Struktura grafova višeg reda

Perlić, Antonija

Master's thesis / Diplomski rad

2016

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Antonija Perlić

STRUKTURA GRAFOVA VIŠEG REDA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Doc.dr.sc. Pavle Goldstein

Zagreb, rujan, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj rad želim posvetiti svojoj majci Zdenki.

Sadržaj

Uvod

U ovom radu će se pročavati struktura grafova drugog reda i pridruženih algebri. Da bismo došli do pojma 2-grafa prvo ćemo promatrati usmjerene grafove i njima pridružene matrice susjedstva. Nakon toga ćemo definirati što je to 2-graf, dati jednostavne primjere za bolje razumijevanje definicije te iskazati i dokazati nužan i dovoljan uvjet za egzistenciju bijekcije pomoću koje ćemo iz dva 1-grafa formirati 2-graf. Nakon toga ćemo napravit uvod u posebnu klasu C^*-algebri: C^*-algebre grafova, odnosno C^*-algebre koje zadajemo preko grafova.

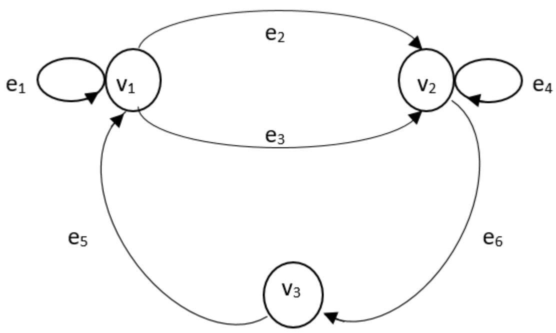
Poglavlje 1

Matrica susjedstva i usmjereni graf

U ovom poglavlju ćemo promatrati usmjerene grafove i njima pridružene matrice susjedstva.

1.1 Definicije i osnovni pojmovi

Da bismo došli do pojma 2-grafa prvo ćemo promatrati nenegativne cjelobrojne matrice susjedstva reda n (A $\in M_{n,n}(\mathbb{Z}^+)$). Takvoj matrici možemo pridružiti usmjeren graf Γ_A=(V, E) gdje je $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ skup svih vrhova, a $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ skup svih bridova grafa Γ_A. Broj svih vrhova u grafu Γ_A jednak je redu matrice A.



Slika 1.1: Primjer usmjerenog grafa

Definicija 1.1.1. *Matrica susjedstva A dimenzija $n \times n$ dana je formulom po članovima:*

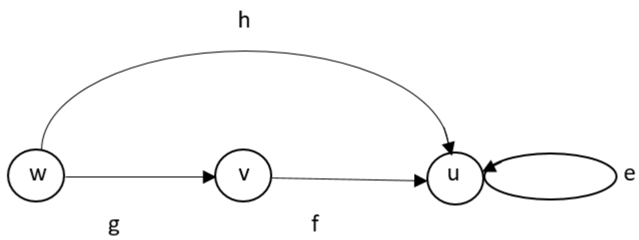
$$A_{i,j} = \begin{cases} a, & (v_i, v_j) \in E, a \in \mathbb{N}, i, j \in \{1, 2, ..., n\} \\ 0, & inače \end{cases}$$

A_{ij} nam govori na koliko načina možemo doći iz vrha v_i u vrh v_j, odnosno to je broj bridova iz vrha v_i u vrh v_j. Radi jednostavnosti, dane pojmove ću prikazati grafički na sljedećem primjeru.

Primjer 1.1.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Usmjeren graf pridružen matrici susjedstva A prikazan je na Slici 1.1. Skup svih vrhova je dan s $V = \{v_1, v_2, v_3\}$*, a skup svih bridova s* $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.

Definicija 1.1.3. *Neka je* $A \in M_{n,n}(\mathbb{Z}^+)$ *matrica susjedstva i* Γ_A *pripadni usmjeren graf. Definiramo preslikavanje izvor (eng. source)* $s : E \to V$ *i rang (eng. range)* $r : E \to V$*, gdje za* $e \in E, s(e)$ *označava vrh iz kojeg e počinje, dok* $r(e)$ *označava vrh u kojem e završava.*



Slika 1.2: Primjer usmjerenog grafa

Na gornjem grafu skup vrhova $V = \{w, v, u\}$, skup bridova $E = \{e, f, g, h\}$, $r(e) = r(h) = r(f) = u$, $r(g) = v$, $s(e) = u$, $s(h) = s(g) = w$, $s(f) = v$.

Definicija 1.1.4. *Niz bridova* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nazivamo put kroz graf* Γ_A *ako vrijedi*

$$r(e_i) = s(e_{i+1}), \forall i. \tag{1.1}$$

Lema 1.1.5. *Neka je A matrica susjedstva usmjerenog grafa i neka je* Γ_A *njoj pridružen usmjeren graf. Tada se na* (i, j)*-om mjestu matrice* A^n *,*$n \in \mathbb{N}$*, nalazi broj puteve duljine n iz vrha* v_i *u vrh* v_j.

