Aranžmani hiperravnina

Murković, Damjan

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Damjan Murković

ARANŽMANI HIPERRAVNINA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof.dr.sc. Dragutin Svrtan

Zagreb, Rujan, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mami i tati

Sadržaj

Uvod

1943. u Američkom matematičkom mjesečniku riješen je sljedeći problem: Dokažite da se sa n rezova komad sira može rasjeći na $(n^3+5n+6)/6$ dijelova. Slijedeće riješenje je dano. Jer n pravaca može podijeliti ravninu u $(n^2+n+2)/2$ dijelova, tada $(n+1)$-a ravnina može biti podijeljena sa n ravnina na toliko područja. Za svako od tih područja $(n+1)$-a dijeli već napravljeni komad sira na dva dijela, i povećava sveukupni broj dijelova za $(n^2+n+2)/2$. Jer $(n^3+5n+6)/6$ daje broj dijelova za $n = 1, 2$ i jer

$$\frac{n^2+n+2}{6} + \frac{n^2+n+2}{2} = \frac{(n+1)^3+(n+1)+6}{6}$$

po matematičkoj indukciji dokaz slijedi.
Ovakvi zadaci su početci proučavanja aranžmana hiperravnina. T.Zaslavsky je 1975. napravio neke od najvećih napredaka u polju i razvio mnogo tehnika za računanje broja područja kao brisanje-ograničavanje. U ovom radu ćemo dokazati jedan od njegovih najvažnijih teorema u drugom poglavlju. U prvom poglavlju ćemo se upoznati sa problematikom aranžmana hiperravnina i osnovnim pojmovima i definicijama. Kroz razne primjere većinom u $\mathbb{R}^2$ ćemo se upoznati sa različitim aranžmanima. U trećem poglavlju obrađena je metoda konačnih polja pomoću koje se mogu računati brojevi područja kompliciranijih višedimenzionalnih aranžmana, te kroz nekoliko primjera pokazana je primjena metode.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi i definicije

1.1 Osnovne definicije

Definicija 1.1.1. *Neka je V vektorski prostor, $V \cong K^n$ gdje je K polje. Neka je $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in K^n$ i $b \in K$. Afina hiperravnina je (n-1)-dimenzionalni potprostor H od V, odnosno:*

$$H = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in V : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b\}$$

Definicija 1.1.2. *Konačni aranžman hiperravnina $\mathcal{A}$ je konačni skup afinih hiperravnina u nekom vektorskom prostoru $V \cong K^n$, gdje K je polje.*

Nećemo razmatrati beskonačne aranžmane hiperravnina, tako da ćemo koristiti termin aranžman za konačni aranžman hiperravnina. Najčešće ćemo uzimati $K = \mathbb{R}$.

Definicija 1.1.3. *Neka je $\mathcal{A}$ aranžman u vektorskom prostoru V. Dimenzija od $\mathcal{A}$ u oznaci dim$(\mathcal{A})$ se definira kao dim$(V)(= n)$, dok rank od $\mathcal{A}$ u oznaci rank$(\mathcal{A})$ je dimenzija prostora razapetog normalama od hiperravnina iz aranžmana $\mathcal{A}$. Za aranžman $\mathcal{A}$ kažemo da je ključan ako rank$(\mathcal{A})$ = dim$(\mathcal{A})$.*

Definicija 1.1.4. *Aranžman $\mathcal{A}$ je centralan ako $\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H \neq \emptyset$.*

Definicija 1.1.5. *Neka su jednadžbe hiperravnina od $\mathcal{A}$ dane sa $L_1(x) = b_1, L_2(x) = b_2, ..., L_m(x) = b_m$, gdje $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ i $L_i(x)$ su linearne forme, tada je definirajući polinom od aranžmana $\mathcal{A}$ dan sa:*

$$Q_{\mathcal{A}}(x) = (L_1(x) - b_1)...(L_m(x) - a_m)$$

.

Često je korisno odrediti aranžman pomoću njegovog definirajućeg polinoma. Na primjer definirajući polinom aranžmana $\mathcal{A}$ koji se sastoji od n koordinatnih hiperravnina je $Q_{\mathcal{A}}(x) = x_1 x_2 ... x_n$. Definirajmo sada matematički precizno područja koja nas zanimaju kod aranžmana. Za polje K ćemo uzeti $\mathbb{R}$.

Definicija 1.1.6. *Područje aranžmana je povezana komponenta komplenta X od hiperravnina:*

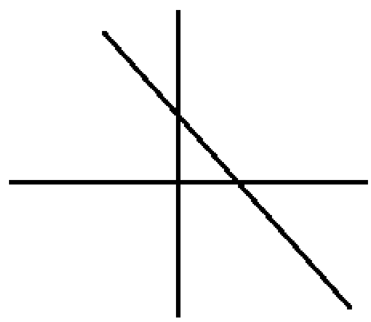
$$X = \mathbb{R}^n - \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$$

.

Sa $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ ćemo označavati skup svih područja od $\mathcal{A}$. Te neka je

$$r(\mathcal{A}) = \#\mathcal{R}(\mathcal{A})$$

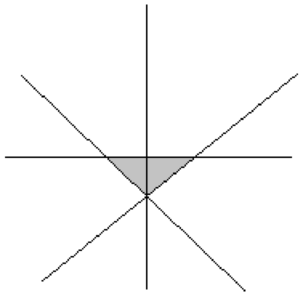
broj područja. Pogledajmo na jednonostavnom aranžmanu u $\mathbb{R}^2$:



Slika 1.1: Broj područja $r(\mathcal{A}) = 7$

Definicija 1.1.7. *Neka je W potprostor od V koji je razapet normalama hiperravnina od aranžmana $\mathcal{A}$, za područje $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ kažemo da je relativno omeđeno ako je $R \cap W$ omeđeno. Ako je aranžman ključan onda je relativno omeđeno isto kao i omeđeno.*

Za broj relativno omeđenih područja od $\mathcal{A}$ pisati ćemo $b(\mathcal{A})$. Na sljedećoj slici vidimo o kojim je područjima riječ:

