Analitičko produljenje funkcije

Olujić, Nediljka

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Nediljka Olujić

ANALITIČKO PRODULJENJE FUNKCIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Marcela Hanzer

Zagreb, srpanj 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Za Josipa i Anitu

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu ćemo dokazati dva bitna rezultata. Prvi rezultat je teorem o monodromiji koji glasi:

Teorem 0.0.1. *Pretpostavimo da je Ω jednostavno povezano područje, (f, D) je funkcijski element, $D \subset \Omega$ i (f, D) može biti analitički produljen duž svake krivulje u Ω kojoj je početak u središtu kruga D. Tada postoji $g \in H(\Omega)$ takav da je $g(z) = f(z)$ za sve $z \in D$.*

Drugi bitan rezultat koji ćemo dokazati je mali Picardov teorem koji tvrdi da svaka nekonstantna cijela funkcija postiže svaku vrijednost, s jednim mogućim izuzetkom. Iskažimo taj teorem.

Teorem 0.0.2. *Ako je f cijela funkcija i ako postoje dva različita kompleksna broja α i β koji nisu u slici od f, onda je f konstanta.*

Rad se sastoji od 5 poglavlja, no najprije se prisjetimo bitnih pojmova iz kompleksne analize. Za početak, definirajmo područje Ω.

Definicija 0.0.3. *Otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je **povezan** (odnosno, **povezan putevima**) ako za svake $z_1, z_2 \in \Omega$ postoji neprekidno preslikavanje $\gamma : [a, b] \to \Omega$ takvo da je $\gamma(a) = z_1$ i $\gamma(b) = z_2$.*
*$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je **područje** ako je Ω povezan i otvoren.*
Svaki otvoren skup je disjunktna unija područja (komponenti povezanosti).

Sljedeći teorem uvodi pojam derivacije kompleksne funkcije i definira holomorfnu ili analitičku funkciju.

Teorem 0.0.4. *Pretpostavimo da je f kompleksna funkcija definirana na Ω. Ako je $z_0 \in \Omega$ i ako $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ postoji, tada ovaj limes označavamo sa $f'(z_0)$ i zovemo **derivacija funkcije f u točki** z_0.*
*Ako $f'(z_0)$ postoji za svaki $z_0 \in \Omega$, kažemo da je f **holomorfna** ili **analitička na** Ω. Klasu svih holomorfnih funkcija na Ω ćemo označavati sa $H(\Omega)$.*

Napomena 0.0.5. *Ako je $f \in H(\Omega)$ i $g \in H(\Omega)$, onda je i $f + g \in H(\Omega)$ i $fg \in H(\Omega)$, pa je $H(\Omega)$ prsten.*

U poglavlju "Regularne i singularne točke" definiramo bitne pojmove regularne i singularne točke funkcije f te definiramo prirodan rub od f.

Definicija 0.0.6. *Neka je D otvoren krug. Pretpostavimo da je $f \in H(D)$ i neka je β rubna točka od D. β zovemo **regularna točka od f** ako postoji krug D_1 sa središtem u β i funkcija $g \in H(D_1)$ takva da je $g(z) = f(z)$ za sve $z \in D \cap D_1$.*
*Bilo koja rubna točka od D koja nije regularna zove se **singularna točka od f**.*

Definicija 0.0.7. *Ako je $f \in H(U)$ i ako je svaka točka jedinične kružnice T singularna točka od f, onda kažemo da je T **prirodan rub od** f.*

Sada ćemo definirati Riemannovu sferu i iskazati tri teorema na koja ćemo se pozivati u ovom poglavlju.
Kod proučavanja holomorfnih funkcija često je korisno proširiti kompleksnu ravninu dodavanjem nove točke zvane ∞. Novodobiveni skup S^2 koji je unija od $\mathbb{R}^2$ i $\{\infty\}$ zovemo Riemannova sfera.

Teorem 0.0.8. *Neka je Ω otvoren skup u S^2, $\Omega \neq S^2$. Pretpostavimo da je $A \subset \Omega$ i A nema točku gomilišta u Ω. Svakom $\alpha \in A$ pridružimo pozitivni cijeli broj $m(\alpha)$. Tada postoji $f \in H(\Omega)$ čije su sve nultočke u A i f ima nultočku reda $m(\alpha)$ u svakoj točki $\alpha \in A$.*

Teorem 0.0.9. *Neka je Ω otvoren skup u ravnini. Svaka $f \in H(\Omega)$ se može prikazati kao red potencija u Ω.*

Teorem 0.0.10. *Neka je Ω područje, $f \in H(\Omega)$ i $Z(f) = \{a \in \Omega : f(a) = 0\}$. Tada je ili $Z(f) = \Omega$ ili $Z(f)$ nema točku gomilišta u Ω.*
U potonjem slučaju, za svaki $a \in Z(f)$ postoji odgovarajući pozitivan cijeli broj $m = m(a)$ takav da vrijedi:

$$f(z) = (z - a)^m g(z), \quad z \in \Omega$$

gdje je $g \in H(\Omega)$ i $g(a) \neq 0$. Nadalje, $Z(f)$ je najviše prebrojiv.
*Cijeli broj m zovemo **red nultočke** koju f ima u točki a.*
$Z(f) = \Omega$ ako i samo ako je f identički nula na Ω.
*$Z(f)$ zovemo **skup nulišta od** f.*

Zatim smo iskazali i dokazali teoreme Ostrovskog i Hadamarda.

Teorem 0.0.11. ***(Ostrowski)***
Pretpostavimo da su λ, p_k i q_k pozitivni cijeli brojevi, $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$, i

$$\lambda q_k > (\lambda + 1)p_k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Pretpostavimo da

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

ima radijus konvergencije 1 i da je $a_n = 0$ *kada* $p_k < n < q_k$ *za neki k.*
Ako je $s_p(z)$ *p-ta parcijalna suma reda (1) i ako je* β *regularna točka od* f *na jediničnoj kružnici* T*, onda niz* $(s_{p_k}(z))$ *konvergira u nekoj okolini od* β*.*

Teorem 0.0.12. ***(Hadamard)***
Pretpostavimo da je λ *pozitivan cijeli broj,* (p_k) *je niz pozitivnih cijelih brojeva takav da je* $p_{k+1} > (1 + \frac{1}{\lambda})p_k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$ *i da red potencija* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{p_k}$ *ima radijus konvergencije 1. Tada je* T *prirodni rub od* f*.*

Navedimo i preostale teoreme koje smo koristili u ovom poglavlju, a to su Morerin i opći Cauchyjev teorem.

Teorem 0.0.13. ***(Morera)***
Pretpostavimo da je f *neprekidna kompleksna funkcija na otvorenom skupu* Ω *takva da je*

$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0$$

za svaki zatvoren trokut $\triangle \subset \Omega$*. Tada je* $f \in H(\Omega)$*.*

Prije nego iskažemo opći Cauchyjev teorem, uvedimo pojmove krivulje i puta, odnosno zatvorene krivulje i zatvorenog puta.

Definicija 0.0.14. *Neka je X topološki prostor.* ***Krivulja u*** *X je neprekidno preslikavanje* γ *segmenta* $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ *u X,* $\alpha < \beta$*. Segment* $[\alpha, \beta]$ *zovemo interval parametara od* γ *i sliku od* γ *označavamo sa* γ^**.*
Stoga je γ *preslikavanje i* γ^* *je skup svih točaka* $\gamma(t)$ *za* $\alpha \leq t \leq \beta$*.*
Ako se početna točka $\gamma(\alpha)$ *od* γ *podudara sa krajnjom točkom* $\gamma(\beta)$*, onda* γ *zovemo* ***zatvorenom krivuljom****.*
Put *je po dijelovima neprekidna diferencijabilna krivulja u ravnini. Općenitije, put sa intervalom parametara* $[\alpha, \beta]$ *je neprekidna kompleksna funkcija* γ *na* $[\alpha, \beta]$ *takva da vrijedi sljedeće:*
Postoji konačno mnogo točaka s_j*,*

$$\alpha = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = \beta$$

i restrikcija od γ *na svaki interval* $[s_{j-1}, s_j]$ *ima neprekidnu derivaciju na* $[s_{j-1}, s_j]$*. Međutim, u točkama* $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ *derivacije slijeva i zdesna od* γ *se mogu razlikovati.*
Zatvoren put *je zatvorena krivulja koja je također i put.*

Definirajmo i pojmove X-homotopne krivulje, nulhomotopne krivulje te iskažimo teorem.

Definicija 0.0.15. *Pretpostavimo da su γ_0 i γ_1 zatvorene krivulje u topološkom prostoru X, obje sa intervalom parametara $I = [0, 1]$. Kažemo da su γ_0 i γ_1 X-homotopne ako postoji neprekidno preslikavanje jediničnog kvadrata $I^2 = I \times I$ u X takvo da je*

$$H(s, 0) = \gamma_0(s), \quad H(s, 1) = \gamma_1(s), \quad H(0, t) = H(1, t), \tag{2}$$

za sve $s \in I$ i $t \in I$.
Stavimo $\gamma_t(s) = H(s, t)$. Tada relacija (2) definira jednoparametarsku familiju zatvorenih krivulja γ_t na X, koja povezuje γ_0 i γ_1. Intuitivno, ovo znači da γ_0 možemo neprekidno svesti na γ_1 unutar X.
Ako je γ_0 X-homotopna nekom konstantnom preslikavanju γ_1 (to jest, ako se γ_1^* sastoji od samo jedne točke), onda kažemo da je γ_0 nulhomotopna na X.

Teorem 0.0.16. *Neka je γ zatvoren put i neka je Ω komplement od γ^* (u odnosu na ravninu). Definirajmo:*

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}, \quad z \in \Omega.$$

Tada je Ind_γ cjelobrojna funkcija na Ω koja je konstanta na svakoj komponenti od Ω i koja je 0 na neomeđenim komponentama od Ω.
Ind_γ zovemo indeks od z u odnosu na γ.

Teorem 0.0.17. ***(Opći Cauchyjev teorem)***
Neka je α zatvorena krivulja na otvorenom, nepraznom skupu $D \subseteq \mathbb{C}$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(1) Za svaku analitičku funkciju $f : D \to \mathbb{C}$ i za svaki $z \in D \backslash Im(\alpha)$ vrijedi takozvana generalna Cauchyjeva integralna formula

$$f(z) Ind_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \frac{f(\xi)}{\xi - z} dz.$$

(2) $\int_\alpha f = 0$ za svaku analitičku funkciju $f : D \to \mathbb{C}$.

Na početku poglavlja "Produljenje duž krivulje" smo definirali pojmove funkcijskog elementa te smo rekli kada su dva funkcijska elementa izravna produljenja jedan drugoga. Zatim smo definirali lanac i analitičko produljenje funkcijskog elementa duž lanca.

Definicija 0.0.18. ***Funkcijski element*** *je uređeni par (f, D) gdje je D otvoreni krug i $f \in H(D)$.*
Kažemo da su dva funkcijska elementa (f_0, D_0) i (f_1, D_1) ***izravna produljenja*** *jedan drugoga ako vrijede sljedeća dva uvjeta:*

(1) $D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$

(2) $f_0(z) = f_1(z)$ *za sve* $z \in D_0 \cap D_1$.
U ovom slučaju pišemo:

$$(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1).$$

Lanac $\mathscr{C}$ *je konačan niz krugova, pišemo* $\mathscr{C} = \{D_0, D_1, \ldots, D_n\}$, *takvih da je* $D_{i-1} \cap D_i \neq \emptyset$ *za* $i = 1, 2, \ldots, n$.
Ako je dan funkcijski element (f_0, D_0) *i ako postoje funkcijski elementi* (f_i, D_i) *takvi da je* $(f_{i-1}, D_{i-1}) \sim (f_i, D_i)$ *za* $i = 1, 2, \ldots, n$, *tada kažemo da je* (f_n, D_n) ***analitičko produljenje od*** (f_0, D_0) ***duž*** $\mathscr{C}$.

