Fourierova analiza na lokalno kompaktnim abelovim grupama i neke primjene

Palle, Ljudevit

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ljudevit Palle

FOURIEROVA ANALIZA NA LOKALNO KOMPAKTNIM, ABELOVIM GRUPAMA I NEKE PRIMJENE

Diplomski rad

Voditelj rada:
Doc. dr. sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, lipanj 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Roditeljima na potpori

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu obradit ćemo teoriju Fourierove analize na lokalno kompaktnim, Abelovim grupama. Time će biti obuhvaćeni klasični rezultati vezani uz Fourierovu transformaciju funkcija realne varijable i razvoj periodičnih funkcija realne varijable u Fourierov red, a također će biti obuhvaćena i diskretna Fourierova transformacija.

Fourierova analiza našla je brojne primjene unutar, ali i izvan matematike. U matematici se koristi u područjima poput običnih i parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, vjerojatnosti i statistici, pa sve do kombinatorike i teorije brojeva. Izvan matematike se najčešće koristi za analizu i manipulaciju signalima, a primjene nalazi i u računarstvu (npr. *fast Fourier transform*).

Prvo poglavlje diplomskog rada sadrži rezultate iz funkcionalne analize i teorije mjere potrebne za ovaj rad.

U drugom poglavlju proučava se Geljfandova transformacija za koju će se kasnije pokazati da obuhvaća i Fourierovu transformaciju L^1 funkcija.

U trećem poglavlju dokazuju se osnovna svojstva topoloških grupa, a potom se prelazi na specijalan slučaj lokalno kompaktnih, Abelovih grupa na kojima postoji Haarova mjera. Ona nam omogućuje definiranje konvolucije čime dobivamo dodatnu strukturu na prostoru L^1 funkcija. Uvodi se pojam unitarnih reprezentacija i definiraju se funkcije pozitivnog tipa, te se pokazuje osnovna veza između ta dva objekta. Na kraju se dokazuje glavni rezultat ovog poglavlja: ireducibilnih, unitarnih reprezentacija lokalno kompaktnih, Abelovih grupa ima dovoljno da razlikuju točke.

Četvrto poglavlje obuhvaća glavne rezultate ovog diplomskoga rada. Definira se dualna grupa i Fourierova transformacija te se proučavaju njihova svojstva. Dokazuju se Bochnerov teorem, Pontrjaginov teorem o dualnosti i teorem Fourierove inverzije, a iz njih, kao trivijalne posljedice, dobivamo klasične rezultate poput Plancherelovog i Hausdorff-Youngovog teorema. Navodimo primjere dualnih grupa od $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{T}$ i konačnih Abelovih grupa, a na kraju, kao jednu od primjena prethodnih rezultata, proučavamo Bohrovu kompaktifikaciju i karakterizaciju uniformno skoro periodičnih funkcija.

U ovom radu pretpostavljamo da se poznaju osnovni pojmovi i rezultati iz algebre, diferencijalnog računa i topologije na nivou obaveznih kolegija preddiplomskog i diplomskog studija, te ih stoga nećemo navoditi. Većina ovog rada prati razvoj teorije kao u knjizi [3].

Zahvalio bih se voditelju rada Vjekoslavu Kovaču na strpljenju i mnogim korisnim komentarima.

Poglavlje 1

Pripremni rezultati

U ovom poglavlju se prisjećamo standardnih rezultata iz funkcionalne analize i teorije mjere koji će nam biti potrebni dalje u radu. Dokazi većine tvrdnji iz prva dva odjeljka nalaze se u [4], dok se dokaze većine tvrdnji druga dva odjeljka može pogledati u [2] ili [1]. Naglasit ćemo kada je potrebna dodatna literatura.

U ovom diplomskom radu sve vektorske prostore gledamo isključivo nad realnim ili kompleksnim brojevima i koristimo sljedeće termine iz topologije. Reći ćemo da je topološki prostor *lokalno kompaktan* ako postoji okolina svake njegove točke sadržana u kompaktnom skupu. Nadalje, kažemo da je skup u topološkom prostoru *relativno kompaktan* ako je njegov zatvarač kompaktan skup. Svi potrebni rezultati iz topologije mogu se vidjeti u [5].

1.1 Rezultati iz funkcionalne analize

Opći rezultati iz teorije normiranih prostora

Neka su X i Y normirani prostori. Označit ćemo s X^* *dualni prostor* od X, tj. prostor svih neprekidnih linearnih funkcionala na X, a s $\mathcal{L}(X, Y)$ prostor svih neprekidnih linearnih operatora $X \to Y$. Tada je $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{F})$, gdje je $\mathbb{F}$ pripadno polje (tj. realni ili kompleksni brojevi). Ponekad ćemo elemente iz $\mathcal{L}(X, Y)$ nazivati *homomorfizmima* normiranih prostora, a u slučaju da su i X i Y Banachovi, *homomorfizmima* Banachovih prostora. Homomorfizam normiranih prostora $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ je *izomorfizam* ako je bijektivan i $L^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$. Homomorfizam normiranih prostora $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ je *izometrički* ako vrijedi $\|Lx\| = \|x\|$ za sve $x \in X$.

Ako je X Banachov prostor, Y neki zatvoren (pa onda i Banachov) potprostor i $S \subseteq Y$ neprazan, kažemo da S *generira* (kao Banachov prostor) Y ako je Y najmanji Banachov prostor u X koji sadrži S. U tom se slučaju svaki element iz Y može prikazati kao limes linearnih kombinacija elemenata iz S, tj. $Y = \mathrm{Cl}\,\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i \mid n \in \mathbb{N},\ \alpha_i \in \mathbb{F},\ s_i \in S,\ i = 1, \ldots, n\}$.

Uvodi se norma na $\mathcal{L}(X, Y)$ s $\|L\| = \sup\{\|Lx\| \mid x \in X, \|x\| \leq 1\}$ i zovemo je *operatorskom normom*. Lako se pokaže da je $\mathcal{L}(X, Y)$ Banachov prostor ako je Y Banachov prostor. Posebno je X^* uvijek Banachov. Netrivijalna je činjenica da je $X^* \neq \{0\}$ čim je $X \neq \{0\}$; to slijedi iz sljedećeg rezultata.

Teorem 1.1.1 (Hahn-Banach)**.** *Neka je X normirani prostor i Y neki njegov potprostor. Tada se svaki $f \in Y^*$ može proširiti do funkcionala $\tilde{f} \in X^*$ tako da vrijedi $\|f\|_{Y^*} = \|\tilde{f}\|_{X^*}$.*

Dokaz se može naći u [4]. Jedna važna posljedica Hahn-Banachovog teorema je da se svaki normirani prostor može na prirodan način uložiti u Banachov prostor. Naime, on povlači da je preslikavanje $\Lambda : X \to (X^*)^* = X^{**}$ zadano s $[\Lambda(x)](f) = f(x)$ linearna izometrija (tj. injektivni neprekidni linearni operator koji čuva normu), pa je uz identifikaciju od X s $\Lambda(X)$ upotpunjenje od X upravo skup $\mathrm{Cl}(\Lambda(X))$ jer je zatvoren potprostor potpunog prostora potpun.

U slučaju Hilbertovog prostora (tj. potpunog unitarnog prostora) imamo eksplicitan oblik neprekidnih funkcionala.

Teorem 1.1.2 (Rieszov teorem reprezentacije za Hilbertove prostore)**.** *U Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ svaki neprekidan funkcional $f \in \mathcal{H}^*$ ima oblik $f(x) = \langle x \,|\, a \rangle$, za neki $a \in \mathcal{H}$.*

Zatvoreni su potprostori posebno zanimljivi jer za njih možemo promatrati kvocijentni prostor. Ako je Y zatvoren potprostor od X, onda X/Y postaje normiran uz normu $\|x+Y\| = \inf\{\|x + y\| \mid y \in Y\}$ i tada je projekcija $\pi : X \to X/Y$, $\pi(x) = x + Y$, neprekidna funkcija s (operatorskom) normom $\|\pi\| = 1$. Vrijedi da, ako je X Banachov prostor, tada je i X/Y također Banachov prostor.

Teorem 1.1.3. *Neka su X i Y Banachovi prostori i $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u X. Tada:*

(i) *Ako $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ konvergira, onda $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira, i to bezuvjetno, tj. suma ne ovisi o poretku.*

(ii) *Graf $\Gamma(L) = \{(x, Lx) \mid x \in X\}$ linearnog operatora $L : X \to Y$ zatvoren je u $X \times Y$ ako i samo ako je L neprekidan. (Ovo je tzv.* teorem o zatvorenom grafu.*)*

(iii) *Ako je $L : X \to Y$ surjektivan i neprekidan linearan operator, tada je L otvoreno preslikavanje. Posebno, ako je L bijekcija, tada je i L^{-1} također neprekidna bijekcija. (Ovo je tzv.* teorem o otvorenom preslikavanju.*)*

(iv) *Ako su $\tilde{X}$ i $\tilde{Y}$ gusti potprostori u X odnosno Y i $\tilde{L} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ neprekidan linearni operator, onda se $\tilde{L}$ na jedinstven način može proširiti do linearnog operatora $L : X \to Y$ tako da vrijedi $L\big|_{\tilde{X}} = \tilde{L}$ i $\|\tilde{L}\| = \|L\|$.*

Prije nego što počnemo promatrati slabe topologije, podsjetimo se što je hiperniz. Neka je A proizvoljan (neprazan) skup na kojemu je zadana relacija $\leq$ koja je refleksivna, tranzitivna, i za koju vrijedi da za sve $\alpha, \beta \in A$ postoji $\gamma \in A$ takav da je $\alpha \leq \gamma$ i $\beta \leq \gamma$. Tada A zajedno s $\leq$ zovemo *usmjereni skup*. Ako imamo zadan topološki prostor X i usmjereni skup A, *hiperniz* u X je bilo koja funkcija $x : A \to X$ i obično pišemo $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$. Nadalje, ako imamo još jedan usmjereni skup B i funkciju $p : B \to A$ takvu da $\beta_1 \leq \beta_2$ povlači $h(\beta_1) \leq h(\beta_2)$ i da za svaki $\alpha \in A$ postoji $\beta \in B$ takav da je $\alpha \leq h(\beta)$, onda kažemo da je hiperniz $(x_{h(\beta)})_{\beta\in B}$ *podhiperniz* hiperniza $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Neka je zadan $x_0 \in X$, gdje je X topološki prostor, i neka je $\mathscr{U}$ familija svih (otvorenih) okolina od x_0. Kažemo da hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ konvergira k elementu x_0 ako vrijedi

$$(\forall U \in \mathscr{U})(\exists a_0 \in A)(\forall a \in A)\, a_0 \leq a \Rightarrow x_a \in U,$$

i u tom slučaju pišemo $x_\alpha \to x_0$ ili $\lim_\alpha x_\alpha = x_0$. Lako se provjeri da familiju $\mathscr{U}$ možemo zamijeniti proizvoljnom bazom okolina od x_0, te da ako imamo $A = \mathbb{N}$ i $\leq$ standardni uređaj na $\mathbb{N}$, onda se pojam konvergencije hiperniza podudara s konvergencijom niza. Isto tako se lako provjeri da je hiperniz konvergentan ako i samo ako je svaki njegov podhiperniz konvergentan. U normiranom prostoru možemo definirati i Cauchyjevost hiperniza. Hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ u normiranom prostoru X je Cauchyjev ako vrijedi

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists a_0 \in A)(\forall a, b \in A)\, a_0 \leq a, b \Rightarrow \|x_a - x_b\| < \epsilon.$$

Ako je X još i Banachov prostor, onda je svaki Cauchyjev hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ nužno konvergentan.

U općem topološkom prostoru pojam hiperniza u potpunosti zamjenjuje nizove; nizove je dovoljno promatrati samo u prostoru koji zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti. Naime, ako su X i Y topološki prostori, tada je funkcija $f : X \to Y$ neprekidna u točki $x_0 \in X$ ako i samo ako za sve hipernizove $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ koji konvergiraju u x_0 vrijedi da i hiperniz $(f(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ konvergira u $f(x_0)$.

Nas će zanimati tzv. slabe topologije. Ako je X (neprazan) skup, Y topološki prostor i $(f_i)_{i\in I}$ neka familija funkcija sa X u Y, na X definiramo *slabu topologiju induciranu familijom* $(f_i)_{i\in I}$ kao najmanju topologiju (takva postoji jer je presjek topologija opet topologija) na X u odnosu na koju su sve funkcije iz $(f_i)_{i\in I}$ neprekidne. Zadamo li $x_0 \in X$ i hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ u X, vrijedi da taj hiperniz konvergira prema x_0 u toj topologiji ako i samo ako hiperniz $f_i(x_\alpha)$ konvergira prema $f_i(x_0)$ za sve $i \in I$. Nadalje, X je Hausdorffov ako je Y Hausdorffov i ako familija $(f_i)_{i\in I}$ razlikuje točke na X (tj. za sve različite $x_1, x_2 \in X$ postoji $i \in I$ takav da je $f_i(x_1) \neq f_i(x_2)$).

Neka je sada X normiran prostor. *Slaba topologija* na X je slaba topologija generirana funkcijama iz X^*. Očito je ona manja (tj. slabija) od topologije inducirane normom. Iz Hahn-Banachovog teorema slijedi da funkcije iz X^* razlikuju točke pa je slaba topologija na X Hausdorffova. Može se pokazati da ona općenito ne zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti, pa je stoga upotreba hipernizova opravdana. Nadalje, prema prethodnom vrijedi da hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ u X konvergira prema $x_0 \in X$ u slaboj topologiji ako i samo ako vrijedi $f(x_\alpha) \to f(x_0)$ za sve $f \in X^*$, i tada pišemo $x_\alpha \xrightarrow{w} x_0$ ili $w-\lim_\alpha x_\alpha = x_0$. U slučaju Hilbertovog prostora imamo sljedeći koristan kriterij da provjerimo konvergira li neki hiperniz u slaboj topologiji.

Propozicija 1.1.4. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor, $C > 0$ i $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ hiperniz u $\mathcal{H}$ takav da vrijedi $\|x_\alpha\| \leq C$ za sve $\alpha \in A$. Ako za svaki y iz nekog gustog podskupa od $\mathcal{H}$ hiperniz $(\langle x_\alpha \,|\, y\rangle)_{\alpha\in A}$ konvergira, onda postoji $x_0 \in \mathcal{H}$ takav da $\langle x_\alpha \,|\, y\rangle \to \langle x_0 \,|\, y\rangle$ za sve $y \in \mathcal{H}$, tj. $x_\alpha \xrightarrow{w} x_0$.*

Dokaz. Označimo s $\tilde{\mathcal{H}}$ gust potprostor od $\mathcal{H}$ generiran svim $y \in \tilde{\mathcal{H}}$ za koje vrijedi da hiperniz $(\langle x_\alpha \,|\, y\rangle)_{\alpha\in A}$ konvergira. Zbog seskvilinearnosti skalarnog produkta hiperniz $(\langle x_\alpha \,|\, y\rangle)_{\alpha\in A}$ konvergira i za sve $y \in \tilde{\mathcal{H}}$. Definiramo $f : \tilde{\mathcal{H}} \to \mathbb{F}$ s $f(y) = \lim_{\alpha\in A}\langle y \,|\, x_\alpha\rangle$ i za njega po Cauchy-Schwarzovoj nejednakosti vrijedi $|f(y)| \leq C\|y\|$, pa je $\|f\| \leq C$. Dakle, f je neprekidni funkcional na $\tilde{\mathcal{H}}$ pa se može po teoremu 1.1.3, pod (iv), proširiti do linearnog funkcionala $f : \mathcal{H} \to \mathbb{F}$. Po Rieszovom teoremu reprezentacije postoji $x_0 \in \mathcal{H}$ takav da je $f(x) = \langle x \,|\, x_0\rangle$ za sve $x \in \mathcal{H}$. Konačno, uzmemo li $\epsilon > 0$ i $x \in \mathcal{H}$ proizvoljne, tada prema prethodnome postoje $y \in \tilde{\mathcal{H}}$ takav da je $\|x - y\| < \epsilon$ i $\alpha_0 \in A$ takav da za sve $\alpha_0 \leq \alpha$ vrijedi $|\langle y \,|\, x_\alpha\rangle - \langle y \,|\, x_0\rangle| < \epsilon$. Stoga je

$$\begin{aligned}|\langle x \,|\, x_\alpha\rangle - \langle x \,|\, x_0\rangle| &\leq |\langle x - y \,|\, x_\alpha\rangle| + |\langle y \,|\, x_\alpha\rangle - \langle x \,|\, x_0\rangle| \\ &\leq C\|x - y\| + \epsilon = \epsilon(C + 1),\end{aligned}$$

pa slijedi tvrdnja propozicije. □

Na dualnom je prostoru X^*, umjesto slabe topologije, prirodnije promatrati slabu* topologiju. *Slaba* topologija* na X^* je slaba topologija inducirana funkcijama iz $\Lambda(X)$ (Λ je oznaka koju smo uveli za ulaganje $X \to X^{**}$); posebno je manja (slabija) i od slabe topologije. Kako funkcije iz $\Lambda(X)$ očito razlikuju točke, slaba* topologija je Hausdorffova. Slaba* topologija, također, općenito ne zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti. Hiperniz $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ u X^* konvergira prema $f_0 \in X^*$ u slaboj* topologiji ako i samo ako za sve $x \in X$ vrijedi $f_\alpha(x) \to f_0(x)$, i tada pišemo $x_\alpha \xrightarrow{w^*} x_0$ ili $w^* - \lim_\alpha x_\alpha = x_0$. Primijetimo da, ako je X refleksivan ($\Lambda(X) = X^{**}$), onda se na X^* slaba topologija podudara sa slabom* topologijom.

Teorem 1.1.5 (Alaoglu)**.** *Neka je X normiran prostor. Tada je zatvorena jedinična kugla $\{f \in X^* \mid \|f\| \leq 1\}$ u X^* kompaktan skup u slaboj* topologiji.*

Dokaz Alaogluovog teorema može se vidjeti u [6]. Primijetimo da je posebno skup $\{f \in X^* \mid \|f\| \leq 1\}$ zatvoren u slaboj* topologiji kao kompaktan skup u Hausdorffovom topološkom prostoru. Imamo i sljedeći rezultat o slaboj* topologiji.

Propozicija 1.1.6. *Neka je X normiran prostor i $S \subseteq X^*$ takav da $\|f\| \leq C$ za sve $f \in S$, za neki $C > 0$. Tada se na S slaba* topologija podudara s topologijom uniformne konvergencije na kompaktnim skupovima u X.*

Dokaz. Slaba* topologija na S zapravo je topologija konvergencije po točkama i stoga je slabija od topologije uniformne konvergencije na kompaktnim skupovima. Obrnuto, neka je $g \in S$, $\epsilon > 0$ i $K \subseteq X$ kompaktan skup. Za $\delta = \epsilon/(3C)$ postoje $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$, $n \in \mathbb{N}$, takvi da kugle $K(x_i, \delta)$ oko x_i radijusa δ pokrivaju K. Sada ako uzmemo $f \in S$ i $x \in K$, onda je $\|x - x_j\| < \delta$ za neki $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pa je

$$|f(x) - g(x)| < |f(x - x_j)| + |(f - g)(x_j)| + |g(x_j - x)| < 2\epsilon/3 + |(f - g)(x_j)|.$$

Zaključujemo da je $\cap_{i=1}^{n}\{f \in X^* \mid |(f - g)(x_j)| < \epsilon/3\}$ slaba* okolina od g sadržana u okolini $\{f \in X^* \mid |(f - g)(x)| < \epsilon$, za sve $x \in K\}$ topologije uniformne konvergencije na kompaktanim skupovima. □

Neka su X i Y normirani prostori i neka je $\mathcal{L}(X, Y)$ skup svih neprekidnih linearnih operatora $X \to Y$. Uz topologiju induciranu operatorskom normom imamo još dvije važne topologije na $\mathcal{L}(X, Y)$. *Jaka operatorska topologija* na $\mathcal{L}(X, Y)$ je slaba topologija inducirana preslikavanjima $L \mapsto Lx$, $x \in X$, a *slaba operatorska topologija* na $\mathcal{L}(X, Y)$ je slaba topologija inducirana preslikavanjima $L \mapsto f(Lx)$, $x \in X, f \in Y^*$.

Važno je primijetiti da u svim prethodnim primjerima slabih topologija vrijedi da su operacije zbrajanja vektora, oduzimanja vektora i množenja vektora skalarom neprekidne funkcije. To lako slijedi iz linearnosti funkcija koje induciraju te slabe topologije. Općenito, ako imamo vektorski prostor X na kojemu je zadana topologija u odnosu na koju su operacije zbrajanja vektora, oduzimanja vektora i množenja skalarom neprekidne, onda X nazivamo *topološki vektorski prostor*.

Posljednji važan teorem iz opće teorije normiranih prostora koji će nam trebati je Krein-Milmanov teorem, a za njegov iskaz potrebno je prisjetiti se pojmova vezanih uz konveksnost. Neka je X topološki vektorski prostor. *Segment generiran s $x, y \in X$* je skup $\{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda \leq 1\}$, a *otvoreni segment generiran s $x, y \in X$, $x \neq y$*, je skup $\{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in \mathbb{R}, 0 < \lambda < 1\}$. U oba slučaja lako je provjeriti da su x i y jedinstveno određeni samim skupom kojeg generiraju. Kažemo da je skup $S \subseteq X$ *konveksan* ako je neprazan i sadrži svaki segment generiran s proizvoljne dvije točke iz S. Vrijedi da je zatvarač konveksnog skupa konveksan i da je presjek konveksnih skupova opet konveksan. Stoga, definiramo *konveksnu ljusku* skupa $S \subseteq X$ kao najmanji konveksan skup koji sadrži S i taj skup označavmo s $\mathrm{Conv}\, S$. Nas će zanimati najmanji zatvoren konveksan skup koji sadrži skup S. Lako se pokaže da je taj skup jednak skupu $\mathrm{Cl}\,(\mathrm{Conv}\, S)$. *Ekstremna točka* konveksnog skupa S je točka iz S koja ne leži ni u jednom otvorenom segmentu generiranom s dvije točke iz S.

Teorem 1.1.7 (Krein-Milman)**.** *Neka je X normiran prostor i neka je V bilo koji od sljedećih topoloških vektorskih prostora:*

(i) *$V = X$ uz topologiju induciranu normom,*

(ii) *$V = X$ uz slabu topologiju,*

(iii) *$V = X^*$ uz slabu* topologiju.*

Tada ako je S konveksan, kompaktan skup u V, onda je skup ekstremnih točaka E od S neprazan i vrijedi $\mathrm{Cl}\,(\mathrm{Conv}\, E) = S$.

Dokaz Krein-Milmanovog teorema može se pogledati u [6].

Banachove algebre

Kažemo da je $\mathcal{A}$ *Banachova algebra* ako je $\mathcal{A}$ algebra nad kompleksnim ili realnim brojevima na kojoj je zadana norma u odnosu na koju $\mathcal{A}$ postaje Banachov prostor i za koju vrijedi $\|ab\| \leq \|a\|\,\|b\|$ za sve $a, b \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ je *Banachova algebra s jedinicom* ako postoji $e \in \mathcal{A}$ takav da je $\|e\| = 1$ i ako za sve $a \in \mathcal{A}$ vrijedi $ae = ea = a$. Lako se pokaže da je jedinica u $\mathcal{A}$ jedinstvena ako postoji i u tom slučaju je i svaki multiplikativni inverz od $a \in \mathcal{A}$ jedinstven ako postoji. Banachova algebra $\mathcal{A}$ je *komutativna* ako vrijedi $ab = ba$ za sve $a, b \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ je *Banachova *-algebra* ako ima zadanu involuciju, tj. funkciju $x \mapsto x^*$ sa $\mathcal{A}$ u $\mathcal{A}$ koja je antilinearna te zadovoljava $(xy)^* = y^*x^*$ i $x^{**} = x$ za sve $x, y \in \mathcal{A}$.

Homomorfizam Banachovih algebri $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ je homomorfizam Banachovih prostora $L \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ koji zadovoljava $L(xy) = L(x)L(y)$, za sve $x, y \in \mathcal{A}$. *Homomorfizam Banachovih *-algebri* $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ je homomorfizam Banachovih algebri $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ takav da je $L(x^*) = L(x)^*$ za sve $x \in \mathcal{A}$.

Neka je $\mathcal{B}$ zatvorena podalgebra (zatvoren potprostor koji je zatvoren na množenje) Banachove algebre $\mathcal{A}$. Za (neprazan) skup $S \subseteq \mathcal{B}$ kažemo da *generira* $\mathcal{B}$ (kao Banachovu algebru) ako je svaki element iz $a \in \mathcal{B}$ limes linearnih kombinacija produkata iz S. Lako se pokaže da je u tom slučaju najmanja Banachova algebra koja sadrži S upravo $\mathcal{B}$.

Propozicija 1.1.8. *Neka je $\mathcal{A}$ Banachova algebra. Množenje $(a, b) \mapsto ab$ je neprekidna funkcija. Nadalje, ako $\mathcal{A}$ ima jedinicu, skup svih invertibilnih elemenata je otvoren i invertiranje je neprekidno.*

Prisjetimo se nekih standardnih pojmova vezanih uz algebre. $\mathcal{I}$ je *lijevi ideal* u Banachovoj algebri $\mathcal{A}$ ako je potprostor od $\mathcal{A}$ i ako vrijedi da za svake $x \in \mathcal{A}$ i $y \in \mathcal{I}$ je ujedno i $xy \in \mathcal{I}$. Analogno se definira *desni ideal*. Ideal je *obostran* ako je i lijevi i desni. (Dalje u tekstu riječ ideal odnosi se samo na obostrane ideale.) Kažemo da je ideal *pravi* ako nije jednak cijelom $\mathcal{A}$, a *maksimalan* ako je pravi i nije sadržan ni u jednom drugom pravom idealu.

Propozicija 1.1.9. *Neka je $\mathcal{I}$ ideal u Banachovoj algebri $\mathcal{A}$ s jedinicom e. Tada je ekvivalentno:*

(i) *$\mathcal{I}$ je pravi ideal.*

(ii) *$\mathcal{I}$ ne sadrži nijedan invertibilan element.*

(iii) *$\mathcal{I}$ ne sadrži jedinicu e.*

(iv) *Zatvarač* $\mathrm{Cl}\,\mathcal{I}$ *od $\mathcal{I}$ pravi je ideal.*

(v) *$\mathcal{I}$ je sadržan u maksimalnom idealu.*

Posebno je svaki maksimalni ideal zatvoren. Nadalje, ako je $\mathcal{I}$ pravi, zatvoren ideal, onda je $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ Banachova algebra s jedinicom $e + \mathcal{I}$, (dobro definiranim) množenjem $(x + \mathcal{I})(y + \mathcal{I}) = (xy + \mathcal{I})$ i uz kvocijentnu normu $\|x + \mathcal{I}\| = \inf\{\|x + y\| \mid y \in \mathcal{I}\}$.

Dokaz. Dokažimo da (i) $\Rightarrow$ (ii). Kad bi postojao $x \in \mathcal{I}$ invertibilan tada bi $x^{-1}x = e \in \mathcal{I}$, pa onda i za svaki $y \in \mathcal{A}$ je $y = ye \in \mathcal{I}$, tj. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$. Kontradikcija. Slijedi (ii). Tvrdnje (ii) $\Rightarrow$ (iii) i (iii) $\Rightarrow$ (i) su očite.

Dokažimo da (iv) slijedi iz prethodne tri. $\mathrm{Cl}\,\mathcal{I}$ je ideal zbog neprekidnosti funkcija zbrajanja, množenja i množenja skalarom, pa je dovoljno dokazati da nema invertibilnih elemenata. Kako je $\mathcal{I}$ sadržan u skupu neinvertibilnih elemenata, a skup neinvertibilnih elemenata je zatvoren (vidi [4, str. 160]), onda je i $\mathrm{Cl}\,\mathcal{I}$ sadržan u skupu neinvertibilnih elemenata. Slijedi (iv); obrat (iv) $\Rightarrow$ (i) je očit.

Implikacija (v) $\Rightarrow$ (i) je očita; dokažimo obrat. Neka je $\mathscr{S}$ familija svih pravih ideala u $\mathcal{A}$ koja sadrži $\mathcal{I}$ i uredimo je inkluzijom. Ako je $\mathscr{L}$ lanac u $\mathscr{S}$ onda definiramo $\mathcal{G} = \cup_{\mathcal{J}\in\mathscr{L}}\mathcal{J}$. Za $\mathcal{G}$ se lako pokaže da je ideal u $\mathcal{A}$ te kako po (iii) $e \notin \mathcal{J}$, za svaki $\mathcal{J} \in \mathscr{L}$, vrijedi i $e \notin \mathcal{G}$, pa je $\mathcal{G}$ pravi ideal i očito sadrži $\mathcal{I}$. Slijedi $\mathcal{G} \in \mathscr{S}$. Dakle svaki lanac u $\mathscr{S}$ ima gornju među u $\mathscr{S}$, pa po Zornovoj lemi postoji maksimalan element u $\mathscr{S}$ koji je naš traženi maksimalni ideal.

□

Ako je $\mathcal{A}$ Banachova algebra s jedinicom e, *spektar* elementa $x \in \mathcal{A}$ definira se kao skup $\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda e - x \text{ nije invertibilan}\}$. *Spektralni radijus* elementa $x \in \mathcal{A}$ je limes (koji postoji) $\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$.

Propozicija 1.1.10. *Neka je $\mathcal{A}$ Banachova algebra s jedinicom i $x \in \mathcal{A}$. Tada je $\rho(x) \leq \|x\|$ i svaki element iz $\sigma(x)$ (ako postoji) je po apsolutnoj vrijednosti manji ili jednak $\rho(x)$. Nadalje, ako je $\mathcal{A}$ kompleksna Banachova algebra, onda je $\sigma(x)$ neprazan, kompaktan skup i $\rho(x) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\}$.*

Teorem 1.1.11 (Geljfand-Mazur)**.** *Ako je $\mathcal{A}$ kompleksna Banachova algebra s jedinicom u kojoj je svaki element različit od nule invertibilan, onda je $\mathcal{A}$ izometrički izomorfna s $\mathbb{C}$.*

Neki važni primjeri

Ako je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor, onda je $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ Banachova algebra s identitetom I kao jedinicom i množenjem kao kompozicijom (posebno vrijedi za $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ da je $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$). Štoviše, $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ je Banachova *-algebra s involucijom $A \mapsto A^*$ koja je definirana relacijom $\langle Ax \mid y \rangle = \langle x \mid A^* y \rangle$, za $x, y \in \mathcal{H}$. Operator A^* zovemo *adjungirani operator* operatora A.

Operator U je *unitaran* ako vrijedi $UU^* = U^*U = I$. Skup unitarnih operatora u $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ označavamo s $\mathcal{U}(\mathcal{H})$. Budući da množenje u $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ u pravilu *nije* neprekidno u odnosu bilo na slabu ili jaku operatorsku topologiju, sljedeći je teorem posebno zanimljiv i od velike važnosti, kao što ćemo kasnije i vidjeti.