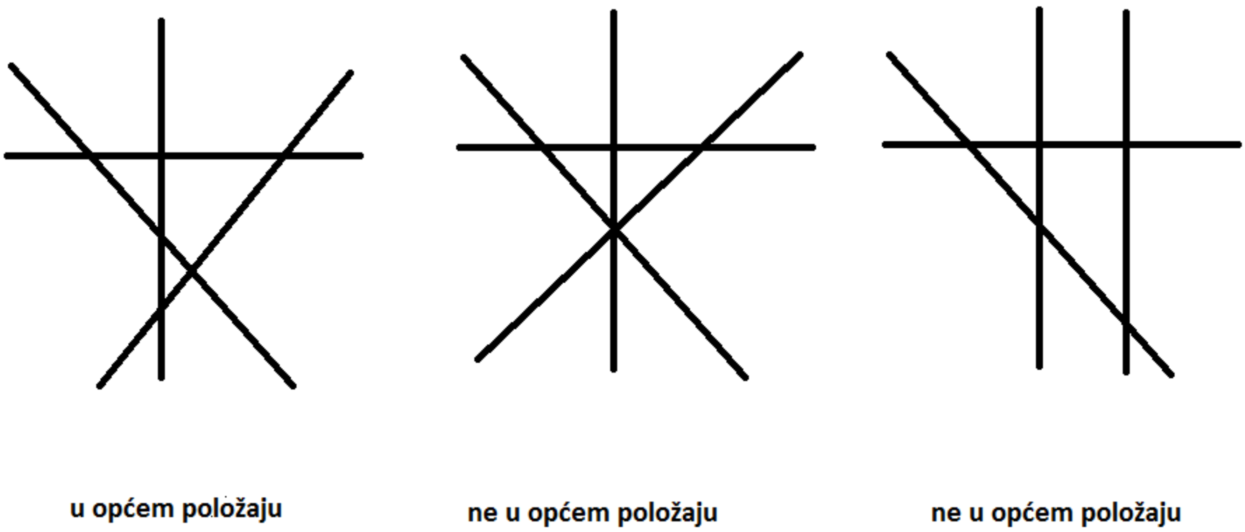


Slika 1.2: Relativno omeđena područja osjenčana

Definicija 1.1.8. *Aranžman $\mathcal{A}$ je u općoj poziciji ako*

$$\{H_1, ..., H_p \subseteq \mathcal{A},\ p \leq n \Rightarrow dim(H_1 \cap ... \cap H_p) = n - p$$
$$\{H_1, ..., H_p \subseteq \mathcal{A},\ p > n \Rightarrow H_1 \cap ... \cap H_p = \emptyset$$

Primjer 1.1.9. *U $\mathbb{R}^2$ skup pravaca je u općoj poziciji ako nijedna dva nisu paralelna te nijedna tri se ne sijeku u istoj točki.*



Slika 1.3: Prikaz raznih položaja aranžmana u $\mathbb{R}^2$

1.2 Parcijalno uređeni skup sjecišta

Definicija 1.2.1. *Parcijalno uređen skup ili kraće PUS je skup P i relacija $\leq$ koji zadovoljavaju sljedeće aksiome za sve $x, y, z \in P$:*

$(P1)$ *(refleksivnost)* $x \leq x$

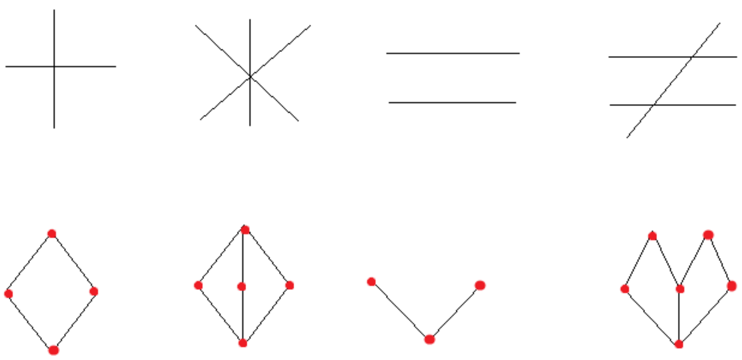
$(P2)$ *(antisimetričnost) Ako* $x \leq y$ *i* $y \leq x$, *tada* $x = y$

$(P3)$ *(tranzitivnost) Ako* $q \leq y$ *i* $y \leq z$, *tada* $x \leq y$

Dodatno ako $x \leq y$ u P, tada (zatvoreni) interval $[x, y]$ definiramo sa:

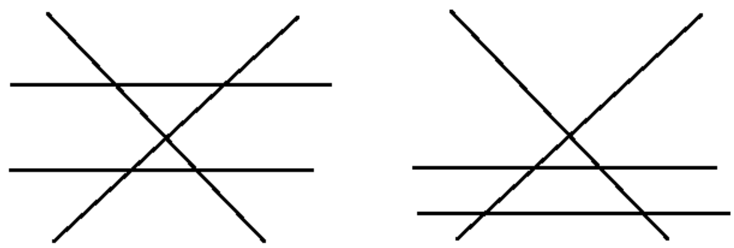
$$[x, y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$$

Definicija 1.2.2. *Neka je $\mathcal{A}$ aranžman u vektorskom prostoru V, i neka je $L(\mathcal{A})$ skup svih nepraznih sjecišta hiperravnina od $\mathcal{A}$, uključujući i sam V kao sjecište nad praznim skupom. Definiramo $x \leq y$ u $L(\mathcal{A})$ ako $x \supseteq y$ (kao podskupovi od V). Drugim riječima, $L(\mathcal{A})$ je parcijalno uređen obrnutom inkluzijom. $L(\mathcal{A})$ zovemo PUS-om sjecišta od $\mathcal{A}$*



Slika 1.4: Primjeri aranžmana i pripadnih PUS-ova sjecišta

Na sljedećoj slici vidimo kako dva različita aranžmana mogu imati isti PUS sjecišta, no broj područja aranžmana je jednak, te očito postoji veza između PUS-ova sjecišta i broja područja koju ćemo pokazati kasnije.



Slika 1.5: Dva različita aranžmana sa istim PUS-om sjecišta

Sa $\hat{0}$ označavamo najmanji element, odnosno $x \geq \hat{0}$ za sve $x \in P$. Slično sa $\hat{1}$ označavamo najveći element, odnosno $x \leq \hat{1}$ za sve $x \in P$.
Kažemo da y pokriva x u PUS-u P, u oznaci $x \lessdot y$ ako $x < y$ i ne postoji $z \in P$ takav da $x < z < y$.