Zatim smo definirali analitičko produljenje funkcijskog elementa duž krivulje.

Definicija 0.0.19. *Kažemo da lanac* $\mathscr{C}$ ***prekriva*** *krivulju* γ *s parametrima iz intervala* $[0, 1]$ *ako postoje brojevi* $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$ *takvi da je* $\gamma(0)$ *središte od* D_0, $\gamma(1)$ *je središte od* D_n *i*

$$\gamma([s_i, s_{i+1}]) \subset D_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Ako (f_0, D_0) *može biti produljen duž* $\mathscr{C}$ *do* (f_n, D_n), *onda* (f_n, D_n) *nazivamo* ***analitičkim produljenjem od*** (f_0, D_0) ***duž*** γ. *Kažemo da* (f_0, D_0) ***dopušta*** *analitičko produljenje duž* γ.

Jedinstvenost analitičkog produljenja duž γ smo dokazali u sljedećem teoremu.

Teorem 0.0.20. *Ako je* (f, D) *funkcijski element i ako je* γ *krivulja s početkom u središtu od* D, *onda* (f, D) *dopušta najviše jedno analitičko produljenje duž* γ.

Navedimo i definiciju jednoparametarske familije γ_t krivulja od α do β na X.

Definicija 0.0.21. *Pretpostavimo da su* α *i* β *točke u topološkom prostoru* X *i* φ *je neprekidno preslikavanje jediničnog kvadrata* $I^2 = I \times I$ $(I = [0, 1])$ *u* X *takvo da je* $\varphi(0, t) = \alpha$ *i* $\varphi(1, t) = \beta$ *za sve* $t \in I$.
Kažemo da krivulje γ_t *definirane sa*

$$\gamma_t(s) = \varphi(s, t), \quad s \in I, \quad t \in I$$

tvore ***jednoparametarsku familiju*** $\{\gamma_t\}$ ***krivulja od*** α ***do*** β ***na*** X.

U sljedećem teoremu govorimo o bitnom svojstvu analitičkog produljenja.

Teorem 0.0.22. *Pretpostavimo da je* $\{\gamma_t,\ t \in [0, 1]\}$ *jednoparametarska familija krivulja od* α *do* β *u ravnini,* D *je krug sa središtem u* α *i funkcijski element* (f, D) *dopušta analitičko produljenje duž svakog* γ_t *do elementa* (g_t, D_t). *Tada je* $g_1 = g_0$.

U poglavlju "Teorem o monodromiji" smo iskazali i dokazali taj teorem. Razmatranja u prethodna dva poglavlja su zapravo olakšala dokaz tog teorema. Korisna su nam bila i sljedeća dva teorema, odnosno, na njih smo se pozivali.

Teorem 0.0.23. *Za područje u ravnini Ω, svaki od sljedećih devet uvjeta implicira sve ostale:*

(a) *Ω je homeomorfno otvorenom krugu U.*

(b) *Ω je jednostavno povezano područje.*

(c) *$Ind_\gamma(\alpha) = 0$ za svaki zatvoren put γ na Ω i za svaki $\alpha \in S^2 \backslash \Omega$.*

(d) *$S^2 \backslash \Omega$ je povezan.*

(e) *Svaki $f \in H(\Omega)$ može biti aproksimiran polinomima, uniformno na kompaktnim podskupovima od Ω.*

(f) *Za svaki $f \in H(\Omega)$ i svaki zatvoren put γ u Ω*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

(g) *Svakom $f \in H(\Omega)$ odgovara $F \in H(\Omega)$ takav da je $F' = f$.*

(h) *Ako je $f \in H(\Omega)$ i $\frac{1}{f} \in H(\Omega)$ tada postoji $g \in H(\Omega)$ takav da je $f = e^g$.*

(i) *Ako je $f \in H(\Omega)$ i $\frac{1}{f} \in H(\Omega)$ tada postoji $\phi \in H(\Omega)$ takav da je $f = \phi^2$.*

Dolazimo do poglavlja "Konstrukcija modularne funkcije". Prije nego krenemo s opisom tog poglavlja, definirajmo konformno preslikavanje te razlomljene linearne transformacije.

Definicija 0.0.24. ***Konformno preslikavanje*** *je transformacija $w = f(z)$ koja čuva lokalne kutove. Analitička funkcija je konformna u svim točkama u kojima ima derivaciju različitu od nule.*

Definicija 0.0.25. *Ako su a, b, c i d kompleksni brojevi takvi da je $ad - bc \neq 0$, onda preslikavanje*

$$z \to \frac{az + b}{cz + d} \tag{3}$$

zovemo ***razlomljena linearna transformacija****.*
Pogodno je promatrati relaciju (3) kao preslikavanje sfere S^2 u S^2. Što se tiče točke ∞ vrijedi da se $-\frac{d}{c}$ preslikava u ∞, a ∞ se preslikava u $\frac{a}{c}$, za $c \neq 0$.
Vidimo da je svaka razlomljena linearna transformacija surjekcija sa S^2 na S^2. Nadalje, svaka razlomljena linearna transformacija je dobivena slaganjem transformacija sljedećeg tipa:

(a) translacije: $z \to z + b$,

(b) rotacije: $z \to az$, $|a| = 1$,

(c) homotetije: $z \to rz$, $r > 0$,

(d) inverzije: $z \to \frac{1}{z}$.

Ako je $c = 0$, *onda relacija (3) prelazi u*

$$z \to \frac{az + b}{d}$$

pa tvrdnja vrijedi.

Za $c \neq 0$ *tvrdnja slijedi iz sljedećih jednakosti*

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{\lambda}{cz + d}, \quad \lambda = \frac{bc - ad}{c}.$$

Prva tri tipa transformacija preslikavaju pravce u pravce i kružnice u kružnice. To nije istina za transformaciju (d).

Međutim, ako s $\mathcal{F}$ *označimo familiju koja sadrži sve pravce i kružnice, onda transformacija (d) čuva familiju* $\mathcal{F}$.

Pretpostavimo da su sada a, b i c različiti kompleksni brojevi. Konstruirajmo razlomljenu linearnu transformaciju φ *koja preslikava uređenu trojku* (a, b, c) *u* $(0, 1, \infty)$.

$$\varphi(z) = \frac{(b - c)(z - a)}{(b - a)(z - c)}. \tag{4}$$

Pokažimo da postoji samo jedno takvo preslikavanje φ. *Zbog* $\varphi(a) = 0$ *moramo imati* $(z-a)$ *u brojniku. Zbog* $\varphi(c) = \infty$ *moramo imati* $(z-c)$ *u nazivniku. Zbog* $\varphi(b) = 1$ *slijedi relacija (4).*

Ako je neka od točaka a, b ili c jednaka ∞, *jednostavno dođemo do formula koje su analogne relaciji (4).*

Dolazimo do sljedećeg rezultata.

Za bilo koje dvije uređene trojke (a, b, c) *i* (a', b', c') *iz* S^2 *postoji jedna i samo jedna razlomljena linearna transformacija koja preslikava a u* a', *b u* b' *i c u* c'. *Naravno, pretpostavimo da vrijedi* $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$, $a' \neq b'$, $a' \neq c'$ *i* $b' \neq c'$.

Zaključujemo da razlomljenim linearnim transformacijama svaku kružnicu možemo preslikati na svaku kružnicu. Zanimljiva je i činjenica da se svaka kružnica može preslikati na svaki pravac (ako točku ∞ *promatramo kao dio pravca). Stoga se svaki otvoreni krug može konformno preslikati u svaku otvorenu poluravninu.*

U potpoglavlju ”Modularna grupa” smo uveli skup G svih razlomljenih linearnih transformacija φ oblika:

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

gdje su $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ i $ad - bc = 1$. Pokazali smo da je G grupa sa kompozicijom kao grupnom operacijom, te smo definirali pojam modularne funkcije.
Modularna funkcija je holomorfna (ili meromorfna) funkcija f na Π^+ koja je invarijantna pod G ili barem pod nekom netrivijalnom podgrupom Γ od G. To znači da je $f \circ \varphi = f$ za svaki $\varphi \in \Gamma$.
Drugo potpoglavlje nosi naziv "Definicija podgrupe Γ od G".
Za Γ ćemo uzeti podgrupu grupe G generiranu sa σ i τ gdje je

$$\sigma(z) = \frac{z}{2z+1}, \quad \tau(z) = z + 2.$$

Definirajmo skup Q koji će nam biti od koristi u daljnim razmatranjima. Neka je $z = x + iy$. Neka je Q skup svih z koji zadovoljavaju sljedeća četiri uvjeta:

$$y > 0, \quad -1 \leq x < 1, \quad |2z+1| \geq 1, \quad |2z-1| > 1.$$

Q je omeđen okomitim pravcima $x = -1$ i $x = 1$, a odozdo je omeđen sa dvije polukružnice radijusa $\frac{1}{2}$ sa središtima u $-\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2}$.
Naš cilj u ovom poglavlju je konstrukcija funkcije λ koja je invarijantna pod Γ i koja vodi do brzog dokaza Picardovog teorema. No, prije nego dođemo do te funkcije λ uveli smo pojam fundamentalne domene od Γ. To znači da vrijede tvrdnje (a) i (b) sljedećeg teorema.

Teorem 0.0.26. *Neka su Γ i Q definirani kao gore. Tada vrijedi:*

(a) Ako su φ_1 i $\varphi_2 \in \Gamma$ i $\varphi_1 \neq \varphi_2$, onda je $\varphi_1(Q) \cap \varphi_2(Q) = \emptyset$.

(b) $\bigcup_{\varphi \in \Gamma} \varphi(Q) = \Pi^+$.

(c) Γ sadrži sve transformacije $\varphi \in G$ oblika:

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

za sve a i d neparne, b i c parne cijele brojeve.

Na kraju ovog potpoglavlja iskazujemo teorem u kojem dolazimo do tražene funkcije λ.

Teorem 0.0.27. *Ako su Γ i Q definirani kao u prethodnom teoremu, tada postoji funkcija $\lambda \in H(\Pi^+)$ takva da je:*

(a) $\lambda \circ \varphi = \lambda$ za svaki $\varphi \in \Gamma$.

(b) λ je injektivna funkcija na Q.

(c) Kodomena Ω od λ (prema (a) dijelu to je isto kao $\lambda(Q)$) je područje koje se sastoji od svih kompleksnih brojeva različitih od 0 i 1.

(d) λ ima x-os kao svoju prirodnu granicu.

U dokazu gore navedenog teorema smo se pozivali na sljedeće rezultate. Sa Π^+ označavamo otvorenu gornju polovicu ravnine.

Teorem 0.0.28. ***Schwarzov princip refleksije***
Pretpostavimo da je L segment na realnoj osi i Ω^+ je područje u Π^+. Pretpostavimo dalje da je svaki $t \in L$ središte otvorenog kruga D_t takav da $\Pi^+ \cap D_t$ leži u Ω^+. Neka je Ω^- refleksija od π^+:

$$\Omega^- = \{z : \bar{z} \in \Omega^+\}.$$

Pretpostavimo da je $f = u + iv$ holomorfna na Ω^+ i $\lim_{n\to\infty} v(z_n) = 0$ za svaki niz (z_n) u Ω^+ koji konvergira u neku točku od L.
Tada postoji funkcija F, holomorfna na $\Omega^+ \cup L \cup \Omega^-$ takva da $F(z) = f(z)$ na Ω^+. Ovakav F zadovoljava relaciju:

$$F(\bar{z}) = \overline{F(z)}, \quad z \in \Omega^+ \cup L \cup \Omega^-. \tag{5}$$

Ovaj teorem osigurava da f može biti produljena do funkcije koja je holomorfna na simetričnom području u odnosu na realnu os, i relacija (5) tvrdi da F čuva ovu simetriju.

