SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Mateja Pantaler

REPREZENTACIJE KOMPAKTNIH LIEJEVIH GRUPA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Pavle Pandžić

Zagreb, rujan, 2015

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Teorija reprezentacija grupa jedna je od novijih grana matematike, utemeljena krajem 19. stoljeća i predmet je istraživanja brojnih matematičara. Posebno je dobro proučena teorija reprezentacija kompaktnih Liejevih grupa, koja ima i brojne važne primjene.

Ovaj rad započeti ćemo sa uvodom u teoriju reprezentacija, gdje će biti definirani neki od osnovnih pojmova, a isti nam koriste i kod reprezentacija kompaktnih grupa. U središtu razmatranja biti će jedna verzija Peter-Weylovog teorema i posljedice Peter-Weylovog teorema. No, prije nego što dokažemo taj teorem, definirati ćemo pojmove i iskazati teoreme koje ćemo koristiti u dokazu.

U jednom od poglavlja definirati ćemo Liejeve grupe i navesti neke primjere istih. Na kraju, proučavati ćemo ireducibilne reprezentacije i navesti važne rezultate do kojih je Weyl došao u nizu svojih radova.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

U prvom poglavlju biti će navedene osnovne definicije pojmova koj će se često koristiti u ovom radu.

1.1 Algebra

Kako je pojam grupe jedan od najosnovnijih pojmova u matematici, započeti ćemo s definicijom grupe.

Definicija 1.1.1. *Neprazan skup $G = (G, *)$, gdje je $* : G \times G \to G$ binarna operacija, zove se **grupa** ako vrijede sljedeća svojstva:*

1) $\forall a, b, c \in G,\ (a * b) * c = a * (b * c)$ *(asocijativnost)*

2) $\exists e \in S\ \ \forall a \in G,\ a * e = e * a = a$ *(neutralni element)*

3) $\forall a \in G\ \exists! a' \in G,\ a * a' = a' * a = e$ *(inverzni element)*

Posebno, ako vrijedi dodatno svojstvo:

4) $\forall a, b \in G,\ a * b = b * a$ *(komutativnost),*

kažemo da je grupa $(G, *)$ komutativna ili Abelova grupa.

Da bismo definirali vektorski prostor, prisjetimo se i definicije polja:

Definicija 1.1.2. *Neka je $(F, +, \cdot)$ neprazan skup s dvije binarne operacije $+$ i $\cdot$. Kažemo da je F **polje** ako vrijede sljedeća svojstva:*

1) *$(F, +)$ je komutativna grupa*

2) $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ *je komutativna grupa, pri čemu je* 0 *neutralni element u* $(F, +)$

3) $\forall a, b, c \in F,\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *(distributivnost)*

Slijedi definicija vektorskog prostora:

Definicija 1.1.3. *Neka je F polje, a V neprazan skup. Kažemo da je V* ***vektorski prostor*** *nad poljem F, ako je na V zadana binarna operacija $+$ i ako je zadano preslikavanje $h : F \times V \to V$ pri čemu za $\alpha \in F$ i $v \in V$ označavamo $h(\alpha, v) = \alpha v$, tako da vrijede sljedeća svojstva:*

1) $(V, +)$ *je komutativna grupa*

2) $\forall \alpha, \beta \in F \ \ \forall v \in V,\ (\alpha + \beta) v = \alpha v + \beta v$

3) $\forall \alpha, \beta \in F \ \ \forall v \in V,\ (\alpha\beta) v = \alpha (\beta v)$

4) $\forall \alpha \in F \ \ \forall v, w \in V,\ \alpha (v + w) = \alpha v + \alpha w$

5) $\forall v \in V,\ 1v = v$

Definicija 1.1.4. *Neka je V vektorski prostor nad poljem F. Za podskup $L \subseteq V$ kažemo da je* ***potprostor*** *vektorskog prostora V ako je L i sam vektorski prostor s obzirom na operacije zbrajanja i množenja naslijeđene iz V.*
Oznaka: $L \leqslant V$.

Propozicija 1.1.5. *Neka su $L, M \leqslant V$. Tada je i*

$$L + M = \{a + b \,|\, a \in L, b \in M\}$$

potprostor od V.

Definicija 1.1.6. *Ako su $L, M \leqslant V$ takvi da je $L \cap M = \{\emptyset\}$, tada za sumu $L + M$ kažemo da je* ***direktna suma*** *i označavamo sa $L \dot{+} M$.*

Definicija 1.1.7. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $F = \mathbb{R}$ ili $F = \mathbb{C}$. Preslikavanje koje svakom uređenom paru $(a, b) \in V \times V$ pridružuje skalar $\langle a|b \rangle \in F$ naziva se skalarni produkt ili skalarno množenje na prostoru V ako su ispunjena sljedeća svojstva:*

1) $\langle a|a \rangle \geq 0$ *za* $\forall a \in V$, *pri čemu je* $\langle a|a \rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0$

2) $\langle a|b \rangle = \overline{\langle b|a \rangle}$ *za* $\forall a, b \in V$

3) $\langle \lambda a|b \rangle = \lambda \langle a|b \rangle$ *za* $\forall a, b \in V$ *i* $\lambda \in F$

4) $\langle a + b|c \rangle = \langle a|c \rangle + \langle b|c \rangle$ *za* $\forall a, b, c \in V$

Kroz ovaj diplomski rad često ćemo spominjati i linearni operator, slijedi definicija:

Definicija 1.1.8. *Neka su V i W vektorski prostori nad poljem F. Preslikavanje $A : V \to W$ naziva se linearni operator ako zadovoljava sljedeća svojstva:*

1) $\forall x, y \in V$, $A(x+y) = A(x) + A(y)$ *(aditivnost)*

2) $\forall x \in V$ $\forall \lambda \in F$, $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ *(homogenost)*

Definicija 1.1.9. *Neka je A linearan operator sa V u W. Tada definiramo:*
Slika operatora *A je vektorski potprostor u W zadan sa*

$$R(A) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Im} A \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in W;\ \exists v \in V,\ w = Av\}.$$

Dimenzija vektorskog prostora $R(A)$ naziva se rang operatora A i označava s $r(A)$. ***Jezgra operatora*** *A je vektorski potprostor u V zadan s*

$$N(A) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Ker} A \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V;\ Av = 0\}.$$

Dimenzija vektorskog prostora $N(A)$ naziva se defekt operatora i označava s $d(A)$.

Skup svih linearnih operatora $V \to W$ označavamo s $L(V, W)$. Skup $L(V, W)$ je vektorski prostor. Vektorski prostor $L(V, V)$ linearnih operatora sa V u V obično označavamo $L(V)$. To je konačno dimenzionalan vektorski prostor.
Na $L(V)$, osim zbrajanja operatora $A + B$ i množenja skalarom λA za $A, B \in L(V)$ i $\lambda \in F$, imamo i operaciju množenja operatora AB definiranu kao kompoziciju preslikavanja $AB = A \circ B$, tj.

$$(AB)x \stackrel{\text{def}}{=} A(Bx), \ A, B \in L(V) \qquad x \in V$$

Napomenimo da je kompozicija preslikavanja asocijativna te da je množenje operatora distributivno s obzirom na zbrajanje.
Identitetu $I \in L(V)$, $Ix = x$ za sve $x \in V$ zovemo jediničnim operatorom jer s obzirom na množenje imamo $IA = AI = A$ za svaki $A \in L(V)$.
Za $L(V)$ kažemo da je asocijativna algebra s jedinicom I (zbog navedenih svojstava zbrajanja, množenja skalarom i množenjem u $L(V)$).

Definicija 1.1.10. *Za operator $A \in L(V)$ kažemo da je* ***regularan*** *ako ima inverz u $L(V)$ tj. operator $B \in L(V)$ takav da je*

$$AB = BA = I.$$

Takav B je jedinstven.

Definicija 1.1.11. *Neka je $A \in L(V)$. Ako je $Av = \lambda v$ za neki $v \neq 0$ onda kažemo da je $\lambda \in F$ svojstvena vrijednost operatora A i da je v svojstveni vektor operatora A (za svojstvenu vrijednost λ). Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A zovemo spektrom operatora A i označavamo sa:*

$$\sigma_A = \{\lambda \in F \mid \lambda \text{ je svojstvena vrijednost od } A\}.$$

Sada ćemo se ponovno vratiti na pojam *grupe* i definirati još neke pojmove vezane uz tu algebarsku strukturu.

Definicija 1.1.12. *Ako je G grupa, definiramo njezin red $|G| := card\,(G)$. Dakle, red grupe je kardinalni broj skupa G. Kažemo da je grupa G konačna grupa ako je $|G| < \infty$, inače je G beskonačna grupa.*

Definicija 1.1.13. *Neka su G i H dvije grupe. Preslikavanje $f : G \to H$ je **homomorfizam grupa** ako vrijedi:*

$$f(xy) = f(x)\,f(y) \qquad \forall x, y \in G$$

Skup svih homomorfizama iz G u H označavamo $Hom\,(G, H)$.
*Ako je homomorfizam f injekcija tada govorimo o **monomorfizmu**, a ako je surjekcija govorimo o **epimorfizmu**.*
*Homomorfizam f koji je bijektivan nazivamo **izomorfizam**.*
Ako je $G = H$, homomorfizam $f : G \to G$ zovemo endomorfizmom.

