SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Denis Husadžić

DERIVIRANE KATEGORIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Pavle Pandžić

Zagreb, travanj 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojoj baki...
Razloga je previše da bi ih se navelo u ovim uskim marginama.

Sadržaj

Uvod

Homološka algebra se u 20. stoljeću razvila kao neprocjenjiv alat u matematici. Kako su se razvijale (ko)homološke teorije, bila je sve veća potreba za teorijom koja bi ih objedinila u jedan jezik. Upravo je to jedna od osnovnih motivacija za razvoj teorije kategorija, koja ubrzo postaje jezik u kojem se homološka algebra proučava. Moduli i linearna preslikavanja čine kategoriju te se pojam modula poopćuje kroz teoriju Abelovih kategorija dok se kohomološke teorije proučavaju kao funktori koji djeluju na kolančanim kompleksima.

U ovom radu uvodimo osnovni jezik teorije kategorija, pojam funktora, prirodne transformacije te limesa. Svojstva kategorije modula, poput postojanja direktnih suma, jezgri i kojezgri te prisutnost prvog teorema o izomorfizmu aksiomatski se daju za Abelove kategorije. U ovom kontekstu dobivamo rezultate koristeći isključivo univerzalna svojstva, a ne koristeći elemente. Ovakav pristup nam omogućuje prvenstveno da ne ponavljamo argumente za kategorije koje izgledaju kao kategorija modula, ali to nisu. Definiramo aditivnu strukturu na kategoriji koja se često javlja u primjenama. Radi se o tome da izučavajući preslikavanja u određenim kategorijama, poput kategorija Abelovih grupa ili vektorskih prostora, dobivamo bogatiju strukturu nego što je to sam skup. Apstraktno izučavamo svojstva takvih kategorija i pokazujemo da je to nužan kontekst u kojem ima smisla pričati o matricama. Uvodimo pojam Abelove kategorije, što je kategorija s aditivnom strukturom, ali koja uz to posjeduje i jezgre te kojezgre, u kojima imamo dobro definiran pojam slike morfizma te u kojoj vrijedi prvi teorem o izomorfizmu. Posebno izučavamo pojam egzaktnosti bez kojeg kohomološke teorije ne bi niti imale smisla. Zatim pažnju posvećujmo lokalizaciji kategorija, konceptu koji uvelike poopćuje pojam lokalizacije prstena u algebri. Dok za prstene uvodimo inverze nekom skupu elemenata, ovdje uvodimo inverze skupu morfizama te dajemo uvjete (tzv. Oreovi uvjeti) uz koje ćemo imati strukturu razlomaka morfizama. Nastavljamo definirajući kategorije kolančanih kompleksa, nužnih da bi se definirala kohomologija. Dokazana su neka osnovna svojstva kohomologije i veze s egzaktnošću. Naime, u svojevrsnom smislu kohomologija mjeri koliko je kompleks daleko od egzaktnog. Konačno, uvodi se pojam derivirane kategorije, kao lokalizacije kategorije kompleksa po skupu kvazi-izomorfizama - to su oni morfizmi kompleksa koji su izomorfizmi preslikani na kohomologiju. Cilj je poistovjetiti komplekse s izomorfnom kohomologijom, jer upravo je to centralni pojam u homološkoj algebri. Osnovna motivacija za ovaj pojam su derivirani funktori. Jedan od velikih problema u teoriji je mnoštvo funktora koji nisu egzaktni, primjerice hom-funktori, već samo lijevo egzaktni. Derivirani funktor proširuje djelovanje lijevo egzaktnog funktora s Abelove kategorije na kategoriju kompleksa i to na način da se dobiju svojstva egzaktnosti u određenom smislu. Rad zaključujemo s dokazom egzistencije i jedinstvenosti deriviranog funktora.

Zahvaljujem se svome mentoru, prof. dr. sc. Pavlu Pandžiću koji mi je pomogao odabrati temu koja odgovara mojim interesima te na nesebičnoj podršci i pomoći. Također se želim zahvaliti svojoj obitelji koji su mi uz neizmjernu ljubav i podršku omogućili školovanje te otvorili vrata u svijet. Konačno se zahvaljujem svojim prijateljima, posebice kolegama s fakulteta, bez čije pomoći i prijateljstva ne bih uspio.

Poglavlje 1

Teorija kategorija

1.1 Osnove teorije kategorija

U ovom odjeljku uvodimo najvažnije pojmove u teoriji kategorija te izričemo neke bitne rezultate bez dokaza. Čitatelja upućujemo na [7], [2], [4], [3], [6].

Univerzumi

Prije nego što krenemo s ekspozicijom osnova teorije kategorija, potrebno je nešto reći o fundacijama koje ćemo koristiti. Teorija kategorija je visoko apstraktna matematička teorija te bi bi željela uhvatiti totalnost određenih matematičkih objekata, poput kolekcije skupova i grupa, koje prema Russelovom paradoksu ne mogu činiti skup. Ipak, unutar ZFC-a možemo razmatrati kategorije skupova, grupa i slično, koristeći predikate prvog reda poput „$(G, \cdot)$ je grupa" i tako formirati totalnost svih grupa. Tako u tom okviru s obzirom na veličinu klase objekata kategorije su *male* ili *velike*, u prvom slučaju ako imamo skup objekata, a u drugom ako imamo pravu klasu objekata. Često se koristi i pojam *lokalno male* kategorije za veliku kategoriju čije su hom-klase skupovi. S malim kategorijama nećemo imati problema, no, s velikim kategorijama smo dosta ograničeni u konstrukcijama, a tipični primjeri kategorija, poput skupova ili grupa, čine lokalno male kategorije. Jedan od načina da proširimo mogućnosti je uzeti neko konzervativno proširenje ZFC-a poput NBG teorije skupova, ili nekonzervativno poput MK teorije skupova, koje aksiomatiziraju pojam klase, a tada predikatima prvog reda možemo formirati „klasu svih klasa" (za koju se koristi naziv *konglomerat*) te za posljedicu pričati o malim, velikim i *vrlo velikim kategorijama*. Konkretniji pregled može se pronaći u sjajnom članku Michaela Shulmana ([10]). Kako bismo izbjegli takva teorijsko-skupovna razmatranja, okrećemo se rješenju Alexandra Grothendiecka te uvodimo pojam *univerzuma*.

Definicija 1.1.1. Skup $\mathcal{U}$ zovemo *univerzum* ako vrijedi:

(*i*) $y \in x \in U \Rightarrow y \in \mathcal{U}$,

(*ii*) $x \in U \Rightarrow \mathcal{P}(x) \in \mathcal{U}$,

(*iii*) ako je $I \in \mathcal{U}$ i $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ indeksirana familija elemenata iz $\mathcal{U}$, onda je $\bigcup_{\alpha \in I} x_\alpha \in \mathcal{U}$,

(*iv*) $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$.

Zahtjev $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$ sprječava $\emptyset$ i V_ω, prazan skup i skup hereditarno konačnih skupova, da budu univerzumi. V_ω primjerice zadovoljava sve aksiome ZFC-a osim aksioma beskonačnosti. Nije teško vidjeti da univerzum, ako postoji, zadovoljava sve aksiome ZFC-a, dakle je njegov model, a tada prema Gödelovom drugom teoremu o nepotpunosti slijedi da postojanje univerzuma ne možemo dokazati unutar ZFC-a (uz pretpostavku da je ZFC konzistentan). Stoga ZFC-u dodajemo aksiom:

Za svaki skup x postoji univerzum $\mathcal{U}$ takav da je $x \in \mathcal{U}$.

