Igra sparivanja na konačnim podgrafovima pravilnih rešetki

Pijević, Marija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marija Pijević

IGRA SPARIVANJA NA KONAČNIM PODGRAFOVIMA PRAVILNIH REŠETKI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Tomislav Došlić

Zagreb, rujan 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojim roditeljima, za bezuvjetnu potporu tijekom moga školovanja.

Sadržaj

Uvod

Tema ovog diplomskog rada je *Igra sparivanja na konačnim podgrafovima pravilnih rešetki*. Cilj nam je pokazati koji igrač ima pobjedničku strategiju u nekim od igara, odnosno pobjeđuje li uvijek prvi igrač koji je na potezu ili drugi.

U prvom poglavlju objasnit ćemo pojam koji je usko vezan uz temu ovog rada. Riječ je o pojmu kombinatorne igre. Nakon toga slijedi uvid u strukturu kombinatorne igre te ćemo vidjeti da pobjednička strategija uvijek pripada točno jednom igraču - ili onome koji je prvi na potezu ili onome koji je drugi na potezu. Navest ćemo i sve moguće ishode kombinatornih igara te teorem koji kaže da svaka igra pripada točno jednoj od navedenih klasa ishoda. Time će biti objašnjeni svi važniji pojmovi vezani uz teoriju kombinatornih igara.

Drugo poglavlje nam daje uvid u osnovne pojmove iz teorije grafova. Nužno je objasniti što je graf te pojam sparivanja da bismo čitatelju rada mogli pobliže objasniti pravila igre. Nakon toga navodimo primjer igre sparivanja na putevima različitih duljina te dolazimo do zaključka da je pobjednik uvijek onaj igrač koji razbije igru na dva simetrična dijela, ukoliko je to moguće. To nas dovodi do pojma *krađa strategije (eng. strategy stealing)* koji će također biti objašnjen. Također ćemo primijetiti da u nekim igrama na putevima pobjednik može biti i *drugi* igrač (kao i *prvi*), ali samo ako *prvi* igra nepromišljeno. Zbog toga je uvedena pretpostavka o optimalnosti povlačenja poteza.

U trećem poglavlju prvo definiramo što su to šesterokutne životinje. Oni se još nazivaju benzenoidi ili heksagonalne životinje. Tražit ćemo pobjednika na takvim podgrafovima. Postoje dvije skupine simetrija: C_i i D_i, $i = 1, 2, 3, 6$. Oblici u skupini C_i imaju samo rotaciju dok oblici u skupini D_i, uz rotaciju, imaju i refleksiju. Nakon toga navodimo neke oblike tih simetrija, a varijacije njihovih oblika su navedene u zadnjem poglavlju u sklopu analize svake simetrije koju ćemo obraditi.

U četvrtom poglavlju prelazimo na igru sparivanja na heksagonalnim životinjama. Prvo smo odigrali igru sparivanja na lančanim benzenoidima s parnim, odnosno neparnim brojem šesterokuta. Prilikom igranja, obratit ćemo pozornost na to gdje se nalazi centar simetrije. Bridove nekih oblika ćemo označavati brojevima radi lakšeg pronalaženja pobjedničke strategije. Nakon toga gledamo simetrije najvišeg reda jer na njima odmah primjećujemo krađu strategije. Zatim su na redu simetrije u kojima *prvi* igrač svojim prvim potezom razbija igru na dva simetrična dijela i pobjeđuje. Kod simetrije D_1 imamo više varijacija oblika i pronaći ćemo tko je pobjednik na svakoj od njih. Simetrija C_1 nam je najmanje zanimljiva jer nema refleksiju, a isti oblik se dobije rotacijom za 360°. Odigrat ćemo igru na jednom obliku i vidjeti da je na njoj pobjednik *prvi* igrač. Na kraju nam preostaje simetrija D_3. Odigrat ćemo dvije igre i pronaći pobjednika. Simetrija C_3 je dosta komplicirana za analizu i samo ćemo prikazati dva grafa koja njoj pripadaju. Nakon svake odigrane igre, navest ćemo što smo zaključili.

Poglavlje 1

O teoriji kombinatornih igara

1.1 Definicija kombinatorne igre

Teorija kombinatornih igara (*eng. combinatorial game theory*) proučava kombinatorne igre. Skraćeno se označava *CGT* i dio je opće teorije igara. *CGT* nam nalaže da igra mora zadovoljavati određene uvjete da bi bila kombinatorna igra.

Na početku, prikladno je uvesti definiciju kombinatorne igre. Zapravo ćemo navesti pravila koja igra mora zadovoljavati da bi bila kombinatorna. Ta pravila su sljedeća:

1. Igru igraju dva igrača. Njih obično zovemo *lijevi* i *desni*.

2. Nema faktora sreće jer u protivnom ishod ne bi ovisio o sposobnostima igrača. Stoga je zabranjeno korištenje karata, bacanje kockica i sl.

3. Svi podatci o igri moraju biti dostupni obojici igrača, tj. svaki igrač ima potpunu informaciju.

4. Igrači naizmjenično povlače poteze uz dogovor tko povlači prvi potez.

5. Igra završava nakon konačnog broja poteza. Beskonačne igre nam nisu zanimljive jer nikada ne bismo saznali tko je pobjednik.

6. Jedan od igrača će biti apsolutni pobjednik. Ne postoji mogućnost neriješenog rezultata (izjednačenje).

7. Pobjednik je onaj tko posljednji napravi potez. Gubitnik je onaj igrač koji ne može napraviti potez kada je na potezu. To je konvencija prirodne igre koju zovemo *konvencija normalne igre*. Postoji i *konvencija bijedne igre* u kojoj gubi onaj igrač koji posljednji povlači potez. Time se nećemo baviti u ovom radu.

1.2 Struktura kombinatorne igre

Sada ćemo detaljnije objasniti strukturu kombinatornih igara.

Svaka igra ima određeni broj *pozicija* koje igrači mogu napraviti. Kada ne bi bilo pozicija u igri, igra bi završila prije nego što bi počela. Svaka pozicija je opisana skupom dopuštenih poteza za svakog igrača. Zatim, igrač koji je na redu odigra potez. Svaki potez koji on povuče vodi do nove pozicije koja se zove *lijeva* ili *desna opcija* prethodne igre, ovisno o tome koji je igrač povukao potez. Dakle, svaka opcija može biti nova igra sama po sebi jer je opisana skupom dopuštenih poteza za oba igrača. Uz takve definicije, nama su bitni samo skupovi lijevih i desnih opcija koje možemo doseći s bilo koje pozicije.

Uvedimo sljedeće oznake:

- L = *skup lijevih opcija*
- D = *skup desnih opcija*

Na taj način smo došli do formalne definicije lijevih i desnih opcija.

Definicija 1.2.1. *Elementi od L i D zovu se lijeve odnosno desne strategije od G, redom.*

Budući da jedan od uvjeta iz definicije kombinatornih igara kaže da igra završava nakon konačnog broja poteza, primjetimo da skupovi L i D ne mogu biti beskonačni. *Silazni uvjet igre* kaže da svaka igra jednom mora završiti bez obzira kako je igrana.

Sada možemo definirati što je igra.

Definicija 1.2.2. *Neka su L i D dva skupa. Tada uređeni par* $G := (L, D)$ *zovemo igra.*

Nakon definicije igre, možemo formalnije reći što nam kaže silazni uvjet igre: ne postoji beskonačan niz igara $G^i = (L^i, D^i)$, $G^{i+1} \in L^i \cap D^i$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Možemo primijetiti da je definicija igre rekurzivna, ali nama zapravo samo trebaju aksiomatska svojstva igre (što nam definicija i daje).

Promotrimo sljedeći primjer u kojem ćemo objasniti četiri najjednostavnije igre.

Prije nego je ijedna igra kreirana, jedini skup igara koji imamo je prazan skup. Igra $0 = (\{\ \}, \{\ \})$ je najjednostavnija igra gdje su $L = D = \{\ \}$. U takvoj igri niti jedan igrač ne može povući potez pa gubi onaj tko je prvi na potezu.

Sada kada smo vidjeli da je skup igara neprazan, slijede nove tri igre. Igra $1 = (\{0\}, \{\ \})$ ima jedan potez za *lijevog* i on uvijek pobjeđuje jer *desni* nema dopuštenih poteza. Dakle, ako je *desni* prvi na potezu, on odmah gubi jer je skup njegovih opcija prazan. Ako je *lijevi* prvi i on napravi potez, *desni* opet gubi zbog već spomenutog razloga.

Zatim imamo igru $-1 = (\{\ \}, \{0\})$ gdje, slično kao u prethodnoj igri, uvijek pobjeđuje *desni* jer on ima jedan potez. Sada *lijevi* igrač nema dopuštenih poteza.

Zadnja igra je $* = (\{0\}, \{0\})$. I *lijevi* i *desni* imaju po jedan potez, ali su ti potezi isti. To znači da pobjeđuje onaj igrač koji prvi igra.

Pojednostavimo sada notaciju. Neka su $L = \{G^{L_1}, G^{L_2}, ...\}$ i $D = \{G^{D_1}, G^{D_2}, ...\}$ dva proizvoljna skupa igara. Tada za $G = (L, D) = (\{G^{L_1}, G^{L_2}, ...\}, \{G^{D_1}, G^{D_2}, ...\})$ pišemo

$$G = \{G^{L_1}, G^{L_2}, ...|G^{D_1}, G^{D_2}, ...\}.$$

Primijetimo da na temelju te notacije možemo zaključiti da je igra zapravo skup dvije različite vrste elemenata: lijeve i desne opcije. Sada gore spomenute četiri igre možemo zapisati kao

$$0 = \{\ |\ \},\ 1 = \{0|\ \},\ -1 = \{\ |0\},\ * = \{0|0\}.$$

1.3 Ishodi kombinatorne igre

Znamo da igrači naizmjenice povlače poteze. Prilikom igranja igre, najvažniji aspekt je možemo li pobijediti ili ćemo izgubiti. Zbog toga je većina teorije zapravo odlučivanje koji igrač može pobijediti u određenim igrama. To nas dovodi do potrebe za formalnom definicijom tko pobjeđuje, a tko gubi. Kao što smo spomenuli, u kombinatornim igrama nema neriješenog rezultata. Ponovno dolazimo do konvencije normalne igre. Igrač je gubitnik kada njegov skup opcija postane prazan i ne može povući potez kada je na redu. Ideja je da ne možemo pobijediti ako nemamo dobar potez (to uključuje i nepostojanje poteza). Obično kažemo da je potez *dobar* ako nas vodi do pobjede. Inače je *loš* i on nas ne vodi pobjedi. Mi ćemo u ovom radu tražiti dobre poteze ili ćemo pokazati da takvi ne postoje.

Sada napravimo mali odmak od matematičke teorije igara i pogledajmo kako stvari funkcioniraju u igrama u stvarnom životu. U takvim igrama postoji mnogo drugih kriterija kako odabrati neku od opcija. Ako igrač gubi, tada su sve njegove opcije loše (u smislu kako smo maloprije objasnili). Ali u praksi nisu svi loši potezi jednako loši, jer možemo preferirati neku opciju koja će zakomplicirati situaciju tako da ju protivnik može jako teško analizirati. Također se može dogoditi da ćemo preferirati loš potez u odnosu na dobar. To je slučaj kada se naš protivnik tek uči kako igrati igru s kojom smo mi već upoznati. Onda ćemo mi vjerojatno pobijediti unatoč nekim lošim potezima. Najčešće u takvim slučajevima povlačimo loše poteze kako protivniku ne bismo odali strategiju.

Vratimo se matematičkoj teoriji. Svaka igra G će biti u jednoj od četiri klase ishoda:

1. *lijevi* može pobijediti bez obzira tko počinje igru $\Rightarrow G > 0$
2. *desni* može pobijediti bez obzira tko počinje igru $\Rightarrow G < 0$

3. prvi može pobijediti bez obzira tko počinje igru $\Rightarrow G \| 0$

4. drugi može pobijediti bez obzira tko počinje igru $\Rightarrow G = 0$

Može se dogoditi da *lijevi* pobjeđuje bez obzira tko počinje. U tom slučaju kažemo da je G *pozitivna igra* jer ide u korist *lijevog*. I obratno, ako *desni* pobjeđuje bez obzira tko započinje igru, onda ćemo G zvati *negativnom igrom*. U druga dva slučaja, pobjednik može biti *lijevi* ili *desni*, ovisno o tome tko počinje. Ako je gubitnik onaj igrač koji započinje igru, takvu igru smo već nazvali *igra 0*. Ako je taj igrač pobjednik, onda je ta igra *nejasna*.

Kombiniranjem tih oznaka dobijemo:

1. $G \geq 0$ ($G > 0$ i $G = 0$); *lijevi* može pobijediti ako igra drugi

2. $G \leq 0$ ($G < 0$ i $G = 0$); *desni* može pobijediti ako igra drugi

3. $G \rhd 0$ ($G > 0$ i $G \| 0$); *lijevi* pobjeđuje ako igra prvi

4. $G \lhd 0$ ($G < 0$ i $G \| 0$); *desni* pobjeđuje ako igra prvi

Na taj način smo došli do sljedećeg teorema:

Teorem 1.3.1. *Svaka igra G pripada jednoj od klasa ishoda navedenih gore.*

Lako se može vidjeti da su $G \geq 0$ i $G \leq 0$ fundamentalni. Ako je $G \geq 0$, *lijevi* pobjeđuje ako igra drugi te *desni* nema dobar početni potez. Dobar početni potez za *desnog* bi bila opcija G^D u kojoj *desni* može pobijediti. No budući da *lijevi* mora početi u G^D, to znači da je $G^D \leq 0$. To nas vodi do sljedeće definicije:

Definicija 1.3.2. *Vrijedi sljedeće*

- $G \geq 0$ *osim ako ne postoji desna opcija* $G^D \leq 0$
- $G \leq 0$ *osim ako ne postoji lijeva opcija* $G^L \geq 0$

Primjetimo da je ta definicija rekurzivna. Da bi smo mogli odrediti je li $G \geq 0$, moramo znati je li $G^D \leq 0$. Isto za drugi slučaj.