Dokaz. Na (i,j)-om mjestu matrice A piše broj različitih puteva duljine 1 iz vrha v_i u vrh v_j.

$$(A^2)_{ij} = (A \times A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}A_{kj} \tag{1.2}$$

- za k=1: prvi član gornje sume je jednak $A_{i1}A_{1j}$. To je broj puteva duljine 1 od vrha v_i do vrha v_1, pomnoženo brojem puteva duljine 1 od vrha v_1 do vrha v_j. Dakle, taj umnožak je jednak broju puteva duljine 2 koji prolaze preko vrha v_1.

- za k=2: drugi član gornje sume je jednak $A_{i2}A_{2j}$.To je broj puteva duljine 1 od vrha v_i do vrha v_2, pomnoženo brojem puteva duljine 1 od vrha v_2 do vrha v_j. Dakle, taj umnožak je jednak broju puteva duljine 2 koji prolaze preko vrha v_2.

  $\vdots$

- za k=n: zadnji član gornje sume je jednak $A_{in}A_{nj}$.To je broj puteva duljine 1 od vrha v_i do vrha v_n, pomnoženo brojem puteva duljine 1 od vrha v_n do vrha v_j. Dakle,taj umnožak je jednak broju puteva duljine 2 koji prolaze preko vrha v_n.

Ako zbrojimo ove vrijednosti za svaki $k = 1, 2, \dots, n$, dobivamo broj različitih puteva duljine 2 od vrha v_i do vrha v_j. Trivijalno se vidi da smo na taj način prebrojali sve puteve duljine 2 iz vrha v_i u vrh v_j te neki put nismo brojali dvaput zbog toga što za svaki $k = 1, 2, \dots, n$, vrh preko kojeg prelazimo u sredini puta je drukčiji.

Zaključujemo da sa na (i, j)-om mjestu kvadrirane matrice susjedstva nalazi broj svih puteva duljine 2 iz vrha v_i u vrh v_j. Ovakvo razmišljanje primijenimo za svaki $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Iz gornje Leme 1.1.5 slijedi da je produkt matrice A^n i A^m u kojima piše broj svih puteva duljine n, odnosno m, $n, m \in \mathbb{N}$ jednak matrici u kojoj piše broj svih puteva duljine $n + m$, tj. jednak je matrici A^{n+m}.

Poglavlje 2

2-grafovi

2.1 2-grafovi

Definicija 2.1.1. *Kategorija je matematički objekt koji se sastoji od 2 klase, C^0(objekti) i C^1(morfizmi), sa sljedećim svojstvima:*

- *postoje preslikavanja $r : C^1 \longrightarrow C^0$ i $s : C^1 \longrightarrow C^0$ koje zovemo izvor i rang*
- *postoji preslikavanje $\circ : \{(f, g) \in C^1 \times C^1; s(f) = r(g)\} \longrightarrow C^1$ koju zovemo kompozicija sa svojstvom da je $r(g \circ f) = r(g)$, $s(g \circ f) = s(f)$*
- *postoji preslikavanje $i : C^0 \longrightarrow C^1$ koju zovemo identiteta (petlja) takva da $\forall c \in C^0$ vrijedi:*
$$r(i(c)) = c = s(i(c)) \tag{2.1}$$

Definicija 2.1.2. *Neka su C i D kategorije. Funktor F je preslikavanje F:C $\longrightarrow$ D kojeg čine dva preslikavanja $F^0 : C^0 \longrightarrow D^0$ i $F^1 : C^1 \longrightarrow D^1$ za koje vrijedi:*

- $\forall c \in C^0, F^1 \circ i(c) = i(F^0(c))$
- *ako je* $(f : c \longrightarrow c') \in C^1, onda je (F^1(f) : F^0(c) \longrightarrow F^0(c')) \in D^1$
- $F^1(f \circ g) = F^1(f) \circ F^1(g)$

Definicija 2.1.3. $2 - graf$ *(Λ, d) sastoji se od prebrojive male kategorije Λ (sa funkcijama r i s) i funktora d:$\Lambda \to \mathbb{N}^2$ koji zadovoljava sljedeće svojstvo:*

$$\forall \lambda \in \Lambda, \forall m, n \in \mathbb{N}^2 \quad \text{takvi da je} \quad d(\lambda) = m + n, \tag{2.2}$$

postoje jedinstveni μ, $\nu \in \Lambda$ takvi da je

$$\lambda = \mu\nu (= \mu \circ \nu) \quad i \quad d(\mu) = m, d(\nu) = n. \tag{2.3}$$

Napomena 2.1.4. *Pojam* male prebrojive kategorije *iz prethodne definicije označava da je klasa objekata C^0 prebrojiv skup.*

Slijedeća lema govori da 2-graf možemo konstruirati iz nekih 1-grafova.

Lema 2.1.5. *Neka su A i B matrice susjedstva definirane nad istim skupom vrhova. Ako matrice A i B komutiraju, tada postoji bijekcija* Θ *sa skupa* $A^1 * B^1$=$\{(a,b) \in A^1 \times B^1, s(a) = r(b)\}$ *u skup* $B^1 * A^1$=$\{(b,a) \in B^1 \times A^1, s(b) = r(a)\}$.