Teorem 1.1.12. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Tada se slaba i jaka operatorska topologija na $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ podudaraju te je i množenje i invertiranje u toj topologiji neprekidno.*

Dokaz. Ako je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ proizvoljan hiperniz unitarnih operatora i U proizvoljan unitaran operatora, onda za sve $x \in \mathcal{H}$ vrijedi

$$\begin{aligned} \|(U_\alpha - U)x\|^2 &= \langle (U_\alpha - U)x \,|\, (U_\alpha - U)x \rangle \\ &= \|U_\alpha x\|^2 - 2\Re(\langle U_\alpha x \,|\, Ux \rangle) + \|Ux\|^2 \\ &= 2\|x\|^2 - 2\Re(\langle U_\alpha x \,|\, Ux \rangle). \end{aligned}$$

Stoga, ako $U_\alpha \to U$ u slaboj operatorskoj topologiji, onda $\langle U_\alpha x \,|\, Ux \rangle \to \|Ux\|^2 = \|x\|^2$, pa po prethodnoj jednakosti $U_\alpha \to U$ u jakoj operatorskoj topologiji i slijedi prvi dio tvrdnje. Neprekidnost invertiranja je trivijalna iz činjenica da $U^{-1} = U^*$ i $\langle Ux \,|\, y \rangle = \overline{\langle U^* y \,|\, x \rangle}$, za sve $x, y \in \mathcal{H}$. Za neprekidnost množenja uzmemo još jedan hiperniz $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ i pretpostavimo da $U_\alpha \to U$ i $V_\alpha \to V$. Tada je za sve $x, y \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \langle U_\alpha V_\alpha x \,|\, y \rangle &= \langle V_\alpha x \,|\, U_\alpha^* y \rangle \\ &= \langle (V_\alpha - V)x \,|\, U_\alpha^* y \rangle + \langle Vx \,|\, U_\alpha^* y \rangle, \end{aligned}$$

pa kako $\langle (V_\alpha - V)x \,|\, U_\alpha^* y \rangle \to 0$ po Cauchy-Schwarzovoj nejednakosti i $\langle Vx \,|\, U_\alpha^* y \rangle \to \langle Vx \,|\, U^* y \rangle = \langle UVx \,|\, y \rangle$, slijedi tvrdnja. □

Sljedeći važni primjeri su prostori neprekidnih kompleksnih funkcija na topološkom prostoru. Neka je T topološki prostor i označimo s $C(T) = C(T, \mathbb{C})$ prostor svih neprekidnih funkcija $T \to \mathbb{C}$ (zbrajanje i množenje skalarom definirano po točkama). U slučaju da je T lokalno kompaktan, označimo s $C_0(T) = C_0(T, \mathbb{C})$ prostor svih neprekidnih funkcija koje trnu u beskonačnosti, tj.

$$C_0(T) = \Big\{ f \in C(T) \mid (\forall \epsilon > 0)(\exists K \text{ kompaktan})(\forall t \in T \setminus K)\ |f(t)| < \epsilon \Big\}.$$

Primijetimo da u slučaju kada je T kompkatan vrijedi $C_0(T) = C(T)$. Nadalje, označimo tako zvanu sup-normu s $\|f\|_\infty = \sup_{t\in T} |f(t)|$. Standardni rezultat je, da ako je T kompaktan, onda je $(C(T), \|\cdot\|_\infty)$ Banachov prostor. Označimo s 1 konstantnu funkciju $t \mapsto 1$. Definiramo množenje na $C(T)$ po točkama i primijetimo da je kompleksno konjugiranje po točkama involucija na $C(T)$. Sada vidimo da $(C(T), \|\cdot\|_\infty)$ postaje Banachova *-algebra koja je komutativna i ima jedinicu. Analogno, ako je T lokalno kompaktan, vrijedi da je $(C_0(T), \|\cdot\|_\infty)$ komutativna Banachova *-algebra, ali koja ne mora imati jedinicu. Za $C_0(T)$ vrijedi sljedeći teorem čiji dokaz se može pogledati u [6].

Teorem 1.1.13 (Stone-Weierstrass)**.** *Neka je T lokalno kompaktan, Hausdorffov prostor i neka je $\mathcal{A}$ podalgebra od $C_0(T)$ koja razlikuje točke, zatvorena na kompleksno konjugiranje (tj. na involuciju) i takva da ne postoji $t \in T$ takav da je $f(t) = 0$, za sve $f \in C_0(T)$. Tada je $\mathcal{A}$ gusta u $C_0(T)$.*

Sljedeći teorem koji ćemo navesti vezan je uz prostore koji nemaju nužno strukturu Banachovog prostora. Neka je T lokalno kompaktan, Hausdorffov prostor i M metrički prostor s metrikom d. Označimo s $C(T, M)$ skup svih neprekidnih funkcija $T \to M$. $C(T, M)$ postaje topološki prostor uz bazu $N_{f,K,\epsilon} = \{g \in C(T, M) \mid d(f(x), g(x)) < \epsilon$, za sve $x \in K\}$, gdje K ide po kompaktnim skupovima i ϵ po pozitivnim realnim brojevima. Ovu topologiju zovemo *topologija kompaktne konvergencije* ili *topologija uniformne konvergencije na kompaktnim skupovima*.

Neka je $\mathcal{F} \subseteq C(T, M)$ neprazna familija funkcija. Za $t_0 \in T$ kažemo da je familija $\mathcal{F}$ *ekvikontinuirana u točki* t_0 ako vrijedi da za svaki $\epsilon > 0$ postoji okolina U od t_0 takva da za sve $t \in U$ i $f \in \mathcal{F}$ vrijedi $\mathrm{d}(f(t), f(t_0)) < \epsilon$. Familija $\mathcal{F}$ je *ekvikontinuirana* ako je ekvikontinuirana u svakoj točki $t_0 \in T$. Nadalje, kažemo da je familija $\mathcal{F}$ *relativno kompaktna po točkama* ako je za sve $t_0 \in T$ skup $\{f(t_0) \mid f \in \mathcal{F}\}$ relativno kompaktan u M (tj. zatvarač tog skupa je kompaktan).

Teorem 1.1.14 (Arzelà-Ascoli)**.** *Neka je T lokalno kompaktan, Hausdorffov prostor, (M, d) metrički prostor i neka je $\mathcal{F} \subseteq C(T, M)$ proizvoljna neprazna familija funkcija. Familija $\mathcal{F}$ je relativno kompaktna u $C(T, M)$ u topologiji kompaktne konvergencije ako i samo ako je ekvikontinuirana i relativno kompaktna po točkama.*

Za dokaz pogledati u [5].

1.2 Rezultati iz teorije mjere

Opći prostori mjere

Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ σ-konačan prostor mjere. Označimo s $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu) = \mathcal{L}^p(\mu)$ skup $\{f : X \to \mathbb{C} \mid f$ je $\mathcal{F}$-izmjeriva i $\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu < \infty\}$ za $p \in [1, \infty\rangle$ te s $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ skup svih

$\mathcal{F}$-izmjerivih funkcija koje su ograničene, osim možda na skupu mjere nula. Ako se u vektorskom prostoru $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ identificiraju funkcije koje su jednake do na skup mjere nula, dobivamo Banachov prostor $\mathrm{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ s normom za element $f \in \mathrm{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ $\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu}$ za $p \in [1, \infty\rangle$, a u slučaju $p = \infty$ norma je esencijalni supremum apsolutne vrijednosti funkcije.

Redovito je korisna Hölderova nejednakost koja kaže da ako su $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ i $g \in \mathcal{L}^q(X, \mathcal{F}, \mu)$, pri čemu je $1/p + 1/q = 1$ za $p, q \in [1, \infty]$, onda je $fg \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ i vrijedi $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Vrijedi i obrat Hölderove nejednakosti.

Teorem 1.2.1. *Neka je $1/p + 1/q = 1$ za $p, q \in [1, \infty]$ i $f : X \to \mathbb{C}$ neka fiksna izmjeriva funkcija. Tada ako je veličina*

$$M = \sup \left\{ \left| \int f g \mathrm{d}\mu \right| \middle| g \textit{ jednostavna, različita od nule na skupu konačne mjere,} \right.$$
$$\left. \textit{i takva da } \|g\|_q = 1 \right\}$$

konačna, onda je $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ i $\|f\|_p = M$.

Teorem 1.2.2. *Za $p \in [1, \infty\rangle$ i $q \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ takav da $1/p + 1/q = 1$ vrijedi da je $\mathrm{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)^*$ izometrički izomorfno s $\mathrm{L}^q(X, \mathcal{F}, \mu)$. Uz tu identifikaciju, za $g \in \mathrm{L}^q(X, \mathcal{F}, \mu)$ vrijedi*

$$g(f) = \int_X f \overline{g} \mathrm{d}\mu$$

Ako imamo dva prostora mjere, oboje σ-konačni, $(X, \mathcal{F}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{G}, \nu)$, onda možemo konstruirati *produktnu σ -algebru $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$* i na njoj *produktnu mjeru $\mu \times \nu$* koja je karakterizirana relacijom:

$$\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \qquad A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}.$$

Primjeri funkcija koje su $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$-izmjerive su npr. funkcije oblika $h(x, y) = f(x)g(y)$, gdje je f $\mathcal{F}$-izmjeriva, a g $\mathcal{G}$-izmjeriva funkcija. Posebno su onda i limesi takvih funkcija izmjerivi.

Teorem 1.2.3 (Fubini-Tonelli)**.** *Neka su $(X, \mathcal{F}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ σ-konačni prostori mjere.*

(i) *Ako je f $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$-izmjeriva realna, nenegativna funkcija, tada su funkcije $y \mapsto \int_X f(x, y) \mathrm{d}\mu(x)$ i $x \mapsto \int_Y f(x, y) \mathrm{d}\nu(y)$ realne, nenegativne i $\mathcal{G}$, odnosno $\mathcal{F}$-izmjerive i vrijedi*

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f \mathrm{d}(\mu \times \nu) &= \int_Y \left(\int_X f(x, y) \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y) \qquad (1.1) \\ &= \int_X \left(\int_Y f(x, y) \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x), \end{aligned}$$

pri čemu ako je jedan od tih integrala konačan, onda su i ostali.

(ii) *Ako je $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mu \times \nu)$, onda su funkcije $y \mapsto \int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)$ i $x \mapsto \int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)$ dobro definirane u svim točkama, osim možda na skupu mjere nula. Ako im postavimo vrijednost nula tamo gdje nisu definirane, onda postaju elementi prostora $\mathcal{L}^1(Y, \mathcal{G}, \nu)$, odnosno $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ i vrijedi 1.1.*

Teorem 1.2.4 (Nejednakost Minkowskog)**.** *Neka su $(X, \mathcal{F}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ σ-konačni prostori mjere i f $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ -izmjeriva funkcija $X \times Y \to \mathbb{C}$.*

(i) *Ako je f realna, nenegativna funkcija i $p \in [1, \infty\rangle$, onda je*

$$\left(\int_X \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right)^p \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p} \leq \int_Y \left(\int_X f(x,y)^p \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p} \mathrm{d}\nu(y),$$

pri čemu vrijedi da, ako je integral s desne strane nejednakosti konačan, onda je konačan i integral s lijeve strane.

(ii) *Neka je $p \in [1, \infty]$. Ako je funkcija $x \mapsto f(x,y)$ iz $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ ν-gotovo svugdje i ako je funkcija $y \mapsto \left(\int_X |f(x,y)|^p \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}$, uz prepravljanje tamo gdje nije definirana, iz $\mathcal{L}^1(Y, \mathcal{G}, \nu)$, onda je funkcija $y \mapsto f(x,y)$ iz $\mathcal{L}^1(Y, \mathcal{G}, \nu)$ μ-gotov svugdje i funkcija $x \mapsto \int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)$ je iz $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ i vrijedi*

$$\left(\int_X \left|\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right|^p \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p} \leq \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|^p \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p} \mathrm{d}\nu(y).$$

Neka je zadan izmjeriv prostor $(X, \mathcal{F})$. *Kompleksna mjera* na $(X, \mathcal{F})$ je funkcija $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{C}$ za koju vrijedi da $\mu(\emptyset) = 0$ i za svaki disjunktni niz skupova $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{F}$ vrijedi $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, pri čemu ovaj red konvergira apsolutno jer suma ne ovisi o poretku. Za svaku kompleksnu mjeru postoji *Jordanova dekompozicija*, tj. može se zapisati u obliku $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$, gdje je i kompleksna jedinica, a μ_k, $k = 1,2,3,4$, su (nenegativne) mjere na $(X, \mathcal{F})$ i μ_1 i μ_2 su međusobno singularne i μ_3 i μ_4 su međusobno singularne. Primijetimo da je skup svih kompleksnih mjera na $(X, \mathcal{F})$, označeno s $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$, kompleksni vektorski prostor. Definiramo i prostor $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu)$, gdje je μ kompleksna mjera, kao skup $\bigcap_{k=1}^4 \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu_k)$. Tada, ako je $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ proizvoljna funkcija, definira se integriranje f u odnosu na μ s $\int_X f\mathrm{d}\mu = \int_X f\mathrm{d}\mu_1 - \int_X f\mathrm{d}\mu_2 + i(\int_X f\mathrm{d}\mu_3 - \int_X f\mathrm{d}\mu_4)$. Lako se pokaže da je integriranje u odnosu na μ linearan funkcional na $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu)$.

Neka imamo zadanu (nenegativnu) mjeru ν i kompleksnu mjeru μ na $(X, \mathcal{F})$. Onda kažemo da je μ *apsolutno neprekidna* u odnosu na ν, i pišemo $\mu << \nu$, ako vrijedi implikacija $(\forall A \in \mathcal{F})\nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$. Primijetimo da ako je $f \in \mathcal{L}^1(\nu)$, formula $\mu(A) = \int_A f\mathrm{d}\nu(x), A \in \mathcal{F}$ zadaje kompleksnu mjeru koja je apsolutno neprekidna u odnosu na ν. U tom bi slučaju bilo prirodno definirati normu od μ kao $\int_X |f|\mathrm{d}\nu(x)$.

Teorem 1.2.5. *Postoji norma $\|\cdot\|$ na $\mathcal{M}(X,\mathcal{F})$ koja je zadana karakterizacijom da, ako je $\mu \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F})$ i ν proizvoljna nenegativna mjera takva da $\mu(A) = \int_A f \mathrm{d}\nu(x), A \in \mathcal{F}$ (takva postoji), onda je $\|\mu\| = \int_X |f| \mathrm{d}\nu(x)$. Uz tu normu, prostor $\mathcal{M}(X,\mathcal{F})$ postaje Banachov.*

Uzmemo li proizvoljan prostor mjere $(X,\mathcal{F},\nu)$, imamo izometričko ulaganje prostora $L^1(X,\mathcal{F},\nu)$ u prostor $\mathcal{M}(X,\mathcal{F})$ zadano s $f \mapsto \mu$, gdje je $\mu(A) = \int_A f \mathrm{d}\nu$ za $A \in \mathcal{F}$. Stoga $L^1(X,\mathcal{F},\nu)$ možemo promatrati kao potprostor od $\mathcal{M}(X,\mathcal{F})$.

Općenito, ako imamo $(X,\mathcal{F},\mu)$ prostor mjere i $p,q,r \in [1,\infty]$ takve da $p \le q \le r$, onda je $\mathcal{L}^p(\mu) \cap \mathcal{L}^r(\mu) \subseteq \mathcal{L}^q(\mu) \subseteq \mathcal{L}^p(\mu) + \mathcal{L}^r(\mu)$. Vrijedi sljedeći poznati teorem:

Teorem 1.2.6 (Riesz-Thorin)**.** *Neka su $(X,\mathcal{F},\mu)$ i $(Y,\mathcal{G},\nu)$ dva σ-konačna prostora mjere, $p_0,p_1,q_0,q_1 \in [1,\infty]$ i za $t \in \langle 0,1\rangle$ neka su $p_t,q_t \in [1,\infty]$ takvi da vrijedi:*

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}$$
$$\frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Ako je $L : \mathcal{L}^{p_0}(\mu) + \mathcal{L}^{p_1}(\mu) \to \mathcal{L}^{q_0}(\nu) + \mathcal{L}^{q_1}(\nu)$ linearan operator takav da je $L\big|_{\mathcal{L}^{p_0}(\mu)} : \mathcal{L}^{p_0}(\mu) \to \mathcal{L}^{q_0}(\mu)$ neprekidan s (operatorskom) normom M_0 te $L\big|_{\mathcal{L}^{p_1}(\mu)} : \mathcal{L}^{p_1}(\mu) \to \mathcal{L}^{q_1}(\mu)$ isto neprekidan s normom M_1. Tada je i $L\big|_{\mathcal{L}^{p_t}(\mu)} : \mathcal{L}^{p_t}(\mu) \to \mathcal{L}^{q_t}(\mu)$ neprekidan i ima normu manju od $M_0^{1-t}M_1^t$.

Mjera i topologija

Neka je X lokalno kompaktan, Hausdorffov prostor i označimo s $\mathcal{B}(X)$ Borelovu σ-algebru na X (to je σ-algebra generirana svim otvorenim skupovima u X). Radit ćemo, kao i u ostatku diplomskog rada, uz pretpostavku da je X σ-kompaktan, tj. postoji prebrojivi pokrivač od X koji se sastoji od kompaktnih skupova. Kažemo da je mjera μ na $(X,\mathcal{B}(X))$ *Radonova* ako je konačna na kompaktnim skupovima i ako za svaki $A \in \mathcal{B}(X)$ vrijedi

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \inf\{\mu(U) \mid A \subseteq U,\ U \text{ otvoren}\}\\ &= \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq A,\ K \text{ kompaktan}\}.\end{aligned}$$

Općenito, svojstvo da mjera zadovoljava prvu jednakost zove se *vanjska regularnost*, a drugu *unutarnja regularnost*. Primijetimo da zbog σ-kompaktnosti slijedi da je μ σ-konačna mjera. Napomenimo da ako prostor X nije σ-kompaktan, definicija Radonove mjere mora se modificirati ukoliko želimo da dio sljedećih rezultata stoji.

Označimo s $C_c(X) = C_c(X,\mathbb{C})$ prostor svih neprekidnih funkcija s kompaktnim nosačem, tj. neprekidnih funkcija $f : X \to \mathbb{C}$ koje zadovoljavaju da je $\operatorname{supp} f = \operatorname{Cl}\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$

kompaktan. Ovaj je prostor normiran sa sup-normom, ali općenito nije potpun. Njegovo upotpunjenje je prostor $C_0(X)$. Primijetimo da možemo poistovjetiti prostore $C(X)$, $C_0(X)$ i $C_c(X)$ u slučaju da je X kompaktan. Imamo sljedeći teorem koji nam govori da $\mathcal{L}^p$ funkcije možemo aproksimirati funkcijama iz $C_c(X)$.

Teorem 1.2.7. *Neka je μ Radonova mjera na lokalno kompaktnom, Hausdorffovom prostoru X koji je i σ-kompaktan. Tada je skup $C_c(X)$ gust u prostoru $(\mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}(X), \mu), \|\cdot\|_p)$ za sve $p \in [0, \infty\rangle$ i gust potprostor u $(C_0(X), \|\cdot\|_\infty)$.*

Linearni funkcional I na $C_c(X)$ zovemo *pozitivnim* ako zadovoljava $I(f) \geq 0$, čim je $f \geq 0$ za $f \in C_c(X)$.

Teorem 1.2.8 (Rieszov teorem reprezentacije za pozitivne linearne funkcionale)**.** *Neka je X lokalno kompaktan i Hausdorffov prostor koji je σ-kompaktan. Tada postoji bijekcija između skupa svih pozitivnih linearnih funkcionala I u $C_c(X)$ i Radonovih mjera μ u $(X, \mathcal{B}(X))$ takva da za pripadne elemente vrijedi $I(f) = \int_X f \mathrm{d}\mu$, za sve $f \in C_c(X)$. Također, za sve $U \subseteq X$ otvorene i $K \subseteq X$ kompaktne vrijedi:*

$$\mu(U) = \sup\{I(f) \mid f \in C_c(X) \textit{ nenegativna, } f(x) \leq 1, \textit{ za } x \in U, \textit{ te } \operatorname{supp} f \subseteq U\}$$
$$\mu(K) = \inf\{I(f) \mid f \in C_c(X) \textit{ nenegativna, } f(x) \geq 1, \textit{ za } x \in K\}.$$

Kompleksna Radonova mjera je mjera na $(X, \mathcal{B}(X))$ oblika $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$, gdje su μ_k, $k = 1, 2, 3, 4$ (konačne) Radonove mjere. Skup kompleksnih Radonovih mjera, koji označavamo s $M(X) = M(X, \mathcal{B}(X))$, vektorski je potprostor od $\mathcal{M}(X, \mathcal{B}(X))$. Sljedeći teorem nam, među ostalim, daje potpunost $M(X)$ u $\mathcal{M}(X, \mathcal{B}(X))$.

Teorem 1.2.9 (Rieszov teorem reprezentacije za $C_0(X)^*$)**.** *Neka je X lokalno kompaktan i Hausdorffov prostor koji je σ-kompaktan. Tada je preslikavanje $\mu \mapsto I_\mu$, zadano s $I_\mu(f) = \int_X f \mathrm{d}\mu$, $f \in C_0(X)$, izometrički izomorfizam s $M(X)$ u $C_0(X)^*$.*

Sljedeće ćemo se prisjetiti produkta Radonovih mjera. Budući da je produkt dva σ-kompaktna, lokalno kompaktna, Hausdorffova prostora opet takav, na produktu možemo promatrati Radonove mjere, no primijetimo da općenito $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) \subseteq \mathcal{B}(X \times Y)$ i da jednakost ne mora vrijediti. Ipak, može se pokazati da su sve funkcije iz $C_c(X \times Y)$ izmjerive u $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$ i da su prerezi $\mathcal{B}(X \times Y)$-izmjerivih funkcija ili skupova izmjerivi u $\mathcal{B}(X)$ ili $\mathcal{B}(Y)$.

Teorem 1.2.10. *Neka su X i Y lokalno kompaktani, Hausdorffovi prostori koji su ujedno i σ-kompaktni, te μ i ν Radonove mjere na X, odnosno Y. Tada pozitivni funkcional na $C_c(X \times Y)$ definiran s $I(f) = \int_{X \times Y} f \mathrm{d}(\mu \times \nu)$ određuje Radonovu mjeru na $\mathcal{B}(X \times Y)$ koju označavamo s $\mu \hat{\times} \nu$ i zovemo* Radonovim produktom *mjera μ i ν. Za nju vrijedi $\mu \hat{\times} \nu \big|_{\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)} = \mu \times \nu$.*

Teorem 1.2.11 (Fubini-Tonelli za Radonov produkt)**.** *Neka su X i Y lokalno kompaktani, Hausdorffovi prostori koji su ujedno i σ-kompaktni, te μ i ν Radonove mjere na X, odnosno Y.*

(i) *Ako je f nenegativna, $\mathcal{B}(X \times Y)$-izmjeriva, tada su funkcije $x \to \int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)$ i $y \to \int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)$ izmjerive u $\mathcal{B}(X)$, odnosno $\mathcal{B}(Y)$, i vrijedi:*

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\mathrm{d}(\mu\hat{\times}\nu) &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y) \qquad (1.2)\\ &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x),\end{aligned}$$

pri čemu vrijedi da ako je jedan od tih integrala konačan, onda su i ostali.

(ii) *Ako je $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y, \mathcal{B}(X \times Y), \mu\hat{\times}\nu)$, onda su funkcije $y \mapsto \int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)$ i $x \mapsto \int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)$ dobro definirane u svim točkama, osim možda na skupu mjere nula. Ako im postavimo vrijednost nula tamo gdje nisu definirane, onda postaju elementi prostora $\mathcal{L}^1(Y, \mathcal{B}(Y), \nu)$, odnosno $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ i vrijedi 1.2.*

Na kraju spomenimo još jednu važnu činjenicu. Uzmemo li proizvoljan prostor Radonove mjere $(X, \mathcal{B}(X), \nu)$, onda imamo izometričko ulaganje prostora $L^1(X, \mathcal{B}(X), \nu)$ u prostor $M(X)$ zadano s $f \mapsto \mu$, gdje je $\mu(A) = \int_A f\mathrm{d}\nu$ za $A \in \mathcal{B}(X)$. Stoga možemo $L^1(X, \mathcal{B}(X), \nu)$ promatrati kao potprostor od $M(X)$.

Integrali vektorskih funkcija

Neka je zadan Banachov prostor Y s pripadnim izmjerivim prostorom $(Y, \mathcal{B}(Y))$ i neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor mjere. Kažemo da je izmjeriva funkcija $F : X \to Y$ *slabo integrabilna* ako vrijedi da je $f \circ F \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ za sve $f \in Y^*$. Nadalje, ako osim toga postoji vektor $v \in Y$ takav da za sve $f \in Y^*$ vrijedi $f(v) = \int f \circ F\mathrm{d}\mu$, onda je on jedinstven i kažemo da je v *integral* od F te pišemo $v = \int F\mathrm{d}\mu$.

Teorem 1.2.12. *Neka je X lokalno kompaktan, σ-kompaktan i Hausdorffov prostor, μ Radonova mjera na X i Y Banachov prostor. Ako je $F : X \to Y$ neprekidna, ograničena funkcija i $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}(X), \mu)$, tada postoji $\int gF\mathrm{d}\mu$ i vrijedi*

$$\left\|\int gF\mathrm{d}\mu\right\| \leq \sup_{x\in X} \|F(x)\| \int |g|\mathrm{d}\mu.$$

Dokaz se može pogledati u dodatku od [3].

Poglavlje 2

Geljfandova transformacija

U prvom odjeljku uvodimo Geljfandovu transformaciju na komutativnim Banachovim algebrama s jedinicom, a u drugom to proširujemo na slučaj komutativnih Banachovih algebri bez jedinice. U ovom poglavlju sve vektorske prostore gledamo isključivo nad kompleksnim brojevima.

2.1 Slučaj Banachovih algebri s jedinicom

Neka je $\mathcal{A}$ komutativna Banachova algebra s jedinicom e (nad poljem kompleksnih brojeva). Definiramo *spektar* od $\mathcal{A}$ (oznaka $\sigma(\mathcal{A})$) kao skup svih netrivijalnih homomorfizama algebri s $\mathcal{A}$ u $\mathbb{C}$. Posebno su to linearni funkcionali na $\mathcal{A}$. Ovdje ne zahtijevamo neprekidnost jer ona slijedi automatski:

Propozicija 2.1.1. *Za sve $h \in \sigma(\mathcal{A})$ vrijedi:*

(i) $h(e) = 1$.

(ii) *Ako je x invertibilan u $\mathcal{A}$, onda je $h(x) \neq 0$ i $h(x)^{-1} = h(x^{-1})$.*

(iii) $|h(x)| \leq \|x\|$.

Dokaz. $h(e) \neq 0$ jer bi inače $h(x) = h(xe) = h(x)h(e) = 0$, za sve $x \in \mathcal{A}$. Sada iz $h(e) = h(ee) = h(e)^2$ slijedi (i). Ako je $x \in \mathcal{A}$ invertibilan, onda $1 = h(e) = h(xx^{-1}) = h(x)h(x^{-1})$ pa slijedi $h(x) \neq 0$ i $h(x^{-1}) = h(x)^{-1}$, tj. (ii). Za (iii), pretpostavimo da postoji x takav da je $\lambda := |h(x)| > \|x\|$. Stavimo li $\varphi \in \mathbb{R}$ takav da $e^{i\varphi}h(x) = |h(x)|$, vidimo da za $y = e^{i\varphi}x$ vrijedi $\lambda = h(y) > \|y\| = \|x\|$. Tada $h(y - \lambda e) = 0$, pa zbog (ii) $y - \lambda e$ nije invertibilan, a to znači $\lambda \in \sigma(y)$ (spektar od y), no iz opće teorije znamo da je svaki element spektra od y manji ili jednak $\|y\|$. Kontradikcija. $\square$

Sljedeći nam teorem ukazuje na usku povezanost $\sigma(\mathcal{A})$ s tzv. prostorom maksimalnih ideala od $\mathcal{A}$.

Teorem 2.1.2. *Preslikavanje* $h \mapsto \operatorname{Ker} h$ *je bijekcija sa spektra od* $\mathcal{A}$ *u skup svih maksimalnih ideala od* $\mathcal{A}$.

Dokaz. Za $h \in \sigma(\mathcal{A})$ očito je $\operatorname{Ker} h$ pravi ideal u $\mathcal{A}$. Kako je dimenzija $\operatorname{Im} h$ jednaka 1, $\operatorname{Ker} h$ zajedno s bilo kojim vektorom izvan $\operatorname{Ker} h$ generira cijeli $\mathcal{A}$ kao vektorski prostor; slijedi da je $\operatorname{Ker} h$ maksimalan ideal. Dokažimo da je preslikavanje iz teorema injektivno. Neka je $\operatorname{Ker} h = \operatorname{Ker} g$ za neke $g, h \in \sigma(\mathcal{A})$ i neka $x \in \mathcal{A}$. Kako $e \notin \operatorname{Ker} h$ (po propoziciji 1.1.9) zajedno s $\operatorname{Ker} h$ generira cijeli $\mathcal{A}$, vrijedi $x = \lambda e + y$ za neke $\lambda \in \mathbb{C}$ i $y \in \operatorname{Ker} h = \operatorname{Ker} g$. Djelujući s g i h na prethodnu jednakost slijedi injektivnost.

Za surjektivnost uzmimo proizvoljan maksimalni ideal $\mathcal{M}$ u $\mathcal{A}$. Tada je $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ komutativna Banachova algebra s jedinicom $e + \mathcal{M}$ uz kvocijentnu normu $\|x + \mathcal{M}\| = \inf\{\|x + m\| \mid m \in \mathcal{M}\}$ (ovdje je važna zatvorenost maksimalnog ideala $\mathcal{M}$). Neka je $x \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{M}$. Lako se provjeri da je skup $\{yx + m \mid y \in \mathcal{A}, m \in \mathcal{M}\}$ ideal i on očito strogo sadrži $\mathcal{M}$ i stoga je jednak cijelom $\mathcal{A}$. Posebno postoje $y \in \mathcal{A}$ i $m \in \mathcal{M}$ takvi da $xy + m = e$. Slijedi da je $(x + \mathcal{M})(y + \mathcal{M}) = (e + \mathcal{M})$, tj. $x + \mathcal{M}$ je invertibilan u $\mathcal{A}/\mathcal{M}$. Pokazali smo da je $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ polje pa je, po teoremu Geljfand-Mazur (vidi 1.1.11), izometrički izomorfno s $\mathbb{C}$. Možemo dakle uzeti projekciju $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{M}$ kao traženi homomorfizam algebri. $\square$

Korolar 2.1.3. *Skup* $\sigma(\mathcal{A})$ *je neprazan.*

Dokaz. Po propoziciji 1.1.9, (v) primijenjenog na ideal $\{0\}$ slijedi da postoji maksimalni ideal. Sada iz teorema 2.1.2 slijedi da postoji pripadni element iz $\sigma(\mathcal{A})$. Posebno je spektar neprazan. $\square$

Sada možemo (i ima smisla) definirati glavni pojam ovog poglavlja:

Definicija 2.1.4. *Neka* $\sigma(\mathcal{A})$ *naslijedi od* $\mathcal{A}^*$ *slabu* topologiju (topologiju konvergencije po točkama) kao potprostor.* Geljfandova transformacija *je preslikavanje* $\Gamma : \mathcal{A} \to C(\sigma(\mathcal{A}))$ *definirano s* $\Gamma(x) = \hat{x}$, *pri čemu je* $\hat{x}(h) = h(x)$ *za* $h \in \sigma(\mathcal{A})$.

Da budemo sigurni da je definicija ispravna, dovoljno je utvrditi da je $\hat{x} \in C(\sigma(\mathcal{A}))$ (prostor neprekidnih funkcija $\sigma(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$). Stoga uzmimo proizvoljan hiperniz $(h_\alpha)_{\alpha \in A}$ u $\sigma(\mathcal{A})$ takav da $h_\alpha \xrightarrow{w^*} h$. Tada po definiciji slabe* topologije $h_\alpha(x) \to h(x)$, ali to je isto što i $\hat{x}(h_\alpha) \to \hat{x}(h)$, a to se i trebalo pokazati.

Ideja iza Geljfandove transformacije je da se $\mathcal{A}$ reprezentira kao konkretan prostor neprekidnih funkcija na nekom topološkom prostoru; tada $\sigma(\mathcal{A})$ predstavlja ujedno i evaluacije funkcija iz $\Gamma(\mathcal{A})$ u točkama tog topološkog prostora.

Prije proučavanja same Geljfandove transformacije, prvo ćemo dokazati jedno važno svojstvo prostora $\sigma(\mathcal{A})$:

Propozicija 2.1.5. *Prostor $\sigma(\mathcal{A})$ je kompaktan i Hausdorffov.*

Dokaz. Iz propozicije 2.1.1, (iii) slijedi da je $\sigma(\mathcal{A})$ sadržan u zatvorenoj jediničnoj kugli dualnog prostora $\mathcal{A}^*$ koju ćemo označiti s B. Primijetimo da je tada

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{h \in B \mid h(e) = 1, h(xy) = h(x)h(y) \quad \text{za sve } x, y \in \mathcal{A}\}.$$

Iz gornjeg je očito da je skup $\sigma(\mathcal{A})$ zatvoren potprostor od B u topologiji točkovne konvergencije, a kako je B po Alaogluovom teoremu (vidi 1.1.5) kompaktan u toj topologiji, slijedi da je i $\sigma(\mathcal{A})$ kompaktan. Hausdorffovost slijedi iz činjenice da je $\sigma(\mathcal{A})$ topološki potprostor dualnog prostora $\mathcal{A}^*$ uz slabu* topologiju koji je Hausdorffov. □

Sljedeći nam teorem daje neka osnovna svojstva Geljfandove transformacije, među ostalim i njezinu neprekidnost (primijetimo da je $C(\sigma(\mathcal{A}))$ uz množenje po točkama i *sup*-normu kompleksna, komutativna Banachova algebra s jedinicom):

Teorem 2.1.6. *Geljfandova transformacija je homomorfizam algebri. Za sve $x \in \mathcal{A}$ vrijedi:*

(i) $\hat{e} \equiv 1$

(ii) *x je invertibilan ako i samo ako $\hat{x}$ nema nultočaka.*

(iii) $\mathrm{Im}(\hat{x}) = \sigma(x)$.

(iv) $\|\hat{x}\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \leq \|x\|$.