Očito je riječ o nekonzervativnom proširenju ZFC-a, jer kao što smo već naveli, svaki je univerzum $\mathcal{U}$ model ZFC-a te dokazuje njegovu konzistentnost. Drugim riječima, fundacijski okvir u kojem radimo je jači od uobičajenog. Ipak, neznatno je jači budući da je postojanje univerzuma ekvivalentno postojanju nedostižnih kardinala (zaista, $\mathcal{U}$ je univerzum ako i samo ako postoji nedostižni kardinal κ takav da je $\mathcal{U} = V_\kappa$), a to su najslabiji veliki kardinali koji se proučavaju u teoriji skupova. Hijerarhija velikih kardinala seže puno dalje od toga, i nakon cijelog 20.-og stoljeća, još uvijek se postojanje mnogih od njih nije pokazalo inkonzistentno sa ZFC-om. U radu Penelope Maddy *Believing the Axioms* ([8]) daje se vrlo sistematičan pregled nekih aksioma u teoriji skupova s afirmativnim i negativnim arguementima za svaki od njih.

Skup $x \in \mathcal{U}$ zovemo *$\mathcal{U}$-malim.* U nastavku se nećemo posebno obazirati na ovaj formalizam, ako ne bude potrebe, osim u poglavlju 1.3 Lokalizacija kategorija gdje nam se može dogoditi da moramo prijeći na veći univerzum od početnog kako bi imali egzistenciju, što ne bismo mogli unutar ZFC-a, osim za male kategorije, koje nam nisu interesantne u ovom kontekstu.

Kategorije, funktori i prirodne transformacije

Definicija 1.1.2. *Kategorija* $\mathscr{C}$ se sastoji od

- skupa *objekata* $\operatorname{Ob}\mathscr{C}$,
- za svaki uređeni par (a, b) objekata u $\operatorname{Ob}\mathscr{C}$, skupa *morfizama* $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(a, b)$ tako da vrijedi $(a, b) \neq (c, d) \Rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(a, b) \cap \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(c, d) = \emptyset$
- za svaka tri objekta a, b, c u $\operatorname{Ob}\mathscr{C}$, *kompozicije*

$$\circ\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(a, b) \times \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(b, c) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(a, c), \quad (f, g) \mapsto g \circ f$$

- za svaki objekt a u $\operatorname{Ob}\mathscr{C}$, *identitete* $1_a \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(a, a)$,

te vrijedi

- *asocijativnost kompozicije*: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, za svaka četiri objekta a, b, c, d u $\operatorname{Ob}\mathscr{C}$ te proizvoljne morfizme $f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(a, b)$, $g \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(b, c)$, $h \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(c, d)$,
- *neutralnost identitete*: $f \circ 1_a = 1_b \circ f = f$, za svaka dva objekta a, b u $\operatorname{Ob}\mathscr{C}$ te proizvoljan morfizam $f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(a, b)$.

Za kategoriju $\mathscr{C}$ kažemo da je $\mathcal{U}$*-kategorija* ako je $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(a, b) \in \mathcal{U}$ za sve objekte a i b u $\mathscr{C}$, a da je $\mathcal{U}$*-mala* ako je $\mathcal{U}$-kategorija i $\operatorname{Ob}\mathscr{C} \in \mathcal{U}$. Primjetimo da je svaka kategorija $\mathcal{V}$-mala za neki univerzum $\mathcal{V}$. Ako ne naglasimo drugačije, smatrat ćemo da su sve kategorije s kojima radimo $\mathcal{U}$-kategorije, za neki fiksan univerzum $\mathcal{U}$. Skup morfizama u kategoriji $\mathscr{C}$ ćemo označavati s $\operatorname{Mor}\mathscr{C}$. Ponekad ćemo umjesto $a \in \operatorname{Ob} C$ jednostavno reći da je a objekt u kategoriji $\mathscr{C}$, a slično ćemo reći i da je f morfizam u $\mathscr{C}$ podrazumijevajući da je $f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(a, b)$ za neke objekte a i b u $\mathscr{C}$. Koristit ćemo oznaku $f\colon a \to b$ za morfizam $f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(a, b)$ te ćemo a zvati *domenom*, a b *kodomenom* morfizma f i označavat ćemo ih s $\operatorname{dom} f$ i $\operatorname{cod} f$ kada ne ekspliciramo objekte a i b. Indeks u oznaci $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(a, b)$ ćemo ispuštati kada je jasno u kojoj kategoriji se objekti a, b i morfizam f nalaze. Također, ponekad ćemo koristiti konkatenaciju za kompoziciju morfizama, pa ćemo umjesto $g \circ f$ jednostavno pisati gf.

Za kategoriju $\mathscr{C}$ definiramo kategoriju $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ tako da uzmemo $\operatorname{Ob}\mathscr{C}^{\mathrm{op}} := \operatorname{Ob} C$, te $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(a, b) := \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(b, a)$, a kompoziciju definiramo $g \circ^{\mathrm{op}} f := f \circ g$. Lako je provjeriti da je to zaista kategorija koju zovemo *dualnom* kategorijom kategoriji $\mathscr{C}$ te da je $(\mathscr{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathscr{C}$. Ponekad ćemo pisati $f^{\mathrm{op}} \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(a, b)$ za $f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(b, a)$, radi naglašavanja. U teoriji kategorija, kao što ćemo ubrzo vidjeti, svi pojmovi imaju svoje dualne verzije, koje dobijemo tako da „obrnemo" morfizme i kompoziciju. Tako svaku tvrdnju „x ima svojstvo φ u kategoriji $\mathscr{C}$" možemo zamijeniti logički ekvivalentnom tvrdnjom „x ima svojstvo φ^{op} u kategoriji $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$". Za posljedicu imamo da svojstvo φ vrijedi za sve kategorije ako i samo ako φ^{op} vrijedi za sve kategorije, ili općenitije, ako vrijedi implikacija: $\mathscr{C}$ modelira teoriju T povlači da $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ modelira teoriju T, onda je φ teorem teorije T ako i samo ako je φ^{op} teorem teorije T. Naime, ako je φ teorem teorije T, tada za svaku kategoriju $\mathscr{C}$ koja je model teorije T imamo da φ vrijedi u $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, a tada φ^{op} vrijedi u $(\mathscr{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathscr{C}$, odnosno, φ^{op} vrijedi u svim modelima teorije T. Obratan smjer dobijemo budući da je $(\varphi^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \varphi$. Taj princip zovemo *princip dualnosti* i koristit ćemo ga svakom prilikom, a nekad i implicitno.

Ako su kategorije $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$ takve da je $\operatorname{Ob}\mathscr{C} \subseteq \operatorname{Ob}\mathscr{D}$ i $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(a,b) \subseteq \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(a,b)$ za sve objekte a i b u $\mathscr{C}$, kažemo da je $\mathscr{C}$ *potkategorija* kategorije $\mathscr{D}$. Ako, štoviše, vrijedi $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(a,b) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(a,b)$ za sve objekte a i b u $\mathscr{C}$, onda kažemo da je $\mathscr{C}$ *puna* potkategorija.

Definicija 1.1.3. Morfizam $f\colon a \to b$ u kategoriji $\mathscr{C}$ se naziva *izomorfizam* ako postoji $g\colon b \to a$ takav da je $gf = 1_a$ i $fg = 1_b$. Lako je vidjeti da je takav g jedinstven i označavat ćemo ga s f^{-1}.