Dokaz. Matrice A i B su definirane nad istim skupom vrhova $A^0 = B^0 = V$. Budući da radimo nad konačnim skupovima, možemo pretpostaviti da imamo n vrhova i da je $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, tj. $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{Z}^+)$

$$A_{n,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad B_{n,n} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

Neka je Γ_A graf pridružen matrici A i nekaj je Γ_B graf pridružen matrici B. Gledamo što je to $(AB)_{ij}$:

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \tag{2.4}$$

Uočimo naprimjer da je $a_{i1}b_{1j} = 1$ ako i samo ako postoji brid iz vrha i u vrh 1 u grafu Γ_A i postoji brid iz vrha 1 u vrh j u grafu Γ_B ako i samo ako $(\vec{1j}, \vec{i1}) \in B^1 * A^1$.
Po pretpostavci A i B komutiraju, tj. $AB = BA$, odnosno $(AB)_{ij} = (BA)_{ij}, \forall i, j = 1, 2, \ldots, n$. Dakle, na mjestu ij u matrici AB i BA nalazi se isti broj, neka je to $k \in \mathbb{Z}^+$. To znači da imamo točno k jedinica u rastavu $(AB)_{ij}$ (to ne znači da imamo točno k članova sume (2.4) jer imamo mogućnost višestrukih bridova i petlji).
Analogno zaključujemo i u slučaju $(BA)_{ij}$:

$$(BA)_{ij} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{in}a_{nj} \tag{2.5}$$

Uočimo naprimjer da je $b_{i2}a_{2j} = 1$ ako i samo ako postoji brid iz vrha i u vrh 2 u grafu Γ_B i postoji brid iz vrha 2 u vrh j u grafu Γ_A ako i samo ako $(\vec{2j}, \vec{i2}) \in A^1 * B^1$.
Jer je $(Ab)_{ij} = (BA)_{ij}$ slijedi da je $(BA)_{ij} = k$, tj. imamo točno k jedinica u rastavu, tj. točno k različitih puteva duljine 1.
Sada uzmemo tih k članova sume iz $(BA)_{ij}$ i preslikamo ih u k članova sume iz $(AB)_{ij}$. Budući da je k konačan prirodan broj (ili 0) sigurno imamo bijekciju iz prvog skupa u drugi.

Uočimo da je takvo preslikavanje dobro, tj. podudara se sa definicijom skupova $A^1 * B^1$ i $B^1 * A^1$, odnosno ako $(\alpha,\beta) \mapsto (\beta',\alpha')$ vrijedi $r(\alpha) = r(\beta')$ i $s(\beta) = s(\alpha')$. Npr. ako je $b_{i2}a_{2j} = 1$ u relaciji (2.5) i $a_{i1}b_{1j} = 1$ u relaciji (2.4), onda možemo $(\vec{2j}, \vec{i2}) \in A^1 * B^1$ preslikati u $(\vec{1j}, \vec{i1}) \in B^1 * A^1$ i $r(\vec{2j}) = r(\vec{1j}) = j$ i $s(\vec{i2}) = s(\vec{i1}) = i$.
To napravimo $\forall i, j$ u matrici $AB = BA$ i na taj način dobijemo bijekciju sa skupa $A^1 * B^1$ u skup $B^1 * A^1$

□

Napomena 2.1.6. *Obrat Leme 2.1.5. očito vrijedi ako pretpostavimo još jedan dodatan uvjet. Neka postoji bijekcija $\Theta : A^1 * B^1 = \{(a, b) \in A^1 \times B^1, s(a) = r(b)\} \to B^1 * A^1 = \{(b, a) \in B^1 \times A^1, s(b) = r(a)\}$ i pretpostavimo da vrijedi sljedeće: ako $(\alpha,\beta) \mapsto (\beta',\alpha')$, onda vrijedi $r(\alpha) = r(\beta')$ i $s(\beta) = s(\alpha')$. Vidimo da Θ preslikava put iz $A^1 \times B^1$ u put s istim početkom i krajem iz $B^1 \times A^1$. Jer postoji bijekcija $\implies$ broj puteva mora biti jednak $\implies$ $(AB)_{ij} = (BA)_{ij}$, $\forall i, j \implies AB = BA$, tj. matrice susjedstva komutiraju.*

Ako je Θ takva bijekcija, možemo formirati 2-graf $A *_\Theta B$ gdje je $(A *_\Theta B)^0 = A^0 = B^0 = V$ i možemo poistovjetiti $(A *_\Theta B)^{e_1}$ sa A^1 te $(A *_\Theta B)^{e_2}$ sa B^1. Dakle pomoću dva 1-grafa i bijekcije Θ možemo formirat 2-graf $A *_\Theta B$.

Puteve $(A *_\Theta B)\backslash(A *_\Theta B)^0$ možemo shvaćati kao neprazne nizove $\{\lambda_i, i = 1, \dots, n\} \subset A_1 \sqcup B_1$, gdje je $s(\lambda_i) = r(\lambda_{i+1}), \forall i = 1, 2, \dots, n$. Takve puteve pišemo kao $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \dots \lambda_n = \lambda_1 \circ \lambda_2 \circ \lambda_3 \circ \dots \circ \lambda_n$.

Stupanj od $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \dots \lambda_n$ jednak je (m_1, m_2), gdje je m_1 broj λ_i-eva iz A_1 a m_2 broj λ_i-eva iz B_1.

