SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Matea Pavlek

VEKTORSKI PRODUKT NA $\mathbb{R}^n$

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Ozren Perše

Zagreb, studeni, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **1**

1 Vektorski produkt na $\mathbb{R}^3$ **2**

2 Vektorski produkt na $\mathbb{R}^n$ **6**

3 Hurwitzov teorem **15**
3.1 Cayley-Dicksonov proces 15
3.2 Hurwitzov teorem i vektorski produkt 21
3.3 Vektorski produkt i neprekidne funkcije na sferi 22

4 Vektorski produkt kao multilinearna funkcija na $\mathbb{R}^n$ **25**

Bibliografija **28**

Uvod

Glavni cilj ovog diplomskog rada je pokazati kada, odnosno za koje n postoji vektorski produkt na $\mathbb{R}^n$. Osim na $\mathbb{R}^3$, manje je poznato da vektorski produkt postoji još samo na $\mathbb{R}^0$, $\mathbb{R}^1$ i $\mathbb{R}^7$. U radu ćemo pružiti konstruktivni dokaz ovoga rezultata, a sličan pristup se koristi u članku časopisa The American Mathematical Monthly iz 1967. godine. Općenito, prvi koji je dokazao da vektorski produkt postoji na $\mathbb{R}^n$, samo ako je $n = 0, 1, 3$ i 7, bio je Beno Eckmann. Služeći se algebarskom topologijom, tvrdnju dokazao uz slabija svojstva vektorskog produkta, tj. zahtijevajući neprekidnost produkta, umjesto bilinearnosti. Kasnije je taj rezultat proširen na nedegenerirane simetrične bilinearne forme nad poljima karakteristike različite od dva, te se ustanovila uska veza između vektorskog produkta i kvaterniona i oktoniona preko Hurwitzovog teorema. Nadalje, u ovom radu ćemo pokazati alternativni dokaz egzistencije vektorskog produkta, koji se temelji na Hurwitzovom teoremu. Rad započinjemo definicijom vektorskog produkta na $\mathbb{R}^3$, te navođenjem njegovih svojstava. Zatim ćemo definirati vektorski produkt na $\mathbb{R}^n$, te dokazati teorem o postojanju vektorskog produkta na $\mathbb{R}^n$. Također, opisati ćemo Cayley-Dicksonov proces udvajanja algebri, te pomoću Hurwitzovog teorema objasniti vezu između vektorskog produkta i normiranih algebri. Spomenuti ćemo i vezu Adamsovog teorema o neprekidnom množenju na jediničnoj sferi, sa vektorskim produktom koji je neprekidan, ali ne nužno i bilinearan. Na kraju rada, navesti ćemo slučajeve u kojima postoji vektorski produkt kao funkcija više varijabli.

Poglavlje 1

Vektorski produkt na $\mathbb{R}^3$

Prije nego odgovorimo na pitanje o egzistenciji vektorskog produkta na $\mathbb{R}^n$, definirajmo vektorski produkt na $\mathbb{R}^3$, te navedimo njegova svojstva. Započnimo sa definicijom skalarnog produkta na $\mathbb{R}^n$.
Standarni skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$ je preslikavanje $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definirano sljedećom formulom:

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \qquad x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n). \tag{1.1}$$

Navedimo svojstva skalarnog produkta na $\mathbb{R}^n$:

(i) $x \cdot x \geqslant 0, \;\; x \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0, \;\; x \in \mathbb{R}^n$;

(iii) $(\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y), \;\; \alpha \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^n$;

(iv) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \;\; x, y, z \in \mathbb{R}^n$;

(v) $x \cdot y = y \cdot x, \;\; x, y \in \mathbb{R}^n$.

Iz svojstava (iii), (iv) i (v) slijedi linearnost skalarnog produkta u drugoj varijabli. Zaključujemo da je skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$ simetrično, bilinearno preslikavanje.
Za vektore $x, y \in \mathbb{R}^n$ kažemo da su okomiti ili ortogonalni, u oznaci $x \perp y$, ako je

$$x \cdot y = 0.$$

Definirajmo još i normu na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$.
Standardna (euklidska) norma na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ je funkcija $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, te za $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi:

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Za normu na $\mathbb{R}^n$ vrijedi:

(i) $||x|| \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $||x|| = 0$, ako i samo ako $x = 0$;

(iii) $||\alpha x|| = |\alpha|\ ||x||,\ \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$;

(iv) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||,\ x, y \in \mathbb{R}^n$.

Dakle, uz gore definiranu standarnu normu, $\mathbb{R}^n$ je normirani prostor. Za vektor $x \in \mathbb{R}^n$ kažemo da je jedinični ili normiran ako je

$$||x|| = 1,$$

odnosno ekvivalentno

$$x \cdot x = 1.$$

U slučaju vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$, norma je zapravo duljina vektora, pa koristimo notaciju $|x|$, umjesto $||x||$. Tada je

$$x \cdot y = |x||y| \cos \Theta, \tag{1.2}$$

pri čemu je Θ kut između vektora x i y.

Definirajmo sada vektorski produkt na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$.

Definicija 1.0.1. *Vektorski produkt je binarna operacija* $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. *Za vektore* $a = (a_1, a_2, a_3)$ *i* $b = (b_1, b_2, b_3)$ *iz* $\mathbb{R}^3$ *njihov vektorski produkt definiramo na sljedeći način:*

$$a \times b = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, e_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\, e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, e_3,$$

pri čemu je skup $\{e_1, e_2, e_3\}$ *kanonska baza za* $\mathbb{R}^3$.

Napomena 1.0.2. *Primijetimo da za vektore* e_1, e_2 *i* e_3 *vrijedi:*

$$e_1 \times e_2 = e_3, \qquad e_2 \times e_3 = e_1, \qquad e_1 \times e_3 = -e_2.$$

Iz Definicije 1.0.1 vidimo da, za razliku od skalarnog produkta, vektorski produkt dvaju vektora je vektor, a ne skalar. Uzmimo dva vektora, $a, b \in \mathbb{R}^3$. I neka je $\mathbb{R}^3 \ni c = a \times b$ njihov vektorski produkt. Dakle, c je vektor koji ima svoju:

(1) duljinu;
duljina vektora c jednaka je površini paralelograma određenog vektorima a i b:

$$|c| = |a \times b| = |a||b| \sin \Theta, \tag{1.3}$$

gdje je Θ kut između vektora a i b,

(2) smjer;
vektorski produkt dvaju vektora je okomit na oba vektora. U našem primjeru, c je okomit na a i na b, odnosno na ravninu u kojoj se nalaze a i b. Koristeći se skalarnim produktom, to možemo zapisati kao:

$$c \cdot a = 0 \text{ i } c \cdot b = 0,$$

(3) orijentaciju;
orijentacija vektora c određuje se pravilom desne ruke. Preciznije, postavljanjem kažiprsta u smjeru vektora a, te srednjeg prsta u smjeru vektora b, orijentaciju vektora c će nam pokazati palac. Zamjena poretka vektora kod računanja vektorskog produkta rezultira suprotnom orijentacijom produkta, što nam govori da je vektorski produkt antikomutativan.

Navedimo sada svojstva vektorskog produkta.

Teorem 1.0.3. *Neka su* a, b, c *i* $d \in \mathbb{R}^3, \alpha, \beta, \gamma$ *i* $\delta \in \mathbb{R}$ *. Tada vrijedi:*

(i) $a \cdot (a \times b) = 0$ *i* $b \cdot (a \times b) = 0$*, (okomitost);*

(ii) $(a \times b) \cdot (a \times b) + (a \cdot b)^2 = (a \cdot a)\,(b \cdot b)$*, (Pitagorino svojstvo);*

(iii) $(\alpha a + \beta b) \times (\gamma c + \delta d) = \alpha\gamma(a \times c) + \alpha\delta(a \times d) + \beta\gamma(b \times c) + \beta\delta(b \times d)$*, (bilinearnost).*

Svojstvo (i) smo već naveli kod definicije vektorskog produkta, te ćemo ga zvati *okomitost vektorskog produkta*, a svojstvo (iii) *bilinearnost vektorskog produkta*. Primijetimo da svojstvo (ii) proizlazi iz:

$$a \cdot b = |a||b| \cos \Theta$$

i

$$|a \times b| = |a||b| \sin \Theta,$$

i zvati ćemo ga *Pitagorino svojstvo*. Sva tri svojstva se lako dokažu koristeći definiciju vektorskog produkta na $\mathbb{R}^3$. Vektorski produkt na $\mathbb{R}^3$ je također antikomutativan, tj. za svaki $a, b \in \mathbb{R}^3$ vrijedi:

$$a \times b = -b \times a,$$

što povlači

$$a \times a = 0.$$

Primijetimo da se ovo svojstvo može izvesti iz svojstava (i), (ii) i (iii) iz Teorema 1.0.3 (to ćemo detaljnije analizirati u Poglavlju 2, Lema 2.0.6).