Teorem 0.0.29. *Neka je Ω omeđeno jednostavno povezano područje u ravnini i neka je f konformno preslikavanje s Ω u U.*

(a) Ako je β jednostavna rubna točka u Ω, onda f ima neprekidno produljenje na $\Omega \cup \{\beta\}$. Ako je f produljena na ovaj način, onda je $|f(\beta)| = 1$.

(b) Ako su β_1 i β_2 dvije različite jednostavne rubne točke u Ω i ako je f produljeno na $\Omega \cup \{\beta_1\} \cup \{\beta_2\}$ (kao u (a)), tada je $f(\beta_1) \neq f(\beta_2)$.

Teorem 0.0.30. *Ako je Ω omeđeno jednostavno povezano područje u ravnini i ako je svaka rubna točka jednostavna, onda se svako konformno preslikavanje sa Ω na U produljuje na homeomorfizam sa $\overline{\Omega}$ na $\overline{U}$.*

Definicija 0.0.31. ***Jordanova krivulja*** *je homeomorfna slika jedinične kružnice.*

Napomena 0.0.32.

(a) Teorem 0.0.30 ima topološki korolar:
Ako je svaka rubna točka omeđenog jednostavno povezanog područja Ω jednostavna, tada je rub od Ω Jordanova krivulja i $\overline{\Omega}$ je homeomorfno na $\overline{U}$.

(b) Pretpostavimo da je f definirana kao u teoremu 0.0.30, a, b i c su različite rubne točke od Ω i A, B i C su različite točke od T. Postoji razlomljena linearna transformacija φ koja preslikava trojku $\{f(a),\ f(b),\ f(c)\}$ na $\{A,\ B,\ C\}$. Pretpostavimo da se orijentacija od $\{A,\ B,\ C\}$ slaže sa onom od $\{f(a),\ f(b),\ f(c)\}$. Tada je $\varphi(U) = U$ i funkcija $g = \varphi \circ f$

je homeomorfizam sa $\overline{\Omega}$ *na* $\overline{U}$ *i* g *je holomorfna na* Ω *i preslikava* $\{a, b, c\}$ *u vrijednosti* $\{A, B, C\}$. *Funkcija* g *je jedinstveno određena ovim uvjetima.*

(c) Teorem 0.0.30, kao i (b), se jednostavno i lako primjenjuje na jednostavno povezana područja Ω *u Riemannovoj sferi* S^2*, čije su sve rubne točke jednostavne. Time postižemo da* $S^2 \backslash \Omega$ *ima neprazan interior. Nadalje, razlomljene linearne transformacije nas vraćaju na slučaj u kojem je* Ω *omeđeno područje u ravnini. Slično,* U *možemo zamijeniti s poluravninom.*

(d) Općenitije, ako f_1 *i* f_2 *preslikavaju* Ω_1 *i* Ω_2 *na* U*, kao u teoremu 0.0.30, onda je preslikavanje* $f = f_2^{-1} \circ f_1$ *homeomorfizam sa* $\overline{\Omega_1}$ *na* $\overline{\Omega_2}$ *i preslikavanje* f *je holomorfno na* Ω_1.

U poglavlju ”Picardov teorem” koristimo sljedeće tvrdnje.

Definicija 0.0.33. *Funkcija je* ***cijela*** *ako je holomorfna na cijeloj ravnini.*

Teorem 0.0.34. ***Liouvilleov teorem***
Svaka omeđena cijela funkcija je konstanta.

Poglavlje 1

Regularne i singularne točke

Definicija 1.0.35. *Neka je D otvoren krug. Pretpostavimo da je $f \in H(D)$ i neka je β rubna točka od D. β zovemo **regularna točka od f** ako postoji krug D_1 sa središtem u β i funkcija $g \in H(D_1)$ takva da je $g(z) = f(z)$ za sve $z \in D \cap D_1$.*
*Bilo koja rubna točka od D koja nije regularna zove se **singularna točka od f**.*

Pokažimo da je skup svih regularnih točaka od f otvoren (moguće i prazan) podskup ruba od D.
Neka je β regularna točka od f, $f \in H(D)$. Tada postoji krug D_1 sa središtem u β i funkcija $g \in H(D_1)$ takva da je $g(z) = f(z)$ za sve $z \in D \cap D_1$. Za svaku točku $z_1 \in \partial D \cap D_1$ postoji krug D_2 sa središtem u z_1 takav da je $D_2 \subseteq D_1$ i $g(z) = f(z)$, za svaki $z \in D_2 \cap D$.
Dakle, skup svih regularnih točaka of f je otvoren podskup ruba od D. Zaključujemo da je skup svih singularnih točaka od f zatvoren podskup ruba od D.
U sljedećim teoremima promatrat ćemo jedinični krug U umjesto D, bez smanjenja općenitosti.

Teorem 1.0.36. *Pretpostavimo da je $f \in H(U)$ i da red potencija*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \; z \in U \tag{1.1}$$

ima radijus konvergencije 1. Tada f ima barem jednu singularnu točku na jediničnoj kružnici T.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, odnosno da f nema niti jednu singularnu točku na jediničnoj kružnici T. Tada je svaka točka od T regularna točka od f.
Jedinična kružnica je ograničen i zatvoren skup, pa je i kompaktan skup. Kompaktnost od T povlači da tada postoje otvoreni krugovi $D_1, D_2, \ldots, D_n$ i funkcije $g_j \in H(D_j)$ takve da je središte svakog D_j na T, $T \subset D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n$ i $g_j(z) = f(z)$ na $D_j \cap U$ za $j = 1, 2, \ldots, n$.
Ako je $D_i \cap D_j \neq \emptyset$ i $V_{ij} = D_i \cap D_j \cap U$, tada je $V_{ij} \neq \emptyset$ (jer su središta od D_j na T) i

$g_i = f = g_j$ na V_{ij}.
$D_i \cap D_j$ je povezan, pa iz teorema 0.0.10 slijedi da je $g_i = g_j$ na $D_i \cap D_j$. Stoga možemo definirati funkciju h na $\Omega = U \cup D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n$ sa:

$$h(z) = \begin{cases} f(z), & z \in U \\ g_i(z), & z \in D_i. \end{cases}$$

Budući da je $\overline{U} \subset \Omega$, a Ω je otvoren, postoji $\epsilon > 0$ takav da je $D(0, 1+\epsilon) \subset \Omega$. Međutim, funkcija $h(z)$ je na U definirana kao (1.1), pa je $h \in H(\Omega)$. Sada teorem 0.0.9 povlači da je radijus konvergencije u (1.1) barem $1+\epsilon$, što je kontradikcija s pretpostavkom teorema da je radijus konvergencije 1.
Dakle, f ima barem jednu singularnu točku na jediničnoj kružnici T. □

Definicija 1.0.37. *Ako je $f \in H(U)$ i ako je svaka točka kružnice T singularna točka od f, onda kažemo da je T **prirodan rub od** f.*
U ovom slučaju, f nema holomorfnih produljenja na bilo koje područje koje je pravi nadskup jediničnog kruga U.

Napomena 1.0.38. *Pokažimo da postoji funkcija $f \in H(U)$ za koju je T prirodan rub.*
Ako je Ω bilo koje područje, lako je naći $f \in H(\Omega)$ koji nema holomorfnih produljenja na šira područja.
Zaista, neka je A bilo koji prebrojiv skup u Ω koji nema gomilišta u Ω, ali takav da je svaka rubna točka od Ω gomilište od A. Primijenivši teorem 0.0.8 dobijemo funkciju $f \in H(\Omega)$ koja je nula u svakoj točki od A, ali nije identički jednaka nuli.
Ako je $g \in H(\Omega_1)$ gdje je Ω_1 područje koje u potpunosti sadrži Ω i ako je $g = f$ na Ω, nultočke od g bi imale točku gomilišta u Ω_1 i imamo kontradikciju.
Jednostavan i eksplicitan primjer je dan sa:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = z + z^2 + z^4 + z^8 + \dots, \quad z \in U. \tag{1.2}$$

Pokažimo da je radijus konvergencije reda (1.2) jednak 1.

$$k = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1}} = 1$$

Vrijedi:

$$f(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (z^2)^{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^{n+1}} = z^2 + z^4 + z^8 + \cdots = f(z) - z.$$

Pokazali smo da f zadovoljava sljedeću jednadžbu:

$$f(z^2) = f(z) - z.$$

Promatrajmo točke oblika $re^{i\frac{2\pi k}{2^n}}$, za $r > 0$ i $r \to 1-$.
Neka je $k = 0$. Pokažimo da ne postoji konačan $\lim_{r\to 1-} f(r)$.
Pretpostavimo suprotno, odnosno da vrijedi

$$\lim_{r\to 1-} f(r) = M < \infty.$$

Tada iz jednadžbe

$$f(r^2) = f(r) - r$$

puštanjem limesa slijedi

$$M = M - 1$$

(zbog $f(r^2) \to M$, $f(r) \to M$, $r \to 1-$).
To je kontradikcija s našom pretpostavkom.
Sada matematičkom indukcijom po n pokažimo da je f neograničena na svakom radijusu od U koji završava na $e^{2\pi ik/2^n}$, gdje su k i n pozitivni cijeli brojevi.
Za $n = 1$ imamo:

$$f(r^2(e^{i\frac{2\pi k}{2}})^2) = f(r^2(e^{i\pi k})^2) = f(re^{i\pi k}) - re^{i\pi k}.$$

Zbog $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$ imamo:

$$f(r^2) = f(r(-1)^k) - r(-1)^k.$$

Pustimo $\lim_{r\to 1-}$. Tada vrijedi $\lim_{r\to 1-} r(-1)^k = (-1)^k$ i ne postoji konačan $\lim_{r\to 1-} f(r^2)$.
Zaključujemo da ne postoji konačan limes $\lim_{r\to 1-} f(r(-1)^k)$.
Za $n = 2$ imamo:

$$f(r^2e^{i\pi k}) = f(re^{\frac{i\pi k}{2}}) - re^{\frac{i\pi k}{2}}.$$

Zbog $e^{i\frac{i\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$ imamo:

$$f(r^2(-1)^k) = f(ri^k) - ri^k.$$

Pustimo $\lim_{r\to 1-}$. Tada vrijedi $\lim_{r\to 1-} ri^k = i^k$ i ne postoji konačan $\lim_{r\to 1-} f(r^2(-1)^k)$.
Zaključujemo da ne postoji konačan limes $\lim_{r\to 1-} f(ri^k)$.
Pretpostavimo da za svako k i svako $n \le n_0$ ne postoji konačan limes $\lim_{r\to 1-} f(re^{i\frac{2\pi k}{2^n}})$.
Za n_0 imamo:

$$f(r^2e^{i\frac{2\pi k}{2^{n_0}}}) = f(re^{i\frac{2\pi k}{2^{n_0+1}}}) - re^{i\frac{2\pi k}{2^{n_0+1}}}.$$

Pustimo $\lim_{r\to 1-}$. *Tada je* $re^{i\frac{2\pi k}{2^{n_0+1}}}$ *konačan i ne postoji konačan limes* $\lim_{r\to 1-} f(r^2 e^{i\frac{2\pi k}{2^{n_0}}})$.
Slijedi da ne postoji konačan limes $\lim_{r\to 1-} f(re^{i\frac{2\pi k}{2^{n_0+1}}})$.
Ove točke tvore gust podskup jedinične kružnice T*, a jer je skup svih singularnih točaka od* f *zatvoren zaključujemo da je* T *prirodna granica od* f.
Nije slučajno da je u ovom primjeru red s dosta praznina, tj. s mnogo koeficijenata koji su jednaki nula.