Dokaz. Iz definicije lako slijedi da je Geljfandova transformacija homomorfizam algebri. $\hat{e} \equiv 1$ je također trivijalno (propozicija 2.1.1, (i)). Za (ii), primijetimo da x nije invertibilan ako i samo ako ideal $\{yx \mid y \in \mathcal{A}\}$ generiran s x je pravi ideal, što je ekvivalentno zbog propozicije 1.1.9, (v), da je x sadržan u nekom maksimalnom idealu, što je opet, po teoremu 2.1.2, ekvivalentno da je x sadržan u $\mathrm{Ker}\, h$, za neki $h \in \sigma(\mathcal{A})$. Dakle x nije invertibilan ako i samo ako je $h(x) = 0$, za neki $h \in \sigma(\mathcal{A})$, tj. $\hat{x}(h) = 0$. Slijedi (ii). Da dokažemo (iii), vidimo da je $\lambda \in \sigma(x)$ ako i samo ako $x - \lambda e$ nije invertibilan što je po (ii) ekvivalentno da $h(x - \lambda e) = 0$ za neki $h \in \sigma(\mathcal{A})$, tj. $\hat{x}(h) = \lambda$, što upravo znači $\lambda \in \mathrm{Im}(\hat{x})$. Za (iv) se treba sjetiti da je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$ formula za spektralni radijus od x, pa tvrdnja slijedi iz (iii). □

Sljedeće pitanje koje nas zanima je kada će slika Geljfandove transformacije $\Gamma(\mathcal{A})$ biti gusta u algebri neprekidnih funkcija $C(\sigma(\mathcal{A}))$. Prema teoremu Stone-Weierstrass (vidi 1.1.13), kojeg možemo primijeniti jer je $\Gamma(\mathcal{A})$ algebra i $\sigma(\mathcal{A})$ kompaktan prostor, dovoljno je da $\Gamma(\mathcal{A})$:

- sadrži konstantu 1,
- razlikuje točke od $\sigma(\mathcal{A})$, $(\forall g, h \in \sigma(\mathcal{A}))(\exists x \in \mathcal{A})\, \hat{x}(g) \neq \hat{x}(h)$,

- zatvoreno na kompleksno konjugiranje.

Prvi uvjet slijedi iz teorema 2.1.6, (i), a drugi jednostavno iz činjenice da su elementi iz $\sigma(\mathcal{A})$ funkcije na $\mathcal{A}$, tj. potpuno su određeni djelovanjem na skupu $\mathcal{A}$. Da bismo mogli razlučiti kada je treći uvjet zadovoljen, korisno je proučiti svojevrsni analogon kompleksnog konjugiranja: Banachove *-algebre. Naime, podsjetimo se da je za topološki prostor T, $C(T) = \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ neprekidna}\}$ komutativna Banachova *-algebra s jedinicom, pri čemu je involucija kompleksno konjugiranje funkcija po točkama. Stoga ima smisla definirati:

Definicija 2.1.7. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna Banachova *-algebra s jedinicom. Kažemo da je $\mathcal{A}$* simetrična *ako je pripadna Geljfandova transformacija homomorfizam Banachovih *-algebri, tj. $\widehat{x^*} = \overline{\hat{x}}$.*

Teorem 2.1.8. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna Banachova *-algebra s jedinicom. Tada:*

(i) *$\mathcal{A}$ je simetrična ako i samo ako $\hat{x}$ poprima realne vrijednosti čim je $x = x^*$.*

(ii) *Ako je $\mathcal{A}$ simetrična, onda je $\Gamma(\mathcal{A})$ gusta u $C(\sigma(\mathcal{A}))$.*

Dokaz. (ii) je jasno jer simetričnost povlači da je $\Gamma(\sigma(\mathcal{A}))$ zatvorena na kompleksno konjugiranje. Neka je $\mathcal{A}$ simetrična i $x = x^*$. Tada djelujući s Γ dobijemo $\hat{x} = \widehat{x^*} = \overline{\hat{x}}$, pa je $\hat{x}$ realna funkcija. Dokažimo obrat; neka je $x \in \mathcal{A}$. Tada možemo zapisati $x = a + ib$ gdje je $a = (x + x^*)/2$ i $b = (x - x^*)/(2i)$ (a se ponaša kao realni dio, a b kao imaginarni). Sada iz antilinearnosti involucije slijedi da je $a = a^*$ i $b = b^*$, pa po pretpostavci slijedi da su $\hat{a}$ i $\hat{b}$ realne funkcije. Stoga $\hat{x} = \hat{a} + i\hat{b}$ povlači $\overline{\hat{x}} = \overline{\hat{a}} - i\overline{\hat{b}} = \hat{a} - i\hat{b}$, a s druge strane je $x^* = a^* - ib^* = a - ib$ pa je $\widehat{x^*} = \hat{a} - i\hat{b}$. Slijedi tvrdnja. □

Lema 2.1.9. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna Banachova algebra s jedinicom i $x_0 \in \mathcal{A}$ invertibilan. Tada ako x_0 i ${x_0}^{-1}$ generiraju $\mathcal{A}$ (kao Banachovu algebru), onda je $\hat{x}_0$ homeomorfizam sa $\sigma(\mathcal{A})$ u $\sigma(x_0)$.*

Dokaz. Po teoremu 2.1.6, (iii), $\hat{x}_0$ je surjekcija na $\sigma(x_0)$. Kako je $\sigma(\mathcal{A})$ kompaktan, a $\sigma(x_0)$ Hausdorffov, dovoljno je pokazati da je $\hat{x}_0$ injekcija. Neka su stoga $g, h \in \sigma(\mathcal{A})$ takvi da $\hat{x}_0(g) = \hat{x}_0(h)$, tj. $h(x_0) = g(x_0)$. Iz propzicije 2.1.1, (ii), slijedi da je tada i $h({x_0}^{-1}) = g({x_0}^{-1})$, pa kako se g i h podudaraju na generatorima od $\mathcal{A}$, slijedi da je $g = h$. □

Primjer 2.1.10. *Označimo s $l^1(\mathbb{Z})$ skup $\{a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \mid \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty\}$. To je Banachov prostor uz normu $\|a\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|$. Definiramo množenje $(a * b)_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{k-n}$ uz koju $l^1(\mathbb{Z})$ postaje komutativna Banachova algebra (kasnije ćemo pokazati) s jedinicom δ, gdje je $\delta_n = 1$ za $n = 0$ i $\delta_n = 0$ za $n \neq 0$.*

Označimo li s δ^k element iz $l^1(\mathbb{Z})$ definiran s $\delta^k_n = 1$ za $n = k$ i $\delta^k_n = 0$ za $n \neq k$, vidimo da se svaki $a \in l^1(\mathbb{Z})$ može zapisati $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta^n$. Sada, ako je $n > 0$, lako se vidi da

$\delta^n = \delta^1 * \delta^1 * \ldots * \delta^1$, *a ako* $n < 0$ *slijedi da* $\delta^n = \delta^{-1} * \delta^{-1} * \ldots * \delta^{-1}$. *Primijetimo li još da* $\delta = \delta^1 * \delta^{-1}$ *vidimo da* δ^1 *i* δ^{-1} *generiraju cijeli* $l^1(\mathbb{Z})$*, pa smo u uvjetima leme 2.1.9.*

Sljedeći teorem govori da se Geljfandova transformacija na $l^1(\mathbb{Z})$ podudara s razvojem u Fourierov red.

Teorem 2.1.11. *Prostor* $\sigma(l^1(\mathbb{Z}))$ *može se poistovjetiti s jediničnom kružnicom* $\mathbb{T}$ *u* $\mathbb{C}$ *tako da za sve* $a \in l^1(\mathbb{Z})$ *i* $\theta \in \mathbb{R}$ *vrijedi* $\hat{a}(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$.

Dokaz. Prema primjeru 2.1.10 vidimo da δ^1 i δ^{-1} generiraju cijeli $l^1(\mathbb{Z})$ pa možemo primijeniti lemu 2.1.9. Slijedi da je $\sigma(\mathcal{A})$ homeomorfno s $\sigma(\delta^1)$. Dokažimo da je spektar elementa δ^1 jednak $\mathbb{T}$. Pretpostavimo da postoji element $a \in l^1(\mathbb{Z})$ takav da je $a * (\lambda\delta - \delta^1) = \delta$. To znači da vrijede jednadžbe:

$$\begin{aligned} \lambda a_0 - a_{-1} &= 1, \\ \lambda a_n - a_{n-1} &= 0, \quad n \neq 0. \end{aligned}$$

Iz toga lako rekurzivno slijedi:

$$\begin{aligned} a_n &= \lambda^{-n} a_0, && n \geq 0, \\ a_n &= \lambda^{-n-1} a_{-1}, && n \leq -1, \\ \lambda a_0 &= a_{-1} + 1. \end{aligned}$$

Činjenica $a \in l^1(\mathbb{Z})$ nam daje uvjete:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| &= \sum_{n=1}^{\infty} |a_0||\lambda|^{-n} < \infty, \\ \sum_{n=-1}^{-\infty} |a_n| &= \sum_{n=-1}^{-\infty} |a_{-1}||\lambda|^{-n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{-1}||\lambda|^{n-1} < \infty. \end{aligned}$$

Ako je $|\lambda| < 1$, prvi uvjet nam daje $|a_0| = 0$, pa je i $a_n = 0$ za sve $n \geq 0$. Iz $\lambda a_0 = a_{-1} + 1$ dobivamo $a_{-1} = -1$ i $a_n = -\lambda^{-n-1}$ za $n \leq -1$ pa smo izračunali inverz od $\lambda\delta - \delta^1$. Analogno se izračuna inverz za slučaj $|\lambda| > 1$. Zaključujemo da je $\sigma(l^1(\mathbb{Z})) \subseteq \mathbb{T}$. Vrijedi i $\sigma(l^1(\mathbb{Z})) = \mathbb{T}$, što slijedi iz činjenice da je slučaj $|\lambda| = 1$ nemoguć, jer bi gornja dva uvjeta povlačila $|a_{-1}| = |a_0| = 0$ što je kontradikcija s $\lambda a_0 = a_{-1} + 1$.

Sada znamo da je $\widehat{\delta^1}$ homeomorfizam sa $\sigma(l^1(\mathbb{Z}))$ na $\mathbb{T}$ pa za $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ postoji $h_\theta \in \sigma(l^1(\mathbb{Z}))$ takav da $\widehat{\delta^1}(h_\theta) = h_\theta(\delta^1) = e^{i\theta}$. Sada iz neprekidnosti, linearnosti i multiplikativnosti od h_θ

slijedi da je za $a \in l^1(\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned}\hat{a}(e^{i\theta}) &= \hat{a}(h_\theta) = h_\theta(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta^n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h_\theta(\delta^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h_\theta(\delta^1)^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}.\end{aligned}$$

□

2.2 Slučaj Banachovih algebri bez jedinice

Primijetimo da je u velikom dijelu prethodnih rezultata ključna bila pretpostavka da Banachova algebra ima jedinicu. U ovom je slučaju glavna ideja da se Banachova algebra bez jedinice uloži u Banachovu algebru sa jedinicom i to iskoristimo da se većina rezultata u prethodnom odjeljku prebaci i u ovaj slučaj.

Neka je $\mathcal{A}$ komutativna Banachova algebra bez jedinice. Definiramo $\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \times \mathbb{C}$ i to je vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ uz standardno uvedene operacije. Definiramo množenje i normu na $\tilde{\mathcal{A}}$ s

$$\begin{aligned}(x, a)(y, b) &= (xy + ax + by, ab), \\ \|(x, a)\| &= \|x\| + |a|.\end{aligned}$$

Tada $\tilde{\mathcal{A}}$ postaje komutativna Banachova algebra s jedinicom $e = (0, 1)$. U slučaju da je $\mathcal{A}$ Banachova *-algebra, možemo i u $\tilde{\mathcal{A}}$ uvesti strukturu Banachove *-algebre tako da definiramo invluciju:

$$(x, a)^* = (x^*, \overline{a}). \tag{2.1}$$

Prostor $\mathcal{A}$ izometrički se ulaže u $\tilde{\mathcal{A}}$ preslikavanjem $x \mapsto (x, 0)$ i ako je $\mathcal{A}$ Banachova *-algebra, ovo ulaganje je očito *-homomorfizam Banachovih algebri. Dakle, možemo pretpostaviti da je $\mathcal{A} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ i u tom slučaju je $\mathcal{A}$ ideal u $\tilde{\mathcal{A}}$ i to maksimalan, jer uzmemo li bilo koji vektor $x \in \tilde{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A}$ on očito zajedno s $\mathcal{A}$ generira cijeli $\tilde{\mathcal{A}}$ kao vektorski prostor. Posebno je po propoziciji 1.1.9 $\mathcal{A}$ zatvoren vektorski potprostor od $\tilde{\mathcal{A}}$.

Spektar od $\mathcal{A}$ (s oznakom $\sigma(\mathcal{A})$) definiramo analogno kao u slučaju s jedinicom; to je skup svih netrivijalnih homomorfizama algebri s $\mathcal{A}$ u $\mathbb{C}$ (opet ne zahtijevamo neprekidnost). Odredimo sada koja je veza između $\sigma(\mathcal{A})$ i $\sigma(\tilde{\mathcal{A}})$. Neka je $h \in \sigma(\mathcal{A})$. Tada se

h može proširiti do funkcije $\tilde{h}$ u $\sigma(\tilde{\mathcal{A}})$ s $\tilde{h}((x,a)) = h(x) + a$ (kao što smo napomenuli, podrazumijeva se identifikacija $x = (x,0)$ za $x \in \mathcal{A}$). Naime, za $x, y \in \mathcal{A}$ i $a, b \in \mathbb{C}$ vrijedi:

$$\begin{aligned}\tilde{h}((x,a)(y,b)) &= \tilde{h}((xy + ay + bx, ab)) = h(xy + ay + bx) + ab\\ &= h(x)h(y) + ah(y) + bh(x) + ab = (h(x) + a)(h(y) + b)\\ &= \tilde{h}((x,a))\tilde{h}((y,b)),\end{aligned}$$

i linearnost se analogno provjeri. Zbog propozicije 2.1.1, (i), ovo proširenje je jedinstveno. S druge strane ako imamo funkciju $\tilde{h} \in \sigma(\tilde{\mathcal{A}})$, onda je očito restrikcija $\tilde{h}\big|_{\mathcal{A}}$ multiplikativan funkcional na $\mathcal{A}$, pa jedino što može biti problematično je $\tilde{h}\big|_{\mathcal{A}} \equiv 0$ zbog $0 \notin \sigma(\mathcal{A})$), pa u tom slučaju, iz $\tilde{h}((0,1)) = 1$, mora biti $\tilde{h}((x,a)) = a$ za svaki $(x,a) \in \tilde{\mathcal{A}}$. Lako se provjeri da je to uistinu element skupa $\sigma(\tilde{\mathcal{A}})$.

Propozicija 2.2.1. *Skup $\sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}$, uz slabu* topologiju, je kompaktan Hausdorffov prostor koji je sadržan u jediničnoj zatvorenoj kugli dualnog prostora $\mathcal{A}^*$. Posebno, $\sigma(\mathcal{A})$ je lokalno kompaktan, Hausdorffov prostor u slaboj* topologiji.*

Dokaz. Prema prethodnoj diskusiji, preslikavanje $\Phi : \sigma(\tilde{\mathcal{A}}) \to \sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}$ definirano s $\Phi(\tilde{h}) = \tilde{h}\big|_{\mathcal{A}}$ je bijekcija. Štoviše, Φ je homeomorfizam jer je za hiperniz $(\tilde{h}_\alpha)_{\alpha \in A}$ u $\sigma(\tilde{\mathcal{A}})$ i $\tilde{h} \in \sigma(\tilde{\mathcal{A}})$, $\tilde{h}_\alpha \xrightarrow{w^*} \tilde{h}$, zbog linearnosti, ekvivalentno sa $\tilde{h}_\alpha(x) \to \tilde{h}(x)$ za sve $x \in \mathcal{A}$ i $\tilde{h}_\alpha((0,a)) \to \tilde{h}((0,a))$ za sve $a \in \mathbb{C}$. Ali, $\tilde{h}_\alpha((0,a)) \to \tilde{h}((0,a))$ je zadovoljeno zbog propozicije 2.1.1, (i), te stoga iz $\Phi(\tilde{h})(x) = \tilde{h}(x)$, $x \in \mathcal{A}$, slijedi da je $\tilde{h}_\alpha \xrightarrow{w^*} \tilde{h}$ ekvivalentno s $\Phi(\tilde{h}_\alpha) \xrightarrow{w^*} \Phi(\tilde{h})$, tj. Φ je homeomorfizam. Sada iz propozicije 2.1.5 slijedi kompaknost i Hausdorffovost.

Za drugu tvrdnju vidimo da je

$$|h(x)| = |\tilde{h}(x,0)| \leq \|(x,0)\| = \|x\|,$$

pri čemu nejednakost slijedi iz 2.1.1, (iii).

□

Geljfandova transformacija na $\mathcal{A}$ definira se isto kao u slučaju s jedinicom. To je preslikavanje $\mathcal{A} \to C(\sigma(\mathcal{A}))$ definirano s $\Gamma_{\mathcal{A}}(x)(h) = h(x)$, za $x \in \mathcal{A}$ i $h \in \sigma(\mathcal{A})$. Isto kao prije vidimo da je slika Geljfandove transformacije uistinu sadržana u skupu neprekidnih funkcija jer je topologija na $\sigma(\mathcal{A})$ slaba* topologija. Veza između Geljfandove transformacije na $\tilde{\mathcal{A}}$ i $\mathcal{A}$ je

$$\Gamma_{\mathcal{A}}(x)(h) = h(x) = \tilde{h}((x,0)) = \Gamma_{\tilde{\mathcal{A}}}(x,0)(\tilde{h}).$$

Možemo, dakle, promatrati $\Gamma_{\mathcal{A}}$ kao restrikciju funkcije $\Gamma_{\tilde{\mathcal{A}}}$ na $\mathcal{A}$, to jest, uz oznaku $\Gamma_{\mathcal{A}}(x) = \hat{x}$, vrijedi $\hat{x} = \widehat{(x,0)}\big|_{\sigma(\mathcal{A})}$ pri čemu na $\sigma(\mathcal{A})$ gledamo kao na (lokalno kompaktan) potprostor od $\sigma(\tilde{\mathcal{A}}) \cong \sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}$ (vidi dokaz prethodne propozicije). Kako je $\{0\}$ točka u beskonačnosti od $\sigma(\mathcal{A})$ i $\widehat{(x,0)}(0) = 0$, vidimo da $\hat{x}$ trne u beskonačnosti, tj. slika od $\Gamma_{\mathcal{A}}$ je sadržana u $C_0(\sigma(\mathcal{A}))$ (primijetimo da ako je $\{0\}$ izolirana točka u $\sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}$, onda je $\sigma(\mathcal{A})$ kompaktan skup i $C_0(\sigma(\mathcal{A})) = C(\sigma(\mathcal{A}))$).

Teorem 2.2.2. *Geljfandova transformacija $\Gamma_{\mathcal{A}}$ na Banachovoj algebri $\mathcal{A}$ bez jedinice je homomorfizam Banachovih algebri sa $\mathcal{A}$ u $C_0(\sigma(\mathcal{A}))$ za kojeg vrijedi*

$$\|\hat{x}\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}.$$

*Nadalje, ako je $\mathcal{A}$ Banachova *-algebra, onda je $\Gamma_{\mathcal{A}}$ *-homomorfizam (tj. $\mathcal{A}$ je* simetrična*) ako i samo ako vrijedi da je $\hat{x}$ realna funkcija čim je $x = x^*$. U tom je slučaju $\Gamma_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ gusta u $C_0(\sigma(\mathcal{A}))$.*

Dokaz. Budući da je $\Gamma_{\mathcal{A}}$ restrikcija od $\Gamma_{\tilde{\mathcal{A}}}$, prva tvrdnja i jednakost lako slijede iz teorema 2.1.6 i činjenice da $\|\hat{x}\|_\infty = \|\widehat{(x,0)}\|_\infty$ zbog $\widehat{(x,0)}(0) = 0$. Primijetimo da se u dokazu teorema 2.1.8, pod (i), nigdje ne koristi činjenica da Banachova *-algebra ima jedinicu, pa se isti dokaz u potpunosti isti može prenijeti i u slučaj bez jedinice. Preostaje dokazati gustoću od $\Gamma_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ u slučaju da je $\Gamma_{\mathcal{A}}$ *-homomorfizam. No, činjenica da je $\Gamma_{\mathcal{A}}$ *-homomorfizam, povlači da je $\Gamma_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ zatvoreno na kompleksno konjugiranje, a očito razlikuje točke. Da bismo mogli primijeniti Stone-Weierstrassov teorem (vidi 1.1.13), moramo dokazati da za svaki $h \in \sigma(\mathcal{A})$ postoji $x \in \mathcal{A}$ takav da $\hat{x}(h) = h(x) \neq 0$, a to vrijedi jer $0 \notin \sigma(\mathcal{A})$.

□

Poglavlje 3

Topološke grupe

U prvom odjeljku dokazujemo neka osnovna svojstva topoloških grupa i pokazujemo da pretpostavka Hausdorffovosti nije praktički nikakva restrikcija. U drugom odjeljku nabrajamo, bez dokaza, osnovna svojstva Haarove mjere na lokalno kompaktnim, Abelovim grupama, a u trećem odjeljku proučavamo funkcije i konvoluciju. U zadnjem odjeljku bavimo se funkcijama pozitivnog tipa i unitarnim reprezentacijama lokalno kompaktnih, Abelovih grupa i pokazujemo kako su povezana ta dva pojma. Među glavnim rezultatima zadnjeg odjeljka je teorem Geljfand-Raikov koji kaže da postoji dovoljno ireducibilnih, unitarnih reprezentacija Hausdorffovih, σ-kompaktnih, lokalno kompaktnih i Abelovih grupa da razlikuju točke.

U ovom (i sljedećem) poglavlju nećemo praviti razliku između skupova $\mathcal{L}^p$ i L^p. Također, slobodno ćemo mijenjati poredak integracije bez eksplicitnog pozivanja na Fubini-Tonellijev teorem (1.2.11).

3.1 Osnovna svojstva topoloških grupa

Definicija 3.1.1. *Grupa G je* topološka grupa *ako je zadana topologija na G takva da su operacije množenja $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$, i invertiranja $G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$, neprekidne.* Homomorfizam topoloških grupa *G i H je neprekidan homomorfizam grupa G i H. Ako je homomorfizam topoloških grupa bijektivan i inverz mu je isto homomorfizam topoloških grupa, onda ga zovemo* izomorfizmom topoloških grupa.

Uvodimo sljedeće standardne oznake. Neutralni element grupe G označit ćemo s e. Nadalje, ako imamo $A, B \subseteq G$ i $z \in G$, onda stavimo:

$$zA = \{zx \mid x \in A\}, \qquad Az = \{xz \mid x \in A\}$$
$$A^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in A\}, \qquad AB = \{xy \mid x \in A, y \in B\},$$

Propozicija 3.1.2. *Neka je G topološka grupa, $z \in G$ i $A, B, U \subseteq G$ neprazni. Tada:*

(i) *Preslikavanja $G \to G$ definirana s $x \mapsto zx$, $x \mapsto xz$ i $x \mapsto x^{-1}$ su homeomorfizmi. Posebno, (lijevo i desno) translatiranje čuva otvorenost, zatvorenost i kompaktnost skupova.*

(ii) *Ako je U otvoren u G, onda su i AU i UA otvoreni.*

(iii) *Ako su A i B kompaktni, onda je i AB kompaktan.*

Dokaz. Preslikavanja $x \mapsto zx$, $x \mapsto xz$ i $x \mapsto x^{-1}$ su neprekidne bijekcije čiji su inverzi redom $x \mapsto z^{-1}x$, $x \mapsto xz^{-1}$ i $x \mapsto x^{-1}$, tj. neprekidna preslikavanje. Slijedi (i). Skupove AU i UA možemo zapisati kao $\bigcup_{x \in A} xU$, odnosno $\bigcup_{x \in A} Ux$, pa tvrdnja (ii) slijedi jer su po (i) xU i Ux otvoreni. (iii) slijedi iz činjenice da je produkt $A \times B$ kompaktan u $G \times G$ i da funkcija $(x, y) \mapsto xy$ šalje kompaktne skupove u kompaktne jer je neprekidna. □

Prethodna nam propozicija omogućuje da sve okoline proizvoljne točke $x \in G$ možemo gledati u oblicima xU i Vx gdje su U i V okoline od e. Naime, za okolinu W od x jednostavno definiramo $U = x^{-1}W$ i $V = Wx^{-1}$; ovi skupovi su otvoreni jer su translacije homeomorfizmi.

Za podskup A grupe G kažemo da je *simetričan* ako vrijedi $x \in A \Leftrightarrow x^{-1} \in A$. Sa simetričnim podskupovima puno je praktičnije raditi, a sljedeća će nam propozicija omogućiti da se gotovo uvijek možemo svesti na slučaj simetričnih skupova.

Propozicija 3.1.3. *Neka je G topološka grupa.*

(i) *Ako je A podskup od G, onda su AA^{-1} i $A \cap A^{-1}$ simetrični skupovi koji su ujedno i neprazni u slučaju da $e \in A$.*

(ii) *Ako je U okolina od e, onda postoji otvorena, simetrična okolina V od e takva da $VV \subseteq U$.*

Dokaz. Elementi skupa AA^{-1} su oblika xy^{-1} za $x, y \in A$, pa tvrdnja (i) slijedi iz $(xy^{-1})^{-1} = yx^{-1}$; drugi dio tvdrnje (i) je očit. Ako je U okolina od e, onda zbog neprekidnosti preslikavanja $(x, y) \mapsto xy$ u točki (e, e) slijedi da postoje otvoreni skupovi V_1 i V_2, koji sadrže e, takvi da $V_1V_2 \subseteq U$. Sada je skup $V_1 \cap V_2$ otvoren i sadrži e. Po prvom dijelu ove propozicije dovoljno je uzeti za traženi skup $V = (V_1 \cap V_2) \cap (V_1 \cap V_2)^{-1}$. □

Sljedeće što ćemo proučavati su podgrupe topoloških grupa i pripadne kvocijentne grupe. Primijetimo da je svaka podgrupa topološke grupe isto topološka grupa.

Propozicija 3.1.4. *Neka je G topološka grupa i H njezina podgrupa.*

(i) $\mathrm{Cl}\,H$ *je podgrupa od G.*

(ii) *Ako je H otvoren skup u G, onda je nužno i zatvoren.*

(iii) *Ako je G Hausdorffov i H lokalno kompaktan u relativnoj topologiji, onda je H zatvoren u G.*

Dokaz. Neka je su $x, y \in \operatorname{Cl} H$ i neka su $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ i $(y_\beta)_{\beta \in J}$ hipernizovi u H takvi da $x_\alpha \to x$ i $y_\beta \to y$. Kako je H podgrupa, tada je $x_\alpha y_\beta \in H$ za sve $\alpha \in I, \beta \in J$, a zbog neprekidnosti množenja slijedi $x_\alpha y_\beta \to xy$, tj. $xy \in \operatorname{Cl} H$. Analogno se pokaže da je $\operatorname{Cl} H$ zatvoren i na inverze, pa vrijedi (i).

Za pod (ii), podsjetimo se da $G = \bigcup_{x \in G} xH$ i to je disjunktna unija. Dakle $H = G \setminus \bigcup_{x \in G \setminus \{e\}} xH$, a kako otvorenost H povlači otvorenost xH za sve $x \in G$, onda je i $\bigcup_{x \in G \setminus \{e\}} xH$ otvoren skup, tj. H je zatvorena podgrupa.

Dokažimo još (iii). Zbog lokalne kompaktnosti od H postoji skup U oko e koji je otvoren u G i takav da je $U \cap H$ sadržan u nekom kompaktnom skupu $K \subseteq H$. Uzmimo sada neki hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ u H koji konvergira prema nekom $x \in G$. Tada $xx_\alpha^{-1} \to e$ pa postoji neki $\beta \in I$ takav da je $xx_\beta^{-1} \in U$, tj. $x \in Ux_\beta$. Ux_β je otvoren i sadrži x pa postoji $\gamma \in I$ takav da $\gamma \leq \alpha$ povlači $x_\alpha \in Ux_\beta$, te imamo $x_\alpha \in Ux_\beta \cap H = (U \cap H)x_\beta \subseteq Kx_\beta$. Kx_β je kompaktan zbog neprekidnosti množenja, ali onda je zbog Hausdorffovosti od G zatvoren u G, pa je $\lim_{\alpha \in I} x_\alpha = x \in Kx_\beta \subseteq H$. □

Ako imamo podgrupu H topološke grupe G, onda imamo i kanonsku projekciju $\pi : G \to G/H$ definiranu s $\pi(x) = xH$, pa možemo na G/H inducirati kvocijentnu topologiju. Skup $\tilde{U} \subseteq G/H$ otvoren je u kvocijentnoj topologiji ako i samo ako je skup $\pi^{-1}(\tilde{U})$ otvoren u G. Općenito, projekcija kojom induciramo kvocijentnu topologiju je neprekidna, ali ne mora preslikavati otvorene skupove u otvorene skupove. Ipak, za topološke grupe to vrijedi.

Propozicija 3.1.5. *Neka je G topološka grupa i H njezina podgrupa. Tada kanonska projekcija $\pi : G \to G/H$, $\pi(x) = xH$, preslikava otvorene skupove u otvorene i:*

(i) *Ako je H zatvoren skup u G, onda je G/H Hausdorffov prostor.*

(ii) *Ako je G lokalno kompaktan prostor, onda je i G/H lokalno kompaktan. Nadalje, ako je G još i Hausdorffov i H zatvoren, onda za svaki kompaktan skup $E \subseteq G/H$ postoji $K \subseteq G$ kompaktan takav da $\pi(K) = E$.*

(iii) *Ako je H normalna podgrupa od G, onda je G/H topološka grupa.*

Dokaz. Neka je U otvoren u G, tada je $\pi(U) = \{xH \mid x \in U\}$, ali za $x \in U$ je $\pi^{-1}(\{xH\}) = xH$. Slijedi da je $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{x \in U} xH = UH$ otvoren skup po propoziciji 3.1.2, (ii), pa po definiciji topologije na G/H slijedi da je $\pi(U)$ otvoren.

Neka je H zatvorena podgrupa i $x, y \in G$ takvi da $xH \neq yH$, tj. $y^{-1}x \notin H$. Neka je U simetrična okolina od e, tada je xU okolina od x i yU okolina od y. Tražimo dovoljne i nužne uvjete na $\pi(xU)$ i $\pi(yU)$ da budu disjunktni, pa imamo:

$$\begin{aligned}\pi(xU)\cap\pi(yU)\neq\emptyset &\Leftrightarrow (\exists u,v\in U)xuH=yvH\\ \pi(xU)\cap\pi(yU)=\emptyset &\Leftrightarrow (\forall u,v\in U)xuH\neq yvH\\ &\Leftrightarrow (\forall u,v\in U)v^{-1}y^{-1}xu\notin H\\ &\Leftrightarrow Uy^{-1}xU\cap H=\emptyset.\end{aligned}$$

Sada, kako je množenje neprekidno u (y^{-1},x) te skup $G\setminus H$ otvoren i sadrži $y^{-1}x$, postoje okoline V i W od e takve da je $(Vy^{-1})(xW)\subseteq G\setminus H$, tj. $(Vy^{-1})(xW)\cap H=\emptyset$. $V\cap W$ također je okolina od e, pa možemo uzeti $U=(V\cap W)\cap(V\cap W)^{-1}$ kao traženu okolinu od e takvu da su $\pi(xU)$ i $\pi(yU)$ disjunktne otvorene okoline od xH i yH. Slijedi (i).

Prvi je dio od (ii) jednostavan jer ako imamo $xH\in G/H$, onda uzmemo neki kompaktan skup K u G koji sadrži e, pa je tada $\pi(xK)$ kompaktan skup koji sadrži xH. Neka je G Hausdorffov, H zatvoren i $E\subseteq G/H$ kompaktan. Tada postoji U otvorena okolina od e takva da je $\mathrm{Cl}\,U$ kompaktan, a po (i) znamo da je G/H Hausdorffov i stoga je E zatvoren. π je otvoreno preslikavanje, pa možemo E pokriti sa skupovima $\pi(x_iU)$, $i=1,2,\dots,n$, za neke $x_i\in G$, $n\in\mathbb{N}$. Sada je traženi skup $K=\pi^{-1}(E)\cap\cup_{i=1}^n x_i\,\mathrm{Cl}\,U$ jer je, po neprekidnosti, $\pi^{-1}(E)$ zatvoren, pa je K zatvoren podskup kompaktnog skupa.