Interpretacija pobjede se mora bazirati na igre gdje *lijevi* i *desni* pobjeđuju *odmah*. Ako *lijevi* nema niti jedan potez u G, tada je očito po definiciji $G \leq 0$. Stoga *desni* pobjeđuje odmah kada *lijevi* mora početi, ali ne može.

Te tvrdnje dobro definiranima čini silazni uvjet igre. Ako postoji igra G za koju $G \leq 0$ ili $G \geq 0$ nije dobro definirano, to može biti samo jer postoje opcije G^L i G^D za koje ove relacije nisu dobro definirane. To može narušavati silazni uvjet igre.

Prikladno je uvesti sljedeće konvencije:

- $G = 0$ ako $G \leq 0$ ili $G \geq 0$, tj. ne postoji opcija $G^D \leq 0$ ili $G^L \geq 0$
- $G > 0$ ako $G \geq 0$, ali nije $G \leq 0$, tj. postoji opcija $G^L \geq 0$, ali ne i $G^D \leq 0$
- $G < 0$ ako $G \leq 0$, ali nije $G \geq 0$, tj. postoji opcija $G^D \geq 0$, ali ne i $G^L \leq 0$
- $G \| 0$ ako nije niti $G \geq 0$ ni $G \leq 0$, tj. postoje opcije $G^L \geq 0$ i $G^D \leq 0$
- $G \rhd 0$ ako $G \leq 0$ ne vrijedi, tj. postoji lijeva opcija $G^L \geq 0$
- $G \lhd 0$ ako $G \geq 0$ ne vrijedi, tj. postoji desna opcija $G^D \leq 0$

Primijetimo da svi ti slučajevi mogu biti interpretirani u terminima pobjedničke igre. Npr. $G \rhd 0$ znači da *lijevi* može pobijediti kada igra prvi. Uvjet osigurava postojanje dobrog početnog poteza za *lijevog* iz $G^L \geq 0$ u kojem *lijevi* igra drugi.

Također možemo primijetiti da ove definicije odmah povlače već navedenu tvrdnju da je za svaku igru G jedna od sljedećih tvrdnji istinita: $G = 0$, $G > 0$, $G < 0$ ili $G \| 0$.

Kada kažemo da *lijevi* pobjeđuje, mislimo da *lijevi* može "iznuditi" pobjedu optimalnom igrom. To ne znači da pretpostavljamo da je pobjednička strategija poznata ili da *desni* ne može pobijediti ako *lijevi* igra loše.

Time je u potpunosti objašnjen pojam kombinatorne igre.

Naš cilj je odrediti optimalan niz poteza za oba igrača dok igra ne završi. Na taj način ćemo pronaći optimalan potez u svakoj poziciji igre. Mi pretpostavljamo da oba igrača povlače najbolje moguće poteze kako bi pobijedili.

Iz svega gore navedenog, vidimo da u kombinatornim igrama postoje dva moguća ishoda:

1. prvi igrač koji je na potezu ima pobjedničku strategiju, neovisno o tome je li taj igrač *lijevi* ili *desni*
2. drugi igrač koji je na potezu ima pobjedničku strategiju, neovisno o tome je li taj igrač *lijevi* ili *desni*

Opširnije o svemu može se pronaći u [2] i [3].

Nakon što smo objasnili uvod u osnovne pojmove u teoriji kombinatornih igara, sada možemo objasniti osnovne pojmove u teoriji grafova.

Poglavlje 2

O teoriji grafova

2.1 Osnovni pojmovi

Graf je jedna od osnovnih matematičkih struktura koja se pojavljuje u raznim oblicima i situacijama. Teorija grafova proučava svojstva različitih grafova. Uvod u teoriju grafova započnimo definicijom grafa.

Definicija 2.1.1. *Graf je uređeni par $G = (V, E)$ pri čemu je $V = V(G) \neq \emptyset$ skup vrhova i $E = E(G)$ skup bridova. Svaki brid $e \in E$ spaja dva vrha $u, v \in V$. Kažemo da su tada vrhovi u i v incidentni s e, a vrhovi u i v su susjedni i pišemo $e = uv$.*

Grafovi se često opisuju svojim grafičkim prikazom koji mora biti takav da iz njega možemo rekonstruirati formalni zapis grafa oblika (V, E).

Mi ćemo u ovom radu proučavati *konačne grafove*. To su grafovi kojima su V i E konačni skupovi. Inače kažemo da je graf *beskonačan*.

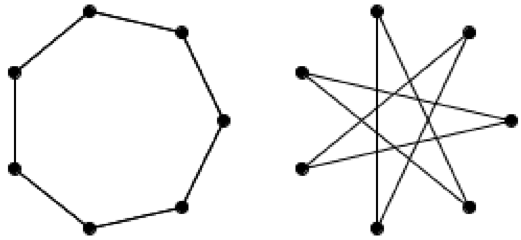
Definicija grafa se može proširiti tako da dodamo bridove čiji se krajevi podudaraju. Takve bridove zovemo *petlje*. Ako su krajevi različiti, onda je riječ o *pravom bridu* ili *karici*. Također mogu postojati *višestruki bridovi* – dva brida ili više njih s istim parom krajeva. U ovom radu neće bit govora o petljama kao ni o višestrukim bridovima. Dakle, mi proučavamo *jednostavne grafove G*. To su grafovi koji nemaju niti petlji niti višestrukih bridova.

Može se dogoditi da se graf sastoji samo od jednog vrha. On nema niti jedan brid i takav graf zovemo *trivijalan*. Inače je *netrivijalan*. G je *prazan graf* ako je $E(G) = \emptyset$. Jednostavan graf u kojem je svaki par vrhova spojen bridom zove se *potpun graf*.

Primijetimo da jedan graf možemo grafički prikazati na različite načine kao što se vidi na slici 2.1.

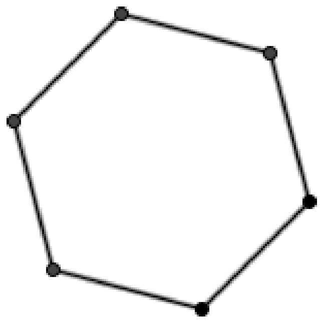
Definicija 2.1.2. *Grafovi G i H su izomorfni i pišemo $G \approx H$ ako postoje bijekcije $\theta : V(G) \to V(H)$ i $\varphi : E(G) \to E(H)$ takve da je vrh v incidentan s bridom e u G ako i samo ako je*

$\theta(v)$ incidentan s $\varphi(e)$ u H. Uređeni par $f=(\theta, \varphi):G \rightarrow H$ se zove izomorfizam iz G u H. Drugim riječima, grafovi G i H su izomorfni ako je moguće označiti vrhove oba grafa na isti način. Za svaki par vrhova u,v broj bridova koji spajaju vrhove u i v u G je jednak broju bridova koji spajaju u i v u H.



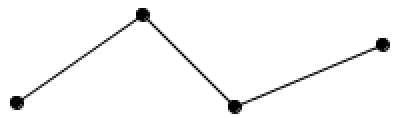
Slika 2.1: Izomorfni grafovi

Definicija 2.1.3. *Ciklus C_n s n vrhova možemo definirati skupom vrhova $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ i skupom bridova $E = \{\{i, i+1\}|i < n\} \cup \{1, n\}$. Na primjer, C_6 :*



Slika 2.2: Ciklus sa šest vrhova

Definicija 2.1.4. *Put P_n s n vrhova definiramo skupom vrhova $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ i skupom bridova $E = \{\{i, i+1\}|i < n\}$. Na primjer, P_4 :*



Slika 2.3: Put s četiri vrha

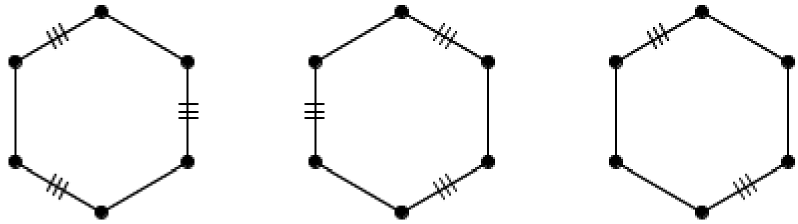
Primjećujemo da je zatvoreni put zapravo ciklus.

Definicija 2.1.5. *Neka su G i H grafovi. Ako je V(H) $\subseteq$ V(G) i E(H) $\subseteq$ E(G), a svaki brid iz H ima iste krajeve u H kao što ih ima u G, tada kažemo da je H podgraf od G i pišemo H $\subseteq$ G. G zovemo nadgraf od H. Ako je H $\subseteq$ G i H $\neq$ G, pišemo H $\subset$ G, onda je H pravi podgraf od G.*

Graf je *povezan* ako su svaka dva njegova vrha povezana nekim putem.
Sada možemo prijeći na pojam sparivanja u grafovima.

Definicija 2.1.6. *Sparivanje u grafu $G = (V, E)$ je podskup $M \subseteq E$ bridova takvih da nikoja dva brida nisu susjedni. Kažemo da su dva kraja brida u M sparena u M.*

Intuitivno, možemo reći da nikoja dva sparena brida nemaju zajednički vrh.
Sparivanje od M zasićuje vrh v ili se kaže da je vrh v *M-zasićen* ako je neki brid iz M incidentan s v. Inače je v *M-nezasićen*.
Jedan od osnovnih problema sparivanja je pokazati da postoji ili konstruirati sparivanje s dovoljno mnogo bridova. Ako je svaki vrh iz G M-zasićen, kažemo da je M *savršeno sparivanje*. M je *najdulje sparivanje* u G ako ne postoji sparivanje M' za koje je $|M'| > |M|$. Sparivanje je *maksimalno* ako ne možemo dodati niti jedan brid postojećem skupu. Savršeno sparivanje je, ako postoji, očito i najdulje. Svako najdulje sparivanje je i maksimalno, no obrat ne vrijedi. Primijetimo da najdulje sparivanje grafa ne mora biti jedinstveno.
Na slici 2.4 vidimo da sva tri grafa imaju maksimalno sparivanje, ali se u M ne nalaze isti bridovi. Također, maksimalna sparivanja ne moraju biti iste kardinalnosti.
Više o svemu može se pronaći u [4].



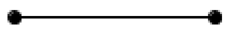
Slika 2.4: Maksimalno sparivanje nije nužno jedinstveno i ne mora biti iste kardinalnosti

2.2 Igra sparivanja na putevima

Napravimo sada jednostavnu igru sparivanja na putevima.

Očito je da za igru koja ima samo jedan vrh, ali niti jedan brid, uvijek pobjeđuje *drugi* igrač. *Prvi* igrač ne može povući potez i po konvenciji normalne igre, gubi. To smo sve objasnili u poglavlju o teoriji kombinatornih igara.

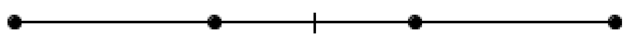
Sada promatramo netrivijalnije slučajeve, odnosno puteve P_1 i P_2. U tim igrama uvijek gubi *drugi* igrač jer *prvi* igrač povuče potez, a *drugi* ne može.



Slika 2.5: Put P_1

Slika 2.6: Put P_2

Sljedeća igra je malo zanimljivija i otvara mogućnost diskusije. Riječ je o putu P_3. Naime, ako *prvi* igrač igra optimalno kao što smo pretpostavili, onda će odigrati srednji dio puta i uvijek će pobijediti u toj igri. *Drugi* neće moći povući potez jer bi narušio definiciju sparivanja. Potez *prvog* igrača označavamo s |. Strategiju *prvog* igrača vidimo na slici 2.7.



Slika 2.7: Put P_3 s optimalnom strategijom *prvog* igrača

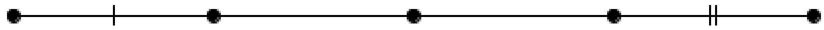
Pretpostavimo sada da *prvi* igrač ne igra optimalno i ne razmišlja o svojim potezima. Ako odabere ili prvi dio puta ili zadnji dio, on *drugom* igraču poklanja pobjedu. Naime, tada i *drugi* igrač može povući potez. Potez *drugog* igrača označavamo s ||. To vidimo na slici 2.8.

Slika 2.8: Put P_3 u kojem *prvi* igrač ne igra optimalno

Odsada pa nadalje, držimo se pretpostavke iz uvoda da igrači igraju optimalno jer žele pobijediti.

Sljedeći primjer je P_4.

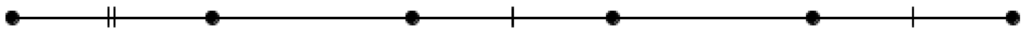
Budući da igrači igraju optimalno, *prvom* igraču je svejedno koji će brid odabrati jer nakon svakog mogućeg izbora, *drugi* igrač ima mogućnost povlačenja poteza. Zbog toga u P_4 uvijek pobjeđuje *drugi* igrač. Na primjer, ako je *prvi* igrač odabrao prvi brid, a *drugi* igrač zadnji brid, vidimo da *prvi* više ne može povući niti jedan potez.



Slika 2.9: Put P_4

Došli smo do igre P_5.

Najbolji mogući potez za *prvog* igrača je treći brid. Nakon toga, *drugi* igrač ima dvije mogućnosti. To su prvi ili zadnji dio puta. Kada se odluči za jednu, preostaje samo jedna mogućnost za *prvog* i to ga dovodi do pobjede. Tu strategiju možemo vidjeti na sljedećoj slici.