Ovaj primjer je samo poseban slučaj Hadamardovog teorema, kojeg ćemo dobiti iz sljedećeg teorema Ostrowskog.

Teorem 1.0.39. ***(Ostrowski)***
Pretpostavimo da su λ, p_k *i* q_k *pozitivni cijeli brojevi,* $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$, *i*

$$\lambda q_k > (\lambda + 1)p_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{1.3}$$

Pretpostavimo da

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1.4}$$

ima radijus konvergencije 1 i da je $a_n = 0$ *kada* $p_k < n < q_k$ *za neki* k.
Ako je $s_p(z)$ p*-ta parcijalna suma reda (1.4) i ako je* β *regularna točka od* f *na jediničnoj kružnici* T*, onda niz* $(s_{p_k}(z))$ *konvergira u nekoj okolini od* β.

Napomena 1.0.40. *Primijetimo da puni niz* $(s_p(z))$ *ne može konvergirati nijednoj točki izvan* $\overline{U}$*. Uvjet (1.3) osigurava postojanje podniza koji konvergira u okolini od* β*, stoga i u nekim točkama izvan* $\overline{U}$*. Ovaj fenomen se naziva* ***prekonvergencija****.*

Dokaz. Iz

$$g(z) = f(\beta z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\beta z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta^n z^n$$

slijedi da g također zadovoljava uvjet (1.3). Stoga bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\beta = 1$, te f ima holomorfno produljenje na neko područje Ω koje sadrži $U \cup \{1\}$. To holomorfno produljenje ćemo i dalje označavati s f.
Stavimo:

$$\phi(\omega) = \frac{1}{2}(\omega^{\lambda} + \omega^{\lambda+1}).$$

Definirajmo:

$$F(\omega) = f(\phi(\omega))$$

za sve ω takve da je $\phi(\omega) \in \Omega$. Ako je $|\omega| \leq 1$, ali $\omega \neq 1$, onda je

$$\begin{aligned}|\phi(\omega)| &= |\frac{1}{2}(\omega^{\lambda} + \omega^{\lambda+1})| \\ &= |\frac{1}{2}(\omega^{\lambda} + \omega^{\lambda}\omega)| \\ &= |\frac{1}{2}\omega^{\lambda}(1+\omega)| < |\omega^{\lambda}| < 1\end{aligned}$$

jer je $|1+\omega| < 2$.
Također je

$$\phi(1) = \frac{1}{2}(1^{\lambda} + 1^{\lambda+1}) = 1.$$

Slijedi:

$$\phi(\overline{D}) \subseteq D(0,1) \cup \{1\} = U \cup \{1\} \subseteq \Omega.$$

Za svako $x \in T$ postoji $\epsilon_x > 0$ takvo da je $D(x, \epsilon_x) \subseteq \Omega$.
$\overline{D} \subseteq \phi^{-1}(\Omega)$, a $\phi^{-1}(\Omega)$ je otvoren skup. Slijedi da postoji $\epsilon > 0$ takav da je $D(0, 1+\epsilon) \subseteq \phi^{-1}(\Omega)$. Dakle, $\phi(D(0, 1+\epsilon)) \subseteq \Omega$.
Primijetimo da područje $\phi(D(0, 1+\epsilon))$ sadrži točku 1.
Red

$$F(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \omega^m$$

konvergira ako je $|\omega| < 1 + \epsilon$.
Pokažimo sada da najviše i najniže potencije od ω u $[\phi(\omega)]^n$ imaju eksponente $(\lambda+1)n$ i λn.

$$\begin{aligned}[\phi(\omega)]^n &= [\frac{1}{2}(\omega^{\lambda} + \omega^{\lambda+1})]^n \\ &= \frac{1}{2^n}[\omega^{\lambda} + \omega^{\lambda+1}]^n \\ &= \frac{1}{2^n}[\binom{n}{0}(\omega^{\lambda})^n(\omega^{\lambda+1})^0 + \binom{n}{1}(\omega^{\lambda})^{n-1}(\omega^{\lambda+1})^1 + \cdots + \binom{n}{n}(\omega^{\lambda})^0(\omega^{\lambda+1})^n] \\ &= \frac{1}{2^n}[(\omega^{\lambda})^n + n\omega^{\lambda n+1} + \cdots + \omega^{(\lambda+1)n}]\end{aligned}$$

Dakle, najviša potencija od ω u $[\phi(\omega)]^n$ je $(\lambda+1)n$, a najniža je λn.
Na isti način vidimo da je najniža potencija od ω u $[\phi(\omega)]^{p_k}$ jednaka λp_k, a najviša potencija je jednaka $(\lambda+1)p_k$. Najniža potencija od ω u $[\phi(\omega)]^{q_k}$ jednaka λq_k, a najviša potencija je jednaka $(\lambda+1)q_k$. Stoga je, prema uvjetu (1.3), najviši eksponent u $[\phi(\omega)]^{p_k}$ manji od

najnižeg eksponenta u $[\phi(\omega)]^{q_k}$.
Znamo da je

$$F(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \omega^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [\phi(\omega)]^n, \quad \text{za } |\omega| < 1.$$

Niz (a_n) zadovoljava uvjet (1.3). Vrijedi:

$$\begin{aligned}
s_{p_k}(z) &= \sum_{n=0}^{p_k} a_n z^n \\
&= \sum_{r=1}^{k} \sum_{l=q_{r-1}}^{p_r} a_l z^l \\
&= \sum_{r=1}^{k} (a_{q_{r-1}} z^{q_{r-1}} + \cdots + a_{p-r} z^{p_r}) \\
&= a_0 + \cdots + a_{p_1} z^{p_1} + a_{q_1} z^{q_1} + \cdots + a_{p_2} z^{p_2} + \cdots + a_{q_{k-1}} z^{q_{k-1}} + \cdots + a_{p_k} z^{p_k}.
\end{aligned}$$

Slijedi:

$$\begin{aligned}
s_{p_k}(\phi(\omega)) &= \sum_{n=0}^{p_k} a_n [\phi(\omega)]^n \\
&= \sum_{r=1}^{k} \sum_{l=q_{r-1}}^{p_r} a_l [\phi(\omega)]^l \\
&= \sum_{m=0}^{(\lambda+1)p_k} b_m \omega^m.
\end{aligned}$$

Zaključujemo da vrijedi:

$$\sum_{n=0}^{p_k} a_n [\phi(\omega)]^n = \sum_{m=0}^{(\lambda+1)p_k} b_m \omega^m, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.5}$$

Desna strana u (1.5) konvergira za $k \to \infty$, kad god je $|\omega| < 1 + \epsilon$.
Stoga $(s_{p_k}(z))$ konvergira za sve $z \in \phi(D(0, 1 + \epsilon))$. Dokazali smo tvrdnju. □

Napomena 1.0.41. *Niz $(s_{p_k}(z))$ konvergira uniformno na nekoj okolini od β.*

Teorem 1.0.42. ***(Hadamard)***
Pretpostavimo da je λ pozitivan cijeli broj, (p_k) je niz pozitivnih cijelih brojeva takav da je $p_{k+1} > (1 + \frac{1}{\lambda})p_k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$ i da red potencija $\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{p_k}$ ima radijus konvergencije 1. Tada je T prirodni rub od f.

Dokaz. Iz teorema 1.0.39 uzmemo podniz (s_{p_k}) te niz parcijalnih suma od (1.4). U ovom slučaju je podniz niza parcijalnih suma zapravo obična parcijalna suma reda te funkcije. Dakle, ako bi postojala regularna točka, u njezinoj okolini bi podniz niza parcijalnih suma konvergirao. Međutim, to bi značilo i da čitav niz parcijalnih suma konvergira nekoj točki izvan $\overline{U}$, što je nemoguće. Stoga teorem 1.0.39 implicira da nijedna točka jedinične kružnice T ne može biti regularna točka od f. Dakle, sve točke od T su singularne točke od f. Zaključujemo da je T prirodan rub od f. □

Primjer 1.0.43. *Neka je:*

$$a_n = \begin{cases} 1, & \textit{ako je n potencija od 2,} \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$

Nadalje, neka je $\eta_n = e^{-\sqrt{n}}$ *i definirajmo:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta_n z^n. \tag{1.6}$$

Imamo:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta_n z^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2^k} \eta_{2^k} z^{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_{2^k} z^{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2^{\frac{k}{2}}} z^{2^k}$$

zbog

$$\eta_{2^k} = e^{-\sqrt{2^k}} = e^{-2^{\frac{k}{2}}}.$$

Budući da je

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n \eta_n|^{1/n} = 1$$

radijus konvergencije u (1.6) je 1.
Po teoremu 1.0.42, prirodna granica od f je T.
Ocijenimo apsolutnu konvergenciju reda $f(z)$, za $|z| = 1$.

$$|f(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2^{\frac{k}{2}}} |z^{2^k}| = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2^{\frac{k}{2}}}.$$

Imamo

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e^{-2^{\frac{k+1}{2}}}}{e^{-2^{\frac{k}{2}}}} = \lim_{k\to\infty} e^{-2^{\frac{k+1}{2}} + 2^{\frac{k}{2}}} = \lim_{k\to\infty} e^{-(\sqrt{2}-1)2^{\frac{k}{2}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{e^{(\sqrt{2}-1)2^{\frac{k}{2}}}} = 0.$$

zbog

$$2^{\frac{k}{2}} - 2^{\frac{k+1}{2}} = 2^{\frac{k}{2}} - 2^{\frac{k}{2}+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{k}{2}}(1 - \sqrt{2}).$$

Po D'Alembertovom kriteriju konvergencije zaključujemo da je red $|f(z)|$ *konvergentan. Slijedi da je red* $f(z)$ *konvergentan.*
Red potencija svake derivacije od f

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n\eta_n z^{n-k}$$

konvergira uniformno na zatvorenom dijelu kruga. Svaka $f^{(k)}$ *je stoga uniformno neprekidna na* $\overline{U}$ *i restrikcija od* f *na* T *je beskonačno diferencijabilna u varijabli* θ *(gdje je* $z = re^{i\theta}$*, uz* $r = 1$*) usprkos činjenici da je* T *prirodna granica od* f*.*
Primjer pokazuje da prisutnost singulariteta ne povlači prisutnost diskontinuiteta ili (manje precizno) nedostatak glatkoće funkcije.

Iskažimo teorem u kojem neprekidnost funkcije sprječava prisutnost singulariteta.

Teorem 1.0.44. *Pretpostavimo da je* Ω *područje,* L *je pravac ili kružni luk,* $\Omega \backslash L$ *je unija dvaju područja* Ω_1 *i* Ω_2*. Pretpostavimo dalje da je* f *neprekidna na* Ω *i holomorfna na* Ω_1 *i na* Ω_2*. Tada je* f *holomorfna na* Ω*.*

Dokaz. Korištenje razlomljenih linearnih transformacija pokazuje da općeniti slučaj slijedi ako dokažemo teorem za pravce L.
Po teoremu 0.0.13, dovoljno je pokazati da je integral od f nad rubom $\partial\triangle$ jednak nula za svaki trokut u Ω. Teorem 0.0.17 povlači da integral od f nestaje nad svakim zatvorenim putem γ u $\triangle \cap \Omega_1$ ili nad $\triangle \cap \Omega_2$. Neprekidnost od f pokazuje da je ovo istina i ako je dio od γ unutar L i integral nad $\partial\triangle$ je najviše suma dva uvjeta ovog tipa. $\square$

Poglavlje 2

Produljenje duž krivulje

Definicija 2.0.45. ***Funkcijski element*** *je uređeni par* (f, D) *gdje je* D *otvoreni krug i* $f \in H(D)$.
Kažemo da su dva funkcijska elementa (f_0, D_0) *i* (f_1, D_1) ***izravna produljenja*** *jedan drugoga ako vrijede sljedeća dva uvjeta:*

(1) $D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$

(2) $f_0(z) = f_1(z)$ *za sve* $z \in D_0 \cap D_1$.
U ovom slučaju pišemo:

$$(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1). \tag{2.1}$$

Lanac $\mathscr{C}$ *je konačan niz krugova, pišemo* $\mathscr{C} = \{D_0, D_1, \ldots, D_n\}$*, takvih da je* $D_{i-1} \cap D_i \neq \emptyset$ *za* $i = 1, 2, \ldots, n$.
Ako je dan funkcijski element (f_0, D_0) *i ako postoje funkcijski elementi* (f_i, D_i) *takvi da je* $(f_{i-1}, D_{i-1}) \sim (f_i, D_i)$ *za* $i = 1, 2, \ldots, n$*, tada kažemo da je* (f_n, D_n) ***analitičko produljenje od*** (f_0, D_0) ***duž*** $\mathscr{C}$.