Pokažimo još (iii). Iz opće teorije znamo da, ako je H normalna podgrupa, tada je po definiciji $xH=Hx$ za sve $x\in G$, i G/H je grupa s dobro definiranim operacijama množenja $(xH,yH)\mapsto(xyH)$ i invertiranja $xH\mapsto x^{-1}H$. Stoga treba još samo pokazati da su te operacije neprekidne. Neka su $x,y\in G$ i $\tilde{W}$ okolina od xyH. Tada je $\pi^{-1}(\tilde{W})$ okolina od xy u G, pa po neprekidnosti množenja postoje okoline U od x i V od y takve da je $UV\subseteq\pi^{-1}(\tilde{W})$. Budući da je π surjekcija i homomorfizam grupa, slijedi $\pi(U)\pi(V)\subseteq\tilde{W}$, tj. možemo uzeti $\pi(U)\times\pi(V)$ za traženu okolinu točke (xH,yH). Neprekidnost invertiranja pokaže se potpuno analogno. □

Sljedeća nam propozicija daje opravdanje da, bez prevelikog smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je topološka grupa Hausdorffova. Budući da se tražena Hausdorffova grupa konstruira kvocijentiranjem početne, prethodna propozicija pod (ii) nam kaže da će ta kvocijentna grupa naslijediti i lokalnu kompaktnost.

Propozicija 3.1.6. *Neka je G topološka grupa. Tada vrijedi:*

(i) *Ako je G T_1 prostor, onda je G Hausdorffov. Ako G nije T_1 prostor, onda je* $\mathrm{Cl}\,\{e\}$ *normalna podgrupa od G i $G/\mathrm{Cl}\,\{e\}$ je Hausdorffova topološka grupa koja se sastoji od (disjunktnih) skupova* $\mathrm{Cl}\,\{x\}$*, $x\in G$.*

(ii) *Neka je $\mathcal{B}(G)$ familija Borelovih skupova generirana otvorenim skupovima u G i neka je $x\in G$. Tada je svaka $(\mathcal{B}(G),\mathcal{B}(\mathbb{C}))$-izmjeriva funkcija $f:G\to\mathbb{C}$ konstantna na* $\mathrm{Cl}\,\{x\}$.

Dokaz. Ako je G T_1 prostor, onda je $\{e\}$ normalna zatvorena podgrupa od G i po prethodnoj propoziciji slijedi da je $G/\{e\}$ Hausdorffova topološka grupa te da je kvocijentno preslikavanje $\pi : G \to G/\{e\}$ homeomorfizam (jer je otvoreno preslikavanje). Sada tvrdnja slijedi jer homeomorfizam čuva Hausdorffovost. Ako G nije T_1, onda je $\mathrm{Cl}\{e\}$ podgrupa prema propoziciji 3.1.4. Neka je $x \in G$ i $y \in \mathrm{Cl}\{e\}$. Tada konstantan niz e konvergira prema y, pa zbog neprekidnosti množenja slijedi da $xex^{-1} \to xyx^{-1}$, tj. $e \to xyx^{-1}$. Slijedi $xyx^{-1} \in \mathrm{Cl}\{e\}$ za sve $x \in G$ pa time i normalnost. Na kraju primijetimo da vrijedi $G/\mathrm{Cl}\{e\} = \{x\mathrm{Cl}\{e\} \mid x \in G\} = \{\mathrm{Cl}\{x\} \mid x \in G\}$ jer je translatiranje homeomorfizam. Slijedi tvrdnja (i).

Za dokazati (ii) pretpostavimo suprotno, tj. neka postoji $x \in G$ i $f : G \to \mathbb{C}$ Borel-izmjeriva koja nije konstantna na $\mathrm{Cl}\{x\}$. Ako je $z \in \mathbb{C}$ neka vrijednost koju f postiže na $\mathrm{Cl}\{x\}$, onda je skup $f^{-1}(\{z\}) \cap \mathrm{Cl}\{x\}$ neprazan izmjeriv skup, strogo sadržan u $\mathrm{Cl}\{x\}$. Pokazat ćemo da ne postoje neprazni izmjerivi skupovi strogo sadržani u $\mathrm{Cl}\{x\}$, što će biti kontradikcija, i time će naša tvrdnja biti dokazana. Definiramo familiju skupova $\mathcal{F}$ na G s

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq G \mid A \cap \mathrm{Cl}\{x\} = \emptyset \text{ ili } \mathrm{Cl}\{x\} \subseteq A\}.$$

Očito je $\mathcal{F}$ σ-algebra. Ako dokažemo da $\mathcal{F}$ sadrži sve otvorene skupove, onda će $\mathcal{F}$ sadržavati i sve Borel-izmjerive skupove, što posebno znači da ne postoji neprazan izmjeriv skup strogo sadržan u $\mathrm{Cl}\{x\}$. Neka je U neprazan otvoren skup u G. Ako $x \notin U$, tada po definiciji zatvarača slijedi $\mathrm{Cl}\{x\} \cap U = \emptyset$, pa je $U \in \mathcal{F}$. Pretpostavimo sada $x \in U$ i primijetimo da prema prethodnom slučaju ($x \notin U$) i prema (i) vrijedi $G \setminus U = \bigcup_{y \in G\setminus U} \mathrm{Cl}\{y\}$. Sada, ako bi $\mathrm{Cl}\{x\} \setminus U \neq \emptyset$, onda bi postojao takav $y \in G \setminus U$ da $\mathrm{Cl}\{x\} \cap \mathrm{Cl}\{y\} \neq \emptyset$, što je nemoguće prema dijelu (i) ove propozicije. □

Propozicija 3.1.7. *Neka je G lokalno kompaktna, Hausdorffova grupa. Tada postoji podgrupa H koja je otvorena, zatvorena i σ-kompaktna. Posebno, ako je G povezan skup, onda je G σ-kompaktan.*

Dokaz. Neka je K kompaktan i simetričan skup u čijem je interioru e (to možemo pretpostaviti jer je G i lokalno kompaktan i Hausdorffov). Definiramo niz skupova $K_1 = K$, $K_{n+1} = K_nK$, $n \in \mathbb{N}$. Sada, kako je svaki K_n očito simetričan, slijedi da je skup definiran s $H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ podgrupa od G. Iz propozicije 3.1.2, (iii), slijedi da je svaki K_n kompaktan, pa je H σ-kompaktan skup. Zbog propozicije 3.1.4 dovoljno je još dokazati da je H otvoren. Označimo nutrinu od K s U i neka je $x \in H$ proizvoljan. Tada je $x \in K_n$ za neki $n \in \mathbb{N}$, pa je $xU \subseteq xK \subseteq K_{n+1} \subseteq H$, tj. xU je otvorena okolina od x sadržana u H. □

3.2 Haarova mjera

Budući da ćemo se nadalje baviti isključivo Abelovim grupama, grupovne operacije pisat ćemo aditivno i za neutralni element koristimo oznaku 0. Dokazi svih tvrdnji, koji se nalaze u ovom odjeljku, mogu se naći u [3].

Definicija 3.2.1. *Neka je G topološka (Abelova) grupa i $\mathcal{B}(G)$ familija Borelovih skupova na G.* Haarova mjera *na G je netrivijalna Radonova mjera $\lambda : \mathcal{B}(G) \to [0, \infty]$ koja je invarijantna na translatiranje, tj. vrijedi*

$$(\forall x \in G)(\forall A \in \mathcal{B}(G))\ \lambda(x + A) = \lambda(A).$$

Teorem 3.2.2. *Neka je G lokalno kompaktna grupa. Tada postoji Haarova mjera λ na G i ona je jedinstvena do na multiplikativnu konstantu, tj. ako je ρ neka druga Haarova mjera na G, onda postoji konstanta $c \in \langle 0, \infty \rangle$ takva da je $\rho(A) = c\lambda(A)$, za sve $A \in \mathcal{B}(G)$.*

Imamo sljedeća svojstva Haarove mjere.

Propozicija 3.2.3. *Neka je λ Haarova mjera na lokalno kompaktnoj grupi G. Tada za svaki neprazan otvoren skup U je $\lambda(U) > 0$. Posebno, ako je $f : G \to [0, \infty\rangle$ neprekidna funkcija koja nije identički nula, onda je $\int_G f \mathrm{d}\lambda > 0$.*

Sljedeća nam propozicija kaže da možemo raditi supstitucije $x \mapsto x + y$ i $x \mapsto -x$ ako integriramo po cijelom G.

Propozicija 3.2.4. *Neka je λ Haarova mjera na lokalno kompaktnoj grupi G i f proizvoljna nenegativna (ili λ-integrabilna) izmjeriva funkcija. Tada je $\int_G f(x+y)\mathrm{d}\lambda(x) = \int_G f(x)\mathrm{d}\lambda(x)$ za sve $y \in G$ i $\int_G f(x)\mathrm{d}\lambda(x) = \int_G f(-x)\mathrm{d}\lambda(x)$.*

Na kraju ćemo još spomenuti kako se dobije Haarova mjera na produktu dvije topološke grupe. Prisjetimo se da je produkt dva lokalno kompaktna prostora opet takav. Također, produkt dvije topološke grupe je opet topološka grupa; to lako slijedi iz činjenice da hiperniz u produktnoj topologiji konvergira ako i samo ako konvergira po koordinatama.

Propozicija 3.2.5. *Neka su G i H dvije lokalno kompaktne, Abelove grupe i neka su λ i ρ Haarove mjere na njima. Tada je Haarova mjera na $G \times H$ Radonov produkt $\lambda \hat{\times} \rho$ mjera λ i ρ.*

3.3 L^p prostori i konvolucija na lokalno kompaktnim, Abelovim grupama

U ovom odjeljku podrazumijevamo da radimo na Hausdorffovoj, lokalno kompaktnoj, σ-kompaktnoj i Abelovoj grupi G i s nekom fiksiranom Haarovom mjerom λ na G. Budući da ćemo gotovo uvijek integrirati po cijelom G, kada god ne piše po kojem području se integrira, misli se na integriranje po cijelom G.

Definicija 3.3.1. Operator translacije τ_y za element $y \in G$ *je linearan operator na prostoru svih funkcija na* G *definiran na sljedeći način. Ako je* $f : G \to \mathbb{C}$ *proizvoljna funkcija, onda je* $(\tau_y f)(x) = f(x - y)$.

Primijetimo da se pomoću translacije može definirati uniformna neprekidnost funkcije. Naime, $f : G \to \mathbb{C}$ je uniformno neprekidna ako i samo ako vrijedi $\lim_{y\to 0} \|f - \tau_y f\|_\infty = 0$.

Propozicija 3.3.2. *Ako je* $f : G \to \mathbb{C}$ *neprekidna funkcija s kompaktnim nosačem, onda je ona uniformno neprekidna.*

Dokaz. Neka je K kompaktan nosač od f i neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan. Kako je f neprekidna u svakoj točki od K, za svaki $x \in K$ postoji okolina U_x od 0 takva da $|f(x+y)-f(x)| < \epsilon/2$ za sve $y \in U_x$. Po propoziciji 3.1.3, (ii), postoji simetrična okolina V_x od 0 takva da $V_x + V_x \subseteq U_x$. Skup K je kompaktan i $\{V_x \mid x \in G\}$ je otvoreni pokrivač za K pa postoji konačan podskup $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, n \in \mathbb{N}$, skupa K takav da familija $\{x_1 + V_{x_1}, x_2 + V_{x_2}, \dots, x_n + V_{x_n}\}$ pokriva K. Sada uzmemo $V = \bigcap_{k=1}^n V_k$ i primijetimo da je V simetrična i da vrijedi $V+V_{x_k} \subseteq U_{x_k}$ za sve $k = 1, 2, \dots, n$. Ako su sada $y \in V$ i $x \in K$ proizvoljni, uzmemo x_k takav da je $x \in x_k + V_{x_k}$, tj. $x - x_k \in V_{x_k} \subseteq U_{x_k}$. Također vrijedi $x + y - x_k = (x - x_k) + y \in U_{x_k}$, pa iz neprekidnosti u x_k je:

$$|f(x + y) - f(x)| \leq |f(x + y) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Primijetimo da gornja nejednakost zapravo vrijedi za sve $x \in \bigcup_{k=1}^n (x_k + V_{x_k})$, te stoga još trebamo pokazati gornju nejednakost na $G \setminus \bigcup_{k=1}^n (x_k + V_{x_k})$; za to nam treba okolina W od 0 takva da $W + K \subseteq \bigcup_{k=1}^n (x_k + V_{x_k})$. Neka su W_x simetrične okoline od 0 takve da $W_x + W_x \subseteq V_x$ za sve $x \in K$. Tada postoje $y_1, y_2, \dots, y_m \in K$, $m \in \mathbb{N}$, takve da familija $\{y_1 + W_{y_1}, y_2 + W_{y_2}, \dots, y_m + W_{y_m}\}$ pokriva K. Sada se za $W = \bigcap_{l=1}^m W_{y_l}$ lako provjeri da je simetrična i da vrijedi $W + K \subseteq \bigcup_{k=1}^n (x_k + V_{x_k})$. Ako uzmemo $x \in G \setminus \bigcup_{k=1}^n (x_k + V_{x_k})$ i $y \in W$, onda po odabiru W vidimo da $x + y \notin K$. Dakle, $f(x) = 0$ i $f(x + y) = 0$, tj. $|f(x + y) - f(x)| < \epsilon$, za sve $y \in W$. Znači za traženu okolinu 0 možemo uzeti $V \cap W$. $\square$

Sličan rezultat imamo i za $L^p(G) = L^p(G, \mathcal{B}(G), \lambda)$ prostor.

Propozicija 3.3.3. *Neka je* $p \in [1, \infty\rangle$ *i* $f \in L^p(G)$. *Tada je* $\lim_{y\to 0} \|f - \tau_y f\|_p = 0$.

Dokaz. Prvo dokazujemo za $f \in C_c(G)$, pa ćemo argumentom gustoće prijeći na cijeli $L^p(G)$. Neka je U okolina od 0 takva da je $\mathrm{Cl}\, U$ kompaktan skup i stavimo $K = \mathrm{Cl}\, U + \operatorname{supp} f$. Primijetimo da je K kompaktan i da je $\operatorname{supp} \tau_y f$ sadržan u K. Stoga je $\|\tau_y f - f\|_p \leq \lambda(K)^{1/p} \|\tau_y f - f\|_\infty$, pa iz prethodne propozicije slijedi tvrdnja.

Ako je $f \in L^p(G)$, uzmimo $\epsilon > 0$ i $g \in C_c(G)$ takav da je $\|f - g\|_p < \epsilon$. Kako se $L^p(G)$ norma ne mijenja translatiranjem, dobivamo:

$$\begin{aligned}\|\tau_y f - f\|_p &= \|\tau_y(f-g) + \tau_y g - g + g - f\|_p \\ &\le \|\tau_y(f-g)\|_p + \|\tau_y g - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &< 2\epsilon + \|\tau_y g - g\|_p,\end{aligned}$$

pa tvrdnja slijedi. □

Prethodna dva rezultata možemo interpretirati i kao neprekidnost translatiranja u 0 na prostorima $C_c(G)$ i $L^p(G)$, $p \in [1, \infty\rangle$. Iz toga slijedi trivijalno da je translacija neprekidna na cijelom G.

Neka je $M(G)$ prostor svih kompleksnih Radonovih mjera na $\mathcal{B}(G)$ i prisjetimo se da su te mjere konačne. Neka su μ i ν iz $M(G)$ proizvoljne. Definiramo linearan funkcional $I : C_0(G) \to \mathbb{C}$ s $I(\phi) = \int\int \phi(x+y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y)$, $\phi \in C_0(G)$. Budući da očito vrijedi $|I(\phi)| \le \|\phi\|_\infty \|\mu\| \|\nu\|$, slijedi da je $I \in C_0(G)^*$, pa po Rieszovom teoremu reprezentacije (vidi 1.2.9) postoji jedinstvena kompleksna Radonova mjera $\mu * \nu$ takva da $I(\phi) = \int \phi \mathrm{d}(\mu * \nu)$.

Definicija 3.3.4. *Jedinstvenu kompleksnu Radonovu mjeru $\mu * \nu$ koja zadovoljava $\int\int \phi(x+y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y) = \int \phi \mathrm{d}(\mu * \nu)$, zovemo* konvolucijom *mjera μ i ν.*

Propozicija 3.3.5. *Množenje na $M(G)$ zadano s konvolucijom daje na $M(G)$ strukturu komutativne Banachove *-algebre s jedinicom.*

Dokaz. Iz $|I(\phi)| \le \|\phi\|_\infty \|\mu\| \|\nu\|$ slijedi da je $\|I\| \le \|\mu\| \|\nu\|$, pa zbog izometričnosti $M(G)$ i $C_0(G)^*$ slijedi $\|\mu * \nu\| \le \|\mu\| \|\nu\|$. Slijedi da je $\int\int \phi(x+y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y) = \int\int \phi(y+x)\mathrm{d}\nu(y)\mathrm{d}\mu(x)$, tj. komutativnost konvolucije. Dokažimo i asocijativnost. Ako su μ, ν i σ kompleksne Radonove mjere, onda za $\phi \in C_0(G)$ vrijedi:

$$\begin{aligned}\int \phi \mathrm{d}(\mu * (\nu * \sigma)) &= \int\int \phi(x+y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}(\nu * \sigma)(y) \\ &= \int\int \phi(x+y)\mathrm{d}(\nu * \sigma)(y)\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int\int\int \phi(x+y+z)\mathrm{d}\nu(y)\mathrm{d}\sigma(z)\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int\int\int \phi(x+y+z)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y)\mathrm{d}\sigma(z) \\ &= \int\int \phi(y+z)\mathrm{d}(\mu * \nu)(y)\mathrm{d}\sigma(z) \\ &= \int \phi \mathrm{d}((\mu * \nu) * \sigma).\end{aligned}$$

Kako su Radonove mjere jedinstveno određene svojim djelovanjem na $C_0(G)$, slijedi asocijativnost. Distributivnost dobivamo lako iz $\int \phi \mathrm{d}(\mu + \nu) = \int \phi \mathrm{d}\mu + \int \phi \mathrm{d}\nu$.

Prisjetimo se da je mjera koncentrirana u točki $0 \in G$ definirana s $\delta_0(A) = 1$ ako $0 \in A$, i $\delta_0(A) = 0$ inače, $A \in \mathcal{B}(G)$. Lako se pokaže da $\delta_0 \in M(G)$. Dokažimo da za sve $\phi \in C_0(G)$ vrijedi $\int \phi \mathrm{d}\delta_0 = \phi(0)$; treba primijetiti da za svaku okolinu U od 0 vrijedi $\int_G \phi \mathrm{d}\delta_0 = \int_U \phi \mathrm{d}\delta_0$ i $\int_U \phi(0) \mathrm{d}\delta_0 = \phi(0)$, pa ako uzmemo $\epsilon > 0$ i U okolinu od 0 takvu da $|\phi(x) - \phi(0)| < \epsilon$ za sve $x \in U$, onda:

$$\left| \int_G \phi \, \mathrm{d}\delta_0 - \phi(0) \right| \leq \int_U |\phi(x) - \phi(0)| \mathrm{d}\delta_0(x) < \epsilon,$$

i puštajući $\epsilon \to 0$ slijedi $\int_G \phi \mathrm{d}\delta_0 = \phi(0)$. Sada lako vidimo da je δ_0 jedinica u $M(G)$:

$$\int \phi \mathrm{d}(\delta_0 * \mu) = \int \int \phi(x + y) \mathrm{d}\delta_0(x) \mathrm{d}\mu(y) = \int \phi(y) \mathrm{d}\mu(y).$$

Preostaje nam još pokazati da je $M(G)$ *-algebra. Involuciju na $M(G)$ $\mu \mapsto \mu^*$ definiramo s $\mu^*(A) = \overline{\mu(-A)}$. Lako se pokaže da onda za $\phi \in C_0(G)$ vrijedi $\int \phi \mathrm{d}\mu^* = \int \phi(-x) \mathrm{d}\overline{\mu}(x)$, pa imamo:

$$\begin{aligned}
\int \phi \mathrm{d}(\mu * \nu)^* &= \int \phi(-x) \mathrm{d}\overline{\mu * \nu}(x) \\
&= \int \int \phi(-x - y) \mathrm{d}\overline{\mu}(x) \mathrm{d}\overline{\nu}(y) \\
&= \int \int \phi(x - y) \mathrm{d}\mu^*(x) \mathrm{d}\overline{\nu}(y) \\
&= \int \int \phi(x - y) \mathrm{d}\overline{\nu}(y) \mathrm{d}\mu^*(x) \\
&= \int \int \phi(x + y) \mathrm{d}\nu^*(y) \mathrm{d}\mu^*(x) \\
&= \int \phi \mathrm{d}(\nu^* * \mu^*).
\end{aligned}$$

Slijedi $(\mu * \nu)^* = \nu^* * \mu^*$. □

Propozicija 3.3.6. *Formula $\int \int \phi(x + y) \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\nu(y) = \int \phi \mathrm{d}(\mu * \nu)$ u definiciji konvolucije kompleksnih Radonovih mjera μ i ν vrijedi i za sve ϕ ograničene neprekidne funkcije.*

Dokaz. Zbog σ-kompaktnosti i Urysohnove leme možemo uzeti niz funkcija $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz $C_c(G)$ koji konvergira po točkama prema konstantnoj funkciji 1 i koji je ograničen s 1. Stoga za ograničenu neprekidnu funkciju ϕ vrijedi $f_n \phi \to \phi$ po točkama pri čemu su $f_n \phi$ funkcije s kompaktnim nosačem dominirane integrabilom funkcijom ϕ pa možemo primijeniti teorem o dominiranoj konvergenciji da dobijemo tvrdnju. □

Prisjetimo se da je $L^1(G) = L^1(G, \mathcal{B}(G), \lambda)$ Banachov potprostor od $M(G)$. Konvolucija na $L^1(G)$ definira se ovako:

$$(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y)\mathrm{d}\lambda(y).$$

Ovo je konačno gotovo svugdje jer se iz Fubini-Tonellijevog teorema (i propozicije 3.2.4) lako dobije da je $f * g \in L^1(G)$ i $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$. Pokažimo još da se ova definicija podudara s prethodnom (uz identifikaciju funkcije $f \in L^1(G)$ s mjerom $f(x)\mathrm{d}\lambda(x)$). Za $\phi \in C_0(G)$ i $f, g \in L^1(G)$ imamo:

$$\begin{aligned}
\int \phi(x+y)f(x)g(y)\mathrm{d}\lambda(x)\mathrm{d}\lambda(y) &= \int \phi(x+y)f(x)g(y-x)\mathrm{d}\lambda(x)\mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \int \phi(y)(f * g)(y)\mathrm{d}\lambda(y),
\end{aligned}$$

pri čemu smo koristili supstituciju $y \mapsto y - x$. Slično se pokaže da je involucija na $L^1(G)$ preslikavanje $f \mapsto f^*$ takvo da za sve $x \in G$ vrijedi $f^*(x) = \overline{f(-x)}$. Dakle, $L^1(G)$ je *-podalgebra od $M(G)$.

Propozicija 3.3.7. *Neka je $p \in [1, \infty]$, $f \in L^1(G)$ i $g \in L^p(G)$. Tada je $f * g$ dobro definirano te vrijedi $f * g \in L^p(G)$ i $\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$.*

Dokaz. Budući da je slučaj $p = \infty$ trivijalan, za $p < \infty$ imamo po nejednakosti Minkowskog (vidi teorem 1.2.4):

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_p &= \left(\int \left| \int f(y)g(x-y)\mathrm{d}\lambda(y) \right|^p \mathrm{d}\lambda(x) \right)^{1/p} \\
&\le \int \left(\int |f(y)g(x-y)|^p \,\mathrm{d}\lambda(x) \right)^{1/p} \mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \int |f(y)| \left(\int |g(x-y)|^p \mathrm{d}\lambda(x) \right)^{1/p} \mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \int |f(y)| \left(\int |g(x)|^p \mathrm{d}\lambda(x) \right)^{1/p} \mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \|f\|_1 \|g\|_p.
\end{aligned}$$

□

Propozicija 3.3.8. *Neka su $p, q \in [1, \infty]$ takvi da $1/p + 1/q = 1$ i neka $f \in L^p(G)$ i $g \in L^q(G)$. Tada je $f * g \in C(G)$ i $\|f * g\|_\infty \le \|f\|_p \|g\|_q$. Nadalje, ako su p i q konačni, vrijedi jača tvrdnja $f * g \in C_0(G)$.*

Dokaz. Pokažimo da je $f * g$ neprekidna u slučaju $p = 1, q = \infty$ i $f \in C_c(G)$. Neka je $\epsilon > 0$ i U okolina od 0 takva da čim je $x_1 - x_2 \in U$, onda $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \epsilon$ za sve $x_1, x_2 \in G$ (f je uniformno neprekidna po propoziciji 3.3.2). Uz $K = (x_1 - \operatorname{supp} f) \cup (x_2 - \operatorname{supp} f)$ neprekidnost slijedi iz:

$$\begin{aligned}
|(g * f)(x_1) - (g * f)(x_2)| &= \left| \int (g(y)f(x_1 - y) - g(y)f(x_2 - y))\, \mathrm{d}\lambda(y) \right| \\
&= \left| \int_K g(y)\,(f(x_1 - y) - f(x_2 - y))\, \mathrm{d}\lambda(y) \right| \\
&\leq \int_K |g(y)|\,|f(x_1 - y) - f(x_2 - y)| \mathrm{d}\lambda(y) \\
&< \epsilon\, \|g\|_\infty\, \lambda(K) \\
&\leq 2\epsilon\, \|g\|_\infty\, \lambda(\operatorname{supp} f).
\end{aligned}$$

Sada, budući da je $C_c(G)$ gust u $L^1(G)$, možemo uzeti niz (f_n) u $C_c(G)$ koji u $L^1(G)$ normi konvergira prema nekoj fiksnoj $f \in L^1(G)$, pa za $x \in G$ proizvoljan imamo:

$$\begin{aligned}
|(f_n * g)(x) - (f * g)(x)| &= \left| \int (f_n(y)g(x - y) - f(y)g(x - y))\, \mathrm{d}\lambda(y) \right| \\
&\leq \|g\|_\infty \int |f_n(y) - f(y)| \mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \|g\|_\infty\, \|f_n - f\|_1.
\end{aligned}$$

Pustimo li $n \to \infty$, dobivamo niz neprekidnih funkcija koji konvergira uniformno prema $f * g$, pa je $f * g$ neprekidna.

Neka su sada p i q konačni i neka je $x \in G$. Iz Hölderove nejednakosti (i propozicije 3.2.4) slijedi:

$$\begin{aligned}
\int |f(y)g(x - y)| \mathrm{d}\lambda(y) &\leq \left(\int |f|^p \mathrm{d}\lambda \right)^{1/p} \left(\int |g(x - y)|^q \mathrm{d}\lambda(y) \right)^{1/q} \\
&= \left(\int |f|^p \mathrm{d}\lambda \right)^{1/p} \left(\int |g|^q \mathrm{d}\lambda \right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Dakle, $f * g$ je uniformno ograničena s $\|f\|_p\, \|g\|_q$. Dokažimo još da je $f * g \in C_0(G)$. Ako su $f, g \in C_c(G)$, primijetimo da vrijedi $f * g \in C_c(G)$. Naime, iz prethodnog je slučaja $f * g$ neprekidna, a iz definicije lako slijedi da ima kompaktan nosač. Sada uzmemo proizvoljne $f \in L^p(G)$ i $g \in L^q(G)$ i nizove (f_n) i (g_n) u $C_c(G)$ takve da $f_n \to f$ i $g_n \to g$ u L^p, odnosno L^q normi. Za $x \in G$ imamo:

$$\begin{aligned}
|(f_n * g_n)(x) - (f * g)(x)| &= |(f_n * (g_n - g)) + ((f_n - f) * g)(x)| \\
&\leq \|f_n\|_p\, \|g_n - g\|_q + \|f_n - f\|_p\, \|g\|_q.
\end{aligned}$$

Iz ovoga vidimo da je konvergencija uniformna, a kako je $\mathrm{Cl}\, C_c(G) = C_0(G)$ (teorem 1.2.7), dobivamo tvrdnju. $\square$

Primijetimo da općenito $\delta_0 \in M(G)$ nije u $L^1(G)$, pa kao zamjenu za jedinicu u algebri $L^1(G)$ koristimo (hiper)niz koji aproksimira jedinicu.

Definicija 3.3.9. *Neka je $\mathscr{U}$ proizvoljna baza okolina za $0 \in G$ i neka je za svaki $U \in \mathscr{U}$ zadana funkcija ψ_U takva da je $\operatorname{supp}\psi_U$ kompaktan i sadržan u U te svojstvima $\psi_U \geq 0$, $\psi_U(x) = \psi_U(-x)$ i $\int \psi_U \mathrm{d}\lambda = 1$. Tada hiperniz $(\psi_U)_{U\in\mathscr{U}}$ zovemo* aproksimacija identitete*, pri čemu je usmjerenje hiperniza dano s $U \leq V \Leftrightarrow V \subseteq U$.*

Imamo sljedeću standardnu konstrukciju aproksimacije identitete. Za $U \in \mathscr{U}$ uzmemo neku simetričnu otvorenu okolinu od 0, $V = V(U)$, takvu da je $\mathrm{Cl}\, V \subseteq U$ i stavimo $\psi_U = (\lambda(V))^{-1}\chi_V$, gdje je χ_V karakteristična funkcija skupa V. Ako želimo da je ψ_U neprekidna, trebamo primijeniti Urysohnovu lemu za lokalno kompaktne, Hausdorffove prostore na skupu V, i onda normalizacijom dobivamo funkciju ϕ_U koja zadovoljava sve uvjete osim možda $\phi_U(x) = \phi_U(-x)$, ali to lako dobivamo stavljajući $\psi_U(x) = (\phi_U(x) + \phi_U(-x))/2$.

Propozicija 3.3.10. *Neka je $(\psi_U)_{U\in\mathscr{U}}$ aproksimacija identitete. Tada vrijedi $\lim_U \|\psi_U * f - f\|_p = 0$ ako je $f \in L^p(G)$ za $p \in [1, \infty]$, pri čemu u slučaju $f \in L^\infty(G)$ moramo još dodatno pretpostaviti da je f uniformno neprekidna.*

Dokaz. Iz svojstava aproksimacije identitete slijedi

$$\begin{aligned}\psi_U * f(x) - f(x) &= \int \psi_U(y) f(x-y)\mathrm{d}\lambda(y) - \int \psi_U(y) f(x)\mathrm{d}\lambda(y)\\ &= \int \psi_U(y)(\tau_y f(x) - f(x))\mathrm{d}\lambda(y),\end{aligned}$$

pa iz nejednakosti Minkowskog imamo

$$\begin{aligned}\|\psi_U * f - f\|_p &\leq \int \psi_U(y)\|\tau_y f - f\|_p \mathrm{d}\lambda(y)\\ &\leq \sup_{y\in U} \|\tau_y f - f\|_p.\end{aligned}$$

Sada iz propozicije 3.3.3, odnosno uniformno neprekidnosti u slučaju $p = \infty$, slijedi tvrdnja. $\square$

3.4 Unitarne reprezentacije i funkcije pozitivnog tipa

Počinjemo s definicijom unitarne reprezentacije grupe. Naravno, koristimo iste oznake i pretpostavke iz prethodnog odjeljka.

Definicija 3.4.1. Unitarna reprezentacija *grupe G je homomorfizam topoloških grupa* $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$, *gdje je* $\mathcal{H}_\pi$ *neki netrivijalan Hilbertov prostor, koji zovemo* prostorom reprezentacije *od* π, *i* $\mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ *grupa unitarnih operatora na* $\mathcal{H}_\pi$ *s jakom operatorskom topologijom.*

Iz teorema 1.1.12 slijedi da definicija ima smisla. Nadalje, zahtjev neprekidnosti je ekvivalentan (po definiciji jake operatorske topologije) s neprekidnošću funkcija $x \mapsto \pi(x)u$, $u \in \mathcal{H}_\pi$. Budući da se jaka operatorska topologija podudara sa slabom na $\mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$, zahtjev neprekidnosti je ekvivalentan i s neprekidnošću funkcija $x \mapsto \langle \pi(x)u \,|\, v \rangle$, $u, v \in \mathcal{H}_\pi$.

Definicija 3.4.2. *Neka je* $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ *unitarna reprezentacija grupe* G. *Zatvoren (vektorski) potprostor* $\mathcal{M}$ *od* $\mathcal{H}_\pi$ invarijantan *je u odnosu na* π *ako je* $\pi(x)\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ *za sve* $x \in G$.

Definicija 3.4.3. *Neka je* $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ *unitarna reprezentacija grupe* G *i* $v \in \mathcal{H}_\pi$. *Tada* π *zovemo* cikličkom reprezentacijom *i* v cikličkim vektorom *ako skup* $\{\pi(x)v \mid x \in G\}$ *generira cijeli* $\mathcal{H}_\pi$.

Definicija 3.4.4. *Kažemo da je unitarna reprezentacija* $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ ireducibilna *ako nema invarijantnih potprostora različitih od* $\mathcal{H}_\pi$ *i* $\{0\}$.

Koristit ćemo sljedeći važan i netrivijalan rezultat bez dokaza. U njemu je ključna pretpostavka da je G komutativna. Dokaz se može naći u [3].