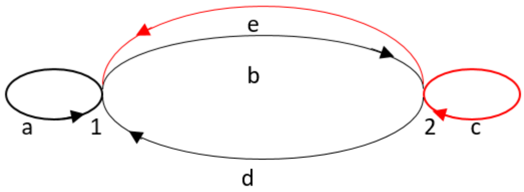
Uloga bijekcije Θ je osigurati da $A *_\Theta B$ zadovoljava pravilo faktorizacije: za a $\in (A *_\Theta B)^{e_1}$ i b $\in (A *_\Theta B)^{e_2}$, te $s(a) = r(b)$, vrijedi $ab = b'a' \in (A *_\Theta B)^{(1,1)}$, ako je $\Theta(a, b) = (b', a')$.

Primjer 2.1.7. *U ovom primjeru vidjeti ćemo da je komutacija matrica susjedstva iz Leme 2.1.5 nužna za egzistenciju bijekcije Θ. Iz Slike 2.1. vidimo:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vidimo da je $AB \neq BA$, a jer je bijekcija Θ definirana po elementima matrice AB, odnosno BA, očito je da bijekcija $\Theta : A^1 * B^1 = \{(a, b) \in A^1 \times B^1, s(a) = r(b)\} \to B^1 * A^1 = \{(b, a) \in B^1 \times A^1, s(b) = r(a)\}$ ne postoji.



Slika 2.1: Skica 2-grafa

Lema 2.1.8. *Ako znamo rastav puteva iz* $(A *_\Theta B)^{(1,1)}$, *onda znamo rastav svih puteva* $(A *_\Theta B)^{(m,n)}, \forall m, n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. $(A *_\Theta B)^{(m,n)} \implies$ imamo m puteva duljine 1 iz A_1 i n puteva duljine 1 iz B_1. Neka su $i_1, i_2, \ldots, i_m \in A_1$ te $j_1, j_2, \ldots, j_n \in B_1$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} d(i_1) = d(i_2) = \cdots = d(i_m) = (1,0) \\ d(j_1) = d(j_2) = \cdots = d(j_n) = (0,1) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Na primjer:

$$i_1 i_2 j_1 i_3 j_2 i_4 i_5 i_6 j_7 j_8 i_9 \tag{2.7}$$

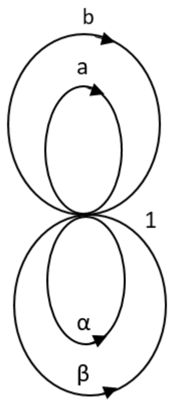
Upravo bijekcija Θ osigurava da svaki put iz skupa $(A *_\Theta B)^{(1,1)}$ zadovoljava pravilo faktorizacije , tj. da za neki put ij takav da je $r(j) = s(i)$ koji je potput puta (2.7) postoji jedinstveni put $i' \in (A *_\Theta B)^{e_1}$ i $j' \in (A *_\Theta B)^{e_2}$ takvi da je $ij = j'i' \in (A *_\Theta B)^{(1,1)}$. Grupirajući potputeve iz (2.7) i primjenjivajući definiranu bijekciju Θ dolazimo do jedinstvenog rastava puta (2.7).

$\square$

Lemu 2.1.8 najbolje ćemo razumjeti na sljedećem primjeru.

Primjer 2.1.9. *Na Slici 2.2. dana je skica 2-grafa. Vrijedi:*

$$\begin{aligned} V = A^0 = B^0 = \{1\} \\ A = [2], B = [2] \\ AB = BA = [4] \\ (A^1 * B^1) = \{(a,\alpha),(a,\beta),(b,\alpha),(b,\beta)\} \\ (B^1 * A^1) = \{(\alpha,a),(\alpha,b),(\beta,a),(\beta,b)\} \end{aligned} \tag{2.8}$$



Slika 2.2: Skica 2-grafa

Ukupno ima 4!=24 preslikavanja $\Theta : (A^1 * B^1) \to (B^1 * A^1)$, *ali ne razlikujemo bridove* α *i* β *te* a *i* b. *Isto tako ne razlikujemo "gornje bridove"* a, b *od "donjih bridova"* α, β. *Zbog toga dijelimo 24 sa* $2 \cdot 2 \cdot 2$ *i dobivamo 3 fundamentalno različite bijekcije. Moguće bijekcije, odnosno indetitete su:*

$$\begin{aligned} a\alpha &= \alpha a \\ a\beta &= \alpha b \\ b\alpha &= \beta a \\ b\beta &= \beta b \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} a\alpha &= \alpha a \\ a\beta &= \beta a \\ b\alpha &= \alpha b \\ b\beta &= \beta b \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} a\alpha &= \beta b \\ a\beta &= \alpha b \\ b\alpha &= \beta a \\ b\beta &= \alpha a \end{aligned} \tag{2.11}$$

Uzmimo npr. da je bijekcija zadana sa (2.9) i uzmimo neki put, npr. $\lambda = ab\beta\alpha \in (A *_\Theta B)^{(2,2)}$. *Znamo rastav svih puteva iz skupa* $(A *_\Theta B)^{(1,1)}$ *pa prema Lemi 2.1.8 znamo rastav zadanog puta.* $d(\lambda) = (2,2) = (0,2) + (2,0)$ *te znamo da postoje jedinstveni putevi* μ *i* ν *takvi da vrijedi* $\lambda = \mu \circ \nu$ *i da je* $d(\mu) = (0,2)$, $d(\nu) = (2,0)$.