Napomena 2.0.46. *Pokažimo da je* f_n*, ako uopće postoji, na jedinstven način određena sa* f_0 *i* $\mathscr{C}$.
Pretpostavimo da (2.1) vrijedi i pretpostavimo da (2.1) vrijedi i kad stavimo g_1 *umjesto* f_1.
Imamo $(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1)$ *i* $(f_0, D_0) \sim (g_1, D_1)$.
Tada je $g_1 = f_0 = f_1$ *na* $D_0 \cap D_1$*. Jer je* D_1 *povezan imamo* $g_1 = f_1$ *na* D_1.
Jedinstvenost od f_n *sada slijedi indukcijom po broju elemenata lanca* $\mathscr{C}$.

Napomena 2.0.47. *Pokažimo da relacija* $\sim$ *nije tranzitivna, odnosno, ako je* (f_n, D_n) *analitičko produljenje od* (f_0, D_0) *duž* $\mathscr{C}$ *i ako je* $D_0 \cap D_n \neq \emptyset$ *ne slijedi nužno da je* $(f_0, D_0) \sim (f_n, D_n)$.
Primjer kojim ćemo pokazati da relacija $\sim$ *nije tranzitivna je povezan sa funkcijom kvadratnog korijena.*

Neka su D_0, D_1 i D_2 krugovi radijusa 1 sa središtima $1, \omega$ i ω^2 gdje je $\omega^3 = 1$. Slijedi:

$$\begin{aligned} \omega^3 = 1 &\iff \omega^3 - 1 = 0 \\ &\iff (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0 \end{aligned}$$

Dakle, $\omega_0 = 1$ i

$$\omega_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2},$$
$$\omega_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2},$$
$$\omega_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Odaberimo $f_j \in H(D_j)$ tako da $f_j^2(z) = z,\ j = 0, 1, 2$ i tako da $(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1)$, $(f_1, D_1) \sim (f_2, D_2)$.
Neka je $z = re^{i\phi} \in \mathbb{C}$. Znamo:
*Za $c \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, **opća potencija** $z \to z^c$ definira se formulom:*

$$z^c := e^{c \ln z}.$$

Vrijedi:

$$\ln z = \ln re^{i\varphi} = \ln r + \ln e^{i\varphi} = \ln r + i\varphi.$$

Slijedi:

$$z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln z} = e^{\frac{1}{2}(\ln r + i\varphi)} = e^{\frac{1}{2}\ln r} e^{\frac{1}{2}i\varphi} = \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}}.$$

Na D_0 je

$$f_0(z) = \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}}, \quad \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Na D_1 je

$$f_1(z) = \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}}, \quad \varphi \in (\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}).$$

Na D_2 je

$$f_2(z) = \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}}, \quad \varphi \in (\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}).$$

Ako je $z \in D_0 \cap D_2$, tada je:

$$z = re^{i\varphi_0} = re^{i\varphi_2}, \quad \varphi_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad \varphi_2 \in (\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}).$$

Vrijedi $\varphi_2 - \varphi_0 = 2\pi$. Tada je:

$$f_2(z) = \sqrt{(r)} e^{i\frac{\varphi_2}{2}} = \sqrt{(r)} e^{i\frac{\varphi_0}{2} + \pi} = \sqrt{(r)} e^{i\frac{\varphi_0}{2}} e^{i\pi} = -f_0(z).$$

Zaključujemo da relacija $\sim$ nije tranzitivna.

Definicija 2.0.48. *Kažemo da lanac $\mathscr{C}$* ***prekriva*** *krivulju γ s parametrima iz intervala $[0, 1]$ ako postoje brojevi $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$ takvi da je $\gamma(0)$ središte od D_0, $\gamma(1)$ je središte od D_n i*

$$\gamma([s_i, s_{i+1}]) \subset D_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Ako (f_0, D_0) može biti produljen duž $\mathscr{C}$ do (f_n, D_n), onda (f_n, D_n) nazivamo ***analitičkim produljenjem od*** *(f_0, D_0)* ***duž*** *γ. Jedinstvenost ćemo dokazati u teoremu 2.0.50.*
Kažemo da (f_0, D_0) ***dopušta*** *analitičko produljenje duž γ.*

Iako relacija (2.1) nije tranzitivna, restriktivan oblik tranzitivnosti ipak vrijedi, kao što ćemo vidjeti u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 2.0.49. *Pretpostavimo:*

- $D_0 \cap D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$
- $(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1)$
- $(f_1, D_1) \sim (f_2, D_2)$

Tada vrijedi: $(f_0, D_0) \sim (f_2, D_2)$.

Dokaz. Prema pretpostavci je $f_0 = f_1$ na $D_0 \cap D_1$ i $f_1 = f_2$ na $D_1 \cap D_2$. Stoga je $f_0 = f_2$ na nepraznom otvorenom skupu $D_0 \cap D_1 \cap D_2$. Budući da su f_0 i f_2 holomorfne na $D_0 \cap D_2$ i $D_0 \cap D_2$ je povezan slijedi da je $f_0 = f_2$ na $D_0 \cap D_2$.
Dakle, vrijedi $(f_0, D_0) \sim (f_2, D_2)$. □

Propozicija 2.0.49 je ključ dokaza sljedećeg teorema u kojem ćemo pokazati jedinstvenost analitičkog produljenja duž γ.

Teorem 2.0.50. *Ako je (f, D) funkcijski element i ako je γ krivulja s početkom u središtu od D, onda (f, D) dopušta najviše jedno analitičko produljenje duž γ.*

Napomena 2.0.51. *Navedimo eksplicitniju tvrdnju od one o kojoj govori teorem:*
Neka je γ prekriven lancima $\mathscr{C}_1 = \{A_0, A_1, \ldots, A_m\}$ i $\mathscr{C}_2 = \{B_0, B_1, \ldots, B_n\}$, gdje je $A_0 = B_0 = D$. Neka (f, D) može biti analitički produljen duž $\mathscr{C}_1$ do funkcionalnog elementa (g_m, A_m) i neka (f, D) može biti analitički produljen duž $\mathscr{C}_2$ do funkcionalnog elementa (h_n, B_n). Tada je $g_m = h_n$ na $A_m \cap B_n$.
Prema pretpostavci, A_m i B_n su krugovi s jednakim središtem $\gamma(1)$. Iz toga slijedi da g_m i h_n imaju isto proširenje u potencijama od $z - \gamma(1)$. Dakle, možemo zamijeniti A_m i B_n sa bilo kojim od njih dva koji je veći.
Uz ovaj dogovor, zaključujemo da je $g_m = h_n$.

Dokaz. Neka su $\mathscr{C}_1$ i $\mathscr{C}_2$ kao u prethodnoj napomeni.
Postoje brojevi:

$$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = 1 = s_{m+1}$$

i

$$0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_n = 1 = \sigma_{n+1}$$

takvi da je

$$\gamma([s_i, s_{i+1}]) \subset A_i, \quad \gamma([\sigma_j, \sigma_{j+1}]) \subset B_j, \quad 0 \leq i \leq m, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Postoje funkcijski elementi $(g_i, A_i) \sim (g_{i+1}, A_{i+1})$ i $(h_j, B_j) \sim (h_{j+1}, B_{j+1})$, za $0 \leq i \leq m-1$ i $0 \leq j \leq n-1$. Ovdje je $g_0 = h_0 = f$.
Tvrdimo da ako je $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$ i ako $[s_i, s_{i+1}]$ presijeca $[\sigma_j, \sigma_{j+1}]$, onda je $(g_i, A_i) \sim (h_j, B_j)$.
Pretpostavimo da postoje parovi (i, j) za koje ovo ne vrijedi. Među njima postoji jedan za koji je $i + j$ minimalno. Jasno je da je tada $i + j > 0$.
Pretpostavimo $s_i \geq \sigma_j$. Tada je $i \geq 1$ i budući da $[s_i, s_{i+1}]$ presijeca $[\sigma_j, \sigma_{j+1}]$ vidimo da vrijedi

$$\gamma(s_i) \in A_{i-1} \cap A_i \cap B_j.$$

Minimalnost od $i+j$ pokazuje da je $(g_{i-1}, A_{i-1}) \sim (h_j, B_j)$ jer onda $[s_{i-1}, s_i]$ siječe $[\sigma_j, \sigma_{j+1}]$. Vrijedi $(g_{i-1}, A_{i-1}) \sim (g_i, A_i)$ pa propozicija 2.0.49 povlači da je $(g_i, A_i) \sim (h_j, B_j)$. Dolazimo do kontradikcije s našim pretpostavkama. Mogućnost $s_i \leq \sigma_j$ odbacujemo na isti način.
Dakle, vrijedi naša tvrdnja. Posebno, tvrdnja vrijedi za par (m, n) i to je ono što smo morali pokazati. $\square$

Definicija 2.0.52. *Pretpostavimo da su α i β točke u topološkom prostoru X i φ je neprekidno preslikavanje jediničnog kvadrata $I^2 = I \times I$ ($I = [0, 1]$) u X takvo da je $\varphi(0, t) = \alpha$ i $\varphi(1, t) = \beta$ za sve $t \in I$.*
Kažemo da krivulje γ_t definirane sa

$$\gamma_t(s) = \varphi(s, t), \quad s \in I, \quad t \in I$$

tvore ***jednoparametarsku familiju $\{\gamma_t\}$ krivulja od α do β na*** *X.*

U sljedećem teoremu govorimo o bitnom svojstvu analitičkog produljenja:

Teorem 2.0.53. *Pretpostavimo da je $\{\gamma_t,\ t \in [0, 1]\}$ jednoparametarska familija krivulja od α do β u ravnini, D je krug sa središtem u α i funkcijski element (f, D) dopušta analitičko produljenje duž svakog γ_t do elementa (g_t, D_t). Tada je $g_1 = g_0$.*

Zadnju jednakost interpretiramo kao u teoremu 2.0.50, tj. $(g_1, D_1) \sim (g_0, D_0)$, a D_0 i D_1 su krugovi sa istim središtem β.