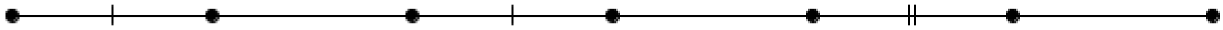


Slika 2.10: Put P_5

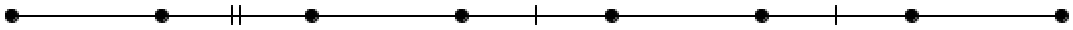
Da kojim slučajem *prvi* igrač nije odigrao treći brid, strategija ne bi bila optimalna. Na ovaj način smo došli i do najvećeg sparivanja.

U primjeru P_6, također vidimo da nam je dobra opcija odabrati treći ili četvrti brid jer ćemo opet podijeliti graf na dva dijela u kojem će po jedan potez imati i *prvi* i *drugi* igrač. U optimalnom slučaju, pobjednik je opet *prvi* igrač. Isto zaključujemo za P_7.

Napravimo još za slučaj P_8. Ovdje imamo malo opširniju diskusiju. Neka *prvi* igrač ide istom logikom kao prije, tj. pokušat će podijeliti graf na dva podjednaka dijela. Njegov prvi potez će tada biti četvrti ili peti brid. Pretpostavimo da je odabrao četvrti brid. *Drugom*

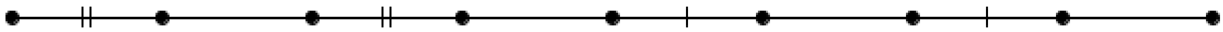


Slika 2.11: Put P_6



Slika 2.12: Put P_7

je dovoljno odabrati šesti brid i odnosi pobjedu. Isti odgovor *drugog* igrača je ako *prvi* odabere treći brid i opet pobjeđuje. Ako *prvi* odabere prvi ili drugi brid, *drugi* ponovi svoju strategiju i odnosi pobjedu. Zaključak je isti ako *prvi* bira bridove s desne strane. Dakle, možemo zaključiti da u P_8 svi optimalni potezi vode pobjedi *drugog* igrača. Jedna strategija je prikazana sljedećoj slici:



Slika 2.13: Put P_8

Ako igramo igru sparivanja na putu neparne duljine, očito je pobjednik uvijek *prvi* igrač, jer svojim prvim potezom može razbiti igru na dva jednaka dijela i kopirati poteze *drugog*. Ako je riječ o putu parne duljine, pobjedničku strategiju mogu imati oba igrača. Mogli bi naslutiti da je pobjednik *drugi* igrač uvijek ako je riječ o putu čija je duljina djeljiva s 4 (to je slučaj na putevima P_4, P_8 te P_{12}). Inače pobjedničku strategiju ima *prvi* igrač.

Iz ovog primjera s putevima, možemo naslutiti da se igra G može *razbiti* na dva načina. Prvi način je da neki od igrača razbije igru G na dvije jednake igre G_1 i G_2. Primijetimo, ako su igre G_1 i G_2 jednake, tada uvijek pobjeđuje igrač koji je svojim potezom rastavio igru na dva simetrična dijela. Simetrična strategija je ona strategija gdje jedan igrač kreira situaciju u kojoj uvijek može kopirati potez suparnika. Na taj način, igraču je zagarantiran odgovor na svaki potez protivnika. Najvažnije, on može napravit posljednji potez i pobijediti. To je poznato pod nazivom *krađa strategije*. Drugi način je da dobijemo neku novu igru G' nakon što povučemo prvi potez. Možda smo nakon toga poteza dobili igru koja se može rastaviti na dvije jednake igre. U tom slučaju će uvijek pobijediti *drugi* igrač. Ako smo ponovno dobili neku igru koja nema nekakva posebna svojstva, potezom *drugog* igrača dobijemo igru G'' i za nju provjeravamo možemo li doći do pobjedničke strategije itd.

Također pogledajmo što se događa u slučaju kada imamo igru, sastavljenu od dvije igre u kojima je pobjednik uvijek *drugi* igrač. Tada je *drugi* i sveukupni pobjednik igre. To se lako može vidjeti na primjeru puteva duljine 4 i 8. Nadalje, ako je u jednoj igri pobjednik uvijek *prvi*, a u drugoj uvijek *drugi*, sveukupni pobjednik je *prvi*. Da bismo to provjerili, dovoljno je uzeti puteve duljine 3 i 4. *Prvi* uvijek odabire središnji brid iz puta duljine 3 jer zna da će na taj način uvijek pobijediti. Slučaj kada je u obje igre uvijek pobjednik *prvi* ostaje nejasan jer ne možemo sa sigurnošću reći tko je sveukupni pobjednik. Ako imamo puteve duljine 3, tada očito *drugi* koristi krađu strategije i odnosi pobjedu. Što se događa ako imamo puteve duljine 3 i 5 koji svaki posebno donosi pobjedu *prvom* igraču? Tada je pobjednik uvijek *prvi* ako odigra jedan krajnji brid na putu duljine 5. Na taj način smo vidjeli da oba igrača mogu pobijediti.

Poglavlje 3

O heksagonalnim životinjama

3.1 Simetrije

Nakon što smo obradili osnovne pojmove teorije kombinatornih igara i teorije grafova, možemo prijeći na podskupove pravilne šesterokutne rešetke. Takvi oblici se popularno nazivaju *heksagonalne životinje*, *benzenoidni grafovi/benzenoidi* ili *poliheksi*.

Definicija 3.1.1. *Šesterokutne životinje su podskupovi pravilnog šesterokutnog popločenja s 1-povezanim interiorom.*

Poliheksi imaju najveću upotrebu u organskoj kemiji, a često su zastupljeni i u slagalicama, logičkim i matematičkim igrama.

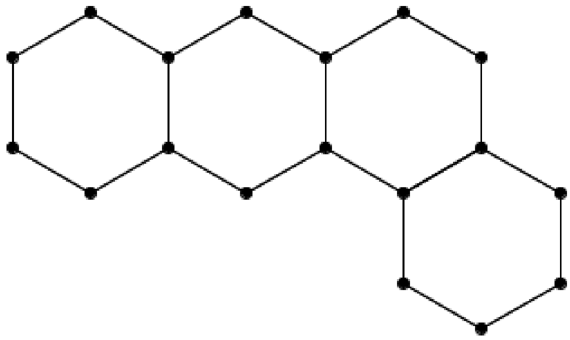
Mi ćemo proučavati u ovom radu neke od osam simetrija u kojima se mogu pojavljivati heksagonalne životinje. Tih osam simetrija možemo podijeliti u dvije skupine.

Prvu skupinu će činiti C_1, C_2, C_3 i C_6. To je skupina koja nema refleksiju, ali ima rotaciju za $\frac{360°}{i}$, za $i = 1, 2, 3, 6$.

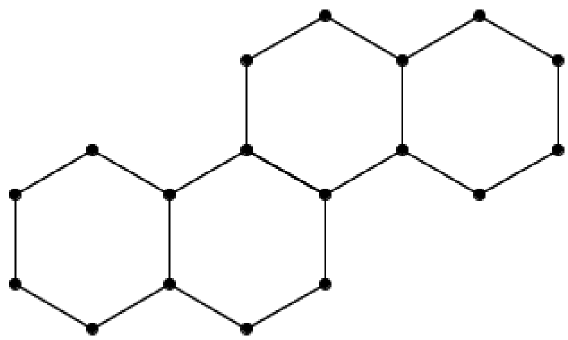
Drugu skupinu čine D_1, D_2, D_3 i D_6. Ta skupina ima refleksiju, ali ima i rotaciju za $\frac{360°}{i}$, za $i = 1, 2, 3, 6$.

Sada ćemo prikazati po jedan oblik heksagonalnih životinja za svaku od simetrija.

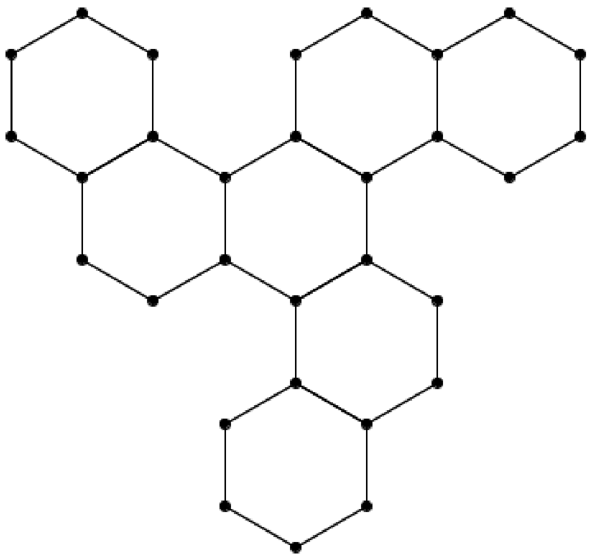
Simetrije C_i, $i = 1, 2, 3, 6$



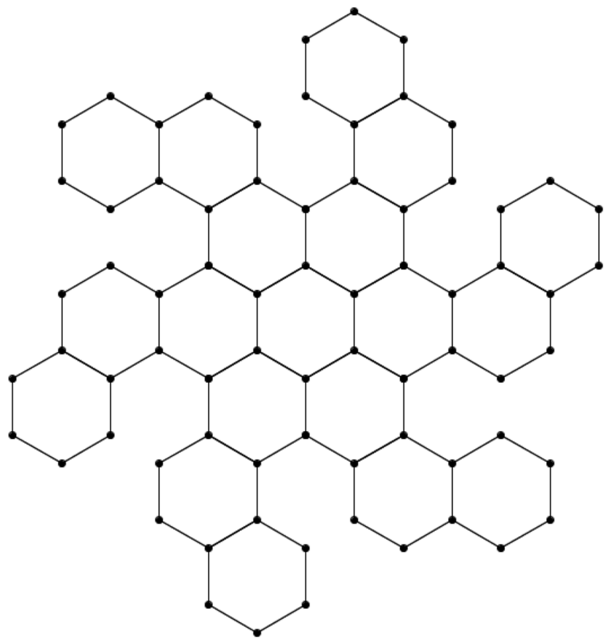
Slika 3.1: Simetrija C_1



Slika 3.2: Simetrija C_2

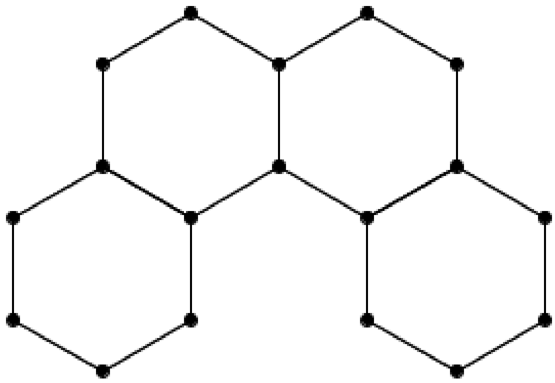


Slika 3.3: Simetrija C_3

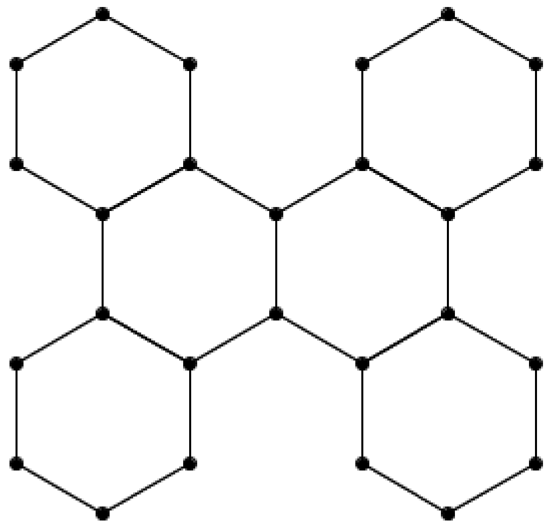


Slika 3.4: Simetrija C_6

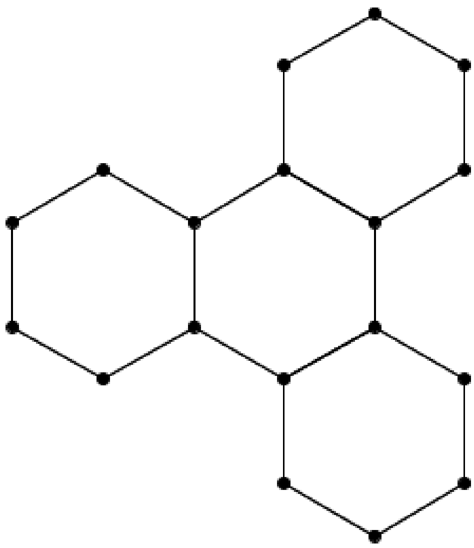
Simetrije D_i, $i = 1, 2, 3, 6$



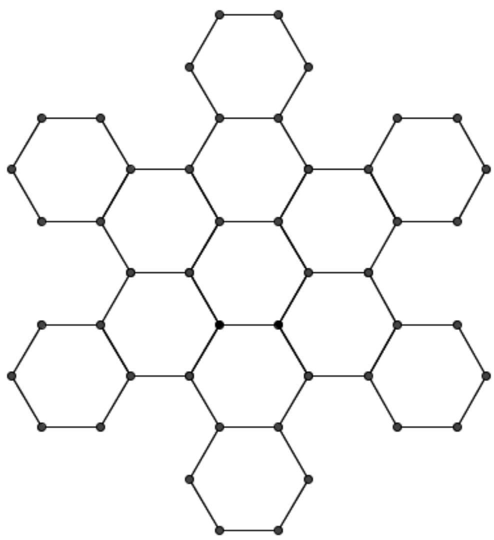
Slika 3.5: Simetrija D_1



Slika 3.6: Simetrija D_2



Slika 3.7: Simetrija D_3



Slika 3.8: Simetrija D_6

Napomenimo, mi ćemo tražiti pobjedničke strategije i na varijacijama oblika gore navedenih simetrija (ukoliko ih ima). O tome će biti riječi u sljedećem poglavlju.

