)^{-1}B \\ &= C(zE - A)^{-1}(I - \mathcal{Q}_r(z))(zE - A)(I - \mathcal{P}_r(z))(zE - A)^{-1}B.\end{aligned}\tag{5.4}$$

Ako je  $(\sigma E - A)^{-1}Bb \in \text{Im}(V_r)$ , zbog  $\text{Ker}(I - \mathcal{P}_r(\sigma)) = \text{Im}(V_r)$  vrijedi

$$(I - \mathcal{P}_r(\sigma))(\sigma E - A)^{-1}Bb = 0.$$

Stoga izvrijednjavanjem (5.4) u  $z = \sigma$  i množenjem zdesna s  $b$  dobivamo  $H(\sigma)b - H_r(\sigma)b = 0$ , tj.  $H(\sigma)b = H_r(\sigma)b$ , čime smo pokazali tvrdnju (a). Analogno se pokaže tvrdnja (b). Doista, zbog  $\text{Im}(I - Q_r(\sigma)) = \text{Im}(\overline{W_r})^\perp$  slijedi da je

$$c^T C(\sigma E - A)^{-1}(I - Q_r(\sigma)) = 0.$$

Izvrijednjavanjem (5.4) u  $z = \sigma$  i množenjem slijeva s  $c^T$  dobivamo  $c^T H(\sigma) - c^T H_r(\sigma) = 0$ , tj.  $c^T H(\sigma) = c^T H_r(\sigma)$ .

Preostaje pokazati tvrdnju (c). Koristeći pravilo za derivaciju inverza matrice funkcije slijedi da je

$$\begin{aligned} ((\sigma + \varepsilon)E - A)^{-1} &= (\sigma E - A)^{-1} - \varepsilon(\sigma E - A)^{-1}E(\sigma E - A)^{-1} + o(\varepsilon), \\ ((\sigma + \varepsilon)E_r - A_r)^{-1} &= (\sigma E_r - A_r)^{-1} - \varepsilon(\sigma E_r - A_r)^{-1}E_r(\sigma E_r - A_r)^{-1} + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Uz pretpostavke iz (c) slijedi

$$\begin{aligned} (I - \mathcal{P}_r(\sigma + \varepsilon))((\sigma + \varepsilon)E - A)^{-1}Bb \\ = (I - \mathcal{P}_r(\sigma + \varepsilon)) \left[ (\sigma E - A)^{-1} - \varepsilon(\sigma E - A)^{-1}E(\sigma E - A)^{-1} + o(\varepsilon) \right] Bb \\ = -\varepsilon(I - \mathcal{P}_r(\sigma + \varepsilon))(\sigma E - A)^{-1}E(\sigma E - A)^{-1}Bb + o(\varepsilon), \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} c^T C((\sigma + \varepsilon)E - A)^{-1}(I - Q_r(\sigma + \varepsilon)) \\ = c^T C \left[ (\sigma E - A)^{-1} - \varepsilon(\sigma E - A)^{-1}E(\sigma E - A)^{-1} + o(\varepsilon) \right] (I - Q_r(\sigma + \varepsilon)) \\ = -\varepsilon c^T C(\sigma E - A)^{-1}E(\sigma E - A)^{-1}(I - Q_r(\sigma + \varepsilon)) + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Stoga izvrijednjavajući (5.4) u  $z = \sigma + \varepsilon$ , množenjem zdesna s  $b$  i slijeva s  $c^T$  te koristeći (5.5) i (5.6) slijedi da je  $c^T H(\sigma + \varepsilon)b - c^T H_r(\sigma + \varepsilon)b = o(\varepsilon)$ . Dobivamo, koristeći  $c^T H(\sigma)b = c^T H_r(\sigma)b$ , da je

$$\begin{aligned} c^T H'(\sigma)b - c^T H_r'(\sigma)b &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{c^T H(\sigma + \varepsilon)b - c^T H(\sigma)b}{\varepsilon} - \frac{c^T H_r(\sigma + \varepsilon)b - c^T H_r(\sigma)b}{\varepsilon} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{c^T H(\sigma + \varepsilon)b - c^T H_r(\sigma + \varepsilon)b}{\varepsilon} \\ &= 0, \end{aligned}$$

čime je pokazana tvrdnja (c). □

**Teorem 5.1** pokazuje da se zadavanjem

$$V_r = \left[ (\sigma_1 E - A)^{-1} B b_1 \quad \cdots \quad (\sigma_r E - A)^{-1} B b_r \right] \text{ i } W_r^T = \begin{bmatrix} c_1^T C(\sigma_1 E - A)^{-1} \\ \vdots \\ c_r^T C(\sigma_r E - A)^{-1} \end{bmatrix}$$



**Algoritam 5.3** Tangencijalna Hermiteova interpolacija

**Ulaz:** prijenosna funkcija  $H(s) = C(sE - A)^{-1}B$ , interpolacijske točke  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ , desni tangencijalni smjerovi  $\{b_1, \dots, b_r\}$  i lijevi tangencijalni smjerovi  $\{c_1, \dots, c_r\}$

**Izlaz:** prijenosna funkcija  $H_r(s) = C_r(sE_r - A_r)^{-1}B_r$  koja je tangencijalna Hermiteova interpolacija od  $H$

- 1:  $V_r = [(\sigma_1 E - A)^{-1} B b_1 \ \dots \ (\sigma_r E - A)^{-1} B b_r]$
- 2:  $W_r = [(\sigma_1 E - A)^{-T} C^T c_1 \ \dots \ (\sigma_r E - A)^{-T} C^T c_r]$
- 3:  $E_r = W_r^T E V_r, A_r = W_r^T A V_r, B_r = W_r^T B, C_r = C V_r$

rješava problem tangencijalne Hermiteove interpolacije sa zadanim interpolacijskim točkama i tangencijalnim smjerovima. Ovo zapisujemo u Algoritmu 5.3.

**Primjer 5.2.** Ilustriramo tvrdnju Teorema 5.1 na CDplayer modelu iz NICONET baze primjera [7]. Radi se o MIMO sistemu s 120 stanja, dva ulaza i dva izlaza. Neka je

$$r = 2, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2, b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, c_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Kao rezultat Algoritma 5.3 dobivamo matrice  $V_r, W_r \in \mathbb{R}^{120 \times 2}$ ,  $E_r, A_r, B_r, C_r \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Račun pokazuje da je

$$H(\sigma_1) = \begin{bmatrix} 4.6418 \cdot 10^4 & -2.5855 \cdot 10^{-3} \\ -1.4314 & -3.2574 \cdot 10^2 \end{bmatrix} \text{ i } H_r(\sigma_1) = \begin{bmatrix} 4.6382 \cdot 10^4 & 36.284 \\ 71.141 & -3.9831 \cdot 10^2 \end{bmatrix}.$$

Dakle,  $H_r$  nije interpolant od  $H$  u točki  $\sigma_1 = 1$ . No, vrijedi (do na strojnu točnost)

$$H(\sigma_1)b_1 = \begin{bmatrix} 4.6418 \cdot 10^4 \\ -3.2717 \cdot 10^2 \end{bmatrix} = H_r(\sigma_1)b_1,$$

što tvrdi Teorem 5.1. Slično se provjeri da vrijede i ostale tvrdnje  
Bitno je vidjeti da je

$$V_r^T V_r = 10^3 \begin{bmatrix} 2.0531 & 2.0454 \\ 2.0454 & 2.0428 \end{bmatrix},$$

iz čega vidimo da stupci nisu normirani niti međusobno ortogonalni. Stoga matrice  $V_r$  i  $W_r$  mogu biti loše uvjetovane, što može pouzročiti da množenja u liniji 3 Algoritma 5.3 daju vrlo loše rezultate. Kasnije ćemo se vratiti tom problemu.

Preostaje pitanje kako odrediti interpolacijske točke i tangencijalne smjerove. Time ćemo se baviti pri kraju ovog poglavlja.

### 5.3 Pol-reziduum forma i skalarni produkt u prostoru $\mathcal{H}_2$

U sljedećoj sekciji će se ključnim pokazati pol-reziduum forma racionalne funkcije i računanje skalarnog produkta u prostoru  $\mathcal{H}_2^{p \times m}(\mathbb{C}_+)$  koristeći tu formu. U izrazu za kompleksni skalarni produkt se pojavljuje kompleksno konjugiranje i stoga za  $H \in \mathcal{H}_2$  definiramo  $\overline{H}$  tako da vrijedi  $\overline{H(s)} = \overline{H(\overline{s})}$ . Vidimo da je

$$\langle G, H \rangle_{\mathcal{H}_2} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \text{tr}(G(i\omega)^T \overline{H}(-i\omega)) d\omega,$$

za  $G, H \in \mathcal{H}_2$ . Kod realnih dinamičkih sistema vrijedi  $\overline{H} = H$ , čime se gornji izraz djelomično pojednostavljuje.

U sljedećoj definiciji se prisjećamo što su polovi i reziduumi kompleksne skalarne funkcije kompleksne varijable, pa te pojmove poopćujemo na kompleksne matične funkcije kompleksne varijable. Definiramo i pol-reziduum formu racionalne forme.

**Definicija 5.3.** *Neka je  $f$  meromorfna funkcija (analitička svugdje osim u izoliranim polovima konačnog reda). Kažemo da je  $\lambda$  jednostavan pol od  $f$  ako*

$$\lim_{s \rightarrow \lambda} (s - \lambda)^k f(s) = 0, \text{ za } k \geq 2,$$

*i reziduum je netrivialan:*

$$\text{res}[f(s), \lambda] = \lim_{s \rightarrow \lambda} (s - \lambda)f(s) \neq 0.$$

*Za matičnu meromorfnu funkciju  $F$  kažemo da je  $\lambda$  jednostavan pol od  $F$  ako*

$$\lim_{s \rightarrow \lambda} (s - \lambda)^k F(s) = 0, \text{ za } k \geq 2,$$

*i*

$$\text{res}[F(s), \lambda] = \lim_{s \rightarrow \lambda} (s - \lambda)F(s) \text{ je ranga } 1.$$

*Kažemo da je  $\lambda$  polu-jednostavni pol od  $F$  ako*

$$\lim_{s \rightarrow \lambda} (s - \lambda)^k F(s) = 0, \text{ za } k \geq 2,$$

*i*

$$\text{res}[F(s), \lambda] = \lim_{s \rightarrow \lambda} (s - \lambda)F(s) \text{ je ranga većeg od } 1.$$

*Ako  $F$  ima konačno mnogo polova i svi su jednostavni ili polu-jednostavni, definiramo red ili dimenziju od  $F$  s*

$$\dim F = \sum_{\lambda} \text{rang}(\text{res}[F(s), \lambda]),$$

gdje suma ide po svim polovima  $\lambda$  od  $F(s)$ . U tom slučaju  $F$  možemo prikazati u pol-reziduum formi:

$$F(s) = \sum_{i=1}^{\dim F} \frac{1}{s - \lambda_i} c_i b_i^T.$$

Iskazujemo i dokazujemo lemu o računanju skalarnog produkta u prostoru  $\mathcal{H}_2$  pomoću pol-reziduum forme (Lema 1 u [3]).