Dokaz. Fiksirajmo $t \in I$. Postoji lanac $\mathscr{C} = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ koji prekriva γ_t, gdje je $A_0 = D$ takav da je (g_t, D_t) dobiven produljenjem (f, D) duž $\mathscr{C}$.
Postoje brojevi $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$ takvi da:

$$E_i = \gamma_t([s_i, s_{i+1}]) \subset A_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Tada postoji $\epsilon > 0$ koji je manji od udaljenosti kompaktnog skupa E_i do komplementa pripadajućeg otvorenog kruga A_i.
Uniformna neprekidnost od ϕ na I^2 pokazuje da tada postoji $\delta > 0$ takav da

$$|\gamma_t(s) - \gamma_u(s)| < \epsilon \text{ ako } s \in I, \quad u \in I, \quad |u - t| < \delta. \tag{2.2}$$

Pretpostavimo da u zadovoljava navedene uvjete. Tada relacija (2.2) pokazuje da $\mathscr{C}$ prekriva γ_u. Stoga teorem 2.0.50 pokazuje da su i g_t i g_u dobiveni produljenjem (f, D) duž istog lanca $\mathscr{C}$. Zato je $g_t = g_u$. Zbog toga je svaki $t \in I$ prekriven segmentom J_t takvim da je $g_t = g_u$ za sve $u \in I \cap J_t$. Budući da je I kompaktan, I je prekriven sa konačno mnogo J_t. I je povezan pa u konačno mnogo koraka vidimo da je $g_1 = g_0$.
Dokazali smo tvrdnju teorema. □

Sljedeći teorem govori o intuitivno jasnoj topološkoj činjenici.

Teorem 2.0.54. *Pretpostavimo da su Γ_0 i Γ_1 krivulje na topološkom prostoru X sa zajedničkom početnom točkom α i zajedničkom krajnjoj točkom β. Ako je X jednostavno povezan, tada postoji jednoparametarska familija $\{\gamma_t\,,\ t \in [0,1]\}$ krivulja od α do β u X takva da je $\gamma_0 = \Gamma_0$ i $\gamma_1 = \Gamma_1$.*

Dokaz. Neka je $[0, \pi]$ interval parametara od Γ_0 i Γ_1. Tada:

$$\Gamma(s) = \begin{cases} \Gamma_0(s), & 0 \le s \le \pi \\ \Gamma_1(2\pi - s), & \pi \le s \le 2\pi \end{cases}$$

definira zatvorenu krivulju u X. Jer je X jednostavno povezan, Γ je nul-homotopan na X. Stoga postoji neprekidno preslikavanje $H : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to X$ takvo da je:

$$H(s, 0) = \Gamma(s), \quad H(s, 1) = c \in X, \quad H(0, t) = H(2\pi, t). \tag{2.3}$$

Ako je $\Phi : \widetilde{U} \to X$ definirana sa:

$$\Phi(re^{i\theta}) = H(\theta, 1 - r), \quad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

Relacija (2.3) povlači da je Φ neprekidna. Stavimo:

$$\gamma_t(\theta) = \Phi[(1 - t)e^{i\theta} + te^{-i\theta}], \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le t \le 1.$$

Budući da je

$$\Phi(e^{i\theta}) = H(\theta, 0) = \Gamma(\theta),$$

slijedi:

$$\gamma_t(0) = \Phi(1) = \Gamma(0) = \alpha, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\gamma_t(\pi) = \Phi(-1) = \Gamma(\pi) = \beta, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\gamma_0(\theta) = \Phi(e^{i\theta}) = \Gamma(\theta) = \Gamma_0(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

i

$$\gamma_1(\theta) = \Phi(e^{-i\theta}) = \Phi(e^{i(2\pi-\theta)}) = \Gamma(2\pi - \theta) = \Gamma_1(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Time smo završili dokaz. □

Poglavlje 3

Teorem o monodromiji

Prethodna razmatranja su zapravo dokazala sljedeći važan teorem.

Teorem 3.0.55. ***(Teorem o monodromiji)***
Pretpostavimo da je Ω jednostavno povezano područje, (f, D) je funkcijski element, $D \subset \Omega$ i (f, D) može biti analitički produljen duž svake krivulje u Ω kojoj je početak u središtu kruga D. Tada postoji $g \in H(\Omega)$ takav da je $g(z) = f(z)$ za sve $z \in D$.

Dokaz. Označimo sa α središte kruga D i neka je $\beta \in \Omega$. Neka su Γ_0 i Γ_1 dvije krivulje u Ω od α do β. Iz teorema 2.0.53 i 2.0.54 slijedi da analitička produljenja od (f, D) duž Γ_0 i Γ_1 vode do istog elementa (g_β, D_β), gdje je D_β krug sa središtem u β.
Ako D_{β_1} presijeca D_β, onda se $(g_{\beta_1}, D_{\beta_1})$ može dobiti tako da prvo produljimo (f, D) na β, zatim duž pravca od β do β_1. Ovo pokazuje da je $g_{\beta_1} = g_\beta$ na $D_{\beta_1} \cap D_\beta$.
Definicija $g(z) = g_\beta(z)$, $z \in D_\beta$ je stoga konzistenta i daje željeno holomorfno produljenje od f. □

Napomena 3.0.56. *Neka je Ω područje u ravnini. Fiksirajmo $\omega \notin \Omega$ i neka je D krug u Ω. Budući da je D jednostavno povezan, prema teoremu 0.0.23, postoji $f \in H(D)$ takav da je $e^{f(z)} = z - \omega$.*
Primijetimo da je

$$f'(z) = (\ln(z - \omega))' = (z - \omega)^{-1}$$

na D i $f'(z)$ je holomorfna na čitavom Ω. To implicira da (f, D) može biti analitički produljena duž svakog puta γ u Ω koji ima početak u središtu α od D.
Zaista, neka γ ide od α do β i neka je $D_\beta = D(\beta, r) \subset \Omega$. Neka je:

$$\Gamma_z = \gamma \dotplus [\beta, z], \quad z \in D_\beta$$

i neka je

$$g_\beta(z) = \int_{\Gamma_z} (\xi - \omega)^{-1} d\xi + f(\alpha), \quad z \in D_\beta.$$

Tada je (g_β, D_β) *produljenje od* (f, D) *duž* γ.
Primijetimo da je $g'_\beta(z) = (z-\omega)^{-1}$ *na* D_β.
Pretpostavimo sada da vrijedi teorem o monodromiji, odnosno da postoji $g \in H(\Omega)$ *takav da je* $g(z) = f(z)$ *na* D. *Tada je* $g'(z) = (z-\omega)^{-1}$ *za sve* $z \in \Omega$. *Ako je* Γ *zatvoren put u* Ω *slijedi da:*

$$Ind_\Gamma(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g'(z)dz = 0. \tag{3.1}$$

Pretpostavimo sada da Ω *nije jednostavno povezano područje. Tada bi, prema teoremu 0.0.23, postojao* $\omega \notin \Omega$ *i zatvoren put* Γ *u* Ω *takav da je* $Ind_\Gamma(\omega) \neq 0$*, a to je kontradikcija sa (3.1).*
Zaključujemo da teorem o monodromiji ne vrijedi u nijednom području u ravnini koje nije jednostavno povezano.

Poglavlje 4

Konstrukcija modularne funkcije

4.1 Modularna grupa

Neka je G skup svih razlomljenih linearnih transformacija φ oblika:

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{4.1}$$

gdje su $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ i $ad - bc = 1$. Jer su a, b, c, d realni, svaki $\varphi \in G$ preslikava realnu os na samu sebe (osim za ∞).
Neka je $z = x + yi,\ x \in \mathbb{R},\ y > 0$. Odredimo $\varphi(z)$.

$$\begin{aligned}
\varphi(z) = \varphi(x+iy) &= \frac{a(x+yi)+b}{c(x+yi)+d} \\
&= \frac{ax+ayi+b}{cx+cyi+d} \\
&= \frac{ax+b+ayi}{cx+d+cyi}\frac{cx+d-cyi}{cx+d-cyi} \\
&= \frac{acx^2+adx-acxyi+bcx+bd-bcyi+acxyi+adyi+acy^2}{c^2x^2+cdx-c^2xyi+cdx+d^2-cdyi+c^2xyi+cdyi+c^2y^2} \\
&= \frac{ac(x^2+y^2)+x(ad+bc)+bd+yi(ad-bc)}{c^2x^2+2cdx+d^2+c^2y^2} = \\
&= \frac{ac(x^2+y^2)+x(ad+bc)+bd}{(cx+d)^2+c^2y^2} + i\frac{y}{(cx+d)^2+c^2y^2}
\end{aligned}$$

Stoga imamo:

$$\varphi(\Pi^+) \subseteq \Pi^+, \varphi \in G \tag{4.2}$$

gdje je Π^+ otvorena gornja polovica ravnine.
Sada želimo pokazati da je φ grupa sa kompozicijom kao grupnom operacijom.

Vrijedi $\varphi \circ \psi \in G$ ako je $\varphi \in G$ i $\psi \in G$.
Neutralni element za operaciju kompozicije je identiteta, $id(z) = z$. U ovom slučaju je $a = d = 1, b = c = 0$, pa je $id \in G$.
Ako je φ dan sa relacijom (4.1), onda je i $\varphi^{-1} \in G$.

$$\begin{aligned} \frac{az+b}{cz+d} = \omega &\iff az + b = \omega(cz + d) \\ &\iff az - cz\omega = d\omega - b \\ &\iff z(a - c\omega) = d\omega - b \\ &\iff z = \frac{d\omega - b}{a - c\omega} \end{aligned}$$

Inverz od φ je oblika:

$$\varphi^{-1}(\omega) = \frac{d\omega - b}{a - c\omega}. \tag{4.3}$$

Dakle, $\varphi^{-1} \in G$.
Stoga je G grupa sa kompozicijom kao grupnom operacijom. S obzirom na relaciju (4.2) uobičajeno je smatrati G kao grupu transformacija na Π^+.
Transformacije $z \to z + 1 \quad (a = b = d = 1, c = 0)$ i $z \to -\frac{1}{z} \quad (a = d = 0, b = -1, c = 1)$ pripadaju grupi G; one zapravo generiraju G (tj. nema pravih podgrupa od G koje sadrže ove dvije transformacije).
Jedna od definicija modularne funkcije je sljedeća:
Modularna funkcija je holomorfna (ili meromorfna) funkcija f na Π^+ koja je invarijantna pod G ili barem pod nekom netrivijalnom podgrupom Γ od G. To znači da je $f \circ \varphi = f$ za svaki $\varphi \in \Gamma$.

4.2 Definicija podgrupe Γ od G

Za Γ ćemo uzeti podgrupu grupe G generiranu sa σ i τ gdje je

$$\sigma(z) = \frac{z}{2z+1}, \quad \tau(z) = z + 2.$$

Jedan od naših ciljeva je konstrukcija određene funkcije λ koja je invarijantna pod Γ i koja vodi do brzog dokaza Picardovog teorema.
Zanimljivo je proučavati djelovanje od Γ na Π^+, u geometrijskom smislu.
Neka je $z = x + iy$. Neka je Q skup svih z koji zadovoljavaju sljedeća četiri uvjeta:

$$y > 0, \quad -1 \le x < 1, \quad |2z + 1| \ge 1, \quad |2z - 1| > 1.$$

Q je omeđen okomitim pravcima $x = -1$ i $x = 1$, a odozdo je omeđen sa dvije polukružnice radijusa $\frac{1}{2}$ sa središtima u $-\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2}$. Q sadrži one svoje granične točke koje leže u lijevoj

polovici od Π^+. Q ne sadrži nijednu točku na realnoj osi.
Tvrdimo da je Q **fundamentalna domena** od Γ. To znači da su tvrdnje (a) i (b) sljedećeg teorema točne.

Teorem 4.2.1. *Neka su* Γ *i* Q *definirani kao gore. Tada vrijedi:*

(a) Ako su φ_1 *i* $\varphi_2 \in \Gamma$ *i* $\varphi_1 \neq \varphi_2$*, onda je* $\varphi_1(Q) \cap \varphi_2(Q) = \emptyset$.

(b) $\bigcup_{\varphi \in \Gamma} \varphi(Q) = \Pi^+$.

(c) Γ *sadrži sve transformacije* $\varphi \in G$ *oblika:*

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{4.4}$$

za sve a i d neparne, b i c parne cijele brojeve.