Napomena 1.0.4. *Vektorski produkt na* $\mathbb{R}^3$ *zadovoljava Jacobijev identitet:*

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0, \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}^3.$$

Poglavlje 2

Vektorski produkt na $\mathbb{R}^n$

U prethodnom poglavlju definirali smo vektorski produkt na $\mathbb{R}^3$, te naveli njegova svojstva. U ovom poglavlju cilj je pokazati da li postoji, i ako da, kako izgleda vektorski produkt na $\mathbb{R}^n$, za $n > 3$. Zapravo, želimo proširiti vektorski produkt na $\mathbb{R}^n$, tako da zadrži svojstva (i), (ii) i (iii) iz Teorema 1.0.3. Dakle, zanima nas kako definirati takvu funkciju, ako je to uopće moguće. Na $\mathbb{R}^3$, ona je definirana determinantom 3×3 matrice. Međutim, da li možemo proširiti vektorski produkt koristeći determinantu?
Pogledajmo kako bi izgledala naša determinanta u $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}$$

Premda naprimjer, svojstvo okomitosti vrijedi, ovako definiran vektorski produkt nije binarna operacija, jer se pojavio i treći vektor u matrici. Budući da je determinanta funkcija nad kvadratnim matricama, ovaj problem je teško izbjeći na $\mathbb{R}^n$, za $n > 3$.

Iako je možda iznenađujuće, vektorski produkt sa svojstvima okomitosti, bilinearnosti te Pitagorinim svojstvom, osim na $\mathbb{R}^3$, moguće je definirati na $\mathbb{R}^n$, samo za n=0,1 i 7. Ideja dokaza tog rezultata je pokazati da, ako za neki n postoji vektorski produkt na $\mathbb{R}^n$, tada možemo naći ortonormiranu bazu $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ takvu da za $i \neq j$ postoji k za koji je $e_i \times e_j = ae_k$, gdje je $a = 1$ ili -1. Otkuda ideja?

Naime, da bi definirali vektorski produkt na $\mathbb{R}^3$ sa svim traženim svojstvima, zbog bilinearnosti je zapravo dovoljno definirati tablicu vektorskog množenja za vektore ortonormirane baze. Iz Napomene 1.0.2 i antikomutativnosti vektorskog produkta vidimo kako ta tablica izgleda na $\mathbb{R}^3$:

$\times$	e_1	e_2	e_3
e_1	0	e_3	$-e_2$
e_2	$-e_3$	0	e_1
e_3	e_2	$-e_1$	0

Koristeći tablicu i bilinearnost, možemo rekonstruirati vektorski produkt dvaju proizvoljnih vektora $a = (a_1, a_2, a_3)$ i $b = (b_1, b_2, b_3)$:

$$\begin{aligned}
a \times b &= (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \times (b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) \\
&= a_1 b_1 (e_1 \times e_1) + a_1 b_2 (e_1 \times e_2) + a_1 b_3 (e_1 \times e_3) + a_2 b_1 (e_2 \times e_1) + a_2 b_2 (e_2 \times e_2) + \\
&\quad a_2 b_3 (e_2 \times e_3) + a_3 b_1 (e_3 \times e_1) + a_3 b_2 (e_3 \times e_2) + a_3 b_3 (e_3 \times e_3) \\
&= a_1 b_2 e_3 - a_1 b_3 e_2 - a_2 b_1 e_3 + a_2 b_3 e_1 + a_3 b_1 e_2 - a_3 b_2 e_1 \\
&= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, e_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\, e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, e_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

U dokazu želimo pokazati kako i kada, općenito na $\mathbb{R}^n$, možemo konstruirati tablicu vektorskog množenja ortonormirane baze, uz uvjet da tako definiran vektorski produkt ima sva svojstva koja zahtijevamo. Poopćimo prvo definiciju vektorskog produkta iz prvog poglavlja.

Definicija 2.0.5. *Vektorski produkt na $\mathbb{R}^n$ je binarna operacija $\times : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ koja zadovoljava svojstva okomitosti, bilinearnosti te Pitagorino svojstvo:*

(i) $a \cdot (a \times b) = 0$ *i* $b \cdot (a \times b) = 0$, *(okomitost);*

(ii) $(a \times b) \cdot (a \times b) + (a \cdot b)^2 = (a \cdot a)\,(b \cdot b)$, *(Pitagorino svojstvo);*

(iii) $(\alpha a + \beta b) \times (\gamma c + \delta d) = \alpha\gamma(a \times c) + \alpha\delta(a \times d) + \beta\gamma(b \times c) + \beta\delta(b \times d)$, *(bilinearnost).*

Sljedeća svojstva slijede iz definicije vektorskog produkta na $\mathbb{R}^n$:

Lema 2.0.6. *Neka su a, b i c vektori iz $\mathbb{R}^n$. Ako vektorski produkt na $\mathbb{R}^n$ postoji, tada vrijede sljedeća svojstva:*

(2.1) $a \cdot (b \times c) = -b \cdot (a \times c)$;

(2.2) $a \times b = -b \times a$, *što povlači* $a \times a = 0$;

(2.3) $a \times (a \times b) = (a \cdot b)\, a - (a \cdot a)\, b$;

(2.4) $a \times (b \times c) = -((a \times b) \times c) + (c \cdot b)\, a + (a \cdot b)\, c - 2(a \cdot c)\, b$.

Dokaz. (2.1) Iz okomitosti vektorskog produkta zaključujemo:

$$\begin{aligned}0 &= (b+a)\cdot((b+a)\times c)\\ &= (b+a)\cdot(b\times c + a\times c)\\ &= b\cdot(b\times c) + b\cdot(a\times c) + a\cdot(b\times c) + a\cdot(a\times c)\\ &= b\cdot(a\times c) + a\cdot(b\times c).\end{aligned}$$

(2.2) Koristimo Pitagorino svojstvo vektorskog produkta za vektor a:

$$(a\times a)\cdot(a\times a) = (a\cdot a)^2 - (a\cdot a)^2 = 0,$$

pa slijedi da je $a\times a = 0$. Da bismo dokazali antikomutativnost vektorskog produkta služimo se bilinearnosti:

$$\begin{aligned}0 &= (a+b)\times(a+b)\\ &= a\times a + a\times b + b\times a + b\times b\\ &= a\times b + b\times a,\end{aligned}$$

pa dobivamo $a\times b = -b\times a$.

(2.3) Sada koristimo Pitagorino svojstvo za vektore $(b+c)$ i a:

$$((b+c)\times a)\cdot((b+c)\times a) = ((b+c)\cdot(b+c))\,(a\cdot a) - ((b+c)\cdot a)^2.$$

Iskoristimo bilinearnost:

$$\begin{aligned}&((b+c)\cdot(b+c))\,(a\cdot a) - ((b+c)\cdot a)^2\\ &= (b\cdot b)\,(a\cdot a) + 2(b\cdot c)\,(a\cdot a) + (c\cdot c)\,(a\cdot a) - (b\cdot a)^2 - 2(b\cdot a)\,(c\cdot a) - (c\cdot a)^2.\end{aligned} \tag{1}$$

Uz bilinearnost vektorskog i skalarnog produkta, te Pitagorino svojstvo imamo:

$$\begin{aligned}((b+c)\times a)\cdot((b+c)\times a) &= (b\times a + c\times a)\cdot(b\times a + c\times a)\\ &= (b\times a)\cdot(b\times a) + 2(c\times a)\cdot(b\times a) + (c\times a)\cdot(c\times a)\\ &= (b\cdot b)\,(a\cdot a) - (b\cdot a)^2 + 2(c\times a)\cdot(b\times a) + (c\cdot c)\,(a\cdot a) - (c\cdot a)^2.\end{aligned} \tag{2}$$

Izjednačimo (1) i (2), a zatim iskoristimo (2.1) i (2.2). Tada za sve c vrijedi:

$$\begin{aligned}c\cdot(a\times(a\times b)) &= -(b\times a)\cdot(c\times a)\\ &= (b\cdot a)\,(c\cdot a) - (b\cdot c)\,(a\cdot a)\\ &= c\cdot((b\cdot a)\,a - (a\cdot a)\,b).\end{aligned}$$

Slijedi da je $a\times(a\times b) = (a\cdot b)\,a - (a\cdot a)\,b$.

(2.4) Za dokaz posljednje navedenog svojstva opet koristimo bilinearnost vektorskog produkta te svojstva (2.2) i (2.3):

$$(a+c)\times((a+c)\times(b+c)) = (a+c)\times(a\times b + a\times c + c\times b + c\times c) = a\times(a\times b) + a\times(a\times c) + a\times(c\times b) + a\times(c\times c) + c\times(a\times b) + c\times(a\times c) + c\times(c\times b) + c\times(c\times c) = -a\times(b\times c) - c\times(b\times a) - (a\cdot a)\,b + (a\cdot b)\,a - (a\cdot a)\,c + (a\cdot c)\,a - (c\cdot c)\,b + (c\cdot b)\,c + (c\cdot c)\,a - (c\cdot a)\,c. \tag{3}$$

Sada primijenimo (2.3) na vektore $(a+c)$ i $(b+c)$:

$$(a+c)\times((a+c)\times(b+c)) = ((a+c)\cdot(b+c))\,(a+c) - ((a+c)\cdot(a+c))\,(b+c) = (a\cdot b + a\cdot c + c\cdot b + c\cdot c)\,a + (a\cdot b - a\cdot c + c\cdot b - a\cdot a)\,c - (a\cdot a + 2a\cdot c + c\cdot c)\,b. \tag{4}$$

Konačno, izjednačavanjem (3) i (4) dobivamo $a\times(b\times c) = -c\times(b\times a) + (c\cdot b)\,a + (a\cdot b)\,c - 2(a\cdot c)\,b = -((a\times b)\times c) + (c\cdot b)\,a + (a\cdot b)\,c - 2(a\cdot c)\,b$.

