

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Antonija Perlić

STRUKTURA GRAFOVA VIŠEG REDA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Doc.dr.sc. Pavle Goldstein

Zagreb, rujan, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Ovaj rad želim posvetiti svojoj majci Zdenki.

Sadržaj

Sadržaj	iv
Uvod	1
1 Matrica susjedstva i usmjereni graf	2
1.1 Definicije i osnovni pojmovi	2
2 2-grafovi	5
2.1 2-grafovi	5
3 C^*-algebre grafova	11
3.1 Osnovni pojmovi	11
3.2 Primjeri elementarnih C^* -algebri	13
3.3 C^* -algebre grafova	14
Bibliografija	20

Uvod

U ovom radu će se proćavati struktura grafova drugog reda i pridruženih algebri. Da bismo došli do pojma 2-grafa prvo ćemo promatrati usmjerene grafove i njima pridružene matrice susjedstva. Nakon toga ćemo definirati što je to 2-graf, dati jednostavne primjere za bolje razumijevanje definicije te iskazati i dokazati nužan i dovoljan uvjet za egzistenciju bijekcije pomoću koje ćemo iz dva 1-grafa formirati 2-graf. Nakon toga ćemo napraviti uvod u posebnu klasu C^* -algebri: C^* -algebre grafova, odnosno C^* -algebre koje zadajemo preko grafova.

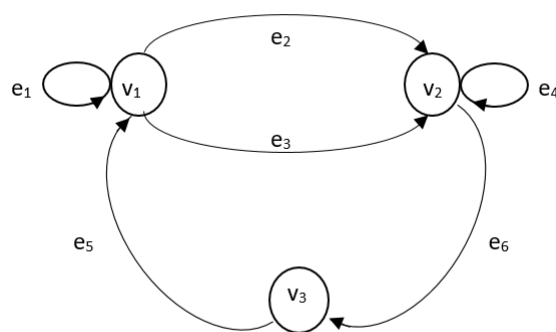
Poglavlje 1

Matrica susjedstva i usmjereni graf

U ovom poglavlju ćemo promatrati usmjerene grafove i njima pridružene matrice susjedstva.

1.1 Definicije i osnovni pojmovi

Da bismo došli do pojma 2-grafa prvo ćemo promatrati nenegativne cjelobrojne matrice susjedstva reda n ($A \in M_{n,n}(\mathbb{Z}^+)$). Takvoj matrici možemo pridružiti usmjereni graf $\Gamma_A = (V, E)$ gdje je $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ skup svih vrhova, a $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ skup svih bridova grafa Γ_A . Broj svih vrhova u grafu Γ_A jednak je redu matrice A .



Slika 1.1: Primjer usmjerenog grafa

Definicija 1.1.1. *Matrica susjedstva A dimenzija $n \times n$ dana je formulom po članovima:*

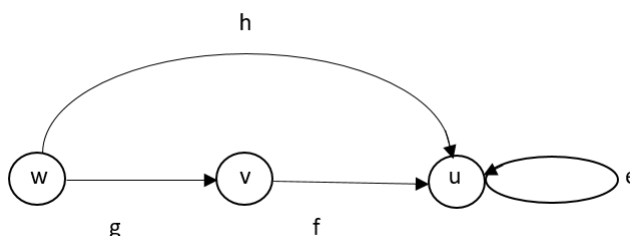
$$A_{i,j} = \begin{cases} a, & (v_i, v_j) \in E, a \in \mathbb{N}, i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

A_{ij} nam govori na koliko načina možemo doći iz vrha v_i u vrh v_j , odnosno to je broj bridova iz vrha v_i u vrh v_j . Radi jednostavnosti, dane pojmove ću prikazati grafički na sljedećem primjeru.

Primjer 1.1.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Usmjeren graf pridružen matrici susjedstva A prikazan je na Slici 1.1. Skup svih vrhova je dan s $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, a skup svih bridova s $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.

Definicija 1.1.3. Neka je $A \in M_{n,n}(\mathbb{Z}^+)$ matrica susjedstva i Γ_A pripadni usmjeren graf. Definiramo preslikavanje izvor (eng. source) $s : E \rightarrow V$ i rang (eng. range) $r : E \rightarrow V$, gdje za $e \in E$, $s(e)$ označava vrh iz kojeg e počinje, dok $r(e)$ označava vrh u kojem e završava.



Slika 1.2: Primjer usmjerenog grafa

Na gornjem grafu skup vrhova $V = \{w, v, u\}$, skup bridova $E = \{e, f, g, h\}$, $r(e) = r(h) = r(f) = u$, $r(g) = v$, $s(e) = u$, $s(h) = s(g) = w$, $s(f) = v$.

Definicija 1.1.4. Niz bridova $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazivamo put kroz graf Γ_A ako vrijedi

$$r(e_i) = s(e_{i+1}), \forall i. \quad (1.1)$$

Lema 1.1.5. Neka je A matrica susjedstva usmjerenog grafa i neka je Γ_A njoj pridružen usmjeren graf. Tada se na (i, j) -om mjestu matrice A^n , $n \in \mathbb{N}$, nalazi broj puteve duljine n iz vrha v_i u vrh v_j .