Definicija 1.2.3. *Lanac duljine k u PUS-u P je skup $x_0 < x_1 < ... < x_k$ od elementa iz P. Lanac je zasićen ako $x_o \lessdot x_0 \lessdot x_1 ... \lessdot x_k$. Kažemo da je P ima rank n ako je svaki maksimalni lanac od P duljine n. U tom slučaju P ima rank funkciju rk:P $\rightarrow \mathbb{N}$ definiranu sa:*

$$rk(x) = 0 \text{ ako je } x \text{ najmanji element od } P$$
$$rk(y) = rk(x) + 1 \text{ ako } x \lessdot y \text{ u } P.$$

Definicija 1.2.4. *Neka je P lokalno konačan PUS. Sa $Int(P)$ označimo skup svih zatvorenih intervala od P. Funkciju $\mu = \mu_P : Int(P) \rightarrow \mathbb{Z}$ zovemo Möbiusovom funkcijom od P ako zadovoljava sljedeće uvjete:*

$$\mu(x, x) = 1, \text{ za sve } x \in P$$
$$\mu(x, y) = -\sum_{x \leq z < y} \mu(x, z), \text{ za sve } x < y \text{ u } P$$

Važna upotreba Möbiusove funkcije je Möbiusova formula inverzije. Kako bismo došli do tog rezultata koristimo algebru incidencije. Neka $\mathcal{J}(P) = \mathcal{J}(P, K)$ označava vektorski prostor svih funkcija $f : Int(P) \rightarrow K$. Za $f, g \in \mathcal{J}(P)$, definiramo konvoluciju $f * g \in \mathcal{J}(P)$ sa

$$(f * g)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y).$$

Neutralni element δ je dan sa

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x < y. \end{cases}$$

Definiramo zeta funckciju $\zeta \in \mathcal{J}(P)$ od P sa

$$\zeta(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Definicija od μ (Definicija 1.2.4) je ekvivalentna relaciji $\mu\zeta = \delta$ u $\mathcal{J}(P)$, iz čega slijedi $\mu = \zeta^{-1}$ u $\mathcal{J}(P)$.

Teorem 1.2.5 (Möbiusova formula inverzije)**.** *Neka je P konačni PUS sa Möbiusovom funkcijom μ, i neka su $f, g : P \to K$. Tada su sljedeća dva uvjeta ekvivalentna:*

$$f(x) = \sum_{y \geq x} g(y), \ \textit{za sve } x \in P$$
$$g(x) = \sum_{y \geq x} \mu(x,y) f(y), \ \textit{za sve } x \in P$$

Dokaz. K^P skup svih funkcija $P \to K$ definira vektorski prostor na kojem $\mathcal{J}(P)$ djeluje (s lijeva) kao algebra linearnih transformacija sa

$$(\xi f)(x) = \sum_{y \geq x} \xi(x,y) f(y),$$

gdje $f \in K^P$ i $\xi \in \mathcal{J}(P)$. Möbiusova formula inverzija je onda jednostavno izraz

$$\zeta f = g \Leftrightarrow f = \mu g.$$

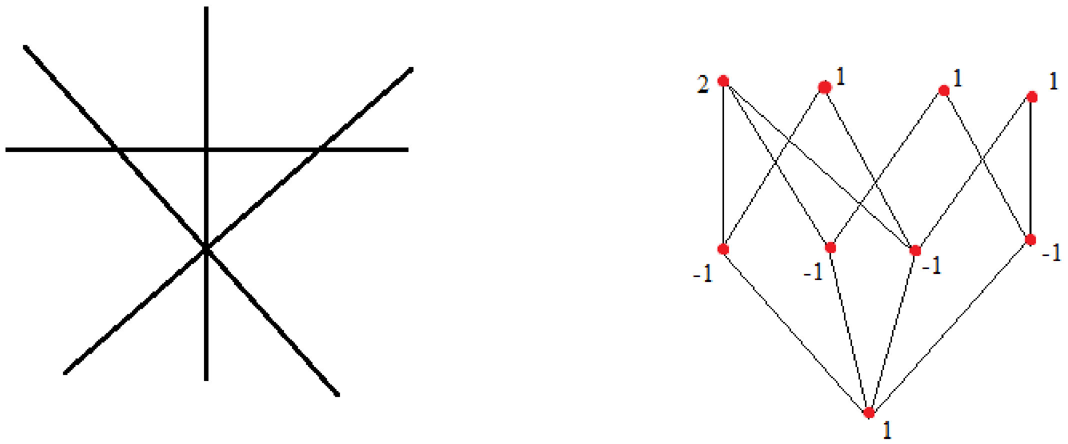
□

Napokon imamo sve potrebne definicije da možemo definirati karakteristični polinom aranžmana $\mathcal{A}$. Ako P ima $\hat{0}$ tada pišemo $\mu(x) = \mu(\hat{0}, x)$.

Definicija 1.2.6. *Karakteristični polinom $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ od aranžmana $\mathcal{A}$ definiran je sa*

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{x \in L(\mathcal{A})} \mu(x) t^{dim(x)}.$$

Primjer 1.2.7. *Pogledajmo sljedeći aranžman u* $\mathbb{R}^2$ *i njegov PUS sjecišta:*



Slika 1.6: Aranžman i njegov PUS sjecišta sa pripadnim vrijednostima Möbiusove funkcije $\mu(x) = \mu(\hat{0}, x)$

Karakteristični polinom aranžmana sa slike 1.6 je dakle jednostavno

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^2 - 4t + 5.$$

U slijedećem poglavlju ćemo pokazati kako preko karakterističnog polinoma jednostavno možemo doći do broja područja aranžmana.

Poglavlje 2

Prebrojavanje područja

2.1 Brisanje-Ograničavanje

Definicija 2.1.1. *Neka je $\mathcal{A}$ aranžman u vektorskom prostoru V. Podaranžman od $\mathcal{A}$ je podskup $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.*

Primijetimo da je stoga $\mathcal{B}$ aranžman i u V. Još ćemo posebno definirati za $x \in L(\mathcal{A})$ podaranžman $\mathcal{A}_x \subseteq \mathcal{A}$ sa

$$\mathcal{A}_x = \{H \in \mathcal{A} : x \subseteq H\}.$$

Također i aranžman $\mathcal{A}^x$ u afinom potprostoru $x \in L(\mathcal{A})$ sa

$$\mathcal{A}^x = \{x \cap H \neq \emptyset : H \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_x\}.$$

Primijetimo da za $x \in L(\mathcal{A})$ tada:

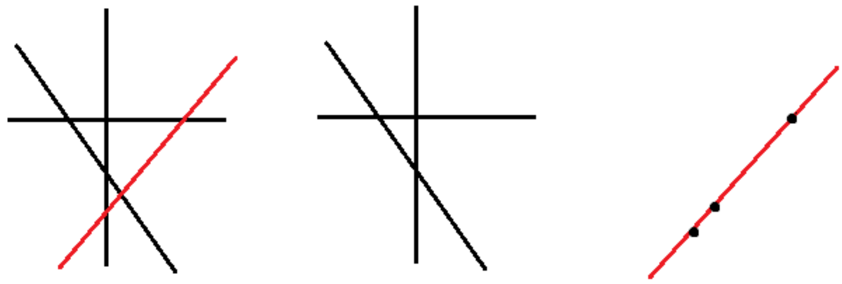
$$\begin{aligned} L(\mathcal{A}_x) &\cong \Lambda_x := \{y \in L(\mathcal{A}) : y \leq x\} \\ L(\mathcal{A}^x) &\cong V^x := \{y \in L(\mathcal{A}) : y \geq x\} \end{aligned}$$

Neka je $\mathcal{A}$ aranžman i $H_0 \in \mathcal{A}$ istaknuta hiperravnina.