Poglavlje 4

Igra sparivanja

U ovom poglavlju pokušat ćemo pronaći što više pobjedničkih strategija za spomenute simetrije i njihove varijacije oblika. Na kraju, napravit ćemo zaključak gdje ćemo pokušati pronaći poveznice među svim pobjedničkim strategijama za *prvog* igrača te za *drugog*.

Prije nego što prijeđemo na igre sparivanja na spomenutim simetrijama, prvo ćemo pronaći pobjedničke strategije na posebnim rešetkama koje dosad nismo spomenuli. Riječ je o *lančanim heksagonalnim životinjama*.

Uvedimo neke oznake radi lakšeg razumijevanja i jednostavnijeg objašnjavanja.

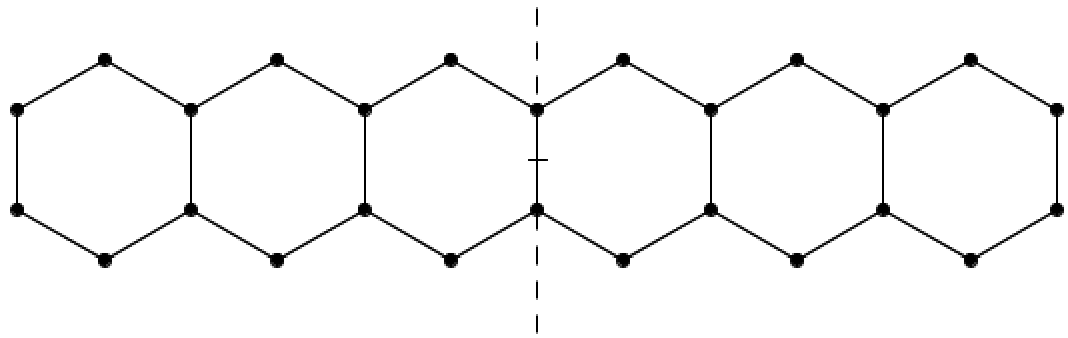
Potez koji je napravio *prvi* igrač označavat ćemo s |. Preciznije, povući ćemo jednu crticu na brid koji odabire *prvi* igrač.

Poteze *drugog* igrača označavamo s ||, tj. na brid ćemo staviti dvije crtice.

4.1 Paran broj šesterokuta u lančanim heksagonalnim životinjama

Odaberimo lančani poliheks sastavljen od šest šesterokuta. Ista strategija je za bilo koji paran broj šesterokuta.

Možemo primijetiti da se taj lančasti poliheks može podijeliti na dva simetrična dijela. To je napravio *prvi* igrač na gornjoj slici. Nakon toga, koji god potez odigra *drugi* igrač, *prvi* može kopirati. Krađa strategije mu osigurava pobjedu.

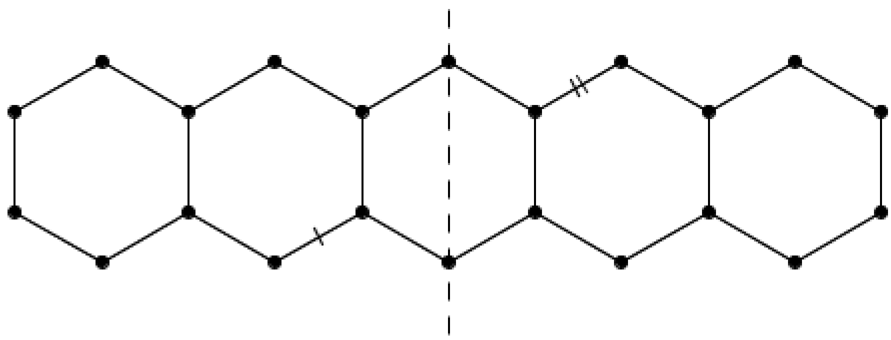


Slika 4.1: Šest lančano povezanih šesterokuta

ZAKLJUČAK: Na lančanim poliheksima s parnim brojem šesterokuta, *prvi* igrač uvijek ima pobjedničku strategiju. Primijetimo da se centar simetrije nalazi na polovištu brida koji je *prvi* igrač odigrao. U sljedećem poglavlju vidjet ćemo je li to uvijek tako ili je to samo slučajnost.

4.2 Neparan broj šesterokuta u lančanim heksagonalnim životinjama

Pogledajmo što se događa kada imamo neparan broj šesterokuta, npr. pet šesterokuta.



Slika 4.2: Pet lančano povezanih šesterokuta

Pogledajmo sliku 4.2. Ovdje vidimo da se centar simetrije nalazi u središtu središnjeg šesterokuta. Možemo naslutiti da *drugi* igrač ima pobjedničku strategiju. Pokažimo da je to zbilja tako.

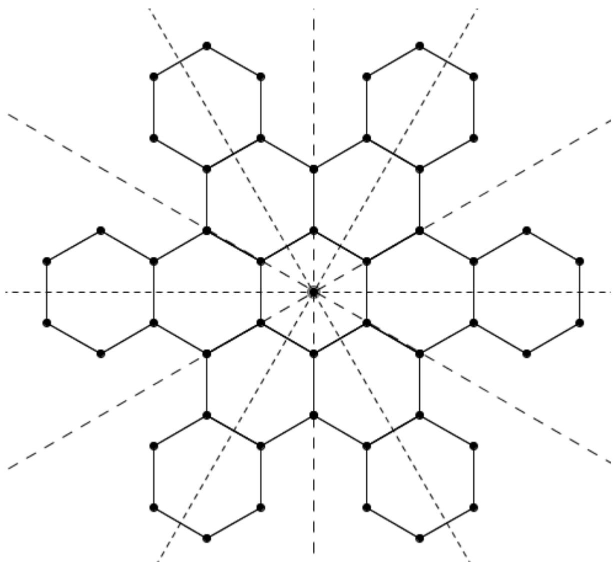
Drugi igrač može kopirati svaki potez *prvog* igrača, samo pri tome mora biti malo oprezniji. Ako je, na primjer, *prvi* odabrao donji desni brid na drugom šesterokutu s lijeve strane, onda *drugi* mora odabrati gornji lijevi brid na drugom šesterokutu počevši od desne strane. Na taj način *drugi* uvijek može kopirati poteze *prvog*, osim ako je riječ o okomitim bridovima, njih kopira *normalno*.

ZAKLJUČAK: U ovom slučaju, centar simetrije se nalazi u središtu središnjeg šesterokuta i pobjednik je uvijek *drugi* igrač. Npr. desni dio ovog lančanog poliheksa mogli smo rotirati za 180° i dobili bismo dva identična dijela. Opet je korištena krađa strategije. Kasnije ćemo vidjeti da je uvijek pobjednik *drugi* igrač kada uočimo da je centar simetrije u centru šesterokuta.

Nakon što smo pronašli pobjednika na lančanim poliheksima, možemo prijeći na igre sparivanja na podgrafovima pravilnih šesterokutnih popločenja. Prvo počnimo sa simetrijama najvišeg reda. Na njima možemo odmah koristiti krađu strategije pa lako zaključimo tko je pobjednik.

4.3 Simetrija D_6

Primijetimo da ovdje postoji centralna simetrija. Centar simetrije se nalazi u središtu središnjeg šesterokuta. Za svaku točku možemo pronaći drugu točku koja je jednako udaljena od spomenute točke u središnjem šesterokutu, a nalaze se na istom pravcu.



Slika 4.3: Osi simetrije D_6

Strategija igre je sljedeća. Primijetimo da postoje tri osi simetrije na kojima neki bridovi leže cijelom svojom dužinom. Također postoje osi simetrije koje sijeku neke bridove u točno jednoj točki.

Ako *prvi* igrač odabere jedan od bridova koji cijeli leži na nekoj od osi simetrija, tada *drugi* odabere preostali brid koji leži na toj istoj osi. Na taj način je *drugi* podijelio igru na dva simetrična dijela što znači da je on uvijek pobjednik. Kopiranje poteza se odvija simetrično.

Sada u pogledajmo što se događa ako *prvi* odabere neki od bridova koji ne leže cijeli na nekoj osi simetrije. *Drugi* može i dalje kopirati poteze *prvog* samo mora pripaziti kako to radi. Postupak je sličan kao kod lančanih heksagonalnih životinja s neparnim brojem šesterokuta. Ovisno o tome oko koje osi *prvi* igrač odabere brid, oko te osi treba i *drugi* igrač odabrati brid na način kao što smo objasnili u lančanim poliheksima s neparnim brojem šesterokuta. Na taj način *drugi* je osigurao posljednji potez i pobjeda je uvijek njegova.

ZAKLJUČAK: Ova heksagonalna životinja ima centar simetrije u središtu središnjeg šesterokuta te pobjednička strategija pripada *drugom* igraču. On uvijek može kopirati svaki potez *prvog* igrača.

Da bismo potvrdili tu tvrdnju, pogledajmo što se događa sa simetrijom C_6.

4.4 Simetrija C_6

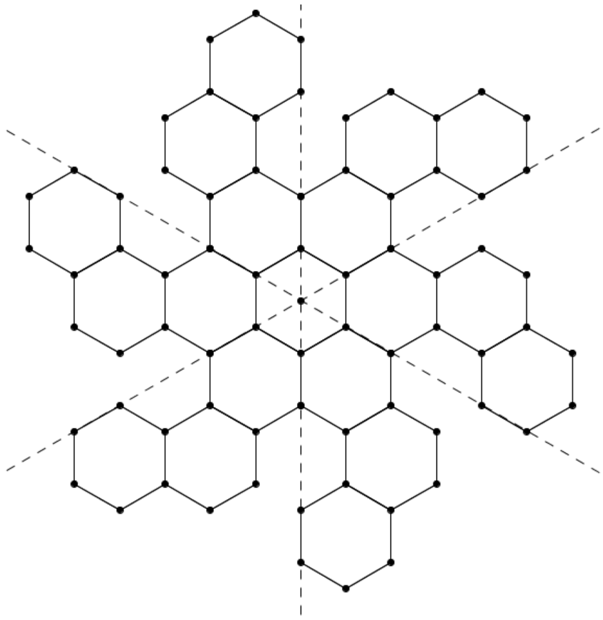
Može se primijetiti da simetrija C_6 također ima centralnu simetriju. Tvrdimo da *drugi* igrač ima pobjedničku strategiju.

Kao kod simetrije D_6, vidimo da imamo spojene tri heksagonalne životinje koje nisu u potpunosti lančane nego su krajnji šesterokuti malo *zakrenuti*. No to *drugog* igrača ne sprječava u kopiranju poteza *prvog*. Uz malo opreza, krađa strategije je lako izvediva.

ZAKLJUČAK: *Drugi* igrač ima pobjedničku strategiju i centar simetrije je u središtu središnjeg šesterokuta.

Nakon što smo pronašli pobjedničke strategije za simetrije D_6 i C_6, rezimirajmo što smo zaključili.

Ako uočimo da heksagonalna životinja ima centralnu simetriju, odnosno da se centar simetrije nalazi u središtu središnjeg šesterokuta, pobjednik je uvijek *drugi* igrač.



Slika 4.4: Centar simetrije C_6

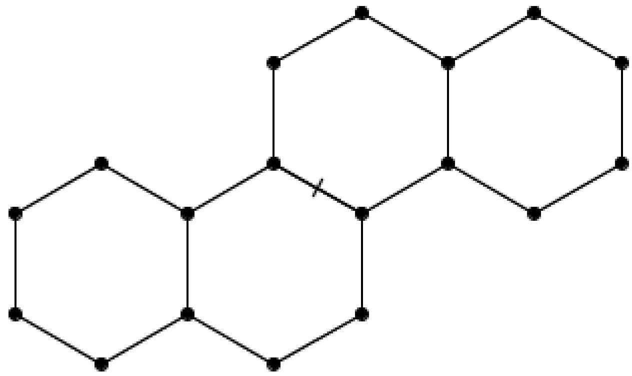
Ako bismo dodali ili oduzeli neke šesterokute, više ne bismo imali simetrije D_6 i C_6. Time smo završili s analiziranjem heksagonalnih životinja najvišeg stupnja. Sada prelazimo na polihekse manjeg stupnja. Prvo ćemo početi od oblika gdje na prvi pogled znamo tko će pobijediti. Tu se sada pojavljuju varijacije oblika poliheksa i njih također moramo uzeti u obzir za analizu.

4.5 Simetrija C_2

Grafovi simetrije C_2 imaju rotaciju za 180°.

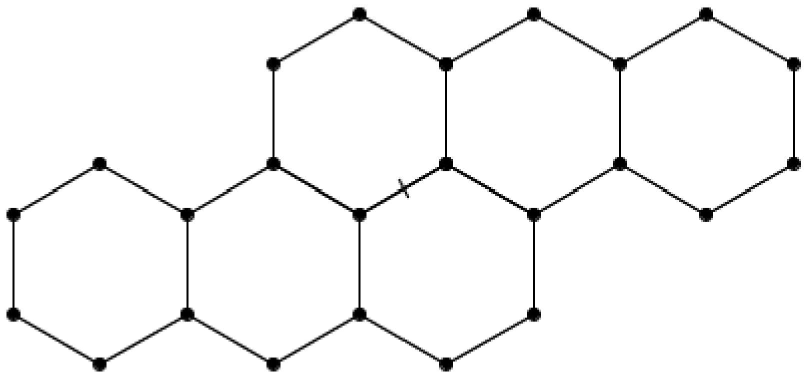
Najprije pogledajmo sliku 3.2 i primijetimo da jednim potezom možemo podijeliti tu heksagonalnu životinju na dva jednaka dijela. To je prikazano na sljedećoj slici i vidimo da je centar simetrije na polovištu tog brida.