**Lema 5.4.** *Neka su  $F, G \in \mathcal{H}_2$  te neka  $F$  ima samo jednostavne i polu-jednostavne polove u  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  tako da je  $m = \dim F$  i  $F(s) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{s - \lambda_i} c_i b_i^T$ . Tada vrijedi*

$$\langle F, G \rangle_{\mathcal{H}_2} = \sum_{i=1}^m c_i^T \overline{G(-\lambda_i)} b_i$$

*i*

$$\|F\|_{\mathcal{H}_2} = \left( \sum_{i=1}^m c_i^T \overline{F(-\lambda_i)} b_i \right)^{1/2}.$$

*Dokaz.* Definiramo put  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  s  $\gamma(\omega) = i\omega$ . Vrijedi  $\gamma'(\omega) = i$ , pa dobivamo da je

$$\begin{aligned} \langle F, G \rangle_{\mathcal{H}_2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}(F(i\omega)^T \overline{G(-i\omega)}) d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}(F(\gamma(\omega))^T \overline{G(-\gamma(\omega))}) \gamma'(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \text{tr}(F(s)^T \overline{G(-s)}) ds. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Uočimo da funkcija  $\text{tr}(F(s)^T \overline{G(-s)})$  u lijevoj poluravnini ima singularitete u točkama  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ . Stoga za svaki  $R > 0$  definiramo polukružnu konturu u lijevoj poluravnini:

$$\Gamma_R := \{i\omega : \omega \in [-R, R]\} \cup \left\{ R e^{i\theta} : \theta \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right\}.$$

Vidimo da za dovoljno velike  $R$ , kontura  $\Gamma_R$  sadrži sve singularitete funkcije  $F$ . Želimo pokazati da je

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \text{tr}(F(s)^T \overline{G(-s)}) ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \text{tr}(F(s)^T \overline{G(-s)}) ds. \quad (5.8)$$

Prema fundamentalnoj ocjeni, dovoljno je pokazati da  $M(R) \cdot R \rightarrow 0$  kad  $R \rightarrow \infty$ , gdje je

$$M(R) = \max_{\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]} \left| \operatorname{tr} \left( F(Re^{i\theta})^T \overline{G(-Re^{i\theta})} \right) \right|.$$

Koristeći Cauchy-Schwarzovu nejednakost slijedi

$$\left| \operatorname{tr} \left( F(Re^{i\theta})^T \overline{G(-Re^{i\theta})} \right) \right| \leq \|F(Re^{i\theta})\|_F \|G(-Re^{-i\theta})\|_F.$$

Uočimo da je

$$\begin{aligned} \|F(s)\|_F^2 &= \operatorname{tr} \left( F(s)^T \overline{F(s)} \right) = \operatorname{tr} \left( \left( \sum_{j=1}^m \frac{1}{s - \lambda_j} c_j b_j^T \right)^T \overline{\left( \sum_{i=1}^m \frac{1}{s - \lambda_i} c_i b_i^T \right)} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^m \operatorname{tr} \left( \frac{1}{s - \lambda_j} b_j c_j^T \frac{1}{\overline{s - \lambda_i}} \overline{c_i} b_i^* \right) = \sum_{i,j=1}^m \frac{1}{s - \lambda_j} \frac{1}{\overline{s - \lambda_i}} \operatorname{tr} (b_i^* b_j c_j^T \overline{c_i}) \\ &= \sum_{i,j=1}^m \frac{b_i^* b_j c_j^T \overline{c_i}}{(\overline{s - \lambda_i})(s - \lambda_j)} = v(s)^* M v(s), \end{aligned}$$

gdje je  $M = [M_{ij}]$ , uz  $M_{ij} = b_i^* b_j c_j^T \overline{c_i}$ , i  $v(s) = (v_i(s))$ , uz  $v_i(s) = \frac{1}{s - \lambda_i}$ . Vidimo da je  $M$  hermitska matrica, pa vrijedi  $\|F(s)\|_F^2 \leq \lambda_{\max}(M) \|v(s)\|_2^2$ , gdje je  $\lambda_{\max}(M)$  najveća svojstvena vrijednost od  $M$ . Za sve dovoljno velike  $R > 0$  vrijedi  $|Re^{i\theta} - \lambda_i| \geq \frac{R}{2}$ , iz čega slijedi

$$\|F(Re^{i\theta})\|_F \leq \sqrt{\lambda_{\max}(M)} \|v(Re^{i\theta})\|_2 \leq \frac{C}{R},$$

za neku konstantu  $C > 0$ . Time smo dobili da je

$$M(R) \leq \frac{C}{R} \max_{\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]} \|G(-Re^{-i\theta})\|_F.$$

Stoga preostaje pokazati da

$$\max_{\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]} \|G(-Re^{-i\theta})\|_F \rightarrow 0, \text{ kad } R \rightarrow \infty.$$

Uočimo da je  $-Re^{-i\theta} \in \mathbb{C}_+$ , pa je dovoljno pokazati da je

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \|G(x + i\omega)\|_F = \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \|G(x + i\omega)\|_F = 0, \text{ za } x \geq 0, \quad (5.9)$$

i

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \|G(x + i\omega)\|_F = 0, \text{ za } \omega > 0. \quad (5.10)$$

Tvrdnja (5.9) slijedi iz činjenice da je  $(\omega \mapsto \|G(x + i\omega)\|_F) \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ , za  $x \geq 0$ . Kako bi pokazali (5.10), koristimo Propoziciju 3.15 iz koje slijedi

$$\begin{aligned} \|G(x + i\omega_0)\|_F &= \left\| \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(i\omega)}{x^2 + (\omega_0 - \omega)^2} d\omega \right\|_F \\ &\leq \frac{x}{\pi} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \|G(i\omega)\|_F^2 d\omega} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + (\omega_0 - \omega)^2)^2} d\omega} \\ &= \frac{x}{\pi} \sqrt{2\pi} \|G\|_{\mathcal{H}_2} \sqrt{\frac{\pi}{2x^3}} \\ &= \frac{\|G\|_{\mathcal{H}_2}}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Ovime smo pokazali (5.8).

Iz (5.7) i (5.8), koristeći Teorem o reziduumima, dobivamo

$$\begin{aligned} \langle F, G \rangle_{\mathcal{H}_2} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \text{tr}(F(s)^T \bar{G}(-s)) ds = \sum_{i=1}^m \text{res}[\text{tr}(F(s)^T \bar{G}(-s)), \lambda_i] \\ &= \sum_{i=1}^m \text{tr}(\text{res}[F(s), \lambda_i]^T \bar{G}(-\lambda_i)) = \sum_{i=1}^m \text{tr}(b_i c_i^T \bar{G}(-\lambda_i)) \\ &= \sum_{i=1}^m \text{tr}(c_i^T \bar{G}(-\lambda_i) b_i) = \sum_{i=1}^m c_i^T \bar{G}(-\lambda_i) b_i. \end{aligned}$$

Tvrdnja o  $\|F\|_{\mathcal{H}_2}$  slijedi iz definicije norme inducirane skalarnim produktom i gornjeg rezultata.  $\square$

## 5.4 Optimalna $\mathcal{H}_2$ aproksimacija

Za zadani puni model  $H$  tražimo reducirani model  $H_r$  koji minimizira  $\mathcal{H}_2$  grešku:

$$\|H - H_r\|_{\mathcal{H}_2} = \min_{\substack{\dim(\tilde{H}_r)=r \\ \tilde{H}_r \text{ je stabilan}}} \|H - \tilde{H}_r\|_{\mathcal{H}_2}. \quad (5.11)$$

Promotrimo što postizemo minimizacijom  $\mathcal{H}_2$  greške. Neka je  $u \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^m)$ ,  $y$  izlaz punog sistema i  $y_r$  izlaz reduciranog sistema. Vrijedi  $\widehat{y}(s) = H(s)\widehat{u}(s)$  i  $\widehat{y}_r(s) = H_r(s)\widehat{u}(s)$ . Slijedi da je

$$\|y - y_r\|_{L^\infty} = \max_{t \geq 0} \|y(t) - y_r(t)\|_\infty$$

$$\begin{aligned}
&= \max_{t \geq 0} \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\widehat{y}(i\omega) - \widehat{y}_r(i\omega)) e^{i\omega t} d\omega \right\|_{\infty} \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\widehat{y}(i\omega) - \widehat{y}_r(i\omega)\|_{\infty} d\omega \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \|H(i\omega) - H_r(i\omega)\|_F \|\widehat{u}(i\omega)\|_2 d\omega \\
&\leq \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \|H(i\omega) - H_r(i\omega)\|_F^2 d\omega \right)^{1/2} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\widehat{u}(i\omega)\|_2^2 d\omega \right)^{1/2} \\
&= \|H - H_r\|_{\mathcal{H}_2} \|u\|_{L^2},
\end{aligned}$$

gdje smo redom koristili formulu za inverznu Fourierovu pretvorbu, nejednakost trokuta za nepravu integral, odnos vektorskih i matričnih normi, Cauchy-Schwarzovu nejednakost i Parsevalovu jednakost (posljedica Propozicije 3.9). Dakle, minimizacijom  $\mathcal{H}_2$  greške postizemo manju  $L^\infty$  grešku u izlazu.

Pokazuje se da je (5.11) vrlo težak nekonveksni problem, stoga se često samo traži da reducirani model zadovoljava neke nužne uvjete optimalnosti. Sljedeći teorem (Teorem 5 u [3]) daje jedan skup uvjeta.

**Teorem 5.5.** *Neka su  $H \in \mathcal{H}_2^{p \times m}(\mathbb{C}_+)$  i  $H_r(s) = \sum_{i=1}^r \frac{1}{s-\lambda_i} c_i b_i^T$  realni dinamički sistemi. Neka je  $H_r$  najbolja stabilna aproksimacija reda  $r$  od  $H$ , s obzirom na  $\mathcal{H}_2$ -normu. Tada je*

$$\begin{aligned}
H(-\lambda_i) b_i &= H_r(-\lambda_i) b_i, \\
c_i^T H(-\lambda_i) &= c_i^T H_r(-\lambda_i), \\
c_i^T H'(-\lambda_i) b_i &= c_i^T H_r'(-\lambda_i) b_i,
\end{aligned} \tag{5.12}$$

za  $i = 1, 2, \dots, r$ , tj.  $H_r$  je tangencijalni Hermiteov interpolant od  $H$  s interpolacijskim točkama  $\{-\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_r\}$ , desnim tangencijalnim smjerovima  $\{b_1, b_2, \dots, b_r\}$  i lijevim tangencijalnim smjerovima  $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ .

*Dokaz.* Neka je  $\widetilde{H}_r$  prijenosna funkcija pridružena nekom stabilnom dinamičkom sistemu reda  $r$ . Tada je

$$\begin{aligned}
\|H - H_r\|_{\mathcal{H}_2}^2 &\leq \|H - \widetilde{H}_r\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \|H - H_r + H_r - \widetilde{H}_r\|_{\mathcal{H}_2}^2 \\
&= \|H - H_r\|_{\mathcal{H}_2}^2 + 2 \operatorname{Re} \langle H_r - \widetilde{H}_r, H - H_r \rangle_{\mathcal{H}_2} + \|H_r - \widetilde{H}_r\|_{\mathcal{H}_2}^2,
\end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$0 \leq 2 \operatorname{Re} \langle H_r - \tilde{H}_r, H - H_r \rangle_{\mathcal{H}_2} + \|H_r - \tilde{H}_r\|_{\mathcal{H}_2}^2. \quad (5.13)$$

Neka su jedinični vektor  $\xi \in \mathbb{C}^m$ ,  $\varepsilon > 0$  i  $k \in \{1, 2, \dots, r\}$  proizvoljni. Definirajmo

$$\theta = \pi - \arg(\xi^T (H(-\lambda_k) - H_r(-\lambda_k))b_k).$$

Neka je  $\tilde{H}_r$  takav da je

$$H_r(s) - \tilde{H}_r(s) = \frac{\varepsilon e^{i\theta}}{s - \lambda_k} \xi b_k^T.$$

Prema Lemi 5.4 je

$$\begin{aligned} \langle H_r - \tilde{H}_r, H - H_r \rangle_{\mathcal{H}_2} &= \varepsilon e^{i\theta} \xi^T (H(-\lambda_k) - H_r(-\lambda_k))b_k \\ &= \varepsilon e^{i\pi} e^{-i \arg(\xi^T (H(-\lambda_k) - H_r(-\lambda_k))b_k)} (\xi^T (H(-\lambda_k) - H_r(-\lambda_k))b_k) \\ &= -\varepsilon |\xi^T (H(-\lambda_k) - H_r(-\lambda_k))b_k| \end{aligned}$$

i

$$\|H_r - \tilde{H}_r\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \varepsilon e^{i\theta} \xi^T \left( \frac{\varepsilon e^{-i\theta}}{-\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \bar{\xi} b_k^* \right) b_k = \frac{\varepsilon^2 \|b_k\|_2^2}{-2 \operatorname{Re}(\lambda_k)}.$$

Iz (5.13) slijedi

$$|\xi^T (H(-\lambda_k) - H_r(-\lambda_k))b_k| \leq \frac{\varepsilon \|b_k\|_2^2}{-4 \operatorname{Re}(\lambda_k)}.$$

Kako je  $\varepsilon > 0$  bio proizvoljan, slijedi da je  $\xi^T (H(-\lambda_k) - H_r(-\lambda_k))b_k = 0$ . Nadalje, kako je i  $\xi$  bio proizvoljan, slijedi da je  $(H(-\lambda_k) - H_r(-\lambda_k))b_k = 0$ , čime smo pokazali prvi dio u (5.12). Analogno se pokaže i drugi dio.