Dokaz. Na (i,j) -om mjestu matrice A piše broj različitih puteva duljine 1 iz vrha v_i u vrh v_j .

$$(A^2)_{ij} = (A \times A)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}A_{kj} \quad (1.2)$$

- za $k=1$: prvi član gornje sume je jednak $A_{i1}A_{1j}$. To je broj puteva duljine 1 od vrha v_i do vrha v_1 , pomnoženo brojem puteva duljine 1 od vrha v_1 do vrha v_j . Dakle, taj umnožak je jednak broju puteva duljine 2 koji prolaze preko vrha v_1 .
- za $k=2$: drugi član gornje sume je jednak $A_{i2}A_{2j}$. To je broj puteva duljine 1 od vrha v_i do vrha v_2 , pomnoženo brojem puteva duljine 1 od vrha v_2 do vrha v_j . Dakle, taj umnožak je jednak broju puteva duljine 2 koji prolaze preko vrha v_2 .
- \vdots
- za $k=n$: zadnji član gornje sume je jednak $A_{in}A_{nj}$. To je broj puteva duljine 1 od vrha v_i do vrha v_n , pomnoženo brojem puteva duljine 1 od vrha v_n do vrha v_j . Dakle, taj umnožak je jednak broju puteva duljine 2 koji prolaze preko vrha v_n .

Ako zbrojimo ove vrijednosti za svaki $k = 1, 2, \dots, n$, dobivamo broj različitih puteva duljine 2 od vrha v_i do vrha v_j . Trivijalno se vidi da smo na taj način prebrojali sve puteve duljine 2 iz vrha v_i u vrh v_j te neki put nismo brojali dvaput zbog toga što za svaki $k = 1, 2, \dots, n$, vrh preko kojeg prelazimo u sredini puta je drukčiji.

Zaključujemo da sa na (i, j) -om mjestu kvadrirane matrice susjedstva nalazi broj svih puteva duljine 2 iz vrha v_i u vrh v_j . Ovakvo razmišljanje primijenimo za svaki $n \in \mathbb{N}$.

□

Iz gornje Leme 1.1.5 slijedi da je produkt matrice A^n i A^m u kojima piše broj svih puteva duljine n , odnosno m , $n, m \in \mathbb{N}$ jednak matrici u kojoj piše broj svih puteva duljine $n + m$, tj. jednak je matrici A^{n+m} .

Poglavlje 2

2-grafovi

2.1 2-grafovi

Definicija 2.1.1. Kategorija je matematički objekt koji se sastoji od 2 klase, C^0 (objekti) i C^1 (morfizmi), sa sljedećim svojstvima:

- postoje preslikavanja $r : C^1 \rightarrow C^0$ i $s : C^1 \rightarrow C^0$ koje zovemo izvor i rang
- postoji preslikavanje $\circ : \{(f, g) \in C^1 \times C^1; s(f) = r(g)\} \rightarrow C^1$ koju zovemo kompozicija sa svojstvom da je $r(g \circ f) = r(g)$, $s(g \circ f) = s(f)$
- postoji preslikavanje $i : C^0 \rightarrow C^1$ koju zovemo identiteta (petlja) takva da $\forall c \in C^0$ vrijedi:

$$r(i(c)) = c = s(i(c)) \quad (2.1)$$

Definicija 2.1.2. Neka su C i D kategorije. Funktor F je preslikavanje $F : C \rightarrow D$ kojeg čine dva preslikavanja $F^0 : C^0 \rightarrow D^0$ i $F^1 : C^1 \rightarrow D^1$ za koje vrijedi:

- $\forall c \in C^0, F^1 \circ i(c) = i(F^0(c))$
- ako je $(f : c \rightarrow c') \in C^1$, onda je $(F^1(f) : F^0(c) \rightarrow F^0(c')) \in D^1$
- $F^1(f \circ g) = F^1(f) \circ F^1(g)$

Definicija 2.1.3. 2 – graf (Λ, d) sastoji se od prebrojive male kategorije Λ (sa funkcijama r i s) i funktora $d : \Lambda \rightarrow \mathbb{N}^2$ koji zadovoljava sljedeće svojstvo:

$$\forall \lambda \in \Lambda, \forall m, n \in \mathbb{N}^2 \quad \text{takvi da je} \quad d(\lambda) = m + n, \quad (2.2)$$

postoje jedinstveni $\mu, \nu \in \Lambda$ takvi da je

$$\lambda = \mu\nu (= \mu \circ \nu) \quad \text{i} \quad d(\mu) = m, d(\nu) = n. \quad (2.3)$$

Napomena 2.1.4. Pojam male prebrojive kategorije iz prethodne definicije označava da je klasa objekata C^0 prebrojiv skup.

Slijedeća lema govori da 2-graf možemo konstruirati iz nekih 1-grafova.

Lema 2.1.5. Neka su A i B matrice susjedstva definirane nad istim skupom vrhova. Ako matrice A i B komutiraju, tada postoji bijekcija Θ sa skupa $A^1 * B^1 = \{(a, b) \in A^1 \times B^1, s(a) = r(b)\}$ u skup $B^1 * A^1 = \{(b, a) \in B^1 \times A^1, s(b) = r(a)\}$.