Definicija 2.1.2. $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus H_0$ *se naziva izbrisani aranžman.*

Definicija 2.1.3. $\mathcal{A}'' = \{H \cap H_0 : H \in \mathcal{A}'\} = \mathcal{A}^{H_0}$ *se naziva ograničen aranžman.*

Definicija 2.1.4. $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ *se naziva trojka aranžmana.*



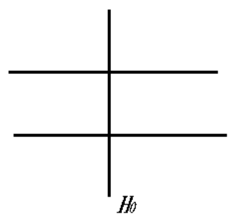
Slika 2.1: Prikaz trojke aranžmana $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ sa istaknutom hiperravninom (pravcem) crveno

Lema 2.1.5. *Neka je $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ trojka realnih aranžmana sa istaknutom hiperravninom H_0. Tada*

$$r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A}') + r(\mathcal{A}'')$$

$$b(\mathcal{A}) = \begin{cases} b(\mathcal{A}') + b(\mathcal{A}''), & ako\ rank(\mathcal{A}) = rank(\mathcal{A}') \\ 0, & ako\ rank(\mathcal{A}) = rank(\mathcal{A}') + 1 \end{cases}$$

Dokaz. Uočimo kako je $r(\mathcal{A})$ jednako $r(\mathcal{A}')$ plus broj područja od $\mathcal{A}'$ koje H_0 siječe na dva područja. Neka je R' jedno takvo područje od $\mathcal{A}'$. Tada $R' \cap H_0 \in \mathcal{R}(\mathcal{A}'')$. S druge strane neka je $R'' \in \mathcal{R}(\mathcal{A}'')$, tada točke blizu R'' sa obje strane H_0 pripadaju istom području $R' \in \mathcal{R}(\mathcal{A}')$, jer bi inače bilo koja hiperravnina $H \in \mathcal{R}(\mathcal{A}')$ koja ih odvaja sjekla R''. Stoga R' je presiječen u dva područja sa H_0. Dakle uspostavili smo bijekciju između područja u $\mathcal{A}''$ i područja u $\mathcal{A}'$ presiječenih na dva sa H_0, iz čega slijedi da je njihov broj jednak i rekurzija vrijedi. Analogni dokaz vrijedi i za broj relativno omeđenih područja. □



Slika 2.2: Prikaz slučaja kada je $rank(\mathcal{A}) = rank(\mathcal{A}') + 1$

Ako pogledamo aranžman sa slike 2.1 vidimo da uistinu vrijedi $r(\mathcal{A}') = 7$, $r(\mathcal{A}'') = 4$, te $r(\mathcal{A}) = 11 = 7 + 4 = r(\mathcal{A}') + r(\mathcal{A}'')$.

Primjer 2.1.6. *Neka je $\mathcal{A}$ aranžman od k pravaca u $\mathbb{R}^2$ u općem položaju. Izračunajmo broj područja $r(\mathcal{A})$. Proizvoljno odaberemo istaknuti pravac H, tada H siječe $\mathcal{A}'$ u k-1 točaka, koje dijele H na k područja. Dakle $r(\mathcal{A}'') = k$. Stoga $r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A}') + k$, gdje $\mathcal{A}'$ sadrži k-1 pravac. Nastavimo brisati pravce na ovaj način i dobijemo $r(\mathcal{A}) = r(\emptyset)+1+2+...+(k-1)+k$. Kada nemamo pravaca cijeli $\mathbb{R}^2$ čini jedno područje, dakle $r(\emptyset) = 1$. Konačno:*

$$r(\mathcal{A}) = 1 + \sum_{i=1}^{k} i = 1 + \frac{k(k+1)}{2} = 1 + k + \binom{k}{2}.$$

Definicija 2.1.7. *Neka je P parcijalno uređen skup. Gornja međa od $x, y \in P$ je element $z \in P$ koji zadovoljava $z \geq x$ i $z \geq y$. Supremum ili najmanja gornja međa od x i y u oznaci $x \vee y$ je gornja međa z takva da $z \leq z'$ za sve gornje međe z'. Analogno definiramo donju među x i y, te infimum ili najveću donju među, u oznaci $x \wedge y$. Dodatno parcijalno uređen skup P kojemu svaka 2 elementa imaju infimum i supremum zovemo mreža.*

Kako bismo dokazali neke od najvažnijih teorema koristit ćemo algebarsku metodu Stoga ćemo prvo pokazati par rezultata. Neka je L konačna mreža i K polje. Möbiusova algebra od L, u oznaci $A(L)$, je polugrupna algebra od L nad K s obzirom na operaciju $\vee$. Ako $x, y \in L$ tada definiramo $xy = x \vee y$. Množenje je prošireno na cijeli A(L) kroz distributivnost. A(L) je isomorfno sa $K^{\#L}$. To ćemo pokazati direktno pokazavši izomofrizam. Za $x \in L$ definiramo

$$\sigma_x = \sum_{y \geq x} \mu(x, y) y \in A(L),$$

gdje μ je Möbiusova funkcija od L. Stoga po Möbiusovoj formuli inverzije

$$x = \sum_{y \geq x} \sigma_y \text{ za sve } x \in L.$$

Prethodna jednadžba pokazuje da σ_x-evi razapinju $A(L)$. Jer $\#\{\sigma_x : x \in L\} = \#L = \dim A(L)$ slijedi da σ_x-evi čine bazu za $A(L)$.

Teorem 2.1.8. *Neka su $x, y \in L$. Tada $\sigma_x \sigma_y = \delta_{xy} \sigma_x$ gdje δ_{xy} je Kroneckerova delta. Drugim riječima σ_x-evi su ortogonalni idempotenti. Stoga*

$$A(L) = \bigoplus_{x \in L} K \cdot \sigma_x \text{ (direktna suma)}$$

Dokaz. Definiramo K-algebru $A'(L)$ sa bazom $\{\sigma'_x : x \in L\}$ i množenjem $\sigma'_x\sigma'_y = \delta_{xy}\sigma'_x$. Za $x \in L$ zadamo $x' = \sum_{s\geq x} \sigma'_s$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} x'y' &= \Big(\sum_{s\geq x} \sigma'_s\Big)\Big(\sum_{t\geq y} \sigma'_t\Big) \\ &= \sum_{\substack{s\geq x \\ s\geq y}} \sigma'_s \\ &= \sum_{s\geq x\vee y} \sigma'_s \\ &= (x \vee y)'. \end{aligned}$$

Stoga linearna transofmracija $\varphi : A(L) \to A'(L)$ definirana sa $\varphi(x) = x'$ je izomorfizam. Jer $\varphi(\sigma_x) = \sigma'_x$ slijedi $\sigma_x\sigma_y = \delta_{xy}\sigma_x$. □

Primijetimo algebra $A(L)$ ima neutralni element za množenje, odnosno $1 = \hat{0} = \sum_{x\in L} \sigma_x$.