$$\begin{aligned} a \mid b\beta \mid \alpha, b\beta = \beta b &\implies a\beta b\alpha \\ \mid a\beta \mid b\alpha, a\beta = \alpha b &\implies \alpha bb\alpha \\ \alpha b \mid b\alpha, b\alpha = \beta a &\implies \alpha b\beta a \\ \alpha \mid b\beta \mid a, b\beta = \beta b &\implies \alpha\beta ba \end{aligned} \tag{2.12}$$

$\implies \mu = \alpha\beta, \nu = ba, d(\mu) = (0,2), d(\nu) = (2,0).$

Poglavlje 3

C^*-algebre grafova

3.1 Osnovni pojmovi

Definicija 3.1.1. *Neka je V Abelova grupa u odnosu na zbrajanje, a F polje. Na skupu $F \times V$ definirano je množenje vektora skalarom, tj. preslikavanje $F \times V \longrightarrow V$, koje svakom skalaru $\alpha \in F$ i svakom vektoru $x \in V$ pridružuje vekotr $\alpha x \in V$, tako da vrijede sljedeći aksiomi:*

- $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \forall \alpha, \beta \in F, \forall x \in V$
- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \forall \alpha \in F, \forall x, y \in V$
- $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \forall \alpha, \beta \in F, \forall x \in V$
- $1x = x, \forall x \in V$.

Ovako definirano preslikavanje zove se množenje vektora skalarom, dok se V naziva vektorski prostor nad poljem F.

Definicija 3.1.2. *Neka je V vektorski prostor nad poljem F. Norma na V je preslikavanje $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \|x\|$, za koje vrijedi:*

- $\|x\| \geq 0, \forall x \in V$,
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \forall \lambda \in F, \forall x \in V$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in V$.

Normiran prostor je uređeni par $(V, \|\cdot\|)$.

Preslikavanje koje zadovoljava svojstva Definicije 3.1.2, osim drugog, zovemo *seminorma*.

Definicija 3.1.3. *Vektorski prostor A nad poljem F, zajdeno sa operacijama množenja (x,y) $\longmapsto$ xy zove se algebra nad F, ako preslikavanje (x,y) $\longmapsto$ xy s $A \times A$ u A ima svojstva:*

- $(xy)z = x(yz)$,
- $x(y + z) = xy + xz; (x + y)z = xz + yz$,
- $(\alpha x)y = x(\alpha y)$,

za sve $\alpha \in F$ i sve $x,y,z \in A$.

Definicija 3.1.4. *Funkcija $x \longmapsto ||x||$ s algebre A u polje realnih brojeva je norma na algebri A ako je $x \longmapsto ||x||$ norma na vektorskom prostoru A, i vrijedi:*

- $||x \cdot y|| \leq ||x|| \cdot ||y||, \forall x, y \in A$,
- $||1|| = 1$*, za* $1 \in A$ *jedinični element.*

Uređeni par $(A, || \cdot ||)$ *zovemo* normirana algebra.

Definicija 3.1.5. *Normiran prostor X je* potpun *ili* Banachov *ako je svaki Cauchyjev niz u X konvergentan.*

Definicija 3.1.6. *Za normiranu algebru* $(A, || \cdot ||)$ *kažemo da je* Banachova algebra *ako je A Banachov prostor.*

Definicija 3.1.7. *Operacija* $* : A \longrightarrow A$*, dana sa* $x \longmapsto x^*$*, zove se* involucija *ako za svaki* $x, y \in A$ *i svaki* $\alpha \in \mathbb{C}$ *vrijedi:*

- $(x^*)^* = x$,
- $(xy)^* = y^* x^*$,
- $(\alpha x)^* = \overline{\alpha} x^*$.

Definicija 3.1.8. *Operacija involucije na A je izometrička ako vrijedi:*

$$||x^*|| = ||x||, \forall x \in A. \tag{3.1}$$

Definicija 3.1.9. *Neka je A Banachova algebra s izometričkom involucijom. Kažemo da je* A $C^* -$ algebra *ako za svaki* $x \in A$ *vrijedi:*

$$||xx^*|| = ||x||^2. \tag{3.2}$$

Napomena 3.1.10. *Identitet (3.2) ćemo zvati* $C^* -$ svojstvo norme.

Definicija 3.1.11. *Ograničenu linearnu funkciju* $\varphi : A \longrightarrow B$*, gdje su* A *i* B C^**-algebre, zovemo* *-homomorfizam *ako za svaki* $x, y \in A$ *vrijedi:*

- $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$,
- $\varphi(x^*) = \varphi(x)^*$.

*Svaki *-homomorfizam* φ *između* C^**-algebri je norme* ≤ 1*, što je posljedica* C^**-svojstva norme.*

Definicija 3.1.12. *Preslikavanje f iz jedne strukture u drugu naziva se* izomorfizmom *ako vrijedi:*

- *preslikavanje f je bijektivno*
- *preslikavanje f je homomorfizam*
- *inverzna funkcija* f^{-1} *homomorfizam*

Ako postoji izomorfizam između dvije strukture, tada se za njih kaže da su izomorfne.