Dokaz. Matrice A i B su definirane nad istim skupom vrhova $A^0 = B^0 = V$. Budući da radimo nad konačnim skupovima, možemo pretpostaviti da imamo n vrhova i da je $V = \{1, 2, \dots, n\}$, tj. $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{Z}^+)$

$$A_{n,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad B_{n,n} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

Neka je Γ_A graf pridružen matrici A i nekaj je Γ_B graf pridružen matrici B . Gledamo što je to $(AB)_{ij}$:

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \quad (2.4)$$

Uočimo naprimjer da je $a_{i1}b_{1j} = 1$ ako i samo ako postoji brid iz vrha i u vrh 1 u grafu Γ_A i postoji brid iz vrha 1 u vrh j u grafu Γ_B ako i samo ako $(\vec{1}_j, \vec{1}_1) \in B^1 * A^1$.

Po pretpostavci A i B komutiraju, tj. $AB = BA$, odnosno $(AB)_{ij} = (BA)_{ij}, \forall i, j = 1, 2, \dots, n$. Dakle, na mjestu ij u matrici AB i BA nalazi se isti broj, neka je to $k \in \mathbb{Z}^+$. To znači da imamo točno k jedinica u rastavu $(AB)_{ij}$ (to ne znači da imamo točno k članova sume (2.4) jer imamo mogućnost višestrukih bridova i petlji).

Analogno zaključujemo i u slučaju $(BA)_{ij}$:

$$(BA)_{ij} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{in}a_{nj} \quad (2.5)$$

Uočimo naprimjer da je $b_{i2}a_{2j} = 1$ ako i samo ako postoji brid iz vrha i u vrh 2 u grafu Γ_B i postoji brid iz vrha 2 u vrh j u grafu Γ_A ako i samo ako $(\vec{2}_j, \vec{2}_2) \in A^1 * B^1$.

Jer je $(AB)_{ij} = (BA)_{ij}$ slijedi da je $(BA)_{ij} = k$, tj. imamo točno k jedinica u rastavu, tj. točno k različitih puteva duljine 1.

Sada uzmemo tih k članova sume iz $(BA)_{ij}$ i preslikamo ih u k članova sume iz $(AB)_{ij}$. Budući da je k konačan prirodan broj (ili 0) sigurno imamo bijekciju iz prvog skupa u drugi.

Uočimo da je takvo preslikavanje dobro, tj. podudara se sa definicijom skupova $A^1 * B^1$ i $B^1 * A^1$, odnosno ako $(\alpha, \beta) \mapsto (\beta', \alpha')$ vrijedi $r(\alpha) = r(\beta')$ i $s(\beta) = s(\alpha')$. Npr. ako je $b_{i2}a_{2j} = 1$ u relaciji (2.5) i $a_{i1}b_{1j} = 1$ u relaciji (2.4), onda možemo $(\vec{2}j, i\vec{2}) \in A^1 * B^1$ preslikati u $(\vec{1}j, i\vec{1}) \in B^1 * A^1$ i $r(\vec{2}j) = r(\vec{1}j) = j$ i $s(i\vec{2}) = s(i\vec{1}) = i$.

To napravimo $\forall i, j$ u matrici $AB = BA$ i na taj način dobijemo bijekciju sa skupa $A^1 * B^1$ u skup $B^1 * A^1$

□

Napomena 2.1.6. *Obrat Leme 2.1.5. očito vrijedi ako pretpostavimo još jedan dodatan uvjet. Neka postoji bijekcija $\Theta : A^1 * B^1 = \{(a, b) \in A^1 \times B^1, s(a) = r(b)\} \rightarrow B^1 * A^1 = \{(b, a) \in B^1 \times A^1, s(b) = r(a)\}$ i pretpostavimo da vrijedi sljedeće: ako $(\alpha, \beta) \mapsto (\beta', \alpha')$, onda vrijedi $r(\alpha) = r(\beta')$ i $s(\beta) = s(\alpha')$. Vidimo da Θ preslikava put iz $A^1 \times B^1$ u put s istim početkom i krajem iz $B^1 \times A^1$. Jer postoji bijekcija \implies broj puteva mora biti jednak $\implies (AB)_{ij} = (BA)_{ij}, \forall i, j \implies AB = BA$, tj. matrice susjedstva komutiraju.*

Ako je Θ takva bijekcija, možemo formirati 2-graf $A *_\Theta B$ gdje je $(A *_\Theta B)^0 = A^0 = B^0 = V$ i možemo poistovjetiti $(A *_\Theta B)^{e_1}$ sa A^1 te $(A *_\Theta B)^{e_2}$ sa B^1 . Dakle pomoću dva 1-grafa i bijekcije Θ možemo formirati 2-graf $A *_\Theta B$.

Puteve $(A *_\Theta B) \setminus (A *_\Theta B)^0$ možemo shvaćati kao neprazne nizove $\{\lambda_i, i = 1, \dots, n\} \subset A_1 \sqcup B_1$, gdje je $s(\lambda_i) = r(\lambda_{i+1}), \forall i = 1, 2, \dots, n$. Takve puteve pišemo kao $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n = \lambda_1 \circ \lambda_2 \circ \lambda_3 \circ \dots \circ \lambda_n$.