□

Korolar 2.0.7. *Neka su a, b i c ortogonalni jedinični vektori iz $\mathbb{R}^n$. Ako vektorski produkt na $\mathbb{R}^n$ postoji, tada mora imati sljedeća svojstva:*

(2.5) $a\times(a\times b) = -b$;

(2.6) $a\times(b\times c) = -((a\times b)\times c)$.

Dokaz. Dokaz slijedi iz prethodne leme.

(2.5) $a\times(a\times b) = (a\cdot b)\,a - (a\cdot a)\,b = -b$.

(2.6) $a\times(b\times c) = -((a\times b)\times c) + (c\cdot b)\,a + (a\cdot b)\,c - 2(a\cdot c)\,b = -((a\times b)\times c)$.

U oba slučaja koristili smo ortogonalnost vektora, tj. $a\cdot b = a\cdot c = b\cdot c = 0$. □

Sada smo definirali sva osnovna svojstva vektorskog produkta kojeg tražimo. Sljedeći korak je konstruirati tablicu vektorskog množenja za ortonormiranu bazu na $\mathbb{R}^n$. U daljnjem tekstu, sa u_i ćemo označavati jedinični vektor u $\mathbb{R}^n$. Uočimo da u $\mathbb{R}^3$ vrijedi $\{e_1, e_2, e_3\} = \{e_1, e_2, e_1\times e_2\}$. Pogledajmo kako možemo poopćiti tu ideju.
Definirajmo niz skupova S_k sa:

$$\begin{aligned} S_0 &= \{u_0\}, \\ S_k &= S_{k-1}\cup\{u_k\}\cup(S_{k-1}\times u_k), \text{ pri čemu je } u_k\perp S_{k-1}, \text{ odnosno vrijedi:} \end{aligned}$$

$$u_k \cdot u = 0,\ \forall u \in S_{k-1}.$$

Promotrimo skupove S_0, S_1, S_2 i S_3:
$S_0 = \{u_0\}$;
$S_1 = S_0 \cup \{u_1\} \cup (S_0 \times u_1) = \{u_0, u_1, u_0 \times u_1\}$;
$S_2 = S_1 \cup \{u_2\} \cup (S_1 \times u_2) = \{u_0, u_1, u_0 \times u_1, u_2, u_0 \times u_2, u_1 \times u_2, (u_0 \times u_1) \times u_2\}$;
$S_3 = S_2 \cup \{u_3\} \cup (S_2 \times u_3) = \{u_0, u_1, u_0 \times u_1, u_2, u_0 \times u_2, u_1 \times u_2, (u_0 \times u_1) \times u_2, u_3,$
$u_0 \times u_3, u_1 \times u_3, (u_0 \times u_1) \times u_3, u_2 \times u_3, (u_0 \times u_2) \times u_3, (u_1 \times u_2) \times u_3, ((u_0 \times u_1) \times u_2) \times u_3\}$.
Primijetimo da S_1 konstrukcijski odgovara skupu $\{e_1, e_2, e_1 \times e_2\}$.
Definirajmo još i vektorski produkt skupova S_k sa

$$S_i \times S_j := \{u \times v; u \in S_i, v \in S_j\},$$

i skup

$$\pm S_i := S_i \cup (-S_i).$$

Sljedećim dvjema lemama ćemo pokazati da su skupovi S_n ortonormirani i zatvoreni s obzirom na vektorski produkt.

Lema 2.0.8. $S_1 = \{u_0, u_1, u_0 \times u_1\}$ *je ortonormirani skup. Nadalje,* $S_1 \times S_1 = \pm S_1$.

Dokaz. Ortogonalnost slijedi iz definicije vektorskog produkta i definicije skupa S_1:

$$\begin{aligned} u_0 \cdot (u_0 \times u_1) &= 0, \\ u_1 \cdot (u_0 \times u_1) &= 0, \\ u_0 \cdot u_1 &= 0; \end{aligned}$$

a normiranost iz definicije S_1 i svojstava (2.1), (2.2), (2.3):

$$\begin{gathered} u_0 \cdot u_0 = u_1 \cdot u_1 = 1, \\ (u_0 \times u_1) \cdot (u_0 \times u_1) = u_0 \cdot (u_1 \times (u_0 \times u_1)) = u_0 \cdot u_0 = 1. \end{gathered}$$

Pokažimo još da je $S_1 \times S_1 = \pm S_1$. Po (2.2) i (2.5) imamo:

$$\begin{aligned} u_1 \times (u_0 \times u_1) &= u_0 \in \pm S_1, \\ u_0 \times (u_0 \times u_1) &= -u_1 \in \pm S_1. \end{aligned}$$

$\square$

Lema 2.0.9. S_k *je ortonormirani skup. Nadalje,* $S_k \times S_k = \pm S_k$ *i* $|S_k| = 2^{k+1} - 1$.

Dokaz. Dokazujemo indukcijom. Za $k = 1$, tvrdnja vrijedi po prethodnoj lemi. Pretpostavimo da je S_{k-1} ortonormirani skup, te da vrijedi da je $S_{k-1} \times S_{k-1} = \pm S_{k-1}$ i $|S_{k-1}| = 2^k - 1$. Pokažimo da tvrdnja vrijedi i za S_k. Neka su $b_1, b_2 \in S_{k-1}$. Po definiciji, svaki element iz S_k je oblika b_1, u_k ili $b_1 \times u_k$. Iz (2.1), (2.2) i (2.5) slijedi:

$$b_1 \cdot (b_2 \times u_k) = u_k \cdot (b_1 \times b_2) = 0, \text{ zbog } u_k \perp S_{k-1} \text{ i } b_1 \times b_2 \in S_{k-1},$$

i

$$(b_1 \times u_k) \times (b_2 \times u_k) = u_k \cdot ((u_k \times b_1) \times b_2) = -u_k \cdot (u_k \times (b_1 \times b_2)) = 0,$$

pa zaključujemo da je S_k ortogonalan skup. Po pretpostavci indukcije, svi elementi iz S_{k-1} su normirani, u_k je normiran po definiciji, a po (2.1) i (2.5) za $b_1 \times u_k$ vrijedi :

$$(b_1 \times u_k) \cdot (b_1 \times u_k) = b_1 \cdot (u_k \times (b_1 \times u_k)) = b_1 \cdot b_1 = 1.$$

Dakle, vrijedi da je i S_k normiran. Da bi pokazali da vrijedi $S_k \times S_k = \pm S_k$, sjetimo se da je $S_k = S_{k-1} \cup \{u_k\} \cup (S_{k-1} \times u_k)$ i $\pm S_k = S_k \cup (-S_k)$. Po pretpostavci indukcije $S_{k-1} \times S_{k-1}$ je $S_{k-1} \cup (-S_{k-1}) \subseteq \pm S_k$, po definiciji je $S_{k-1} \times u_k \subseteq \pm S_k$, a $u_k \times (b_1 \times u_k) = b_1 \in S_{k-1} \subseteq \pm S_k$. Još preostaje pokazati sljedeće:

$$\begin{aligned} &b_1 \times (b_2 \times u_k) = -((b_1 \times b_2) \times u_k) \in \pm S_k \text{ i } b_1 \times (b_1 \times u_k) = -u_k \in \pm S_k, \\ &(b_1 \times u_k) \times (b_2 \times u_k) = -b_1 \times (u_k \times (b_2 \times u_k)) = -b_1 \times b_2 \in \pm S_k. \end{aligned}$$

Slijedi da je S_k ortonormirani skup, $S_k \times S_k = \pm S_k$ i $|S_k| = 2|S_{k-1}| + 1 = 2(2^k - 1) + 2 = 2^{k+1} - 1$. □

Lema 2.0.9 nam pokazuje kako konstruirati tablicu množenja za vektorski produkt. Dakle, zbog bilinearnosti, vektorski produkt je moguće definirati na $\mathbb{R}^n$, samo ako mu je S_k baza, za neki k. Sada je jasno da u tom slučaju vrijedi $n = |S_k|$, odnosno $n = 2^{k+1} - 1$.