Teorem 2.1.9. *Neka je L konačna mreža, te neka je X podskup od L takav da $\hat{0} \notin X$, i takav da ako $y \in L, y \neq \hat{0}$, tada neki $x \in X$ zadovoljava $x \leq y$. Neka je N_k broj podskupova od X sa k elemenata sa supremumom $\hat{1}$. Tada*

$$\mu_L(\hat{0}, \hat{1}) = N_0 - N_1 + N_2 - ...$$

Dokaz. Neka je $\mathrm{char}(K) = 0$, na primjer $K = \mathbb{Q}$. Za $x \in L$ imamo da u $A(L)$ vrijedi

$$\hat{0} - x = \sum_{y\geq\hat{0}} \sigma_y - \sum_{y\geq x} \sigma_y = \sum_{y\not\geq x} \sigma_y.$$

Stoga zbog ortogonalnosti σ_y-ona imamo

$$\prod_{x\in X}(\hat{0} - x) = \sum_{y} \sigma_y$$

gdje sumiramo po y-ma koji su elementi L te zadovoljavaju $y \not\geq x$ za sve $x \in X$. Jedini takav element je po definiciji $\hat{0}$. Stoga

$$\prod_{x\in X}(\hat{0} - x) = \sigma_{\hat{0}}.$$

Raspišemo obje strane kao linearnu kombinaciju elemenata L i izjednačimo koeficijente uz $\hat{1}$ i rezultat slijedi. □

Za sljedeći teorem proširimo definiciju centralnog aranžmana na podskupove:

Definicija 2.1.10. *Podskup $\mathcal{B}$ od aranžmana $\mathcal{A}$ zovemo centralnim ako $\bigcap_{H\in\mathcal{B}} H \neq \emptyset$.*

Teorem 2.1.11 (Whitney)**.** *Neka je $\mathcal{A}$ aranžman u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru. Tada*

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{\substack{\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A} \\ \mathcal{B}\ centralan}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n-rank(\mathcal{B})}.$$

Dokaz. Neka je $z \in L(\mathcal{A})$. Definiramo

$$\Lambda_z = \{x \in L(\mathcal{A}) : x \leq z\},$$

te neka je

$$\mathcal{A}_z = \{H \in \mathcal{A} : H \leq z \text{ (odnosno } z \subseteq H)\}$$

Po teoremu 2.1.9 vrijedi

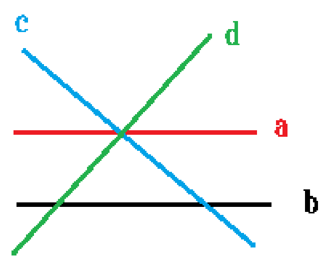
$$\mu(z) = \sum_k (-1)^k N_k(z),$$

gdje je $N_l(z)$ broj k-podskupova od $\mathcal{A}_z$, sa supremumom z. Drugim riječima,

$$\mu(z) = \sum_{\substack{\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}_z \\ z=\bigcap_{H\in\mathcal{B}} H}} (-1)^{\#\mathcal{B}}.$$

Primijetimo da $z = \bigcap_{H\in\mathcal{B}} H$ povlači da je $rank(\mathcal{B}) = n-\dim z$. Pomnožimo obje strane prethodne jednadžbe sa $t^{dim(z)}$ i sumiramo po z te po definiciji karakterističnog polinoma tvrdnja teorema slijedi. □

Primjer 2.1.12. *Neka je $\mathcal{A}$ aranžman u $\mathbb{R}^2$ prikazan na sljedećoj slici:*



Slika 2.3: Aranžman od 4 pravca u $\mathbb{R}$

Sljedeća tablica prikazuje sve centralne podskupove $\mathcal{B}$ od $\mathcal{A}$ i vrijednosti $\#\mathcal{B}$ i $rank(\mathcal{B})$

$\mathcal{B}$	$\#\mathcal{B}$	$rank(\mathcal{B})$
$\emptyset$	0	0
a	1	1
b	1	1
c	1	1
d	1	1
ac	2	2
ad	2	2
bc	2	2
bd	2	2
cd	2	2
acd	3	2

Dakle slijedi $\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^2 - 4t + (5-1) = t^2 - 4t + 4$.

Teorem 2.1.13 (Brisanje-Ograničavanje)**.** *Neka je $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ trojka realnih aranžmana. Tada*

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}'}(t) - \chi_{\mathcal{A}''}(t).$$

Dokaz. Neka je $H_0 \in \mathcal{A}$ istaknuta hiperravnina koja definira trojku aranžmana $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$. Podijelimo sumu na desnoj strani iz teorema 2.1.11 u dvije sume, ako je $H_0 \notin \mathcal{B}$ ili $H_0 \in \mathcal{B}$. U prvom slučaju dobijemo

$$\sum_{\substack{H_0 \notin \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \text{ centralan}}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n - rank(\mathcal{B})} = \chi_{\mathcal{A}'}(t).$$

U drugoj slučaju, neka je $\mathcal{B}_1 = (\mathcal{B} \setminus H_0)^{H_0}$, centralni aranžman u $H_0 \cong K^{n-1}$ i podaranžman od $\mathcal{A}^{H_0} = \mathcal{A}''$. Jer $\#\mathcal{B}_1 = \#\mathcal{B} - 1$ i $rank(\mathcal{B}_1) = rank(\mathcal{B}) - 1$ slijedi

$$\sum_{\substack{H_0 \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \text{ centralan}}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n - rank(\mathcal{B})} = \sum_{\mathcal{B}_1 \in \mathcal{A}''} (-1)^{\#\mathcal{B}_1 + 1} t^{(n-1) - rank(\mathcal{B}_1)} = -\chi_{\mathcal{A}''}(t).$$

Dakle vrijedi

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}'}(t) - \chi_{\mathcal{A}''}(t).$$

□

2.2 Zaslavskyjev teorem

Napokon imamo sve potrebne alate kako bismo dokazali jedan od najvažnijih teorema koji nam omogućuje jednostavno računanje broja područja aranžmana.