Očito je f^{-1} također izomorfizam. Ako između objekata a i b u kategoriji $\mathscr{C}$ postoji izomorfizam f, kažemo da su a i b *izomorfni* te to označavamo $a \cong b$. Lako je vidjeti da je $\cong$ relacija ekvivalencije na $\operatorname{Ob} C$. Izomorfizam f između objekata a i b ćemo ponekad označavati $f\colon a \xrightarrow{\sim} b$. Za izomorfizam ponekad kažemo i da je *invertibilan* morfizam.

Primjer 1.1.4.

(*i*) Kategoriju čiji su objekti $\mathcal{U}$-mali skupovi, a morfizmi funkcije među njima označavamo $\mathrm{Set}_{\mathcal{U}}$. Obično nećemo eksplicitno pisati indeks $\mathcal{U}$, ako je iz konteksta jasno o kojem se univerzumu radi.

(*ii*) Kategoriju čiji su objekti $\mathcal{U}$-male grupe, a morfizmi homomorfizmi među njima označavat ćemo s $\mathrm{Grp}_{\mathcal{U}}$, ali kao i sa skupovima, nećemo posebno naglašavati univerzum $\mathcal{U}$ u kojem radimo.

(*iii*) Općenito, za sve algebarske strukture s odgovarajućim homomorfizmima među njima imamo odgovarajuću kategoriju. Ističemo kategoriju monoida Mon, kategoriju prstenova s jedinicom Ring te kategoriju (lijevih) R-modula $\mathrm{Mod}(R)$ za neki prsten R, te posebne slučajeve kategoriju Abelovih grupa $\mathrm{Ab} = \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ i kategoriju vektorskih prostora nad poljem k, $\mathrm{Vect}_k = \mathrm{Mod}(k)$.

(*iv*) Primjeri kategorija u geometriji su kategorija topoloških prostora i neprekidnih funkcija Top te kategorija diferencijabilnih mnogostrukosti i glatkih preslikavanja Diff. Za kategoriju metričkih prostora imamo nekoliko kandidata za morfizme, primjerice uniformno neprekidne funkcije, kontrakcije i Lipshitzove funkcije.

(*v*) Kategorija u kojoj su identitete jedini morfizmi naziva se *diskretnom* kategorijom. Primjetimo da je diskretna kategorija u principu skup, pa posebno svaki skup možemo shvatiti kao kategoriju. Diskretnu kategoriju s jednim objektom ćemo označavati s $*$.

(*vi*) Kategorija s jednim objektom može se poistovjetiti s monoidom. Zaista, postojanje identitete i asocijativnost kompozicije daju nam strukturu monoida na *hom-skupu* $\mathrm{Hom}(*, *)$.

(*vii*) Kategorija s jednim objektom u kojoj su svi morfizmi invertibilni poistovjećuje se s grupom.

(*viii*) Kategorija u kojoj svi hom-skupovi sadrže najviše jedan element poistovjećuje se s preduređajem. Ako su $\mathrm{Hom}(a, b)$ i $\mathrm{Hom}(b, a)$ oba neprazni, nužno je $a \cong b$. Preduređaj u kojem su svi izomorfni objekti jednaki zovemo *parcijalni uređaj*. Morfizme u preuređaju obično označavamo s $a \leq b$. Zahtjev da su izomorfni objekti jednaki u parcijalnom uređaju nije ništa drugo nego antisimetričnost relacije $\leq$ među objektima.

Definicija 1.1.5. Morfizam $f : a \to b$ u kategoriji $\mathscr{C}$ se naziva

- *monomorfizam* ako za sve morfizme $g, h : a' \to a$ vrijedi $fg = fh \Rightarrow g = h$,
- *epimorfizam* ako za sve morfizme $g, h : b \to b'$ vrijedi $gf = hf \Rightarrow g = h$,
- *bimorfizam* ako je monomorfizam i epimorfizam,
- *rascijepljeni monomorfizam* ili *sekcija* ako postoji $g : b \to a$ takav da je $gf = 1_a$,
- *rascijepljeni epimorfizam* ili *retrakcija* ako postoji $g : b \to a$ takav da je $fg = 1_b$.

Monomorfizam i epimorfizam su međusobno dualni pojmovi te ćemo koristiti oznake $f : a \rightarrowtail b$ za monomorfizam i $g : a \twoheadrightarrow b$ za epimorfizam. Očito je sekcija (retrakcija) monomorfizam (epimorfizam) te je svaki izomorfizam bimorfizam, no manje je očito da bimorfizmi nisu nužno izomorfizmi u svakoj kategoriji. Klasičan primjer je inkluzija prstenova s jedinicom $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ koja je bimorfizam koji očito nije izomorfizam prstenova. Lako se vidi da je bimorfizam koji je sekcija ili retrakcija nužno izomorfizam.

Očito je kompozicija monomorfizama (epimorfizama, bimorfizama, izomorfizama) opet monomorfizam (epimorfizam, bimorfizam, izomorfizam). Također ako je kompozicija gf monomorfizam, onda je i f monomorfizam, odnosno, ako je gf epimorfizam, onda je i g epimorfizam.

Definicija 1.1.6. *Funktor* između kategorija $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$ određen je funkcijom $F\colon \operatorname{Ob}\mathscr{C} \to \operatorname{Ob}\mathscr{D}$ te familijom funkcija $F_{ab}\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(a,b) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(Fa, Fb)$, za sve objekte a i b u kategoriji $\mathscr{C}$ tako da vrijedi $F_{aa}(1_a) = 1_{Fa}$, za sve objekte a u $\mathscr{C}$, te $F_{ac}(gf) = F_{bc}g \circ F_{ab}f$, za sve objekte a, b, c i morfizme $f\colon a \to b$, $g\colon b \to c$ u $\mathscr{C}$.

Obično ćemo pisati Ff za neki morfizam $f\colon a \to b$ umjesto $F_{ab}f$. Za funktor $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ ponekad kažemo da je *kovarijantan* funktor s kategorije $\mathscr{C}$ u kategoriju $\mathscr{D}$, dok $F\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{D}$ ponekad nazivamo *kontravarijantnim* funktorom s kategorije $\mathscr{C}$ u kategoriju $\mathscr{D}$. Za svaku kategoriju $\mathscr{C}$ postoji istaknuti funktor $1_{\mathscr{C}}\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ koji na objektima i morfizmima djeluje kao identiteta. Također, jasno je da funktore $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ i $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ možemo komponirati tako da komponiramo odgovarajuće funkcije iz definicije 1.1.6 te je takva kompozicija asocijativna i vrijedi $1_{\mathscr{D}} \circ F = F$ te $F \circ 1_{\mathscr{C}} = F$ za $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$. Tako možemo formirati kategoriju $\mathrm{Cat}_{\mathcal{U}}$ čiji su objekti $\mathcal{U}$-male kategorije, a morfizmi funktori među njima. Jasno, to više neće biti $\mathcal{U}$-mala kategorija.

Za svaki funktor $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ možemo definirati $F^{\mathrm{op}}\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{D}^{\mathrm{op}}$ tako da uzmemo

$$\begin{aligned} F^{\mathrm{op}}a &:= Fa, && \forall a \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}, \\ F^{\mathrm{op}}_{ab}f &:= F_{ba}f, && \forall a, b \in \mathscr{C},\ \forall f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(a,b). \end{aligned}$$

Lako je provjeriti da je to zaista funktor, odnosno, da čuva identitete i kompoziciju te da vrijedi $(F^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = F$.