Definicija 1.1.14. *Za proizvoljan homomorfizam definiramo njegovu **jezgru***

$$\mathrm{Ker}\, f := \{x \in G \mid f(x) = e_H\}$$

*i **sliku***

$$\mathrm{Im}\, f := \{f(x) \mid x \in G\}$$

Definicija 1.1.15. *Neka je G_0 podskup grupe G. Ako je G_0 grupa s obzirom na algebarsku strukruru grupe G, onda kažemo da je G_0 **podgrupa** od G.*

Vrlo važan pojam jest pojam algebre, a također, kako bismo kasnije bolje razumjeli definiciju reprezentacije grupe, prisjetiti ćemo se i pojma unitalne algebre.

Definicija 1.1.16. ***Algebra** nad poljem K je vektorski prostor $\mathcal{A}$ nad poljem K na kojem je zadana K-bilinearna operacija $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ koju nazivamo množenje i obično označavamo sa $(a, b) \mapsto ab$. Za algebru $\mathcal{A}$ kažemo da je asocijativna, ako je množenje asocijativno*

$$(ab)\,c = a\,(bc)\,, \qquad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Unitalna algebra *je asocijativna algebra* $\mathcal{A}$ *u kojoj postoji jedinica, odnosno element* $1 \in \mathcal{A}$ *takav da vrijedi*

$$1a = a1 = a, \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

1.2 Analiza i topologija

Ovdje ćemo se prisjetiti samo najvažnijih pojmova iz područja analize i topologije. Znamo da je jedan od vrlo važnih pojmova u matematici pojam funkcije.

Definicija 1.2.1. *Neka su A i B bilo koja dva neprazna skupa. Funkcija sa skupa A u skup B je pridruživanje elemenata skupa A u skup B, takvo da je svakom elementu iz skupa A pridružen točno jedan element iz skupa B. Pišemo* $f : A \to B$.
Skup A nazivamo područje definicije ili domena funkcije f*, a skup B nazivamo područje vrijednosti ili kodomena funkcije* f.
Slika funkcije f *je skup* $\mathcal{R}(f) = \{f(x);\ x \in A\} \subseteq B$.

Jedna od prirodnih operacija s funkcijama jest kompozicija funkcija.

Definicija 1.2.2. *Neka su zadane funkcije* $f : A \to B$ *i* $g : C \to D$*. Ako je* $\mathcal{R}(f) \subseteq C$*, tada je formulom* $h(x) = g(f(x)), \forall x \in A$*, definirana funkcija* $h : A \to D$*. Ta funkcija se naziva kompozicija funkcija* f *i* g*, i koristi se oznaka* $h = g \circ f$.

Definicija 1.2.3. *Neka je* $I \subseteq \mathbb{R}$ *otvoreni interval i neka je zadana točka* $c \in I$*. Za funkciju* $f : I \to \mathbb{R}$ *kažemo da je neprekidna u točki c ako i samo ako vrijedi*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)((|x - c| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(c)| < \epsilon)).$$

Funkcija je neprekidna na skupu I ako je neprekidna u svakoj točki $c \in I$.

Definicija 1.2.4. *Za funkciju* $f : I \to \mathbb{R}$ *kažemo da je* ***jednoliko****, odnosno* ***uniformno*** *neprekidna na intervalu* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ako*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x', x'' \in I)(|x' - x''| < \delta) \Rightarrow \left(\left|f(x') - f(x'')\right| < \epsilon\right).$$

Sada ćemo definirati nekoliko pojmova iz područja topologije. Jedan od osnovnih pojmova je pojam metričkog prostora.

Definicija 1.2.5. *Neka je* $X \neq \emptyset$ *neprazan skup i* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *preslikavanje sa Kartezijevog produkta* $X \times X$ *u skup realnih brojeva* $\mathbb{R}$ *takvo da vrijedi:*

1) $d(a, b) \geq 0,\ \forall a, b \in X$ *(pozitivnost)*

2) $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ *(strogost)*

3) $d(a,b) = d(b,a)$, $\forall a,b \in X$ *(simetričnost)*

4) $d(a,b) \leq d(a,c) + d(b,c)$, $\forall a,b,c \in X$ *(nejednakost trokuta)*

Za funkciju d kažemo da je funkcija udaljenosti, odnosno metrika na skupu X. Tada uređeni par (X,d) *nazivamo* ***metrički prostor****.*

Definicija 1.2.6. *Za metrički prostor kažemo da je potpun, ako u njemu svaki Cauchyjev niz konvergira.*

Potpun unitaran prostor zovemo Hilbertov prostor.

Definicija 1.2.7. *Topološki prostor je par* $(X,\mathcal{T})$ *gdje je X skup, a* $\mathcal{T}$ *familija podskupova koja je zatvorena na proizvoljne unije i konačne presjeke te sadrži X i* $\emptyset$*. Članove familije* $\mathcal{T}$ *nazivamo otvorenim skupovima.*

Definicija 1.2.8. *Topološki prostor nazivamo Hausdorffov ako svake dvije različite točke imaju međusobno disjunktne okoline.*

Definicija 1.2.9. *Neka su* $(X,\mathcal{T})$ *i* $(y,\mathcal{V})$ *topološki prostori i neka je* $f : X \to Y$ *preslikavanje sa sljedećim svojstvima:*

1) *f je bijekcija,*

2) $\forall U \in \mathcal{T}$ *je* $f(U) \in \mathcal{V}$,

3) $\forall V \in \mathcal{V}$ *je* $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$

Kažemo da je f homeomorfizam prostora X i Y. Homeomorfizam preslikava otvorene skupove iz X na otvorene skupove u Y i obratno, odnosno prevodi topološku strukturu na topološku strukturu.

Definirati ćemo neprekidno preslikavanje.

Definicija 1.2.10. *Neka su X i Y topološki prostori i neka je* $f : X \to Y$ *preslikavanje. Kažemo da je preslikavanje f neprekidno u točki* $x_0 \in X$*, ako za svaku okolinu V točke* $f(x_0)$ *postoji okolina U točke* x_0 *tako da je* $f(U) \subseteq V$.
Kažemo da je preslikavanje neprekidno ako je neprekidno u svakoj točki $x \in X$.

Definicija 1.2.11. *Zatvarač ili zatvorenje skupa A u topološkom prostoru X je presjek svih zatvorenih skupova koji sadrže A. Označavamo ga sa* $\bar{A}$ *ili* $\mathrm{Cl}\,A$

Definicija 1.2.12. *Neka je X topološki prostor i neka je* $\mathcal{U} = \{U_\lambda; U_\lambda \subseteq X, \lambda \in \Lambda\}$ *familija podskupova takva da je* $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = X$*. Tada kažemo da je* $\mathcal{U}$ *pokrivač za prostor X.*

Ako je svaki od članova pokrivača U_λ otvoren u X, tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač. Pokrivač $\mathcal{U}$ je konačan ili prebrojiv, ako je skup indeksa Λ konačan ili prebrojiv skup.

Definicija 1.2.13. *Topološki prostor X je kompaktan, ako u svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od X možemo upisati pokrivač $\mathcal{V}$ od X koji je konačan.*

Definicija 1.2.14. *Sa $C(M)$ označavamo skup svih neprekidnih funkcija $f : M \to \mathbb{C}$. Za $f \in C(M)$,* Supp *f je nosač funkcije*

$$\mathrm{Supp}\, f = \mathrm{Cl}\left(\{t \in M; f(t) \neq 0\}\right),$$

pri čemu je Cl *(S) zatvarač skupa $S \subseteq M$.*

Poglavlje 2

Uvod u teoriju reprezentacija

2.1 Reprezentacije grupa

Prije nego što se počnemo baviti kompaktnim grupama, navest ćemo osnovne definicije teorije reprezentacija za proizvoljne grupe. Započeti ćemo sa definicijom reprezentacija grupa.

Definicija 2.1.1. *Reprezentacija grupe G u konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V je homomorfizam grupe G u grupu $GL(V)$ svih invertibilnih elemenata unitalne algebre $L(V)$. Drugim riječima, reprezentacija grupe je preslikavanje $U : G \to GL(V)$ takvo da je*

$$U(ab) = U(a)\,U(b) \qquad \forall a, b \in G.$$

Iz definicije se vidi da je $U(a)$ regularan operator za svaki $a \in G$.