Stupanj od $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n$ jednak je (m_1, m_2) , gdje je m_1 broj λ_i -eva iz A_1 a m_2 broj λ_i -eva iz B_1 .

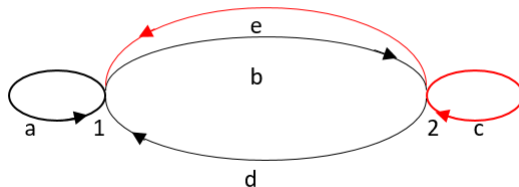
Uloga bijekcije Θ je osigurati da $A *_\Theta B$ zadovoljava pravilo faktorizacije: za $a \in (A *_\Theta B)^{e_1}$ i $b \in (A *_\Theta B)^{e_2}$, te $s(a) = r(b)$, vrijedi $ab = b'a' \in (A *_\Theta B)^{(1,1)}$, ako je $\Theta(a, b) = (b', a')$.

Primjer 2.1.7. *U ovom primjeru vidjeti ćemo da je komutacija matrica susjedstva iz Leme 2.1.5 nužna za egzistenciju bijekcije Θ . Iz Slike 2.1. vidimo:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vidimo da je $AB \neq BA$, a jer je bijekcija Θ definirana po elementima matrice AB , odnosno BA , očito je da bijekcija $\Theta : A^1 * B^1 = \{(a, b) \in A^1 \times B^1, s(a) = r(b)\} \rightarrow B^1 * A^1 = \{(b, a) \in B^1 \times A^1, s(b) = r(a)\}$ ne postoji.



Slika 2.1: Skica 2-grafa

Lema 2.1.8. *Ako znamo rastav puteva iz $(A *_{\Theta} B)^{(1,1)}$, onda znamo rastav svih puteva $(A *_{\Theta} B)^{(m,n)}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. $(A *_{\Theta} B)^{(m,n)} \implies$ imamo m puteva duljine 1 iz A_1 i n puteva duljine 1 iz B_1 .
Neka su $i_1, i_2, \dots, i_m \in A_1$ te $j_1, j_2, \dots, j_n \in B_1$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} d(i_1) = d(i_2) = \dots = d(i_m) &= (1, 0) \\ d(j_1) = d(j_2) = \dots = d(j_n) &= (0, 1) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Na primjer:

$$i_1 i_2 j_1 i_3 j_2 i_4 i_5 i_6 j_7 j_8 i_9 \quad (2.7)$$

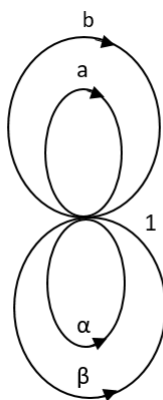
Upravo bijekcija Θ osigurava da svaki put iz skupa $(A *_{\Theta} B)^{(1,1)}$ zadovoljava pravilo faktorizacije, tj. da za neki put ij takav da je $r(j) = s(i)$ koji je potput puta (2.7) postoji jedinstveni put $i' \in (A *_{\Theta} B)^{e_1}$ i $j' \in (A *_{\Theta} B)^{e_2}$ takvi da je $ij = j'i' \in (A *_{\Theta} B)^{(1,1)}$. Grupirajući potputeve iz (2.7) i primjenjivajući definiranu bijekciju Θ dolazimo do jedinstvenog rastava puta (2.7).

□

Lemu 2.1.8 najbolje ćemo razumjeti na sljedećem primjeru.

Primjer 2.1.9. *Na Slici 2.2. dana je skica 2-grafa. Vrijedi:*

$$\begin{aligned} V &= A^0 = B^0 = \{1\} \\ A &= [2], B = [2] \\ AB &= BA = [4] \\ (A^1 * B^1) &= \{(a, \alpha), (a, \beta), (b, \alpha), (b, \beta)\} \\ (B^1 * A^1) &= \{(\alpha, a), (\alpha, b), (\beta, a), (\beta, b)\} \end{aligned} \quad (2.8)$$



Slika 2.2: Skica 2-grafa

Ukupno ima $4! = 24$ preslikavanja $\Theta : (A^1 * B^1) \rightarrow (B^1 * A^1)$, ali ne razlikujemo bridove α i β te a i b . Isto tako ne razlikujemo “gornje bridove” a, b od “donjih bridova” α, β . Zbog toga dijelimo 24 sa $2 \cdot 2 \cdot 2$ i dobivamo 3 fundamentalno različite bijekcije. Moguće bijekcije, odnosno indetitete su:

$$\begin{aligned}
 a\alpha &= \alpha a \\
 a\beta &= \alpha b \\
 b\alpha &= \beta a \\
 b\beta &= \beta b
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
 a\alpha &= \alpha a \\
 a\beta &= \beta a \\
 b\alpha &= \alpha b \\
 b\beta &= \beta b
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
 a\alpha &= \beta b \\
 a\beta &= \alpha b \\
 b\alpha &= \beta a \\
 b\beta &= \alpha a
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