3.2 Primjeri elementarnih C^*-algebri

Elementarnim C^*-algebrama obično se nazivaju algebre svih ograničenih operatora na nekom Hilbertovom prostoru H, albegra kompaktnih operatora, te algebra neprekidnih funkcija s nekog kompaktnog Hausdorffovog prostora X u $\mathbb{C}$. Stoga, neki od najjednostavnijih primjera C^*-algebri su skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, prostor svih neprekidnih kompleksnih funkcija definiranih na segmentu [0,1], skup svih $n \times n$ matrica nad $\mathbb{C}$ ($M_n(\mathbb{C})$), i slično.

Lema 3.2.1. *Neka je* $A = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}; f \ neprekidna\} = C[0,1]$*, tj. prostor svih neprekidnih kompleksnih funkcija sa segmenta* $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ *u* $\mathbb{C}$*. Za* $f, g \in A$ *i* $\alpha \in \mathbb{C}$ *definiramo zbrajanje, množenje, involuciju i normu:*

- $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$
- $(f \cdot g)(t) = f(t) \cdot g(t)$
- $(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$
- $(f)^*(t) = \overline{f(t)}$
- $||(f)(t)|| = sup_{t \in X}|f(t)|$.

Tada je A C^*-algebra.

Definicija 3.2.2. *Neka je $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{C}^n$. Standardna norma u $\mathbb{C}^n$ definira se kao:*

$$|\xi| = \Big(\sum \xi\bar{\xi}\Big)^{1/2}. \tag{3.3}$$

Lema 3.2.3. *$M_n(\mathbb{C})$ je potpun prostor.*

Definicija 3.2.4. *Neka je H Hilbertov prostor sa skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ i neka je $M : H \longrightarrow H$ ograničen linearni operator. Tada postoji jedinstveni linearni operator $M^* : H \longrightarrow H$ takav da vrijedi:*

$$\langle Mx, y\rangle = \langle x, M^*y\rangle, \forall x, y \in H. \tag{3.4}$$

Operator M^* zovemo adjungirani operator *operatora M.*

Za svaki ograničeni operator M definiramo

$$||M|| = sup\{|Mx| : x \in H, |x| = 1\}. \tag{3.5}$$

Lema 3.2.5. *Neka su H, M i M^* kao u Definiciji 3.2.4. Tada vrijedi sljedeće:*

- $||M|| = ||M^*||$
- $||M||^2 = ||M^*M||$

Lema 3.2.6. *Neka je $A = M_n(\mathbb{C})$, tj. skup svih $n \times n$ matrica nad $\mathbb{C}$. Na A se definiraju uobičajne operacije zbrajanja i množenja matrica te množenje matrice skalarom. Za $X \in A$ i $\xi \in \mathbb{C}^n$ definiramo operaciju involucije i normu sa:*

- $X^* = [\overline{x_{j,i}}]$ *za* $X = [x_{i,j}]$,
- $||M|| = sup_{\{|\xi|=1\}}|X\xi|$.

Tada je A C^*-algebra.

3.3 C^*-algebre grafova

Definicija 3.3.1. *Neka je A proizvoljna C^*-algebra. Tada za element $p \in A$ kažemo da je* ortogonalni projektor *ako je $p^2 = p = p^*$.*

Definicija 3.3.2. *Neka je A proizvoljna C^*-algebra. Tada za element $s \in A$ kažemo da je* parcijalna izometrija *ako su ss^* i s^*s ortogonalni projektori.*

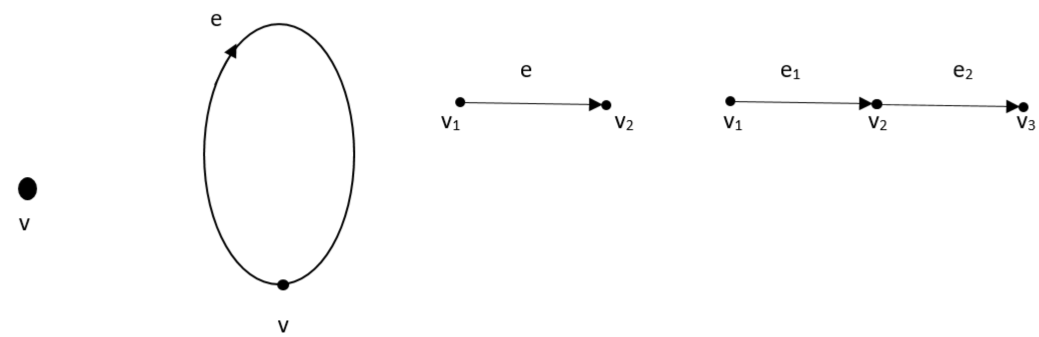
Primjer 3.3.3. *Neka je $e_{ij} \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ matrica koja na (i, j)-tom mjestu ima jedinicu, a svi ostali elementi su 0, za $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Uočimo da je e_{ij} parcijalna izometrija za svaki $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$:*

$$e_{ij}e_{ij}^* = e_{ij}e_{ji} = e_{ii}, \tag{3.6}$$

$$e_{ij}^*e_{ij} = e_{ji}e_{ij} = e_{jj}, \tag{3.7}$$

$$e_{ii} = e_{ii}^2 = e_{ii}^*, \tag{3.8}$$

tj. e_{ii} je ortogonalni projektor.