Neka je  $k \in \{1, 2, \dots, r\}$  proizvoljan. Tada za sve dovoljno male  $\varepsilon \in \langle 0, |\operatorname{Re} \lambda_k| \rangle$  je  $\mu = \lambda_k + \varepsilon e^{i\theta}$  različit od  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ , uz odabir  $\theta = -\arg(c_k^T (H'(\lambda_k) - H_r'(\lambda_k))b_k)$ . Uočimo da je  $\operatorname{Re} \mu < 0$ . Definirajmo  $\tilde{H}_r$  tako da vrijedi

$$H_r(s) - \tilde{H}_r(s) = \left( \frac{1}{s - \lambda_k} - \frac{1}{s - \mu} \right) c_k b_k^T.$$

Koristeći Lemu 5.4 i pokazane tvrdnje dobivamo

$$\begin{aligned} \langle H_r - \tilde{H}_r, H - H_r \rangle_{\mathcal{H}_2} &= c_k^T (H(-\lambda_k) - H_r(-\lambda_k))b_k - c_k^T (H(-\mu) - H_r(-\mu))b_k \\ &= -c_k^T (H(-\mu) - H_r(-\mu))b_k \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
\|H_r - \tilde{H}_r\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= c_k^T \left( \left( \frac{1}{-\lambda_k - \bar{\lambda}_k} - \frac{1}{-\lambda_k - \bar{\mu}} \right) \bar{c}_k b_k^* - \left( \frac{1}{-\mu - \bar{\lambda}_k} - \frac{1}{-\mu - \bar{\mu}} \right) \bar{c}_k b_k^* \right) b_k \\
&= -\|c_k\|_2^2 \|b_k\|_2^2 \left( \frac{1}{\lambda_k + \bar{\lambda}_k} - \frac{1}{\lambda_k + \bar{\mu}} - \frac{1}{\mu + \bar{\lambda}_k} + \frac{1}{\mu + \bar{\mu}} \right) \\
&= -\|c_k\|_2^2 \|b_k\|_2^2 \left( \frac{\bar{\mu} - \bar{\lambda}_k}{(\lambda_k + \bar{\lambda}_k)(\lambda_k + \bar{\mu})} - \frac{\bar{\mu} - \bar{\lambda}_k}{(\mu + \bar{\lambda}_k)(\mu + \bar{\mu})} \right) \\
&= -\|c_k\|_2^2 \|b_k\|_2^2 (\bar{\mu} - \bar{\lambda}_k) \frac{(\mu + \bar{\lambda}_k)(\mu + \bar{\mu}) - (\lambda_k + \bar{\lambda}_k)(\lambda_k + \bar{\mu})}{(\lambda_k + \bar{\lambda}_k)(\lambda_k + \bar{\mu})(\mu + \bar{\lambda}_k)(\mu + \bar{\mu})} \\
&= -\|c_k\|_2^2 \|b_k\|_2^2 (\bar{\mu} - \bar{\lambda}_k) \frac{\mu^2 + \mu\bar{\mu} + \bar{\lambda}_k\mu + \bar{\lambda}_k\bar{\mu} - \lambda_k^2 - \lambda_k\bar{\mu} - \bar{\lambda}_k\lambda_k - \bar{\lambda}_k\bar{\mu}}{4|\bar{\mu} + \lambda_k|^2 \operatorname{Re}(\lambda_k) \operatorname{Re}(\mu)} \\
&= -\|c_k\|_2^2 \|b_k\|_2^2 (\bar{\mu} - \bar{\lambda}_k) \frac{(\mu + \lambda_k)(\mu - \lambda_k) + \bar{\mu}(\mu - \lambda_k) + \bar{\lambda}_k(\mu - \lambda_k)}{4|\bar{\mu} + \lambda_k|^2 \operatorname{Re}(\lambda_k) \operatorname{Re}(\mu)} \\
&= -\|c_k\|_2^2 \|b_k\|_2^2 |\mu - \lambda_k|^2 \frac{\mu + \lambda_k + \bar{\mu} + \bar{\lambda}_k}{4|\bar{\mu} + \lambda_k|^2 \operatorname{Re}(\lambda_k) \operatorname{Re}(\mu)} \\
&= -\|c_k\|_2^2 \|b_k\|_2^2 \frac{|\mu - \lambda_k|^2 \operatorname{Re}(\mu + \lambda_k)}{2|\bar{\mu} + \lambda_k|^2 \operatorname{Re}(\lambda_k) \operatorname{Re}(\mu)}.
\end{aligned}$$

Iz (5.13) slijedi

$$0 \leq -2 \operatorname{Re}(c_k^T (H(-\mu) - H_r(-\mu)) b_k) - \|c_k\|_2^2 \|b_k\|_2^2 \frac{|\mu - \lambda_k|^2 \operatorname{Re}(\mu + \lambda_k)}{2|\bar{\mu} + \lambda_k|^2 \operatorname{Re}(\lambda_k) \operatorname{Re}(\mu)}. \quad (5.14)$$

Uočimo da je

$$\begin{aligned}
(-\mu E - A)^{-1} &= (-\lambda_k E - A)^{-1} + (-\mu E - A)^{-1} - (-\lambda_k E - A)^{-1} \\
&= (-\lambda_k E - A)^{-1} + (-\lambda_k E - A)^{-1} [(-\lambda_k E - A) - (-\mu E - A)] (-\mu E - A)^{-1} \\
&= (-\lambda_k E - A)^{-1} + (\mu - \lambda_k) (-\lambda_k E - A)^{-1} E (-\mu E - A)^{-1}
\end{aligned} \quad (5.15)$$

i

$$\begin{aligned}
(-\mu E - A)^{-1} &= (-\lambda_k E - A)^{-1} + (-\mu E - A)^{-1} - (-\lambda_k E - A)^{-1} \\
&= (-\lambda_k E - A)^{-1} + (-\mu E - A)^{-1} [(-\lambda_k E - A) - (-\mu E - A)] (-\lambda_k E - A)^{-1} \\
&= (-\lambda_k E - A)^{-1} + (\mu - \lambda_k) (-\mu E - A)^{-1} E (-\lambda_k E - A)^{-1}.
\end{aligned} \quad (5.16)$$



Uvrstimo (5.16) u (5.15) kako bismo dobili

$$\begin{aligned} (-\mu E - A)^{-1} &= (-\lambda_k E - A)^{-1} + (\mu - \lambda_k)(-\lambda_k E - A)^{-1} E (-\lambda_k E - A)^{-1} \\ &\quad + (\mu - \lambda_k)^2 (-\lambda_k E - A)^{-1} E (-\mu E - A)^{-1} E (-\lambda_k E - A)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Množenjem (5.17) slijeva s  $C$  i zdesna s  $B$  slijedi

$$\begin{aligned} H(-\mu) &= H(-\lambda_k) + (\mu - \lambda_k) H'(-\lambda_k) \\ &\quad + (\mu - \lambda_k)^2 C (-\lambda_k E - A)^{-1} E (-\mu E - A)^{-1} E (-\lambda_k E - A)^{-1} B. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Analogno se može pokazati

$$\begin{aligned} H_r(-\mu) &= H_r(-\lambda_k) + (\mu - \lambda_k) H'_r(-\lambda_k) \\ &\quad + (\mu - \lambda_k)^2 C_r (-\lambda_k E_r - A_r)^{-1} E_r (-\mu E_r - A_r)^{-1} E_r (-\lambda_k E_r - A_r)^{-1} B_r. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Koristeći (5.18), (5.19) i dokazane tvrdnje slijedi da je

$$\begin{aligned} c_k^T (H(-\mu) - H_r(-\mu)) b_k &= \varepsilon e^{i\theta} c_k^T (H'(-\lambda_k) - H'_r(-\lambda_k)) b_k + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon |c_k^T (H'(-\lambda_k) - H'_r(-\lambda_k)) b_k| + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Nakon uvrštavanja u (5.14) dobivamo

$$|c_k^T (H'(-\lambda_k) - H'_r(-\lambda_k)) b_k| \leq O(\varepsilon).$$

Puštanjem  $\varepsilon \searrow 0$  dobivamo  $c_k^T (H'(-\lambda_k) - H'_r(-\lambda_k)) b_k = 0$ , što je treći dio u (5.12).  $\square$

Isprva se može činiti da Teorem 5.5, uz Algoritam 5.3, daje konačno rješenje. Ipak, bitno je uočiti da za odrediti  $H_r$  iz (5.12) i Algoritma 5.3 je potrebno znati  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, b_1, b_2, \dots, b_r$  i  $c_1, c_2, \dots, c_r$ , a za odrediti te parametre je potrebno znati  $H_r$ , čime smo se vratili na početak.

No, to za ideju daje iterativni algoritam gdje počinjemo s nekim interpolacijskim točkama i tangencijalnim smjerovima, odredimo tangencijalnu Hermiteovu interpolaciju za njih, i kao nove točke i smjerove zadamo polove i reziduumne dobivene interpolacije. Taj algoritam je poznat pod nazivom Iterative Rational Krylov Algorithm (IRKA) i dan je u Algoritmu 5.4.

## 5.5 Implementacija IRKA-e

U Algoritmu 5.4 je dan pseudokod IRKA-e koji daje samo generalni opis. Ovdje opisujemo detalje implementacije, analizirajući liniju po liniju, kojima se dobiva valjani numerički kod.

**Algoritam 5.4** Iterative Rational Krylov Algorithm (IRKA)**Ulaz:** Stabilni realni dinamički sistem  $(E, A, B, C)$ **Izlaz:** Reducirani sistem  $(E_r, A_r, B_r, C_r)$ 

- 1: Odabrati inicijalne interpolacijske točke  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$  zatvorene na konjugiranje i inicijalne tangencijalne smjerove  $\{b_1, \dots, b_r\}$  i  $\{c_1, \dots, c_r\}$  koji su također zatvoreni na konjugiranje
- 2:  $V_r = \left[ (\sigma_1 E - A)^{-1} B b_1 \ \cdots \ (\sigma_r E - A)^{-1} B b_r \right]$
- 3:  $W_r = \left[ (\sigma_1 E - A)^{-T} C^T c_1 \ \cdots \ (\sigma_r E - A)^{-T} C^T c_r \right]$
- 4: **dok** nije došlo do konvergencije **radi**
- 5:  $E_r = W_r^T E V_r, A_r = W_r^T A V_r, B_r = W_r^T B, C_r = C V_r$
- 6: Izračunati  $Y^*$  i  $X$  tako da je  $Y^* A_r X = \text{diag}(\lambda_i)$  i  $Y^* E_r X = I_r$
- 7:  $\sigma_i = -\lambda_i, b_i^T = e_i^T Y^* B_r, c_i = C_r X e_i$ , za  $i = 1, \dots, r$
- 8:  $V_r = \left[ (\sigma_1 E - A)^{-1} B b_1 \ \cdots \ (\sigma_r E - A)^{-1} B b_r \right]$
- 9:  $W_r = \left[ (\sigma_1 E - A)^{-T} C^T c_1 \ \cdots \ (\sigma_r E - A)^{-T} C^T c_r \right]$
- 10:  $E_r = W_r^T E V_r, A_r = W_r^T A V_r, B_r = W_r^T B, C_r = C V_r$

Na početku algoritma, u liniji 1, vrši se inicijalizacija parametara. Koristimo sintagmu „zatvoreno na konjugiranje” koja nije u potpunosti precizna. Pod time mislimo da su interpolacijske točke  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$  realne ili se pojavljuju u konjugiranim parovima te pripadni tangencijalni smjerovi  $b_1, b_2, \dots, b_r$  i  $c_1, c_2, \dots, c_r$  su realni ili međusobno konjugirani parovi. Jednostavnije rečeno, tražimo da je  $\sum_{i=1}^r \frac{1}{s+\sigma_i} c_i b_i^T$  realna racionalna funkcija.

Važno je pitanje kako odabrati početne vrijednosti parametara. Najjednostavnije je za interpolacijske točke odabrati linearno ili logaritamski raspoređene pozitivne realne brojeve, a za tangencijalne smjerove slučajne realne vektore. Prirodno je za očekivati da će polovi reducirane prijenosne funkcije biti blizu polova početne, pa je druga ideja za interpolacijske točke odabrati zrcalnu sliku slučajnog podskupa polova početne prijenosne funkcije [3].

Linije 2, 3, 8 i 9 sadržavaju, po broju potrebnih operacija, najzahtjevniji dio koda. U svakoj od njih potrebno je riješiti  $r$  linearnih sustava jednadžbi s različitim matricama sustava i desnim stranama. Ako su matrice  $A$  i  $E$  rijetko popunjene, moguće je koristiti efikasne rješavače složenosti  $O(n^2)$  ili  $O(n)$  (ovisno o strukturi matrica). U suprotnom, i ako je dodatno  $E = I$ , određivanjem Hessenbergove forme matrice  $A$ , što zahtijeva  $O(n^3)$  operacija, moguće je postići da se sustavi rješavaju s  $O(n^2)$  operacija.