Definicija 1.1.7. Neka je $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funktor.

- F je *izomorfizam* ako postoji funktor $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ takav da je $GF = 1_{\mathscr{C}}$ i $FG = 1_{\mathscr{D}}$. Kao i kod izomorfizma objekata u kategoriji, takav G je nužno jedinstven i označavat ćemo ga F^{-1}. Za kategorije $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$ između kojih postoji izomorfizam kažemo da su *izomorfne* kategorije i pišemo $\mathscr{C} \cong \mathscr{D}$.

- F je *vjeran* ako je F_{ab} injekcija, za sve objekte a, b u $\mathscr{C}$.

- F je *pun* ako je F_{ab} surjekcija, za sve objekte a, b u $\mathscr{C}$.

- F je *potpuno vjeran* ako je F_{ab} bijekcija, za sve objekte a, b u $\mathscr{C}$.

- F je *konzervativan* ako *reflektira* izomorfizme, tj. ako vrijedi da je f izomorfizam čim je to Ff.

Svaki funktor čuva izomorfizme, tj. Ff je izomorfizam kad god je to f, što lako slijedi budući da svaki funktor čuva kompozicije i identitete. Svaki potpuno vjeran funktor je konzervativan.

Vjeran funktor reflektira monomorfizme i epimorfizme, što slijedi direktno iz injektivnosti na hom-skupovima, a onda i bimorfizme, ali ne nužno i izomorfizme. Razlog tome je što inverz morfizma Ff ne mora biti u slici funktora F.

Ako imamo dva funktora čija je kompozicija dobro definirana te ako oba funktora zadovoljavaju neko od svojstava iz definicije 1.1.7, onda to zadovoljava i njihova kompozicija.

Primjer 1.1.8.

(i) Za neku fiksnu kategoriju $\mathscr{C}$ te za neki objekt c u $\mathscr{C}$, s $\Delta_I c\colon I \to \mathscr{C}$ ćemo označavati *konstantni* funktor koji svakom objektu u I pridružuje objekt c, a svim morfizmima u I identitetu na c. U slučaju $I = *$, pisat ćemo jednostavno c za konstantan funktor $\Delta_* c$.

(ii) Neka je kategorija $\mathscr{C}$ $\mathcal{U}$-kategorija. Tada za svaki objekt a u $\mathscr{C}$ imamo funktore $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(a,-)\colon \mathscr{C} \to \mathrm{Set}_{\mathcal{U}}$ i $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,a)\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}_{\mathcal{U}}$ koje objektima pridružuju hom-skupove, a za morfizam $f\colon x \to y$ u $\mathscr{C}$ definiramo $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(a,f) := f \circ -$, odnosno $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(f,a) := - \circ f$, koje zovemo post- i predkompozicija, a eksplicitno ih opisujemo sa $s \mapsto f \circ s$, $s \mapsto s \circ f$. Prvi od definiranih funktora zovemo *kovarijantnim hom-funktorom*, a drugi *kontravarijantnim hom-funktorom*.

Definicija 1.1.9. Neka je $\{\mathscr{C}_i\}_{i\in I}$ familija kategorija. Definiramo kategoriju $\prod_{i\in I}\mathscr{C}_i$ tako da uzmemo

$$\mathrm{Ob}\prod_{i\in I}\mathscr{C}_i := \prod_{i\in I}\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}_i, \quad \mathrm{Hom}_{\prod_{i\in I}\mathscr{C}_i}(\{a_i\},\{b_i\}) := \prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_i}(a_i,b_i).$$

Kategoriju $\prod_{i\in I}\mathscr{C}_i$ zovemo *produktnom kategorijom* familije kategorija $\{\mathscr{C}_i\}_{i\in I}$.

Funktor $F\colon \mathscr{C}\times\mathscr{D} \to \mathscr{E}$ ponekad zovemo i *bifunktorom*. $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,-)\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}}\times\mathscr{C} \to \mathrm{Set}_{\mathcal{U}}$ je tipičan primjer bifunktora za $\mathcal{U}$-kategoriju $\mathscr{C}$.

Definicija 1.1.10. Za funktore $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D} \leftarrow \mathscr{E} : G$ definiramo *koma* kategoriju, u oznaci $(F \downarrow G)$, čiji su objekti morfizmi $\varphi\colon Fc \to Ge$ u kategoriji $\mathscr{D}$, za neke objekte c u $\mathscr{C}$, e u $\mathscr{E}$, a morfizmi uređeni parovi $(f,g) \in \mathrm{Mor}\,\mathscr{C} \times \mathrm{Mor}\,\mathscr{E}$ takvi da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} Fc \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "Ff"'] & Ge \arrow[d, "Gg"] \\ Fc' \arrow[r, "\varphi'"] & Ge' \end{tikzcd}$$

Od posebne važnosti će nam biti slučaj $c : * \to \mathscr{C} \leftarrow \mathscr{C} : 1_{\mathscr{C}}$ kad ćemo koma kategoriju $(c \downarrow 1_{\mathscr{C}})$ označavati s $c/\mathscr{C}$ i ponekad zvati *kategorijom objekata pod* c i dualno, $(1_{\mathscr{C}} \downarrow c)$ ćemo označavati s $\mathscr{C}/c$ te zvati *kategorijom objekata nad* c.

Definicija 1.1.11. Neka su $F, G\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funktori. Familiju morfizama $\{\alpha_c\}_{c \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}}$, pri čemu je $\alpha_c\colon Fc \to Gc$ morfizam u $\mathscr{D}$ za sve c u $\mathscr{C}$, zovemo *prirodnom transformacijom* između funktora F i G ako za svaki morfizam $f\colon c \to c'$ komutira dijagram

$$\begin{tikzcd}
Fc \arrow[r, "\alpha_c"] \arrow[d, "Ff"'] & Gc \arrow[d, "Gg"] \\
Fc' \arrow[r, "\alpha_{c'}"] & Gc'
\end{tikzcd}$$

Morfizam α_c zovemo *komponentom* prirodne transformacije α u c.

Prirodnu transformaciju ćemo obično označavati $\alpha\colon F \Rightarrow G$. Za svaki funktor F postoji prirodna transformacija $1_F\colon F \Rightarrow F$, $(1_F)_c := 1_{Fc}$. Ako je $\alpha\colon F \Rightarrow G$ i $\beta\colon G \Rightarrow H$, onda možemo definirati $(\beta \circ \alpha)_c := \beta_c \circ \alpha_c$. Lako se vidi da je $\beta \circ \alpha\colon F \Rightarrow H$ prirodna transformacija. Tako definiranu kompoziciju zovemo *vertikalnom kompozicijom*, ali češće ćemo je zvati samo kompozicijom. Prirodna transformacija 1_F je identiteta za kompoziciju prirodnih transformacija te je ta kompozicija očito asocijativna. Na taj smo način za kategorije $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$ definirali kategoriju $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ čiji su objekti funktori između $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$, a morfizmi prirodne transformacije. $\mathrm{Hom}_{[\mathscr{C},\mathscr{D}]}(F, G)$ češće ćemo označavati s $\mathrm{Nat}(F, G)$.