Teorem 2.2.1 (Zaslavsky)**.** *Neka je $\mathcal{A}$ aranžman u n-dimenzionalnom realnom vektorskom prostoru. Tada*

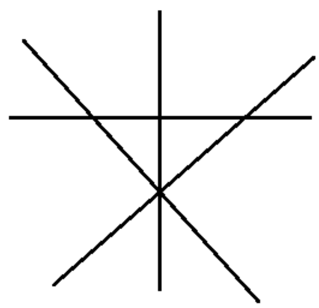
$$r(\mathcal{A}) = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1)$$
$$b(\mathcal{A}) = (-1)^{rank(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1).$$

Dokaz. Prva jednadžba vrijedi za $\mathcal{A} = \emptyset$, jer $r(\emptyset) = 1$ i $\chi_{\emptyset}(t) = t^n$. Po lemi 2.1.5 i teoremu 2.1.13, $r(\mathcal{A})$ i $(-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1)$ zadovoljavaju istu rekurziju stoga jednakost vrijedi. Sad promotrimo drugu jednadžbu. Opet za $\mathcal{A} = \emptyset$ jednadžba vrijedi jer $b(\emptyset) = 1$. Po teoremu 2.1.13 vrijedi

$$\chi_{\mathcal{A}}(1) = \chi_{\mathcal{A}'}(1) - \chi_{\mathcal{A}''}(1).$$

Neka je $d(\mathcal{A}) = (-1)^{rank(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1)$. Ako $rank(\mathcal{A}) = rank(\mathcal{A}') = rank(\mathcal{A}'') + 1$, tada $d(\mathcal{A}) = d(\mathcal{A}') + d(\mathcal{A}'')$. Ako $rank(\mathcal{A}) = rank(\mathcal{A}') + 1$ vrijedi $b(\mathcal{A}) = 0$ i $L(\mathcal{A}') \cong L(\mathcal{A}'')$. Stoga $\chi_{\mathcal{A}'} = \chi_{\mathcal{A}''}$ te po teoremu 2.1.13 imamo $d(\mathcal{A}) = 0$. U oba slučaja $b(\mathcal{A})$ i $d(\mathcal{A})$ zadovoljavaju istu rekurziju, iz čega slijedi $b(\mathcal{A}) = d(\mathcal{A}) = (-1)^{rank(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1)$. □

Primjer 2.2.2. *Prisjetimo se aranžmana u $\mathbb{R}^2$ iz primjera 1.2.7:*



Slika 2.4: Aranžman iz primjera 1.2.7

Karakteristični polinom ovog aranžmana je $\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^2 - 4t + 5$. Te po teoremu 2.2.1 dobijemo $r(\mathcal{A}) = 10$ i $b(\mathcal{A}) = 2$.

Propozicija 2.2.3. *Neka je $\mathcal{A}$ n-dimenzionalni aranžman od m hiperravnina u općem položaju. Tada*

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^n - mt^{n-1} + \binom{m}{2}t^{n-2} - ... + (-1)^n\binom{m}{n}.$$

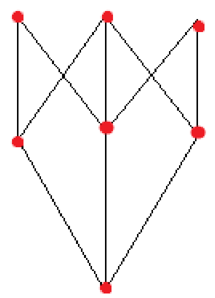
Odnosno, ako je $\mathcal{A}$ realni aranžman, tada

$$\begin{aligned} r(\mathcal{A}) &= 1 + m + \binom{m}{2} + ... + \binom{m}{n} \\ b(\mathcal{A}) &= (-1)^n\left(1 - m + \binom{m}{2} - ... + (-1)^n\binom{m}{n}\right) \\ &= \binom{m-1}{n}. \end{aligned}$$

Dokaz. Svaki podskup $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ sa $\#\mathcal{B} \leq n$ definira element $x_{\mathcal{B}} = \bigcap_{H\in\mathcal{B}} H$ od $L(\mathcal{A})$. Stoga $L(\mathcal{A})$ je skraćena booleanska algebra:

$$L(\mathcal{A}) \cong \{S \subseteq [m] : \#S \leq n\},$$

uređena inkluzijom. Na sljedećoj slici vidimo slučaj kad je $n = 2$ i $m = 3$.



Slika 2.5: Skraćena booleanska algebra ranka 2 sa 3 atoma

Ako $x \in L(\mathcal{A})$ i $rk(x) = k$, tada $[\hat{0}, x] \cong B_k$, booleanskom algebrom ranka k. Stoga

$\mu(x) = (-1)^k$. Dakle

$$\begin{aligned}\chi_{\mathcal{A}}(t) &= \sum_{\substack{S\subseteq[m] \\ \#S \leq n}} (-1)^{\#S} t^{n-\#S} \\ &= t^n - mt^{n-1} + ... + (-1)^n \binom{m}{n}.\end{aligned}$$

□

Poglavlje 3

Metoda konačnih polja

3.1 Metoda konačnih polja

Neka je aranžman $\mathcal{A}$ definiran nad $\mathbb{Q}$. Množenjem jednadžba hiperravnina sa prikladnim cijelim brojem možemo pretpostaviti da je $\mathcal{A}$ definiran nad $\mathbb{Z}$. U tom slučaju možemo uzeti koeficijente jednadžbi modulo prost broj p i dobiiti aranžman $\mathcal{A}_q$ definiran nad konačnim poljem $\mathbb{F}_q$, gdje $q = p^r$. Kažemo da $\mathcal{A}$ ima dobru redukciju mod p (ili nad $\mathbb{F}_q$) ako $L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}_q)$.

Primjer 3.1.1. *Neka je $\mathcal{A}$ afini aranžman u $\mathbb{Q}^1 = \mathbb{Q}$ koji se sastoji od točaka 0 i 6. Tada $L(\mathcal{A})$ se sastoji od tri elementa, $\mathbb{Q}$, $\{0\}$, $\{6\}$. Ako $P \neq 2, 3$ tada 0 i 6 ostaju različiti te $\mathcal{A}$ ima dobru redukciju. S druge strane ako $p = 2$ ili $p = 3$ tada $0 = 6$ u $\mathbb{F}_p$, i $L(\mathcal{A}_p)$ se sastoji od samo dva elementa te $L(\mathcal{A}) \ncong L(\mathcal{A}_p)$. Stoga $\mathcal{A}$ ima lošu redukciju za $p = 2, 3$.*

Propozicija 3.1.2. *Neka je $\mathcal{A}$ aranžman definiran nad $\mathbb{Z}$. Tada $\mathcal{A}$ ima dobru redukciju za sve osim konačno mnogo prostih brojeva p.*

Dokaz. Neka su $H_1, ..., H_j$ afine hiperravnine, i neka je H_i zadana sa jednadžbom $v_i \cdot x = a_i (v_i, a_i \in \mathbb{Z}^n)$. Vrijedi da $H_1 \cap ... \cap H_j \neq \emptyset$ ako i samo ako