Vektorski prostor V zove se prostor reprezentacije U. Reprezentacija U je konačnodimenzionalna ako je prostor V konačnodimenzionalan. U tom slučaju, dimenziju prostora V, $\dim V$, zovemo dimenzijom reprezentacije.
Ako je reprezentacija U injektivni homomorfizam, kažemo da je U **vjerna reprezentacija**. Kod reprezentacija grupe G jezgra

$$H = \operatorname{Ker} U = \{a \in G \mid U(a) = I\}$$

reprezentacije U je normalna podgrupa grupe G i prijelazom na kvocijent dobivamo vjernu reprezentaciju kvocijentne grupe G/H

$$U(aH) = U(a), \qquad aH \in G/H.$$

Definicija 2.1.2. *Za dvije reprezentacije $U^{'}$ i U'' grupe G u prostorima V i W kažemo da su ekvivalentne ako postoji izomorfizam $A : V \to W$ prostora V i W sa svojstvom da je*

$$U''(a) = AU^{'}(a)A^{-1}, \qquad \forall a \in G$$

Definicija 2.1.3. *Za potprostor $W \subseteq V$ kažemo da je invarijantni potprostor s obzirom na reprezentaciju U, ako je W invarijantan u odnosu na svaki operator $U(a), a \in G$ tj. ako $w \in W$ povlači $U(a)w \in W$ za svaki $a \in G$. Kažemo još da W reducira reprezentaciju ili da je potprostor W prostora V U-invarijantan .*

Definicija 2.1.4. *Reprezentacija U grupe G u prostoru V je ireducibilna ako u prostoru V nema netrivijalnog invarijantnog potprostora s obzirom na reprezentaciju U, odnosno ako postoje točno dva invarijantna potprostora od V s obzirom na reprezentaciju U. To bi značilo da za $V \neq \{0\}$ su njegovi trivijalni potprostori $\{0\}$ i V jedini invarijantni potprostori s obzirom na reprezentaciju U.*
Ako reprezentacija nije ireducibilna onda je reducibilna, odnosno reprezentacija je reducibilna ako postoji netrivijalni invarijantni potprostor s obzirom na reprezentaciju U.
Reprezentacija U je potpuno reducibilna ako je prostor V direktna suma ireducibilnih reprezentacija.

Definirajmo direktnu sumu reprezentacija.

Definicija 2.1.5. *Neka je U_i, $i \in I$ familija reprezentacija od G na vektorskim prostorima V_i. Tada na direktnoj sumi*

$$\coprod_{i \in I} V_i = \{f : I \to \cup_{i \in I} V_i, skup\, \{i \in I : f(i) \neq 0\}\, je\ konačan\}$$

definiramo reprezentaciju U od G

$$(U(x)f)(i) = U_i(x)f(i), \quad x \in G, i \in I.$$

Reprezentaciju U zovemo direktnom sumom reprezentacija U_i.

2.2 Reprezentacije kompaktnih grupa

U prethodnom dijelu definirali smo osnovne pojmove vezane uz reprezentacije grupa. Sada ćemo promatrati kompaktne grupe. Osnovni pojmovi vezani uz reprezentacije kompaknih grupa slični su analognim pojmovima u općem slučaju. Slijedi definicija topološke grupe i kompaktne grupe:

Definicija 2.2.1. ***Topološka grupa*** *je grupa G koja je ujedno i Hausdorffov topološki prostor i za koju su preslikavanja množenja*

$$(a, b) \mapsto ab \text{ sa } G \times G \text{ u } G$$

i invertiranja

$$a \mapsto a^{-1} \text{ sa } G \text{ u } G$$

neprekidna. Ako je topološki prostor G kompaktan, takva se topološka grupa zove kompaktna grupa.

Prije nego što definiramo reprezentacije kompaktnih grupa, definirati ćemo pojam lijevog i desnog pomaka:

Definicija 2.2.2. *Ako je G topološka grupa s jedinicom e, za svaki $a \in G$ definiramo lijevi i desni pomak $\lambda_a : G \to G$ i $\rho_a : G \to G$ sa :*

$$\lambda_a(x) = ax, \quad \rho_a(x) = xa^{-1}, \qquad x \in G.$$

Ta su preslikavanja neprekidne bijekcije.

Slijedi definicija reprezentacije kompaktne grupe. U beskonačnodimenzionalnom slučaju promatrat ćemo samo unitarne reprezentacije.

Definicija 2.2.3. ***Konačnodimenzionalna reprezentacija kompaktne grupe*** *G na prostoru V je neprekidni homomorfizam grupa $L : G \to GL(V)$, gdje je V kompleksan konačnodimenzionalan vektorski prostor.*

Definicija 2.2.4. ***Unitarna reprezentacija*** *kompaktne grupe G je homomorfizam L s grupe G u grupu unitarnih operatora $U(H)$ na Hilbertovom prostoru H (koji može ali ne mora biti konačnodimenzionalan), takav da je za svaki $v \in H$, preslikavanje $g \mapsto L(g)v$ s G u H neprekidno.*

Od sad ćemo promatrati prvenstveno unitarne reprezentacije; kao što ćemo vidjeti, svaka se konačnodimenzionalna reprezentacija može smatrati unitarnom.

2.3 Neki rezultati o reprezentacijama kompaktnih grupa

Kada promatramo kompaktne grupe G, tada sa $C(G)$ označavamo skup svih neprekidnih funkcija $f : G \to \mathbb{C}$. Definiramo integral na kompaktnoj grupi G:

Definicija 2.3.1. *Funkcional $M : C(G) \to \mathbb{C}$ koji funkciji $f \in C(G)$ pridružuje njenu srednju vrijednost nazivamo invarijantni funkcional ili invarijantni integral na grupi G ako zadovoljava sljedeća svojstva:*

(S_1) *M je linearni funkcional*

$$M(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 M(f_1) + \alpha_2 M(f_2) \qquad f_1, f_2 \in C(G), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$$

(S_2) *M je pozitivan, što znači*

$$f(x) \geq 0,\ \forall x \in G \Longrightarrow M(f) \geq 0 \qquad f \in C(G)$$

(S_3) *M je invarijantan s obzirom na translacije, tj.*
M je lijevo invarijantan:

$$M(\lambda_a f) = M(f) \qquad \forall a \in G,\ \forall f \in C(G)$$

i desno invarijantan:

$$M(\rho_a f) = M(f) \qquad \forall a \in G,\ \forall f \in C(G),$$

gdje smo sa $\lambda_a f$ označili lijevu translaciju, odnosno funkciju $(\lambda_a f)(x) = f\left(a^{-1}x\right),\ x \in G$, a sa $\rho_a f$ desnu translaciju, odnosno funkciju $(\rho_a f)(x) = f(xa),\ x \in G$.

(S_4) *$M\left(\tilde{f}\right) = M(f)$, gdje je $\tilde{f}(t) = f\left(t^{-1}\right)$*

(S_5) *$M(1) = 1$, M je normiran.*

Teorem 2.3.2. *Invarijantni integral $M : C(G) \to \mathbb{C}$ koji zadovoljava svojstva iz prethodne definicije postoji i jedinstven je do na skalar.*

Upravo ćemo pomoću invarijantnog integrala dokazati sljedeći teorem.

Teorem 2.3.3. *Ako je L konačnodimenzionalna reprezentacija na prostoru V tada postoji skalarni produkt na V koji čini reprezentaciju L unitarnom.*

Dokaz. Neka je $(\cdot|\cdot)_0$ bilo koji skalarni produkt na prostoru V. Definiramo preslikavanje $(u, v) \mapsto (u|v)$ sa $V \times V$ u $\mathbb{C}$ na sljedeći način:

$$(u|v) = \int_G (L(x)u|L(x)v)_0\, dx, \qquad u, v \in V.$$

Tada je $(\cdot|\cdot)$ također skalarni produkt na V. Dokažimo da je invarijantan za L. Neka je $y \in G$. Tada

$$\begin{aligned}
(L(y)\,u|L(y)\,v) &= \int_G (L(x)\,L(y)\,u|L(x)\,L(y)\,v)_0\,dx \\
&= \int_G (L(xy)\,u|L(xy)\,v)_0\,dx \\
&= [\text{korištenjem invarijantnosti integrala}] \\
&= \int_G (L(z)\,u|L(z)\,v)_0\,dz \\
&= (u|v)\,.
\end{aligned}$$

Slijedi da su svi operatori $L(y)$, $y \in G$, unitarni s obzirom na skalarni produkt $(\cdot|\cdot)$. Prema tome, reprezentacija L je unitarna reprezentacija s obzirom na skalarni produkt $(\cdot|\cdot)$. □

Važna posljedica prethodnog teorema je

Teorem 2.3.4. *Bilo koja konačnodimenzionalna reprezentacija kompaktne grupe G je direktna suma ireducibilnih reprezentacija.*

Dokaz. Prema prethodnom teoremu, možemo pretpostaviti da je reprezentacija L unitarna; tada vrijedi

$$L(x)^* = L(x^{-1}), \qquad x \in G.$$

Neka je V prostor reprezentacije L i $W \subseteq X$ netrivijalan invarijantni potprostor s obzirom na reprezentaciju L tj. potprostor invarijantan u odnosu na svaki operator $L(x)$, $x \in G$. Tvrdimo da je i ortogonalni komplement od W, $W^\perp$, invarijantan za L. Naime, ako je $v \in W^\perp$, tada za svaki $x \in G$ i za svaki $w \in W$ vrijedi

$$(L(x)v|w) = (v|L(x)^*w) = (v|L(x^{-1})w) = 0,$$

jer je $L(x^{-1})w \in W$ zbog invarijantnost potprostora W. Sada vidimo da je $V = W \oplus W^\perp$, pri čemu i W i $W^\perp$ imaju striktno manju dimenziju od $\dim V$, pa rezultat slijedi indukcijom po dimenziji. □