Primjetimo da u slučaju da je kategorija I $\mathcal{U}$-mala, a kategorija $\mathscr{C}$ $\mathcal{U}$-kategorija imamo da je i kategorija $[I, \mathscr{C}]$ ponovo $\mathcal{U}$-kategorija. To se jednostavno vidi, budući da je $\mathrm{Nat}(F, G) \subseteq \prod_{i \in \mathrm{Ob}\, I} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Fi, Gi)$. Ovo nam daje jednostavan kriterij za odrediti „veličinu" kategorije $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ - to je $\mathcal{V}$-kategorija za univerzum $\mathcal{V}$ za koji je $\mathscr{C}$ $\mathcal{V}$-mala, a $\mathscr{D}$ $\mathcal{V}$-kategorija.

Proučimo sad situaciju prikazanu u dijagramu

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, bend left, "F", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right, "F'"', ""{name=D}] \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\alpha"] & \mathscr{D} \arrow[r, bend left, "G", ""{name=U2, below}] \arrow[r, bend right, "G'"', ""{name=D2}] \arrow[Rightarrow, from=U2, to=D2, "\beta"] & \mathscr{E}
\end{tikzcd}$$

pri čemu su $F, F'\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ i $G, G'\colon \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ funktori, a $\alpha\colon F \Rightarrow F'$ i $\beta\colon G \Rightarrow G'$ prirodne transformacije.

Za proizvoljan morfizam $f\colon c \to c'$ u $\mathscr{C}$ imamo komutativnu kocku

$$\begin{tikzcd}
& G'Fc \arrow[rr, "G'\alpha_c"] \arrow[dd, "G'Ff" near start] & & G'F'c \arrow[dd, "G'F'f"] \\
GFc \arrow[ur, "\beta_{Fc}"] \arrow[rr, crossing over, "G\alpha_c" near start] \arrow[dd, "GFf"'] & & GF'c \arrow[ur, "\beta_{F'c}"] & \\
& G'Fc' \arrow[rr, "G'\alpha_{c'}" near start] & & G'F'c' \\
GFc' \arrow[ur, "\beta_{Fc'}"] \arrow[rr, "G\alpha_{c'}"] & & GF'c' \arrow[ur, "\beta_{F'c'}"] \arrow[from=uu, crossing over, "GF'f" near end] &
\end{tikzcd}$$

pri čemu su stranice kocke komutativne zbog prirodnosti od α i β. Definirajmo

$$(\beta * \alpha)_c := \beta_{F'c} \circ G\alpha_c = G'\alpha_c \circ \beta_{Fc}, \ \forall c \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}.$$

Ovakva definicija je dobra zbog gornjeg komutativnog dijagrama te je očito riječ o prirodnoj transformaciji $\beta * \alpha\colon GF \Rightarrow G'F'$ (napisati odgovarajući algebarski dokaz je trivijalno, ali gornja komutativna kocka ih nudi nekoliko odjednom). Operaciju $*$ zovemo *horizontalna kompozicija* prirodnih transformacija. Specijalni su slučajevi $(1_G * \alpha)_c = G\alpha_c$ za $G = G'$, $\beta = 1_G$, te $(\beta * 1_F)_c = \beta_{Fc}$ za $F = F'$, $\alpha = 1_F$. U skladu s tim uvodimo i posebne oznake $F\alpha = 1_F * \alpha$ te $\alpha F = \alpha * 1_F$, a prirodno je onda uvesti konvenciju da se $*$ zamijeni konkatenacijom, dok ćemo $\circ$ eksplicitno pisati. Vertikalna i horizontalna kompozicija su vezane *zakonom zamjene* koji u slučaju dijagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\mathscr{C} \arrow[r, bend left=60] \arrow[r] \arrow[r, bend right=60] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\alpha'"] & \mathscr{D} \arrow[r, bend left=60] \arrow[r] \arrow[r, bend right=60] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\beta"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\beta'"] & \mathscr{E}
\end{tikzcd}$$

glasi $(\beta' \circ \beta)(\beta \circ \alpha) = (\beta'\beta) \circ (\beta\alpha)$, što se lako pokazuje da zaista vrijedi.

Za prirodnu transformaciju $\alpha\colon F \Rightarrow G$ kažemo da je *izomorfizam* ako postoji prirodna transformacija $\beta\colon G \to F$ takva da je $\beta \circ \alpha = 1_F$, $\alpha \circ \beta = 1_G$. Kao i dosada, takav β je nužno jedinstven te uvodimo oznaku $\beta = \alpha^{-1}$, odnosno $F \cong G$ i kažemo da su F i G izomorfni funktori. Da je α invertibilna prirodna transformacija može se karakterizirati time da su sve komponentne α_c invertibilni morfizmi.

Yonedina lema i Yonedino ulaganje

Za $\mathcal{U}$-kategoriju $\mathscr{C}$ definiramo funktor $\mathrm{Y}\colon \mathscr{C} \to [\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}_{\mathcal{U}}]$ formulom $c \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, c)$.

Teorem 1.1.12. (Yonedina lema) *Neka je $\mathscr{C}$ $\mathcal{U}$-kategorija, $F\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}_{\mathcal{U}}$ funktor i c objekt u $\mathscr{C}$. Tada je $\mathrm{Nat}(\mathrm{Y}c, F) \cong Fc$, i dani izomorfizam je prirodan u c i u F.*

Korolar 1.1.13. Y *je potpuno vjeran funktor.*

Dokaz. Prema Yonedinoj lemi vrijedi $\mathrm{Nat}(\mathrm{Y}c, \mathrm{Y}c') \cong \mathrm{Hom}(c, c')$. □

Stoga, funktor Y nazivamo *Yonedinim ulaganjem.* Primjetimo da tada imamo da $\mathrm{Hom}(-, c) \cong \mathrm{Hom}(-, c')$ povlači $c \cong c'$, jer potpuno vjerni funktori reflektiraju izomorfizme.

Lako se pokaže i sljedeći korolar.

Korolar 1.1.14. *Za $\mathcal{U}$-kategorije $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$, funktor $[-, Y]\colon [\mathscr{D}, \mathscr{C}] \to [\mathscr{D}, [\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}_{\mathcal{U}}]]$ definiran s*

$$\begin{aligned} [F, Y] &:= Y \circ F, && \forall F\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C} \\ [\alpha, Y] &:= Y\alpha, && \forall F, F'\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}, \forall \alpha\colon F \Rightarrow F' \end{aligned}$$

je potpuno vjeran.

Limesi

Proučimo sad jednu od najvažnijih kategorijskih konstrukcija.

Definicija 1.1.15. Za kategoriju $\mathscr{C}$ kažemo da je t *terminalan* objekt ako za svaki objekt c u $\mathscr{C}$ postoji jedinstveni morfizam $!_c\colon c \to t$. Dualno, *inicijalan* objekt i je terminalan u $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, ili eksplicitno, i je takav da za svaki objekt c u $\mathscr{C}$ postoji jedinstveni morfizam $!_c\colon i \to c$. Objekt koji je i terminalan i inicijalan zovemo *nul-objektom.*

Terminalan objekt je jedinstven do na jedinstveni izomorfizam, tj. ako su a i b oba terminalni postoji jedinstveni morfizmi $a \to b$ i $b \to a$, a njihove kompozicije su tada nužno identitete na a i b, jer su $1_a\colon a \to a$ i $1_b\colon b \to b$ jedini morfizmi u $\mathrm{Hom}(a, a)$, odnosno $\mathrm{Hom}(b, b)$. Također je lako vidjeti da objekt izomorfan terminalnom je i sam nužno terminalan.