Uzmimo npr. da je bijekcija zadana sa (2.9) i uzmimo neki put, npr. $\lambda = ab\beta\alpha \in (A *_\Theta B)^{(2,2)}$. Znamo rastav svih puteva iz skupa $(A *_\Theta B)^{(1,1)}$ pa prema Lemi 2.1.8 znamo rastav zadanog puta. $d(\lambda) = (2, 2) = (0, 2) + (2, 0)$ te znamo da postoje jedinstveni putevi μ i ν takvi da vrijedi $\lambda = \mu \circ \nu$ i da je $d(\mu) = (0, 2)$, $d(\nu) = (2, 0)$.

$$\begin{aligned} a | b\beta | \alpha, b\beta = \beta b &\implies a\beta b\alpha \\ | a\beta | b\alpha, a\beta = \alpha b &\implies \alpha b b\alpha \\ \alpha b | b\alpha, b\alpha = \beta a &\implies \alpha b\beta a \\ \alpha | b\beta | a, b\beta = \beta b &\implies \alpha\beta b a \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\implies \mu = \alpha\beta, \nu = ba, d(\mu) = (0, 2), d(\nu) = (2, 0).$$

Poglavlje 3

C^* -algebre grafova

3.1 Osnovni pojmovi

Definicija 3.1.1. *Neka je V Abelova grupa u odnosu na zbrajanje, a F polje. Na skupu $F \times V$ definirano je množenje vektora skalarom, tj. preslikavanje $F \times V \rightarrow V$, koje svakom skalaru $\alpha \in F$ i svakom vektoru $x \in V$ pridružuje vektor $\alpha x \in V$, tako da vrijede sljedeći aksiomi:*

- $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \forall \alpha, \beta \in F, \forall x \in V$
- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \forall \alpha \in F, \forall x, y \in V$
- $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \forall \alpha, \beta \in F, \forall x \in V$
- $1x = x, \forall x \in V$.

Ovako definirano preslikavanje zove se množenje vektora skalarom, dok se V naziva vektorski prostor nad poljem F .

Definicija 3.1.2. *Neka je V vektorski prostor nad poljem F . Norma na V je preslikavanje $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$, za koje vrijedi:*

- $\|x\| \geq 0, \forall x \in V$,
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \forall \lambda \in F, \forall x \in V$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in V$.

Normiran prostor je uređeni par $(V, \|\cdot\|)$.

Preslikavanje koje zadovoljava svojstva Definicije 3.1.2, osim drugog, zovemo *seminorma*.

Definicija 3.1.3. *Vektorski prostor A nad poljem F , zajedno sa operacijama množenja $(x,y) \mapsto xy$ zove se algebra nad F , ako preslikavanje $(x,y) \mapsto xy$ s $A \times A$ u A ima svojstva:*

- $(xy)z = x(yz)$,
- $x(y + z) = xy + xz$; $(x + y)z = xz + yz$,
- $(\alpha x)y = x(\alpha y)$,

za sve $\alpha \in F$ i sve $x, y, z \in A$.

Definicija 3.1.4. *Funkcija $x \mapsto \|x\|$ s algebre A u polje realnih brojeva je norma na algebri A ako je $x \mapsto \|x\|$ norma na vektorskom prostoru A , i vrijedi:*

- $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \forall x, y \in A$,
- $\|1\| = 1$, za $1 \in A$ jedinični element.

Uređeni par $(A, \|\cdot\|)$ zovemo normirana algebra.

Definicija 3.1.5. *Normiran prostor X je potpun ili Banachov ako je svaki Cauchyjev niz u X konvergentan.*

Definicija 3.1.6. *Za normiranu algebru $(A, \|\cdot\|)$ kažemo da je Banachova algebra ako je A Banachov prostor.*

Definicija 3.1.7. *Operacija $*$: $A \rightarrow A$, dana sa $x \mapsto x^*$, zove se involucija ako za svaki $x, y \in A$ i svaki $\alpha \in \mathbb{C}$ vrijedi:*

- $(x^*)^* = x$,
- $(xy)^* = y^*x^*$,
- $(\alpha x)^* = \bar{\alpha}x^*$.

Definicija 3.1.8. *Operacija involucije na A je izometrička ako vrijedi:*

$$\|x^*\| = \|x\|, \forall x \in A. \quad (3.1)$$

Definicija 3.1.9. *Neka je A Banachova algebra s izometričkom involucijom. Kažemo da je A C^* - algebra ako za svaki $x \in A$ vrijedi:*

$$\|xx^*\| = \|x\|^2. \quad (3.2)$$

Napomena 3.1.10. *Identitet (3.2) ćemo zvati C^* – svojstvo norme.*

Definicija 3.1.11. *Ograničenu linearnu funkciju $\varphi : A \rightarrow B$, gdje su A i B C^* -algebre, zovemo $*$ -homomorfizam ako za svaki $x, y \in A$ vrijedi:*

- $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$,
- $\varphi(x^*) = \varphi(x)^*$.

Svaki $$ -homomorfizam φ između C^* -algebri je norme ≤ 1 , što je posljedica C^* -svojstva norme.*

Definicija 3.1.12. *Preslikavanje f iz jedne strukture u drugu naziva se izomorfizmom ako vrijedi:*

- *preslikavanje f je bijektivno*
- *preslikavanje f je homomorfizam*
- *inverzna funkcija f^{-1} homomorfizam*

Ako postoji izomorfizam između dvije strukture, tada se za njih kaže da su izomorfne.