Dokaz. Neka je Γ_1 skup svih $\varphi \in G$ opisanih u (c).
Γ_1 je podgrupa od G.
Budući da je $\sigma \in \Gamma_1$ i $\tau \in \Gamma_1$ slijedi da je $\Gamma \subset \Gamma_1$.
Da bismo pokazali da je $\Gamma = \Gamma_1$, tj. da bismo dokazali (c), dovoljno je dokazati da vrijede (a') i (b). (a') je tvrdnja dobivena iz (a) zamjenom Γ sa Γ_1.
Pokažimo da ako vrijede (a') i (b), onda je jasno da Γ ne može biti pravi podskup od Γ_1.
Da bismo to pokazali, pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji $\varphi \in \Gamma_1 \backslash \Gamma$. Za svako $\psi \in G$ vrijedi $\psi(Q) \subseteq \Pi^+$, te je posebno $\varphi(Q) \subseteq \Pi^+$. Tada postoji $\varphi_0 \in \Gamma$ takav da je $\varphi(Q) \cap \varphi_0(Q) \neq \emptyset$. Međutim, $\varphi, \varphi_0 \in \Gamma_1$, $\varphi \neq \varphi_0$ i dobivamo kontradikciju s (a').
Koristit ćemo sljedeću relaciju:

$$\operatorname{Im} \varphi(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2} \tag{4.5}$$

koja vrijedi za svaki $\varphi \in G$ dan sa relacijom (4.4).
Dokažimo sada (a').
Pretpostavimo da su φ_1 i $\varphi_2 \in \Gamma_1$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Definirajmo:

$$\varphi = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2.$$

Ako je $z \in \varphi_1(Q) \cap \varphi_2(Q)$, onda je $\varphi_1^{-1}(z) \in Q \cup \varphi(Q)$. Stoga je dovoljno dokazati da je

$$Q \cap \varphi(Q) = \emptyset \tag{4.6}$$

ako je $\varphi \in \Gamma_1$ i φ nije transformacija identiteta.
Dokaz relacije (4.6) dijeli se na tri dijela.
(1.dio)

Ako je $c = 0$ u relaciji (4.4), onda je $ad = 1$ (znamo da je $ad - bc = 1$). Jer su a i d cijeli brojevi imamo $a = d = \pm 1$. Za slučaj $a = b = 1$ dobijemo $\varphi(z) = z + b$. Za slučaj $a = b = -1$ imamo $\varphi(z) = z - b$. Budući da je b paran, u oba slučaja vrijedi $\varphi(z) = z + 2n$ za neki cijeli broj $n \neq 0$. Kad pogledamo skup Q, jasno je da relacija (4.6) vrijedi.
(2.dio)
Ako je $c = 2d$, onda je $c = \pm 2$ i $d = \pm 1$ (jer je $ad - bc = 1$). Stoga je $\varphi(z) = \sigma(z) + 2m$, gdje je m cijeli broj. Pokažimo sada da vrijedi $\sigma(Q) \subset \overline{D}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, odnosno ako je $z \in Q$ onda je $|\sigma(z) - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$. Imamo:

$$\sigma(z) - \frac{1}{2} = \frac{z}{2z+1} - \frac{1}{2} = \frac{2z - (2z+1)}{2(2z+1)} = -\frac{1}{2(2z+1)}.$$

Uzimanjem apsolutne vrijednosti dobijemo:

$$|\sigma(z) - \frac{1}{2}| = |\frac{1}{2(2z+1)}| = \frac{1}{2}\frac{1}{|2z+1|} \leq \frac{1}{2}.$$

Zbog $\sigma(Q) \subset \overline{D}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ vrijedi relacija (4.6).
(3.dio)
Ako je $c \neq 0$ i $c \neq 2d$, tvrdimo da je $|cz + d| > 1$ za sve $z \in Q$.
Pretpostavimo suprotno, odnosno da vrijedi $|cz + d| \leq 1$. Iz toga slijedi $|z + \frac{d}{c}| \leq \frac{1}{|c|}$ Tada bi krug $\overline{D}(-\frac{d}{c}, \frac{1}{|c|})$ presijecao Q. Dakle, vrijedi $|cz + d| > 1$.
Iz opisa skupa Q slijedi da ako je $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ realan broj i ako $\overline{D}(\alpha, r)$ presijeca Q, tada barem jedna od točaka -1,0,1 leži u $D(\alpha, r)$. Pokažimo tu tvrdnju.
Neka je $z = x + iy \in Q \cap \overline{D}(\alpha, r)$. Tada je $x \in [-1, 1)$ i vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$\begin{aligned}
&|2z + 1| \geq 1 \\
\iff &|2x + 2iy + 1| \geq 1 \\
\iff &\sqrt{(2x+1)^2 + (2y)^2} \geq 1 \\
\iff &(2x+1)^2 + (2y)^2 \geq 1 \\
\iff &(x + \frac{1}{2})^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
&|2z - 1| > 1 \\
\iff &|2x + 2iy - 1| > 1 \\
\iff &\sqrt{(2x-1)^2 + (2y)^2} > 1 \\
\iff &(2x-1)^2 + (2y)^2 > 1 \\
\iff &(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 > \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Promatrajmo slučaj kada je $x \in (0, 1)$. Vrijedi:

$$
\begin{aligned}
& y^2 > \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2 \\
\iff & y^2 > (\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2})(\frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}) \\
\iff & y^2 > (1 - x)x.
\end{aligned}
$$

Imamo:

$$
\begin{aligned}
& (1 - x)x < y^2, \\
& (x - \alpha)^2 + (1 - x)x < (x - \alpha)^2 + y^2 \leq r^2, \\
& x^2 - 2x\alpha + \alpha^2 + x - x^2 < r^2, \\
& \alpha^2 + x(1 - 2\alpha) < r^2.
\end{aligned}
$$

Kada je $1 - 2\alpha > 0$, odnosno $\alpha < \frac{1}{2}$, onda je:

$$\alpha^2 < \alpha^2 + x(1 - 2\alpha) < r^2.$$

Dakle, $\alpha^2 < r^2$, pa je $0 \in D(\alpha, r)$.
Za $1 - 2\alpha < 0$, odnosno $\alpha > \frac{1}{2}$ vrijedi:

$$
\begin{aligned}
& x < 1, \\
& x(1 - 2\alpha) > 1 - 2\alpha, \\
& \alpha^2 - 2\alpha + 1 < \alpha^2 + x(1 - 2\alpha) < r^2, \\
& (\alpha - 1)^2 < r^2.
\end{aligned}
$$

Slijedi $1 \in D(\alpha, r)$. Na sličan način pokažemo da tvrdnja vrijedi i za preostale slučajeve.
Stoga je $|c\omega + d| < 1$ za $\omega = -1, 0, 1$. Međutim,za takve ω, $c\omega + d$ je neparan cijeli broj čija apsolutna vrijednost ne može biti manja od 1. Stoga je $|cz + d| > 1$ i sada slijedi iz relacije (4.5) da je $\operatorname{Im} \varphi(z) < \operatorname{Im} z$ za svako $z \in Q$.
Ako za neke $z \in Q$ vrijedi da je $\varphi(z) \in Q$ isti argument bismo primijenili na φ^{-1} i pokazali bismo da je:

$$\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} \varphi^{-1}(\varphi(z)) \leq \operatorname{Im} \varphi(z).$$

Ova kontradikcija pokazuje da relacija (4.6) vrijedi.
Dakle, dokazali smo (a').
Da bismo pokazali (b) neka je Σ unija skupova $\varphi(Q)$, $\varphi \in \Gamma$. Jasno je da je $\Sigma \subset \Pi^+$. Također, Σ sadrži skupove $\tau^n(Q)$, za $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ gdje je $\tau^n(z) = z + 2n$.
Pokažimo da σ preslikava kružnicu $|2z + 1| = 1$ na kružnicu $|2z - 1| = 1$. Iz definicije 0.0.25

razlomljenih linearnih transformacije vidimo da je dovoljno pokazati da preslikavanje σ preslikava tri točke kružnice $|2z+1| = 1$ na kružnicu $|2z-1| = 1$. Točke $-1, 0$ i $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ su elementi kružnice $|2z+1| = 1$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} \sigma(-1) &= \frac{-1}{-2+1} = 1, \\ \sigma(0) &= 0 \quad \text{i} \\ \sigma(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) &= \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}{2(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) + 1} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}{-1+i+1}\frac{i}{i} = \frac{-\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}}{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

Točke $1, 0$ i $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ su elementi kružnice $|2z-1| = 1$.
Budući da σ preslikava kružnicu $|2z+1| = 1$ na kružnicu $|2z-1| = 1$ vidimo da Σ sadrži sve točke $z \in \Pi^+$ koje zadovoljavaju sve sljedeće nejednakosti:

$$|2z - (2m+1)| \geq 1, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{4.7}$$

Fiksirajmo $\omega \in \Pi^+$. Budući da je $\operatorname{Im}\omega > 0$ postoji samo konačno mnogo parova cijelih brojeva c i d takvih da $|c\omega + d|$ leži ispod bilo koje dane granice i možemo odabrati $\phi_0 \in \Gamma$ takav da je $|c\omega + d|$ minimalno. Prema relaciji (4.5), to znači da:

$$\operatorname{Im}\varphi(\omega) \leq \operatorname{Im}\varphi_0(\omega), \quad \varphi \in \Gamma. \tag{4.8}$$

Stavimo $z = \varphi_0(\omega)$. Tada relacija (4.8) postaje:

$$\operatorname{Im}\varphi(z) \leq \operatorname{Im} z, \quad \varphi \in \Gamma. \tag{4.9}$$

Primijenimo relaciju (4.9) na $\varphi = \sigma\tau^{-n}$ i na $\varphi = \sigma^{-1}\tau^{-n}$.
Iz

$$\tau^n(z) = z + 2n$$

slijedi

$$\tau^{-n}(z) = z - 2n.$$

Iz

$$\sigma(z) = \frac{z}{2z+1}$$

slijedi

$$\sigma^{-1}(z) = \frac{z}{1-2z}.$$

Dobijemo

$$\begin{aligned}(\sigma\tau^{-n})(z) &= \sigma(\tau^{-n}(z))\\ &= \sigma(z-2n)\\ &= \frac{z-2n}{2(z-2n)+1}\\ &= \frac{z-2n}{2z-4n+1}\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}(\sigma^{-1}\tau^{-n})(z) &= \sigma^{-1}(\tau^{-n}(z))\\ &= \sigma^{-1}(z-2n)\\ &= \frac{z-2n}{1-2(z-2n)}\\ &= \frac{z-2n}{-2z+4n+1}.\end{aligned}$$

Dakle, iz relacija (4.5) i (4.9) zaključujemo da je:

$$|2z-4n+1| \geq 1, \quad |2z-4n-1| \geq 1, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Stoga z zadovoljava relaciju (4.7), pa je $z \in \Sigma$. Iz $\omega = \varphi_0^{-1}(z)$ i $\varphi_0^{-1} \in \Gamma$ imamo $\omega \in \Sigma$. Time je dokaz završen. □

Sljedeći teorem rezimira neka od svojstava modularne funkcije koju smo koristili u poglavlju prije, a koja će biti korištena u dokazu teorema 5.0.3.

Teorem 4.2.2. *Ako su Γ i Q definirani kao u prethodnom teoremu, tada postoji funkcija $\lambda \in H(\Pi^+)$ takva da je:*

(a) $\lambda \circ \varphi = \lambda$ za svaki $\varphi \in \Gamma$.

(b) λ je injektivna funkcija na Q.