Za $k = 1$, promatramo $\mathbb{R}^3$. Tablica množenja koju smo naveli u prošlom poglavlju odgovara konstrukciji koja je objašnjena u Lemi 2.0.9, uz napomenu $e_1 = u_0$, $e_2 = u_1$ i $e_3 = u_0 \times u_1$. Pogledajmo kako bi izgledala tablica za $k = 2$, uz odgovarajuću bazu $\{e_1, e_2, ..., e_7\}$ za $\mathbb{R}^7$. Uz pomoć Leme 2.0.9, generiramo bazu:

$$\begin{array}{llll} e_1 = u_0; & e_2 = u_1; & e_3 = u_0 \times u_1; & e_4 = u_2; \\ e_5 = u_0 \times u_2; & e_6 = u_1 \times u_2; & e_7 = (u_0 \times u_1) \times u_2; & \end{array}$$

a zatim služeći se svojstvima (2.2), (2.5) i (2.6) računamo elemente tablice vektorskog množenja:

$$
\begin{aligned}
&e_i \times e_i = 0, i = 1, ...7;\\
&e_1 \times e_2 = u_0 \times u_1 = e_3;\\
&e_1 \times e_3 = u_0 \times (u_0 \times u_1) = -u_1 = -e_2;\\
&e_1 \times e_4 = u_0 \times u_2 = e_5;\\
&e_1 \times e_5 = u_0 \times (u_0 \times u_2) = -u_2 = -e_4;\\
&e_1 \times e_6 = u_0 \times (u_1 \times u_2) = -(u_0 \times u_1) \times u_2 = -e_7;\\
&e_1 \times e_7 = u_0 \times ((u_0 \times u_1) \times u_2) = -(u_0 \times (u_0 \times u_1)) \times u_2 = u_1 \times u_2 = e_6;\\
&e_2 \times e_3 = u_1 \times (u_0 \times u_1) = u_0 = e_1;\\
&e_2 \times e_4 = u_1 \times u_2 = e_6;\\
&e_2 \times e_5 = u_1 \times (u_0 \times u_2) = (u_0 \times u_1) \times u_2 = e_7;\\
&e_2 \times e_6 = u_1 \times (u_1 \times u_2) = -u_2 = -e_4;\\
&e_2 \times e_7 = u_1 \times ((u_0 \times u_1) \times u_2) = -(u_1 \times (u_0 \times u_1)) \times u_2 = -u_0 \times u_2 = -e_5;\\
&e_3 \times e_4 = (u_0 \times u_1) \times u_2 = e_7;\\
&e_3 \times e_5 = (u_0 \times u_1) \times (u_0 \times u_2) = -((u_0 \times u_1) \times u_0) \times u_2 = -u_1 \times u_2 = -e_6;\\
&e_3 \times e_6 = (u_0 \times u_1) \times (u_1 \times u_2) = -((u_0 \times u_1) \times u_1) \times u_2 = u_0 \times u_2 = e_5;\\
&e_3 \times e_7 = (u_0 \times u_1) \times ((u_0 \times u_1) \times u_2) = -u_2 = -e_4;\\
&e_4 \times e_5 = u_2 \times (u_0 \times u_2) = u_0 = e_1;\\
&e_4 \times e_6 = u_2 \times (u_1 \times u_2) = u_1 = e_2;\\
&e_4 \times e_7 = u_2 \times ((u_0 \times u_1) \times u_2) = u_0 \times u_1 = e_3;\\
&e_5 \times e_6 = (u_0 \times u_2) \times (u_1 \times u_2) = -u_0 \times (u_2 \times (u_1 \times u_2)) = -u_0 \times u_1 = -e_3;\\
&e_5 \times e_7 = (u_0 \times u_2) \times ((u_0 \times u_1) \times u_2) = -((u_0 \times u_2) \times (u_0 \times u_1)) \times u_2 = (u_2 \times u_1) \times u_2 = u_1 = e_2;\\
&e_6 \times e_7 = (u_1 \times u_2) \times ((u_0 \times u_1) \times u_2) = -((u_1 \times u_2) \times (u_0 \times u_1)) \times u_2 = (u_0 \times u_2) \times u_2 = -u_0 = -e_1.
\end{aligned}
$$

Za elemente ispod dijagonale, koristimo svojstvo (2.2), odnosno antikomutativnost vektorskog produkta. Dakle, tablica množenja za $\mathbb{R}^7$ je sljedeća:

$\times$	e_1	e_2	e_3	e_4	$-e_5$	e_6	e_7
e_1	0	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	$-e_3$	0	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_2	$-e_1$	0	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	0	e_1	e_2	e_3
e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	0	$-e_3$	e_2
e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	0	$-e_1$
e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	0

Koristeći tablicu i bilinearnost vektorskog produkta, možemo izraziti eksplicitnu formulu za računanje vektorskog produkta u $\mathbb{R}^7$. Za vektore $a = (a_1, a_3, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$ i $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)$ njihov vektorski produkt jednak je:

$$\begin{aligned}
a \times b = {} & (-a_3b_2 + a_2b_3 - a_5b_4 + a_4b_5 - a_6b_7 + a_7b_6)\, e_1 + (-a_1b_3 + a_3b_1 - a_6b_4 + a_4b_6 - \\
& a_7b_5 + a_5b_7)\, e_2 + (-a_2b_1 + a_1b_2 - a_7b_4 + a_4b_7 - a_5b_6 + a_6b_5)\, e_3 + (-a_1b_5 + a_5b_1 - a_2b_6 \\
& + a_6b_2 - a_3b_7 + a_7b_3)\, e_4 + (-a_4b_1 + a_1b_4 - a_2b_7 + a_7b_2 - a_6b_3 + a_3b_6)\, e_5 + (-a_7b_1 + a_1b_7 \\
& - a_4b_2 + a_2b_4 - a_3b_5 + a_5b_3)\, e_6 + (-a_5b_2 + a_2b_5 - a_4b_3 + a_3b_4 - a_1b_6 + a_6b_1)\, e_7.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Teorem 2.0.10. *Formulom* (2.1) *definiran je vektorski produkt na* $\mathbb{R}^7$.

Dokaz. Dokazuje se direktnom provjerom svojstava (i), (ii) i (iii) iz Definicije 2.0.5. Preskačemo detalje dokaza zbog tehničke kompliciranosti. □

Napomena 2.0.11. *Vektorski produkt na* $\mathbb{R}^7$ *ne zadovoljava Jacobijev identitet, što se lako provjeri iz definicije. Obrazloženje tog fenomena u terminima normiranih algebri, dati ćemo u Poglavlju 3.*

Dosada smo pokazali da, ako vektorski produkt na $\mathbb{R}^n$ postoji, tada je $n = 2^{k+1} - 1$ i Lema 2.0.9 nam govori kako konstruirati tablicu množenja za računanje vektorskog produkta. Sljedeće dvije leme će nam pokazati kako za $k > 2$, ne možemo definirati vektorski produkt, a da isti zadrži sva svojstva iz definicije.

Lema 2.0.12. *Neka su* $u = u_0 \times u_1 + u_1 \times u_3$ *i* $v = u_1 \times u_2 - ((u_0 \times u_1) \times u_2) \times u_3$. *Tada je* $u \times v = 0$ *i* $u \perp v$.

Dokaz. Koristimo (2.2), (2.5) i (2.6):

$$\begin{aligned}
u \times v &= (u_0 \times u_1 + u_1 \times u_3) \times (u_1 \times u_2 - ((u_0 \times u_1) \times u_2) \times u_3) \\
&= (u_0 \times u_1) \times (u_1 \times u_2) - (u_0 \times u_1) \times (((u_0 \times u_1) \times u_2) \times u_3) + (u_1 \times u_3) \times (u_1 \times u_2) \\
&- (u_1 \times u_3) \times (((u_0 \times u_1) \times u_2) \times u_3) \\
&= u_0 \times u_2 - u_2 \times u_3 - u_3 \times u_2 - u_0 \times u_2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Za drugi dio tvrdnje, uočimo da su $u_0 \times u_1, u_1 \times u_3, u_1 \times u_2$ i $((u_0 \times u_1) \times u_2) \times u_3$ redom elementi od S_k, za $k > 2$, a po Lemi 2.0.9 znamo da su onda međusobno ortogonalni. □

Lema 2.0.13. *Neka su* $u = u_0 \times u_1 + u_1 \times u_3$ *i* $v = u_1 \times u_2 - ((u_0 \times u_1) \times u_2) \times u_3$. *Tada je* $(u \cdot u)(v \cdot v) \neq (u \times v) \cdot (u \times v) + (u \cdot v)^2$.

Dokaz. Vektori $u_0 \times u_1, u_1 \times u_3, u_1 \times u_2$ i $((u_0 \times u_1) \times u_2) \times u_3$ su elementi od S_k, za $k > 2$, pa su i ortonormirani i vrijedi $u \cdot u = v \cdot v = 2$, $u \cdot v = 0$, a iz prethodne leme vrijedi $u \times v = 0$, što povlači $(u \cdot u)(v \cdot v) = 4 \neq 0 = (u \times v) \cdot (u \times v) + (u \cdot v)^2$. □

Sada možemo dokazati sljedeći teorem, koji je jedan od glavnih rezultata ovog rada.

Teorem 2.0.14. *Vektorski produkt na* $\mathbb{R}^n$ *postoji, ako i samo ako je* $n = 0, 1, 3$ *ili* 7. *Nadalje, za* $\mathbb{R}^3$ *i* $\mathbb{R}^7$ *postoje ortonormirane baze* S_1 *i* S_2*, takve da vrijedi* $S_i \times S_i = \pm S_i, i = 1, 2$.