Kako je određivanje matrica  $V_r$  i  $W_r$  zapisano u Algoritmu 5.4, slijedi da ako je neka interpolacijska točka kompleksan broj, onda će matrice  $V_r$  i  $W_r$  biti kompleksne (osim u specijalnim slučajevima). Ako su  $V_r$  i  $W_r$  kompleksne matrice, onda će i reducirani sustav biti kompleksan (što vidimo iz linija 5 i 10), što ne želimo. Kako bi to izbjegli,

dodajemo jedan korak koji se ne nalazi u Algoritmu 5.4. Najprije, promotrimo proizvoljan par interpolacijskih točaka  $\sigma_i$  i  $\sigma_j$  koje čine kompleksno konjugirani par, tj.  $\sigma_i = \overline{\sigma_j}$ . Tada je  $b_i = \overline{b_j}$  i  $c_i = \overline{c_j}$ . Slijedi da je

$$(\sigma_i E - A)^{-1} B b_i = (\overline{\sigma_j} E - A)^{-1} B \overline{b_j} = \overline{(\sigma_j E - A)^{-1} B b_j}.$$

Iz toga vidimo da će se u matrici  $V_r$  pojaviti dva stupca koja su međusobno kompleksno konjugirana. Umjesto ta dva stupca stavit ćemo sljedeća dva stupca:

$$\operatorname{Re}\left((\sigma_i E - A)^{-1} B b_i\right), \operatorname{Im}\left((\sigma_i E - A)^{-1} B b_i\right).$$

Lako se provjeri da je

$$\operatorname{span}\left\{(\sigma_i E - A)^{-1} B b_i, (\sigma_j E - A)^{-1} B b_j\right\} = \operatorname{span}\left\{\operatorname{Re}\left((\sigma_i E - A)^{-1} B b_i\right), \operatorname{Im}\left((\sigma_i E - A)^{-1} B b_i\right)\right\}.$$

To pokazuje da tom promjenom stupaca u  $V_r$  ne mijenjamo potprostor koji je generiran stupcima od  $V_r$ . Dakle, potprostor  $\mathcal{V}_r$  ostaje isti, što nam je dovoljno kod redukcije. Analogni postupak ćemo provoditi i za  $W_r$ .

Dodatno, zbog množenja matrica sustava s  $V_r$  i  $W_r$  u linijama 5 i 10, QR faktorizacijama ćemo učiniti matrice  $V_r$  i  $W_r$  ortonormalnima (matrica  $M$  je ortonormalna ako je  $M^* M = I$ , tj. stupci matrice su normirani i međusobno ortogonalni) kako bi matrice  $V_r$  i  $W_r$  imale manji broj uvjetovanosti.

Prelazimo na liniju 4, točnije na uvjet zaustavljanja iteracija. Ako dođe do konvergencije, interpolacijske točke i reflektirani polovi reduciranog modela će postajati sve bliži. Stoga će nam uvjet zaustavljanja (uz ograničenje broja iteracija) biti promjena interpolacijskih točaka u dvije uzastopne iteracije manja od zadane tolerancije. U tu svrhu trebamo definirati neku metriku nad skupovima kompleksnih točaka kako bi znali kada je promjena dovoljno mala. Najprije definiramo metriku nad kompleksnim brojevima, pomoću koje ćemo onda definirati udaljenost između dva skupa kompleksnih brojeva.

Jedan mogući odabir metrike nad kompleksnim brojevima je apsolutna vrijednost razlike. Ipak, to nije najbolji odabir, jer je moguće da se dvije interpolacijske točke razlikuju u nekoliko redova veličine. Na primjer, neka je  $r = 2$  te neka su  $\{10^{-2}, 10^3\}$  i  $\{1.001 \cdot 10^{-2}, 1.001 \cdot 10^3\}$  dva uzastopna skupa interpolacijskih točaka. Htjeli bi reći da su ti skupovi blizu, za što nam je potrebna neka metrika nad kompleksnim brojevima koja ne ovisi o redu veličine. Odlučili smo se za

$$d(z, w) = \frac{|z - w|}{\sqrt{|z||w|}}, \quad z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Za udaljenost između dva skupa kompleksnih brojeva odabrali smo Hausdorffovu metriku [10]:

$$d_H(Z, W) = \max\left\{\max_{z \in Z} \min_{w \in W} d(z, w), \max_{w \in W} \min_{z \in Z} d(z, w)\right\}, \quad Z, W \in \mathcal{P}(\mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

Razlozi odabira ove metrike su poklapanje s našom idejom „bliskosti skupova” i mogućnost jednostavne i efikasne implementacije.

Linija 6 se sastoji od rješavanja generaliziranog svojstvenog problema za par matrica  $(A_r, E_r)$  koji je složenosti  $O(r^3)$ , što je zanemarivo u odnosu na rješavanje  $r$  linearnih sustava jednadžbi reda  $n$ , jer ćemo uzimati da je  $r \ll n$ . Rezultat rješavanja su matrice  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$  i  $X$  takve da je  $A_r X = E_r X \Lambda$ . Definiranjem  $Y^* = X^{-1} E_r^{-1}$ , uz pretpostavku da je  $E_r$  regularna, dobivamo da vrijedi  $Y^* A_r X = \Lambda$  i  $Y^* E_r X = I_r$ , što i tražimo.

U liniji 7 se određuju nove vrijednosti parametara. Prema algoritmu, nove interpolacijske točke su zrcalna slika polova reduciranog sistema. Problem se javlja što, osim uvjeta interpolacije, tražimo i da reducirani sistem bude stabilan, što interpolacija ne garantira. Dapače, moguće je da, za neke izbore interpolacijskih točaka u desnoj otvorenoj poluravnini, rezultirajuća interpolacija racionalnom funkcijom nema sve polove u lijevoj poluravnini. Taj problem ćemo zaobići tako da reflektiramo polove koji se nalaze u lijevoj poluravnini, a one u desnoj ostavimo na mjestu.

Izvedimo sada metodu za računanje novih tangencijalnih smjerova. Pretpostavimo da imamo matrice  $\Lambda$ ,  $X$  i  $Y^*$  kao gore. Tada je

$$\begin{aligned} C_r (sE_r - A_r)^{-1} B_r &= C_r (sY^* X^{-1} - Y^* \Lambda X^{-1})^{-1} B_r = C_r (Y^* (sI - \Lambda) X^{-1})^{-1} B_r \\ &= C_r X (sI - \Lambda)^{-1} Y^* B_r \\ &= [C_r X e_1 \quad \cdots \quad C_r X e_r] \begin{bmatrix} \frac{1}{s - \lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{s - \lambda_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1^T Y^* B_r \\ \vdots \\ e_r^T Y^* B_r \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^r \frac{(C_r X e_i)(e_i^T Y^* B_r)}{s - \lambda_i}, \end{aligned}$$

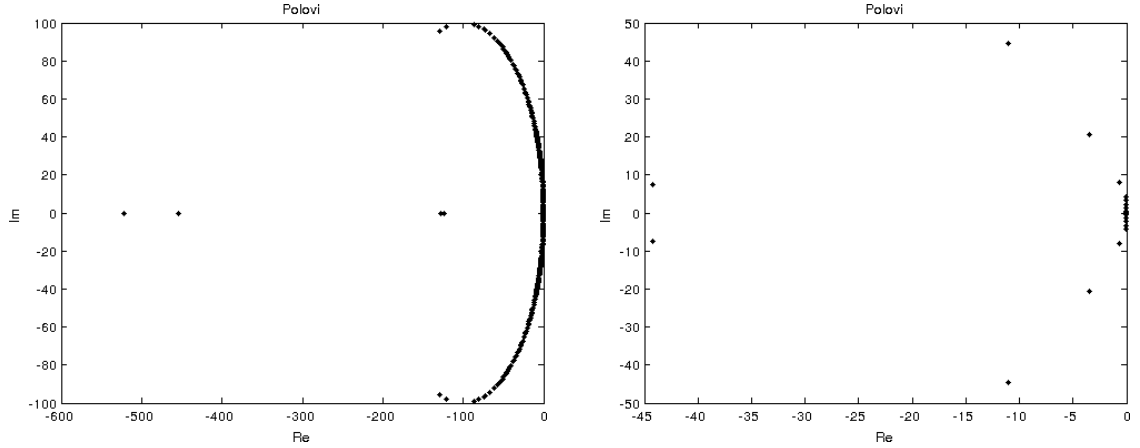
iz čega vidimo da je reziduum prijenosne funkcije reduciranog sistema u  $\lambda_i$  jednak

$$(C_r X e_i)(e_i^T Y^* B_r),$$

čime dobivamo nove tangencijalne smjerove.

Dotadna poboljšanja IRKA-e su korištenje Newtonove metode [11], korekcija reziduumu [5] i korištenje hesijana [4], ali njima se nećemo baviti.

Kao što smo učinili s balansiranim rezanjem u prošlom poglavlju, ovdje ćemo također demonstrirati IRKA-u na Beam modelu iz NICONET baze [7] uz red reduciranog modela  $r = 20$ . Na Slici 5.1 su prikazani polovi Beam modela i dobivenog reduciranog modela. Reducirani model smo dobili tako da smo za početne interpolacijske točke zadali logaritamski raspoređene točke između  $10^{-3}$  i  $10^2$  (jer su to redovi veličina najmanjeg i najvećeg realnog dijela polova Beam modela). Za početne tangencijalne smjerove smo odabrali



Slika 5.1: Polovi Beam modela iz NICONET baze [7] i reduciranog modela reda  $r = 20$  dobivenog IRKA-om

slučajne realne vektore. Uz toleranciju od  $10^{-4}$  na udaljenost uzastopnih interpolacijskih točaka, IRKA je konvergirala u 16 koraka. Slika 5.2 prikazuje Bode plot Beam modela i reduciranog modela. Vidimo da reducirani model prekriva sve šiljke Beam modela. Relativna  $\mathcal{H}_2$ -greška je  $1.6791 \cdot 10^{-3}$ .

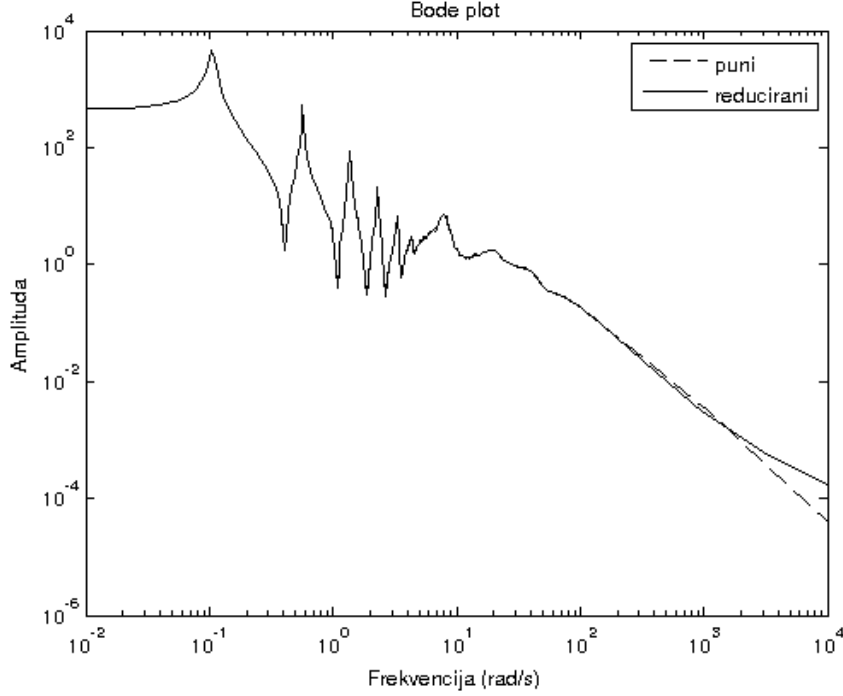
## 5.6 Neovisnost o realizaciji

Uočimo da Teorem 5.5 ne vrijedi samo za prijenosne funkcije  $H$  oblika  $C(sE - A)^{-1}B$ , već za proizvoljne realne dinamičke sisteme iz  $\mathcal{H}_2^{p \times m}(\mathbb{C}_+)$ . Stoga je prirodno pitanje je li moguće modificirati IRKA-u tako da koristi samo funkciju  $H$  i ne ovisi o realizaciji. Dovoljna nam je metoda za tangencijalnu Hermiteovu interpolaciju koja se bazira na prijenosnoj funkciji, za razliku od Algoritma 5.3. Sljedeći teorem daje tu metodu [5].