(c) Kodomena Ω od λ (prema (a) dijelu to je isto kao $\lambda(Q)$) je područje koje se sastoji od svih kompleksnih brojeva različitih od 0 i 1.

(d) λ ima x-os kao svoju prirodnu granicu.

Dokaz. Neka je Q_0 desna polovica od Q. Preciznije, Q_0 se sastoji od svih $z \in \Pi^+$ takvih da je:

$$0 < \operatorname{Re} z < 1, \quad |2z-1| > 1.$$

Prema teoremima 0.0.29, 0.0.30 i napomeni 0.0.32 postoji neprekidna funkcija h na $\overline{Q_0}$ koja je injektivna na $\overline{Q_0}$ i holomorfna na Q_0 takva da je:

$$\begin{aligned} h(Q_0) &= \Pi^+, \\ h(0) &= 0, \\ h(1) &= 1 \text{ i} \\ h(\infty) &= \infty. \end{aligned}$$

Teorem 0.0.28 pokazuje da formula:

$$h(-x+iy) = \overline{h(x+iy)}$$

produljuje h do neprekidne funkcije na zatvaraču $\overline{Q}$ od Q koje je konformno preslikavanje interiora od Q na kompleksnu ravninu bez nenegativne realne osi. Također, vidimo da je h injektivna funkcija na Q, $h(Q)$ je regija opisana pod (c),

$$h(-1+iy) = h(1+iy) = h(\tau(-1+iy)), \quad 0 < y < \infty \tag{4.10}$$

i da je:

$$h(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{i\theta}) = h(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{i(\pi-\theta)}) = h(\sigma(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{i\theta})), \quad 0 < \theta < \pi. \tag{4.11}$$

Budući da je h realna na rubu od Q, relacije (4.10) i (4.11) slijede iz relacije (4.5) i iz definicija od σ i τ.

Sada definiramo funkciju λ kao

$$\lambda(z) = h(\varphi^{-1}(z)), \quad z \in \varphi(Q), \varphi \in \Gamma. \tag{4.12}$$

Prema teoremu 4.2.1 svaki $z \in \Pi^+$ leži unutar $\varphi(Q)$ za jedan i samo jedan $\varphi \in \Gamma$. Na taj način relacija (4.12) definira $\lambda(z)$ za $z \in \Pi^+$ i odmah vidimo da λ ima svojstva od (a) do (c) i da je λ holomorfna na interioru svakog od skupova $\varphi(Q)$.

Slijedi iz relacija (4.10) i (4.11) da je λ neprekidna na $Q \cup \tau^{-1}(Q) \cup \sigma^{-1}(Q)$, stoga i na otvorenom skupu V koji sadrži Q.

Teorem 1.0.44 sada pokazuje da je λ holomorfna na V.

Skup Π^+ je prekriven unijom skupova $\varphi(V), \varphi \in \Gamma$, a jer je $\lambda \circ \varphi = \lambda$ zaključujemo da je $\lambda \in H(\Pi^+)$.

Skup $\{\frac{b}{d} : b \in \mathbb{Z},\ d \in \mathbb{Z} \text{ neparan}\}$ opisuje podskup skupa racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ koji je gust u $\mathbb{R}$. Stoga je skup svih brojeva $\varphi(0) = \frac{b}{d}$ gust na realnoj osi.

Kada bi λ bila analitički produljena do područja koje u potpunosti sadrži Π^+ nultočke od λ bi imale gomilište u ovom području, što je nemoguće jer λ nije konstanta. □

Poglavlje 5

Picardov teorem

Takozvani ”mali Picardov teorem” tvrdi da svaka nekonstantna cijela funkcija postiže svaku vrijednost, s jednim mogućim izuzetkom. To je teorem koji ćemo dokazati u nastavku poglavlja.
Postoji i snažnija verzija.
Svaka cijela funkcija koja nije polinomijalna postiže svaku vrijednost beskonačno mnogo puta, opet sa jednim mogućim izuzetkom. Taj izuzetak koji se može dogoditi je povezan sa $f(z) = e^z$, koji izostavlja vrijednost nula. Potonji teorem je točan u lokalnoj situaciji:
Ako f ima izolirani singularitet u točki z_0 i ako f izostavlja dvije vrijednosti u nekoj okolini od z_0, onda je z_0 **uklonjiv singularitet** ili **pol** od f.
Ovaj takozvani ”veliki Picardov teorem” je značajno pojačanje Weierstrassovog teorema koji samo tvrdi da je slika svake okoline od z_0 gusta u ravnini ako f ima esencijalni singularitet u z_0.

Teorem 5.0.3. ***(Mali Picardov teorem)***
Ako je f cijela funkcija i ako postoje dva različita kompleksna broja α i β koji nisu u slici od f, onda je f konstanta.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\alpha = 0$ i $\beta = 1$. U suprotnom, zamijenimo f sa $\frac{f-\alpha}{\beta-\alpha}$. Onda f preslikava ravninu u područje Ω opisano u teoremu 4.2.2.
Sa svakim krugom $D_1 \subset \Omega$ povezano je područje $V_1 \subset \Pi^+$ (u stvari, postoji beskonačno mnogo takvih V_1, jedan za svaki $\varphi \in \Gamma$) takvih da je λ injektivna na V_1 i $\lambda(V_1) = D_1$. Svaki takav V_1 presijeca najviše dvije točke domene $\varphi(Q)$. Za svaki izbor V_1 postoji funkcija $\psi_1 \in H(D_1)$ takva da je $\psi_1(\lambda(z)) = z$ za svaki $z \in V_1$.
Ako je D_2 neki drugi krug u Ω i ako $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ možemo izabrati odgovarajući V_2 takav da $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Funkcijski elementi (ψ_1, D_1) i (ψ_2, D_2) će onda biti izravna analitička produljenja jedan drugoga. Primijetimo da je $\psi_1(D_1) \subset \Pi^+$.
Budući da je kodomena od f u Ω, postoji krug A_0 sa središtem u 0 takav da $f(A_0)$ leži u

krugu D_0 na Ω. Odaberimo $\psi_0 \in H(D_0)$ i, kao gore, stavimo $g(z) = \psi_0(f(z))$ za $z \in A_0$. Neka je γ bilo koja krivulja u ravnini s početkom u ishodištu.
Kodomena od $f \circ \gamma$ je kompaktni podskup od Ω. Budući da γ može biti pokrivena sa lancem krugova $A_0, A_1, \ldots, A_n$ tako da svaki $f(A_i)$ leži u krugu D_i u Ω, možemo odabrati $\psi_i \in H(D_i)$ takav da je (ψ_i, D_i) direktno analitičko produljenje od (ψ_{i-1}, D_{i-1}) za $i = 1, 2, \ldots, n$. Ovo daje analitičko produljenje funkcionalnog elementa (g, A_0) duž lanca $\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$. Primijetite da $\psi_n \circ f$ ima pozitivan imaginarni dio.
Budući da (g, A_0) može biti analitički produljen duž svake krivulje u ravnini i budući da je ravnina jednostavno povezana, teorem o monodromiji povlači da se g produljuje do cijele funkcije.
Kodomena od g je u Π^+ i pokažimo da je $\frac{g-i}{g+i}$ omeđen.
Neka je $g(z) = \alpha(z) + i\beta(z), \beta(z) > 0$.

$$
\begin{aligned}
|\frac{g(z)-i}{g(z)+i}|^2 &= \frac{(g(z)-i)\overline{(g(z)-i)}}{(g(z)+i)\overline{(g(z)+i)}} \\
&= \frac{(\alpha(z)+i(\beta(z)-1))(\alpha(z)-i(\beta(z)-1))}{(\alpha(z)+i(\beta(z)+1))(\alpha(z)-i(\beta(z)-1))} \\
&= \frac{\alpha(z)^2+(\beta(z)-1)^2}{\alpha(z)^2+(\beta(z)+1)^2} \leq 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\iff \alpha(z)^2 + (\beta(z)-1)^2 \leq \alpha(z)^2 + (\beta(z)+1)^2 \\
&\iff \beta(z)^2 - 2\beta(z) + 1 \leq \beta(z)^2 + 2\beta(z) + 1.
\end{aligned}
$$

Iz teorema 0.0.34 slijedi da je $\frac{g(z)-i}{g(z)+i}$ konstanta. Odavde zaključujemo da je funkcija g konstanta. ψ_0 je injektivna na $f(A_0)$, a A_0 je neprazan otvoren skup. Zaključujemo da je f konstanta. $\square$

Bibliografija

[1] W. Rudin, *Real and Complex analysis*, McGraw-Hill Professional Publishing, 1986.

[2] Š. Ungar, *Kompleksna analiza*, PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2009.

[3] E.Freitag, R.Busam, *Complex analysis*, Springer, 2009.

Sažetak

U ovom radu smo dokazali dva bitna rezultata. To su teorem o monodromiji i mali Picardov teorem. Kako bismo pokazali teorem o monodromiji, u poglavlju ”Regularne i singularne točke” smo uveli pojmove regularne i singularne točke funkcije f, te prirodnog ruba funkcije f. Dokazali smo i dva bitna teorema, a to su bili teoremi Ostrowskog i Hadamarda. Zatim smo u poglavlju ”Produljenje duž krivulje” uveli pojmove funkcijskog elementa, te smo rekli kada su dva funkcijska elementa izravna produljenja jedan drugoga. Uveli smo i pojam analitičkog produljenja duž krivulju γ, te smo definirali jednoparametarsku familiju $\{\gamma_t\}$ krivulja od α do β na topološkom prostoru X. Iz svih ovih navedenih rezultata jednostavno je slijedio dokaz teorema o monodromiji, a time smo se bavili u poglavlju ”Teorem o monodromiji”.
U poglavlju ”konstrukcija modularne funkcije” smo promatrali skup G, odnosno skup svih razlomljenih linearnih transformacija φ oblika:

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

gdje su $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ i $ad - bc = 1$.
Zatim smo uveli podgrupu Γ od G, te smo definirali fundamentalnu domenu od Γ. Naš cilj u tom poglavlju je bio konstruirati funkciju λ koja je invarijantna pod Γ i koja će voditi do brzog dokaza Picardovog teorema.
Na kraju smo, u poglavlju ”Picardov teorem”, dokazali navedeni teorem.

Summary

In this diploma thesis we proved two important results. Those are the monodromy theorem and the Picard theorem. To prove the monodromy theorem, in chapter "Regular points and singular points", we have introduced concepts of regular points of function f, singular points of function f and natural boundary of function f. We also proved theorem of Ostrowski and theorem of Hadamard.
In chapter "Continuation along curves", we have introduced concepts of function element (f, D), and we said when the two function elements are direct continuations of each other. We also defined analytic continuation of (f, D) along γ and one-parameter family γ_t of curves from α to β in topological space X. From all the above results the proof of the monodromy theorem simply followed and that proof is in chapter called "The monodromy theorem".
In chapter "Construction of a modular function" we have observed the set G of all linear fractional transformations φ of the form

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

where $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ and $ad - bc = 1$.
Then we introduced a subgroup Γ of G, and we defined a fundamental domain of Γ. One of our objectives was the construction of a certain function λ, which is invariant under Γ and which leads to a quick proof of the Picard theorem.
Lastly, in chapter called "The Picard theorem", we proved that theorem.

Životopis

Zovem se Nediljka Olujić. Rođena sam 12.11.1990. godine u Splitu. Osnovna škola koju sam pohađala bila je OŠ Silvija Strahimira Kranjčevića u Lovreću. U Imotskom sam pohađala Gimnaziju dr. Mate Ujevića, smjer opća gimnazija. Školovanje sam nastavila u Zagrebu gdje sam upisala Preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu. Preddiplomski studij sam završila 2013. godine, te sam iste godine, pri istom fakultetu, upisala Diplomski sveučilišni studij Matematičke statistike.