Ako kategorija $\mathscr{C}$ ima nul-objekt 0, onda za sve objekte a i b postoji jedinstveni morfizam $0_{ab}\colon a \to 0 \to b$ koji zovemo *nul-morfizmom.* Očito je $f \circ 0 = 0$ i $0 \circ f = 0$, za proizvoljan morfizam f. Primjetimo da nema potrebe pisati indekse u oznaci nul-morfizma, što obično niti nećemo raditi.

Neka su I i $\mathscr{C}$ neke kategorije, $\Delta_I\colon \mathscr{C} \to [I, \mathscr{C}]$ funktor koji svakom objektu c u $\mathscr{C}$ pridruži konstantan funktor $\Delta_I c\colon I \to \mathscr{C}$. Jasno, nismo rekli kako Δ_I djeluje na morfizmima, no nemamo puno izbora. Naime, iz prirodnosti lako slijedi da je $\mathrm{Nat}(\Delta_I c, \Delta_I d) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(c, d)$, tj. prirodna transformacija između konstantnih funktora nužno ima sve komponente jednake nekom morfizmu s c u d. Dakle, za morfizam $f\colon c \to d$ definiramo $(\Delta_I f)_i = f$.

Za neki funktor $F\colon I \to \mathscr{C}$, *konus* nad F s vrhom c je prirodna transformacija $\alpha\colon \Delta_I c \to F$. Morfizam konusa je morfizam u koma kategoriji $(\Delta_I \downarrow F)$, pri čemu je $F\colon * \to [I, \mathscr{C}]$ konstantan funktor pridružen funktoru F.

Definicija 1.1.16. Uz prethodne oznake, terminalan objekt $\pi\colon \Delta_I \lim_I \Rightarrow F$ u $(\Delta_I \downarrow F)$ nazivamo *univerzalnim konusom*, a $(\lim_I F, \pi)$ *limesom* funktora F. Dualno, *kolimes* funktora F je $(\mathrm{colim}_I F, \iota)$ pri čemu je $\iota\colon F \Rightarrow \Delta_I \mathrm{colim}_I F$ univerzalni kokonus.

Limesi i kolimesi, kao terminalni, odnosno inicijalni objekti, su nužno jedinstveni do na jedinstven izomorfizam. Ako „raspakiramo" definiciju limesa vidjet ćemo da su oni opisani tzv. *univerzalnim svojstvima*. Neka su dane neke kategorije I i $\mathscr{C}$ te funktor $F\colon I \to \mathscr{C}$. Tada je (L, π) limes funktora F ako i samo ako je $Ff \circ \pi_j = \pi_{j'}$ za svaki morfizam $f\colon j \to j'$ u I te ako za svaku familiju morfizama $\varphi_i\colon c \to Fi$ za koju je $Ff \circ \varphi_j = \varphi_{j'}$, za sve morfizme $f\colon j \to j'$ u I, postoji jedinstveni morfizam $\bigwedge_{i\in I} \varphi_i\colon c \to L$ takav da je $\pi_j(\bigwedge_{i\in I} \varphi_i) = \varphi_j$.

$$\begin{tikzcd}
& c \arrow[d, dashed, "\bigwedge_I \varphi_i"] \arrow[ddl, bend right, "\varphi_j"'] \arrow[ddr, bend left, "\varphi_{j'}"] & \\
& \lim_I F \arrow[dl, "\pi_j"'] \arrow[dr, "\pi_{j'}"] & \\
Fj \arrow[rr, "Ff"] & & Fj'
\end{tikzcd}$$

Kolimesi se opisuju univerzalnim svojstvima dualno, a morfizam induciran familijom $\varphi_i\colon Fi \to c$ ćemo označavati $\bigvee_{i\in I} \varphi_i$. Neka su $F, G\colon I \to \mathscr{C}$ funktori i $\alpha\colon F \Rightarrow G$ prirodna transformacija. Tada možemo definirati $\lim_I \alpha := \bigwedge_{i\in I}(\alpha_i \pi_i)\colon \lim_I F \to \lim_I G$, te je takvo preslikavanje funktorijalno, zbog jedinstvenosti induciranog morfizma univerzalnim svojstvom. Dakle, ako postoje limesi svih funktora iz $[I, \mathscr{C}]$, tada je $\lim_I\colon [I, \mathscr{C}] \to \mathscr{C}$ funktor.

Komponente univerzalnih (ko)konusa nazivat ćemo *kanonskim morfizmima*. Kad govorimo o limesima, obično ne govorimo o limesu funktora kako smo to maloprije definirali, već o limesu u kategoriji $\mathscr{C}$ oblika I ili limesu nad dijagramom F u kategoriji $\mathscr{C}$.

Primjer 1.1.17. Neka je $\mathscr{C}$ kategorija.

(*i*) Neka je $\{a_i\}_{i\in I}$ familija objekata u $\mathscr{C}$. *Produkt* familije objekata $\{a_i\}$ limes je funktora $a\colon I \to \mathscr{C}$, $i \mapsto a_i$ te ga označavamo s $\prod_{i\in I} a_i$. Dualno, *koprodukt* familije $\{a_i\}$ je kolimes istog funktora te ga označavamo s $\coprod_{i\in I} a_i$. Univerzalno svojstvo produkta glasi: $(p, \{\pi_i\})$, $\pi_i\colon p \to a_i$ je produkt ako za svaku familiju morfizama $\varphi_i\colon c \to a_i$ postoji jedinstveni $\varphi\colon c \to p$ takav da je $\pi_i\varphi = \varphi_i$. Dualno za koprodukt.

(*ii*) Neka su $f, g\colon a \to b$ morfizmi u $\mathscr{C}$ te neka je I kategorija $* \rightrightarrows \bullet$, a $F\colon I \to \mathscr{C}$ funktor koji dva netrivijalna morfizma u I šalje u f i g. *Ujednačitelj* morfizama f i g je limes funktora F, a *koujednačitelj* njegov kolimes. Ujednačitelj i koujednačitelj označavamo redom s $\operatorname{eq}(f,g)$ i $\operatorname{coeq}(f,g)$. Univerzalno svojstvo glasi: (e, ε) je ujednačitelj morfizama f, g ako je $fe = ge$ te ako za svaki morfizam $h\ a' \to a$ za koji je $fh = gh$ postoji jedinstveni morfizam $h'\colon a' \to e$ takav da je $eh' = h$. Lako se vidi da je ε nužno monomorfizam.

(*iii*) *Povlak* je limes nad dijagramom $a \to c \leftarrow b$, a *kopovlak* kolimes dijagrama $a \leftarrow c \to b$. Lako je rekonstruirati univerzalna svojstva po uzoru na prethodne primjere.

Kažemo da je kategorija *$\mathcal{U}$-potpuna* ako ima sve limese indeksirane $\mathcal{U}$-malim kategorijama, a *konačno potpuna* ako ima limese indeksirane konačnim kategorijama. Dualno se definira *kopotpunost*.

Propozicija 1.1.18. *Kategorija* $\mathrm{Set}_{\mathcal{U}}$ *je $\mathcal{U}$-potpuna i kopotpuna.*

Za funktor $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ kažemo da je *$\mathcal{U}$-neprekidan* ako *čuva* $\mathcal{U}$-male limese. Preciznije, za $\mathcal{U}$-malu kategoriju I te proizvoljan funktor $G\colon I \to \mathscr{C}$, vrijedi da ako je $(\lim G, \pi)$ limes funktora G, onda je $(F \lim G, F\pi)$ limes funktora FG. *Koneprekidan* funktor čuva kolimese. Može se provjeriti da su i kovarijantni i kontravarijantni hom-funktori neprekidni. Štoviše, njihova neprekidnost karakterizira limese (takvu definiciju limesa može se pronaći u [6]).