**Teorem 5.6.** *Neka je  $H \in \mathcal{H}_2^{p \times m}(\mathbb{C}_+)$  realni dinamički sistem. Tada je  $H_r$  dan s  $H_r(s) = C_r(sE_r - A_r)^{-1}B_r$ , gdje je*

$$[E_r]_{ij} = \begin{cases} -\frac{c_i^T (H(\sigma_i) - H(\sigma_j)) b_j}{\sigma_i - \sigma_j}, & \text{ako je } i \neq j \\ -c_i^T H'(\sigma_i) b_i, & \text{ako je } i = j \end{cases}, \quad (5.20)$$

$$[A_r]_{ij} = \begin{cases} -\frac{c_i^T (\sigma_i H(\sigma_i) - \sigma_j H(\sigma_j)) b_j}{\sigma_i - \sigma_j}, & \text{ako je } i \neq j \\ -c_i^T [sH(s)]'|_{s=\sigma_i} b_i, & \text{ako je } i = j \end{cases} \quad (5.21)$$



Slika 5.2: Bode plot Beam modela iz NICONET baze [7] i reduciranog modela reda  $r = 20$  dobivenog IRKA-om

te

$$B_r = \begin{bmatrix} c_1^T H(\sigma_1) \\ \vdots \\ c_r^T H(\sigma_r) \end{bmatrix} \quad i \quad C_r = \begin{bmatrix} H(\sigma_1)b_1 & \cdots & H(\sigma_r)b_r \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

tangencijalna Hermiteova interpolacija od  $H$  s interpolacijskim točkama  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\} \subset \mathbb{C}$ , desnim tangencijalnim smjerovima  $\{b_1, \dots, b_r\} \subset \mathbb{C}^m$  i lijevim tangencijalnim smjerovima  $\{c_1, \dots, c_r\} \subset \mathbb{C}^p$ .

**Napomena 5.7.** Matrica  $E_r$  u (5.20) zove se Loewnerova matrica, a  $A_r$  u (5.21) pomaknuta Loewnera matrica.

*Dokaz.* Uočimo da je

$$\begin{aligned} H(\sigma_i)b_i &= H_r(\sigma_i)b_i, \\ c_i^T H(\sigma_i) &= c_i^T H_r(\sigma_i), \\ c_i^T H'(\sigma_i)b_i &= c_i^T H'_r(\sigma_i)b_i, \end{aligned}$$

ekvivalentno s

$$\begin{aligned} C_r e_i &= C_r (\sigma_i E_r - A_r)^{-1} B_r b_i, \\ e_i^T B_r &= c_i^T C_r (\sigma_i E_r - A_r)^{-1} B_r, \\ -e_i^T E_r e_i &= -c_i^T C_r (\sigma_i E_r - A_r)^{-1} E_r (\sigma_i E_r - A_r)^{-1} B_r b_i. \end{aligned}$$

Stoga je dovoljno pokazati

$$e_i = (\sigma_i E_r - A_r)^{-1} B_r b_i \text{ i } e_i^T = c_i^T C_r (\sigma_i E_r - A_r)^{-1},$$

odnosno

$$(\sigma_i E_r - A_r) e_i = B_r b_i \text{ i } e_i^T (\sigma_i E_r - A_r) = c_i^T C_r. \quad (5.23)$$

Računamo:

$$\begin{aligned} [(\sigma_i E_r - A_r) e_i]_j &= [\sigma_i E_r - A_r]_{ji} \\ &= \begin{cases} -\frac{c_j^T (\sigma_i H(\sigma_j) - \sigma_i H(\sigma_i) - \sigma_j H(\sigma_j) + \sigma_i H(\sigma_i)) b_i}{\sigma_j - \sigma_i}, & i \neq j \\ -c_i^T (\sigma_i H'(\sigma_i) - H(\sigma_i) - \sigma_i H'(\sigma_i)) b_i, & i = j \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{(\sigma_i - \sigma_j) c_j^T H(\sigma_j) b_i}{\sigma_j - \sigma_i}, & i \neq j \\ c_i^T H(\sigma_i) b_i, & i = j \end{cases} \\ &= c_j^T H(\sigma_j) b_i \\ &= [B_r b_i]_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [e_i^T (\sigma_i E_r - A_r)]_j &= [\sigma_i E_r - A_r]_{ij} \\ &= \begin{cases} -\frac{c_i^T (\sigma_i H(\sigma_i) - \sigma_i H(\sigma_j) - \sigma_i H(\sigma_i) + \sigma_j H(\sigma_j)) b_j}{\sigma_i - \sigma_j}, & i \neq j \\ -c_i^T (\sigma_i H'(\sigma_i) - H(\sigma_i) - \sigma_i H'(\sigma_i)) b_i, & i = j \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{(\sigma_j - \sigma_i) c_i^T H(\sigma_j) b_j}{\sigma_i - \sigma_j}, & i \neq j \\ c_i^T H(\sigma_i) b_i, & i = j \end{cases} \\ &= c_i^T H(\sigma_j) b_j \\ &= [c_i^T C_r]_j. \end{aligned}$$

Dakle, tvrdnja (5.23) doista vrijedi, čime smo dokazali teorem.  $\square$

**Algoritam 5.5** Transfer Function IRKA (TF-IRKA)

**Ulaz:** Stabilni realni dinamički sistem  $H \in \mathcal{H}_2^{p \times m}(\mathbb{C}_+)$

**Izlaz:** Reducirani sistem  $(E_r, A_r, B_r, C_r)$

- 1: Odabrati inicijalne interpolacijske točke  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$  zatvorene na konjugiranje i inicijalne tangencijalne smjerove  $\{b_1, \dots, b_r\}$  i  $\{c_1, \dots, c_r\}$  koji su također zatvoreni na konjugiranje
- 2: **dok** nije došlo do konvergencije **radi**
- 3: Formirati  $E_r, A_r, B_r$  i  $C_r$  kao u (5.20), (5.21) i (5.22)
- 4: Izračunati  $Y^*$  i  $X$  tako da je  $Y^*A_rX = \text{diag}(\lambda_i)$  i  $Y^*E_rX = I_r$
- 5:  $\sigma_i = -\lambda_i, b_i^T = e_i^T Y^* B_r, c_i = C_r X e_i$ , za  $i = 1, \dots, r$
- 6: Formirati  $E_r, A_r, B_r$  i  $C_r$  kao u (5.20), (5.21) i (5.22)

Ovime dolazimo do Algoritma 5.5 zvanom Transfer Function IRKA (TF-IRKA), dobivenom iz Algoritma 5.4 zamjenom metode za interpolaciju.

Ponovo možemo uočiti slični problem kao u Algoritmu 5.4, a to je da reducirani model može biti kompleksan. Doista, iz (5.20), (5.21) i (5.22) vidimo da matrice  $E_r, A_r, B_r$  i  $C_r$  sve mogu biti kompleksne ako su interpolacijske točke kompleksne. Potrebna je dodati transformaciju sistema  $(E_r, A_r, B_r, C_r)$  u Algoritam 5.5 kako bi se osigurala realnost matrica  $E_r, A_r, B_r$  i  $C_r$ .

Uočimo da ako  $\sigma_i$  i  $\sigma_j$  čine kompleksno konjugiran par, onda su  $i$ -ti i  $j$ -ti redak u  $B_r$  te  $i$ -ti i  $j$ -ti stupac u  $C_r$  međusobno kompleksno konjugirani. Zamjenu  $i$ -tog i  $j$ -tog retka u  $B_r$  s retkom koji sadrži realni dio  $i$ -tog retka i s retkom koji sadrži imaginarni dio  $i$ -tog retka, možemo ostvariti množenjem matrice  $B_r$  slijeva s nekom matricom. Analogno možemo postići s matricom  $C_r$  množeći ju zdesna s nekom drugom matricom. Može se pokazati da te transformirajuće matrice daju ekvivalentni sistem sa svim realnim matricama.

Dajemo tri primjera gdje se može iskoristiti TF-IRKA. Prvi su sistemi drugog reda

$$\begin{aligned} Mx''(t) + Ex'(t) + Kx(t) &= Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned}$$

gdje su  $M, E, K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  i  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ . Uz  $x(0) = 0$ , Laplaceovom pretvorbom dobivamo

$$\widehat{y}(s) = C(s^2M + sE + K)^{-1} B\widehat{u}(s),$$

prema čemu je  $H(s) = C(s^2M + sE + K)^{-1}B$  prijenosna funkcija. Sistem drugog reda se može svesti na sistem prvog reda, ali se pritom broj jednadžbi udvostruči.

Drugi primjer su linearni sistemi s kašnjenjem

$$Ex'(t) = A_0x(t) + A_1x(t - \tau_1) + \dots + A_kx(t - \tau_k) + Bu(t),$$



$$y(t) = Cx(t),$$

gdje su  $E, A_0, A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  i  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ . Prijenosna funkcija za ovaj sistem je  $H(s) = C(sE - A_0 - e^{-\tau_1 s} A_1 - \dots - e^{-\tau_k s} A_k)^{-1} B$ , što nije racionalna funkcija, za razliku od svih prijašnjih primjera.

Posljednji primjer je jednadžba provođenja topline na polu-beskonačnom štapu [5]:

$$z_t(t, x) - z_{xx}(t, x) = 0 \quad \text{za } x > 0 \text{ i } t > 0, \quad (5.24)$$

$$z(0, x) = 0 \quad \text{za } x \geq 0, \quad (5.25)$$

$$z(t, 0) = u(t) \quad \text{za } t \geq 0, \quad (5.26)$$

$$z(t, \infty) = 0 \quad \text{za } t \geq 0, \quad (5.27)$$

$$y(t) = z(t, 1) \quad \text{za } t \geq 0. \quad (5.28)$$

Primjenom Laplaceove pretvorbe na (5.24) i korištenjem (5.25) dobivamo

$$s\widehat{z}(s, x) = \widehat{z}_{xx}(s, x),$$

što je obična diferencijalna jednadžba po  $x$  s parametrom  $s \in \mathbb{C}_+$ . Opće rješenje te jednadžbe je  $\widehat{z}(s, x) = C_1 e^{\sqrt{s}x} + C_2 e^{-\sqrt{s}x}$ , gdje su  $C_1$  i  $C_2$  konstante. Pritom je  $\sqrt{s} \in \mathbb{C}_+$  za svaki  $s \in \mathbb{C}_+$ . Laplaceovom pretvorbom rubnih uvjeta (5.26) i (5.27) dobivamo  $\widehat{z}(s, 0) = \widehat{u}(s)$  i  $\widehat{z}(s, \infty) = 0$ , iz čega slijedi da je  $C_1 = 0$  i  $C_2 = \widehat{u}(s)$ . Dakle, vrijedi  $\widehat{z}(s, x) = e^{-\sqrt{s}x} \widehat{u}(s)$ , pa prema (5.28) imamo  $\widehat{y}(s) = \widehat{z}(s, 1) = e^{-\sqrt{s}} \widehat{u}(s)$ . Stoga je  $H(s) = e^{-\sqrt{s}}$  prijenosna funkcija. Ona je definirana na  $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0 \text{ i } \operatorname{Im} z = 0\}$  i holomorfnja je na  $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0 \text{ i } \operatorname{Im} z = 0\}$  s  $H'(s) = -\frac{e^{-\sqrt{s}}}{2\sqrt{s}}$ . Kako vrijedi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H(i\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-\sqrt{i\omega}}|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{-\frac{\sqrt{|\omega|}}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{|\omega|} \operatorname{sign} \omega}{\sqrt{2}}} \right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{2}|\omega|} d\omega = 2 < \infty,$$

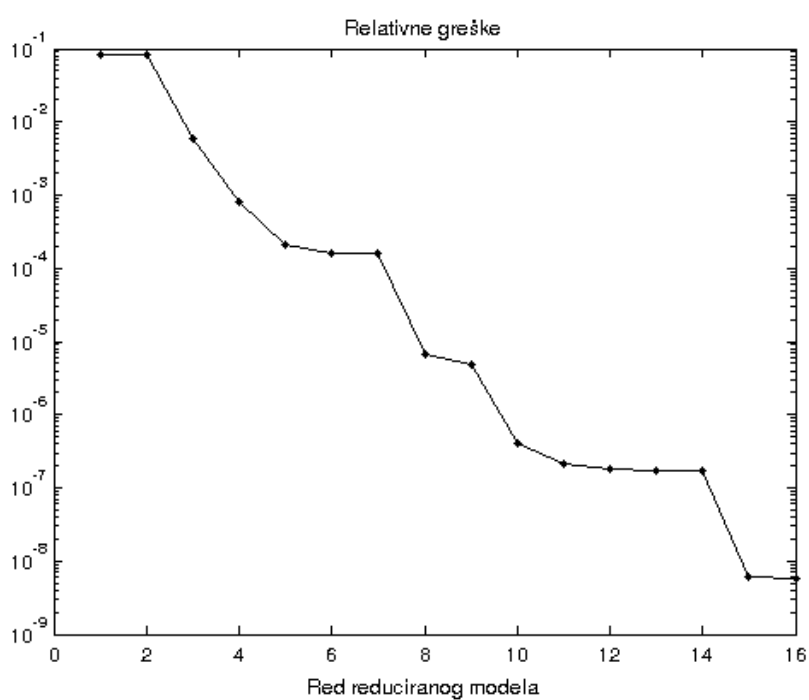
slijedi da je  $H \in \mathcal{H}_2(\mathbb{C}_+)$ .