3.2 Primjeri elementarnih C^* -algebri

Elementarnim C^* -algebrama obično se nazivaju algebre svih ograničenih operatora na nekom Hilbertovom prostoru H , algebra kompaktnih operatora, te algebra neprekidnih funkcija s nekog kompaktnog Hausdorffovog prostora X u \mathbb{C} . Stoga, neki od najjednostavnijih primjera C^* -algebri su skup kompleksnih brojeva \mathbb{C} , prostor svih neprekidnih kompleksnih funkcija definiranih na segmentu $[0,1]$, skup svih $n \times n$ matrica nad \mathbb{C} ($M_n(\mathbb{C})$), i slično.

Lema 3.2.1. *Neka je $A = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ neprekidna}\} = C[0, 1]$, tj. prostor svih neprekidnih kompleksnih funkcija sa segmenta $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ u \mathbb{C} . Za $f, g \in A$ i $\alpha \in \mathbb{C}$ definiramo zbrajanje, množenje, involuciju i normu:*

- $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$
- $(f \cdot g)(t) = f(t) \cdot g(t)$
- $(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$
- $(f)^*(t) = \overline{f(t)}$
- $\|(f)(t)\| = \sup_{t \in X} |f(t)|$.

Tada je A C^* -algebra.

Definicija 3.2.2. Neka je $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$. Standardna norma u \mathbb{C}^n definira se kao:

$$|\xi| = \left(\sum \xi_i \bar{\xi}_i \right)^{1/2}. \quad (3.3)$$

Lema 3.2.3. $M_n(\mathbb{C})$ je potpun prostor.

Definicija 3.2.4. Neka je H Hilbertov prostor sa skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i neka je $M : H \rightarrow H$ ograničen linearni operator. Tada postoji jedinstveni linearni operator $M^* : H \rightarrow H$ takav da vrijedi:

$$\langle Mx, y \rangle = \langle x, M^*y \rangle, \forall x, y \in H. \quad (3.4)$$

Operator M^* zovemo adjungirani operator operatora M .

Za svaki ograničeni operator M definiramo

$$\|M\| = \sup\{|Mx| : x \in H, |x| = 1\}. \quad (3.5)$$

Lema 3.2.5. Neka su H , M i M^* kao u Definiciji 3.2.4. Tada vrijedi sljedeće:

- $\|M\| = \|M^*\|$
- $\|M\|^2 = \|M^*M\|$

Lema 3.2.6. Neka je $A = M_n(\mathbb{C})$, tj. skup svih $n \times n$ matrica nad \mathbb{C} . Na A se definiraju uobičajne operacije zbrajanja i množenja matrica te množenje matrice skalarom. Za $X \in A$ i $\xi \in \mathbb{C}^n$ definiramo operaciju involucije i normu sa:

- $X^* = [\bar{x}_{j,i}]$ za $X = [x_{i,j}]$,
- $\|M\| = \sup_{\{|\xi|=1\}} |X\xi|$.

Tada je A C^* -algebra.

3.3 C^* -algebre grafova

Definicija 3.3.1. Neka je A proizvoljna C^* -algebra. Tada za element $p \in A$ kažemo da je ortogonalni projektor ako je $p^2 = p = p^*$.

Definicija 3.3.2. Neka je A proizvoljna C^* -algebra. Tada za element $s \in A$ kažemo da je parcijalna izometrija ako su ss^* i s^*s ortogonalni projektori.

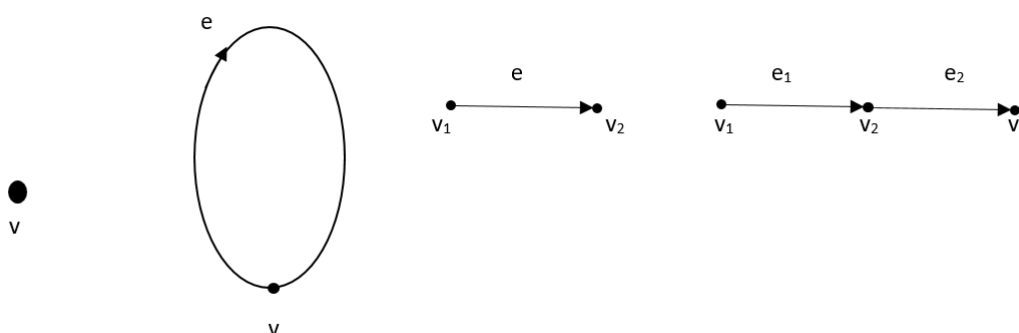
Primjer 3.3.3. Neka je $e_{ij} \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ matrica koja na (i, j) -tom mjestu ima jedinicu, a svi ostali elementi su 0, za $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Uočimo da je e_{ij} parcijalna izometrija za svaki $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$e_{ij}e_{ij}^* = e_{ij}e_{ji} = e_{ii}, \quad (3.6)$$

$$e_{ij}^*e_{ij} = e_{ji}e_{ij} = e_{jj}, \quad (3.7)$$

$$e_{ii} = e_{ii}^2 = e_{ii}^*, \quad (3.8)$$

tj. e_{ii} je ortogonalni projektor.