Ako gornji dio rešetke fiksiramo, a donji dio rotiramo za 180°, donji dio će postati jednak gornjem. Imajući to na umu, možemo reći da smo prvim potezom rešetku podijelili na dva jednaka dijela. Iz toga slijedi da *prvi* igrač ima pobjedničku strategiju. Kopiranje poteza je veoma jednostavno. Koji god brid *drugi* igrač odabere, *prvi* će odabrati isti taj brid, ali na preostalom obliku. Time smo riješili jednu varijaciju oblika simetrije C_2.



Slika 4.5: Prvi potez za simetriju C_2

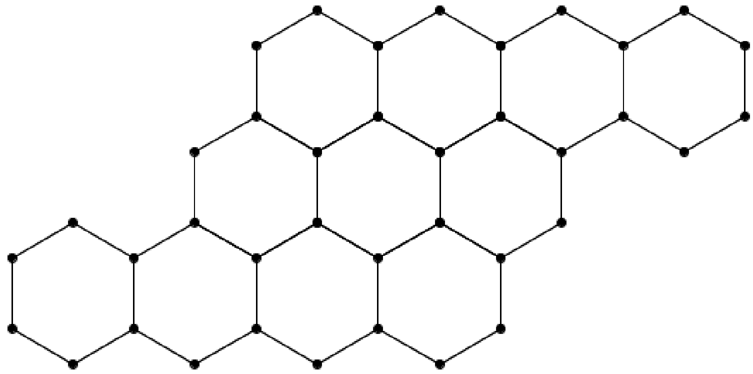
Pogledajmo sljedeću varijaciju tog oblika.



Slika 4.6: Jedna varijacija od C_2

Vidi se da se centar simetrije nalazi na polovištu brida kojeg je odigrao *prvi* igrač. U ovom slučaju, pobjednik je i dalje *prvi* jer on označenim potezom razbija igru na dva dijela tako da je omogućena krađa strategije.

Na temelju ova dva grafa simetrije, mogli bismo pogrešno zaključiti da je pobjednik na grafovima simetrije C_2 uvijek *prvi* igrač. Sljedeća varijacija oblika će nam pokazati da to nije tako.



Slika 4.7: Varijacija oblika simetrije C_2 u kojoj pobjeđuje *drugi* igrač

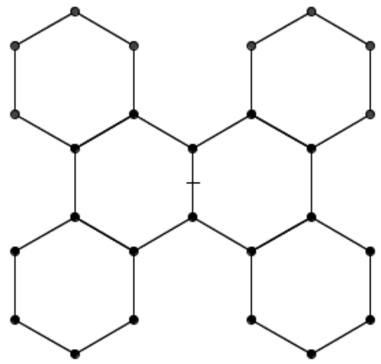
Na slici 4.7 odmah možemo uočiti da se centar simetrije nalazi u središtu središnjeg šesterokuta. Već smo vidjeli u nekoliko slučajeva da je tada pobjednik uvijek *drugi* igrač. Zaključak je i ovdje isti što samo potvrđuje našu pretpostavku.

ZAKLJUČAK: Simetrija C_2 ima pobjedničku strategiju za oba igrača. Postoje grafovi koji imaju centar simetrije na polovištu brida i na njima uvijek pobjeđuje *prvi*. Također postoje grafovi čiji se centar simetrije nalazi u središtu šesterokuta te pobjeda pripada *drugom* igraču.

4.6 Simetrija D_2

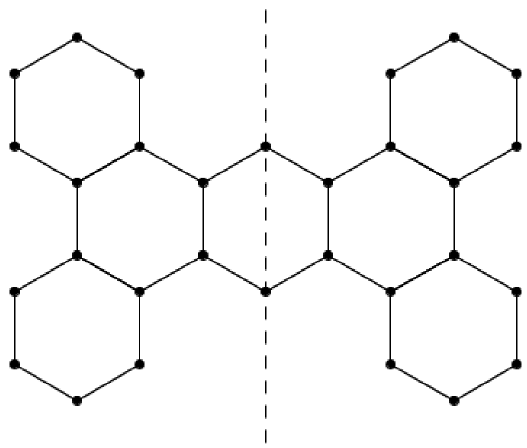
Simetrija D_2 uz rotaciju za 180° ima i refleksiju.

Pogledajmo jedan graf ove simetrije koji je prikazan na slici 4.8. Igra je veoma jednostavna i lako se odredi tko je pobjednik. Označenim potezom *prvi* igrač može podijeliti igru na dva jednaka dijela. Uočimo da se centar simetrije nalazi na polovištu spomenutog brida. Kao u nekim već odigranim igrama, pobjednička strategija u ovom slučaju pripada *prvom* igraču.



Slika 4.8: Potez kojim smo graf simetrije D_2 podijelili na dvije jednake igre

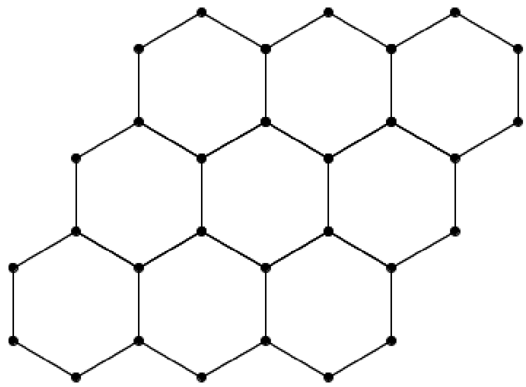
Sljedeći oblik ove simetrije je sličan kao prethodni. Razlika je u tome što imamo neparan broj šesterokuta u središnjem dijelu heksagonalne životinje.



Slika 4.9: Varijacija simetrije D_2

Kao što smo imali kod lančanih poliheksa s neparnim brojem šesterokuta, takva je situacija i ovdje. Koji god potez *prvi* igrač odabere, *drugi* može kopirati i osigurati si posljednji potez. Strategija je ista kao u spomenutom poglavlju. Centar simetrije se nalazi u središtu središnjeg šesterokuta.

Iako smo odgirali igre na dva grafa ove simetrije i pokazali da pobjednik može biti i *prvi* i *drugi* igrač, pogledajmo još jedan graf. On je prikazan na slici 4.10. Odmah se vidi da je pobjednik *drugi* igrač jer se centar simetrije nalazi u središtu središnjeg šesterokuta.



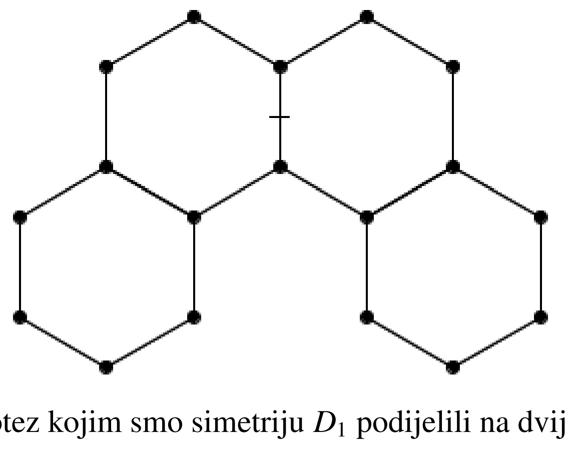
Slika 4.10: Varijacija oblika simetrije D_2

ZAKLJUČAK: Poput simetrije C_2, simetrija D_2 također ima pobjedničke strategije za oba igrača. Ponovno su potvrđene pretpostavke o tome kada pobjeđuje *prvi*, odnosno *drugi* igrač. Ako je centar simetrije na polovištu brida, tada je pobjednik *prvi* igrač. *Drugi* pobjeđuje kada se centar simetrije nalazi u središtu šesterokuta.

4.7 Simetrija D_1

Prvo promotrimo heksagonalnu životinju simetrije D_1 koja je prikazana na slici 3.5. Ovaj oblik se ponekad naziva *luk* (*eng. arch*). On ima refleksiju i rotaciju za 360°.

Vodeći se zaključkom iz primjera s putevima, vidimo da se igra u prvom potezu može podijeliti na dvije jednake igre. Taj potez vidimo na slici 4.11.

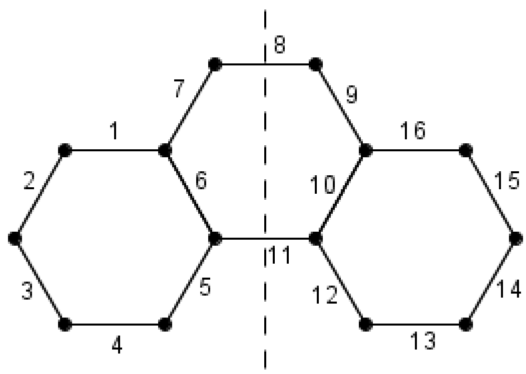


Slika 4.11: Potez kojim smo simetriju D_1 podijelili na dvije jednake igre

Nakon toga, svaki potez koji napravi *drugi* igrač, *prvi* igrač kopira simetrično na suprotnoj strani. Dok god *drugi* igrač može napraviti potez, moći će ga napraviti i *prvi*. Time je *prvi* igrač osigurao posljednji potez.

ZAKLJUČAK: U ovoj igri uvijek pobjeđuje *prvi* jer će on razbiti igru na dva simetrična dijela svojim prvim potezom.

Sada pogledajmo jednu varijaciju oblika te simetrije. Ona je prikazana na slici 4.12. Jednostavnosti radi, označili smo sve bridove brojevima $1, 2, ..., 16$.



Slika 4.12: Jedna varijacija oblika simetrije D_1

Ovdje ćemo ući u malo dublju diskusiju da bismo došli do pobjedničke strategije jer više nije tako očito zaključiti kao što je dosada bilo. Ako *prvi* igrač odabere jedan od bridova 8 ili 11, *drugi* će odabrati preostali od spomenuta dva brida. Na taj način će uvijek pobjednik biti *drugi* jer je podijelio igru na dva simetrična dijela. Dakle, *prvi* neće nikada odigrati niti brid 8 niti brid 11 jer u tim slučajevima uvijek gubi.

Gledajući taj šesterokut na kojem se nalazi os simetrije, *drugi* igrač nikada neće dopustiti da sva moguća tri brida budu odigrana jer će on izgubiti.

Pogledajmo što se događa kada igrači igraju neki od preostalih bridova $6, 7, 9$ i 10 koji se nalaze u središnjem šesterokutu. Pretpostavimo da je *prvi* odabrao brid 6. Vodeći se prethodnim slučajem kada je *prvi* birao brid 8, *drugi* se odlučio za brid 9. Ako bi odabrao neki drugi brid iz središnjeg šesterokuta, onda bi *prvi* mogao povući još jedan potez u spomenutom šesterokutu. Već smo rekli da to ne vodi pobjedi *drugog*. Tada *prvi* ima pobjednički potez ako odabere brid 3. Na taj način su ostala samo dva poteza što označava pobjedu *prvog*. To *drugog* igrača navodi na sljedeći zaključak. Ako *prvi* odabere jedan od bridova $6, 7, 9$ i 10, *drugi* ne smije birati niti jedan brid iz šesterokuta gdje se nalaze spomenuti bridovi.

Prvom igraču se sviđa ta strategija te on u sljedećoj igri odabire ponovno jedan od tih bridova. Recimo da je opet odabrao brid 6. Neka je *drugi* odabrao brid 2. Ako *prvi* odabere 9, *drugi* će odabrati 4 i na taj način pobijediti jer su ostale točno dvije mogućnosti u preostalom šesterokutu. Uz istu strategiju *drugog*, *prvi* neće odabrati niti brid 8. Koji god od preostalih nespomenutih bridova *prvi* odabere, *drugi* će uvijek pobijediti. Na taj način smo istovremeno vidjeli da nije dobra strategija *prvoga* odabrati brid 10.

Pogledajmo što se događa kada *prvi* odabere 7 ili 9. Pretpostavimo da je on odabrao brid 7. Isti zaključak će biti ako odabere brid 9. Kao što je već objašnjeno, *drugi* neće odabrati bridove 9, 10 i 11 jer bi to značilo pobjedu protivnika. Neka zato on odabere brid 2. Jednostavnosti radi, sljedeća dva poteza ćemo zapisivati u obliku $a - b$. U ovom slučaju, a predstavlja potez *prvog* igrača, a b *drugog*. Strategija je sljedeća: 5 – 9, 4 – 16, 11 – 16, 10 – 15, 9 – 5, 12 – 9, 13 – 10, 14 – 11, 15 – 10, 16 – 11. Pobjednik je *drugi*.

Nakon što smo iscrpili sve mogućnosti odabira *prvog* igrača u središnjem šesterokutu, pogledajmo što se događa kada on prvi bira poteze iz lijevog šesterokuta. Zaključci će biti analogni ako gledamo desni šesterokut.

Neka je *prvi* odabrao brid 1. *Drugi* će odabrati 16 jer nakon toga ostaje put duljine 7 i jedan potez. To označava pobjedu *drugog* igrača, jer na putu duljine 7 uvijek može samo prvi igrač na potezu pobijediti. U ovom slučaju to je *prvi*. Dodatni potez osigurava pobjedu *drugog*.

Neka je *prvi* odabrao brid 2. *Drugi* će odabrati 15. Strategije su: 4 – 13, 5 – 10, 6 – 9, 7 – 5, 8 – 11. Svi ostali potezi su simetrični.