Teorem 3.4.5. *Sve ireducibilne reprezentacije lokalno kompaktne, Abelove grupe* G *su jednodimenzionalne, tj. pripadni prostor reprezentacije ima dimenziju jedan.*

Primjer 3.4.6. *Neka je* $\mathcal{H}_\pi = L^2(G)$ *i definiramo* $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ *s* $(\pi(y)f)(x) = f(x - y) = (\tau_y f)(x)$. *Unitarnu reprezentaciju* π *zovemo* regularnom reprezentacijom *grupe* G. *(Neprekidnost slijedi iz propozicije 3.3.3.)*

Sljedeći pojam koji definiramo su funkcije pozitivnog tipa koje su usko povezane s unitarnim reprezentacijama.

Definicija 3.4.7. $\phi \in L^\infty(G)$ *zovemo* funkcijom pozitivnog tipa *ako zadovoljava:*

$$\int (f^* * f)\phi \, \mathrm{d}\lambda \geq 0, \text{ za sve } f \in L^1(G).$$

Sada vidimo da je integral iz definicije jednak:

$$\begin{aligned}\int (f^* * f)(x)\phi(x)\mathrm{d}\lambda(x) &= \int\int f^*(y)f(x-y)\phi(x)\mathrm{d}\lambda(y)\mathrm{d}\lambda(x)\\ &= \int\int \overline{f}(-y)f(x-y)\phi(x)\mathrm{d}\lambda(y)\mathrm{d}\lambda(x)\\ &= \int\int \overline{f}(y)f(x+y)\phi(x)\mathrm{d}\lambda(y)\mathrm{d}\lambda(x)\\ &= \int\int \overline{f}(y)f(x)\phi(x-y)\mathrm{d}\lambda(y)\mathrm{d}\lambda(x). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Propozicija 3.4.8. *Neka je $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ unitarna reprezentacija, $u \in \mathcal{H}_\pi$ i $g \in L^2(G)$. Nadalje, označimo s $\tilde{g}$ element iz $L^2(G)$ definiran s $\tilde{g}(x) = \overline{g(-x)}$ (primijetimo da je isto kao involucija na $L^1(G)$, ali ovo nije involucija na $L^2(G)$ jer konvolucija dva elementa iz $L^2(G)$, iako dobro definirana, ne daje element iz $L^2(G)$, nego element iz $C_0(G)$ prema propoziciji 3.3.8).*

(i) *Ako je ϕ funkcija pozitivnog tipa na G, onda je to i $\overline{\phi}$.*

(ii) *Funkcija definirana na G s $\phi(x) = \langle \pi(x)u \,|\, u\rangle$ je neprekidna funkcija pozitivnog tipa.*

(iii) *Funkcija definirana na G s $\phi = g * \tilde{g}$ je neprekidna funkcija pozitivnog tipa.*

Dokaz. Pod (i) je trivijalno jer kompleksno konjugiranje može ući pod intergral te poštuje konvoluciju i involuciju na $L^1(G)$. Za ϕ kao u (ii) vidimo iz definicije unitarnih reprezentacija da je ϕ neprekidna, a ograničena je jer $|\phi(x)| \leq \|\pi(x)u\|\,\|u\| = \|u\|^2$ za sve $x \in G$. Provjerimo još uvjet iz definicije funkcija pozitivnog tipa. Kako je $\phi(x-y) = \langle \pi(-y+x)u \,|\, u\rangle = \langle \pi(y)^{-1}\pi(x)u \,|\, u\rangle = \langle \pi(x)u \,|\, \pi(y)u\rangle$, slijedi da za $f \in L^1(G)$

$$\int\int \overline{f}(y)f(x)\phi(x-y)\mathrm{d}\lambda(y)\mathrm{d}\lambda(x) = \int\int \langle f(x)\,\pi(x)u \,|\, f(y)\,\pi(y)u\rangle \mathrm{d}\lambda(x)\mathrm{d}\lambda(y).$$

Primijetimo sada da, prema teoremu 1.2.12, možemo integrirati vektorsku funkciju $x \mapsto f(x)\pi(x)u$, pa posebno, po našoj definiciji integrala vektorske funkcije, možemo ući pod skalarni produkt:

$$\begin{aligned}\int\int \langle f(x)\,\pi(x)u \,|\, f(y)\,\pi(y)u\rangle \mathrm{d}\lambda(x)\mathrm{d}\lambda(y) &= \int \Big\langle \int f(x)\,\pi(x)u\,\mathrm{d}\lambda(x) \Big| f(y)\,\pi(y)u \Big\rangle \mathrm{d}\lambda(y)\\ &= \Big\langle \int f(x)\,\pi(x)u\,\mathrm{d}\lambda(x) \Big| \int f(y)\,\pi(y)u\,\mathrm{d}\lambda(y) \Big\rangle \geq 0.\end{aligned}$$

Za (iii) jednostavno primijenimo (ii) na regularnu reprezentaciju π iz primjera 3.4.6 i na vektor g. Naime, za sve $y \in G$ vrijedi

$$\begin{aligned}\langle \pi(y)g \,|\, g\rangle &= \int g(x-y)\overline{g}(x)\mathrm{d}\lambda(x)\\ &= \overline{\int g(x)\tilde{g}(y-x)\mathrm{d}\lambda(x)}\\ &= \overline{g * \tilde{g}}(y),\end{aligned}$$

pa tvrdnja slijedi iz (i). □

Kako iz prethodne propozicije vidimo da uvijek postoje neprekidne funkcije pozitivnog tipa, ima smisla definirati

$$\mathcal{P} = \{\phi \in \mathcal{L}^\infty(G) \mid \phi \text{ funkcija pozitivnog tipa i neprekidna}\}.$$

Vrijedi sljedeći koristan rezultat.

Propozicija 3.4.9. *Neka je S skup svih linearnih kombinacija funkcija iz $C_c(G) \cap \mathcal{P}$. Tada S sadrži sve funkcije oblika $f * g$, $f, g \in C_c(G)$ i gust je u $L^p(G)$, $p \in [1, \infty\rangle$, u L^p normi i gust je u $C_0(G)$ u* sup*-normi.*

Dokaz. Prema prethodnoj propoziciji slijedi da S sadrži sve funkcije oblika $f * \tilde{f}$, $f \in C_c(G)$, gdje je $\tilde{f}(x) = \overline{f}(-x)$. Primijetimo da na $C_c(G) \times C_c(G)$ $(f, g) \mapsto f * \tilde{g}$ definira seskvilinearan funkcional pa uz oznaku $B(f, g) = f * \tilde{g}$ vidimo da (po polarizacijskoj formuli) vrijedi

$$B(f, g) = \frac{1}{4}\left(B(f+g, f+g) - B(f-g, f-g) + iB(f+ig, f+ig) - iB(f-ig, f-ig)\right).$$

Stoga S sadrži sve funkcije oblika $B(f, g)$, $f, g \in C_c(G)$ i prvi dio tvrdnje slijedi. Drugi je dio tvrdnje sad lagan jer postoje aproksimacije identitete koje su u $C_c(G)$, a $C_c(G)$ je gust u pripadnim normama u $L^p(G)$, odnosno $C_0(G)$. □

Sljedeći nam je cilj pokazati da su sve funkcije pozitivnog tipa oblika kao u propoziciji 3.4.8 pod (ii). Posebno, slijedi da su sve funkcije pozitivnog tipa neprekidne, točnije, da se gotovo svugdje podudaraju s nekom neprekidnom funkcijom. Fiksirajmo sada neku funkciju pozitivnog tipa ϕ. Primijetimo da ona definira pozitivno semi-definitnu hermitsku formu na $L^1(G)$:

$$\langle f \,|\, g\rangle_\phi = \int (f * g^*)\phi \mathrm{d}\lambda = \int\int f(x)\overline{g}(y)\phi(x-y)\mathrm{d}\lambda(x)\mathrm{d}\lambda(y).$$

Kako za ovu formu vrijedi Cauchy-Schwarzova nejednakost $|\langle f \,|\, g\rangle_\phi|^2 \leq \langle f \,|\, f\rangle_\phi \langle g \,|\, g\rangle_\phi$, slijedi da je $\langle f \,|\, g\rangle_\phi = 0$ za sve $g \in L^1(G)$ ako i samo ako je $f \in \mathcal{N}$, gdje je $\mathcal{N} = \{f \in$

$L^1(G) \mid \langle f \mid f\rangle_\phi = 0\}$. Budući da je $\mathcal{N}$ potprostor od $L^1(G)$, iz prethodnog slijedi da $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_\phi$ inducira skalarni produkt na kvocijentnom prostoru $L^1(G)/\mathcal{N}$ za kojeg ćemo koristiti istu oznaku $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_\phi$. Naime, označimo li kvocijentno preslikavanje $L^1(G) \to L^1(G)/\mathcal{N}$ s $f \mapsto \tilde{f}$, onda se za $f, g \in L^1(G)$ definira $\langle \tilde{f} \mid \tilde{g}\rangle_\phi := \langle f \mid g\rangle_\phi$; lako se pokaže da je ovo dobro definiran skalarni produkt na $L^1(G)/\mathcal{N}$. Označimo s $\mathcal{H}_\phi$ upotpunjenje prostora $L^1(G)/\mathcal{N}$ u odnosu na skalarni produkt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_\phi$ i označimo s $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\phi}$ pripadnu normu na $\mathcal{H}_\phi$. Primijetimo da sada po nejednakosti (dobivenoj iz 3.1) $|\langle f \mid g\rangle_\phi| \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_1 \|g\|_1$ slijedi:

$$\|\tilde{f}\|_{\mathcal{H}_\phi} \leq \|\phi\|_\infty^{1/2} \|f\|_1. \tag{3.2}$$

Sljedeće konstruiramo reprezentaciju grupe G na prostoru $\mathcal{H}_\phi$. Prvo uočimo da

$$\begin{aligned}
\langle \tau_z f \mid \tau_z g\rangle_\phi &= \int\int f(x-z)\overline{g}(y-z)\phi(x-y)\mathrm{d}\lambda(x)\mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \int\int f(x-z)\overline{g}(y-z)\phi((x-z)-(y-z))\mathrm{d}\lambda(x)\mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \int\int f(x)\overline{g}(y)\phi(x-y)\mathrm{d}\lambda(x)\mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \langle f \mid g\rangle_\phi,
\end{aligned}$$

iz čega slijedi $\tau_z(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$. Stoga je operator $\tilde{\tau}_z \tilde{f} := \widetilde{\tau_z(f)}$ dobro definiran na $L^1(G)/\mathcal{N}$ i za njega prema prethodnom vrijedi $\langle \tilde{\tau}_z \tilde{f} \mid \tilde{\tau}_z \tilde{g}\rangle_\phi = \langle \tilde{f} \mid \tilde{g}\rangle_\phi$. Slijedi da je $\tilde{\tau}_z$ izometrija, a također je i izomorfizam jer je τ_z izomorfizam na $L^1(G)$. Dakle, $\tilde{\tau}_z$ je unitaran operator na $L^1(G)/\mathcal{N}$ koji se jedinstveno poroširuje do unitarnog operatora na $\mathcal{H}_\phi$, pa možemo definirati reprezentaciju π_ϕ grupe G na prostoru $\mathcal{H}_\phi$:

$$\pi_\phi(x) = \tilde{\tau}_x.$$

Teorem 3.4.10. *Uz prethodne oznake, postoji ciklički vektor $\epsilon \in \mathcal{H}_\phi$ takav da je $\phi(x) = \langle \pi_\phi(x)\epsilon \mid \epsilon\rangle_\phi$ za gotovo sve $x \in G$. Posebno se svaka funkcija pozitivnog tipa ϕ podudara s neprekidnom funkcijom gotovo svugdje i uz pretpostavku da je ϕ neprekidna vrijedi $\|\phi\|_\infty = \phi(0)$ i $\phi(x) = \overline{\phi}(-x)$ za sve $x \in G$.*

Dokaz. Neka je $\mathscr{U}$ proizvoljna baza okolina od $0 \in G$ i $(\psi_U)_{U\in\mathscr{U}}$ proizvoljna aproksimacija identitete. Tada kako je i $(\psi_U^*)_{U\in\mathscr{U}}$ aproksimacija identitete, slijedi da za $f \in L^1(G)$ vrijedi $f * \psi_U^* \to f$ u $L^1(G)$, pa onda i $\int f * \psi_U^* \phi \mathrm{d}\lambda \to \int f\phi \mathrm{d}\lambda$. Ekvivalentno, $\langle f \mid \psi_U\rangle_\phi \to \int f\phi\mathrm{d}\lambda$, iz čega slijedi $\langle \tilde{f} \mid \tilde{\psi}_U\rangle_\phi \to \int f\phi\mathrm{d}\lambda$. Sada po 3.2 slijedi da $\|\tilde{\psi}_U\|_{\mathcal{H}_\phi} \leq \|\phi\|_\infty^{1/2}\|\psi_U\|_1 = \|\phi\|_\infty^{1/2}$, pa je hiperniz $(\tilde{\psi}_U)_{U\in\mathscr{U}}$ ograničen i možemo primijeniti propoziciju 1.1.4. Slijedi da $(\tilde{\psi}_U)_{U\in\mathscr{U}}$ slabo konvergira u $\mathcal{H}_\phi$. Označimo njegov limes ϵ. Stoga je $\lim_U \langle f \mid \psi_U\rangle_\phi =$

$\langle \tilde{f} \,|\, \epsilon \rangle_\phi = \int f\phi \mathrm{d}\lambda$. Sada za proizvoljan $f \in L^1(G)$ imamo

$$\begin{aligned}
\int \langle \epsilon \,|\, \pi_\phi(x)\epsilon \rangle_\phi \overline{f}(x)\mathrm{d}\lambda(x) &= \lim_U \int \langle \tilde{\psi}_U \,|\, \pi_\phi(x)\epsilon \rangle_\phi \overline{f}(x)\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \lim_U \int \langle \pi_\phi(-x)\tilde{\psi}_U \,|\, \epsilon \rangle_\phi \overline{f}(x)\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \lim_U \int\int (\tau_{-x}\psi_U)(y)\phi(y)\overline{f}(x)\mathrm{d}\lambda(x)\mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \lim_U \int\int \psi_U(y)\overline{f}(x)\phi(y-x)\mathrm{d}\lambda(x)\mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \lim_U \langle \tilde{\psi}_U \,|\, \tilde{f} \rangle_\phi = \langle \epsilon \,|\, \tilde{f} \rangle_\phi = \int \overline{\phi f}\mathrm{d}\lambda,
\end{aligned}$$

pa slijedi $\overline{\phi}(x) = \langle \epsilon \,|\, \pi_\phi(x)\epsilon \rangle_\phi$ za gotovo sve $x \in G$. Pokažimo još da je ϵ ciklički, tj. da skup $\{\pi_\phi(x)\epsilon \mid x \in G\}$ generira cijeli $\mathcal{H}_\phi$. Za to je dovoljno pokazati da, ako je $f \in L^1(G)$ takav da vrijedi $\langle \tilde{f} \,|\, \pi_\phi(x)\epsilon \rangle_\phi = 0$ za sve $x \in G$, onda je nužno $\tilde{f} = 0$, tj. $f \in \mathcal{N}$. No, slično kao u prethodnom računu, dobivamo da za proizvoljan $g \in L^1(G)$ vrijedi $\langle \tilde{f} \,|\, \tilde{g} \rangle_\phi = \int \langle \tilde{f} \,|\, \pi_\phi(x)\epsilon \rangle_\phi \overline{g}(x)\mathrm{d}\lambda(x)$. Stoga je ϵ ciklički ako i samo ako $\langle \tilde{f} \,|\, \tilde{g} \rangle_\phi = 0$ povlači da je $\tilde{f} = 0$ za sve $g \in L^1(G)$, a to vrijedi.

Pretpostavimo da je ϕ neprekidna. Tada za sve $x \in G$ vrijedi

$$\phi(x) = \langle \pi_\phi(x)\epsilon \,|\, \epsilon \rangle_\phi \leq \|\pi(x)\epsilon\|_{\mathcal{H}_\phi} \|\epsilon\|_{\mathcal{H}_\phi} = \|\epsilon\|^2_{\mathcal{H}_\phi} = \phi(0)$$

i

$$\phi(x) = \langle \pi_\phi(x)\epsilon \,|\, \epsilon \rangle_\phi = \langle \epsilon \,|\, \pi_\phi(-x)\epsilon \rangle_\phi = \overline{\langle \pi_\phi(-x)\epsilon \,|\, \epsilon \rangle_\phi} = \overline{\phi(-x)}. \qquad \square$$

Koristit ćemo sljedeće oznake:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_0 &= \{\phi \in \mathcal{P} \mid 0 \leq \phi(0) \leq 1 \, (\Leftrightarrow \|\phi\|_\infty \leq 1)\}, \\
\mathcal{P}_1 &= \{\phi \in \mathcal{P} \mid \phi(0) = 1 \, (\Leftrightarrow \|\phi\|_\infty = 1)\},
\end{aligned}$$

a kako su sva oba skupa konveksna, možemo promatrati njihove ekstremne točke koje ćemo redom označiti s $\mathcal{E}(\mathcal{P}_0)$ i $\mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$. Uz identifikaciju $\mathbb{C}$ s $\mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.4.11. *Neka je ϕ element iz $\mathcal{P}_1$. Tada je $\phi \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$ ako i samo ako je reprezentacija π_ϕ iz prethodnog teorema ireducibilna. U tom slučaju vrijedi $\phi(x) = \pi_\phi(x)$ za sve $x \in G$, te je slika od ϕ sadržana u jediničnoj kružnici kompleksne ravnine.*

Dokaz. Pretpostavimo $\phi \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$, ali da π_ϕ nije ireducibilna. Onda postoji invarijatan potprostor $\mathcal{M} \neq \{0\}, \mathcal{H}_\phi$. Za $x \in G$ je $\pi_\phi(x)\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$, a to je zbog unitarnosti ekvivalentno s $\pi_\phi(x)^*\mathcal{M}^\perp = \pi_\phi(-x)\mathcal{M}^\perp \subseteq \mathcal{M}^\perp$. Budući da je $x \mapsto -x$ bijekcija, slijedi da je i $\mathcal{M}^\perp$ također invarijantan potprostor. Kako je vektor ϵ reprezentacije π_ϕ ciklički, on ne može biti element invarijantnih potprostora $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^\perp$, pa stoga postoje netrivijalni vektori $u \in \mathcal{M}$ i $v \in \mathcal{M}^\perp$ takvi da $\epsilon = u + v$. Kako je $u \perp v$, slijedi po propoziciji 3.4.8, pod (ii), da za sve $x \in G$

$$\phi(x) = \langle \pi_\phi(x)\epsilon \,|\, \epsilon\rangle_\phi = \langle \pi_\phi(x)u \,|\, u\rangle_\phi + \langle \pi_\phi(x)v \,|\, v\rangle_\phi = \lambda_1\phi_1(x) + \lambda_2\phi_2(x),$$

gdje su $\lambda_1 = \|u\|^2_{\mathcal{H}_\phi} > 0$, $\lambda_2 = \|v\|^2_{\mathcal{H}_\phi} > 0$ i $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{P}_1$. Uvrstimo li $x = 0$ u prethodnu jednakost, dobivamo da je $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, pa ϕ nije ekstremna točka.

Obrnuto, ako je π_ϕ ireducibilna, onda je, po teoremu 3.4.5, $\pi_\phi(x)$, $x \in G$, zapravo kompleksan broj. Vrijedi $1 = \phi(0) = \|\epsilon\|^2_{\mathcal{H}_\phi}$, pa slijedi da $\phi(x) = \langle \pi_\phi(x)\epsilon \,|\, \epsilon\rangle_\phi = \pi_\phi(x)\langle \epsilon \,|\, \epsilon\rangle_\phi = \pi_\phi(x)$. Iz činjenica da $\|\phi\|_\infty = 1$ i $\pi_\phi(x)\pi_\phi(x)^{-1} = \pi_\phi(x)\pi_\phi(-x) = 1$ zaključujemo da je $\phi(x) = \pi_\phi(x)$ element jedinične kružnice u kompleksnoj ravnini za sve $x \in G$.

Sada je lako dokazati da je ϕ ekstremna točka. Naime, ako pretpostavimo da je $\phi = \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2$, gdje su λ_1 i λ_2 nenegativni realni brojevi čija je suma 1, te ϕ_1 i ϕ_2 elementi $\mathcal{P}_1$, onda za proizvoljan, fiksan $x \in G$ vrijedi $\phi(x) = \lambda_1\phi_1(x) + \lambda_2\phi_2(x)$, pa je stoga $\phi(x)$ konveksna kombinacija dvaju elemenata jediničnog zatvorenog kruga u kompleksnoj ravnini, a kako je $\phi(x)$ ekstremna točka jediničnog zatvorenog kruga kao element jedinične kružnice, to je moguće samo za $\lambda_1 = 1$ ili $\lambda_2 = 1$ ili $\phi_1(x) = \phi_2(x)$. Iz toga lako slijedi da je ϕ ekstremna točka u $\mathcal{P}_1$. □

Kako je dual od $L^1(G)$ jednak $L^\infty(G)$, možemo na $\mathcal{P}$ promatrati slabu* topologiju.

Teorem 3.4.12. $\operatorname{Conv}\mathcal{E}(\mathcal{P}_0)$ *je kompaktan skup u slaboj* topologiji i gust je u* $\mathcal{P}_0$ *u istoj topologiji. Također,* $\operatorname{Conv}\mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$ *je gust u* $\mathcal{P}_1$ *u slaboj* topologiji.*

Dokaz. Primijetimo da je uvjet iz definicije funkcija pozitivnog tipa trivijalno sačuvan na limesima u slaboj* topologiji, pa je $\mathcal{P}_0$ (točnije, pripadne klase ekvivalencije) zatvoren podskup zatvorene jedinične kugle u $L^\infty(G)$. Sada iz Alaogluovog teorema slijedi da je $\mathcal{P}_0$ kompaktan, pa možemo primijeniti Krein-Milmanov teorem da dobijemo prvu tvrdnju.

Za drugu tvrdnju ne možemo primijeniti Krein-Milmanov teorem jer jedinična sfera nije nužno zatvoren skup u slaboj* topologiji. Dokažimo prvo da vrijedi $\mathcal{E}(\mathcal{P}_0) = \mathcal{E}(\mathcal{P}_1) \cup \{0\}$. Neka su $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{P}_0$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ takvi da $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Prvo pretpostavimo $\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 = 0$. Evaluirajući u 0 dobivamo $\phi_1(0) = \phi_2(0) = 0$, pa slijedi $\phi_1 = 0$ i $\phi_2 = 0$. Stoga je 0 ekstremna točka $\mathcal{P}_0$. Slično, pretpostavimo sada da je $\phi \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$ takav da $\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 = \phi$. Opet, evaluirajući u 0, dobivamo $\phi_1(0) = \phi_2(0) = 1$, pa slijedi da su štoviše $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{P}_1$ pa sada kako je ϕ ekstremna u $\mathcal{P}_1$, ekstremna je i u $\mathcal{P}_0$. Pokazali smo $\mathcal{E}(\mathcal{P}_1) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{P}_0)$. Pretpostavimo da postoji $\phi \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_0) \setminus (\mathcal{E}(\mathcal{P}_1) \cup \{0\})$. Očito, svaki element skupa $\mathcal{P}_0$ je konveksna kombinacija 0 i nekog elemnta skupa $\mathcal{P}_1$, slijedi da je ϕ nužno iz skupa $\mathcal{P}_1$, ali to je kontradikcija s $\phi \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_0) \setminus \mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$ jer je $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_0$.

Dokažimo sada drugu tvrdnju. Neka je $\phi \in \mathcal{P}_1$. Prema prethodnim tvrdnjama ϕ je limes (u slaboj* topologiji) hiperniza $(\phi_\alpha)_{\alpha \in A}$, gdje za sve $\alpha \in A$ vrijedi $\phi_\alpha \in \operatorname{Conv}\mathcal{E}(\mathcal{P}_0) =$

$\mathrm{Conv}\,(\mathcal{E}(\mathcal{P}_1) \cup \{0\})$. Stoga možemo pretpostaviti

$$\phi_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^{(\alpha)} \psi_i^{(\alpha)} + \lambda_{n_\alpha+1}^{(\alpha)} 0,$$

gdje su $\psi_i^{(\alpha)} \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$, $\lambda_i^{(\alpha)} \geq 0$ takvi da $\sum_{i=1}^{n_\alpha+1} \lambda_i^{(\alpha)} = 1$. Primijetimo da evaluirajući prethodne izraze u 0 dobivamo $\|\phi_\alpha\|_\infty \leq 1$. Ukoliko ne bi vrijedilo $\lim_\alpha \phi_\alpha(0) = \lim_\alpha \|\phi_\alpha\|_\infty = 1$, onda bi postojao $\delta > 0$ i podhiperniz $(\phi_{h(\beta)})_{\beta\in B}$ hiperniza $(\phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ takav da $\phi_{h(\beta)} \xrightarrow{w^*} \phi$ i $\|\phi_{h(\beta)}\|_\infty \leq 1 - \delta$ za sve $\beta \in B$. No, kako je skup $\{f \in \mathcal{L}^\infty(G) \mid \|f\|_\infty \leq 1 - \delta\}$ zatvoren (npr. Alaoglu) u slaboj* topologiji, a $\|\phi\|_\infty = 1$, dobivamo kontradikciju. Stoga definiramo $\phi'_\alpha = \phi_\alpha / \phi_\alpha(0)$, pa je $w^* - \lim_\alpha \phi'_\alpha = \phi$ jer za $f \in L^1(G)$ vrijedi

$$\int (\phi_\alpha/\phi_\alpha(0) - \phi) f \mathrm{d}\lambda = \int \phi_\alpha (1/\phi_\alpha(0) - 1) f \mathrm{d}\lambda + \int (\phi_\alpha - \phi) f \mathrm{d}\lambda,$$

a ϕ_α ograničeni su u $\|\cdot\|_\infty$ normi, pa desna strana teži u 0. Kako smo po konstrukciji napravili da je $\phi'_\alpha \in \mathrm{Conv}\,(\mathcal{E}(\mathcal{P}_1))$ za sve $\alpha \in A$, dobivamo drugu tvrdnju teorema.

□

Prije nego što dokažemo glavni rezultat ovog odjeljka, teorem Geljfand-Raikov, treba nam još jedan sam po sebi važan rezultat. Pokazat ćemo da se na $\mathcal{P}_1$ slaba* topologija podudara s topologijom uniformne konvergencije na kompaktnim skupovima u G. Prvo se prisjetimo kako izgledaju baze okolina u tim topologijama. U topologiji uniformne konvergencije na kompaktnim skupovima za bazu okoline elementa $\phi_0 \in \mathcal{P}_1$ možemo uzeti $\{\phi \in \mathcal{P}_1 \mid |\phi_0(x) - \phi(x)| < \delta \text{ za sve } x \in K\}$, gdje je $\delta > 0$ i K ide po kompaktnim skupovima u G. U slaboj* topologiji za bazu okolina elementa ϕ_0 možemo uzeti skupove oblika $\bigcap_{i=1}^n \{\phi \in \mathcal{P}_1 \mid |\int (\phi - \phi_0) f_i| < \delta\}$, gdje su $f_i \in L^1(G)$, $\delta > 0$ i $n \in \mathbb{N}$.

Lema 3.4.13. *Za svaku funkciju $\phi \in \mathcal{P}_1$ vrijedi ocjena $|\phi(x) - \phi(y)|^2 \leq 2 - 2\Re(\phi(x - y))$.*

Dokaz. Neka je π_ϕ unitarna reprezentacija iz teorema 3.4.10 i ϵ pripadni ciklički vektor. Onda je, zbog $\phi \in \mathcal{P}_1$, $\|\epsilon\|^2_{\mathcal{H}_\phi} = 1 = \phi(0)$, tj. ϵ je jedinični vektor pa vrijedi

$$\begin{aligned}
|\phi(x) - \phi(y)|^2 &= |\langle(\pi_\phi(x) - \pi_\phi(y))\epsilon \,|\, \epsilon\rangle_\phi|^2 \leq \|(\pi_\phi(x) - \pi_\phi(y))\epsilon\|^2_{\mathcal{H}_\phi} \|\epsilon\|^2_{\mathcal{H}_\phi} \\
&= \|(\pi_\phi(x) - \pi_\phi(y))\epsilon\|^2_{\mathcal{H}_\phi} = \langle \pi_\phi(x)\epsilon - \pi_\phi(y)\epsilon \,|\, \pi_\phi(x)\epsilon - \pi_\phi(y)\epsilon\rangle_\phi \\
&= \langle \pi_\phi(x)\epsilon \,|\, \pi_\phi(x)\epsilon\rangle_\phi + \langle \pi_\phi(y)\epsilon \,|\, \pi_\phi(y)\epsilon\rangle_\phi \\
&\quad - \langle \pi_\phi(x)\epsilon \,|\, \pi_\phi(y)\epsilon\rangle_\phi - \overline{\langle \pi_\phi(x)\epsilon \,|\, \pi_\phi(y)\epsilon\rangle_\phi} \\
&= 2 - 2\Re(\langle \pi(x)\epsilon \,|\, \pi(y)\epsilon\rangle_\phi) = 2 - 2\Re(\langle \pi(x - y)\epsilon \,|\, \epsilon\rangle_\phi) \\
&= 2 - 2\Re(\phi(x - y)).
\end{aligned}$$

□

Lema 3.4.14. *Neka je $\phi_0 \in \mathcal{P}_1$ i $\delta > 0$.*

(i) *Postoji kompaktna okolina V od 0 u G (tj. V je kompaktan skup takav da je 0 u interioru od V) i slaba* okolina Φ_1 od ϕ_0 u $\mathcal{P}_1$ tako da za sve $x \in G$ i sve $\phi \in \Phi_1$ vrijedi $|\chi_V * \phi(x) - \lambda(V)\phi(x)| < 2\lambda(V)\sqrt{\delta}$, pri čemu je χ_V karakteristična funkcija skupa V.*

(ii) *Za svaki $f \in L^1(G)$ i za svaki kompaktan skup $K \subseteq G$ postoji slaba* okolina Φ_2 od ϕ_0 u $\mathcal{P}_1$ takva da za sve $x \in K$ i sve $\phi \in \Phi_2$ vrijedi $|f * (\phi - \phi_0)(x)| < \delta$.*

Dokaz. Za (i), V uzmemo takvu kompaktnu okolinu od 0 da vrijedi $|\phi_0(x) - 1| < \delta$ za sve $x \in V$. Nadalje, definiramo Φ_2 kao slabu* okolinu od ϕ_0 u $\mathcal{P}_1$ takvu da je $\phi \in \Phi_1$ ako i samo ako $|\phi_0(\chi_V) - \phi(\chi_V)| = |\int_V (\phi - \phi_0)| < \delta\lambda(V)$. Sada iz prethodne leme slijedi da za sve $\phi \in \Phi_1$ i $x \in G$ vrijedi

$$
\begin{aligned}
|\chi_V * \phi(x) - \lambda(V)\phi(x)| &= \left|\int_V (\phi(x-y) - \phi(x)) \mathrm{d}\lambda(y)\right| \leq \int_V |\phi(x-y) - \phi(x)| \mathrm{d}\lambda(y) \\
&\leq \int_V \sqrt{(2 - 2\Re(\phi(y)))} \mathrm{d}\lambda(y) = \int_V \sqrt{(2 - 2\Re(\phi))\chi_V}\, \mathrm{d}\lambda \\
&\leq \sqrt{\int_V (2 - 2\Re(\phi)) \mathrm{d}\lambda} \sqrt{\int_V \chi_V \mathrm{d}\lambda} = \sqrt{2\left|\int_V (1 - \Re(\phi)) \mathrm{d}\lambda\right|} \sqrt{\lambda(V)} \\
&\leq \sqrt{2\left|\int_V (1 - \phi) \mathrm{d}\lambda\right|} \sqrt{\lambda(V)} \\
&\leq \sqrt{2\left|\int_V (1 - \phi) \mathrm{d}\lambda\right| + 2\left|\int_V (\phi_0 - \phi) \mathrm{d}\lambda\right|} \sqrt{\lambda(V)} \\
&\leq \sqrt{2\lambda(V)\delta + 2\lambda(V)\delta} \sqrt{\lambda(V)} = 2\lambda(V)\sqrt{\delta}.
\end{aligned}
$$

Dokažimo (ii). ϕ_0 promatramo kao element duala od $L^1(G)$, tj. linearnu funkciju na $L^1(G)$ s djelovanjem $\phi_0(f) = \int f \overline{\phi_0} \mathrm{d}\lambda$, $f \in L^1(G)$. Primijetimo da za $\phi \in \mathcal{P}_1$ vrijedi

$$
f * \phi_0(x) = \int f(x-y)\phi_0(y) \mathrm{d}\lambda(y) = \int (\tau_{-x} f)(-y)\phi_0(y) \mathrm{d}\lambda(y) = \int (\tau_{-x} f)\overline{\phi_0} \mathrm{d}\lambda,
$$

tj. $f * \phi_0(x) = \phi_0(\tau_{-x}(f))$. Skup $\{\tau_{-x} f \mid x \in K\}$ je kompaktan u $L^1(G)$ jer je translatiranje $\tau_\cdot : G \to L^1(G)$ neprekidno, pa primijenimo li propoziciju 1.1.6, dobijemo slabu* okolinu od ϕ_0 (koja je ujedno i okolina za kompaktnu konvergenciju u $L^1(G)^*$) Φ_2 takvu da za sve $\phi \in \Phi_2$ i $x \in K$ vrijedi $|\phi_0(\tau_{-x} f) - \phi(\tau_{-x} f)| = |f * \phi_0 - f * \phi| = |f * (\phi_0 - \phi)| < \delta$. □