Dokaz. Po Lemi 2.0.9, vidimo da vektorski produkt postoji samo za $n = 2^{k+1} - 1$. Dalje, Leme 2.0.12 i 2.0.13 nam kazuju da ako definiramo vektorski produkt na $\mathbb{R}^{2^{k+1}-1}$, Pitagorino svojstvo ne vrijedi za $k > 2$. Slijedi da vektorski produkt sa svojstvima okomitosti, bilinearnosti i Pitagorinim svojstvom može postojati samo na $\mathbb{R}^0, \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^7$. U Teoremu 2.0.10 je dokazana egzistencija vektorskog produkta na $\mathbb{R}^7$. Nadalje, trivijalno preslikavanje (koje preslikava sve parove vektora u nulvektor) definira vektorski produkt na $\mathbb{R}^0$ i $\mathbb{R}^1$. Konstrukcija vektorskog produkta na $\mathbb{R}^3$ dana je u Poglavlju 1. Na kraju, Lema 2.0.9 nam govori kako generirati ortonormirane baze S_1 i S_2 za $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^7$, takve da vrijedi $S_i \times S_i = \pm S_i, i = 1, 2$. □

Poglavlje 3

Hurwitzov teorem

3.1 Cayley-Dicksonov proces

U prvom dijelu trećeg poglavlja baviti ćemo se Cayley-Dicksonovim procesom udvajanja algebri. Konkretno, pokazati ćemo kako generirati niz algebri tako da svaka sljedeća ima dvostruko veću dimenziju od prethodne.
Mi ćemo promatrati isključivo algebre nad realnim poljem, pa shodno tome, za vektorski prostor A nad poljem $\mathbb{R}$, reći ćemo da je algebra, ako je na njemu definirana binarna operacija $\cdot : A \times A \to A$, koja je bilinearna tj. vrijedi:

(i) $(\alpha a + \beta b) \cdot c = \alpha(a \cdot c) + \beta(b \cdot c),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ a, b, c \in A;$

(ii) $a \cdot (\beta b + \gamma c) = \beta(a \cdot b) + \gamma(a \cdot c),\ \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ a, b, c \in A.$

Ovako definiran pojam bilinearnosti je očito ekvivalentan bilinearnosti iz Definicije 2.0.5. Operaciju $\cdot$ ćemo zvati množenje u algebri A, te ćemo ju označavati sa $a \cdot b = ab$, dok će $a \cdot b$ i dalje predstavljati skalarni produkt vektora a i b. Općenito, množenje ne mora biti asocijativna (komutativna) operacija na A. Ako množenje zadovoljava svojstvo asocijativnosti (komutativnosti), za A ćemo reći da je *asocijativna (komutativna) algebra*.
Kažemo da je A *unitalna* ili *algebra s jedinicom*, ako postoji element $1 \in A$, takav da je

$$1a = a1 = a, \text{ za svaki } a \in A.$$

Ako je A unitalna algebra, i za svaki $a \in A$, postoji $a^{-1} \in A$, takav da vrijedi

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1,$$

tada je A *algebra s dijeljenjem*. Element a^{-1} zovemo inverz od a.
Konačnodimenzionalna algebra na kojoj postoji skalarni produkt je *normirana algebra*, ako vrijedi

$$\|ab\| = \|a\|\,\|b\|,\ \forall a, b \in A.$$

U normiranoj algebri A, za svaki element $a \in A,\ a \neq 0$, preslikavanja $x \mapsto \frac{ax}{\|a\|}$ i $x \mapsto \frac{xa}{\|a\|}$ su izometrije, stoga i bijekcije, budući da je A konačnodimenzionalna algebra. Tada za svaki $b \in A$, jednadžbe $ax = b$ i $xa = b$ imaju jedinstveno rješenje u A, odnosno a ima inverz u A. Slijedi da je svaka normirana algebra ujedno i algebra s dijeljenjem.
Konjugacija na A je linearni operator $a \mapsto \overline{a}$ koji je involucija, tj. za svaki $a \in A$ je $\overline{\overline{a}} = a$, i za koji vrijedi:

$$\overline{ab} = \overline{b}\,\overline{a},\ \forall a, b \in A. \tag{3.1}$$

Pogledajmo sada kako, krenuvši od n-dimenzionalne algebre, Cayley-Dicksonovim procesom konstruiramo novu algebru dimenzije $2n$.
Neka je A_0 algebra konačne dimenzije n, i neka je na A_0 definirana konjugacija.
Označimo sa A_1 direktnu sumu algebre A_0 i nje same:

$$A_1 = A_0 \oplus A_0.$$

Elementi vektorskog prostora A_1 su oblika (a, b), pri čemu su $a, b \in A_0$, i dimenzija od A_1 jednaka je $2n$. Definiramo množenje elemenata iz A_1 sa:

$$(a,\ b)\,(u,\ v) = (au - \overline{v}b,\ b\overline{u} + va). \tag{3.2}$$

Za tako definirano množenje i svaki $(a,\ b), (u,\ v), (s,\ t) \in A_1, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
(\alpha(a,\ b) + \beta(u,\ v))\,(s,\ t) &= (\alpha a + \beta u,\ \alpha b + \beta v)\,(s,\ t) \\
&= ((\alpha a + \beta u)s - \overline{t}(\alpha b + \beta v),\ (\alpha b + \beta v)\overline{s} + t(\alpha a + \beta u)) \\
&= (\alpha as + \beta us - \alpha\overline{t}b - \beta\overline{t}v,\ \alpha b\overline{s} + \beta v\overline{s} + \alpha ta + \beta tu) \\
&= \alpha(as - \overline{t}b,\ b\overline{s} + ta) + \beta(us - \overline{t}v,\ v\overline{s} + tu) \\
&= \alpha(a,\ b)\,(s,\ t) + \beta(u,\ v)\,(s,\ t);
\end{aligned}$$

pri čemu smo koristili bilinearnost množenja na A_0 i linearnost konjugacije na A_0. Analogno se pokazuje da na A_1 vrijedi i linearnost u drugoj varijabli. Dakle, množenje na vektorskom prostoru A_1 je bilinearno, pa zaključujemo da je A_1 algebra dimenzije $2n$ i zvati ćemo ju *udvostručenje algebre* A_0.
Lako vidimo da elemente $a \in A_0$, možemo prikazati kao $(a,\ 0)$, budući da je preslikavanje $x \mapsto (x,\ 0)$, sa $A_0 \mapsto A_1$, monomorfizam algebri.
Ako je A_0 algebra s jedinicom 1, tada je $(1,\ 0)$ jedinica u A_1. Stavimo li $e = (0,\ 1)$, tada vrijedi $be = (0,\ b)$, za svaki $b \in A_0$, i elemente iz A_1 možemo zapisati kao:

$$(a,\ b) = a + be. \tag{3.3}$$

Sa (3.3) i relacijama

$$a(be) = (ba)e, \qquad (ae)b = (a\overline{b})e, \qquad (ae)\,(be) = -\overline{b}a, \tag{3.4}$$

te uz distributivnost, potpuno je određeno množenje (3.2) na A_1.
Za $a = (1, 0)$, iz $(ae)b = (a\overline{b})e$, dobijemo $eb = \overline{b}e$, za svaki $b \in A_1$. Slijedi da, čak i ako je množenje u A_0 komutativno, na A_1 komutativnost neće vrijediti, ako konjugacija u A_0 nije identiteta. Primijetimo da zbog $a(be) = (ba)e$, asocijativnost množenja u A_1 općenito ne vrijedi, ako množenje u A_0 nije komutativno.
Kako bi nastavili konstruirati niz algebri, na algebri A_1 moramo definirati konjugaciju, da bi na udvostručenju od A_1 mogli definirati množenje.
Za $(a, b) = a + be \in A_1$ definiramo konjugaciju na sljedeći način:

$$\overline{a + be} = \overline{a} - be. \tag{3.5}$$

Ovakav definiran operator je očito linearna involucija koja zadovoljava (3.1). Dakle, udvostručenje algebre sa konjugacijom je opet algebra s konjugacijom, te se Cayley-Dicksonov proces može nastaviti.
Ako je na unitalnoj algebri A_0 konjugacija definirana tako da vrijedi:

1. $a\overline{a} \in \mathbb{R} \cdot 1, \forall a \in A_0$;
2. $a\overline{a} \geq 0, \forall a \in A_0$;
3. $a\overline{a} = 0 \Leftrightarrow a = 0$;

tada je sa

$$\|a\| = \sqrt{a\overline{a}} \tag{3.6}$$

definirana norma na A_0, i A_0 zovemo *metrička algebra*. Provjerom svojstava skalarnog produkta može se pokazati da je sa

$$a \cdot b = \frac{a\,\overline{b} + b\,\overline{a}}{2}$$

definiran skalarni produkt na A. Dakle, u svakoj metričkoj algebri postoji skalarni produkt.
Za $(a, b) \in A_1$ vrijedi

$$(a + be)\,\overline{(a + be)} = (a + be)\,(\overline{a} - be) = a\overline{a} - a(be) + (be)\overline{a} - (be)\,(be) = a\overline{a} + \overline{b}b,$$

pri čemu smo u zadnjoj jednakosti iskoristili relacije (3.4). Slijedi da, ako je A_0 metrička algebra, tada je A_1 metrička algebra. Ako na A_0 postoji skalarni produkt, tada je skalarni produkt na A_1 dan sa:

$$(a, b) \cdot (u, v) = a \cdot u + b \cdot v. \tag{3.7}$$

Budući da kompleksne brojeve prikazujemo kao uređene parove realnih brojeva, sada

možemo pokazati kako konstruirati algebru kompleksnih brojeva, udvostručenjem algebre realnih brojeva, pri čemu za konjugaciju uzimamo identitetu. Tada je $\mathbb{R}$ očito metrička algebra.
Uzmimo da je $A_0 = \mathbb{R}$. Sada je

$$A_1 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}.$$

U $\mathbb{C}$ definiramo množenje sa (3.2). Budući da je u $\mathbb{R}$ konjugacija identiteta, množenje u $\mathbb{C}$ je komutativno i vrijedi:

$$(a_0,\ a_1)\,(b_0,\ b_1) = (a_0b_0 - a_1b_1,\ a_1b_0 + b_1a_0),\ (a_0,\ a_1), (b_0,\ b_1) \in \mathbb{C}.$$

Zbog komutativnosti množenja u $\mathbb{R}$, slijedi da je množenje u $\mathbb{C}$ asocijativno. Jedinica na $\mathbb{C}$ je $(1,\ 0)$, a element $e = (0,\ 1)$, pa iz (3.3) znamo da vrijedi $(a_0,\ a_1) = a_0 + a_1e,\ a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Lako vidimo da je

$$e^2 = -1.$$

Na $\mathbb{R}$ je skalarni produkt množenje elemenata iz $\mathbb{R}$, pa je skalarni produkt na $\mathbb{C}$ definiran je sa (3.7):

$$(a_0,\ a_1) \cdot (b_0,\ b_1) = a_0b_0 + a_1b_1.$$

Iz (3.5) vidimo da je konjugacija u $\mathbb{C}$ dana sa

$$\overline{a_0 + a_1e} = a_0 - a_1e,$$

a norma sa

$$|a_0 + a_1e| = \sqrt{(a_0 + a_1e)\,\overline{(a_0 - a_1e)}} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2},$$

te vrijedi

$$\begin{aligned}
|(a_0 + a_1e)\,(b_0 + b_1e)| &= |(a_0b_0 - b_1a_1) + (a_1b_0 + b_1a_0)e| \\
&= (a_0b_0 - b_1a_1)^2 + (a_1b_0 + b_1a_0)^2 \\
&= (a_0b_0)^2 + (b_1a_1)^2 + (a_1b_0)^2 + (b_1a_0)^2 \\
&= |(a_0 + a_1e)||(b_0 + b_1e)|,
\end{aligned}$$

iz čega slijedi da je $\mathbb{C}$ normirana algebra, pa ujedno i algebra s dijeljenjem. Iz

$$(a_0,\ a_1)\,\overline{(a_0,\ a_1)} = |(a_0,\ a_1)|^2$$

slijedi

$$(a_0,\ a_1)\tfrac{\overline{(a_0,\, a_1)}}{|(a_0,\, a_1)|^2} = (1,\ 0),$$

čime je definiran inverzni element za svaki $(a_0, a_1) \in \mathbb{C}$. Cayley-Dicksonovim udvajanjem algebre $\mathbb{R}$ konstruirali smo normiranu, asocijativnu, komutativnu algebru kompleksnih brojeva, te uz $e = (0, 1) = i$, imamo standardni zapis kompleksnog broja $z = a_0 + a_1i =$

$(a_0, a_1) \in \mathbb{C}$.
Sljedeći korak u Cayley-Dicksonovom procesu je udvajanje algebre kompleksnih brojeva. Sada imamo

$$A_2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} = \mathbb{H}.$$

Udvostručenje algebre kompleksnih brojeva označavamo sa $\mathbb{H}$. Elementi od $\mathbb{H}$ predstavljaju uređene parove kompleksnih brojeva, te ih nazivamo kvaternioni. Za dva kvaterniona $(z_1,\ z_2)$ i $(w_1,\ w_2)$, $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, množenje ponovo definiramo sa relacijom (3.2):

$$(z_1,\ z_2)\,(w_1,\ w_2) = (z_1 w_1 - \overline{w_2} z_2,\ z_2 \overline{w_1} + w_2 z_1).$$

Jedinica u $\mathbb{H}$ je kvaternion $(1, 0)$, a vektor $e = (0, 1)$, pri čemu je 1 jedinica u $\mathbb{C}$. Iz $\mathbb{H} \ni q = (z_1, z_2) = z_1 + z_2 e$ i $z_1 = a_0 + a_1 i, z_2 = a_2 + a_3 i$, slijedi da je $q = a_0 + a_1 i + a_2 e + a_3 ie$. Uz oznake

$$e = j, \quad ie = k.$$

kvaternione možemo zapisivati kao uređene četvorke realnih brojeva, i vrijedi:

$$q = (a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3) = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k,\ a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

Skup $\{(1,\ 0,\ 0,\ 0), i = (0,\ 1,\ 0,\ 0), j = (0,\ 0,\ 1,\ 0), k = (0,\ 0,\ 0,\ 1)\}$ predstavlja bazu za $\mathbb{H}$, te je uz relaciju

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

i bilinearnost, potpuno određeno množenje kvaterniona. Prethodnu relaciju možemo prikazati sljedećom tablicom množenja:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Primijetimo da množenje u $\mathbb{H}$ nije komutativno, jer na $\mathbb{C}$ konjugacija nije identiteta. Asocijativnost množenja na $\mathbb{H}$ i dalje vrijedi, budući da je na $\mathbb{C}$ operacija množenja komutativna. Po relaciji (3.7) znamo da skalarni produkt na $\mathbb{H}$ postoji, te za kvaternione $q = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ i $p = (b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3)$ vrijedi:

$$q \cdot p = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Konjugaciju kvaterniona definiramo sa relacijom (3.5):

$$\begin{aligned}\overline{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k} &= \overline{((a_0,\ a_1)\,(a_2,\ a_3))}\\ &= (\overline{(a_0,\ a_1)}, -(a_2,\ a_3))\\ &= (a_0,\ -a_1,\ -a_2,\ -a_3)\\ &= a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k,\end{aligned}$$

a potom i normu sa (3.6):

$$\|a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k\| = \sqrt{(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)\,\overline{(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)}} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Također vrijedi $\|qp\| = \|q\|\,\|p\|$ i $q^{-1} = \frac{\overline{q}}{\|q\|^2}$ za svaki $q, p \in \mathbb{H}$. Dakle, udvostručenjem kompleksnih brojeva konstruirali smo algebru kvaterniona $\mathbb{H}$, koja je kao i $\mathbb{C}$, asocijativna, normirana algebra s dijeljenjem. Međutim, na $\mathbb{H}$ više ne vrijedi svojstvo komutativnosti.

U sljedećem koraku Cayley-Dicksonovog procesa, odnosno udvajanjem algebre $\mathbb{H}$, konstruiramo algebru oktoniona $\mathbb{O}$, dimenzije 8. Oktonioni su uređeni parovi kvaterniona, odnosno uređene osmorke realnih brojeva; $y = (a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7) = a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6 + a_7e_7 \in \mathbb{O}$, pri čemu e_i predstavljaju elemente baze algebre $\mathbb{O}$. Posebno, oktonion e_0 je jedinica u $\mathbb{O}$. Analogno prvom i drugom koraku u procesu, sa (3.2) i (3.7) definiramo množenje i skalarni produkt oktoniona. Množenje je, uz svojstvo bilinearnosti, određeno sljedećom tablicom množenja elemenata baze:

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	$-e_0$	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	$-e_0$	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	$-e_0$	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	$-e_0$

Po (3.5) vrijedi da je konjugacija oktoniona $y = a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6 + a_7e_7$ definirana sa:

$$\overline{y} = a_0e_0 - a_1e_1 - a_2e_2 - a_3e_3 - a_4e_4 - a_5e_5 - a_6e_6 - a_7e_7,$$

a budući da je i algebra $\mathbb{O}$ metrička, ponovo je sa

$$\|y\| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2},$$

definirana norma. Također, norma umnoška oktoniona je jednaka umnošku njihovih normi, stoga je $\mathbb{O}$ normirana algebra s dijeljenjem. Algebra $\mathbb{O}$ nije komutativna, a budući da $\mathbb{H}$ nije komutativna, slijedi da $\mathbb{O}$ nije niti asocijativna.

Dakle, počevši od normirane algebre realnih brojeva, Cayley-Dicksonovim procesom udvajanja algebri konstruirali smo algebre $\mathbb{C}, \mathbb{H}$ i $\mathbb{O}$, koje su također normirane. U sljedećem potpoglavlju vidjeti ćemo da su $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ i $\mathbb{O}$ ujedno i jedine normirane realne algebre.