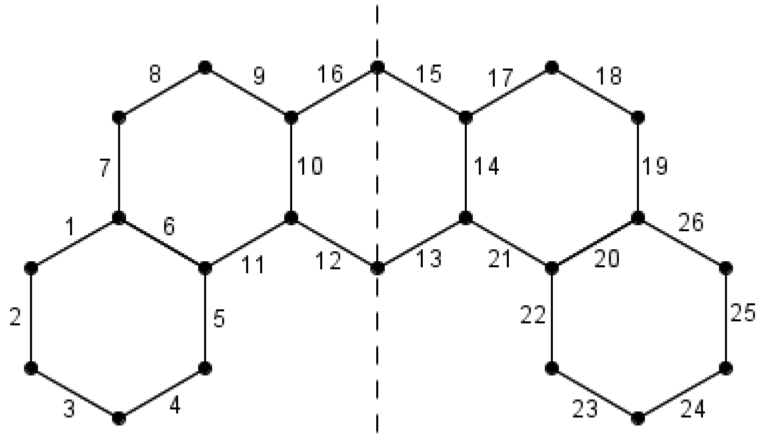
Prijeđimo sada na brid 3. *Drugi* će odigrati 14. Strategije: 1 – 10, 5 – 9, 6 – 16, 7 – 12, 8 – 11. Preostali potezi su ponovno simetrični navedenima.

Došli smo do brida 4. *Drugi* odabire 13 vodeći se istom logikom kao i u dosadašnjim uspješnim potezima. Sada primjećujemo simetriju gdje možemo koristiti krađu strategije, ali treba malo pripaziti prilikom kopiranja poteza.

Još nam je preostao brid 5. *Drugi* bira 1. Na obliku koji je ostao s desne strane, pobjednik je uvijek prvi igrač koji je na potezu (odabirom nekih bridova može se dogoditi da pobijedi drugi, ali samo ako on to želi). Budući da *drugi* želi pobjedu *prvog* na tom spomenutom obliku, on će mu to i dati. Naime, preostao je još jedan potez na lijevoj strani i on će donijeti pobjedu *drugom*. Sada se možemo pitati ne bi li bilo logično da *prvi* odabere onaj jedan potez koji je *usamljen* i okrene igru u svoju korist ako smo već rekli da mogu obojica igrača pobijediti? U tom slučaju, *drugi* će odabrati 9 i osigurati sebi pobjedu.

ZAKLJUČAK: Nakon što smo detaljno razmotrili što se događa prilikom svakog odabira brida *prvog* igrača, možemo zaključiti što smo uočili. U svakom razmotrenom slučaju, pobjednik može biti samo *drugi* igrač. Treba samo napomeniti da ovo nije jedini mogući način odabiranja bridova u kojima pobjeđuje *drugi* igrač. Mi smo pronašli jednu strategiju i nje se on uvijek može pridržavati ako želi pobijediti. Zbog postojanja refleksije, primjećujemo da je bilo dovoljno vidjeti što se događa prilikom odabira bridova 1, ..., 8.

Na taj način smo riješili jednu varijaciju oblika simetrije D_1. Sljedeća zanimljiva varijacija oblika simetrije D_1 je prikazana na slici 4.13.



Slika 4.13: Još jedna varijacija oblika simetrije D_1

Zbog jednostavnosti, opet smo označili sve bridove heksagonalne životinje brojevima $1, 2, ..., 26$. Vidimo da će biti dovoljno tražiti pobjedničku strategiju na samo jednoj strani simetrije. Za drugi dio postupak će ići simetrično.

Prvo počnimo od bridova koji se nalaze u središnjem šesterokutu, onom kroz čija dva vrha prolazi os simetrije. Najjednostavniji slučaj je onaj u kojem *prvi* odabere brid 10. Tada *drugi* odabirom brida 14 razbija igru na dva simetrična dijela i pobjeđuje. Očito je da *prvi* nikada neće odabrati taj brid.

Pogledajmo što se događa kada prvi odabere brid 12. Detaljnim analiziranjem došli smo do zaključka da u tom slučaju uvijek pobjeđuje *prvi* igrač. Pogledajmo sada tu analizu.

- *Drugi* igra 15. *Prvom* je dovoljno odigrati 8. Ako *drugi* odabere neki od preostalih bridova s lijevog šesterokuta, *prvi* će odabrati njemu nasuprotan brid u tom istom šesterokutu. Na obliku s desne strane, pobjednik je uvijek drugi igrač na potezu. Kako god okrenemo, *drugi* ne može pobijediti. Na taj način *prvi* može odigrati tako da njegov potez bude zadnji.

- *Drugi* igra 14. Ako *prvi* odabere brid 16, igra je razbijena na dva simetrična dijela. *Prvi* može kopirati svaki potez *drugog* i odnosi uvijek pobjedu.

- *Drugi* igra 16. Slučaj je isti kao prethodni ako *prvi* odigra 14.

- *Drugi* igra 9. Pobjednik je uvijek *prvi* ako on odigra brid 14 uz sljedeće strategije: $1-3$, $2-18$, $3-7$, $4-7$, $5-18$, $6-2$, $7-18$, $18-5$, $19-7$, $20-24$, $22-25$, $23-26$, $24-20$, $25-22$ i $26-23$. Na oblicima s lijeve i desne strane, pobjednik je uvijek prvi igrač koji je na potezu jer to *prvom* igraču tako odgovara i donosi mu pobjedu. Ovdje je zapis oblika $a-b$ definiran kao: a = potez *drugog*, b = potez *prvog* igrača.

- *Drugi* igra 8. Opet je *prvom* dovoljno odigrati 14 uz strategije: $1-4$, $2-5$, $3-6$, $4-1$, $5-2$, $6-3$, $16-18$, $18-16$, $19-16$, $20-24$, $22-25$, $23-26$, $24-20$, $25-22$ te $26-23$. Potez *drugog* je mogao biti brid 15 kao u prvom slučaju. Ovime samo pokazujemo da strategije koje navodimo nisu nužno jedinstvene.

- *Drugi* igra 7. Uz odabir brida 14, uvijek pobjeđuje *prvi* bez obzira koji potez sljedeći odabrao *drugi*.

- *Drugi* igra 6. Tada *prvi* bira 3 i pobjeđuje uz: $8-15$, $9-15$, $15-8$, $14-16$, $16-19$, $17-8$, $18-16$, $19-16$, $20-17$, $21-18$, $22-16$, $23-20$, $24-21$, $25-20$ i $26-22$. Analogno kada *drugi* igra 3, a *prvi* 6.

- *Drugi* igra 1. *Prvi* bira 4 i donosi pobjedu. Isti slučaj kao i prethodni. Analogno kada *drugi* igra 4, a *prvi* 1.

- *Drugi* igra 2. *Prvom* je dovoljno opet odabrati 14 i odnosi pobjedu: $4-7$, $5-8$, $6-9$, $7-4$, $8-5$, $9-6$, $18-7$, $19-9$, $20-24$, $22-25$, $23-26$, $24-20$, $25-22$ te $26-23$. Analogno kada *drugi* igra 5, pobjedu odnosi *prvi* igrajući brid 14. U oba slučaja ostaje put duljine 7 na kojem je uvijek pobjednik prvi igrač koji je na potezu te oblik s desne strane na kojem također uvijek pobjeđuje prvi na potezu.

- *Drugi* igra 17. *Prvi* bira 8. Pobjedničke strategije: $1-4$, $2-5$, $3-6$, $4-1$, $5-2$, $6-3$, $16-22$, $19-24$, $20-23$, $21-24$, $22-25$, $23-26$, $24-21$, $25-22$ te $26-23$.

- *Drugi* igra 18. *Prvi* igrač odabire 16. S lijeve i desne strane ostali su simetrični oblici i pobjednik je uvijek *prvi*.

- *Drugi* igra 19. *Prvi* bira 16. Isti je slučaj kada *drugi* igra 21 i 26. *Prvi* opet odabire 16. Pobjednik je *prvi* zbog oblika koji su preostali i na kojima uvijek pobjeđuje prvi na potezu.

- *Drugi* igra 22. *Prvi* igra 9 uz pobjedničke strategije: $7-19$, $1-3$, $2-19$, $3-1$, $4-7$, $5-19$, $6-4$, $14-15$, $15-25$, $17-7$, $18-25$, $19-5$, $24-17$, $25-18$ te $26-17$.

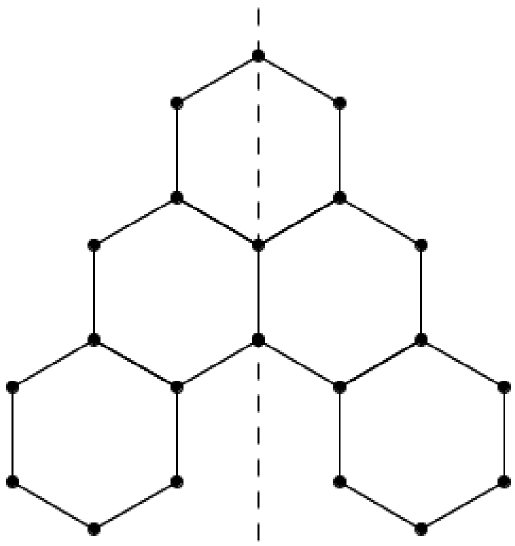
- *Drugi* igra 23. *Prvi* ponovno bira 16. Ostaju simetrični oblici s lijeve i desne strane. Identična je situacija kada *drugi* bira 25. Pobjednik je uvijek *prvi*.

- *Drugi* igra 24. *Prvom* je opet dovoljno odigrati 16 jer su ostala dva oblika na kojima uvijek pobjeđuje prvi na potezu.

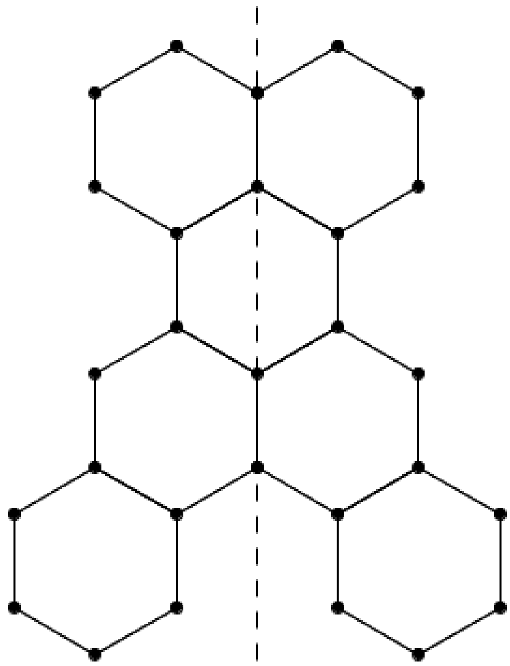
Ovdje možemo stati s analiziranjem i zaključiti tko je pobjednik. Dovoljno je bilo pronaći samo jednu strategiju koja vodi k pobjedi *prvog*. On će se uvijek voditi njome i time si osigurati pobjedu. Moguće da postoji još početnih poteza koji su dobri, ali jedan potez je dovoljan za zaključak.

ZAKLJUČAK: U ovom slučaju, kada os simetrije (refleksija) prolazi kroz dva vrha, pobjednik je *prvi* igrač.

Iako smo napravili poprilično detaljnu analizu grafova simetrije D_1, ne možemo reći da smo gotovi. Navest ćemo još nekoliko grafova kako bismo čitatelju dali uvid u veoma opsežnu problematiku ovog rada.



Slika 4.14: Simetrija D_1 u kojoj os simetrije prolazi kroz jedan vrh i jedan brid

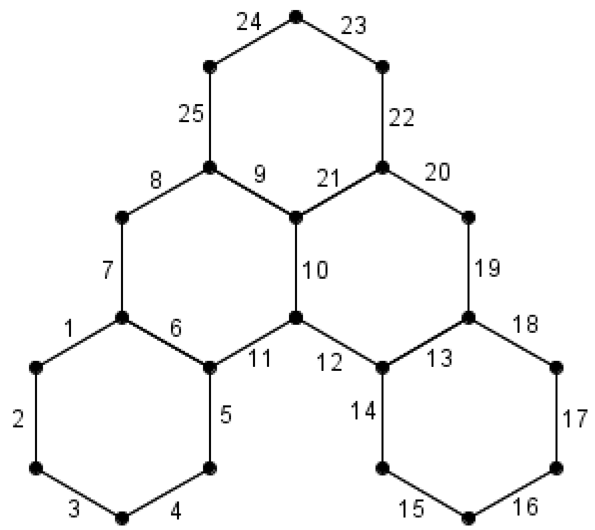


Slika 4.15: Simetrija D_1 u kojoj os simetrije prolazi kroz dva brida

Kao što se može primijetiti, možemo dodavati još šesterokuta i ne narušiti svojstva simetrije D_1.

Za kraj proučavanja ove simetrije, odigrat ćemo igru prikazanu na slici 4.14. Ponovno označavamo bridove brojevima radi lakšeg analiziranja.

Pretpostavimo da je *prvi* igrač odabrao brid 10.



Slika 4.16: Graf simetrije D_1

- Ako je *drugi* odabrao brid 1, *prvom* je dovoljno odabrati 25 za pobjedu. Strategije su sljedeće: 3 – 20, 4 – 13, 5 – 20, 13 – 4, 14 – 5, 15 – 18, 16 – 13, 17 – 5, 18 – 15, 19 – 3, 20 – 3, 22 – 18, 23 – 5. U zapisu oblika $a - b$, a predstavlja potez *drugog*, a b *prvog* igrača. Ovom strategijom smo odmah riješili slučaj 18 – 22 jer možemo pronaći simetrične poteze s druge strane osi refleksije.

- U slučaju odabira brida 2, *prvi* odabire 20. Koji god potez *drugi* napravi, ne može pobijediti. Zbog simetričnosti poteza, zaključak je isti prilikom odabira 17 – 8.