Teorem 3.4.15. *U $\mathcal{P}_1$ se topologija uniformne konvergencije na kompaktnim skupovima u G i slaba* topologija podudaraju.*

Dokaz. Fiksirajmo neki $\phi_0 \in \mathcal{P}_1$. Dokažimo da $\phi \to \phi_0$ u topologiji uniformne konvergencije na kompaktnim skupovima povlači $\phi \xrightarrow{w^*} \phi_0$. To pokazuje da je slaba* topologija manja od topologije uniformne konvergencije na kompaktnim skupovima u G. Neka su $f \in L^1(G)$ i $\delta > 0$ proizvoljni. Zbog σ-kompaktnosti od G postoji rastući niz kompaktnih skupova $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, čija unija pokriva G, jer je unija konačno kompaktnih skupova kompaktan skup. Iz teorema o monotonoj konvergenciji slijedi $\int |f| \mathrm{d}\lambda = \int \lim_{n\to\infty}(|f|\chi_{K_n})\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{K_n} |f|\mathrm{d}\lambda$, pa postoji kompaktan skup K takav da $\int_{G\setminus K} |f|\mathrm{d}\lambda < \delta$. Sada ako je $\phi \in \mathcal{P}_1$ takav da $|\phi(x) - \phi_0(x)| < \delta/\|f\|_1$ za sve $x \in K$, onda vrijedi

$$
\begin{aligned}
|\phi(f) - \phi_0(f)| &= \left| \int f\overline{(\phi - \phi_0)}\mathrm{d}\lambda \right| \leq \int_K |f||\phi - \phi_0|\mathrm{d}\lambda + \int_{G\setminus K} |f||\phi - \phi_0|\mathrm{d}\lambda \\
&\leq \frac{\delta}{\|f\|_1} \int_K |f|\mathrm{d}\lambda + \int_{G\setminus K} 2|f|\mathrm{d}\lambda \leq \delta + 2\delta = 3\delta.
\end{aligned}
$$

Za obrat uzmimo proizvoljne, fiksne $\phi_0 \in \mathcal{P}_1$, kompaktan skup K i $\eta > 0$. Dovoljno je konstruirati slabu* okolinu elementa ϕ_0 sadržanu u $\{\phi \in \mathcal{P}_1 \mid |\phi(x) - \phi_0(x)| < \eta,\ x \in K\}$. Uzmimo neki prozivoljan $\delta > 0$. Prema prethodnoj lemi, pod (i), postoji slaba* okolina Φ_1 od ϕ_0 i kompaktna okolina V od $0 \in G$ takva da da za sve $x \in G$ i sve $\phi \in \Phi_1$ vrijedi $|\chi_V * \phi(x) - \lambda(V)\phi(x)| < 2\lambda(V)\sqrt{\delta}$. Prema istoj lemi, ali pod (ii), primijenjenoj na funkciju χ_V i kompaktan skup K, postoji slaba* okolina Φ_2 od ϕ_0 takva da za sve $x \in K$ i sve $\phi \in \Phi_2$ vrijedi $|\chi_V * (\phi - \phi_0)(x)| < \delta\lambda(V)$. Stoga, uzmemo li za traženu slabu* okolinu skup $\Phi = \Phi_1 \cap \Phi_2$, dobivamo da za sve $\phi \in \Phi$ i $x \in K$ vrijedi

$$
\begin{aligned}
|\phi(x) - \phi_0(x)| &\leq 1/\lambda(V) \Big(|\lambda(V)\phi(x) - \chi_V * \phi(x)| + \\
&\qquad |\chi_V * (\phi - \phi_0)(x)| + |\chi_V * \phi_0(x) - \lambda(V)\phi_0(x)| \Big) \\
&\leq 2\sqrt{\delta} + \delta + 2\sqrt{\delta},
\end{aligned}
$$

pa ako uzmemo dovoljno malu vrijednost δ, vrijedi da je ϕ u $\{\phi \in \mathcal{P}_1 \mid |\phi(x) - \phi_0(x)| < \eta,\ \forall x \in K\}$. □

Teorem 3.4.16 (Geljfand-Raikov)**.** *Ireducibilne, unitarne reprezentacije Hausdorffove, lokalno kompaktne, σ-kompaktne i Abelove grupe G razlikuju točke.*

Dokaz. Neka su $x, y \in G$ različiti. Iz Urysohnove leme za lokalno kompaktne i Hausdorffove prostore možemo direktno dobiti funkciju $f_0 \in C_c(G)$ takvu da $f_0(x) \neq f_0(y)$. Po propoziciji 3.4.9 možemo f_0 uniformno aproksimirati linearnim kombinacijama funkcija iz $C_c(G) \cap \mathcal{P}$. Stoga, uzmemo li da je f takva linearna kombinacija funkcija iz $C_c(G) \cap \mathcal{P}$ da je u svakoj točki udaljena od f_0 za najviše $|f_0(x) - f_0(y)|/2$, nužno slijedi $f(x) \neq f(y)$. Kako svaki element iz $\mathcal{P}$ možemo normirati da bude u $\mathcal{P}_1$, $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $f_i \in C_c(G) \cap \mathcal{P}_1$. Iz prethodnog teorema i iz teorema 3.4.12 slijedi da je $\operatorname{Conv} \mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$ gust u $\mathcal{P}_1$ u topologiji uniformne konvergencije na kompaktnim skupovima. Skup $\{x, y\}$ je kompaktan, pa možemo svaki f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, uniformno aproksimirati na skupu $\{x, y\}$ funkcijom g_i iz $\operatorname{Conv}\mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$. Ako stavimo $g = \sum_{i=1}^m \alpha_i g_i$ i $|g_i(z) - f_i(z)| < \delta/(\sum_{i=1}^m |\alpha_i|)$ za sve i i $z \in \{x, y\}$, slijedi $|g(z) - f(z)| < \sum_{i=1}^m |\alpha_i||g_i(z) - f_i(z)| < \delta$. No, uzmemo li vrijednost δ tako da $\delta < |f(x) - f(y)|/2$, dobivamo $g(x) \neq g(y)$. Kako je svaka linearna kombinacija funkcija iz $\operatorname{Conv}\mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$ ujedno i linearna kombinacija funkcija iz $\mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$, imamo $g = \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i$, gdje su $\beta_i \in \mathbb{C}$ i $\phi_i \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$. Budući da je $g(x) \neq g(y)$, postoji barem jedan $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takav da je $\phi_i(x) \neq \phi_i(y)$. Sada iz teorema 3.4.11 slijedi tvrdnja ovog teorema. $\square$

Poglavlje 4

Dualna grupa i Fourierova transformacija

Ovdje koristimo iste oznake kao u zadnjim odjeljcima prethodnog poglavlja. G označava neku fiksiranu lokalno kompaktnu, Hausdorffov, σ-kompaktnu i Abelovu grupu i pritom koristimo aditivnu notaciju. S λ označavamo neku, isto fiksnu, Haarovu mjeru na G. Oznaku $\mathbb{T}$ koristimo za multiplikativnu grupu kompleksnih brojeva modula 1 uz standardnu topologiju.

4.1 Osnovna svojstva dualne grupe

Definicija 4.1.1. *Neka je $\hat{G}$ skup svih neprekidnih homomorfizama grupa $G \to \mathbb{T}$. Na $\hat{G}$ definiramo operaciju množenja po točkama i stavljamo topologiju uniformne konvergencije na kompaktnim skupovima. Tada $\hat{G}$ postaje topološka grupa i zovemo je* dualnom grupom *grupe G. Elemente dualne grupe zovemo* karakteri *od G.*

Činjenica da je invertiranje i množenje u $\hat{G}$ neprekidno je trivijalna. Iz teorema 3.4.5 i 3.4.11 i identifikaciju $\mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$, lako se dobiva sljedeća propozicija.

Propozicija 4.1.2. *Skup $\hat{G}$ se podudara sa skupom svih ekstremnih točaka od $\mathcal{P}_1$ i možemo ga identificirati sa skupom svih ireducibilnih, unitarnih reprezentacija grupe G.*

Imamo i sljedeću identifikaciju sa spektrom $\sigma(L^1(G))$ od $L^1(G)$ u smislu poglavlja 2.

Teorem 4.1.3. *Skup $\hat{G}$ možemo identificirati sa $\sigma(L^1(G))$ djelovanjem*

$$\xi(f) = \int f(x)\overline{\xi(x)}\mathrm{d}\lambda(x), \ \ f \in L^1(G).$$

Nadalje, slaba topologija koju $\hat{G}$ naslijedi kao element $\sigma(L^1(G))$ i topologija uniformne konvergencije na kompaktnim skupovima u G se podudaraju.*

Dokaz. Svaki karakter očito definira neprekidan linearan funkcional, pa trebamo još pokazati multiplikativnost. Budući da je ξ homomorfizam, za $f, g \in L^1(G)$ imamo

$$\begin{aligned}
\xi(f * g) &= \int \int f(y) g(x-y) \overline{\xi(x)} \mathrm{d}\lambda(y) \mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \int \int f(y) \overline{\xi(y)} g(x-y) \overline{\xi(x-y)} \mathrm{d}\lambda(y) \mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \int f(y) \overline{\xi(y)} \left(\int g(x-y) \overline{\xi(x-y)} \mathrm{d}\lambda(x) \right) \mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \int f(y) \overline{\xi(y)} \left(\int g(x) \overline{\xi(x)} \mathrm{d}\lambda(x) \right) \mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \left(\int f(y) \overline{\xi(y)} \mathrm{d}\lambda(y) \right) \left(\int g(x) \overline{\xi(x)} \mathrm{d}\lambda(x) \right) \\
&= \xi(f) \xi(g).
\end{aligned}$$

Pokažimo sada da nužno svaki element $\Phi \in \sigma(L^1(G))$ proizlazi iz $\hat{G}$. Znamo da je $\|\Phi\| = 1$ prema propoziciji 2.2.1, a kako je $\Phi \in L^1(G)^*$, postoji $\phi \in L^\infty(G)$ takav da $\Phi(f) = \int f \overline{\phi} \mathrm{d}\lambda$, za sve $f \in L^1(G)$, i $\|\phi\|_\infty = 1$. Primijetimo sada da za sve $f, g \in L^1(G)$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\int g(y) \Phi(f) \overline{\phi(y)} \mathrm{d}\lambda(y) &= \Phi(f) \Phi(g) = \Phi(f * g) \\
&= \int \int f(x-y) g(y) \overline{\phi(x)} \mathrm{d}\lambda(y) \mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \int g(y) \left(\int \tau_y f(x) \overline{\phi(x)} \mathrm{d}\lambda(x) \right) \mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \int g(y) \Phi(\tau_y f) \mathrm{d}\lambda(y),
\end{aligned}$$

pa je posebno $\overline{\phi(y)} \Phi(f) = \Phi(\tau_y f)$, tj. $\phi(y) \overline{\Phi(f)} = \overline{\Phi(\tau_y f)}$ za λ - gotovo sve y. Uzmemo li $h \in L^1(G)$ takav da je $\Phi(h) \neq 0$, prema prethodnom možemo redefinirati ϕ u neprekidnu (jer je translatiranje neprekidno) funkciju $y \mapsto \overline{\Phi(\tau_y h)} / \overline{\Phi(h)}$. Onda vrijedi $\phi(x+y) \overline{\Phi(h)} = \overline{\Phi(\tau_{x+y} h)} = \overline{\Phi(\tau_x \tau_y h)} = \phi(x) \overline{\Phi(\tau_y h)} = \phi(x) \phi(y) \overline{\Phi(h)}$, za gotovo sve x i sve y. No, zbog neprekidnosti od ϕ, i jer je Haarova mjera pozitivna na otvorenim skupovima, možemo proširiti da $\phi(x+y) \overline{\Phi(h)} = \phi(x) \phi(y) \overline{\Phi(h)}$, tj. $\phi(x+y) = \phi(x) \phi(y)$ vrijedi za sve $x, y \in G$. Sada, ako uzmemo x takav da $\phi(x) \neq 0$, onda $\phi(n) = \phi(0+n) = \phi(0) \phi(n)$, pa je $\phi(0) = 1$.

No onda $1 = \phi(0) = \phi(y)\phi(-y)$, pa je $\phi(y) \neq 0$ za sve $y \in G$. Slijedi da je ϕ neprekidan homomorfizam grupa G i $\mathbb{C}$. Ukoliko bi postojao element $y \in G$ takav da $|\phi(y)| \neq 1$, $|\phi(y)|$ ili $|\phi(-y)|$ bio bi veći od 1, a to je u kontradikciji s činjenicom da je ϕ ograničen s 1. Dakle, $|\phi(y)| = 1$ za sve $y \in G$, tj. ϕ je karakter.

Zadnju tvrdnju teorema dobijemo iz propozicije 4.1.2 i teorema 3.4.15. □

Sada iz ovog teorema i propozicije 2.2.1 odmah dobijemo i sljedeći korolar.

Korolar 4.1.4. *Dualna grupa $\hat{G}$ je lokalno kompaktna i Hausdorffova.*

Propozicija 4.1.5. *Ako je G kompaktna, onda su elementi $\hat{G}$ ortogonalni u $L^2(G)$. Nadalje, ako je $\lambda(G) = 1$, onda su elementi $\hat{G}$ još i ortonormirani.*

Dokaz. Primijetimo da za svaki $\xi \in \hat{G}$ vrijedi $|\xi(x)|^2 = \xi(x)\overline{\xi(x)} = 1$ za sve $x \in G$, pa je $\|\xi\|_2 = \lambda(G)$ i inverz svakog elementa ξ je $1/\xi = \overline{\xi}$. Neka su sada $\xi, \eta \in \hat{G}$ različiti. Tada postoji $x_0 \in G$ takav da $\xi(x_0)\eta^{-1}(x_0) \neq 1$, pa imamo

$$\begin{aligned}
\int \xi\overline{\eta}\mathrm{d}\lambda &= \int \xi\eta^{-1}\mathrm{d}\lambda \\
&= \int \xi(x + x_0)\eta^{-1}(x + x_0)\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \int \xi(x)\xi(x_0)\eta^{-1}(x)\eta^{-1}(x_0)\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \xi(x_0)\eta^{-1}(x_0) \int \xi\overline{\eta}\mathrm{d}\lambda,
\end{aligned}$$

stoga nužno slijedi $\int \xi\overline{\eta}\mathrm{d}\lambda = 0$. □

Propozicija 4.1.6. *Ako je G diskretna grupa, onda je $\hat{G}$ kompaktna, a ako je G kompaktna grupa, onda je $\hat{G}$ diskretna.*

Dokaz. Ako je G diskretna, onda je Haarova mjera proporcionalna brojećoj mjeri pa postoji jedinica δ_0 u $L^1(G)$ koja je definirana s $\delta_0(0) = 1$, a u ostalim točkama je nula. Stoga možemo primijeniti propoziciju 2.1.5.

Za G kompaktnu prvo primijetimo da prema prethodnoj propoziciji slijedi $\int \xi\, 1\mathrm{d}\lambda = 0$, ako $\xi \not\equiv 1$, $\xi \in \hat{G}$. Stoga, kako je $1 \in L^1(G)$, skup $\{f \in L^\infty(G) \mid |\int f\, 1\mathrm{d}\lambda| > 0\}$ je slabo* otvoren, pa $\{f \in L^\infty(G) \mid |\int f\, 1\mathrm{d}\lambda| > 0\} \cap \hat{G}$ sadrži samo $\{1\}$ i otvoren je u $\hat{G}$. Tvrdnja teorema sada slijedi iz translatorne invarijantnosti topologije grupe. □

Propozicija 4.1.7. *Neka je $G_1, G_2, \ldots, G_n$ konačni niz lokalno kompaktnih, Hausdorffovih, σ-kompaktnih, Abelovih grupa. Tada je $\widehat{\prod_{i=1}^n G_i}$ izomorfno $\prod_{i=1}^n \hat{G}_i$.*

Dokaz. Svaki element $\prod_{i=1}^{n} \hat{G}_i$ definira karakter na $\prod_{i=1}^{n} G_i$ formulom

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \xi_1(x_1)\xi_2(x_2)\ldots\xi_n(x_n).$$

Obrnuto, ako uzmemo $\xi \in \widehat{\prod_{i=1}^{n} G_i}$, za $i = 1, 2, \ldots, n$ definiramo

$$\xi_i(x_i) = \xi(0, 0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0),$$

gdje je ξ_i očito karakter na G_i; no onda vrijedi

$$\begin{aligned}
\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \xi(\sum_{i=1}^{n}(0, 0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \xi(0, 0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0) \\
&= \xi_1(x_1)\xi_2(x_2)\ldots\xi_n(x_n),
\end{aligned}$$

pa tvrdnja slijedi. □

Napomena 4.1.8. *Ako imamo familiju kompaktnih grupa $(G_i)_{i\in I}$ i na njima uzmemo normiranu Haarovu mjeru ($\lambda_i(G_i) = 1$, za sve $i \in I$), može se pokazati da se na produktu $\prod_{i\in I} G_i$ može konstruirati normirana Haarova mjera koja se, u smislu Fubinijevog teorema, dobro ponaša u odnosu na početne Haarove mjere λ_i, i za koju vrijedi $\widehat{\prod_{i\in I} G_i} = \sum_{i\in I} \hat{G}_i$ (vidi [3]). Posebno, uzmemo li neprebrojiv I i $G_i = \mathbb{T}$ za sve $i \in I$, vrijedi $\hat{G}_i = \mathbb{Z}$, pa je $\widehat{\prod_{i\in I} G_i} = \sum_{i\in I} \mathbb{Z}$. Slijedi da, ako imamo kompaktnu grupu, njezina dualna grupa čak ne mora nužno biti σ-kompaktna.*

4.2 Fourierova transformacija

Zbog napomene 4.1.8 nadalje ćemo pretpostavljati da je dualna grupa $\hat{G}$ σ-kompaktna. Također, prema rezultatima prethodnog odjeljka, možemo fiksirati neku Haarovu mjeru ρ na $\hat{G}$.

Definicija 4.2.1. Fourierova transformacija $\mathcal{F}$ *je preslikavanje s $L^1(G)$ u prostor funkcija na $\hat{G}$ definirano s*

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) = \int f(x)\overline{\xi(x)}\mathrm{d}\lambda(x).$$

Vidimo da je Fourierova transformacija zapravo Geljfandova transformacija jer je (po teoremu 4.1.3) $\hat{G} \cong \sigma(L^1(G))$ i $\xi(f) = \int f(x)\overline{\xi(x)}\mathrm{d}\lambda(x)$. Stoga možemo primijeniti teorem 2.2.2, odnosno teoreme 2.1.6 i 2.1.8 da dobijemo:

Teorem 4.2.2. *Fourierova transformacija $\mathcal{F}$ je *-homomorfizam Banachovih *-algebri $L^1(G)$ i $C_0(\hat{G})$ s normom $\|\mathcal{F}\| \leq 1$ i slikom gustom u $C_0(\hat{G})$*

Dokaz. Vidimo da treba provjeriti samo da je $L^1(G)$ simetrična, tj. da ako vrijedi $f = f^*$, onda $\hat{f}$ poprima samo realne vrijednosti. $f = f^*$ znači da $f(x) = \overline{f(-x)}$ za sve $x \in G$, pa

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int f(x)\overline{\xi(x)}\mathrm{d}\lambda(x) = \int f(x)\xi(-x)\mathrm{d}\lambda(x)\\ &= \int f(-x)\xi(x)\mathrm{d}\lambda(x) = \int \overline{f(x)}\xi(x)\mathrm{d}\lambda(x)\\ &= \overline{\int f(x)\overline{\xi(x)}\mathrm{d}\lambda(x)} = \overline{\hat{f}(\xi)}.\end{aligned}$$

□

Lako se provjere iz definicije sljedeća svojstva Fourierove transformacije:

$$\begin{aligned}\widehat{\tau_x f}(\xi) &= \overline{\xi(x)}\hat{f}(\xi),\\ \widehat{\eta f}(\xi) &= \tau_\eta \hat{f}(\xi),\end{aligned} \tag{4.1}$$

za $\xi, \eta \in \hat{G}$ i $x \in G$.

Definicija 4.2.3. *Fourierova je transformacija na $M(G)$ preslikavanje s $M(G)$ u prostor funkcija na $\hat{G}$ definirano s*

$$\hat{\mu}(\xi) = \int \overline{\xi(x)}\mathrm{d}\mu(x).$$

Teorem 4.2.4. *Fourierova je transformacija na $M(G)$ *-homomorfizam sa $M(G)$ u prostor ograničenih neprekidnih funkcija na $\hat{G}$. Nadalje, norma Fourierove transformacije je manja ili jednaka* 1.

Dokaz. Fourierova je transformacija očito ograničen linearan opeartor sa slikom u prostoru ograničenih funkcija i normom manjom ili jednakom 1. Za neprekidnost funkcije $\hat{\mu}$, gdje je μ kompleksna Radonova mjera na G, fiksirajmo $\xi \in \hat{G}$ i uzmimo $\epsilon > 0$. Tada, po unutarnjoj regularnosti od $|\mu|$, postoji kompaktan skup $K \subseteq G$ takav da je $|\mu|(G \setminus K) < \epsilon$. Stoga za sve η iz okoline od ξ $\{\eta \in \hat{G} \mid |\xi(x) - \eta(x)| < \epsilon$, za sve $x \in K\}$ vrijedi

$$\begin{aligned}|\hat{\mu}(\xi) - \hat{\mu}(\eta)| &= \left|\int (\overline{\xi} - \overline{\eta})\mathrm{d}\mu\right|\\ &\leq \int_K |\overline{\xi} - \overline{\eta}|\mathrm{d}|\mu| + \int_{G\setminus K} |\overline{\xi} - \overline{\eta}|\mathrm{d}|\mu|\\ &< \epsilon \int_K \mathrm{d}|\mu| + 2\epsilon \leq \epsilon(\|\mu\| + 2),\end{aligned}$$

pa slijedi neprekidnost. Preostaje pokazati da je *-homomorfizam, tj. da za $\mu, \nu \in M(G)$ vrijedi $\widehat{\mu * \nu} = \hat{\mu}\hat{\nu}$. Sada iz propozicije 3.3.6 dobivamo za $\xi \in \hat{G}$

$$\begin{aligned}(\widehat{\mu * \nu})(\xi) &= \int \overline{\xi} \mathrm{d}(\mu * \nu) = \int\int \overline{\xi(x+y)} \mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y) \\ &= \int\int \overline{\xi(x)\xi(y)} \mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y) = \hat{\mu}(\xi)\hat{\nu}(\xi).\end{aligned}$$

□

Sljedeće nas zanima inverz Fourierove transformacije. Za to trebamo promatrati transformaciju sličnu kao u definiciji 4.2.3, na prostoru kompleksnih Radonovih mjera u $M(\hat{G})$. Ako je $\mu \in M(\hat{G})$, definiramo funkciju ϕ_μ na G formulom

$$\phi_\mu(x) = \int \xi(x)\mathrm{d}\mu(\xi). \tag{4.2}$$

Funkcija $\xi \mapsto \xi(x)$ je ograničena i neprekidna (jer je topologija na $\hat{G}$ topologija uniformne konvergencije na kompaktnim skupovima), pa definicija ϕ_μ ima smisla. Imamo teorem sličan prethodnom.

Propozicija 4.2.5. *Preslikavanje $\mu \mapsto \phi_\mu$ je ograničeni injektivni linearni operator norme najviše* 1 *koji sa prostora kompleksnih Radonovih mjera $M(\hat{G})$ ide u prostor ograničenih neprekidnih funkcija na G.*

Dokaz. Ograničenost funkcije ϕ_μ je očita. Također je očito da je norma danog operatora najviše jedan. Da bi dokazali neprekidnost funkcije ϕ_μ, uzmimo proizvoljne $x \in G$ i $\epsilon > 0$. Tada po unutarnjoj regularnosti od μ postoji kompaktan skup $K \subseteq \hat{G}$ takav da $\mu(\hat{G} \setminus K) < \epsilon$. Po teoremu Arzelà-Ascoli (1.1.14) slijedi da je K ekvikontinuirana familija funkcija $G \to \mathbb{C}$, pa postoji okolina U od x takva da $(\forall y \in U)(\forall \xi \in K)|\xi(x) - \xi(y)| < \epsilon$. Sada slijedi neprekidnost jer za sve $y \in U$ vrijedi

$$\begin{aligned}|\phi(x) - \phi(y)| &\leq \int |\xi(x) - \xi(y)|\mathrm{d}|\mu|(\xi) \\ &= \int_{\hat{G}\setminus K} |\xi(x) - \xi(y)|\mathrm{d}|\mu|(\xi) + \int_K |\xi(x) - \xi(y)|\mathrm{d}|\mu|(\xi) \\ &\leq 2\epsilon + \epsilon|\mu|(K) \leq (2 + \|\mu\|)\epsilon.\end{aligned}$$

Dokažimo još injektivnost. Pretpostavimo da je $\mu \in M(\hat{G})$ takav da $\phi_\mu \equiv 0$. Tada za sve $f \in L^1(G)$ vrijedi

$$\begin{aligned}\int \phi_\mu(x) f(x) \mathrm{d}\lambda(x) &= \int \int \xi(x) f(x) \mathrm{d}\mu(\xi) \mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \int \overline{\int \overline{\xi(x) f(x)} \mathrm{d}\lambda(x)} \mathrm{d}\mu(\xi) \\ &= \int \hat{f}(\xi^{-1}) \mathrm{d}\mu(\xi),\end{aligned}$$

pa kako je slika Fourierove transformacije gusta u $C_0(\hat{G})$, nužno mora biti $\mu \equiv 0$. □

Teorem 4.2.6 (Bochnerov teorem)**.** *Preslikavanje $\mu \mapsto \phi_\mu$ je bijekcija sa skupa konačnih, pozitivnih Radonovih mjera na $\hat{G}$, u skup neprekidnih funkcija pozitivnog tipa $\mathcal{P}(G)$ u G.*

Dokaz. Zbog prethodne propozicije 4.2.5, dovoljno je dokazati da je $\mu \mapsto \phi_\mu$ surjekcija na $\mathcal{P}(G)$. Stoga, neka je $\mu \in M(\hat{G})$ pozitivna mjera. Tada za sve $f \in L^1(G)$ vrijedi

$$\begin{aligned}\int (f * f^*) \phi_\mu \mathrm{d}\lambda &= \int \int f(x) \overline{f(y)} \phi_\mu(x-y) \mathrm{d}\lambda(x) \mathrm{d}\lambda(y) \\ &= \int \int \int f(x) \overline{f(y)} \xi(x-y) \mathrm{d}\mu(\xi) \mathrm{d}\lambda(x) \mathrm{d}\lambda(y) \\ &= \int \int \int f(x) \xi(x) \overline{f(y) \xi(y)} \mathrm{d}\lambda(x) \mathrm{d}\lambda(y) \mathrm{d}\mu(\xi) \\ &= \int |\hat{\overline{f}}|^2(\xi) \mathrm{d}\mu(\xi) \geq 0,\end{aligned}$$

pa je ϕ_μ funkcija pozitivnog tipa.

Obrnuto, uzmimo $\phi \in \mathcal{P}(G)$. Zbog homogenosti preslikavanja $\mu \mapsto \phi_\mu$, možemo pretpostaviti da je $\phi(0) = 1 = \|\phi\|_\infty$. Prisjetimo se (poglavlje 3, odjeljak 3.4) da ϕ definira pozitivno semidefinitnu hermitsku formu na $L^1(G)$,

$$\langle f \,|\, g \rangle_\phi = \int (f * g^*) \phi \mathrm{d}\lambda = \int \int f(x) \overline{g(y)} \phi(x-y) \mathrm{d}\lambda(x) \mathrm{d}\lambda(y).$$

Primijenimo li sada Cauchy-Schwarzovu nejednakost na aproksimaciju jedinice $(\psi_U)_{U \in \mathscr{U}}$ i proizvoljnu $f \in L^1(G)$, dobijemo

$$\left| \int f * \psi_U^* \phi \mathrm{d}\lambda \right| \leq \int (f * f^*) \phi \mathrm{d}\lambda \int (\psi_U * \psi_U^*) \phi \mathrm{d}\lambda. \tag{4.3}$$

Pokažimo da je $\psi_U * \psi_U^* = \psi_U * \psi_U$ opet aproksimacija identitete. Prvo vidimo da za $x \in G$ je $\psi_U * \psi_U(x) = \int \psi_U(x-y) \psi_U(y) \mathrm{d}\lambda(y)$, pa je $\operatorname{supp} \psi_U * \psi_U$ sadržan u $U + U$, ali kako je $(U)_{U\in\mathscr{U}}$ baza okoline 0, zbog propozicije 3.1.3, pod (ii), i $(U+U)_{U\in\mathscr{U}}$ je baza okoline 0. Također,

$$\begin{aligned}\psi_U * \psi_U(-x) &= \int \psi_U(-x-y)\psi_U(y)\mathrm{d}\lambda(y) = \int \psi_U(x+y)\psi_U(y)\mathrm{d}\lambda(y)\\ &= \int \psi_U(x-y)\psi_U(-y)\mathrm{d}\lambda(y) = \int \psi_U(x-y)\psi_U(y)\mathrm{d}\lambda(y)\\ &= \psi_U * \psi_U(x),\end{aligned}$$

i jednako tako se lako pokaže da je $\int \psi_U * \psi_U \mathrm{d}\lambda = (\int \psi_U)^2 = 1$.

Sada, ako uzmemo $\epsilon > 0$, onda postoji okolina $U+U$ od 0 za neku $U \in \mathscr{U}$ takva da $|\phi(0) - \phi(x)| < \epsilon$ za sve $x \in U+U$. Slijedi da

$$\begin{aligned}\left|\int (\psi_U * \psi_U^*)\phi(x)\mathrm{d}\lambda(x) - \phi(0)\right| &\leq \int_{U+U} (\psi_U * \psi_U^*)|\phi(x) - \phi(0)|\mathrm{d}\lambda(x)\\ &< \epsilon \int_{U+U} (\psi_U * \psi_U^*)\mathrm{d}\lambda(x) = \epsilon,\end{aligned}$$

tj. $\int (\psi_U * \psi_U^*)\phi(x)\mathrm{d}\lambda(x) \to \phi(0) = 1$. Kako je $f * \psi_U^* \to f$ u $L^1(G)$, posebno $\int f * \psi_U^* \phi \mathrm{d}\lambda \to \int f\phi\mathrm{d}\lambda$, pa pustimo li limes po $U \in \mathscr{U}$ u 4.3, dobivamo

$$\left|\int f\phi\mathrm{d}\lambda\right|^2 \leq \int (f * f^*)\phi\mathrm{d}\lambda.$$

Sljedeće definiramo niz funkcija $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekurzivno s $h_1 = f^* * f$ i $h_{n+1} = h_n * h_1$, $n \in \mathbb{N}$. Primijetimo da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $h_n^* = h_n$, pa iz prethodne nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}\left|\int f\phi\mathrm{d}\lambda\right| &\leq \left(\int h_1\phi\mathrm{d}\lambda\right)^{1/2} \leq \left(\int h_2\phi\mathrm{d}\lambda\right)^{1/4}\\ &\leq \left(\int h_4\phi\mathrm{d}\lambda\right)^{1/8} \leq \ldots \leq \left(\int h_{2^n}\phi\mathrm{d}\lambda\right)^{2^{-n-1}}\\ &\leq \|h_{2^n}\|_1^{2^{-n-1}},\end{aligned}$$

i sada po teoremu 2.2.2, odnosno teoremu 2.1.6, pod (iv), te činjenice da je Fourierova transformacija *-homomorfizam, slijedi $\lim_{n\in\mathbb{N}} \|h_{2^n}\|_1^{2^{-n-1}} = \sqrt{\|\hat{h}\|_\infty} = \|\hat{f}\|_\infty$. Dobili smo $\left|\int f\phi\mathrm{d}\lambda\right| \leq \|\hat{f}\|_\infty$, pa je linearni funkcional $\hat{f} \mapsto \int f\phi\mathrm{d}\lambda$, definiran na slici Fourierove transformacije $\mathcal{F}(L^1(G))$, dobro definiran i norme je manje ili jednake 1. Kako je $\mathcal{F}(L^1(G))$ gust u $C_0(\hat{G})$, može se proširiti do funkcionala na $C_0(\hat{G})$ bez povećanja norme. No, po

Rieszovom teoremu reprezentacije, 1.2.9, postoji mjera $\nu \in M(\hat{G})$, isto norme $\|\nu\| \le 1$, takva da

$$\int f\phi \mathrm{d}\lambda = \int \hat{f}(\xi)\mathrm{d}\nu(\xi) = \int\int f(x)\overline{\xi(x)}\mathrm{d}\nu(\xi)\mathrm{d}\lambda(x),$$

za sve $f \in L^1(G)$. Stoga za sve $x \in G$ je $\phi(x) = \int \overline{\xi(x)}\mathrm{d}\nu(\xi) = \int \xi^{-1}(x)\mathrm{d}\nu(\xi)$. Definiramo li mjeru μ na $\hat{G}$ s $\mu(E) = \nu(E^{-1})$, uz supstituciju $\xi \mapsto \xi^{-1}$ slijedi $\phi(x) = \int \xi(x)\mathrm{d}\mu(\xi)$ za sve $x \in G$, tj. $\phi = \phi_\mu$. Preostaje pokazati da je μ pozitivna. Vidimo da iz $1 = \phi(0) = \mu(\hat{G}) \le \|\mu\| \le 1$ slijedi $\|\mu\| = \mu(\hat{G})$, pa μ mora biti pozitivna. □

Pomoću Bochnerovog teorema možemo u potpunosti opisati izgled slike operatora $\mu \mapsto \phi_\mu$ s domenom $M(\hat{G})$, jer sve elemente iz $M(\hat{G})$ možemo dobiti kao linearna kombinacija pozitvnih, konačnih Radonovih mjera na $\hat{G}$. Uvedimo, stoga, sljedeće oznake

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(G) &= \{\phi_\mu \mid \mu \in M(\hat{G})\} = \{\text{ linearne kombinacija elemenata iz } \mathcal{P}(G)\}\\ \mathscr{B}^p(G) &= \mathcal{B}(G) \cap L^p(G),\ p < \infty.\end{aligned}$$

Također uvodimo oznaku $\phi \mapsto \mu_\phi$ za inverz preslikavanja $\mu \mapsto \phi_\mu$. Tada za sve ϕ iz $\mathscr{B}(G)$ vrijedi $\phi_{\mu_\phi} = \phi$ i za sve $\mu \in M(\hat{G})$ je $\mu_{\phi_\mu} = \mu$. Primijetimo da (po propoziciji 3.4.9) $\mathscr{B}(G)$ sadrži sve funkcije oblika $f * g$ gdje su $f, g \in C_c(G)$, te da su $\mathscr{B}^p(G)$ gusti u $L^p(G)$ za sve $p < \infty$.