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} v_1 & a_1 \\ \vdots & \vdots \\ v_j & a_j \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \end{bmatrix}$$

Štoviše ako to vrijedi tada

$$\dim(H_1 \cap ... \cap H_j) = n - \operatorname{rank}\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \end{bmatrix}.$$

Za svaku $r \times s$ matrixu A vrijedi rank$(A) \geq t$ ako i samo ako neka od $t \times t$ podmatrica B zadovoljava $\det(B) \neq 0$. Iz toga slijedi da $L(\mathcal{A}) \ncong L(\mathcal{A})$ ako i samo ako barem jedan član S od konačne kolekcije $\mathcal{S}$ od podskupova cijelobrojnih matrica B zadovoljava sljedeći uvjet

$$(\forall B \in S)\det(B) \neq 0 \text{ te } \det(B) \equiv 0(\operatorname{mod} p).$$

To se može dogoditi samo za konačno mnogo prostih brojeva p, odnosno za određeni B mora postojati dovoljno veliki p gdje p|det(B) tako da $L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}_p)$. □

Teorem 3.1.3. *Neka je $\mathcal{A}$ aranžman u $\mathbb{Q}^n$, i neka je $L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}_q)$ za q, potenciju nekog prostog broja. Tada*

$$\begin{aligned}\chi_{\mathcal{A}}(q) &= \#\Big(\mathbb{F}_q^n - \bigcup_{H \in \mathcal{A}_q} H\Big)\\ &= q^n - \#\bigcup_{H \in \mathcal{A}_q} H.\end{aligned}$$

Dokaz. Neka je $x \in L(\mathcal{A}_q)$ takav da $\#x = q^{dim(x)}$. Ovdje dim(x) se može izračunati nad $\mathbb{Q}$ ili $\mathbb{F}_q$. Definirajmo dvije funkcije $f, g : L(\mathcal{A}_q) \to \mathbb{Z}$ sa:

$$\begin{aligned}f(x) &= \#x\\ g(x) &= \#\Big(x - \bigcup_{y > x} y\Big).\end{aligned}$$

Posebno za $x = \hat{0}$,

$$g(\hat{0}) = g(\mathbb{F}_q^n) = \#\Big(\mathbb{F}_q^n - \bigcup_{H \in \mathcal{A}_q} H\Big).$$

Očito

$$f(x) = \sum_{y \geq x} g(y).$$

Neka je μ Möbiusova funkcija od $L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}_q)$. Po Möbiusovoj formuli inverzije (teorem 1.2.5),

$$\begin{aligned}g(x) &= \sum_{y \geq x} \mu(x, y) f(y)\\ &= \sum_{y \geq x} \mu(x, y) q^{dim(y)}.\end{aligned}$$

Uzmimo $x = \hat{0}$ i dobijemo

$$g(\hat{0}) = \sum_{y} \mu(x, y) q^{dim(y)} = \chi_{\mathcal{A}}(q).$$

□

3.2 Primjena metode konačnih polja

Pomoću teorema 3.1.3 možemo izračunati karakteristični polinom raznim zanimljivih aranžmana, od kojih su nam zanimljivi Coxeterovi aranžmani koji su povezani sa konačnim Coxeterovim grupama tipa A_{n-1}, D_n, B_n. Nećemo ulaziti detaljnije u Coxeterove grupe, već samo pripadne aranžmane:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(A_{n-1}) &= \{x_i - x_j = 0 \ : \ 1 \leq i \leq j \leq n\}\\ \mathcal{A}(D_n) &= \mathcal{A}(A_{n-1}) \cup \{x_i + x_j = 0 \ : \ 1 \leq i \leq j \leq n\}\\ \mathcal{A}(B_n) &= \mathcal{A}(D_n) \cup \{X_k = 0 \ : \ 1 \leq k \leq n\}.\end{aligned}$$

Ako identificiramo $\mathbb{F}_q^n$ sa $\{0, 1, ..., q-1\}^n$ problem traženja karakeristično polinoma se svodi na problem traženja broja točaka $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ iz $\{0, 1, ..., q-1\}^n$ koje zadovoljavaju pripadne uvjete.

Primjer 3.2.1. *Izračunajmo karakteristični polinom $\chi_{\mathcal{A}(A_{n-1})}(q)$.*

Tražimo broj točaka $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \{0, 1, ..., q-1\}^n$ koje zadovoljavaju $x_i \neq x_j$ za sve $1 \leq i \leq j \leq n$. Prvo x_1 možemo izabrati na q načina, onda x_2 na $q-1$ i tako nastavimo dalje. Stoga

$$\chi_{\mathcal{A}(A_{n-1})}(q) = q(q-1)(q-2)...(q-n+1).$$

Iz toga slijedi po teoremu 2.2.1 da je $r(\mathcal{A}(A_{n-1})) = n!$ i $b(\mathcal{A}(A_{n-1})) = 0$.

Primjer 3.2.2. *Izračunajmo karakteristični polinom $\chi_{\mathcal{A}(B_n)}(q)$.*

Ponovno tražimo broj točaka $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \{0, 1, ..., q-1\}^n$ koje zadovoljavaju $x_i \neq x_j$, $x \neq -x_j$ za sve $1 \leq i \leq j \leq n$ te još i $x_k \neq 0$ za $1 \leq k \leq n$. Za x_1 imamo $q-1$ izbor jer ne smijemo uzeti 0, onda za x_2 imamo $q-3$ jer nemamo za izbor prethodni izbor i njegovu negativnu vrijednost. Nastavimo tako dalje i stoga

$$\chi_{\mathcal{A}(B_n)}(q) = (q-1)(q-3)...(q-2n+1).$$

Iz toga slijedo po teoremu 2.2.1 da je $r(\mathcal{A}(B_n)) = 2^n n!$ i $b(\mathcal{A}(B_n)) = 0$.

Primjer 3.2.3. *Odredimo karakteristični polinom $\chi_{\mathcal{A}(D_n)}(q)$.*

Sada tražimo broj točaka $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \{0, 1, ..., q-1\}^n$ koje zadovoljavaju $x_i \neq x_j$, $x \neq -x_j$ za sve $1 \leq i \leq j \leq n$. Prvo primjetimo da imamo 2 slučaja, kada će 0 biti izabrana i kada 0 neće biti izabrana. Ako 0 neće biti izabrana tada za izbor x_1 imamo $q-1$ mogućnost, za x_2 ne možemo više uzeti vrijednost od x_1 i njegovu negativnu vrijednost pa imamo $q-3$ izbora, i tako nastavimo. Stoga ako ne uzimamo nulu imamo $(q-1)(q-3)...(q-2n+1)$ izbor. Ako pak 0 jest jedan od naših izbora, prvo odredimo koji od x_k će biti 0. Za to imamo n mogućnosti. Za ostalih $n-1$ x-eva prvo imamo $q-1$ mogućnost, pa $q-3$ i tako dalje. Stoga imamo $n(q-1)(q-3)...(q-2n+3)$ mogućnosti. Dakle konačno:

$$\begin{aligned}\chi_{\mathcal{A}(D_n)}(q) &= (q-1)(q-3)...(q-2n+1) + n(q-1)(q-3)...(q-2n+3)\\ &= (q-n+1)(q-1)(q-3)...(q-2n+3).\end{aligned}$$

Te direktno po teoremu 2.2.1 $r(\mathcal{A}(B_n)) = 2^{n-1}n!$ i $b(\mathcal{A}(B_n)) = 0$.