- Pobjedničke strategije za *prvog* ako su odabrani bridovi 3 – 1: 5 – 23, 8 – 23, 13 – 16, 14 – 25, 15 – 18, 16 – 13, 17 – 25, 18 – 15, 19 – 25, 20 – 24, 22 – 25, 23 – 5, 24 – 20 te 25 – 23. Simetrično u slučaju 16 – 18.

- Nakon odabira 4 – 6 preostao je identični skup bridova kao u prethodnom slučaju. Situacija je ista prilikom igranja 15 – 13.

- Identično kao prethodna dva slučaja, biranje 5 – 1 te 14 – 18 donosi pobjedu *prvom* igraču.

- Ako *drugi* odabere brid 7, *prvi* odigra 19. Ostala su tri puta duljine 4 što označava pobjedu *prvog*.

- Na kraju, parovi 24 – 19 i 23 – 7 također lako pokazuju da pobjednička strategija pripada *prvom* igraču.

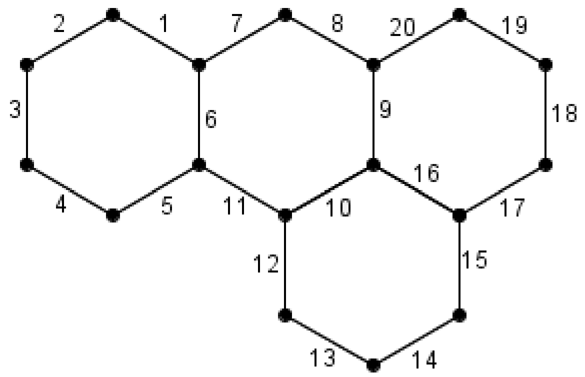
ZAKLJUČAK: Na ovom grafu os simetrije prolazi kroz jedan brid i jedan vrh te pobjeda pripada *prvom* igraču.

Ovdje ćemo stati s analiziranjem heksagonalnih životinja simetrije D_1 te prelazimo na simetriju C_1.

4.8 Simetrija C_1

Ova simetrija nam nije pretjerano zanimljiva. Ona nema nikakva posebna svojstva koja bi nam mogla dati pobjedničku strategiju za nekog od igrača. Zato ćemo odigrati samo jednu igru i vidjeti tko na njoj pobjeđuje.

Pogledajmo jednu varijaciju simetrije C_1 koja se nalazi na slici 4.17. Ovdje ćemo navesti jednu strategiju u kojoj je pobjednik uvijek *prvi* igrač.



Slika 4.17: Simetrija C_1 u kojoj je pobjednik prvi igrač

Jedan mogući potez koji je dobar za *prvog* igrača je odabir brida 3. Na taj način, on će uvijek pobijediti. Obrazložimo tu tvrdnju. Redom ćemo objašnjavati što se događa kada *drugi* odabire svaki od preostalih bridova.

- U slučaju odabira brida 1, *prvi* će odgovoriti igranjem brida 11. Zapisom oblika $a-b$, zapisat ćemo odabir bridova koji vode k pobjedi *prvog*. U ovom slučaju a predstavlja odabir *drugog* te b *prvog*. Strategije su sljedeće: 8 – 14, 9 – 13, 13 – 18, 14 – 19, 15 – 19, 16 – 19, 17 – 19, 18 – 13, 19 – 14 te 20 – 16.

- Na redu je brid 5. Tada *prvi* igra 9. S jedne strane je ostao put duljine 7 koji uvijek donosi pobjedu igraču koji je prvi na potezu, a s druge strane postoji još točno jedan potez. Budući da je *drugi* prvi na potezu, to označava pobjedu *prvog*. Takav slučaj smo već ranije spominjali.

- Na odabir brida 6, *prvi* bira 10. Ostao je put duljine 8. Na njemu je pobjednik uvijek onaj igrač koji je drugi na potezu. U ovom slučaju, to je *prvi* igrač.
- Došli smo do brida 7. *Prvi* igra ponovno 10. Pojavio se put duljine 7 koji donosi uvijek pobjedu igraču koji je prvi na potezu te još točno jedan potez s druge strane. Dakle, *drugi* nikako ne može pobijediti.
- *Drugi* odabire 8 te *prvi* igra 11. Na svaki potez *drugog*, prvi može odgovoriti i naći potez koji će ga dovesti do pobjede: 1 – 16, 6 – 16, 13 – 15, 14 – 18, 15 – 13, 16 – 6, 17 – 19, 18 – 14 i 19 – 17.
- Sljedeći je brid 9. *Prvom* je dovoljno odabrati 5. Opet je preostao put duljine 7 plus jedan potez.
- Odabirom 10, *prvi* pobjeđuje birajući brid 6. Ostao je put duljine 8. Pobjednik je drugi igrač koji je na potezu, odnosno *prvi*.
- *Drugi* bira 11. *Prvi* se odlučuje za 1. Taj slučaj smo već maloprije spomenuli, samo je tada *drugi* igrao 1, a *prvi* 11.
- Odabirom brida 12, *prvi* odgovara biranjem brida 7. Strategije su sljedeće: 5 – 15, 9 – 18, 14 – 5, 15 – 5, 16 – 19, 17 – 20, 18 – 9, 19 – 16 i 20 – 17. Uvijek pobjeđuje *prvi*.
- Sljedeći je brid 13. Na taj potez, *prvi* odgovara igranjem 11. Potezi koji vode pobjedi *prvog*: 1 – 8, 7 – 9, 8 – 16, 9 – 1, 15 – 9, 16 – 8, 17 – 8, 18 – 9, 19 – 9 i 20 – 16.
- Došli smo do 14. Analiziranjem, došli smo do zaključka da je *prvom* poželjno odigrati 6. Ako *drugi* odabere neki od bridova 8, 9 ili 10, *prvi* jednostavno odigra 19. Na odabir 12, 18, 19 i 20, *prvi* bira 16. Još su ostali 16 – 12 i 17 – 9.
- Sljedeći par poteza je 15 – 11. Na svaki potez *drugog*, *prvi* može odgovoriti i pobijediti: 1 – 20, 7 – 13, 8 – 19, 9 – 18, 13 – 7, 18 – 9, 19 – 8 te 20 – 1.
- U slučaju odabira 16 – 11, ostaje put duljine 6 plus jedan potez. To označava pobjedu *prvog*.
- Na redu je par 17 – 7. Poželjno je odigrati: 5 – 10, 9 – 11, 10 – 14, 11 – 19, 12 – 20, 13 – 9, 14 – 10, 19 – 11 i 20 – 12. Pobjednik je isti kao u svakom od gornjih slučajeva.
- Došli smo do 18 – 1. Mogući potezi koji donose pobjedu *prvom*: 5 – 9, 8 – 5, 9 – 5, 10 – 14, 11 – 20, 12 – 9, 13 – 16, 14 – 10, 15 – 11, 16 – 11 i 20 – 5.

- Predzadnja mogućnost *drugog* je odabir brida 19. Tada *prvi* odabire 6. Potezi: 8 – 14, 9 – 14, 10 – 8, 12 – 16, 13 – 10, 14 – 10, 15 – 10, 16 – 12 i 17 – 8.

- Na kraju je preostao odabir brida 20. Na to *prvi* odgovara igranjem brida 1. Dovoljno je provjeriti što se događa s odabirom bridova 5, 10, 11, 12 i 13 jer su ostali potezi simetrični. Strategija: 5 – 18, 10 – 17, 11 – 16, 12 – 17 i 13 – 16.

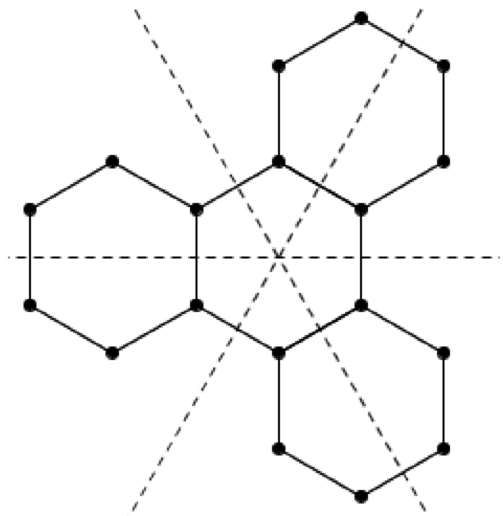
ZAKLJUČAK: Ovime smo pronašli jedan primjer igre u kojem uvijek pobjeđuje *prvi* igrač. Dovoljno je bilo pronaći samo jednu pobjedničku strategiju jer nju uvijek *prvi* igrač može odigrati.

Više se nećemo baviti ovom simetrijom iako postoje razne varijacije oblika.

4.9 Simetrija D_3

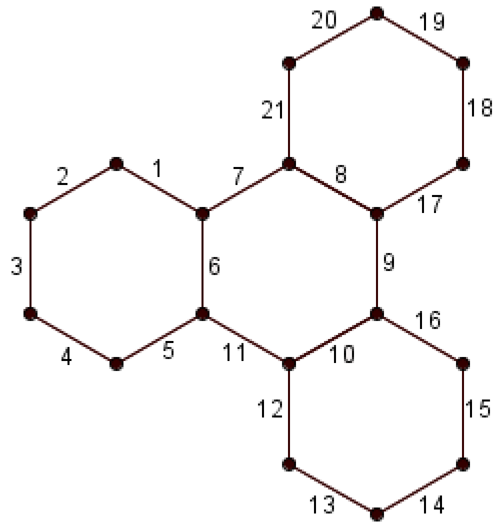
Kod simetrije D_3 proanalizirat ćemo dva oblika. Šesterokutnu životinju, popularno zvanu *propeler*, vidimo na slici 3.7. Ona ima refleksiju i rotaciju za 120°.

Za početak, primijetimo da D_3 ima tri rotacijske, odnosno refleksijske osi. One su prikazane na sljedećoj slici.



Slika 4.18: Rotacijske/refleksijske osi za simetriju D_3

Kao što se može vidjeti, svaka rotacijska os dijeli šesterokutnu rešetku na dva simetrična dijela.



Slika 4.19: Graf simetrije D_3

Pogledajmo koja je strategija prilikom igranja na poliheksu prikazanom na slici 4.19. Primijetimo da nam je dovoljno promatrati samo odabir bridova $1, 2, ..., 11$ koje povlači *prvi* igrač. Prvo promatramo središnji šesterokut. Ako je *prvi* odabrao brid 9, *drugom* igraču je dovoljno odabrati 1 ili 5. Na taj način smo dobili dva poteza i put duljine 8. Znamo da na putu duljine 8 uvijek pobjeđuje drugi igrač koji je na potezu, u ovom slučaju to je upravo *drugi*. Preostala dva poteza ne mijenjaju ishod igre. Samo napomenimo da *drugi* ne smije odabrati niti jedan brid iz središnjeg šesterokuta u ovom slučaju jer će uvijek izgubiti. Time smo vidjeli da *prvi* ne smije odigrati 9 ukoliko želi pobijediti.

Neka sada *prvi* igra 10. *Drugom* je dovoljno odigrati 8 i može koristiti krađu strategije te uvijek pobjeđuje. Analogno se dobije kada *prvi* igra 8, a *drugi* 10.

Prvi se odlučuje za brid 11. Situacija je ista kao u slučaju kada *prvi* odabere 9 jer se brid 11 nalazi na istom položaju kao i 9, ali na drugoj rotacijskoj osi. U ovom slučaju, *drugi* odabere 17 i pobjeđuje. Isti slučaj je kada se *prvi* odluči za 7. Jedina razlika je što tada *drugi* odabire 12.

U središnjem šesterokutu preostao je samo brid 6. *Drugi* će odigrati 16. Koji god potez *prvi* napravi, *drugi* igrač će moći kopirati koristeći krađu strategije.

Do sada smo vidjeli da *prvi* ne smije odabrati niti jedan brid iz središnjeg šesterokuta jer *drugi* uvijek može naći potez koji će ga dovesti do pobjede.

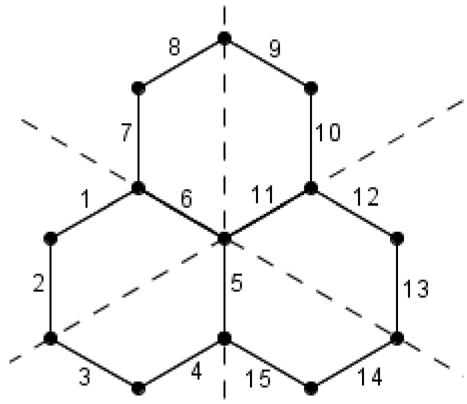
Ako *prvi* igra 1 ili 5, protivnik će odigrati preostali od dva spomenuta brida. Pobjeđuje uvijek *drugi* igrač jer može dobro odgovoriti na svaki potez *prvog*. Navedimo dobru strategiju za svaki potez koja vodi pobjedi *drugog*. Poteze ćemo zapisivati u obliku $a - b$ gdje je a potez *prvog*, a b *drugog* igrača: 3 − 9, 8 − 18, 9 − 3, 17 − 19, 18 − 12, 19 − 17, 20 − 8 te 21 − 17. Primijetimo da je *drugi* mogao odabrati i brid 9 te bi opet pobijedio.

Sada *prvi* bira 2 ili 4. *Drugi* ponovno bira preostali od dva spomenuta brida. Preostao je oblik koji je prikazan na slici 4.12 i već smo pokazali da je u tom slučaju pobjednik uvijek drugi igrač koji je na potezu. Ovdje je to upravo *drugi*.

Samo još preostaje provjeriti što se događa kada *prvi* bira 3. *Drugi* bira 1 i pobjeđuje uz sljedeće strategije: 5 − 9, 8 − 20, 9 − 15, 10 − 13, 11 − 21, 12 − 21, 13 − 10, 14 − 12, 15 − 9, 16 − 12, 17 − 19, 18 − 11, 19 − 17, 20 − 8 i 21 − 11.