Reprezentacije konačnih grupa mogu se dobiti dekompozicijom regularnih reprezentacija. Kod kompaktnih grupa koristi se ista tehnika, no $L^2(G)$ je beskonačne dimenzije kada G nije konačna, i nije a priori jasno da ima konačnodimenzionalan invarijantni potprostor. Definiramo desnu regularnu reprezentaciju R od G koja djeluje na $\mathcal{H} = L^2(G)$:

$$(R(x)\,f)(y) = f(yx)\,, \qquad (x, y \in G)$$

Vrijedi

$$\int_G |f(y)|^2 \, dy = \int_G |f(yx)|^2 \, dy$$

pa vidimo da je $R(x)$ unitaran. Također, nije teško vidjeti da je za bilo koji $f \in \mathcal{H}$ pridruživanje $x \mapsto R(x) f$ neprekidno iz G u $\mathcal{H}$. To dokazuje da je $\mathcal{H}$ unitarna reprezentacija grupe G.

Želimo pokazati da postoji mnogo konačnodimenzionalnih potprostora invarijantnih na reprezentaciju R. Ako je F takav potprostor, restrikcija R na F nam daje konačnodimenzionalnu unitarnu reprezentaciju od G na F. Za to nam je potrebna jedna verzija Peter-Weylovog teorema.

Teorem 2.3.5 (Peter-Weyl)**.** *Neka je $\mathcal{F}$ algebarski zbroj svih konačnodimenzionalnih potprostora od $\mathcal{H}$ invarijantnih s obzirom na reprezentaciju R. Tada je $\mathcal{F}$ gust u $\mathcal{H}$.*

Ovaj teorem ćemo kasnije dokazati.
Spomenimo samo da za podskup S normiranog prostora X kažemo da je gust u prostoru X ako je njegov zatvarač $\mathrm{Cl}(S) = X$.
Kao rezultat dobivamo sljedeći teorem:

Teorem 2.3.6. *Konačnodimenzionalne ireducibilne reprezentacije od G razlikuju točke od G. Preciznije, ako su $x, y \in G$, gdje je $x \neq y$ tada postoji konačnodimenzionalna ireducibilna reprezentacija L od G takva da je $L(x) \neq L(y)$.*

Dokaz. Ovo je jedna od posljedica Peter-Weylovog teorema.
Pretpostavimo suprotno. Tada postoje $x \neq y$ od G takvi da svaka konačnodimenzionalna reprezentacija L od G zadovoljava $L(x) = L(y)$. Ako je $t = xy^{-1}$, slijedi da je $t \neq e$ i $L(t) = I$ za svaku reprezentaciju L. Stoga za bilo koji konačnodimenzionalni R-invarijantni potprostor F od $\mathcal{H}$ imamo $R(t)\big|_F = I$. Dakle, prema Peter-Weylovom teoremu, $R(t) = I$ na cijelom $\mathcal{H}$. Posebno, za svaki $f \in \mathcal{H}$,

$$f(xy) = f(x) \qquad \forall x, y \in G,$$

pa je f konstanta. To je kontradikcija, jer na G postoje nekonstantne funkcije. □

Teorem 2.3.7. *Ako je U okolina od e u G, tada postoji konačnodimenzionalna reprezentacija L takva da je $L(x) \neq I$ za svaki $x \in G \setminus U$. Posebno, jezgra H od L sadržana je u U i imamo ulaganje*

$$G/H \hookrightarrow U(N),$$

za neki cijeli broj $N \in \mathbb{N}$ gdje je $U(N)$ grupa $N \times N$ unitarnih matrica. Posebno, G/H je Liejeva grupa.

Dokaz. Za svaki $x \in G \setminus U$, prema prethodnom teoremu možemo naći reprezentaciju L_x takvu da je $L_x(x) \neq I$. Zbog neprekidnosti reprezentacija, tada postoji okolina V_x od x takva da je $L_x(y) \neq I$ za svaki $y \in V_x$. Sve takve okoline V_x pokrivaju komapktan skup $G \setminus U$, pa ga pokriva već konačno mnogo njih: $G \setminus U = \bigcup_{1 \leq i \leq r} V_{x_i}$. Tražena reprezentacija je $L = \oplus_{1 \leq i \leq r} L_{x_i}$. □

Ovaj rezultat je vrlo važan jer nam govori da se kompaktne grupe mogu aproksimirati Liejevim grupama koje su zatvorene podgrupe unitarnih grupa.
Nešto više o Liejevim grupama biti će napisano kasnije.

Poglavlje 3

Peter-Weylov teorem

3.1 Osnovni pojmovi

Prije nego što dokažemo Peter-Weylov teorem proučiti ćemo neke pojmove koji će nam biti važni kod dokaza. Dakle, ideja Petera i Weyla jest tražiti konačnodimenzionalne potprostore od $\mathcal{H}$ kao svojstvene prostore integralnih operatora. Ako je jezgra integralnog operatora invarijantna za desne translacije tada je svojstveni prostor invarijantan s obzirom na R.

Definicija 3.1.1. *Neka je X kompaktan Hausdorffov prostor, koji zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti, s mjerom μ i neka je k kompleksna neprekidna funkcija iz $X \times X$ u $\mathbb{C}$. Tada definiramo integralni operator A_k, s jezgrom k, koji funkciju $f \in L^2(X, \mu)$ prevodi u funkciju $A_k f$ danu sa*

$$(A_k f)(x) = \int_X k(x, y) f(y) \, d\mu(y), \qquad (x \in X)$$

Budući da je $X \times X$ kompaktan, a k neprekidna funkcija, k je i ograničena, pa postoji $C > 0$ takav da $\int_X |k(x, y)|^2 \, d\mu(y) \leq C$, za svaki x. Tada za $f \in L^2(X, \mu)$, i za svaku točku $x \in X$ primjenom nejednakosti Cauchy-Schwarz-Buniakowskog imamo:

$$|A_k f(x)| = \left| \int_X k(x, y) f(y) \, d\mu(y) \right| \leq \left(\int_X |k(x, y)|^2 \, d\mu(y) \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2 \leq \sqrt{C} \, \|f\|_2$$

što povlači da je A_k ograničen operator na separabilnom Hilbertovom prostoru $L^2(x, \mu)$. Ovo su bili prvi operatori beskonačnodimenzionalnih prostora koji su se proučavali zbog velike povezanosti s konačnodimenzionalnim operatorima definiranih na matricama. Konkretno, za ove operatore koji zadovoljavaju uvjet hermitske simetričnosti postoje svojstvene vrijednosti i spektralna teorija koja je vrlo slična konačnodimenzionalnoj teoriji. Ipak, ne pripadaju svi operatori ovoj klasi. Ako je $X = [0, 1]$ s Lebesgueovom mjerom μ,

operator A zadan množenjem s x nema svojstvenih vrijednosti i njegovu spektralnu teoriju je teže formulirati. Prvi je to uočio Hilbert koji je dokazao poznati spektralni teorem za ograničene hermitske operatore. Kasnije je to prošireno na neograničene operatore što je dokazao Von Neumann potičući kvantnu teoriju.
Ključno svojstvo operatora A_k je činjenica da je kompaktan, preciznije, šalje svaki omeđeni podskup od $\mathcal{H}$ u skup sa kompaktnim zatvaračem. Da bismo to vidjeli, prisjetimo se da je X metrički, a uniformna neprekidnost implicira da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da $|k(x_1, y) - k(x_2, y)| < \epsilon$ za $y \in X$ i $d(x_1, x_2) < \delta$, gdje je d metrika na X. Tada vrijedi

$$|(A_k f)(x_1) - (A_k f)(x_2)| \leq \delta \, \|f\|_2$$

kada god je $d(x_1, x_2) < \delta$.
Odavde vidimo da A_k preslikava bilo koji omeđeni podskup od $\mathcal{H}$ u ekvikontinuiran podskup od $C(X)$, u smislu sljedeće definicije. To povlači kompaktnost operatora A_k.

Definicija 3.1.2. *Skup $S \subseteq C(x)$ nazivamo ekvikontinuiranim u točki $t_0 \in X$ ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji otvoren skup $U \subseteq X$ takav da je $t_0 \in U$ i da za svaku funkciju $f \in S$ vrijedi:*

$$t \in U \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| < \epsilon.$$

Podskup $S \subseteq C(X)$ je ekvikontinuiran ako je S ekvikontinuiran u svakoj točki $t_0 \in X$.