Navodimo bitan rezultat čiji dokaz možemo pronaći u [7].

Teorem 1.1.19. *Neka je $F\colon I \to \mathscr{C}$. Tada je limes od F ujednačitelj para morfizama $\prod_i Fi \rightrightarrows \prod_{f:j\to j'} Fj'$, gdje su paralelni morfizmi inducirani familijama morfizama $\{Ff \circ \pi_j\}$ i $\{\pi_{j'}\}$ za morfizam $f\colon j \to j'$ u I, pri čemu su π odgovarajući kanonski morfizmi.*

Korolar 1.1.20. *Ako kategorija $\mathscr{C}$ ima sve konačne produkte i sve ujednačitelje parova morfizama, onda ima i sve konačne limese. Ako ima i sve $\mathcal{U}$-male produkte, onda ima i sve $\mathcal{U}$-male limese.*

Korolar 1.1.21. *Neka je $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funktor koji čuva $\mathcal{U}$-male produkte i ujednačitelje parova morfizama te je $\mathscr{C}$ $\mathcal{U}$-potpuna. Tada je $\mathcal{U}$-neprekidan. Ako F čuva konačne produkte i ujednačitelje te je $\mathscr{C}$ konačno potuna, onda je F konačno neprekidan.*

Može se pokazati (v. [7]) da za bifunktor $F\colon I \times J \to \mathscr{C}$ vrijedi

$$\lim_{i\in I}\lim_{j\in J} F(i,j) \cong \lim_{j\in J}\lim_{i\in I} F(i,j)$$

čim svi dani limesi postoje i da je izomorfizam dan točno morfizmima induciranim univerzalnim svojstvima (jasno, izomorfizam nije samo na razini objekata, već i univerzalnih konusa). Ipak, situacija je složenija ako bismo željeli komutiranje limesa i kolimesa. Naime inducirani morfizam

$$\operatorname*{colim}_{j\in J}\lim_{i\in I} F(i,j) \to \lim_{i\in I}\operatorname*{colim}_{j\in J} F(i,j).$$

nije nužno izomorfizam. Stoga uvodimo još neke pojmove kako bismo tretirali danu situaciju.

Definicija 1.1.22. Kategorija $\mathscr{C}$ je *filtrirana* ako:

(i) $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C} \neq \emptyset$,

(ii) za sve objekte a i b u $\mathscr{C}$ postoji objekt c i morfizmi $f\colon a \to c$, $g\colon b \to c$,

(iii) za sve morfizme $f, g\colon a \to b$ u $\mathscr{C}$ postoji morfizam $h\colon b \to c$ takav da je $hf = hg$.

Filtrirane kategorije su kategorifikacija pojma usmjerenog skupa. Zaista, ako je kategorija preduređaj, svojstvo (3) postaje suvišno, a svojstvo (2) točno kaže da svaka dva objekta imaju gornju među. Kolimes funktora $F\colon I \to \mathscr{C}$ zovemo *filtriranim* ako je I filtrirana kategorija. Sljedeći teorem kaže da filtrirani kolimesi komutiraju s konačnim limesima u Set.

Teorem 1.1.23. *Neka je I konačna, a J $\mathcal{U}$-mala filtrirana kategorija te $F\colon I\times J \to \mathrm{Set}_{\mathcal{U}}$ bifunktor. Tada je inducirani morfizam*

$$\bigvee_{j\in J}\lim_{i\in I}\iota_{ij}\colon\ \operatorname*{colim}_{j\in J}\lim_{i\in I} F(i,j) \to \lim_{i\in I}\operatorname*{colim}_{j\in J} F(i,j).$$

izomorfizam čim postoje svi navedeni (ko)limesi, gdje su $\iota_{ij}\colon F(i,j) \to \operatorname{colim}_{k\in J} F(i,k)$ kanonski morfizmi za proizvoljne $i \in I$, $j \in J$.

Kategorija $\mathscr{C}$ je *povezana* ako za sve objekte a i b u $\mathscr{C}$ postoje objekti $\{a_1, \ldots, a_n\}$, pri čemu je $a_1 = a$ i $a_n = b$, takvi da je $\mathrm{Hom}(a_i, a_{i+1}) \cup \mathrm{Hom}(a_{i+1}, a_i)$ neprazan, za sve $i = 1, \ldots, n-1$.

Definicija 1.1.24. Kažemo da je funktor $F\colon \mathscr{C} \to D$ *kofinalan* ako je koma kategorija d/F neprazna i povezana, za sve objekte d u $\mathscr{D}$.

Kofinalni funktori imaju sljedeće bitno svojstvo:

Teorem 1.1.25. *Neka je $F\colon J \to I$ kofinalan, a $G\colon I \to \mathscr{C}$ proizvoljan funktor. Tada ako postoji $\operatorname{colim}(GF)$, onda postoji i $\operatorname{colim} F$ i vrijedi $\operatorname{colim} F \cong \operatorname{colim}(GF)$.*

Lema 1.1.26. *Neka je $F\colon J \to I$ pun te neka je i/F koma kategorija neprazna za sve objekte i u I. Ako je I filtrirana kategorija, onda je F kofinalan funktor.*

Adjungirani funktori

Neka su dani funktori $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ i $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$.

Teorem 1.1.27. *Ekvivalentno je:*

(i) Postoji prirodni izomorfizam $\Phi\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F-,-) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,G-)$.

(ii) Postoje prirodne transformacije

$$\eta\colon 1_{\mathscr{C}} \Rightarrow GF$$

$$\varepsilon\colon FG \Rightarrow 1_{\mathscr{D}}$$

za koje vrijedi

$$F\eta \circ \varepsilon F = 1_F \tag{1.1}$$

$$\eta G \circ G\varepsilon = 1_G \tag{1.2}$$

Ako za funktore F i G vrijedi jedna od ekvivalentnih tvrdnji iz prethodnog teorema, kažemo da je (F, G) *adjungirani par funktora* ili kratko *adjunkcija* te pišemo $F \dashv G$. Koristit ćemo i oznaku $F : \mathscr{C} \rightleftarrows \mathscr{D} : G$ za adjungirane funktore, pri čemu ćemo podrazumijevati $F \dashv G$. Za F kažemo da je *lijevo*, a G *desno adjungiran funktor*. Prirodne transformacije η i ε zovemo *jedinica*, odnosno *kojedinica* adjunkcije, redom, a identitete (1.1) i (1.2) *identitetama trokuta*.

Nećemo raspisivati dokaz teorema 1.1.27, ali spomenimo samo da je jedinica adjunkcije dana formulom $\eta_c = \Phi(1_{Fc})$, a kojedinica $\varepsilon_d = \Phi^{-1}(1_{Gd})$, i obratno, izomorfizam Φ možemo zadati formulama $\Phi f = Gf \circ \eta_c$, odnosno $\Phi^{-1} g = \varepsilon_d \circ Fg$, za morfizme $f\colon Fc \to d$ i $g\colon c \to Gd$.

Direktno se provjeri da $F \dashv G$ povlači $G^{\mathrm{op}} \dashv F^{\mathrm{op}}$, pa tvrdnje koje vrijede za desnu adjunkciju možemo dualizirati u tvrdnje koje vrijede za lijevu adjunkciju.