ZAKLJUČAK: Na ovom grafu simetrije D_3 pobjeđuje uvijek *drugi* igrač. Rotacijske osi su nam zapravo skratile analizu jer primjećujemo da je bilo dovoljno odigrati igru samo na bridovima $1, ..., 6$ te 9.

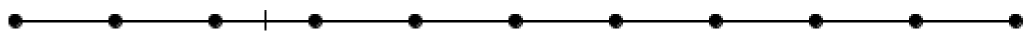
Pogledajmo sada jednu varijaciju simetrije D_3 prikazanu na slici 4.20.



Slika 4.20: Jedna varijacija oblika simetrije D_3

Centar simetrije nalazi se u vrhu gdje su spojena sva tri šesterokuta.

Ako *prvi* igrač odabere jedan od bridova 5, 6 ili 11, preostaje put duljine 10. Pogledajmo tko je pobjednik na tom putu.



Slika 4.21: Put duljine 10

Gledat ćemo samo lijevu stranu puta. Analogno je za desnu. Ako *prvi* odabere peti dio puta, protivnik će odabrati drugi dio. Na taj način će ostati s desne strane put duljine 4, odnosno točno dva poteza. To znači da *drugi* pobjeđuje. Ako *prvi* odabere četvrti dio puta, *drugi* će odabrati sedmi dio i pobijediti. Odabirom trećeg dijela puta, *prvi* je razbio igru na dvije igre. Na lijevoj strani postoji samo jedan mogući potez dok je na desnoj put duljine 6. Već smo vidjeli u uvodnom primjeru da na putu duljine 6 uvijek pobjeđuje prvi igrač koji je na potezu. Stoga, u ovom slučaju *prvi* ima pobjedničku strategiju.

Vratimo se sada na varijaciju simetrije D_3. Budući da je sada *drugi* igrač prvi na potezu i on prvi igra na putu duljine 10, to znači da je on pobjednik. Dakle, *prvi* igrač neće odabrati niti jedan od ta tri brida kao svoj prvi potez.

Ako *prvi* odabere brid 1. Tada je *drugom* dovoljno odigrati 5. Opet se ponavlja maloprije opisana situacija iz puta duljine 10 (put duljine 6 plus jedan potez). Kako god okrenemo, pobjednik je uvijek *drugi* igrač.

Prvi mora promijeniti strategiju i odabire 2. Ostat će put duljine 8 ako protivnik odabere brid 6. *Prvi* igrač igra prvi na tom putu, a već smo pokazali da je tu pobjednik uvijek *drugi* igrač.

Isti zaključak se događa ako igrači igraju strategije $3-5$. Također ostaje put duljine 8 i pobjednik je *drugi*.

U slučaju odabira $4-6$, s jedne strane ostaje točno jedan potez, a s druge put duljine 6. Pobjednik je uvijek *drugi*.

Preostali su nam još bridovi 7 i 8.

Igranjem $7-11$, imamo istu situaciju kao u slučaju $4-6$.

Na kraju još moramo provjeriti što se događa kada *prvi* odabere 8. Proučavanjem tog slučaja, došli smo do zaključka da je pobjednik *drugi* igrač. Njemu je za pobjedu dovoljno odigrati brid 3. Nakon toga, koji god potez *prvi* igrač odigra, protivnik može odgovoriti i pobijediti.

- $1-5$: Ostao je put duljine 4 i uvijek pobjeđuje *drugi*.
- Ako *prvi* odigra 5, protivnik može odigrati doslovno bilo što i to ga dovodi do pobjede.
- $6-13$: Ostala su dva poteza. Pobjednik je opet isti igrač.
- $10-15$: Ponovno ostaju dva poteza.
- $11-13$, $12-5$, $13-5$, $14-5$: Jednostavno se vidi da je pobjednik *drugi*.
- $15-13$: Preostaje put duljine 4, tj. točno dva poteza i pobjeđuje protivnik.

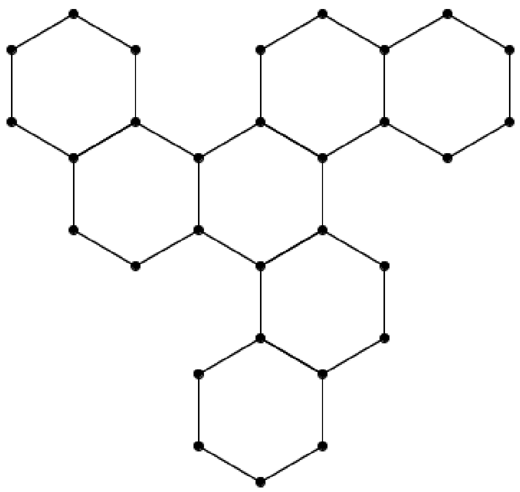
ZAKLJUČAK: Na ovom grafu pobjednik je *drugi* igrač. Zbog tri rotacijske osi, primjećujemo da nam je zapravo bilo dovoljno odigrati samo dva brida, npr. bridove 7 i 8.

Ne možemo sa sigurnošću tvrditi da je pobjednik uvijek *drugi* igrač kada je centar simetrije u vrhu gdje su spojena sva tri šesterokuta.

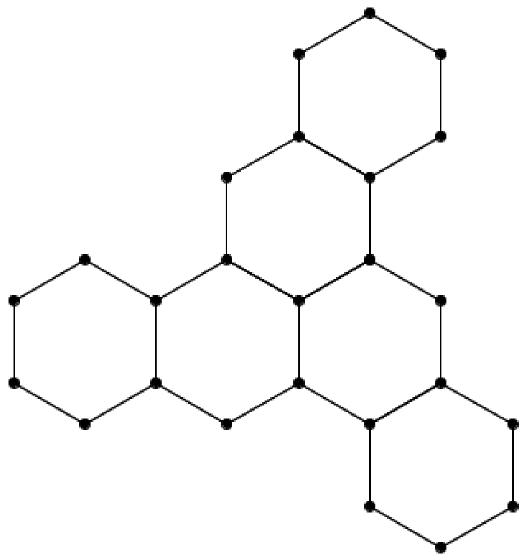
4.10 Simetrija C_3

Na samom kraju preostala nam je igra sparivanja na heksagonalnim životinjama simetrije C_3. Ta simetrija nema refleksiju, ali ima rotaciju za 120°.

Na sljedećim slikama su prikazana dva grafa koja pripadaju simetriji C_3.



Slika 4.22: Jedan graf simetrije C_3



Slika 4.23: Drugi graf simetrije C_3

Zbog velikog broja šesterokuta od kojih su sastavljeni, a time i velikog broja bridova, traženje pobjedničke strategije je dosta komplicirano i time se nećemo baviti.

Poglavlje 5

Zaključak

Nakon svih odigranih igara, navest ćemo sve zaključke na jednom mjestu.

1. Kod lančanih heksagonalnih životinja pobjednik može biti i *prvi* i *drugi* igrač. Ako je broj šesterokuta u lancu paran, onda je pobjednik *prvi* jer se centar simetrije nalazi na polovištu brida. Ako je broj šesterokuta u lancu neparan, pobjednik je *drugi*. Tada se centar simetrije nalazi u središtu središnjeg šesterokuta.

2. Simetrije C_6 i D_6 imaju pobjedničke strategije za *drugog* igrača. Centar simetrije se nalazi u središtu šesterokuta i lako se koristi krađa strategije.

3. Grafovi simetrije C_2 imaju pobjedničke strategije za oba igrača. Prikazali smo dva grafa na kojima je pobjednik *prvi* igrač i jedan graf na kojem pobjeđuje *drugi*. Ovdje je opet presudnu ulogu odigrao centar simetrije, odnosno mjesto na kojem se on nalazi.

4. Oba igrača mogu pobijediti i u simetriji D_2. Igrali smo igru sparivanja na tri grafa. Na jednom je pobijedio *prvi*, a na druga dva *drugi*. Tamo gdje je pobjednik bio *prvi*, centar simetrije se ponovno nalazio na polovištu brida. U druga dva grafa, centar simetrije se nalazio u središtu središnjeg šesterokuta.

5. Odigrali smo četiri igre koje pripadaju simetriji D_1. Na jednom grafu pobjednik je uvijek *drugi*, dok je na ostalima *prvi*. Prva igra koju smo odigrali je bila veoma jednostavna. Svojim prvim potezom, *prvi* igrač je razbio igru na dva jednaka dijela i mogao je koristiti krađu strategije. Za preostale igre formuliramo samo slutnje jer ne možemo tvrditi je to uvijek tako . U drugoj odigranoj igri, os refleksije je sjekla dva brida i pobjednik je bio *drugi* igrač. Os simetrije je u trećoj igri prolazila kroz dva vrha i pobjednik je bio *prvi* (za razliku od dosada spomenutih igra). Na kraju smo napravili igru u kojoj os simetrije prolazi kroz jedan vrh i jedan brid. Pobjednik je ponovno bio *prvi* igrač.

6. Simetrija C_1 ima samo rotaciju za 360° i ona nam nije toliko zanimljiva. Odigrali smo jednu igru i vidjeli da je pobjednik *prvi* igrač.

7. *Drugi* igrač je bio pobjednik na dva grafa simetrije D_3 koja smo odigrali. Na jednom grafu je centar simetrije bio u središtu šesterokuta, a na drugom se centar simetrije nalazio u vrhu u kojem su spojena tri šesterokuta. Na samom kraju smo naveli dva grafa koja pripadaju simetriji C_3, ali njih nismo analizirali.

Rezimirajući sve navedeno, primjećujemo da je dovoljno gledati samo mjesto na kojem se nalazi centar simetrije. Ako je on na polovištu brida, pobjednik je prvi igrač koji je na potezu. Ako je u središtu šesterokuta, pobjeđuje drugi igrač koji je na potezu.

Bibliografija

[1] http://www.wikipedia.org/.

[2] J. H. Conway, *On numbers and games*, Academic Press Inc, London, 1976.

[3] D. Schleicher i M. Stoll, *An introduction to Conway's games and numbers*, 2005, http://arxiv.org/pdf/math.DO/0410026.pdf.

[4] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

Sažetak

U ovom diplomskom radu pronašli smo pobjedničke strategije za neke oblike heksagonalnih životinja. Na početku smo naveli osnovne pojmove vezane uz teoriju kombinatornih igara i teoriju grafova koji su nam bili potrebni za razradu teme. Nakon toga smo naveli neke oblike heksagonalnih životinja na kojima ćemo raditi sparivanje i objasnili razliku između simetrija C_i i D_i, $i = 1, 2, 3, 6$. Posljednje poglavlje posvećeno je analizi nekih simetrija. Najprije smo odigrali igru sparivanja na lančanim poliheksima. Vidjeli smo da pobjednik može biti i *prvi* i *drugi* igrač, ovisno o tome je li lančana heksagonalna životinja sastavljena od parnog ili neparnog broja šesterokuta. Nakon toga smo analizirali simetrije C_6 i D_6 i vidjeli da na njima uvijek pobjeđuje samo *drugi* igrač. Simetrije C_2 i D_2 imaju pobjedničke strategije za oba igrača. Analizu simetrije D_1 smo dosta opsežno napravili i pokazali da pobjednik može biti bilo koji igrač. Simetrija C_1 nije pretjerano zanimljiva pa smo odigrali samo jednu igru i vidjeli da je pobjednik *prvi*. Grafovi simetrije D_3, na kojima smo igrali igru sparivanja, donose pobjedu *drugom* igraču. Za simetriju C_3 smo naveli dva grafa, ali nismo igrali igru sparivanja jer je poprilično komplicirano. Nakon svega, došli smo do zaključka. U igra u kojoj se centar simetrije nalazio u središtu središnjeg šesterokuta, pobjednik je uvijek bio *drugi* igrač. Ako je centar simetrije na polovištu nekog brida, pobjednik je uvijek *prvi* igrač.

Summary

In this graduate thesis we found winning strategies for some forms of hexagonal animals. At the beginning, we have provided the basic concepts of combinatorial game theory and theory of graphs which was necessary for analysing the thesis. After that, we pointed out some forms of hexagonal animals on which we will make matching games and we explained the difference between symmetries C_i and D_i, $i = 1, 2, 3, 6$. The last chapter was dedicated to analysis of some symmetries. First, we played matching game on the chain polihexes. We have seen that the winner may be the *first* or the *second* player, depending on whether the chain hexagonal animal is made up of even or odd number of hexagons. After that, we analyzed symmetries C_6 and D_6 and saw that always wins only the *second* player. Symmetries C_2 and D_2 have winning strategies for both players. We made analysis of symmetry D_1 quite extensively and showed that the winner can be any player. Symmetry C_1 is not very interesting, so we played only one game and saw that the winner is *first* player. Graphs of symmetry D_3, on which we played matching game, give victory to the *second* player. For symmetry C_3 we pointed out two graphs, but we didn't played matching game because it is quite complicated. After all that, we came to a conclusion. In a game in which center of symmetry is located in the center of the central hexagon, the winner is always the *second* player. If the center of symmetry is at midpoint of an edge, the winner is always the *first* player.

Životopis

Rođena sam 18. studenog 1989. godine u Požegi. Pohađala sam OŠ Antuna Kanižlića u Požegi. Nakon završene osnovne škole, upisala sam opći smjer Gimnazije u Požegi. Za vrijeme osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja učila sam njemački, engleski i španjolski jezik. Zbog odličnog uspjeha bila sam oslobođena polaganja mature. Maturirala sam 2008. godine i te iste godine upisala sam Preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2012. upisujem Diplomski sveučilišni studij Financijske i poslovne matematike. Za vrijeme studiranja radila sam neke studentske poslove te sam volontirala u župi Marije Pomoćnice na Knežiji davajući instrukcije iz matematike.