Prisjetimo se da je matrica hermitska ako je jednaka svojoj hermitski konjugiranoj matrici. Pri tome, za matricu $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$, njena hermitski konjugirana matrica je matrica $A^* \in M_{n,n}(\mathbb{C})$, koju iz A dobijemo tako da ju transponiramo i sve elemente kompleksno konjugiramo. Analogno, za jezgru k kažemo da je hermitska ako je

$$k(x, y) = \overline{k(y, x)}.$$

Tada je A_k operator hermitski na Hilbertovom prostoru $L^2(X, \mu)$ tj. vrijedi:

$$(A_k f, g) = (f, A_k g), \qquad f, g \in L^2(X, \mu).$$

Za kompaktan hermitski operator A na Hilbertovom prostoru $\mathcal{L}$ imamo sljedeću verziju spektralnog teorema.

Teorem 3.1.3. *Za svaki kompaktan hermitski operator A na realnom ili kompleksnom Hilbertovom prostoru $\mathcal{L}$, postoji ortonormirana baza od $\mathcal{L}$ sastavljena od svojstvenih vektora od A. Točnije, za ortogonalni komplement jezgre operatora A vrijedi: ili postoji konačna ortonormirana baza svojstvenih vektora od A, ili postoji prebrojiva ortonormirana baza $\{e_n\}$ svojstvenih vektora od A, s odgovarajućim svojstvenim vrijednostima $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ takvima da $\lambda_n \to 0$*

Skica dokaza: Dokaz spektralnog teorema za hermitske $n \times n$ matrice ovisi o tome kako pokazati postojanje jednog svojstvenog vektora x. Kada se to napravi, to što je operator hermitski implicira da su linearna ljuska i ortogonalni komplement od x invarijantni potprostori od A. Željeni rezultat dobiva se iteracijom. Postojanje svojstvenog vektora pokazujemo na sljedeći način. Najveća svojstvena vrijednost je maksimum na zatvorenoj jediničnoj sferi, funkciji $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ definiranoj s $f(x) = x^*Ax = \langle Ax, x\rangle$. Najprije ćemo skicirati argument za matrice. Budući da je jedinična sfera S na $\mathbb{R}^{2n}$ kompaktna, i f je neprekidna funkcija, $f(S)$ je kompaktna na realnom pravcu, onda f postiže maksimum na S, u nekom jediničnom vektoru y. Prema Lagrengeovom teoremu multiplikatora, y zadovoljava:

$$\nabla f = \nabla y^* A y = \lambda \nabla y^* y$$

za neki λ. Tvrdimo da je $Ay = \lambda y$. Neka je $z \in \mathbb{C}^n$ bilo koji vektor. Ako jedinični vektor y maksimizira $\langle Ax, x\rangle$ na jediničnoj sferi, tada je maksimiziran i sljedeći kvocijent:

$$g(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2}, \quad x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n.$$

Razmotrimo funkciju $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu sa $h(t) = g(y + tz)$. Računamo:

$$\begin{aligned}
h'(0) &= \lim_{t\to\infty} \frac{h(t) - h(0)}{t - 0} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{g(y+tz) - g(y)}{t} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left(\frac{\langle A(y+tz), y+tz\rangle}{\|y+tz\|^2} - \frac{\langle Ay, y\rangle}{\|y\|^2}\right) \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left(\frac{\langle A(y+tz), y+tz\rangle - \langle Ay, y\rangle}{\|y\|^2}\right) \\
&= \frac{1}{\|y\|^2} \lim_{t\to\infty} \frac{\langle A(y+tz), y+tz\rangle - \langle Ay, y\rangle}{t} \\
&= \frac{1}{\|y\|^2}\left(\frac{d}{dt}\frac{\langle A(y+tz), y+tz\rangle}{\langle y+tz, y+tz\rangle}\right)(0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Stavimo $m = \langle Ay, y\rangle / \langle y, y\rangle$. Tada slijedi da je

$$\mathrm{Re}\left(\langle Ay - my, z\rangle\right) = 0.$$

Ovdje Re predstavlja realni dio kompleksnog broja. Kako je z proizvoljan, $Ay - my = 0$. To je ideja dokaza za spektralni teorem u slučaju matrica. U beskonačnodimenzionalnom slučaju dokaz se bazira na sličnim idejama.

Prije nego što dokažemo Peter-Weylov teorem, definirajmo i sljedeći pojam.

Definicija 3.1.4. *Konvolucija na kompaktnoj grupi G je binarna operacija*

$$(f, g) \mapsto f * g$$

sa $C(G) \times C(G)$ u $C(G)$, dana pomoću

$$(f * g)(x) = \int_G f(t) g(t^{-1}x)\, dt,$$

gdje smo sa dt označili invarijantnu mjeru na G.

3.2 Dokaz Peter-Weylovog teorema

Prisjetimo se iskaza Peter-Weylovog teorema (2.3.5) kojeg ćemo ovdje i dokazati:
Neka je $\mathcal{F}$ algebarski zbroj svih konačnodimenzionalnih potprostora od $\mathcal{H}$ invarijantnih s obzirom na reprezentaciju R. Tada je $\mathcal{F}$ gust u $\mathcal{H}$.
Ovdje je G kompaktna grupa, μ je invarijantna mjera, $\mathcal{H} = L^2(X, \mu)$ je Hilbertov prostor, a sa R označavamo desnu regularnu reprezentaciju.

Dokaz. Neka je k neprekidna i hermitska jezgra na $G \times G$ te promatramo operator A_k. Ako vrijedi

$$k(xt, yt) = k(x, y), \qquad (x, y, t \in G),$$

onda je svaki svojstveni prostor invarijantan s obzirom na desne translacije $R(t)$ $(t \in G)$.
Jezgra k zadovoljava uvjet invarijantnosti pa vrijedi:

$$k(x, y) = k\left(xy^{-1}, yy^{-1}\right) = k\left(xy^{-1}, e\right),$$

gdje je e neutralni element grupe G. Definiramo $u(z) = k(z, e)$. Tada po gornjemu vrijedi:

$$k(x, y) = u\left(xy^{-1}\right).$$

Ako izaberemo u takav da

$$u(t) = \overline{u(t^{-1})}$$

tada je k hermitska. To će biti ispunjeno ako je u realna i simetrična, tj.

$$u(t) = u\left(t^{-1}\right).$$

Operator A_k je dan konvolucijom sa u:

$$(A_k f)(x) = \int_G u\left(xy^{-1}\right) f(y)\, dy = \int_G u(t) f\left(t^{-1}x\right) dt = (u * f)(x)$$

Za bilo koju okolinu U od e, možemo naći u kao gore čiji je nosač sadržan u U. Doista, uzmimo $V = U \cap U^{-1}$, i neprekidnu funkciju $v \geq 0$ s nosačem unutar V, takvu da je $\int_G vdx = 1$. Tada funkcija

$$u(t) = \frac{1}{2}\left(v(t) + v\left(t^{-1}\right)\right)$$

zadovoljava gornja svojstva. Za svaku tako dobivenu funckiju u promatramo pridružene k i A_k. Tada su svojstveni potprostori operatora A_k invarijantni s obzirom na R. Neka je $\mathcal{A}$ algebarska suma svih tako dobivenih potprostora.

Pretpostavimo da $\mathcal{A}$ nije gusta u $L^2(G)$. Neka je h ne nul element u ortogonalnom komplementu od $\mathcal{A}$. Tada je $A_k h = 0$ za sve k kao gore. Dakle, $u * h = 0$ za sve u kao gore. Ako uzmemo niz (u_n) takav da je nosač od u_n sadržan u otvorenoj okolini U_n od e, tako da se U_n smanjuje i $\cap_n U_n = \{e\}$, tada vrijedi

$$u_n * \psi \to \psi \qquad (n \to \infty)$$

za svaki $\psi \in L^2(G)$. Stoga, $u_n * h = 0 \to h$ pokazuje da je $h = 0$.

Dakle je $\mathcal{A}$ gust u $L^2(G)$. Budući da je $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, to pokazuje da je i $\mathcal{F}$ gust u $L^2(G)$. □

Poglavlje 4

Liejeve grupe i Liejeve algebre

4.1 Liejeve grupe

U ovom diplomskom radu proučavamo i Liejeve grupe te će ovdje biti dane osnovne definicije koje će nam biti od koristi u daljnjem proučavanju.

Definicija 4.1.1. ***Liejeva algebra*** *nad poljem K je algebra $\mathfrak{g}$, u kojoj se množenje obično označava sa $(x, y) \mapsto [x, y]$ i zove komutator, takve da vrijede sljedeća dva uvjeta:*

$(L1)$ $[x, x] = 0 \qquad \forall x \in \mathfrak{g}$

$(L2)$ $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \qquad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$

Svojstvo $(L2)$ zove se Jacobijev identitet. Iz svojstva $(L1)$ slijedi svojstvo

$(L1^{'})$ $[x, y] = -[y, x] \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g}$

Svojstvo $(L1^{'})$ povlači svojstvo $(L1)$ ukoliko je karakteristika polja različita od 2.