Slika 3.1: Prikaz grafova

Definicija 3.3.4. *Neka je G=(V,E,s,r) usmjeren graf, neka je $S = \{S_e, e \in E\}$ skup parcijalnih izometrija te neka je $P = \{P_v, v \in V\}$ skup ortogonalnih projektora. C^*-algebra $C^*(G)$ je generirana Cuntz-Kriegerovom familijom $\{S, P\}$ ako ona zadovoljava sljedeća svojstva:*

- $S_e^* S_e = P_{r(e)}, \forall e \in E$
- $P_v = \sum_{\{e; s(e)=v\}} S_e S_e^*, \forall v \in s(E).$

Primjer 3.3.5. *Uzmimo prvi graf sa Slike 3.1. i označimo ga sa G_1. Graf G_1 sadrži samo jedan vrh pa imamo samo jedan generator*

$$P_v = P_v^2 = P_v^* \tag{3.9}$$

pa je u ovom slučaju $C^*(G) = \mathbb{C}$.
Uzmimo drugi graf sa Slike 3.1. i označimo ga sa G_2. Generatori su sljedeći:

$$P_v = P_v^2 = P_v^* \tag{3.10}$$

$$S_e \tag{3.11}$$

Relacija:

$$S_e^* S_e = P_v = S_e S_e^* \tag{3.12}$$

pa vidimo da je $C^*(G) = C(S^1) = \{z \in \mathbb{C}, \|z\| = 1\}$.
Uzmimo treći graf sa Slike 3.1. i označimo ga sa G_3. *Generatori su sljedeći:*

$$P_{v_1} = P_{v_1}^2 = P_{v_1}^* \tag{3.13}$$

$$P_{v_2} = P_{v_2}^2 = P_{v_2}^* \tag{3.14}$$

$$S_e \tag{3.15}$$

Relacija:

$$S_e^* S_e = P_{v_2} \tag{3.16}$$

Neka je e_{ij} 2×2 *matrica koja na (i, j)-tom mjestu ima jedinicu, a svi ostali elementi su 0, za* $i, j \in \{1, 2\}$. *Neka vrijedi sljedeće:*

$$P_{v_1} \longmapsto e_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

$$P_{v_2} \longmapsto e_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

$$S_e \longmapsto e_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

Vidimo da ovakvo pridruživanje zadovoljava gornju relaciju pa je $C^*(G_3)$ *generirana sa* $\{e_{12}\}$, *tj.* $C^*(G_3)$ *algebra je izomorfna sa* $M_2(\mathbb{C})$.

Uzmimo četvrti graf sa Slike 3.1. i označimo ga sa G_4. *Generatori su sljedeći:*

$$P_{v_1} = P_{v_1}^2 = P_{v_1}^* \tag{3.20}$$

$$P_{v_2} = P_{v_2}^2 = P_{v_2}^* \tag{3.21}$$

$$P_{v_3} = P_{v_3}^2 = P_{v_3}^* \tag{3.22}$$

$$S_{e_1} \tag{3.23}$$

$$S_{e_2} \tag{3.24}$$

Relacije:

$$S_{e_1}^* S_{e_1} = P_{v_2} = S_{e_2} S_{e_2}^* \tag{3.25}$$

$$S_{e_2}^* S_{e_2} = P_{v_3} \tag{3.26}$$

Neka je e_{ij} 3×3 matrica koja na (i, j)-tom mjestu ima jedinicu, a svi ostali elementi su 0, za $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Neka vrijedi sljedeće:

$$P_{v_1} \longmapsto e_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

$$P_{v_2} \longmapsto e_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

$$P_{v_3} \longmapsto e_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

$$S_{e_1} \longmapsto e_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

$$S_{e_2} \longmapsto e_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

Vidimo da ovakvo pridruživanje zadovoljava gornje relacije pa je $C^*(G_4)$ generirana sa $\{e_{12}, e_{23}\}$, tj. $C^*(G_4)$ algebra je izomorfna sa $M_3(\mathbb{C})$.

Općenito, može se pokazati da je $C^*(S, P) = \overline{span}\{S_\mu S_\nu^*, \mu, \nu \in E^*, s(\mu) = s(\nu)\}$, pri čemu je E^* skup svih puteva duljine 1,2,...,n, za $n \in \mathbb{N}$, te za svaki $\mu \in E^n$, $\mu = \mu_1\mu_2...\mu_n$, $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n \in E^1 = E$ i $S_\mu = S_{\mu_1} S_{\mu_2} ... S_{\mu_n}$.

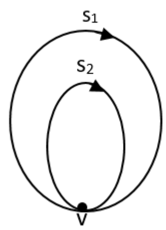
Definicija 3.3.6. *Neka je Λ 2-graf. Tada se $C^*(\Lambda)$ definira kao univerzalna C^*-algebra generirana familijom $\{t_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ parcijalnih izometrija koje zadovoljavaju sljedeća svojstva:*

- *$\{t_v, v \in \Lambda^0 = V\}$ je skup ortogonalnih projekcija,*
- *$t_\lambda t_\mu = t_{\lambda\mu}$, za sve λ, $\mu \in \Lambda$ takve da ja $s(\lambda) = r(\mu)$,*
- *$t_\lambda^* t_\lambda = t_{s(\lambda)}$, $\forall \lambda \in \Lambda$,*
- *$t_v = \sum_{\lambda \in \Lambda^n(v)} t_\lambda t_\lambda^*$, $\forall v \in \Lambda^0 = V$, $\forall n \in \mathbb{N}^2$, pri čemu je $\Lambda^n(v) = \{\lambda \in \Lambda^n : r(\lambda) = v\}$.*