Još jedan zanimljivi aranžman je Shi aranžman u oznaci $\mathcal{S}_n$. On se sastoji od sljedećih hiperravnina

$$\mathcal{S}_n = \{x_i - x_j = 0, 1 \ : 1 \le i \le j \le n\}.$$

Dakle $\mathcal{S}_n$ ima $n(n-1)$ hiperravnina i $\mathrm{rank}(\mathcal{S}_n) = n-1$.

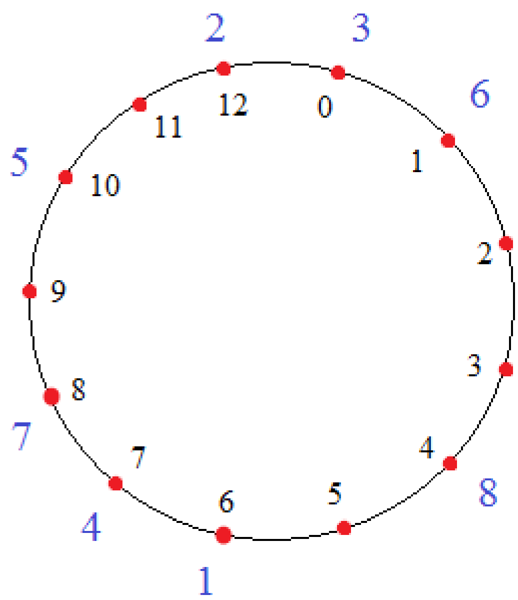
Primjer 3.2.4. *Pokažimo da je karakteristični polinom od $\mathcal{S}_n$ dan sa*

$$\chi_{\mathcal{S}_n}(q) = q(q-n)^{n-1}.$$

Sada tražimo broj točaka $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \{0, 1, ..., q-1\}^n$ koje zadovoljavaju $x_i \neq x_j$, $x \neq x_j + 1$ za sve $1 \le i \le j \le n$. Uzmimo slabo uređenu particiju $\pi = (B_1, ..., B_{q-n})$ od $[n]$ sa $q-n$ blokova, odnosno $\bigcup B_i = [n]$ i $B_i \cap B_j = \emptyset$ za $i \neq j$ i to takvu da $1 \in B_1$. (”Slabo” znači da dopuštamo $B_i = \emptyset$). Za $2 \le i \le n$ imamo $q-n$ izbora za j takav da $i \in B_j$, dakle $(q-n)^{n-1}$ izbora sveukupno. Prikažimo postupak na primjeru za $q = 13$, $n = 8$, te

$$\pi = (\{1, 3, 7\}, \{5\}, \{2, 3, 6\}, \emptyset, \{8\})$$

Poredajmo elemente $\{0, 1, ..., q-1\}$ u smjeru kazaljke na sat na krug. Poredajmo $1, 2, ..., n$ na sljedeći način: Elemente B_1 uzlazno i u smjeru kazaljke na sat počevši sa 1 stavljeno na neki element $x_1 \in \{0, 1, ..., q-1\}$. Preskočimo jedno mjesto (u smjeru kazaljke na sat) i stavimo elemente B_2 uzlazno i u smjeru kazaljke na sat. Preskočimo jedno mjesto i stavimo elemente B_3 na isti način, itd. U našem slučaju za recimo $x_1 = 6$ dobijemo:



Slika 3.1: Prikaz slaganja particije na opisan način

Neka je x_i pozicija gdje je i stavljen. Time smo definirali bijekciju između slabo uređenih particija $\pi = (B_1, ..., B_{q-n})$ od $[n]$ u $q - n$ blokova takvih da je $1 \in B_1$ zajedno sa izborom $x_1 \in \{0, 1, ..., q-1\}$, i skupa $\mathbb{F}_q^n - \cup_{H \in (\mathcal{S}_n)_q} H$. Stoga jer imamo $(q-n)^{n-1}$ izbora za π i q izbora za x_1, po teoremu 3.1.3 slijedi $\chi_{\mathcal{S}_n}(q) = q(q-n)^{n-1}$.

Bibliografija

[1] P. Orlik and H. Terao, *Arrangements of hyperplanes*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften,1992,Springer Verlag,

[2] E. Miller et al. *Geometric Combinatorics*, A co-publication of the AMS and IAS/Park City Mathematics Institute 2007.

Sažetak

U ovom radu upoznali smo se sa raznim aranžmanima hiperravnina i elementarnim pojmovima povezanim uz aranžmane hiperravnina. Istražili smo tehnike računanja područja aranžmana, kao što su brisanje-ograničavanje, korištenje karakterističnog polinoma te metoda konačnih polja. Kroz rad smo dokazali nekoliko važnijih teorema među kojim se ističe Zaslavskyjev teorem po svojoj važnosti, i iz kojega slijede mnogi rezultati. Na više primjera smo pokazali primjenu teorije i izračunali broj područja raznih aranžmana.

Summary

I this work various hyperplane arrangements have been explored and we introduced many basic terms connected with hyperplane arrangements. Technics for counting regions of arrangements were explained, such as deletion-restriction, using characteristic polynomial and finite field method. We proved several important theorems, most importantly Zaslavsky theorem, which leads to many results. On numerous examples we showed application of theory and computed the number of regions of various arrangements.

Životopis

Damjan Murković rođen 4. veljače 1988. u Zagrebu, drugi od tri sina Felicite i Darka. Od malena je pokazivao veliki talent i zanimanje za matematiku. S lakoćom je prošao OŠ Ivana Gundulića, te nakon toga i V. gimnaziju u Zagrebu. Sudjelovao je na raznim matematičkim natjecanjima od čega je najveći uspjeh bilo treće mjesto na državnom natjecanju. Pokazavši se kao vrhunskim učenikom prvo je upisao Arhitektonski fakultet no nakon nekog vremena odlučio se ipak za matematiku njegovu izvornu strast. Poznaje engleski i njemački jezik.