Neka je M Hausdorffov topološki prostor i neka je $n \in \mathbb{N}$. n-dimenzionalna karta na M je uređeni par (U, ψ) gdje je $U \subseteq M$ otvoren skup i ψ homeomorfizam sa U na otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$. Skup U zovemo domena karte (U, ψ). n-dimenzionalni C^∞-atlas na M je skup $\mathcal{A}$ n-dimenzionalnih karata na M sa sljedećim svojstvima:

(i) Domene karata u skupu $\mathcal{A}$ pokrivaju M:

$$\bigcup_{(U,\psi)\in\mathcal{A}} U = M$$

(ii) Ako su $(U, \psi), (V, \varphi) \in \mathcal{A}$ takve da je $U \cap V \neq \emptyset$, onda je

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

C^∞-preslikavanje.

n-dimenzionalna C^∞-struktura na M je n-dimenzionalni C^∞-atlas $\mathcal{A}$ na M koji pored (i) i (ii) zadovoljava i svojstvo maksimalnosti:

(iii) Ako je (W, χ) n-dimenzionalna karta na M i ako su za svaku kartu $(U, \psi) \in \mathcal{A}$ takvu da je $U \cap W \neq \emptyset$ preslikavanja: $\psi \circ \chi^{-1} : \chi(U \cap W) \longrightarrow \psi(U \cap W)$ i $\chi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap W) \to \chi(U \cap V)$ klase C^∞, onda je $(W, \chi) \in \mathcal{A}$

Lako se vidi da je svaki n-dimenzionalni C^∞-atlas sadržan u n-dimenzionalnoj C^∞-strukturi. Diferencijabilna mnogostrukost ili C^∞-mnogostrukost je uređen par $(M, \mathcal{A})$, gdje je M Hausdorffov topološki prostor s prebrojivom bazom topologije, a $\mathcal{A}$ je n-dimenzionalna C^∞-struktura na M za neki $n \in \mathbb{N}$. Pišemo, $n = \dim M$.
Ukoliko u prethodnim definicijama umjesto o C^∞-preslikavanjima govorimo o analitičkim preslikavanjima, dolazimo do definicija pojmova n-dimenzionalni analitički atlas, n-dimenzionalna analitička struktura i analitička mnogostrukost. Napomenimo da je svaka analitička mnogostrukost ujedno i diferencijabilna mnogostrukost.

Definicija 4.1.2. *Liejeva grupa je skup G sa svojstvima:*

(i) *G je grupa.*

(ii) *G je diferencijabilna mnogostrukost.*

(iii) $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ *je C^∞-preslikavanje sa $G \times G$ u G.*

Iz (iii) slijedi da je množenje $(x, y) \mapsto xy$ C^∞-preslikavanje sa $G \times G$ u G i da je invertiranje $x \mapsto x^{-1}$ difeomorfizam sa G na G. Jedna od važnih činjenica koju ne dokazujemo je da na svakoj Liejevoj grupi postoji prirodna struktura analitičke mnogostrukosti.
Dakle, možemo reći da je Liejeva grupa glatka mnogostrukost koja zadovoljava svojstva grupe i zadovoljava svojstvo da su operacije grupe diferencijabilne. Za svaku Liejevu grupu G uvijek postoji odgovarajuća Liejeva algebra $\mathfrak{g}$. Nju možemo konstruirati kao prostor svih lijevo invarijantnih vektorskih polja na G. Pokazuje se da je za svako lijevo invarijantno vektorsko polje X na G, pripadna integralna krivulja φ_X podgrupa od G, koju zovemo jednoparametarskom podgrupom.

Pomoću toga se definira eksponencijalno preslikavanje $\exp : \mathfrak{g} \to G$:

Definicija 4.1.3. *Eksponencijalno preslikavanje* $\exp : \mathfrak{g} \mapsto G$ *definirano je sa*

$$\exp(X) = \varphi_X(e),$$

gdje je φ_X jednoparametarska podgrupa od X, $X \in \mathfrak{g}$.

4.2 Primjeri Liejevih grupa

Navesti ćemo nekoliko primjera koji zadovoljavaju svojstva Liejevih grupa. Dakle, svojstvo da je Liejeva grupa glatka mnogostrukost koja zadovoljava svojstva grupe i svojstvo da su operacije grupe diferencijabilne.

1) Neka je $M_n(\mathbb{R})$ skup svih $n \times n$ realnih matrica. Povezujemo matricu $A = \left(a_{ij}\right)$ s točkom u Euklidskom prostoru $\mathbb{R}^{n^2}$, čije su koordinate $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$. Definiramo opću linearnu grupu $GL_n(\mathbb{R})$ kao grupu svih $n \times n$ realnih matrica $A = \left(a_{ij}\right)$, čija determinanta $\det A \neq 0$. Funkcija $A \mapsto \det A$ je polinom stupnja n, i to je glatka funkcija na $M_n(\mathbb{R})$. Osim toga, skup $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ je otvoreni skup u $\mathbb{R}$ i inverzna slika otvorenog skupa, s obzirom na neprekidna preslikavanja, je otvorena. Dakle, skup $GL_n(\mathbb{R})$ je otvoren podskup od $M_n(\mathbb{R})$. Slijedi da je $GL_n(\mathbb{R})$ n^2- dimenzionalna mnogostrukost. Budući da je $(ab)_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$, matrica produkta AB ima koordinate koje su neprekidne funkcije koordinata od Ai B. Također, iz formule

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

vidimo da su koordinate od A^{-1} također glatke funkcije. Vidi se da grupa $GL_n(\mathbb{R})$ zadovoljava svojstva Liejeve grupe pa je kao takva, važan primjer Liejevih grupa.

2) Skupovi $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ su Liejeve grupe s obzirom na zbrajanje vektora.

3) Skupovi $\mathbb{R}^*$ i $\mathbb{C}^*$ su Liejeve grupe s obzirom na množenje. Ovdje je $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4) Kružnica $S^1 \subset \mathbb{C}$ je Liejeva grupa.

5) n-torus $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ (n puta) je Liejeva grupa dimenzije n.

Još neki primjeri Liejevih grupa su:

6) Specijalna linearna grupa $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$.

7) Ortogonalna grupa $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid AA^\tau = I\}$. A^τ je oznaka za transponiranu matricu matrice A.

8) Unitarna grupa $U(n) = \left\{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid A\overline{A}^\tau = I\right\}$.

9) Specijalna ortogonalna grupa $SO(n) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$.

10) Specijalna unitarna grupa $SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$.

4.3 Vjerne reprezentacije za kompaktne Liejeve grupe

Vjernu reprezentaciju definirali smo u jednom od prethodnih poglavlja, a u ovom odjeljku reći ćemo nešto o vjernim reprezentacijama kompaktnih Liejevih grupa te će biti dan teorem koji govori o postojanju takvih reprezentacija.
Pretpostavimo da je G kompaktna Liejeva grupa. Prema Teoremu 2.3.7 dolazimo do zaključka da G ima vjernu reprezentaciju. Potrebna je lema:

Lema 4.3.1. *Neka je G Liejeva grupa. Tada G nema male podgrupe. Točnije, postoji okolina U od e, takva da ako je S podgrupa od G sadržana u U, onda je $S = \{e\}$.*

Dokaz. Neka je $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ i neka je $\|\cdot\|$ norma na $\mathfrak{g}$. Neka je $\mathfrak{n}_a = \{X \in \mathfrak{g} \mid \|X\| < a\}$. Biramo $a > 0$ takav da je eksponencijalna karta difeomorfizam od $\mathfrak{n}_a$ na $G_a := \exp(\mathfrak{n}_a)$. Neka je $0 < b < a/2$. Tvrdimo da $U = G_b$ ispunjava uvjete. Neka je $S \neq \{e\}$ podgrupa takva da je $S \subset U$. Neka je $x \neq e$ element od S i neka je $x = \exp X$ za neki $X \in \mathfrak{n}_b$. Lako možemo naći cijeli broj $r \geq 1$ takav da su $X, 2X, ..., rX$ u $\mathfrak{n}_b$, ali $(r+1)X \notin \mathfrak{n}_b$. No, $(r+1)X = rX + X \in \mathfrak{n}_a$. Sada $\exp(r+1)X = x^{r+1} \in S \subset G_b$ pa je tako

$$\exp(r+1)X = \exp Y \text{ za neki } Y \in \mathfrak{n}_b \tag{4.1}$$

Budući da su i Y i $(r+1)X$ u $\mathfrak{n}_a$ jednakost (4.1) povlači da je $Y = (r+1)X$. Slijedi da je $(r+1)X \in \mathfrak{n}_b$, a to je u kontradikciji s izborom broja r. □

Teorem 4.3.2. *Neka je G Liejeva grupa. Tada G ima vjernu reprezentaciju. Stoga za neki N imamo $G \hookrightarrow U(N)$, gdje je $U(N)$ grupa unitarnih matrica reda N.*

Dokaz. Odaberemo U kao u prethodnoj lemi i tražimo reprezentaciju L takvu da je jezgra od L sadržana u U (Teorem 2.3.7). Tada ta jezgra mora biti trivijalna i zato L mora biti vjerna reprezentacija. □

Poglavlje 5

Ireducibilne reprezentacije

5.1 Karakter reprezentacije

Ako je L ireducibilna unitarna reprezentacija grupe G, i ako odaberemo bazu prostora reprezentacije L, tada je

$$L(x) = \left(a_{ij}(x)\right)$$

unitarna matrica i a_{ij} $(1 \leq i, j \leq \dim(L))$ su neprekidne funkcije na G. Te funkcije zovemo matričnim elementima od L. Potprostor u $L^2(G)$ razapet matričnim elementima od G ne ovisi o izboru baze i ovisi samo o klasi ω od L. Taj prostor označavamo sa $\mathcal{F}(\omega)$.