Iz dokaza Bochnerovog teorema vidimo da za sve parove $\mu \in M(\hat{G})$ i $\phi_\mu \in \mathscr{B}(G)$ i sve $f \in L^1(G)$ vrijedi

$$\int f(x)\phi_\mu(x)\mathrm{d}\lambda(x) = \int \hat{f}(\xi^{-1})\mathrm{d}\mu(\xi).$$

Stoga, kada bi f i ϕ_μ imale ravnopravnu ulogu u prethodnoj jednakosti, dobili bi još jednu jednakost. Po simetriji bi mogli modificirati desnu stranu u $\int \hat{\phi}(\xi^{-1})\mathrm{d}\mu_f(\xi)$. Vrijedi i jača tvrdnja.

Propozicija 4.2.7. *Neka su f i g iz $\mathscr{B}^1(G)$ proizvoljne. Tada je*

$$\hat{f}\mathrm{d}\mu_g = \hat{g}\mathrm{d}\mu_f.$$

Dokaz. Vidimo da su obje mjere $\hat{f}\mathrm{d}\mu_g$ i $\hat{g}\mathrm{d}\mu_f$ iz $M(\hat{G}) \cong C_0(\hat{G})^*$. Slijedi da je za njihovu jednakost, zbog gustoće $\mathcal{F}(L^1(G))$ u $C_0(\hat{G})$, dovoljno pokazati da su njihovi integrali u odnosu na funkcije oblika $\hat{h}$, $h \in L^1(G)$, jednaki. Stoga, za $h \in L^1(G)$ računamo

$$\begin{aligned}
\int \hat{h}\hat{f}\mathrm{d}\mu_g &= \int \widehat{h * f}\mathrm{d}\mu_g = \int\int (h * f)(-x)g(x)\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \int\int h(y)f(-x-y)g(x)\mathrm{d}\lambda(y)\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \int\int h(y)f(x)g(-x-y)\mathrm{d}\lambda(y)\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \int\int (h * g)(-x)f(x)\mathrm{d}\lambda(x) = \int \widehat{h * g}\mathrm{d}\mu_f \\
&= \int \hat{h}\hat{g}\mathrm{d}\mu_f.
\end{aligned}$$

Pri tome smo koristili jednakost spomenutu prije ove propozicije. □

Lema 4.2.8. *Za sve kompaktne skupove K u $\hat{G}$ postoji $f \in C_c(G) \cap \mathcal{P}(G)$ takva da je $\hat{f}$ nenegativna na $\hat{G}$ i $\hat{f} > 0$ na K.*

Dokaz. Normirajući, možemo uzeti funkciju $h \in C_c(G)$ takvu da $\hat{h}(0) = \int h\mathrm{d}\lambda = 1$. Stoga, kako je Fourierova transformacija *-homomorfizam, slijedi da za $g = h * h^* \in C_c(G)$ vrijedi $\hat{g} = |\hat{h}|^2$. Posebno je $\hat{g} \geq 0$ i $\hat{g}(0) = 1$. Iz neprekidnosti od $\hat{g}$ slijedi da postoji okolina U od 0 takva da za sve $\xi \in U$ je $\hat{g}(\xi) > 0$. Po kompaktnosti pokrijemo K sa konačno skupova $\xi_i + U$, $i = 1, 2, \dots, n$, i definiramo traženu funkciju s $f = \sum_{i=1}^n \xi_i g$. Kao konačna suma funkcija iz $C_c(G)$ je opet u $C_c(G)$ i po 4.1 dobivamo $\hat{f}(\xi) = \sum_{i=1}^n \hat{g}(\xi - \xi_i)$, pa je nenegativna na $\hat{G}$ i strogo pozitivna na K. Još treba primijetiti da, kako je g funkcija pozitivnog tipa po propoziciji 3.4.8, pod (iii), slijedi da je i f pozitivnog tipa. Naime, za sve $\varphi \in L^1(G)$, $\xi \in \hat{G}$ i $x \in G$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\xi(x)(\varphi * \varphi^*)(x) &= \int \xi(x)\varphi(y)\overline{\varphi(y-x)}\mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \int \xi(y)\varphi(y)\overline{\xi(y-x)\varphi(y-x)}\mathrm{d}\lambda(y) \\
&= ((\xi\varphi) * (\xi\varphi)^*)(x),
\end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned}
\int f(\varphi * \varphi^*)\mathrm{d}\lambda &= \int \sum_{i=1}^n \xi_i g(\varphi * \varphi^*)\mathrm{d}\lambda \\
&= \sum_{i=1}^n \int g((\xi_i\varphi) * (\xi_i\varphi)^*)\mathrm{d}\lambda \geq 0.
\end{aligned}$$

□

Teorem 4.2.9 (Fourierova inverzija I)**.** *Za sve $f \in \mathscr{B}^1(G)$ vrijedi $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$. Nadalje, za svaku Haarovu mjeru λ na G možemo odabrati takvu Haarovu mjeru ρ na $\hat{G}$ da vrijedi $\mathrm{d}\mu_f = \hat{f}\mathrm{d}\rho$. Posebno je $f(x) = \int \xi(x)\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\rho(\xi)$.*

Dokaz. Traženi ćemo ρ dobiti tako da konstruiramo pripadni pozitivni linearni funkcional na $C_c(\hat{G})$ (pogledati teorem 1.2.8). Za $\varphi \in C_c(\hat{G})$, po prethodnoj lemi (4.2.8), postoji g iz $L^1(G) \cap \mathcal{P}(G)$ takav da je $\hat{g}$ strogo pozitivan na $\operatorname{supp}\varphi$. Definiramo traženi funkcional I s

$$I(\varphi) = \int_{\operatorname{supp}\varphi} \varphi\hat{g}^{-1}\mathrm{d}\mu_g.$$

Definicija je dobra jer za isti takav h kao g po propoziciji 4.2.7 vrijedi

$$\begin{aligned}\int_{\operatorname{supp}\varphi} \varphi\hat{g}^{-1}\mathrm{d}\mu_g &= \int_{\operatorname{supp}\varphi} \varphi(\hat{g}\hat{h})^{-1}\hat{h}\mathrm{d}\mu_g \\ &= \int_{\operatorname{supp}\varphi} \varphi(\hat{g}\hat{h})^{-1}\hat{g}\mathrm{d}\mu_h \\ &= \int_{\operatorname{supp}\varphi} \varphi\hat{h}^{-1}\mathrm{d}\mu_h.\end{aligned}$$

Kada uzmemo $\varphi, \psi \in C_c(G)$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, nađemo funkciju $g \in L^1(G) \cap \mathcal{P}(G)$ takvu da je $\hat{g}$ strogo pozitivna na uniji kompaktnih skupova $\operatorname{supp}\varphi$, $\operatorname{supp}\psi$ i $\operatorname{supp}(\alpha\varphi + \beta\psi)$, pa sada lako slijedi linearnost od I primijenimo li ovaj g u definiciji od I. Da je $I(\varphi)$ nenegativan čim je $\varphi \in C_c(\hat{G})$ nenegativan, dobivamo iz Bochnerovog teorema prema kojemu je μ_g nenegativna mjera. Stoga je I pozitivan linearan funkcional na prostoru $C_c(\hat{G})$.

Sljedeće pokazujemo da je I netrivijalan i invarijantan na translacije. Za $f \in \mathscr{B}^1$ vidimo da zbog propozicije 4.2.7 vrijedi $I(\hat{f}\varphi) = \int_{\operatorname{supp}\hat{f}\varphi} \varphi\hat{g}^{-1}\hat{f}\mathrm{d}\mu_g = \int_{\operatorname{supp}\varphi} \varphi\mathrm{d}\mu_f$, pa zbog injektivnosti preslikavanja $f \mapsto \mu_f$ možemo izabrati f i $\varphi \in C_c(\hat{G})$ takve da je $I(\hat{f}\varphi) \neq 0$. Da bismo dokazali invarijanost na translacije, primijetimo da za $\eta \in \hat{G}$ i $g \in C_c(G) \cap \mathcal{P}(G)$ vrijedi

$$\begin{aligned}\int \xi(x)\mathrm{d}\mu_g(\eta\xi) &= \int (\xi\eta^{-1})(x)\mathrm{d}\mu_g(\xi) \\ &= \overline{\eta(x)}g(x) = (\overline{\eta}g)(x),\end{aligned}$$

pri čemu $\mathrm{d}\mu_g(\eta\xi)$ označava mjeru μ_g, translatiranu za η. Po bijektivnosti korespondencije $f \mapsto \mu_f$ zaključujemo da $\mathrm{d}\mu_g(\eta\xi) = \mathrm{d}\mu_{\overline{\eta}g}\xi$. Valja još primijetiti da je, prema dokazu prethodne leme, $\overline{\eta}g$ opet pozitivnog tipa. Uzmemo li $\varphi \in C_c(\hat{G})$, možemo po prethodnoj lemi dodatno pretpostaviti da je $\hat{g}$ strogo pozitivna na $\operatorname{supp}\varphi$ i $\operatorname{supp}\tau_\eta\varphi$, pa vrijedi

$$\begin{aligned}
I(\tau_\eta\varphi) &= \int_{\operatorname{supp}\tau_\eta\varphi} \tau_\eta\varphi(\xi)(\hat{g}(\xi))^{-1}\mathrm{d}\mu_g(\xi) = \int_{\operatorname{supp}\tau_\eta\varphi} \varphi(\xi\eta^{-1})(\hat{g}(\xi))^{-1}\mathrm{d}\mu_g(\xi)\\
&= \int_{\operatorname{supp}\varphi} \varphi(\xi)(\hat{g}(\eta\xi))^{-1}\mathrm{d}\mu_g(\eta\xi) = \int_{\operatorname{supp}\varphi} \varphi(\xi)(\widehat{\overline{\eta}g}(\xi))^{-1}\mathrm{d}\mu_{\overline{\eta}g}\xi\\
&= I(\varphi),
\end{aligned}$$

tj. I je invarijantna na translacije. Slijedi da je I dana integriranjem u odnosu na neku Haarovu mjeru ρ, $I(\varphi) = \int \varphi\mathrm{d}\rho$. Ranije u dokazu smo pokazali da za $f \in \mathscr{B}^1(G)$ je $I(\varphi\hat{f}) = \int_{\operatorname{supp}\varphi}\varphi\mathrm{d}\mu_f$, pa je $\int_{\operatorname{supp}\varphi}\varphi\mathrm{d}\mu_f = \int\varphi\mathrm{d}\mu_f = \int\varphi\hat{f}\mathrm{d}\rho$ za sve $\varphi \in C_c(\hat{G})$. Zaključujemo da je $\mathrm{d}\mu_f = \hat{f}\mathrm{d}\rho$ i, jer je $\mathrm{d}\mu_f$ kompleksna, pa onda i konačna mjera, vrijedi $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$. $\square$

Imamo i jednostavan korolar koji direktno slijedi iz Bochnerovog teorema i teorema Fourierove inverzije.

Korolar 4.2.10. *Ako je $f \in L^1(G) \cap \mathcal{P}(G)$, $\hat{f}$ je nenegativna.*

Definicija 4.2.11. *Haarova mjera ρ na $\hat{G}$ koja zadovoljava formulu iz teorema Fourierove inverzije, $\mathrm{d}\mu_f = \hat{f}\mathrm{d}\rho$, $f \in \mathscr{B}^1(\hat{G})$, zovemo* dualna mjera *mjere λ.*

Kako je Haarova mjera jedinstvena do na konstantu, iz definicije Fourierove transformacije i teorema Fourierove inverzije, jasno slijedi da je dualna mjera jedinstvena i da daje jedan-jedan korespondenciju između Haarovih mjera na G i Haarovih mjera na $\hat{G}$. Ako je ρ dualna mjera Haarove mjere λ, onda je $c\rho$ dualna mjera mjere $c^{-1}\lambda$, za sve $c > 0$. Stoga nadalje pretpostavljamo da je λ neka fiksna Haarova mjera i ρ pripadna dualna mjera.

Teorem 4.2.12 (Plancherel)**.** *Fourierova se transformacija na $L^1(G) \cap L^2(G)$ može proširiti do unitarnog operatora na $L^2(G)$.*

Dokaz. Neka je $f \in L^1(G) \cap L^1(G)$. Tada je $f * f^* \in L^1(G) \cap \mathcal{P}(G)$ po propoziciji 3.4.8, pa po teoremu o Fourierovoj inverziji i *-homomorfizmosti Fourierove transformacije

$$\int |f|^2\mathrm{d}\lambda = f * f^*(0) = \int \overline{\xi(0)}(\widehat{f * f^*})(\xi)\mathrm{d}\rho(\xi) = \int |\hat{f}|^2\mathrm{d}\rho.$$

Zaključujemo da je $\hat{f} \in L^2(\hat{G})$, i da je preslikavanje $\mathcal{F} : L^1(G) \cap L^2(G) \to L^2(\hat{G})$, gledamo li na oba prostora L^2 norme, izometrija. Kako je $L^1(G) \cap L^2(G)$ gust u $L^2(G)$ jer sadrži $C_c(G)$, možemo $\mathcal{F}$ proširiti do izometrije $L^2(G) \to L^2(G)$, pa preostaje pokazati surjektivnost. Neka je $\varphi \in L^2(\hat{G})$ i pretpostavimo da je $\langle\varphi \,|\, \hat{f}\rangle_{L^2(\hat{G})} = 0$ za sve $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Za sve $x \in G$, po 4.1, imamo:

$$0 = \int \varphi\overline{\widehat{\tau_x f}}\mathrm{d}\rho = \int \varphi(\xi)\xi(x)\overline{\hat{f}(\xi)}\mathrm{d}\rho(\xi),$$

pa kako je produkt elementa iz $L^2(\hat{G})$ element iz $L^1(\hat{G})$, slijedi da je $\varphi(\xi)\overline{\hat{f}(\xi)}\mathrm{d}\rho(\xi)$ element $M(\hat{G})$ koji označimo s ν. Dakle, imamo relaciju $0 = \int \xi(x)\mathrm{d}\nu(\xi)$ za sve $x \in G$, tj. $0 \equiv \phi_\nu$. No to je moguće samo ako je ν trivijalna mjera jer je $\mu \mapsto \phi_\mu$ bijekcija $M(\hat{G}) \to \mathscr{B}(G)$. Slijedi da je i $\varphi \equiv 0$. □

Teorem 4.2.13 (Hausdroff-Youngova nejednakost)**.** *Neka su $p \in [1,2]$ i $q \in [2,\infty]$ takvi da $1/p + 1/q = 1$. Tada za $f \in L^p(G)$ vrijedi $\hat{f} \in L^q(\hat{G})$ i $\|f\|_p \leq \|\hat{f}\|_q$.*

Dokaz. Slijedi iz Riesz-Thorinovog teorema (1.2.6) jer je $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ i $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ po prethodnom Plancherelovom teoremu. □

Imamo sljedeća dva korisna rezultata u slučaju da je G kompaktna ili diskretna grupa.

Propozicija 4.2.14. *Ako je G kompaktna grupa i $\lambda(G) = 1$, onda je $\hat{G}$ ortonormirana baza za $L^2(G)$.*

Dokaz. Po propoziciji 4.1.5 znamo da je $\hat{G}$ ortonormiran skup, pa je dovoljno dokazati maksimalnost. Neka je $f \in L^2(G)$ takav da $\langle f \,|\, \xi\rangle_{L^2(G)} = \int f\overline{\xi}\mathrm{d}\lambda = 0$ za sve $\xi \in \hat{G}$. To znači da je $\hat{f} \equiv 0$, pa je po Plancherelovom teoremu $f \equiv 0$. □

Propozicija 4.2.15. *Ako je G kompaktna grupa i $\lambda(G) = 1$, onda je dualna mjera ρ brojeća mjera. Ako je G diskretna grupa i λ brojeća mjera, onda je $\rho(\hat{G}) = 1$.*

Dokaz. Neka je G kompaktna i $\lambda(G) = 1$. Tada za karakterističnu funkciju $\chi_G \equiv 1$ i $\xi \in \hat{G}$ vrijedi $\hat{\chi}_G(\xi) = \int \overline{\xi(x)}\mathrm{d}\lambda(x) = \langle 1 \,|\, \xi\rangle_{L^2(G)}$, pa po propoziciji 4.1.5 vrijedi $\hat{\chi}_G = \chi_{\{1\}}$. Po teoremu o Fourierovoj inverziji (kojeg možemo primijeniti jer je $\chi_G * \chi_G^* = \chi_G$, pa je, po propoziciji 3.4.8, $\chi_G \in \mathcal{P}(G)$) je, za $x \in G$, $1 = \chi_G(x) = \sum_{\xi\in\hat{G}} \xi(x)\chi_{\{1\}}(\xi)\mathrm{d}\rho(\xi) = \rho(\{1\})$, tj. ρ je brojeća mjera.

Pretpostavimo da je G diskretna i λ brojeća mjera. Primijetimo da je

$$\hat{\chi}_{\{0\}}(\xi) = \int \overline{\xi(x)}\chi_{\{0\}}(x)\mathrm{d}\lambda(x) = \overline{\xi(0)} = 1,$$

i, kako je $\chi_{\{0\}}$ pozitivnog tipa zbog $\chi_{\{0\}} * \chi_{\{0\}}^* = \chi_{\{0\}}$, $\chi_{\{0\}}(x) = \int \xi(x)\mathrm{d}\rho(\xi)$ po teoremu o Fourierovoj inverziji. Uvrstimo li $x = 0$, $1 = \rho(\hat{G})$ slijedi. □

4.3 Teorem o dualnosti

Primijetimo da smo u prethodnom odjeljku imali rezultate u samo jednom smjeru. Na primjer, kompaktnost, odnosno diskretnost, grupe G povlači diskretnost, odnosno kompaktnost, dualne grupe $\hat{G}$, ali to a priori ne znači da vrijedi i obrat, tj. da kompaktnost, odnosno diskretnost, grupe $\hat{G}$ povlači diskretnost, odnosno kompaktnost, naše početne grupe G. U ovom ćemo odjeljku u tom smislu upotpuniti rezultate prethodnog odjeljka, a ključan je rezultat Pontrjaginov teorem o dualnosti.

Lema 4.3.1. *Ako su $\varphi, \psi \in C_c(\hat{G})$, onda je $\varphi * \psi = \hat{h}$ za neki $h \in \mathscr{B}^1(G)$. Iz ovoga slijedi da je $\mathcal{F}(\mathscr{B}^1(G))$ gust u $L^p(\hat{G})$ za sve $p \in [1, \infty\rangle$.*

Dokaz. Definiramo funkcije $f(x) = \int \xi(x)\varphi(\xi)\mathrm{d}\rho(\xi)$, $g(x) = \int \xi(x)\psi(\xi)\mathrm{d}\rho(\xi)$, $x \in G$, pa su $f, g \in \mathscr{B}(G)$. Stoga $\int f\overline{k}\mathrm{d}\lambda$ i $\int g\overline{k}\mathrm{d}\lambda$ imaju smisla i imamo da za svaki $k \in L^1(G) \cap L^2(G)$, po Cauchy-Schwarzovoj nejednakosti i Plancherelovom teoremu (4.2.12), vrijedi

$$\begin{aligned}\left|\int f\overline{k}\mathrm{d}\lambda\right| &= \left|\int\int \xi(x)\varphi(\xi)\overline{k(x)}\mathrm{d}\rho(\xi)\mathrm{d}\lambda(x)\right| \\ &= \left|\int \varphi(\xi)\left(\int \xi(x)\overline{k(x)}\mathrm{d}\lambda(x)\right)\mathrm{d}\rho(\xi)\right| \\ &= \left|\int \varphi(\xi)\overline{\hat{k}(\xi)}\mathrm{d}\rho(\xi)\right| \\ &\leq \|\varphi\|_2\|\hat{k}\|_2 = \|\varphi\|_2\|k\|_2,\end{aligned}$$

pa možemo iskoristiti obrat Hölderove nejednakosti (teorem 1.2.1) da zaključimo $f \in L^2(G)$. Potpuno analogno dobijemo $|\int g\overline{k}\mathrm{d}\lambda| \leq \|\psi\|_2\|k\|_2$ za sve $k \in L^1(G) \cap L^2(G)$, pa je i $g \in L^2(G)$.

Dokažimo da je $h(x) = \int \xi(x)(\varphi * \psi)(\xi)\mathrm{d}\rho(\xi)$, $x \in G$, tražena funkcija. Vrijedi

$$\begin{aligned}h(x) &= \int\int \xi(x)\varphi(\eta)\psi(\xi\eta^{-1})\mathrm{d}\rho(\eta)\mathrm{d}\rho(\xi) \\ &= \int\int (\xi\eta)(x)\varphi(\eta)\psi(\xi)\mathrm{d}\rho(\eta)\mathrm{d}\rho(\xi) \\ &= f(x)g(x),\end{aligned}$$

pa je posebno $h \in L^1(G)$, a iz definicije slijedi $h \in \mathscr{B}(G)$, pa je $h \in \mathscr{B}^1(G)$. Na kraju još valja primijetiti da je po teoremu o Fourierovoj inverziji (4.2.9) $h(x) = \int \xi(x)\hat{h}(\xi)\mathrm{d}\rho(\xi)$, pa iz bijektivnosti preslikavanja $\mu \mapsto \phi_\mu$, $M(\hat{G}) \to \mathscr{B}(G)$, slijedi $\hat{h} = \varphi * \psi$.

Za drugu tvrdnju primijetimo da je $\mathcal{F}(\mathscr{B}^1(G))$, po teoremu o Fourierovoj inverziji, sadržan u $L^1(\hat{G})$, a znamo da je i u $L^\infty(\hat{G})$. Slijedi da je sadržan i u svim $L^p(\hat{G})$, $p \in [1, \infty]$. Gustoća slijedi slično kao u propoziciji 3.4.9. □

Teorem 4.3.2 (Pontrjaginov teorem o dualnosti)**.** *Preslikavanje $\Phi : G \to \hat{\hat{G}}$ definirano s*

$$\Phi(x)(\xi) = \xi(x),\ \xi \in \hat{G},$$

je izomorfizam topoloških grupa.

Dokaz. Budući da je topologija na $\hat{G}$ topologija uniformne konvergencije po kompaktnim skupovima, onda konvergencija u njoj povlači i konvergenciju po točkama, pa iz toga slijedi da je $\Phi(x)$ neprekidna funkcija za sve $x \in G$. Ako su $\xi, \eta \in \hat{G}$, onda $\Phi(x)(\xi\eta) = (\xi\eta)(x) = \xi(x)\eta(x) = \Phi(x)(\xi)\Phi(x)(\eta)$, pa je $\Phi(x)$ homomorfizam grupa $\hat{G}$ i $\mathbb{T}$. Zaključujemo da je $\Phi(x) \in \hat{\hat{G}}$ za sve $x \in G$ i $\Phi : G \to \hat{\hat{G}}$ je dobro definirano, pa treba pokazati još da je Φ bijektivan homomorfizam grupa koji je ujedno i homeomorfizam.

Primijetimo da za sve $x, y \in G$ i $\xi \in \hat{G}$ vrijedi $\Phi(x+y)(\xi) = \xi(x+y) = \xi(x)\xi(y) = \Phi(x)(\xi)\Phi(y)(\xi)$, pa je Φ homomorfizam grupa G i $\hat{\hat{G}}$. On je injektivan po teoremu Geljfand-Raikov (3.4.16). Naime, uzmemo li $x, y \in G$ takve da je $\xi(x) = \Phi(x)(\xi) = \Phi(y)(\xi) = \xi(y)$ za sve $\xi \in \hat{G}$, onda slijedi $x = y$ jer skup $\hat{G}$ razlikuje točke od G.

Da bismo pokazali da je Φ homeomorfizam na svoju sliku, dovoljno je dokazati sljedeće ekvivalencije za proizvoljan, fiksan hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ u G.

(i) $x_\alpha \to x$.

(ii) $f(x_\alpha) \to f(x)$, za sve $f \in \mathscr{B}^1(G)$.

(iii) $\int \xi(x_\alpha)\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\rho(\xi) \to \int \xi(x)\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\rho(\xi)$, za sve $f \in \mathscr{B}^1(G)$.

(iv) $\Phi(x_\alpha) \to \Phi(x)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) vrijedi po neprekidnosti funkcija $f \in \mathscr{B}^1(G)$. Obratno, pretpostavimo da $x_\alpha \not\to x$. Onda postoji otvoren skup U oko x i podhiperniz $(x_{h(\beta)})_{\beta\in B}$ takav da $x_{h(\beta)} \notin U$. Po propoziciji 3.4.9 možemo uzeti neprekidnu funkciju $f \in \mathscr{B}^1(G)$ takvu da je $f(x) \neq 0$ i $\operatorname{supp} f \subseteq U$, ali tada je $f(x_{h(\beta)}) = 0$ za sve $\beta \in B$, pa posebno $f(x_{h(\beta)}) \not\to f(x)$, tj. ne vrijedi (ii). Ekvivalencija (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) slijedi direktno iz teorema o Fourierovoj inverziji (4.2.9). Primijetimo sada da (iii) znači $\int \Phi(x_\alpha)\hat{f}\mathrm{d}\rho \to \int \Phi(x)\hat{f}\mathrm{d}\rho$, za sve $f \in \mathscr{B}^1(G)$. No, kako $\Phi(x)$ i $\Phi(x_\alpha)$ možemo (po teoremu 4.1.3) gledati kao na elemente prostora $L^\infty(\hat{G})^*$, a po prethodnoj lemi 4.3.1 $\mathcal{F}(\mathscr{B}^1(G))$ je gust u $L^1(\hat{G})$, pa slijedi ekvivalencija (iii) i (iv) i zaključujemo da je Φ homeomorfizam.

Preostaje pokazati surjektivnost. Prema prethodnom, $\Phi(G)$ je lokalno kompaktan potprostor od $\hat{\hat{G}}$, a prema propoziciji 3.1.4, pod (iii), $\Phi(G)$ je zatvoren u $\hat{\hat{G}}$. Stoga, ako pretpostavimo da postoji $z \in \hat{\hat{G}} \setminus \Phi(G)$, onda, po propoziciji 3.1.3, postoji otvorena simetrična okolina U od 1 u $\hat{\hat{G}}$ takva da je $zUU \cap \Phi(G)$ prazan skup. Sada odaberemo nenegativne, nenul φ i ψ iz $C_c(\hat{\hat{G}})$ takve da $\operatorname{supp}\varphi \subseteq zU$ i $\operatorname{supp}\psi \subseteq U$, pa je posebno $\varphi * \psi$ nenegativan i nenul i vrijedi $(\operatorname{supp}\varphi * \psi) \cap \Phi(G) = \emptyset$. Po prethodnoj lemi postoji $g \in \mathscr{B}^1(\hat{G})$ takav da je $\varphi * \psi = \hat{g}$, ali tada za sve $x \in G$

$$0 = \hat{h}(\Phi(-x)) = \int \Phi(x)(\xi)g(\xi)\mathrm{d}\rho(\xi) = \int \xi(x)g(\xi)\mathrm{d}\rho(\xi),$$

pa po bijektivnosti preslikavanja (Bochner, teorem 4.2.6) $\mu \mapsto \phi_\mu$, $M(\hat{G}) \to \mathscr{B}(G)$, (ovdje je $\mu = g\mathrm{d}\rho$), slijedi $g \equiv 0$. To je kontradikcija s $\varphi * \psi = \hat{g} \not\equiv 0$. $\square$

Prema upravo dokazanom teoremu možemo u potpunosti identificirati $\hat{\hat{G}}$ i $\Phi(G)$ i za sve $x \in G$ i $\xi \in \hat{G}$ možemo pisati $\xi(x) = x(\xi)$.

Teorem 4.3.3 (Fourierova Inverzija II)**.** *Neka su $f \in L^1(G)$ i $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$. Tada za gotovo sve $x \in G$ vrijedi $f(x) = \hat{\hat{f}}(-x)$. Ako je f neprekidna, onda $f(x) = \hat{\hat{f}}(x)$ vrijedi za sve $x \in G$.*

Dokaz. Vrijedi

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int \overline{\xi(x)} f(x) \mathrm{d}\lambda(x) = \int \xi(-x) f(x) \mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \int \xi(x) f(-x) \mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \int x(\xi) f(-x) \mathrm{d}\lambda(x),\end{aligned}$$

pa je $\hat{f} \in \mathscr{B}^1(\hat{G})$ i, uz oznake kao kod Bochnerovog teorema, vrijedi $\mathrm{d}\mu_{\hat{f}}(x) = f(-x)\mathrm{d}\lambda(x)$. Prema teoremu 4.2.9 je $f(-x)\mathrm{d}\lambda(x) = \hat{\hat{f}}\mathrm{d}\lambda(x)$, tj. $f(-x) = \hat{\hat{f}}(x)$ za gotovo sve $x \in G$. Ako je f neprekidna, a znamo da je $\hat{\hat{f}}$ uvijek neprekidna za $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$, slijedi da je nužno $f(-x) = \hat{\hat{f}}(x)$ za sve $x \in G$. □

Teorem 4.3.4 (Fourierova jedinstvenost)**.** *Ako su $\mu, \nu \in M(G)$ takve da $\hat{\mu} = \hat{\nu}$, onda je $\mu = \nu$. Posebno, ako je $\hat{f} = \hat{g}$ za neke $f, g \in L^1(G)$, onda je $f = g$ gotovo svugdje.*

Dokaz. Uz oznake iz Bochnerovog teorema, uz zamjenu uloga G i $\hat{G}$, dobivamo da za sve $\xi \in \hat{G}$ $\phi_\mu(\xi) = \int x(\xi)\mathrm{d}\mu(x)$ i $\phi_\nu(\xi) = \int x(\xi)\mathrm{d}\nu(x)$, pa je $\phi_\mu(-\xi) = \hat{\mu}(\xi) = \hat{\nu}(\xi) = \phi_\nu(-\xi)$. Sada po bijektivnosti iz Bochnerovog teorema slijedi $\mu = \nu$. □

Propozicija 4.3.5. *Ako je $\hat{G}$ kompaktna, onda je G diskretna. Ako je $\hat{G}$ diskretna, onda je G kompaktna.*

Propozicija 4.3.6. *Za sve funkcije $f, g \in L^2(G)$ vrijedi $\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$*

Dokaz. Dokažimo prvo za $f, g \in L^2(G) \cap \mathcal{F}(\mathscr{B}^1(\hat{G}))$. Tada postoje $\varphi, \psi \in L^2(\hat{G}) \cap \mathscr{B}^1(\hat{G})$ takvi da za sve $x \in G$ vrijedi $f(x) = \hat{\varphi}(-x)$ i $g(x) = \hat{\psi}(-x)$. Slično kao u lemi 4.3.1 pokaže se da vrijedi $\widehat{\varphi * \psi}(-x) = f(x)g(x)$, i po teoremu 4.2.9 je $\hat{f} = \varphi$ i $\hat{g} = \psi$. Stoga, kako su $\varphi * \psi$ i fg iz $L^1(G)$, možemo primijeniti teorem 4.3.3 da dobijemo

$$\hat{f} * \hat{g}(\xi) = \varphi * \psi(\xi) = \widehat{\widehat{\varphi * \psi}}(-\xi) = \widehat{fg}(\xi),$$

za sve $\xi \in \hat{G}$. Sada, ako uzmemo $f, g \in L^2(G)$, onda, po lemi 4.3.1, postoje nizovi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $L^2(\hat{G}) \cap \mathcal{F}(\mathscr{B}^1(\hat{G}))$ koji konvergiraju k f, odnosno g u L^2 normi. Iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti onda slijedi da $f_n g_n \to fg$ u $L^1(G)$, pa $\widehat{f_n g_n} \to \widehat{fg}$ uniformno. Isto tako, po teoremu 4.2.12, je $\hat{f}_n \to \hat{f}$ i $\hat{g}_n \to \hat{g}$ u $L^2(G)$, pa za sve $\xi \in \hat{G}$ po Cauchy-Schwarzu vrijedi

$$\begin{aligned}\left|\int (\hat{f}_n(\xi\eta^{-1})\hat{g}_n(\eta) - \hat{f}(\xi\eta^{-1})\hat{g}(\eta))\mathrm{d}\rho(\eta)\right| &\leq \int |(\hat{f}_n - \hat{f})(\xi\eta^{-1})\hat{g}_n(\eta) + \hat{f}(\xi\eta^{-1})(\hat{g}_n - \hat{g})(\eta)|\mathrm{d}\rho(\eta) \\ &\leq \|\hat{f}_n - \hat{f}\|_2 \, \|\hat{g}_n\|_2 + \|\hat{f}\|_2 \, \|\hat{g}_n - \hat{g}\|_2\end{aligned}$$

tj. $\hat{f}_n * \hat{g}_n \to \hat{f} * \hat{g}$ uniformno. □

Sljedeće ćemo pokazati dualnost između (zatvorenih) podgrupa i kvocijentnih grupa grupe G. Za zatvorenu podgrupu H od G definiramo

$$H^\perp = \{\xi \in \hat{G} \mid \xi(x) = 1, \text{ za sve } x \in H\}.$$

Lako je pokazati da je $H^\perp$ zatvorena podgrupa grupe $\hat{G}$.