3.2 Hurwitzov teorem i vektorski produkt

Teorem 3.2.1. (Adolf Hurwitz, 1859.–1919.)
Neka je A normirana algebra. Tada je $A = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ *ili* $\mathbb{O}$.

Hurwitzov teorem navodimo bez dokaza. Iako se na prvi pogled ne čini, postoji čvrsta veza između Hurwitzovog teorema i vektorskog produkta. Dosada nam je već poznato da vektorski produkt postoji samo na $\mathbb{R}^0$, $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^7$. Sada dajemo alternativni dokaz Teorema 2.0.14 pomoću Hurwitzovog teorema. Preciznije, dokazujemo sljedeći teorem:

Teorem 3.2.2. *Ako vektorski produkt postoji na* $\mathbb{R}^n$*, tada je* $n = 0, 1, 3$ *ili* 7.

Dokaz. Ideja dokaza je pokazati da postojanje vektorskog produkta na $\mathbb{R}^n$, implicira postojanje bilinearne operacije sa posebnim svojstvima na $\mathbb{R}^{n+1}$. U tu svrhu, $\mathbb{R}^{n+1}$ gledamo kao direktnu sumu $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n.$$

Dakle, element iz $\mathbb{R}^{n+1}$ možemo gledati kao uređeni par $(a,\ b)$ pri čemu je $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^n$. Pretpostavimo da vektorski produkt sa svojstvima okomitosti, bilinearnosti te Pitagorinim svojstvom, postoji na $\mathbb{R}^n$. Definiramo binarnu operaciju na $\mathbb{R}^{n+1}$ sa:

$$(a,\ b)\,(c,\ d) = (ac - b \cdot d,\ ad + cb + b \times d). \tag{3.8}$$

Množenje definirano sa (3.8) je bilinearno, i (1,0) je jedinica. Koristeći Pitagorino svojstvo i okomitost vektorskog produkta, lako se pokaže da vrijedi

$$\|(a,\ b)\,(c,\ d)\| = \|(a,\ b)\|\,\|(c,\ d)\|. \tag{3.9}$$

Sada na $\mathbb{R}^{n+1}$ imamo definiranu bilinearnu operaciju s jedinicom, te vrijedi jednakost (3.9), pa je $\mathbb{R}^{n+1}$ normirana algebra s dijeljenjem, a po Hurwitzovom teoremu je $n + 1 = 1, 2, 4$ ili 8. Slijedi da ako vektorski produkt na $\mathbb{R}^n$ postoji, tada je $n = 0, 1, 3$ ili 7. □

Primijetimo da, ako uvrstimo $a = c = 0$ u (3.8), dobijemo

$$(0,\ b)\,(0,\ d) = (-b \cdot d,\ b \times d). \tag{3.10}$$

Ako promatramo $\mathbb{R}^n$ kao potprostor od $\mathbb{R}^{n+1}$, uz identifikaciju $x \leftrightarrow (0,\ x),\ x \in \mathbb{R}^n$, te sa $P : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ označimo projekciju

$$P(a, x) = x,\ a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n,$$

tada relaciju (3.10) možemo zapisati kao

$$b \times d = P((0,\ b)\,(0,\ d)).$$

Dakle, vektorski produkt na $\mathbb{R}^n$ ($n = 0, 1, 3, 7$), možemo dobiti množenjem "čisto imaginarnih" elemenata iz $\mathbb{R}^{n+1}$, i odgovarajućom projekcijom na "imaginarni dio". Na primjer, promotrimo umnožak dva "čisto imaginarna" kvaterniona: $q_1 = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ i $q_2 = b_1 i + b_2 j + b_3 k$:

$$\begin{aligned}
q_1 q_2 &= (a_1 i + a_2 j + a_3 k)\,(b_1 i + b_2 j + b_3 k)\\
&= a_1 b_1 i^2 + a_1 b_2 ij + a_1 b_3 ik + a_2 b_1 ji + a_2 b_2 j^2 + a_2 b_3 jk + a_3 b_1 ki + a_3 b_2 kj + a_3 b_3 k^2\\
&= -a_1 b_1 + a_1 b_2 k - a_1 b_3 j - a_2 b_1 k - a_2 b_2 + a_2 b_3 i + a_3 b_1 j - a_3 b_2 i - a_3 b_3\\
&= -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k.
\end{aligned}$$

Sada vidimo da vektorski produkt vektora (a_1, a_2, a_3) i (b_1, b_2, b_3) iz $\mathbb{R}^3$ odgovara "imaginarnom dijelu" umnoška kvaterniona. Analogno, množenjem "čisto imaginarnih" oktoniona, dobije se vektorski produkt na $\mathbb{R}^7$.

Napomena 3.2.3. *Uz takvu identifikaciju pokazuje se da za n=3,7 i $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ vrijedi:*

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = -\frac{3}{2}((ab)c - a(bc)),$$

pri čemu je s desne strane operacija množenja u $\mathbb{H}$, odnosno $\mathbb{O}$. Budući da u algebri $\mathbb{O}$ množenje nije asocijativno, vektorski produkt na $\mathbb{R}^7$ ne zadovoljava Jacobijev identitet.

Dosad smo pokazali da vektorski produkt koji je bilinearan, te zadovoljava svojstvo okomitosti i Pitagorino svojstvo, postoji na $\mathbb{R}^n$, samo za $n = 0, 1, 3, 7$. U sljedećem potpoglavlju pokazujemo da, ako umjesto Pitagorinog svojstva i bilinearnosti, želimo definirati vektorski produkt koji uz okomitost zadovoljava neke "slabije" uvjete, rezultat i dalje ostaje isti.

3.3 Vektorski produkt i neprekidne funkcije na sferi

Skup svih jediničnih vektora u $(n+1)$-dimenzionalnom Euklidskom prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$ zovemo n-dimenzionalna (jedinična) sfera, i označavamo sa S^n:

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \|x\| = 1\}.$$

Pokazali smo da su $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ i $\mathbb{O}$ normirane algebre, koje su kao realni normirani prostori izomorfni $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4, \mathbb{R}^8$, redom. Odatle slijedi da množenja na tim algebrama induciraju neprekidna množenja na S^0, S^1, S^3, S^7. Frank Adams je dokazao da su to jedini slučajevi za koje postoji neprekidno množenje na S^n.

Teorem 3.3.1. (Adams)
Na S^n postoji neprekidno množenje s jedinicom ako i samo ako je n=0,1,3,7.

Pomoću Adamsovog teorema možemo dokazati sljedeće:

Teorem 3.3.2. *Neka je $n \geq 3$. Ako na $\mathbb{R}^n$ postoji vektorski produkt, takav da za svaki $v, w \in \mathbb{R}^n$ vrijedi:*

(i) *$v \times w$ je neprekidna funkcija;*

(ii) $(v \times w) \cdot v = 0$ *i* $(v \times w) \cdot w = 0$*;*

(iii) *ako su v i w linearno nezavisni, tada je $v \times w \neq 0$,*

tada je $n = 3$ ili 7.

Dokaz. Za $a, b \in \mathbb{R}^n$ definiramo funkciju

$$P(a, b) = \sqrt{\|a\|^2\|b\|^2-(a \cdot b)^2}.$$

Tada je $P(a, b)$ jednaka površini paralelograma kojega razapinju vektori a i b, i očito je neprekidna funkcija. Sada pomoću funkcije P, definiramo funkciju $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sa:

$$f(a, b) = \begin{cases} \frac{P(a,b)\,(a\times b)}{\|a\times b\|} & a \times b \neq 0, \\ 0 & a \times b = 0. \end{cases}$$

Lagano se pokazuje da je tako definirana funkcija neprekidna. Funkcija f zadovoljava sljedeća svojstva:

1. $f(a, b) \cdot a = f(a, b) \cdot b = 0$,
2. $\|f(a, b)\|^2 = P(a, b)^2 = \|a\|^2\|b\|^2-(a \cdot b)^2$.