Demonstriramo rezultat TF-IRKA-e ovom primjeru. Za  $r = 1, 2, \dots, 16$  smo proveli metodu TF-IRKA uz zadanu toleranciju na uzastopnu udaljenost interpolacijskih točaka od  $10^{-4}$ . Uočili smo da je svaki put metoda konvergirala u manje od 100 koraka. Na Slici 5.3 su prikazane relativne  $\mathcal{H}_2$ -greške reduciranih modela za različite zadane redove modela.

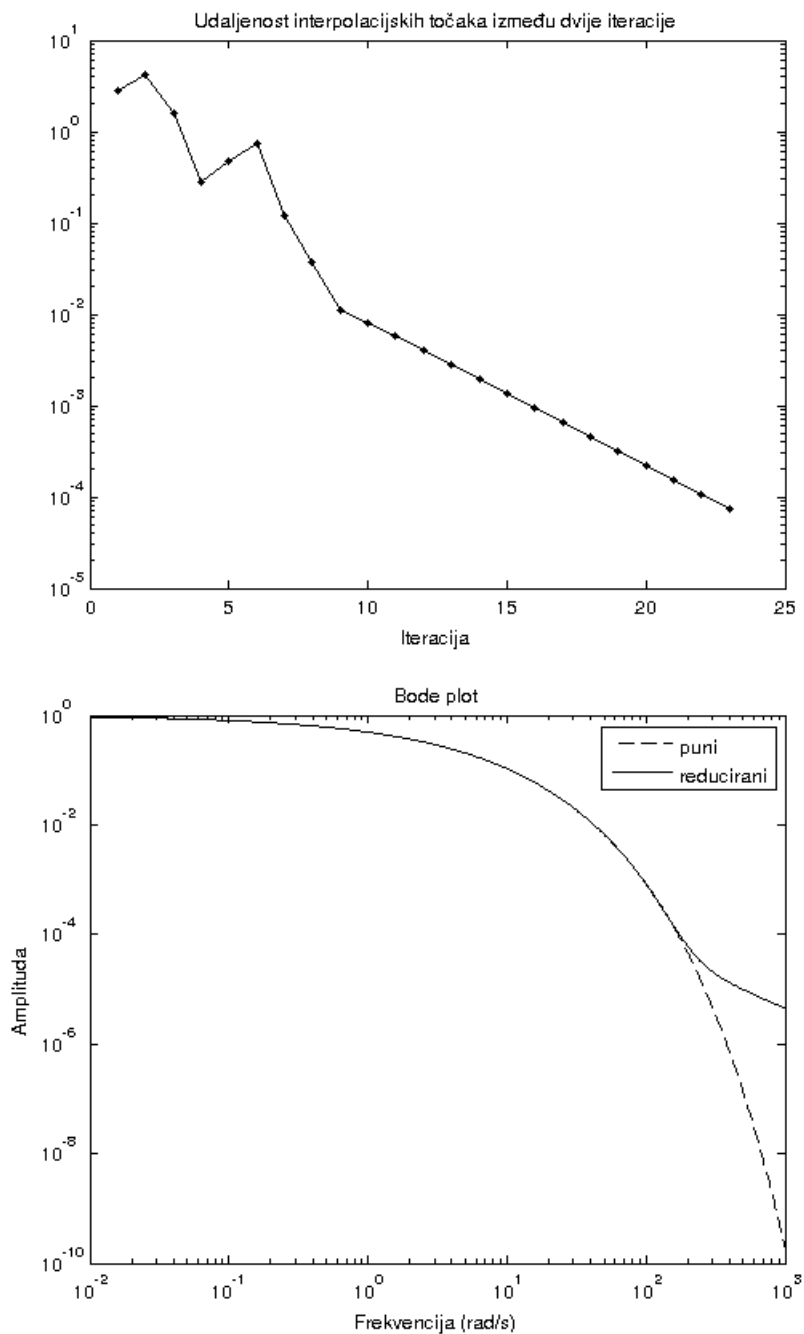
Za računanje relativnih  $\mathcal{H}_2$ -greški smo koristili izraz

$$\|H - H_r\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \|H\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \|H_r\|_{\mathcal{H}_2}^2 - 2 \operatorname{Re} \langle H_r, H \rangle_{\mathcal{H}_2},$$

izračunatu vrijednost  $\|H\|_{\mathcal{H}_2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ , Korolar 4.2 i Lemu 5.4. Kao primjer, na Slici 5.4 su prikazani rezultati TF-IRKA-e za  $r = 10$ : udaljenosti uzastopnih interpolacijskih točaka te Bode plot punog i reduciranog modela. Nakon završenih iteracija, dobivene interpolacijske točke su  $\sigma_1 = 5.06 \cdot 10^{-3}$ ,  $\sigma_2 = 3.72 \cdot 10^{-2}$ ,  $\sigma_3 = 0.163$ ,  $\sigma_4 = 0.556$ ,  $\sigma_5 = 1.62$ ,  $\sigma_6 = 4.21$ ,  $\sigma_7 = 21.1$ ,  $\sigma_8 = 49.9$ ,  $\sigma_9 = 68 - 62.8i$  i  $\sigma_{10} = 68 + 62.8i$ .



Slika 5.3: Relativne  $\mathcal{H}_2$ -greške reduciranih modela za sistem (5.24)–(5.27) dobiven metodom TF-IRKA



Slika 5.4: Udaljenosti uzastopnih interpolacijskih točaka i Bode plot punog i reduciranog modela kod redukcije TF-IRKA-om na red  $r = 10$



# Poglavlje 6

## Numerički primjeri

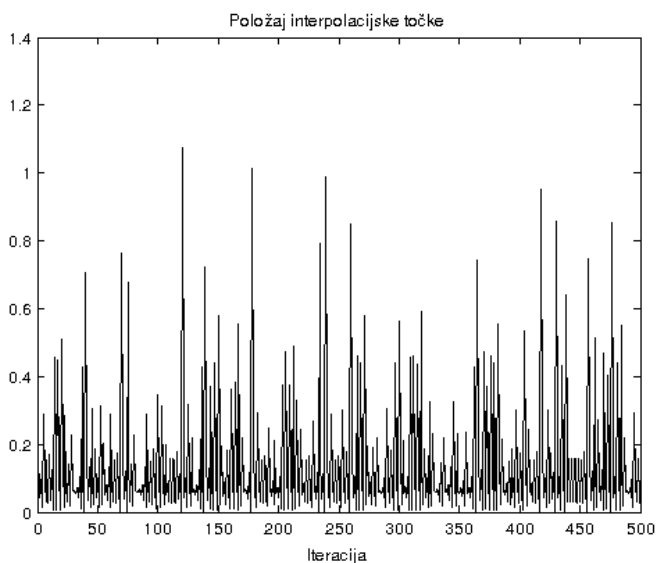
### 6.1 Problemi

Jedan od nedostataka IRKA-e je što je to iterativna metoda za koju ne postoji garancija konvergencije u općenitom slučaju. Dapače, postoje primjeri kada metoda ne konvergira. U slučaju kada IRKA ne konvergira, uočili smo da mogu biti dva razloga. Jedan je da reducirani model bude nestabilan (pa ne može biti element prostora  $\mathcal{H}_2^{p \times m}(\mathbb{C}_+)$ ), a drugi je javljanje periodičnosti u odabiru stabilnog reduciranog modela. Beam model iz NICONET baze primjera [7] dobro ilustrira sve situacije.

Beam model ima  $n = 348$  stanja,  $m = 1$  ulaz i  $p = 1$  izlaz te je dobiven prostornom diskretizacijom odgovarajuće parcijalne diferencijalne jednačbe. Na Slici 6.1 vidimo kako se kreće interpolacijska točka kada smo pomoću IRKA-e tražili reducirani model dimenzije  $r = 1$ . Pritom smo za početnu točku i smjerove uzeli  $\sigma_1 = b_1 = c_1 = 1$ . Iz Slike vidimo da, barem u prvih 500 iteracija, nema konvergencije interpolacijske točke. Zanimljivo je da se nakon 100 iteracija dobije nestabilan reducirani sistem  $\frac{12.3}{s-0.099}$ , dok se nakon 101 iteracije dobije stabilan sistem  $\frac{26.7}{s+0.013}$  s relativnom  $\mathcal{H}_2$ -greškom od 1.02.

Uočili smo da i kada je  $r$  blizu  $n$  (npr.  $r = 300$  za Beam model), reducirani model ponovo može biti nestabilan. Smatramo da ovdje veći utjecaj imaju greške zaokruživanja, jer se isto događa kod balansiranog rezanja. No, pojave nestabilnih reduciranih modela u ovim situacijama nam ne zadaju brigu niti su nužno nedostaci metoda za redukciju modela, jer (uobičajeno) nema smisla tražiti model vrlo niskog ili vrlo visokog reda. Razlozi su što reducirani model vrlo niskog reda će (vrlo vjerojatno) loše aproksimirati puni model, a model vrlo visokog reda želimo izbjeći od samog početka.

Kada smo pomoću IRKA-e tražili reducirani model dimenzije  $r = 2$  (uz zadane  $\sigma_1 = 1$  i  $\sigma_2 = 2$ ), vidjeli smo da nakon malog broja iteracija dolazi do konvergencije i da je rezultat stabilni reducirani model s relativnom  $\mathcal{H}_2$  greškom 0.141. Na Slici 6.2 su prikazane udaljenosti između skupova interpolacijskih točaka u uzastopnim iteracijama te Bode plot



Slika 6.1: Položaj interpolacijske točke u iteracijama IRKA metode kod redukcije Beam modela [7] na red  $r = 1$

punog i reduciranog modela. Vidimo da već nakon četvarte iteracije dolazi do konvergencije i da reducirani model dobro aproksimira prvi šiljak prijenosne funkcije punog modela.

Za  $r = 3$  se pojavljuje periodičnost. Na Slici 6.3 vidimo da uzastopne udaljenosti teže prema pozitivnom broju (konkretno, prema 0.83356). Razlog je što IRKA oscilira između dva različita modela, čije su interpolacijske točke na određenoj fiksnoj udaljenosti. Nakon 100 iteracija smo dobili sistem

$$\frac{14.4s^2 + 4.877s + 3.274}{(s + 0.6476)(s^2 + 0.01008s + 0.0101)}$$

s relativnom  $\mathcal{H}_2$ -greškom 0.13656, a nakon 101 iteracije

$$\frac{9.814s^2 + 4.751s + 1.489}{(s + 0.28776)(s^2 + 0.01003s + 0.011)}$$

s relativnom  $\mathcal{H}_2$ -greškom 0.13653. Dakle, IRKA je oscilirala između dva stabilna reducirana modela i oba su dobra  $\mathcal{H}_2$ -aproksimacija punog modela.

## 6.2 Rezultati

Ovdje dajemo rezultate redukcije modela IRKA-om i balansiranim rezanjem na primjerima iz NICONET [7] i Oberwolfach baze [12]. Odabrali smo one primjere koji imaju manje od

2000 jednadžbi (kako bi mogli, uz ograničene memorijske resurse, primijeniti balansirano rezanje) i u kojima je matrica  $E$  regularna. Tako smo iz NICONET baze smo odabrali deset primjera (Beam, Building, CDplayer, Eady, FOM, Heat, ISS, PDE, Random i Tline), a iz Oberwolfach baze tri (Filter 2D, PEEC i Rail).