Familiju $\{t_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ parcijalnih izometrija koje zadovoljavaju gore navedena svojstva nazivamo Cuntz-Kriegerova Λ*-familija.* Cuntz-Kriegerova algebra $C^*(\Lambda)$ *je C^* algebra generirana Cuntz-Kriegerovom Λ-familijom $\{s_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ koja je univerzalna u smislu da za svaku*

Cuntz-Kriegerovu Λ-familiju $\{t_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ postoji jedinstveni homomorfizam Π definiran na $C^*(\Lambda)$ koji zadovoljava

$$\Pi(s_\lambda) = t_\lambda, \forall\lambda \in \Lambda. \tag{3.32}$$



Slika 3.2: Graf G, $C^*(G) = O_2$

Neka je L univerzalne C^*-algebra generirana sa n generatora $S_1, S_2, ..., S_n$ koji zadovoljavaju sljedeće relacije:

$$S_1S_1^* + S_2S2^* + ... + S_nS_n^* = 1, \tag{3.33}$$

$$S_i^*S_1 = 1, \forall i. \tag{3.34}$$

Univerzalnu C^*-algebru koja zadovoljava relacije (3.33) i (3.34) zovemo *Cuntz algebra* i označavamo ju sa O_n (n $\geq$ 2). Kao i za $C^*(S, P)$, pokazuje se da je

$$O_n = \overline{span}\{s_\mu s_\nu^*; \mu, \nu putevi\} \tag{3.35}$$

Primjer 3.3.7. *Za graf G prikazan na Slici 3.2 vrijedi:*

$$s_1^*s_1 = 1 = s_2^*s_2 \tag{3.36}$$

$$s_1s_1^* + s_2s_2^* = 1 \tag{3.37}$$

Primijetimo da možemo prepozati neke podalgebre od O_2. Npr, neka je $F = C^*\{s_\mu s_\nu, |\mu| = |\nu| = 1\}$. Sa Slike 3.2 vidimo da su s_1 i s_2 putevi duljine 1 pa su $s_1s_1^*$, $s_1s_2^*$, $s_2s_2^*$, $s_2s_1^*$ elementi od F.

Neka vrijedi sljedeće:

$$s_1s_1^* = e_{11} \tag{3.38}$$

$$s_1s_2^* = e_{12} \tag{3.39}$$

$$s_2s_2^* = e_{22} \tag{3.40}$$

$$s_2 s_1^* = e_{21}, \tag{3.41}$$

Tada je $F \cong M_2(\mathbb{C})$.

Lagano se provjeri da je F je podalgebra od $\mathcal{O}_2$ koristeći relacije (3.36) i (3.37), npr. uzmimo

$$s_1 s_2^* s_2 s_1^* = (s_2^* s_2 = 1) = s_1 s_1^*. \tag{3.42}$$

Napomena 3.3.8. *Isto razmišljanje možemo primijeniti i na 2-grafove. Označimo skicu 2-grafa sa Slike 2.2 sa G. Tada je $C^*(G) = \mathcal{O}_{2,2}$, pri čemu je $\mathcal{O}_{2,2}^{e_1} = \{a, b\}$, $\mathcal{O}_{2,2}^{e_2} = \{\alpha, \beta\}$. Iz Definicije 3.3.6 i Primjera 2.1.9 slijedi da dobvamo 3 različite C^*-algebre.*

Bibliografija

[1] A. Kumjian, D. Pask, *Higher rank graph C^*-algebras*, New York Journal of Mathematics, **6** (2000) 1-20.

[2] D. G. Evans, *On Higher Rank Graph C^*-Algebras*, Ph. D. Thesis, School of Mathematics, Cardiff University, 2002.

[3] M. Đuračić, *Induktivni sistemi C^*-algebri*, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, 2011.

Sažetak

U ovom diplomskom radu uveli smo pojam 2-grafa i konstruirali smo 2-graf pomoću određenih usmjerenih grafova te opisali osnovne pojmove i primjere vezane uz tu konstrukciju. Nadalje, definirali smo i naveli neke od jednostavnih primjera C^*-algebri. Zatim smo uveli pojam C^*-algebre grafova te vidjeli vezu između te algebre i 2-grafa.

Summary

In this thesis we have introduced the term 2-graph, we have constructed a 2-graph by certain directed graphs and described the basic terms and examples regarding the 2-graph construction. Furthermore, we have defined and induced some simple examples of C^* - algebra. Afterwards, we introduced the term C^*-algebra of a graph and noticed a connection between that algebra and 2-graph.

Životopis

Moje ime je Antonija Perlić. Rođena sam 18.11.1991. u Zagrebu. Živim u Zagrebu, gdje sam stekla osnovno i srednješkolsko obrazovanje. Završila sam opću gimnaziju sa odličnim uspjehom, te se nakon toga, 2010. godine, upisala na sveučilišni prediplomski studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Tamo sam 2014. godine, nakon završenog prediplomskog studija, na kojem sam stekla titulu prvostupnice matematike, upisala diplomski studij Matematičke statistike.