Propozicija 4.3.7. *Za svaku zatvorenu podgrupu H od G vrijedi $(H^\perp)^\perp$.*

Dokaz. Neka je $x \in H$. Tada za svaki $\xi \in H^\perp$ je $\xi(x) = x(\xi) = 1$, tj. $x \in (H^\perp)^\perp$. Dokažimo obrat. Označimo s π kvocijentno preslikavanje s G u G/H i pretpostavimo da postoji $x \in (H^\perp)^\perp \setminus H$. Po teoremu Geljfand-Raikov (3.4.16) postoji $\eta \in \widehat{G/H}$ takav da $\eta(\pi(x)) \neq 1$. Primijetimo da je $\eta(\pi(y)) = \eta(H) = 1$ za sve $y \in H$, pa je $\eta \circ \pi \in H^\perp$, no onda $x \notin (H^\perp)^\perp$ što je kontradikcija. □

Teorem 4.3.8. *Neka je H zatvorena podgrupa u G i $\pi : G \to G/H$ kvocijentno preslikavanje. Tada su preslikavanja $\Phi : \widehat{G/H} \to H^\perp$ i $\Psi : \hat{G}/H^\perp \to \hat{H}$ definirana s*

$$\Phi(\eta) = \eta \circ \pi, \qquad \Psi(\xi H^\perp) = \xi\big|_H,$$

izomorfizmi topoloških grupa.

Dokaz. Trivijalno je pokazati da je Φ monomorfizam grupa $\widehat{G/H} \to H^\perp$. Za surjektivnost, neka je $\xi \in H^\perp$. Tada je ξ konstantan na H, pa, po svojstvu kvocijentnih prostora, postoji neprekidno preslikavanje $\eta : G/H \to \mathbb{T}$ takvo da je $\xi = \eta \circ \pi$. Slijedi da za $x, y \in G$ vrijedi

$$\eta((x + y) + H)) = \xi(x + y) = \xi(x)\xi(y) = \eta(x + H)\eta(y + H),$$

pa je $\eta \in \widehat{G/H}$ i $\Phi(\eta) = \xi$. Neka je sada $(\eta_\alpha)_{\alpha\in A}$ hiperniz u $\widehat{G/H}$, $\eta \in \widehat{G/H}$ takav da $\eta_\alpha \to \eta$ u $\widehat{G/H}$ i neka je K kompaktan u G. Tada je $\pi(K)$ kompaktan u G/H, pa $\eta_\alpha \to \eta$ uniformno na $\pi(K)$, ali to znači da $\Phi(\eta)$ uniformno konvergira na K. Slijedi $\Phi(\eta_\alpha) \to \Phi(\eta)$ u $\hat{G}$. Obrnuto, neka je $(\eta_\alpha \circ \pi)_{\alpha\in A}$ hiperniz u $H^\perp$ koji konvergira prema $\eta \circ \pi \in H^\perp$ u $\hat{G}$ i neka je $E \subseteq G/H$ kompaktan. Tada po propoziciji 3.1.5, pod (ii), postoji kompaktan $K \subseteq G$ takav da $\pi(K) = E$, pa kako $\eta_\alpha \circ \pi \to \eta \circ \pi$ uniformno na K, posebno je i $\eta_\alpha \to \eta$ uniformno na E. Slijedi homeomorfnost preslikavanja Φ.

Lako je pokazati da je Ψ dobro definiran homomorfizam grupa. Primijetimo da, uz zamjene G u $\hat{G}$ i H u $H^\perp$, možemo iskoristiti upravo dokazanu tvrdnju kako bismo dobili izomorfizam topoloških grupa $\widehat{\hat{G}/H^\perp}$ i $(H^\perp)^\perp$, tj. H, prema prethodnoj propoziciji. Ako je $\pi : \hat{G} \to \hat{G}/H^\perp$ kvocijentno preslikavanje, onda je taj izomorfizam dan s $\Phi(\eta) = \eta \circ \pi$, $\eta \in \widehat{\hat{G}/H^\perp}$, i $\Phi(\eta)(\xi) = \eta(\xi H^\perp)$, to jest, vrijedi $\xi(\Phi(\eta)) = (\xi H^\perp)(\eta)$ za sve $\xi \in \hat{G}$. Znači, pokazali smo da je

$$\Psi(\xi H^\perp)(\Phi(\eta)) = (\xi H^\perp)(\eta), \qquad \text{za sve}\, \xi \in \hat{G},\ \eta \in \widehat{\hat{G}/H^\perp}. \tag{4.4}$$

Kako je $\Phi : \widehat{\hat{G}/H^\perp} \to H$ izomorfizam topoloških grupa, on inducira izomorfizam $\tilde{\Phi}$ svojih karaktera takav da vrijedi $\tilde{\Phi}(\xi H^\perp)(\Phi(\eta)) = (\xi H^\perp)(\eta)$ za sve $\xi \in \hat{G}$ i $\eta \in \widehat{\hat{G}/H^\perp}$ (ovdje smo primijenili teorem Pontrjaginove dualnosti 4.3.2 za identifikaciju karaktera grupe $\widehat{\hat{G}/H^\perp}$ s $\hat{G}/H^\perp$). Sada iz 4.4 slijedi da je $\Psi = \tilde{\Phi}$, tj. Ψ je izomorfizam topoloških grupa. □

Iz surjektivnosti od Ψ iz prethodnog teorema direktno slijedi:

Korolar 4.3.9. *Ako je H zatvorena podgrupa od G, onda se svaki karakter na H može proširiti do karaktera na G.*

4.4 Primjeri

U ovom odjeljku računamo dualne grupe grupa $\mathbb{R}$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{Z}$ i grupe modulo m, $\mathbb{Z}_m$, $m \in \mathbb{N}$, uz standardne topologije, i pripadne Haarove mjere tako da vrijedi teorem o Fourierovoj inverziji (4.2.9). Budući da ćemo često identificirati dualne grupe s nekim poznatim grupama i kako su G i $\hat{G}$ po Pontrjaginovom teoremu o dualnosti potpuno ravnopravne, nadalje ćemo za vrijednost međusobnog djelovanja elemenata $x \in G$ i $\xi \in \hat{G}$ koristiti oznaku $\langle x, \xi \rangle$. Haarove mjere označavmo kao i prije: λ je neka fiksirana Haarova mjera na G, a ρ je pripadna dualna mjera na $\hat{G}$.

Propozicija 4.4.1. *Dualna grupa realnih brojeva može se identificirati s realnim brojevima uz uparivanje (tj. dualnost) $\langle x, \xi \rangle = e^{2\pi i x\xi}$, $x \in \mathbb{R}$, $\xi \in \hat{\mathbb{R}}$. U tom je slučaju Lebesgueova mjera dualna sama sebi i za $f \in L^1(\mathbb{R})$ takvu da je $\hat{f} \in L^1(\hat{\mathbb{R}})$ vrijede formule*

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i x\xi} f(x) \mathrm{d}\lambda(x), \qquad f(x) = \int e^{2\pi i x\xi} \hat{f}(\xi) \mathrm{d}\rho(\xi),$$

gdje su λ i ρ Lebesgueove mjere na $\mathbb{R}$ i $\hat{\mathbb{R}}$.

Dokaz. Očito je da su sve funkcije oblika $x \mapsto e^{2\pi i x\xi}$ elementi od $\hat{\mathbb{R}}$. Obrnuto, neka je $\xi \in \hat{\mathbb{R}}$. Tada zbog $\xi(0) = 1$ i neprekidnosti od ξ postoji $t > 0$ takav da $\int_0^t \xi \mathrm{d}\lambda \neq 0$. Stoga je

$$\xi(y) \int_0^t \xi(x)\mathrm{d}\lambda(x) = \int_0^t \xi(x+y)\mathrm{d}\lambda(x) = \int_y^{t+y} \xi(x)\mathrm{d}\lambda(x),$$

tj. $\xi(y) = \left(\int_0^t \xi(x)\mathrm{d}\lambda(x)\right)^{-1} \int_y^{t+y} \xi(x)\mathrm{d}\lambda(x)$, pa je ξ derivabilna i

$$\xi'(y) = \left(\int_0^t \xi(x)\mathrm{d}\lambda(x)\right)^{-1} (\xi(t)\xi(y) - \xi(y)) = C\xi(y),$$

gdje je C neka konstanta. Rješenje ove diferencijabilne jednadžbe je $\xi(y) = e^{Cy}$, a kako je $|\xi(y)| = 1$ za sve y, C mora biti imaginaran i ξ je traženog oblika.

Sljedeće treba provjeriti da se pripadne topologije podudaraju. Ako $\xi_n \to \xi$ u euklidskoj topologiji i K je kompaktan skup u $\mathbb{R}$, onda $|e^{2\pi i\xi_n x} - e^{2\pi i\xi x}| = |e^{2\pi i(\xi_n - \xi)x} - 1|$, pa, zbog ograničenosti od K, slijedi da funkcije $x \mapsto e^{2\pi i\xi_n x}$ uniformno konvergiraju na kompaktnom skupu K k funkciji $x \mapsto e^{2\pi i\xi x}$. Obrat lako slijedi iz upravo dokazanog smjera prelaskom na podnizove koji u euklidskoj normi konvergiraju prema nekom broju različitom od ξ, ili divergiraju u $+\infty$ ili $-\infty$.

Da bismo pokazali da je Lebesgueova mjera sama sebi dualna, dovoljno je provjeriti vrijedi li formula inverzije za neku specifičnu funkciju. Za $g(x) = e^{-\pi x^2}$ vrijedi $\hat{g}(\xi) = \int e^{-2\pi i x\xi - \pi x^2}\mathrm{d}\lambda(x)$. Kako je derivacija funkcije $\xi \mapsto e^{-2\pi i x\xi - \pi x^2}$ jednaka funkciji $\xi \mapsto -2\pi i x e^{-2\pi i x\xi - \pi x^2}$, koja je integrabilna za sve $\xi \in \mathbb{R}$, lako se pokaže da, kad deriviramo $\hat{g}$, možemo s derivacijom ući pod integral. Tada je uz parcijalnu integraciju

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\hat{g}(\xi) &= -2\pi i \int x e^{-2\pi i x\xi} e^{-\pi x^2}\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= i \int e^{-2\pi i x\xi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{-\pi x^2})\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= -i \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{-2\pi i x\xi}) e^{-\pi x^2}\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= -2\pi\xi \int e^{-2\pi i x\xi} e^{-\pi x^2}\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= -2\pi\xi\hat{g}(\xi),
\end{aligned}$$

a rješavanjem dobivene diferencijalne jednadžbe dobijemo $\hat{g}(\xi) = g(\xi)$, iz čega po parnosti od g slijedi $g(x) = \int e^{2\pi i x\xi - \pi\xi^2}\mathrm{d}\rho(\xi)$, $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Propozicija 4.4.2. *Grupe $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{T}$ su međusobno dualne uz djelovanje $\langle n, \alpha\rangle = \alpha^n$. U tom slučaju kao dualne mjere možemo uzeti brojeću na $\mathbb{Z}$, a jediničnu Haarovu mjeru na $\mathbb{T}$, i tada za sve $f \in L^1(\mathbb{Z})$ takve da je i $\hat{f} \in L^1(\mathbb{T})$ vrijedi*

$$\hat{f}(\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha^{-n} f(n), \qquad f(n) = \int_{\mathbb{T}} \alpha^n \hat{f}(\alpha)\mathrm{d}\rho(\alpha).$$

Dokaz. Neka je $\alpha \in \hat{\mathbb{Z}}$. Tada je djelovanje α na $\mathbb{Z}$ potpuno određeno s brojem $\alpha(1) \in \mathbb{T}$ jer vrijedi $\alpha(n) = \alpha(1)^n$, $n \in \mathbb{Z}$, pa je preslikavanje $\alpha \mapsto \alpha(1)$ tražena identifikacija skupa $\hat{\mathbb{Z}}$ sa skupom $\mathbb{T}$. Provjerimo da se euklidska topologija na $\mathbb{T}$ podudara s topologijom uniformne konvergencije na kompaktnim skupovima. Kako su kompaktni skupovi u $\mathbb{Z}$ samo konačni skupovi, onda se topologija uniformne konvergencije na kompaktnim skupovima podudara s topologijom konvergencije po točkama, a iz toga lako slijedi da se tražene topologije podudaraju. Sad još treba primijeniti propoziciju 4.2.15. □

Jediničnu Haarovu mjeru na $\mathbb{T}$ možemo dobiti na sljedeći način. Označimo s Q preslikavanje $[0,1] \to \mathbb{T}$ definirano s $Q(x) = e^{2\pi i x}$ i označimo s λ Lebesgueovu mjeru na $[0,1]$. Tada se može pokazati da je jedinična Haarova mjera ρ na $\mathbb{T}$ dobivena relacijom $\rho(A) = \lambda(Q^{-1}(A))$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{T})$. Iz toga, npr. Lebesgueovom indukcijom, slijedi da je za sve $f \in L^1(\mathbb{T})$

$$\int_{[0,1]} f \circ Q\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{T}} f\mathrm{d}\rho.$$

Posebno, drugi integral iz prethodne propozicije možemo zapisati u obliku

$$f(n) = \int_{[0,1]} e^{2\pi i n x} \hat{f}(e^{2\pi i x})\mathrm{d}\lambda(x).$$

Propozicija 4.4.3. *Grupa $\mathbb{Z}_m$, $m \in \mathbb{N}$, dualna je sama sebi i međusobno djeluju $\langle a, b\rangle = e^{2\pi i ab/m}$. Ako na $\mathbb{Z}_m$ fiksiramo brojeću mjeru, onda joj je dualna mjera na $\hat{\mathbb{Z}}_m$ brojeća mjera podijeljena s $1/m$ i za sve funkcije $f : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{C}$ vrijedi*

$$\hat{f}(b) = \sum_{a=0}^{m-1} e^{-2\pi i ab/m} f(a), \qquad f(a) = \frac{1}{m}\sum_{b=0}^{m-1} e^{2\pi i ab/m}\hat{f}(b)$$

Dokaz. Ako je $b \in \hat{\mathbb{Z}}_m$, onda je njegovo djelovanje potpuno određeno brojem $b(1)$ i vrijedi $b(a) = b(1)^a$. Nadalje, kako je $1 = b(0) = b(m) = b(1)^m$, nužno je $b(1)$ m-ti korijen iz 1. Slijedi da dualnu grupu možemo identificirati s $\mathbb{Z}_m$ preko m-tih korijena jedinice. Po propoziciji 4.2.15 i činjenici da je na $\mathbb{Z}_m$ brojeća mjera, slijedi da je mjera na $\mathbb{Z}_m$ normirana mjera pa, kako $\mathbb{Z}_m$ ima m elemenata, težina je svakog elementa $1/m$. □

4.5 Bohrova kompaktifikacija i uniformno skoro periodične funkcije

U ovom odjeljku pretpostavljamo da grupa G nije kompaktna. Tada znamo da, po propoziciji 4.3.5, grupa $\hat{G}$ nije diskretna. Označimo s $\hat{G}_d$ topološku grupu koja ima istu grupovnu strukturu kao $\hat{G}$, ali s diskretnom topologijom. Tada je identiteta $\tilde{\iota} : \hat{G}_d \to \hat{G}$ neprekidna bijekcija koja nije homeomorfizam, a dualna grupa grupe $\hat{G}_d$ je kompaktna (propozicija 4.1.6).

Definicija 4.5.1. *Dualnu grupu grupe $\hat{G}_d$ zovemo* Bohrova kompaktifikacija *grupe G i označavmo s* $\mathrm{b}\,G$.

Budući da $\hat{G}_d$ ima diskretnu topologiju, sve su funkcije na $\hat{G}$ neprekidne. Posebno, $\mathrm{b}\,G$ je skup svih homomorfizama grupa $\hat{G}_d$ i $\mathbb{T}$, dok je G, po Pontrjaginovoj dualnosti, skup svih neprekidnih homomorfizam $\hat{G}$ i $\mathbb{T}$.

Propozicija 4.5.2. *Grupa G prirodno se ulaže u $\mathrm{b}\,G$ preslikavanjem $\iota(x) = x \circ \tilde{\iota}$ u smislu da vrijedi $\langle x\,,\,\xi\rangle = \langle \iota(x)\,,\,\tilde{\iota}^{-1}(\xi)\rangle$ za sve $x \in G$ i $\xi \in \hat{G}$. To je ulaganje neprekidno i njegova je slika gusta u $\mathrm{b}\,G$.*

Dokaz. Direktno iz definicije se vidi da $\langle x\,,\,\xi\rangle = \langle \iota(x)\,,\,\tilde{\iota}^{-1}(\xi)\rangle$ vrijedi za sve $x \in G$ i $\xi \in \hat{G}$. Preslikavanje ι je neprekidno jer je topologija na G topologija uniformne konvergencije na kompaktnim skupovima u $\hat{G}$, dok je topologija na $\mathrm{b}\,G$ topologija konvergencije po točkama iz $\hat{G}_d$, jer se u diskretnoj topologiji kompaktni skupovi podudaraju s konačnim skupovima, pa, stoga, ako $x_\alpha \to x$ i K je konačan skup u $\hat{G}_d$, onda je i $\tilde{\iota}(\hat{G}_d)$ konačan, pa i kompaktan u $\hat{G}$, i vrijedi $x_\alpha \to x$ uniformno na $\tilde{\iota}(K)$, što je ekvivalentno $x_\alpha \circ \tilde{\iota} \to x \circ \tilde{\iota}$ uniformno na K.

Svi elementi iz $(\mathrm{Cl}\,\iota(G))^\perp$ su homomorfizmi grupa iz $\hat{G}_d$ koji su identični 1 na $\iota(G)$, tj. za sve $\eta \in (\mathrm{Cl}\,\iota(G))^\perp$ i $x \in G$ je $\langle \iota(x)\,,\,\eta\rangle = \langle x\,,\,\tilde{\iota}(\eta)\rangle = 1$. Stoga $\tilde{\iota}((\mathrm{Cl}\,\iota(G))^\perp)$ sadrži samo trivijalni homomorfizam 1, pa to vrijedi i za $(\mathrm{Cl}\,\iota(G))^\perp$. Sada po teoremu 4.3.8 slijedi da je $\mathrm{Cl}\,\iota(G)$ cijeli $\mathrm{b}\,G$. □

Primijetimo da za sve $x \in G$ i $\eta \in \hat{G}_d$ vrijedi

$$\eta \circ \iota(x) = \eta(x \circ \tilde{\iota}) = x(\tilde{\iota}(\eta)) = \tilde{\iota}(\eta)(x),$$

tj. $\eta \circ \iota = \tilde{\iota}(\eta)$. Dakle, imamo neprekidna preslikavanja $\iota : G \to \mathrm{b}\,G$ i $\tilde{\iota} : \hat{G}_d \to \hat{G}$ koja zadovoljavaju:

$$\begin{aligned} \iota(x) &= x \circ \tilde{\iota}, && \forall x \in G, \\ \tilde{\iota}(\eta) &= \eta \circ \iota, && \forall \eta \in \hat{G}_d, \end{aligned}$$

pri čemu je ι injektivno, dok je $\tilde{\iota}$ bijektivno.

Propozicija 4.5.3. *Neka je K kompaktna, Hausdorffova grupa i $\Lambda : G \to K$ neprekidni homomorfizam grupa. Tada se Λ može proširiti do neprekidnog homomorfizma grupa $\tilde{\Lambda} : \mathrm{b}\, G \to K$ u smislu da vrijedi $\Lambda(x) = \tilde{\Lambda}(\iota(x))$.*

Dokaz. Podgrupa $\mathrm{Cl}\,\Lambda(G)$ je kompaktna, Hausdorffova i Abelova, pa bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $K = \mathrm{Cl}\,\Lambda(G)$. Λ inducira homomorfizam $\Lambda^* : \hat{K} \to \hat{G}_d$ zadan preslikavanjem $\Lambda^*(\sigma) = \tilde{\iota}^{-1}(\sigma \circ \Lambda)$ i on je neprekidan jer je $\hat{K}$ diskretna grupa. Sada Λ^* inducira homomorfizam $\tilde{\Lambda} : \mathrm{b}\, G \to K$ definiran s $\tilde{\Lambda}(y) = y \circ \Lambda^*$ i njegova neprekidnost lagano slijedi iz činjenice da je topologija na K jednaka topologiji konvergencije po točkama iz $\hat{K}$. Preostaje pokazati da je $\tilde{\Lambda}$ uistinu proširenje. Za svaki $\sigma \in \hat{K}$ je

$$\begin{aligned}[\tilde{\Lambda}(\iota(x))](\sigma) &= (\iota(x) \circ \Lambda^*)(\sigma) = \iota(x)[\tilde{\iota}^{-1}(\sigma \circ \Lambda)] \\ &= x(\sigma \circ \Lambda) = \sigma(\Lambda(x)) \\ &= \Lambda(x)(\sigma),\end{aligned}$$

pa slijedi tvrdnja. □

Definicija 4.5.4. *Ograničena i neprekidna funkcija $f : G \to \mathbb{C}$ je* uniformno skoro periodična*, ako je skup $\{\tau_x f \mid x \in G\}$ potpuno ograničen u* sup*-normi.*

Dakle, ograničena, neprekidna funkcija $f : G \to \mathbb{C}$ je uniformno skoro periodična ako za $\epsilon > 0$ postoje $x_1, x_2, \dots, x_m$ iz G, $m \in \mathbb{N}$, takvi da za sve $x \in G$ postoji $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tako da $\|\tau_x f - \tau_{x_i} f\|_\infty = \|\tau_{x-x_i} f - f\|_\infty < \epsilon$.

Lema 4.5.5. *Neka je (K, d) kompaktan metrički prostor i označimo s* $\mathrm{Iso}\, K$ *grupu svih bijektivnih izometrija prostora K. Tada je* $\mathrm{Iso}\, K$ *uz uniformnu metriku kompaktan metrički prostor.*

Dokaz. $\mathrm{Iso}\, K$ je potprostor prostora $C(K, K)$ i očito je ekvikontinuiran, pa je po teoremu Arzelà-Ascoli 1.1.14, dovoljno još pokazati da je $\mathrm{Iso}\, K$ zatvoren u $C(K, K)$. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz izometrija koji konvergira u uniformnoj metrici prema neprekidnoj funkciji $f : K \to K$. Tada je za sve $x, y \in K$, po neprekidnosti metrike, $d(x, y) = d(f_n(x), f_n(y)) \to d(f(x), f(y))$, pa je f izometrija. Za surjektivnost uzmimo proizvoljan $z \in K$ i niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u K takav da je $f_n(x_n) = z$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Budući da je K kompaktan, možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da x_n konvergira prema nekom x i stoga, zbog uniformne konvergencije niza $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, slijedi da je $z = \lim_{n\in\mathbb{N}} f_n(x_n) = f(x)$. □

Teorem 4.5.6. *Neka je $f : G \to \mathbb{C}$ neprekidna i ograničena funkcija. Tada je ekvivalentno:*

(i) *f je restrikcija neprekidne funkcije $F : \mathrm{b}\, G \to \mathbb{C}$ u smislu da je $f = F \circ \iota$.*

(ii) *f je uniformni limes linearnih kombinacija karaktera od G.*

(iii) *f je uniformno skoro periodična.*

Dokaz. Pretpostavimo (i). Primijetimo da linearne kombinacije karaktera na $\mathrm{b}\,G$ čine algebru jer je umnožak dvaju karaktera opet karakter. Također, konstanta 1 je karakter, po teoremu Geljfand-Raikov (3.4.16) karakteri razlikuju točke. Stoga, po teoremu Stone-Weierstrass (1.1.13), postoji niz funkcija $F_n : \mathrm{b}\,G \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, koji uniformno konvergira prema F i svaka je F_n linearna kombinacija karaktera. No tada, kako je $\eta \mapsto \eta \circ \iota$ funkcija $\hat{G}_d \to \hat{G}$, svaka je $F_n \circ \iota$ linearna kombinacija karaktera od G i $F_n \circ \iota \to F \circ \iota = f$ uniformno na G. Slijedi (ii). Odmah je jasan i obrat, jer ako je f uniformni limes linearnih kombinacija karaktera od G, onda je uniformni limes neprekidnih funkcija oblika $F_n \circ \iota$, a kako je $\iota(G)$ gust u $\mathrm{b}\,G$ po propoziciji 4.5.2, onda F_n uniformno konvergira prema nekoj funkciji $F : \mathrm{b}\,G \to \mathbb{C}$ za koju vrijedi $F \circ \iota = f$.

Dokažimo da (i) povlači (iii). Kako je $\mathrm{b}\,G$ kompaktan i funkcija $y \mapsto \tau_y F$ je neprekidna (jer je F uniformno neprekidna) kao funkcija $\mathrm{b}\,G \to C(\mathrm{b}\,G)$, slijedi da je skup $\{\tau_y F \mid y \in \mathrm{b}\,G\}$ kompaktan u $C(\mathrm{b}\,G)$. Nadalje, primijetimo da je preslikavanje $H \mapsto H \circ \iota$ sa skupa $C(\mathrm{b}\,G)$ u $C(G)$ izometrija jer je $\iota(G)$ gust u $\mathrm{b}\,G$. Zaključujemo da je skup $\{(\tau_y F)\circ\iota \mid y \in \mathrm{b}\,G\}$ kompaktan u $C(G)$. Primijetimo da za sve $x_1, x_2 \in G$ vrijedi $(\tau_{\iota(x_1)}F) \circ \iota(x_2) = F(\iota(x_2 - x_1)) = \tau_{x_1}(F \circ \iota)(x_2)$, tj. za sve $x \in G$ je $\tau_{\iota(x)}F = \tau_x f$. Stoga je $\{\tau_x f \mid x \in G\}$ gust podskup (zbog gustoće od $\iota(G)$ u $\mathrm{b}\,G$ i uniformne neprekidnosti od F) kompaktnog skupa $\{(\tau_y F) \circ \iota \mid y \in \mathrm{b}\,G\}$, pa posebno i potpuno omeđen. Slijedi da je f uniformno skoro periodična.

Konačno, dokažimo da (iii) povlači (i). Neka je f uniformno skoro periodična i neka je K zatvarač u $C(G)$ skupa $\{\tau_x f \mid x \in G\}$. Tada je K kompaktan skup. Dokažimo da je f uniformno neprekidna. Ako ne bi bila, tada bi postojao hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ u G koji konvergira prema 0 i takav da $\tau_{x_\alpha} f$ ne konvergira uniformno prema f. Kako je K kompaktan, onda postoji podhiperniz $(x_{h(\beta)})_{\beta\in B}$ takav da $\tau_{x_{h(\beta)}} f$ konvergira uniformno prema nekoj funkciji $g \in K$. No zbog neprekidnosti od f, $\tau_{x_{h(\beta)}} f$ konvergira po točkama prema f, pa je nužno $f = g$, što je kontradikcija. Dakle, f je uniformno neprekidna. Po lemi 4.5.5 je $\mathrm{Iso}\,K$ kompaktan skup u uniformnoj metrici, a preslikavanje $\Lambda : G \to \mathrm{Iso}\,K$ definirano s $\Lambda(x) = \tau_x$ je homomorfizam grupa, i to neprekidan prema upravo dokazanoj uniformnoj neprekidnosti od f. Dakle, možemo primijeniti propoziciju 4.5.3 da dobijemo neprekidni homomorfizam $\tilde{\Lambda} : \mathrm{b}\,G \to \mathrm{Iso}\,K$ za koji je $\Lambda(x) = \tilde{\Lambda}(\iota(x))$. Definiramo $F(y) = \tilde{\Lambda}(-y)(0)$. Tada je F neprekidna zbog neprekidnosti od $\tilde{\Lambda}$ i za sve $x \in G$ vrijedi $F(\iota(x)) = \tilde{\Lambda}(\iota(-x))(0) = \Lambda(-x)(0) = \tau_{-x} f(0) = f(x)$. □

Bibliografija

[1] Donald L. Cohn, *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston, 1980.

[2] Gerald B. Folland, *Real Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1984.

[3] ______, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, CRC Press, Boca Raton, 1995.

[4] Svetozar Kurepa, *Funkcionalna analiza*, Školska knjiga, Zagreb, 1981.

[5] James Munkres, *Topology*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.

[6] Walter Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1991.

Sažetak

U ovom je radu dan pregled glavnih rezultata iz Fourierove analize na lokalno kompaktnim, Abelovim grupama. Na početku je iznesen osnovni materijal iz teorije mjere, topologije i funkcionalne analize potreban za razvoj teorije na lokalno kompaktnim grupama. Potom se proučavaju Geljfandova transformacija, funkcije i konvolucija na lokalno kompaktnim grupama, reprezentacije lokalno kompaktnih grupa i funkcije pozitivnog tipa. Izneseni su i dokazani Geljfand-Raikovljev teorem, teorem o Fourierovoj inverziji i teorem o Pontrjaginovoj dualnosti, a na kraju rada se još proučava Bohrova kompaktifikacija i primjenjuje na karakterizaciju uniformno skoro periodičnih funkcija.

Summary

This work provides an overview of the more important results in Fourier analysis on locally compact Abelian groups. At the beginning the basic material from measure theory, topology, and functional analysis is listed, as it is necessary for developing the theory on locally compact groups. Afterwards, the Gelfand transform is studied, followed by functions and convolution on locally compact groups, representations of locally compact groups, and functions of positive type. The main theorems formulated and proven in this work are: the Gelfand-Raikov theorem, the Fourier inversion theorem, and the Pontrjagin duality theorem. Finally, the Bohr compactification is investigated and applied to a characterization of uniformly almost periodic functions.

Životopis

Rođen sam 20. listopada 1991. godine u Zagrebu. Osnovnoškolsko obrazovanje stekao sam u Osnovnoj školi Josipa Jurja Strossmayera. Upisao sam V. gimnaziju u Zagrebu 2006. godine. Tijekom svojeg srednjoškolskog obrazovanja redovito sam prisustvovao na državnim natjecanjima iz matematike, fizike i informatike, a od značajnijih rezultata se ističu prva mjesta iz fizike na državnim natjecanjima 2008. i 2009. godine, te brončana medalja na Međunarodnoj olimpijadi iz fizike 2010. godine. Upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu 2010. godine, dok 2013. godine upisujem diplomski sveučilišni studij Teorijska matematika na istom fakultetu. 2013. godine dobio sam priznanje Matematičkog odsjeka PMF-a za izniman uspjeh na studiju, a 2015. uz priznanje Matematičkog odsjeka i pohvalnicu Fakultetskog vijeća PMF-a za izuzetan uspjeh na studiju.