Tih trinaest modela smo podijelili u dvije skupine po tome koliko se jako mogu reducirati. U Tablicama 6.1 i 6.2 su dane relativne  $\mathcal{H}_2$ -greške za reducirane modele različitih redova dobivenih IRKA-om i balansiranim rezanjem. U prvoj Tablici se nalaze modeli koji se mogu jako reducirati, a u drugoj ostali. U svakom primjeru je tolerancija na promjenu udaljenosti uzastopnih skupova interpolacijskih točaka bila postavljena na  $10^{-4}$ , a maksimalni broj iteracija na 100 ili 1000 (ovisno o brzini izvođenja iteracija).

Naziv ( $n, m, p$ )	Metoda	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$
Filter 2D (1668, 1, 5)	IRKA	$1.30 \cdot 10^{-1}$	$2.64 \cdot 10^{-2}$	$6.70 \cdot 10^{-3}$	$1.19 \cdot 10^{-3}$
	BR	$1.30 \cdot 10^{-1}$	$2.65 \cdot 10^{-2}$	$6.94 \cdot 10^{-3}$	$1.20 \cdot 10^{-3}$
FOM (1006, 1, 1)	IRKA	$9.29 \cdot 10^{-1}$	$9.29 \cdot 10^{-1}$	$7.65 \cdot 10^{-1}$	$7.66 \cdot 10^{-1}$
	BR	$1.31 \cdot 10^0$	$1.33 \cdot 10^0$	$1.33 \cdot 10^0$	$1.34 \cdot 10^0$
Heat (200, 1, 1)	IRKA	$3.97 \cdot 10^{-1}$	$3.95 \cdot 10^{-2}$	$1.38 \cdot 10^{-2}$	$4.06 \cdot 10^{-3}$
	BR	$4.00 \cdot 10^{-1}$	$3.95 \cdot 10^{-2}$	$1.60 \cdot 10^{-2}$	$4.11 \cdot 10^{-3}$
PDE (84, 1, 1)	IRKA	$2.59 \cdot 10^{-2}$	$4.76 \cdot 10^{-4}$	$4.42 \cdot 10^{-4}$	$7.97 \cdot 10^{-6}$
	BR	$2.59 \cdot 10^{-2}$	$4.76 \cdot 10^{-4}$	$4.28 \cdot 10^{-4}$	$7.98 \cdot 10^{-6}$
PEEC (1434, 1, 1)	IRKA	$3.18 \cdot 10^{-1}$	$2.81 \cdot 10^{-2}$	$9.17 \cdot 10^{-3}$	$7.94 \cdot 10^{-4}$
	BR	$3.26 \cdot 10^{-1}$	$2.84 \cdot 10^{-2}$	$9.24 \cdot 10^{-3}$	$8.64 \cdot 10^{-4}$
Random (200, 1, 1)	IRKA	$1.00 \cdot 10^0$	$5.21 \cdot 10^{-3}$	$3.43 \cdot 10^{-3}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$
	BR	$1.21 \cdot 10^0$	$5.21 \cdot 10^{-3}$	$5.60 \cdot 10^{-3}$	$1.81 \cdot 10^{-3}$

Tablica 6.1: Relativne  $\mathcal{H}_2$ -greške reduciranih modela dobivenih IRKA-om i balansiranim rezanjem (BR): u svakom retku je dato ime primjera, broj stanja  $n$ , broj ulaza  $m$ , broj izlaza  $p$  te relativne  $\mathcal{H}_2$ -greške za različite metode i redove reduciranih modela; osjenčane su one ćelije kada IRKA daje bolji ili jednak rezultat kao i balansirano rezanje

Uočavamo da u većini slučajeva IRKA daje reducirani model s manjom  $\mathcal{H}_2$ -greškom, ali ne uvijek, što ne čudi jer IRKA nalazi samo lokalno  $\mathcal{H}_2$ -optimalne reducirane modele.

Za ilustraciju važnosti broja jednadžbi punog modela, primijenili smo IRKA-u i balansirano rezanje na Rail model iz Oberwolfach baze koji ima 79841 jednadžbi (umjesto manjeg, koji ima 1357 jednadžbi). IRKA je u 100 iteracija, za manje od 30 min, dala reducirani model reda 20, gdje je udaljenost zadnja dva reducirana sistema bila  $1.85 \cdot 10^{-4}$  (početne interpolacijske točke su bile logaritamski razmaknute točke između  $10^{-5}$  i  $10^2$ , a tangencijalni smjerovi slučajni realni vektori).

Za razliku od IRKA-e, balansirano rezanje staje u prvom koraku i javlja „Out of memory” grešku jer nema dovoljno memorije za nalaženje Cholesky faktora gramijana. Pri-

Naziv ( $n, m, p$ )	Metoda	$r = 10$	$r = 20$	$r = 30$	$r = 40$
Beam (348, 1, 1)	IRKA	$1.23 \cdot 10^{-2}$	$1.68 \cdot 10^{-3}$	$1.11 \cdot 10^{-3}$	$1.24 \cdot 10^{-4}$
	BR	$2.07 \cdot 10^{-2}$	$2.74 \cdot 10^{-3}$	$1.36 \cdot 10^{-3}$	$2.91 \cdot 10^{-4}$
Building (48, 1, 1)	IRKA	$1.76 \cdot 10^{-1}$	$7.68 \cdot 10^{-2}$	$1.87 \cdot 10^{-3}$	$1.18 \cdot 10^{-4}$
	BR	$2.00 \cdot 10^{-1}$	$5.32 \cdot 10^{-2}$	$2.03 \cdot 10^{-3}$	$1.19 \cdot 10^{-4}$
CDplayer (120, 2, 2)	IRKA	$5.75 \cdot 10^{-5}$	$7.23 \cdot 10^{-6}$	$1.76 \cdot 10^{-6}$	$9.19 \cdot 10^{-7}$
	BR	$6.06 \cdot 10^{-5}$	$1.60 \cdot 10^{-5}$	$2.08 \cdot 10^{-6}$	$6.78 \cdot 10^{-7}$
Eady (598, 1, 1)	IRKA	$2.10 \cdot 10^{-4}$	$2.21 \cdot 10^{-7}$	$9.35 \cdot 10^{-9}$	$1.24 \cdot 10^{-9}$
	BR	$3.47 \cdot 10^{-4}$	$3.02 \cdot 10^{-7}$	$1.05 \cdot 10^{-8}$	$1.88 \cdot 10^{-9}$
ISS (270, 3, 3)	IRKA	$5.17 \cdot 10^{-1}$	$1.27 \cdot 10^{-1}$	$2.34 \cdot 10^{-2}$	$8.96 \cdot 10^{-3}$
	BR	$2.32 \cdot 10^{-1}$	$6.81 \cdot 10^{-2}$	$2.09 \cdot 10^{-2}$	$5.25 \cdot 10^{-3}$
Rail (1357, 7, 6)	IRKA	$1.58 \cdot 10^{-1}$	$2.75 \cdot 10^{-2}$	$6.02 \cdot 10^{-3}$	$1.33 \cdot 10^{-3}$
	BR	$2.55 \cdot 10^{-1}$	$3.92 \cdot 10^{-2}$	$2.02 \cdot 10^{-2}$	$2.25 \cdot 10^{-3}$
Tline (256, 2, 2)	IRKA	$3.65 \cdot 10^{-1}$	$3.31 \cdot 10^{-2}$	$1.41 \cdot 10^{-2}$	$7.39 \cdot 10^{-7}$
	BR	$1.79 \cdot 10^{-1}$	$3.57 \cdot 10^{-2}$	$1.19 \cdot 10^{-2}$	$7.39 \cdot 10^{-7}$

Tablica 6.2: Relativne  $\mathcal{H}_2$ -greške reduciranih modela dobivenih IRKA-om i balansiranim rezanjem (BR): u svakom retku je dato ime primjera, broj stanja  $n$ , broj ulaza  $m$ , broj izlaza  $p$  te relativne  $\mathcal{H}_2$ -greške za različite metode i redove reduciranih modela; osjenčane su one ćelije kada IRKA daje bolji ili jednak rezultat kao i balansirano rezanje

mijetimo da je za spremanje pune kvadratne matrice reda 79841, čiji je svaki element realni broj dvostruke preciznosti (8 byte-a po elementu), potrebno 47.5 GB memorije. Stoga je jasno da algoritmi koji koriste pune matrice neće ovdje uspješno završiti.

### 6.3 Usporedba IRKA-e i balansiranog rezanja

Sada možemo dati ukupnu usporedbu IRKA-e i balansiranog rezanja (odnosno metoda baziranih na rješavanju Ljapunovljevih jednadžbi i/ili SVD dekompoziciji).

Usporedimo najprije vremensku i prostornu složenost algoritama. Poznato je su metode za rješavanje Ljapunovljevih jednadžbi i za određivanje SVD dekompozicije kubne složenosti te da obje vraćaju gusto popunjene matrice kao rezultat. Stoga je za nalaženje reduciranog modela balansiranim rezanjem potrebno  $O(n^3)$  operacija i  $O(n^2)$  memorijskog prostora. Takve metode su iskoristive samo za probleme dimenzije manje od nekoliko tisuća.

S druge strane, vidjeli smo da je kod IRKA-e najveći trošak u rješavanju  $r$  linearnih sustava jednadžbi reda  $n$  u svakoj iteraciji. Ako je matrica sustava rijetko popunjena matrica, onda ovisno o njenoj strukturi, broj potrebnih operacija za rješavanje jednog sustava je iz-



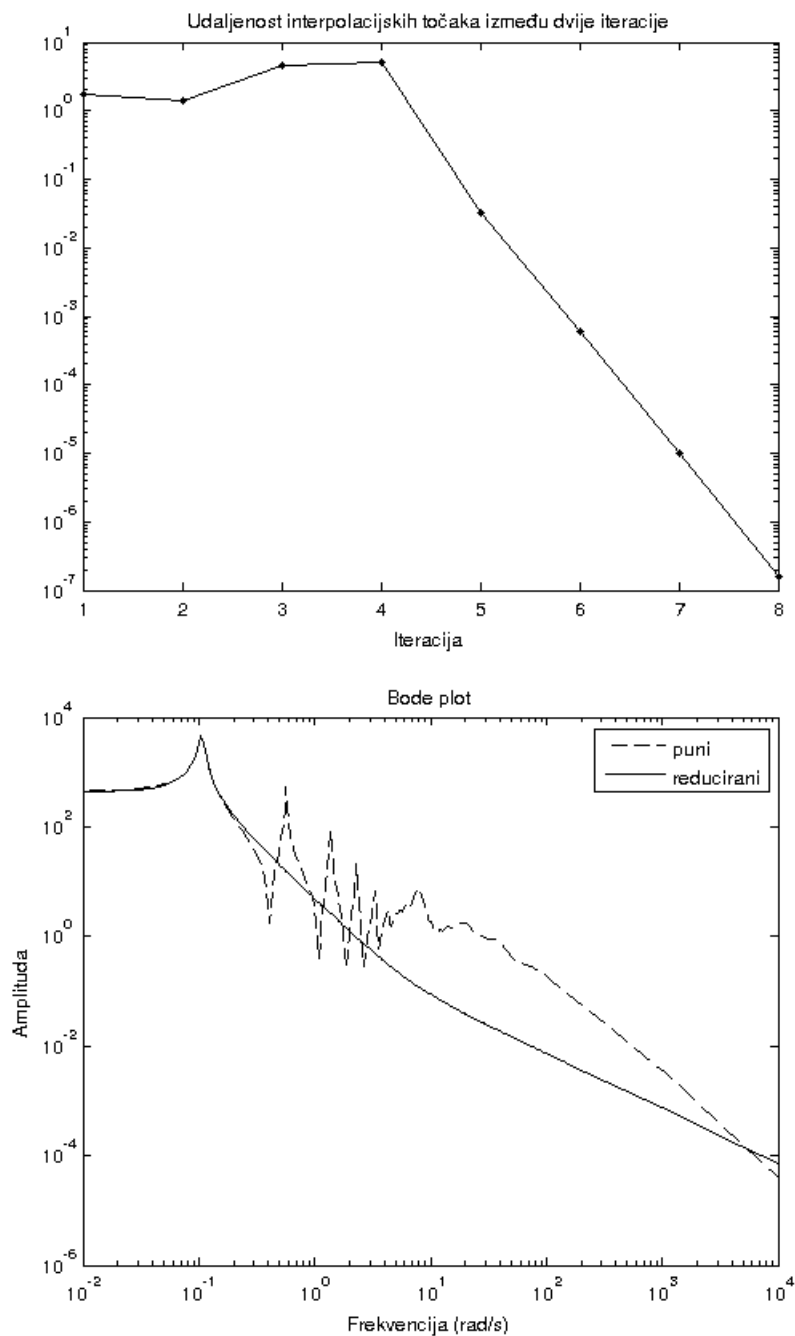
među  $O(n)$  i  $O(n^2)$ . Slijedi da je vremenska složenost po iteraciji između  $O(rn)$  i  $O(rn^2)$ , a možemo vidjeti da je prostorna složenost  $O(rn)$  (za matrice  $V_r$  i  $W_r$ ). Zbog ovoga se IRKA može koristiti kod vrlo velikih sistema (postoje primjeri sistema reda većeg od 100 000 gdje je korištena IRKA [3, 5]).