Slika 3.1: Prikaz grafova

Definicija 3.3.4. Neka je $G=(V,E,s,r)$ usmjeren graf, neka je $S = \{S_e, e \in E\}$ skup parcijalnih izometrija te neka je $P = \{P_v, v \in V\}$ skup ortogonalnih projektor. C^* -algebra $C^*(G)$ je generirana Cuntz-Kriegerovom familijom $\{S, P\}$ ako ona zadovoljava sljedeća svojstva:

- $S_e^*S_e = P_{r(e)}, \forall e \in E$
- $P_v = \sum_{\{e:s(e)=v\}} S_e S_e^*, \forall v \in s(E).$

Primjer 3.3.5. Uzmimo prvi graf sa Slike 3.1. i označimo ga sa G_1 . Graf G_1 sadrži samo jedan vrh pa imamo samo jedan generator

$$P_v = P_v^2 = P_v^* \quad (3.9)$$

pa je u ovom slučaju $C^*(G) = \mathbb{C}$.

Uzmimo drugi graf sa Slike 3.1. i označimo ga sa G_2 . Generatori su sljedeći:

$$P_v = P_v^2 = P_v^* \quad (3.10)$$

$$S_e \quad (3.11)$$

Relacija:

$$S_e^* S_e = P_v = S_e S_e^* \quad (3.12)$$

pa vidimo da je $C^*(G) = C(S^1) = \{z \in \mathbb{C}, \|z\| = 1\}$.

Uzmimo treći graf sa Slike 3.1. i označimo ga sa G_3 . Generatori su sljedeći:

$$P_{v_1} = P_{v_1}^2 = P_{v_1}^* \quad (3.13)$$

$$P_{v_2} = P_{v_2}^2 = P_{v_2}^* \quad (3.14)$$

$$S_e \quad (3.15)$$

Relacija:

$$S_e^* S_e = P_{v_2} \quad (3.16)$$

Neka je e_{ij} 2×2 matrica koja na (i, j) -tom mjestu ima jedinicu, a svi ostali elementi su 0, za $i, j \in \{1, 2\}$. Neka vrijedi sljedeće:

$$P_{v_1} \mapsto e_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$P_{v_2} \mapsto e_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$S_e \mapsto e_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Vidimo da ovakvo pridruživanje zadovoljava gornju relaciju pa je $C^*(G_3)$ generirana sa $\{e_{12}\}$, tj. $C^*(G_3)$ algebra je izomorfna sa $M_2(\mathbb{C})$.

Uzmimo četvrti graf sa Slike 3.1. i označimo ga sa G_4 . Generatori su sljedeći:

$$P_{v_1} = P_{v_1}^2 = P_{v_1}^* \quad (3.20)$$

$$P_{v_2} = P_{v_2}^2 = P_{v_2}^* \quad (3.21)$$

$$P_{v_3} = P_{v_3}^2 = P_{v_3}^* \quad (3.22)$$

$$S_{e_1} \quad (3.23)$$

$$S_{e_2} \quad (3.24)$$

Relacije:

$$S_{e_1}^* S_{e_1} = P_{v_2} = S_{e_2} S_{e_2}^* \quad (3.25)$$

$$S_{e_2}^* S_{e_2} = P_{v_3} \quad (3.26)$$

Neka je e_{ij} 3×3 matrica koja na (i, j) -tom mjestu ima jedinicu, a svi ostali elementi su 0, za $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Neka vrijedi sljedeće:

$$P_{v_1} \mapsto e_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$P_{v_2} \mapsto e_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$P_{v_3} \mapsto e_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$S_{e_1} \mapsto e_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$S_{e_2} \mapsto e_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Vidimo da ovakvo pridruživanje zadovoljava gornje relacije pa je $C^*(G_4)$ generirana sa $\{e_{12}, e_{23}\}$, tj. $C^*(G_4)$ algebra je izomorfna sa $M_3(\mathbb{C})$.

Općenito, može se pokazati da je $C^*(S, P) = \overline{\text{span}}\{S_\mu S_\nu^*, \mu, \nu \in E^*, s(\mu) = s(\nu)\}$, pri čemu je E^* skup svih puteva duljine $1, 2, \dots, n$, za $n \in \mathbb{N}$, te za svaki $\mu \in E^n$, $\mu = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n$, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in E^1 = E$ i $S_\mu = S_{\mu_1} S_{\mu_2} \dots S_{\mu_n}$.

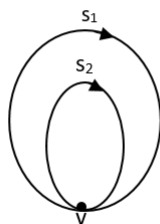
Definicija 3.3.6. Neka je Λ 2-graf. Tada se $C^*(\Lambda)$ definira kao univerzalna C^* -algebra generirana familijom $\{t_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ parcijalnih izometrija koje zadovoljavaju sljedeća svojstva:

- $\{t_v, v \in \Lambda^0 = V\}$ je skup ortogonalnih projekcija,
- $t_\lambda t_\mu = t_{\lambda\mu}$, za sve $\lambda, \mu \in \Lambda$ takve da ja $s(\lambda) = r(\mu)$,
- $t_\lambda^* t_\lambda = t_{s(\lambda)}$, $\forall \lambda \in \Lambda$,
- $t_v = \sum_{\lambda \in \Lambda^n(v)} t_\lambda t_\lambda^*$, $\forall v \in \Lambda^0 = V$, $\forall n \in \mathbb{N}^2$, pri čemu je $\Lambda^n(v) = \{\lambda \in \Lambda^n : r(\lambda) = v\}$.