Ponovo, gledamo na $\mathbb{R}^{n+1}$ kao $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$, i definiramo funkciju $\mu : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ sa:

$$\mu[(a, b), (c, d)] = (ac - b \cdot d, ad + bc + f(b, d)).$$

Funkcija μ je također neprekidna, a $(1, 0)$ je jedinica za μ, odnosno vrijedi:

$$\mu[(1, 0), (a, b)] = \mu[(a, b), (1, 0)] = (a, b).$$

Za μ vrijedi i analogon jednakosti (3.9):

$$\|\mu(x, y)\|^2 = \|x\|^2 \, \|y\|^2, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{3.11}$$

Za $x, y \in S^n$, po (3.11) vidimo, da je tada i $\mu(x, y) \in S^n$, pa slijedi da je μ neprekidna operacija množenja sa jedinicom na S_n. Iz Adamsovog teorema sada slijedi da je $n = 3$ ili 7. $\square$

Poglavlje 4

Vektorski produkt kao multilinearna funkcija na $\mathbb{R}^n$

U posljednjem poglavlju ovog rada želimo pokazati što se dogodi ako vektorski produkt definiramo kao multilinearno preslikavanje umjesto bilinearnog, te prilagodimo Pitagorino svojstvo. Prije nego što definiramo vektorski produkt kao multilinearano preslikavanje, primijetimo da Pitagorino svojstvo možemo zapisati na sljedeći način:

$$(u \times v) \cdot (u \times v) = (u \cdot u)(v \cdot v) - (u \cdot v)^2 = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ v \cdot u & v \cdot v \end{vmatrix} = \Gamma(u, v),$$

gdje $\Gamma(u, v)$ predstavlja Grammovu determinantu. Općenito, za $x_1, ..., x_n$ iz unitarnog prostora, Grammova determinanta $\Gamma(x_1, x_2, ..., x_n)$ predstavlja determinantu Grammove matrice $G(x_1, x_2, ..., x_n)$, odnosno:

$$G(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_1 & x_1 \cdot x_2 & \cdots & x_1 \cdot x_n \\ x_2 \cdot x_1 & x_2 \cdot x_2 & \cdots & x_2 \cdot x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_n \cdot x_1 & x_n \cdot x_2 & \cdots & x_n \cdot x_n \end{bmatrix}.$$

Definicija 4.0.3. *Vektorski produkt je multilinearno preslikavanje $X : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}^n$ koje zadovoljava sljedeća svojstva:*

(i) $X(u_1, u_2, ..., u_k) \cdot u_i = 0$, *za svaki* $i = 1, ..., k$;

(ii) $X(u_1, u_2, ..., u_k) \cdot X(u_1, u_2, ..., u_k) = \Gamma(u_1, ..., u_k)$,

za svaki $u_1, u_2, ..., u_k \in \mathbb{R}^n$.

Pritom pod multilinearnim preslikavanjem podrazumijevamo preslikavanje

$$X : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}^n,$$

takvo da vrijedi

$$X(u_1, ..., \alpha u_i + \beta u_i^{'}, ..., u_k) = \alpha X(u_1, ..., u_i, ..., u_k) + \beta X(u_1, ..., u_i^{'}, ..., u_k),$$

za sve $u_1, ...u_k, u_i^{'} \in \mathbb{R}^n$, za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, i za sve i=1,...,k. Dakle, to je preslikavanje koje je linearno u svakoj od k varijabli, i taj pojam je prirodna generalizacija već spomenutog pojma bilinearnosti. U sljedećim primjerima vidjeti ćemo za koje k i n postoji gore navedeni vektorski produkt:
$\underline{k = 1.}$ U ovom slučaju, iz Definicije 4.0.3, vidimo da je vektorski produkt X preslikavanje sa $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, koje je izometrija, budući da po svojstvu (ii) vrijedi:

$$X(u) \cdot X(u) = u \cdot u, \ \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

Također, $X(u)$ je okomito na u, za svaki $u \in \mathbb{R}^n$, pa je adjungirani operator od X jednak $X^* = -X$, tj., za svaki $u, v \in \mathbb{R}^n$ vrijedi:

$$X(u) \cdot v = u \cdot X^*(v) = -u \cdot X(v).$$

Stoga vrijedi:

$$X^2(u) = -X(X^*(u)) = -u, \ \forall u \in \mathbb{R}^n. \tag{4.1}$$

Preslikavanja sa svojstvom (4.1), nazivaju se kompleksne strukture na V. Općenito vrijedi, da ako na vektorskom prostoru V postoji preslikavanje koje je kompleksna struktura, tada je dimenzija od V paran broj. Dakle, u slučaju kada je $k = 1$, vektorski produkt će postojati na $\mathbb{R}^n$, samo ako je n paran broj.

$\underline{k = n - 1.}$ Neka je skup $\{e_1, e_2, ..., e_{k+1}\}$ ortonormirana baza za $\mathbb{R}^n$. Multilinearno preslikavanje sa $(\mathbb{R}^n)^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ definirano sa

$$(u_1, u_2, ..., u_{n-1}) \mapsto \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ u_{1_1} & u_{1_2} & \cdots & u_{1_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ u_{n-1_1} & u_{n-1_2} & \cdots & u_{n-1_n} \end{vmatrix}$$

zadovoljava svojstva iz Definicije 4.0.3. To je upravo slučaj sa početka Poglavlja 2, spomenut kod ideja o proširivanju vektorskog produkta, međutim koji smo tada odbacili budući da se ne radi o binarnoj operaciji. Naime, za ovako definiran vektorski produkt svojstvo

(i) vrijedi, budući da je determinanta matrice koja ima dva jednaka retka jednaka nula, a svojstvo (ii) se lagano provjerava. Primijetimo da za $k = 2$ i $n = 3$, gornja konstrukcija vektorskog produkta odgovara standardnom vektorskom produktu na $\mathbb{R}^3$.

$\underline{k = 3, n = 8.}$ Pretpostavimo da je $X : \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$ vektorski produkt, te neka je $e \in \mathbb{R}^8$, takav da je $e \cdot e \neq 0$. Promotrimo bilinearno množenje te funkciju q dane sa:

$$uv = \frac{1}{e \cdot e}(X(u, e, v) + (u \cdot e)\, v + (v \cdot e)\, u - (u \cdot v)\, e),$$

$$q(u) = \frac{u \cdot u}{e \cdot e},$$

za svaki $u, v \in \mathbb{R}^8$. Tada je $eu = ue = u$, za svaki u, iz čega slijedi da je e jedinica za gornje definirano množenje, te također iz svojstva (ii) definicije vektorskog produkta slijedi da je $q(uv) = q(u)q(v)$. Nadalje, može se pokazati da vrijedi jedna od sljedeće dvije formule:

$$X(u, v, w) = (e \cdot e)(u\overline{v})w - (u \cdot v)w - (v \cdot w)u + (u \cdot w)v$$

ili

$$X(u, v, w) = (e \cdot e)u(\overline{v}w) - (u \cdot v)w - (v \cdot w)u + (u \cdot w)v,$$

pri čemu $x \mapsto \overline{x}$ označava standarnu konjugaciju na normiranoj algebri $\mathbb{H}$, identificiranoj sa $\mathbb{R}^8$, čime su dane dvije formule za vektorski produkt na $\mathbb{R}^8$. Za kraj, iskažimo teorem kojim formalno iskazujemo odgovor na pitanje o egzistenciji vektorskog produkta definiranog sa 4.0.3.

Teorem 4.0.4. *Vektorski produkt* $X : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}^n$*, postoji samo u sljedećim slučajevima:*

(a) n *je paran,* $k = 1$*;*

(b) n *je proizvoljan,* $k = n - 1$*;*

(c) $n = 3, 7$*,* $k = 2$*;*

(d) $n = 8$*,* $k = 3$.

Bibliografija

[1] W. S. Massey, *Cross Products of Vectors in Higher Dimensional Euclidean Spaces*, The American Mathematical Monthly, Vol. 90, No. 10 (Dec., 1983), 697–701.

[2] Peter F. McLoughlin, *When does a cross product on $\mathbb{R}^n$ exist?*, arXiv:1212.3515

[3] Peter F. Mcloughlin, *Basic Properties of Cross Products*, Electronic copy found at: `http://www.math.csusb.edu/faculty/pmclough/BP.pdf`

[4] Alberto Elduque, *Vector Cross Products*, Electronic copy found at: `http://www.unizar.es/matematicas/algebra/elduque/Talks/crossproducts.pdf`

[5] M. Postnikov, *Lectures in Geometry: Lie groups and Lie algebras*, Moskva,1986.

[6] J. F. Adams, *On the non existence of elements of Hopf invariant one*, Ann. of Math., 72 (1960), 20-104

Sažetak

U ovom radu govorimo o egzistenciji vektorskog produkta na $\mathbb{R}^n$. Polazeći od definicije i svojstva vektorskog produkta, pokazujemo da tako definiran vektorski produkt postoji na $\mathbb{R}^n$, samo za $n = 0, 1, 3$ i 7. Nadalje, koristeći Hurwitzov teorem, dajemo i alternativni dokaz te tvrdnje. Na kraju, pokazujemo u kojim slučajevima postoji vektorski produkt kao multilinearna funkcija.

Summary

In this diploma thesis we consider the existence of cross product on $\mathbb{R}^n$. Starting from the definition and properties of cross product, we show that such cross product exists only for $n = 0, 1, 3$ and 7. Furthermore, using the Hurwitz theorem, we give an alternative proof of that claim. Ultimately, we show in which cases does cross product, defined as a multilinear function, exists.

Životopis

Moje ime je Matea Pavlek. Rođena sam u Zagrebu 13.01.1991.. Završila sam Osnovnu školu Bukovac, te XV. Gimnaziju, također u Zagrebu. Nakon završetka srednje škole, 2009. godine, upisala sam Prirodoslovno matematički fakultet (PMF) u Zagrebu, smjer Matematika. Titulu sveučilišne prvostupnice (baccalaureus) matematike stekla sam 2013. godine, te iste godine upisala diplomski studij Financijska i poslovna matematika na istom fakultetu.