Umjesto pune SVD dekompozicije mogu se tražiti samo dominantni singularni vektori i razvijaju se brže metode koje daju aproksimaciju rješenja Ljapunovljeve jednadžbe niskog ranga, tako da postoji mogućnost da će se balansirano rezanje i slične metode moći koristiti kod velikih sistema.

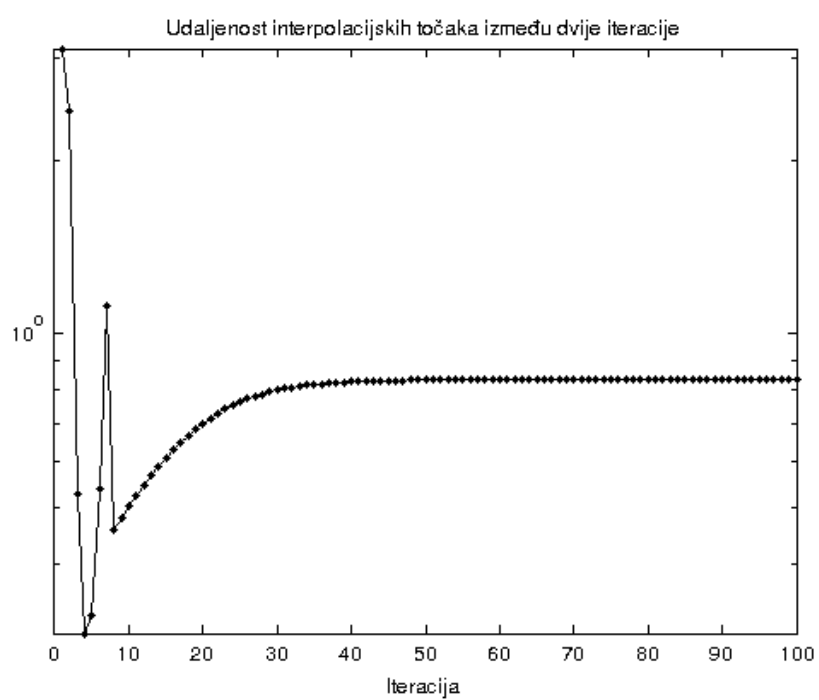
Jedna jasna razlika između IRKA-e i balansiranog rezanja je ta što za reducirane modele dobivene balansiranim rezanjem postoje apriorne ocjene greške, što trenutno nije slučaj kod IRKA-e. Ocjene greške su vrlo korisne kod odabira reda reduciranog modela, jer se tako lako odredi koji redovi će sigurno zadovoljavati zadanu toleranciju greške. Kako to nije moguće kod IRKA-e, red reduciranog modela je potrebno određivati metodom pokušaja i pogreške ili nekim inženjerskim trikovima. Jedino ako je unaprijed zadan red reduciranog modela, što je moguće u nekim tehničkim primjenama (npr. ako se program za upravljanje mora izvršavati na nekom malom čipu, kao u CD player-u), onda ocjene greške nisu potrebne.

Također je jasno da se IRKA i balansirano rezanje razlikuju po tipu. IRKA je iterativna metoda, a balansirano rezanje nije. Konvergencija IRKA-e je i dalje otvoreno pitanje te izbor početne iteracije može utjecati na konačni rezultat.

Komentirajmo na kraju kvalitetu reduciranih modela dobivenih IRKA-om i balansiranim rezanjem. Vidjeli smo da IRKA daje reducirane modele čija je relativna  $\mathcal{H}_2$ -greška često istog reda veličine kao i za onaj dobiven balansiranim rezanjem te da je u većini slučajeva ona manja. Ovime možemo zadovoljni, jer IRKA traži reducirani model koji samo zadovoljava neke nužne uvjete  $\mathcal{H}_2$ -optimalnosti.



Slika 6.2: Udaljenosti uzastopnih interpolacijskih točaka i Bode plot punog i reduciranog modela kod redukcije IRKA-om na red  $r = 2$



Slika 6.3: Udaljenosti uzastopnih interpolacijskih točaka kod redukcije IRKA-om na red  $r = 3$



# Bibliografija

- [1] [portal.uni-freiburg.de/imteksimulation/downloads/benchmark/Steel%20Profiles%20%2838881%29](http://portal.uni-freiburg.de/imteksimulation/downloads/benchmark/Steel%20Profiles%20%2838881%29).
- [2] A. C. Antoulas, *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*, SIAM, 2005.
- [3] A. C. Antoulas, C. A. Beattie, i S. Gugercin, *Interpolatory Model Reduction of Large-Scale Dynamical Systems*, pogl. Efficient Modelling and Control of Large-Scale Systems, str. 3–58, Springer-Verlag, 2010.
- [4] C. A. Beattie i S. Gugercin, *A trust region method for optimal  $\mathcal{H}_2$  model reduction*, Proceedings of the Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control, and 28th Chinese Control Conference, 2009, str. 5370–5375.
- [5] C. A. Beattie i S. Gugercin, *Realization-independent  $\mathcal{H}_2$ -approximation*, Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control, December 2012.
- [6] P. Benner i J. Saak, *Efficient numerical solution of the LQR-problem for the heat equation*, Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics, sv. 4, 2004, str. 648–649.
- [7] Y. Chahlaoui i P. V. Dooren, *A collection of benchmark examples for model reduction of linear time invariant dynamical systems*, SLICOT Working Note 2002-2, 2002, [slicot.org/20-site/126-benchmark-examples-for-model-reduction](http://slicot.org/20-site/126-benchmark-examples-for-model-reduction).
- [8] B. N. Datta, *Numerical Methods for Linear Control Systems*, Academic Press, 2004.
- [9] G. E. Dullerud i F. G. Paganini, *A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach*, Springer, 2005.
- [10] T. Eiter i H. Mannila, *Distance Measures for Point Sets and Their Computation*, Acta Informatica **34** (1997), 103–133.

- [11] S. Gugercin, A. C. Antoulas, i C. A. Beattie,  *$\mathcal{H}_2$  Model Reduction for Large-Scale Linear Dynamical Systems*, SIAM Journal on Matrix Analysis Applications **30** (2008), br. 2, 609–638.
- [12] J. G. Korvink i E. B. Rudnyi, *Oberwolfach Benchmark Collection*, Dimension Reduction of Large-Scale Systems (P. Benner, V. Mehrmann, i D. C. Sorensen, ur.), Lecture Notes in Computational Science and Engineering, sv. 45, Springer Berlin Heidelberg, 2005, str. 311–315, [portal.uni-freiburg.de/imteksimulation/downloads/benchmark](http://portal.uni-freiburg.de/imteksimulation/downloads/benchmark).
- [13] S. Trenn, *Hardy spaces and robustness of linear systems*, Magistarska radnja, Technische Universität Ilmenau, rujan 2004.

# Sažetak

Dinamički sistemi su svuda oko nas, od raznih prirodnih do industrijskih procesa. Za te procese se razvijaju modeli, koji se onda koriste za simuliranje ponašanja procesa i/ili za upravljanje nad njima. U svrhu povećanja preciznosti, javljaju se sve kompliciraniji modeli s kojima nije moguće efektivno računati. Stoga je potrebno tražiti reducirane modele, modele koji su jednostavniji, a dovoljno bliski kompliciranim modelima.

U radu se promatraju linearni, vremensko-invarijantni, neprekidno-vremenski, konačno-dimenzionalni, realni, stabilni sistemi oblika

$$\begin{aligned}Ex'(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\y(t) &= Cx(t),\end{aligned}$$

gdje su  $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  i  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  konstantne matrice, a  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  i  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  su stanje, ulaz i izlaz sistema. Za ovaj sistem se kaže da je  $n$ -dimenzionalan.

Cilj redukcije modela je, za zadani  $n$ -dimenzionalni sistem, pronaći  $r$ -dimenzionalni sistem (gdje je  $r \ll n$  također zadan), a da izlaz reduciranog modela bude što bliži izlazu punog modela. Smisao bliskosti modela koji se promatraju u radu je onaj dan normom Hardyjevog prostora  $\mathcal{H}_2^{p \times m}(\mathbb{C}_+)$ .

U radu je obrađena metoda koja traži reducirani model koji zadovoljava neke nužne uvjete optimalnosti u  $\mathcal{H}_2$  normi, dane u obliku tangencijalne Hermiteove interpolacije. Također je obrađena i metoda bazirana na Loewnerovim matricama koja ne ovisi realizaciji  $(E, A, B, C)$  i primjenjiva je za beskonačno-dimenzionalne sisteme. Sve metode su testirane na primjerima iz Oberwolfach i NICONET baza te su rezultati uspoređeni s rezultatima dobivenim metodom balansiranog rezanja.





# Summary

Dynamical systems are all around us, from various natural to industrial processes. Models are developed for these processes, which are then used to simulate the behavior of processes and/or to control over them. In order to increase the precision, there are more complicated models which can't be effectively used. It is therefore necessary to look for reduced models, models that are simpler, but close enough to complicated models.

Linear, time-invariant, continuous-time, finite dimensional, real, stable systems of the form

$$\begin{aligned}Ex'(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}$$

are observed, where  $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  and  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  and constant matrices, and  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  i  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  are the state, input and output of the system. This system is said to be  $n$ -dimensional.

The goal of model reduction is, for given  $n$ -dimensional system, to find an  $r$ -dimensional system (where  $r \ll n$  is also given), such that the output of the reduced model is as close as possible to the output of the full model. The meaning of closeness which is used in this work is that which is given by the norm in the Hardy's space  $\mathcal{H}_2^{p \times m}(\mathbb{C}_+)$ .

This work presents a method that finds a reduced model satisfying some necessary conditions of optimality in  $\mathcal{H}_2$  norm, given in the form of tangential Hermite interpolation. It also presents a method based on Loewner's matrices which does not depend on any realization  $(E, A, B, C)$  and is applicable to infinite dimensional systems. All methods have been tested on examples from Oberwolfach and NICONET databases and the results are compared with the results obtained using balanced truncation.



# Životopis

Petar Mlinarić rođen je 25. travnja 1990. u Zagrebu, gdje je završio osnovnu i srednju školu. Tijekom osnovnog i srednjeg obrazovanja je sudjelovao u mnogim natjecanjima iz matematike i fizike, ostvarujući značajne uspjehe na državnim natjecanjima. Od međunarodnih natjecanja, osvojio je dvije brončane medalje s Međunarodnih natjecanja iz fizike (IPhO) održanih u Vijetnamu i Meksiku. Nakon završetka srednje škole, 2009. godine, iste godine upisuje preddiplomski studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, za vrijeme kojeg je sudjelovao na nekoliko međunarodnih studentskih natjecanja iz matematike u Ostravi i Blagoevgradu te radio na problemu *Optimalnog hranjenja riba u akvakulturi* za Rektorovu nagradu. Krajem preddiplomskog studija, 2012. godine, je dobio Dekanovu nagradu za izuzetan uspjeh. Na istom fakultetu je zatim upisao diplomski studij Primijenjene matematike. Nakon završetka prve godine diplomskog studija je posjetio Tehničko sveučilište u Chemnitzu u sklopu hrvatsko-njemačkog projekta *Skalabilna upravljivost parcijalnih diferencijalnih jednadžbi s lokaliziranim upravljanjem*. Istog ljeta je prisustvovao *DAAD međunarodnoj školi o linearnoj optimalnoj kontroli dinamičkih sistema* održanoj u Osijeku. Krajem diplomskog studija, 2014. godine, je dobio Dekanovu nagradu za izuzetan uspjeh.