Teorem 5.1.1. *Imamo relaciju ortogonalnosti*

$$\left(a_{ij}, a_{kl}\right) = \begin{cases} 0 & , \textit{ako je } (i, j) \neq (k, l) \\ \frac{1}{dim(L)} & , \textit{ako je } (i, j) = (k, l) \end{cases}$$

Ako su ω i $\omega^{'}$ dvije različite klase ireducibilnih reprezentacija tada je

$$\mathcal{F}(\omega) \perp \mathcal{F}\left(\omega^{'}\right).$$

Konačno, imamo ortogonalnu dekompoziciju

$$L^2(G) = \widehat{\bigoplus}_{\omega} \mathcal{F}(\omega),$$

gdje $\hat{\oplus}$ označava Hilbertovu sumu.

Definicija 5.1.2. *Za bilo koju konačnodimenzionalnu reprezentaciju L od G, ireducibilnu ili ne, definiramo njezin karakter Θ_L sa*

$$\Theta_L(x) = \operatorname{tr}(L(x)) \qquad (x \in G).$$

Ako je L ireducibilna reprezentacija, njezin karakter je element od $\mathcal{F}(\omega)$. To je funkcija klasa na G. Naime, ona je konstantna na svakoj konjugacijskoj klasi u G:

$$\begin{aligned}\Theta_L\left(xyx^{-1}\right) &= \operatorname{tr}\left(L\left(xyx^{-1}\right)\right)\\ &= \operatorname{tr}\left(L(x)\,L(y)\,L(x)^{-1}\right)\\ &= \operatorname{tr}\left(L(x)^{-1}L(x)\,L(y)\right)\\ &= \operatorname{tr}\left(L\left(x^{-1}x\right)L(y)\right)\\ &= \operatorname{tr}(L(y))\\ &= \Theta_L(y) \qquad (x, y \in G)\end{aligned}$$

5.2 Određivanje ireducibilnih karaktera

Ako je G kompaktna grupa, konkretno dana kao jedna od klasičnih grupa, javlja se problem eksplicitnog određivanja svih ireducibilnih karaktera. Tim problemom se bavio i prvi ga riješio Hermann Weyl u nizu radova koje je napisao 1920. i mnogi to smatraju njegovim najvećim dijelom. Neka je $G = SU(2)$. Ako je Θ bilo koji karakter, imamo

$$\int_G \Theta\overline{\Theta}dx = 1 \Leftrightarrow \Theta \text{ je ireducibilan karakter} \tag{5.1}$$

Weyl je koristio te rezultate za određivanje svih ireducibilnih karaktera.
Neka je

$$u(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}.$$

Neka je T dijagonalna podgrupa svih $u(\theta)$:

$$T = \{u(\theta)\}.$$

Tada je prema spektralnom teoremu (za konačnodimenzionalne prostore) bilo koji element od G konjugiran s elementom od T i zato je za određivanje funkcije klasa, kao što je karakter, dovoljno znati njezinu restrikciju na T. Štoviše, presjek konjugacijske klase od G sa T sastoji se upravo od $u(\theta)$ i $u(-\theta)$ za neke θ.
Dakle restrikcija funkcije klase na T je simetrična tj. invarijantna pod $\theta \longrightarrow -\theta$:

$$f(u(\theta)) = f(u(-\theta)).$$

Ako je L bilo koja reprezentacija, ireducibilna ili ne, restrikcija od L na T ju rastavlja kao direktnu sumu karaktera od T. Stoga, karakter Θ od L ima sljedeći oblik:

$$\Theta(u(\theta)) = \sum_n c_n e^{in\theta}$$

gdje je c_n cijeli broj ≥ 0 i suma je konačna. Da bismo mogli iskoristiti relaciju (5.1) potrebno je prijeći sa integriranja po G na integriranje po T. A to je i učinjeno poznatom Weylovom integracijskom formulom.

Teorem 5.2.1 (Weylova integracijska formula)**.** *Neka je G grupa $SU(2)$ i neka je T dijagonalna podgrupa svih $u(\theta)$. Neka je*

$$\Delta(u(\theta)) = e^{i\theta} - e^{-i\theta}.$$

Tada, za bilo koju neprekidnu funkciju klase f na G, imamo:

$$\int_G f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_T f(u(\theta))\,\Delta(u(\theta))\,\overline{\Delta(u(\theta))}d\theta.$$

Ovdje je $d\theta$ Lebesgueova mjera na T normalizirana tako da daje mjeru 1 *za T.*

Neka je

$$\Phi = (\Theta|_T)\,\Delta.$$

Sada je Φ antisimetrična, Fourierov red s cjelobrojnim koeficijentima i relacija (5.1) postaje, prema integracijskoj formuli,

$$\int_T \Phi\overline{\Phi}d\theta = 2 \tag{5.2}$$

za ireducibilne karaktere. Sada je funkcija

$$\varphi_n := e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta} \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

antisimetrična, i bilo koji konačni Fourierov red koji je antisimetričan i ima cjelobrojne koeficijente je integralna linearna kombinacija od φ_n. Stoga

$$\Phi = \sum_n d_n\varphi_n,$$

gdje je suma konačna i d_n je jedinstveno određen cijeli broj. Funkcije φ_n su međusobno ortogonalne i iz (5.2) slijedi

$$\int \varphi_n\overline{\varphi_n}\theta = 2.$$

Iz toga slijedi da je

$$\sum_n d_n^2 = 1$$

što pokazuje da je
$$(\Theta|_T) = \pm\varphi_n$$
za neki n. Stoga
$$\Theta\left(u\left(\theta\right)\right) = \frac{e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}.$$
Ovdje smo za φ_n izabrali pozitivan predznak zato jer vrijednost od Θ mora biti pozitivan cijeli broj. Dobivena formula je poseban slučaj poznate Weylove formule karaktera.

Za svaki cijeli broj $n \geq 0$ desna strana ove formule mora predstavljati ireducibilni karakter. Naime, pretpostavimo da to nije tako za neki cijeli $n \geq 0$. Tada se desna strana gornje formule, koja je simetričan konačan Fourierov red na T, jedinstveno proširuje do funkcije klasa na G i ta funkcija klasa će biti ortogonalna na sve ireducibilne karaktere (što slijedi iz Weylove integracijske formule). To je nemoguće prema Peter-Weylovom teoremu.

Uzimajući limes za $\theta \longrightarrow 0$ vidimo da je
$$\Theta\left(e\right) = \left(n + 1\right).$$
Stoga imamo:

Teorem 5.2.2 (Weylova formula karaktera i dimenzije)**.** *Ireducibilni karakteri od $G = SU\left(2\right)$ su točno sve funkcije klasa čije su restrikcije na T dane sa:*
$$\Theta\left(u\left(\theta\right)\right) = \frac{e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}.$$
Odgovarajuća reprezentacija ima dimenziju $n + 1$.

Weyl je u svojim radovima došao do formule za karaktere i dimenzije ireducibilnih reprezentacija svih kompaktnih Liejevih grupa. U općem slučaju T predstavlja maksimalni torus u G, a simetriju $\theta \longrightarrow -\theta$ poopćuju elementi konačne grupe W, koju nazivamo Weylova grupa. Postoji antisimetrična funkcija analogna sa Δ u općem slučaju i integracijska formula formulirana je pomoću te funkcije.

5.3 Maksimalni torus i Weylove grupe

Kako bismo definirali maksimalni torus potreban nam je sljedeći korolar.

Korolar 5.3.1. *Povezana kompaktna komutativna n-dimenzionalna Liejeva grupa izomorfna je n-dimenzionalnom torusu T^n.*

Ovaj korolar nam daje definiciju.

Definicija 5.3.2. *Kompaktna povezana komutativna Liejeva grupa zove se torus.*

Definicija 5.3.3. *Torus T je maksimalni torus u G ako ne postoji torus S za koji vrijedi $T \subset S \subset G$.*

Navedimo neke primjere maksimalnih torusa.

1) Skup
$$T = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \right\}$$
je maksimalni torus u $SU(2)$.

2) Skup
$$T = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
je maksimalni torus u $SO(3)$.