Familiju $\{t_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ parcijalnih izometrija koje zadovoljavaju gore navedena svojstva nazivamo Cuntz-Kriegerova Λ -familija. Cuntz-Kriegerova algebra $C^*(\Lambda)$ je C^* algebra generirana Cuntz-Kriegerovom Λ -familijom $\{s_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ koja je univerzalna u smislu da za svaku

Cuntz-Kriegerovu Λ -familiju $\{t_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ postoji jedinstveni homomorfizam Π definiran na $C^*(\Lambda)$ koji zadovoljava

$$\Pi(s_\lambda) = t_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda. \quad (3.32)$$



Slika 3.2: Graf G , $C^*(G) = \mathcal{O}_2$

Neka je L univerzalne C^* -algebra generirana sa n generatora S_1, S_2, \dots, S_n koji zadovoljavaju sljedeće relacije:

$$S_1 S_1^* + S_2 S_2^* + \dots + S_n S_n^* = 1, \quad (3.33)$$

$$S_i^* S_1 = 1, \forall i. \quad (3.34)$$

Univerzalnu C^* -algebru koja zadovoljava relacije (3.33) i (3.34) zovemo *Cuntz algebra* i označavamo ju sa \mathcal{O}_n ($n \geq 2$). Kao i za $C^*(S, P)$, pokazuje se da je

$$\mathcal{O}_n = \overline{\text{span}}\{s_\mu s_\nu^*, \mu, \nu \text{ putevi}\} \quad (3.35)$$

Primjer 3.3.7. Za graf G prikazan na Slici 3.2 vrijedi:

$$s_1^* s_1 = 1 = s_2^* s_2 \quad (3.36)$$

$$s_1 s_1^* + s_2 s_2^* = 1 \quad (3.37)$$

Primijetimo da možemo prepoznati neke podalgebre od \mathcal{O}_2 . Npr, neka je $F = C^*\{s_\mu s_\nu^*, |\mu| = |\nu| = 1\}$. Sa Slike 3.2 vidimo da su s_1 i s_2 putevi duljine 1 pa su $s_1 s_1^*, s_1 s_2^*, s_2 s_2^*, s_2 s_1^*$ elementi od F .

Neka vrijedi sljedeće:

$$s_1 s_1^* = e_{11} \quad (3.38)$$

$$s_1 s_2^* = e_{12} \quad (3.39)$$

$$s_2 s_2^* = e_{22} \quad (3.40)$$

$$s_2 s_1^* = e_{21}, \quad (3.41)$$

Tada je $F \cong M_2(\mathbb{C})$.

Lagano se provjeri da je F je podalgebra od O_2 koristeći relacije (3.36) i (3.37), npr. uzmimo

$$s_1 s_2^* s_2 s_1^* = (s_2^* s_2 = 1) = s_1 s_1^*. \quad (3.42)$$

Napomena 3.3.8. Isto razmišljanje možemo primijeniti i na 2-grafove. Označimo skicu 2-grafa sa Slike 2.2 sa G . Tada je $C^*(G) = O_{2,2}$, pri čemu je $O_{2,2}^{e_1} = \{a, b\}$, $O_{2,2}^{e_2} = \{\alpha, \beta\}$. Iz Definicije 3.3.6 i Primjera 2.1.9 slijedi da dobvamo 3 različite C^* -algebre.

Bibliografija

- [1] A. Kumjian, D. Pask, *Higher rank graph C^* -algebras*, New York Journal of Mathematics, **6** (2000) 1-20.
- [2] D. G. Evans, *On Higher Rank Graph C^* -Algebras*, Ph. D. Thesis, School of Mathematics, Cardiff University, 2002.
- [3] M. Đuračić, *Induktivni sistemi C^* -algebri*, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, 2011.

Sažetak

U ovom diplomskom radu uveli smo pojam 2-grafa i konstruirali smo 2-graf pomoću određenih usmjerenih grafova te opisali osnovne pojmove i primjere vezane uz tu konstrukciju. Nadalje, definirali smo i naveli neke od jednostavnih primjera C^* -algebri. Zatim smo uveli pojam C^* -algebre grafova te vidjeli vezu između te algebre i 2-grafa.

Summary

In this thesis we have introduced the term 2-graph, we have constructed a 2-graph by certain directed graphs and described the basic terms and examples regarding the 2-graph construction. Furthermore, we have defined and induced some simple examples of C^* - algebra. Afterwards, we introduced the term C^* -algebra of a graph and noticed a connection between that algebra and 2-graph.

Životopis

Moje ime je Antonija Perlić. Rođena sam 18.11.1991. u Zagrebu. Živim u Zagrebu, gdje sam stekla osnovno i srednješkolsko obrazovanje. Završila sam opću gimnaziju sa odličnim uspjehom, te se nakon toga, 2010. godine, upisala na sveučilišni prediplomski studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Tamo sam 2014. godine, nakon završenog prediplomskog studija, na kojem sam stekla titulu prvostupnice matematike, upisala diplomski studij Matematičke statistike.