Teorem 5.3.4. *Neka je G povezana kompaktna Liejeva grupa. Tada:*

1) *Bilo koji element iz G je sadržan u nekom maksimalnom torusu.*

2) *Bilo koja dva maksimalna torusa su konjugirani. Odnosno, ako su T_1 i T_2 maksimalni torusi u G, tada postoji element $g \in G$ takav da je $gT_1g^{-1} = T_2$*

Iz tvrdnje 2) Teorema 5.3.4 vidimo da svaki maksimalni torus ima istu dimenziju i invarijantan je za kompaktnu povezanu Liejevu grupu.

Propozicija 5.3.5. *Neka je G povezana kompaktna Liejeva grupa i $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra. Vrijedi:*

1) *Svaka komutativna Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$ sadržana je u maksimalnoj komutativnoj podalgebri od $\mathfrak{g}$.*

2) *Svaki torus u G sadržan je u maksimalnom torusu u G.*

3) *Povezana Liejeva podgrupa T od G je maksimalni torus u G ako i samo ako je njena Liejeva algebra $\mathfrak{t}$ maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{g}$.*

4) $\mathfrak{t} \mapsto \exp \mathfrak{t}$ *je bijekcija sa skupa svih maksimalnih komutativnih Liejevih podalgebra od $\mathfrak{g}$ na skup svih maksimalnih torusa u G.*

Ranije spomenuta Weylova grupa definira se na sljedeći način:

Definicija 5.3.6. *Neka je T maksimalni torus u G i $N := \left\{g \in G \,|\, gTg^{-1} = T\right\}$ normalizator od T. Tada kvocijentnu grupu $W = N/T$ nazivamo Weylova grupa od G.*

Weylova grupa je ovisna o izboru maksimalnog torusa T. Kako su svi maksimalni torusi konjugirani, za različite izbore T dobivamo izomorfne Weylove grupe W. Pokazuje se da se svaki element Weylove grupe može napisati kao produkt izvjesnih jednostavnih simetrija. Na primjer, ako je $G = SU_n$, onda se pokazuje da je Weylova grupa izomorfna grupi permutacija S_n skupa $\{1, \ldots, n\}$. U tom slučaju za jednostavne simetrije mogu se uzeti transpozicije susjednih elemenata.

5.4 Općenita Weylova formula karaktera

Weylovu formulu karaktera smo već naveli za slučaj $G = SU_2$, no ovdje ćemo dati općeniti oblik Weylove formule karaktera.
Neka je G kompaktna Liejeva grupa, T neki njezin maksimalni torus, a $W = W(G, T)$ pripadna Weylova grupa. Kao što smo već naveli, svaki $w \in W$ može se prikazati kao produkt jednostavnih simetrija. Definiramo predznak elementa w kao $sgn\,(w) = 1$ ako se w može napisati kao produkt parnog broja jednostavnih simetrija, odnosno $sgn\,(w) = -1$ ako se w može napisati kao produkt neparnog broja jednostavnih simetrija. Za slučaj $G = SU_n$, to je uobičajena parnost permutacije.

Neka je $\mathfrak{t}$ Liejeva algebra grupe T. Pokazuje se da se djelovanje $\mathfrak{t}$ na $\mathfrak{g}$ pomoću komutatora dijagonalizira. Pripadne svojstvene vrijednosti različite od 0 su funkcionali na $\mathfrak{t}$ koje nazivamo korijeni. Korijene možemo podijeliti na pozitivne i negativne. Sa ρ označavamo polovicu sume pozitivnih korijena.

Djelovanje Liejeve algebre $\mathfrak{t}$ dijagonalizira se i na svim ireducibilnim reprezentacijama od G. Pripadne funkcionale na $\mathfrak{t}$ zovemo težinama reprezentacije. Među tim težinama postoji najveća, λ, koja ima svojstvo da $\lambda + \alpha$ nije težina ni za jedan pozitivan korijen α. Pokazuje se da je ireducibilna reprezentacija jedinstveno određena svojom najvećom težinom.

Teorem 5.4.1 (Weylova formula karaktera)**.** *Karakter ireducibilne reprezentacije L_λ na grupi G s najvećom težinom $\lambda \in t^*$ dan je formulom:*

$$\Theta_{L_\lambda}(e^H) = \frac{\sum_{w \in W} sgn\,(w)\, e^{(\lambda+\rho)(wH)}}{\delta(e^H)},$$

gdje je $H \in \mathfrak{t}^*$. Pri tome je δ funkcija na T definirana sa

$$\delta\left(e^H\right) = e^{\rho(H)} \prod_{\alpha \in R^+} \left(1 - e^{-\alpha(H)}\right) = \prod_{\alpha \in R^+} \left(e^{\frac{1}{2}\alpha(H)} - e^{-\frac{1}{2}\alpha(H)}\right).$$

(Ovdje R^+ predstavlja skup pozitivnih korijena.)

Bibliografija

1. A. Arvanitoyeorgos, An Introduction to Lie Groups and Geometry of Homogeneous Spaces, American Mathematical Society, 2003.

2. B. Guljaš, Matematička analiza I. i II., 2014, dostupno na http://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/MATANALuR.pdf.

3. B. Guljaš, Metrički prostori, 2010, dostupno na http://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/metprost.pdf.

4. H. Kraljević, Kompaktni operatori, 2007, dostupno na http://web.math.pmf.unizg.hr/~hrk/nastava/2007-08/kompaktni_2007_8.pdf.

5. H. Kraljević, Odabrana poglavlja teorije reprezentacije, 2008, dostupno na http://web.math.pmf.unizg.hr/~hrk/nastava/2007-08/OPTR_2008.pdf.

6. H. Kraljević, Odabrana poglavlja teorije reprezentacije, 2010, dostupno na http://web.math.pmf.unizg.hr/~hrk/nastava/2010-11/Od_pogl_t_rep_2010.pdf.

7. H. Kraljević, Realne poluproste Liejeve algebre, 2009, dostupno na http://web.math.pmf.unizg.hr/~hrk/nastava/2008-09/RPLA2009.pdf.

8. S. Kurepa, Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

9. T. Murayama, Maximal tori and the Weyl integration formula, dostupno na http://www-personal.umich.edu/~takumim/takumim_Fall12_JP.pdf.

10. Compact operator on Hilbert space, dostupno na https://en.wikipedia.org/wiki/Compact_operator_on_Hilbert_space#Spectral_theorem.

11. Representations of compact Lie groups, dostupno na http://www.math.ucla.edu/~vsv/liegroups2007/11.pdf.

12. Topic in representation theory: The Weyl integral and character formulas, dostupno na http://www.math.columbia.edu/~woit/notes12.pdf.

Sažetak

Kao uvodni dio, rad započinje s definicijama osnovnih pojmova s kojima se u matematici često susrećemo, a i važni su nam u nastavku rada.

Nakon osnovnih pojmova, napravljen je uvod u teoriju reprezentacija gdje su definirani pojmovi reprezentacije grupe, vjerne reprezentacije, ekvivalentnost reprezentacija, ireducibilne reprezentacije, reducibilne reprezentacije i potpuno reducibilne reprezentacije. Slične definicije koriste se i u slučaju kada je grupa kompaktna. Definirani su i pojmovi vezani uz reprezentacije kompaktnih grupa.

Iskazan je Peter-Weylov teorem, te posljedice tog teorema. Prije nego što je teorem dokazan definirani su pojmovi korišteni u tom dokazu.

Dane su definicije Liejevih algebri i Liejevih grupa i navedeni su neki od primjera Liejevih grupa. Dokazano je da svaka kompaktna Liejeva grupa ima vjernu reprezentaciju.

U posljraednjem poglavlju definiran je karakter ireducibilne reprezentacije i dani su važni rezultati do kojih je Weyl došao: Weylova integracijska formula, Weylova formula karaktera i Weylova formula dimenzije.

Summary

As an introductory part, the paper begins with definitions of basic notions that we often meet with in mathematics, and that are important in the sequel.

Definitions of basic notions are followed by the introduction into theory of representations, where notions like group representations, faithful representations, equivalence of representations, irreducible representations, reducible representations and completely reducible representations are defined. Similar definitions are used also in the case when the group is compact. Also, the notions related to representations of compact groups are defined.

Peter-Weyl theorem, as well as consequences of this theorem, are presented. Before the theorem is proven, the terms used in the proof are defined.

The definitions of Lie algebras and Lie groups are given and some of examples of Lie groups are brought up. It is proven that each compact Lie group has a faithful representation.

In the final chapter the character of an irreducible representation is defined and the important results that Weyl reached are given: Weyl integration formula, Weyl character and dimension formulae.

Životopis

Rođena sam 23.01.1990 u Varaždinu. Prva četiri razreda osnovne škole pohađala sam u Područnoj školi Drenovec, a ostala četiri u Osnovnoj školi Svibovec.
Godine 2004. upisujem Prvu gimnaziju Varaždin, prirodoslovno-matematički smjer. Nakon završene gimnazije, 2008. godine upisujem Preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu. Ipak, 2010. godine prebacujem se na Preddiplomski studij matematike; nastavnički smjer, na istom fakultetu, koji završavam 2013. godine. Obrazovanje nastavljam na Diplomskom sveučilišnom studiju matematike; nastavnički smjer.