Propozicija 1.1.28. *Ako je $F : \mathscr{C} \rightleftarrows \mathscr{D} : G$ adjungirani par, onda je F koneprekidan, a G neprekidan funktor.*

Za dani funktor $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, njemu desno adjungiran funktor, ako postoji, jedinstven je do na izomorfizam. Zaista, to slijedi odmah iz Yonedine leme (odnosno, korolara 1.1.13), budući da za sve objekte d u $\mathscr{D}$ imamo

$$\mathrm{Hom}(-, Gd) \cong \mathrm{Hom}(F-, d) \cong \mathrm{Hom}(-, G'd) \Rightarrow YG \cong YG' \Rightarrow G \cong G'$$

zbog korolara 1.1.14.

Adjunkcija je u općem slučaju najbolje što možemo ako želimo invertirati neki funktor. Zaista, izomorfizam je posebni slučaj adjunkcije gdje su jedinica i kojedinica identitete. Budući da su izomorfizmi kategorija u praksi poprilično rijetki, puno češće se proučavaju *ekvivalencije* kategorija, a ekvivalenciju čini adjungirani par za koji su jedinica i kojedinica izomorfizmi. Dat ćemo i karakterizaciju ekvivalencije, ali prije toga trebamo još jedan pojam. Kažemo da je funktor $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ *esencijalno surjektivan* ako za svaki objekt d u $\mathscr{D}$ postoji objekt c u $\mathscr{C}$ takav da je $Fc \cong d$.

Propozicija 1.1.29. *Funktor $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ je ekvivalencija kategorija ako i samo ako je potpuno vjeran i esencijalno surjektivan.*

1.2 Aditivne i Abelove kategorije

U definiciji kategorija pretpostavljamo *skup* morfizama između svaka dva objekta. Ipak, u matematici često nije slučaj da je prostor funkcija samo skup, već na sebi nosi bar nešto strukture od objekata u danoj kategoriji (otuda i učestalost naziva *prostor* funkcija), primjerice homomorfizmi Abelovih grupa opet čine Abelovu grupu, prostor linearnih operatora je opet vektorski prostor i slično. Opća teorija koja proučava tu problematiku je teorija *obogaćenih* kategorija (eng. *enriched*, v. [1]). Ovdje ćemo proučavati poseban tip strukture na kategoriji, konkretno *aditivnu* strukturu (obogaćenje u kategoriji Abelovih grupa) te ćemo pokazati kako takve kategorije poopćuju pojmove poput prstena i modula nad prstenom, na taj način dajući nam apstraktan kontekst u kom je moguće raditi homološku algebru. U ovom odjeljku fiksiramo univerzum $\mathcal{U}$ u kojem radimo te svi pojmovi ovisni o odabiru univerzuma će značiti odgovarajući „$\mathcal{U}$-pojam".

Aditivne kategorije

Definicija 1.2.1. Neka je $\mathscr{A}$ kategorija te neka za sve objekte a, b u $\mathscr{A}$ na skupu $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(a, b)$ imamo strukturu Abelove grupe takvu da je kompozicija morfizama u $\mathscr{A}$ bilinearna. Tada za kategoriju $\mathscr{A}$ kažemo da je *predaditivna* ili Ab-*obogaćena*.

Primjer 1.2.2.

(*i*) Neka je R prsten. Tada je kategorija lijevih R-modula $\mathrm{Mod}(R)$ predaditivna. Za R-module M i N skup $\mathrm{Hom}(M,N)$ ima strukturu Abelove grupe uz operaciju $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$. Bilinearnost slijedi iz linearnosti homomorfizama modula. Specijalno, predaditivne su: kategorija Abelovih grupa $\mathrm{Ab} \cong \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ i $\mathrm{Vect}_k \cong \mathrm{Mod}(k)$, kategorija vektorskih prostora nad poljem k.

(*ii*) Kategorija konačno generiranih modula $\mathrm{Mod}_f(R)$ je predaditivna budući da je puna potkategorija kategorije $\mathrm{Mod}(R)$.

(*iii*) Kategorija prstenova s jedinicom Ring je predaditivna s operacijom zbrajanja definiranom po točkama kao u primjeru (*i*).

(*iv*) Neka je $\mathscr{A}$ predaditivna kategorija. Tada je kategorija $\mathscr{A}$-predsnopova $[\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathscr{A}]$ predaditivna za proizvoljnu kategoriju $\mathscr{C}$. Na skupu $\mathrm{Nat}(F,G)$ definiramo komponente prirodne transformacije $(\alpha+\beta)_x := \alpha_x + \beta_x$. Prirodnost i bilinearnost slijede iz bilinearnosti u $\mathscr{A}$. Posebno, $\mathrm{Sh}(X;\mathscr{A})$, kategorija $\mathscr{A}$-snopova na topološkom prostoru X je predaditivna kao puna potkategorija kategorije $[\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}}, \mathscr{A}]$.

Napomenimo kako je pojam predaditivne kategorije autodualan, tj. ako je $\mathscr{A}$ predaditivna, onda je to i $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$. Primjetimo da je u predaditivnoj kategoriji Abelova grupa endomorfizama $\mathrm{End}(a) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(a,a)$ prsten s jedinicom, za sve objekte a u $\mathscr{A}$, pri čemu je množenje dano kompozicijom. Obratno, ako je R prsten s jedinicom, definiramo predaditivnu kategoriju s jednim objektom a te $\mathrm{Hom}(a,a) := R$ pri čemu je kompozicija dana množenjem u R. Na taj način smo poopćili pojam prstena s jedinicom, preciznije predaditivna kategorija je *horizontalna kategorifikacija* (v. [1]) pojma prstena. U 1.3 Lokalizacija aditivne i Abelove kategorije dajemo bar jedan argument kako ovo poopćenje nije samo kategorijski kuriozitet, već ima stvarne matematičke implikacije, kao što je činjenica da lokalizacija prstena (uz odgovarajuće pretpostavke) ponovo jest prsten i tu činjenicu proširuje na veću klasu matematičkih objekata.

Napomena 1.2.3. Iz bilinearnosti kompozicije u predaditivnoj kategoriji lako slijedi da monomorfizme, i dualno, epimorfizme, možemo karakaterizirati na idući način: f je monomorfizam (epimorfizam) ako i samo ako vrijedi implikacija $fg = 0$ povlači $g = 0$ ($gf = 0$ povlači $g = 0$).

Lema 1.2.4. *Neka je $\mathscr{A}$ predaditivna kategorija i neka je t terminalan objekt u $\mathscr{A}$. Tada je t nul-objekt u $\mathscr{A}$.*

Dokaz. Budući da je $\mathscr{A}$ predaditivna, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(t,a)$ je neprazan za proizvoljan objekt a u $\mathscr{A}$. Fiksirajmo neki objekt a u $\mathscr{A}$. Želimo pokazati da je $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(t,a)$ jednočlan. Označimo $\alpha\colon a \to t$ jedinstveni morfizam s a u t. Očito je α nula u trivijalnoj grupi $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(a,t)$. Za proizvoljan $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(t,a)$ vrijedi $\alpha f = 1_t$ jer je $\mathrm{End}(t)$ trivijalan prsten. Posebno je α epimorfizam. S druge strane, za proizvoljan $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(t,a)$ je $f\alpha = 0_a$, što slijedi direktno iz bilinearnosti kompozicije i neutralnosti od α. Pretpostavimo sada da imamo morfizme $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(t,a)$. Tada je $f\alpha = 0_a = g\alpha$, što povlači $f = g$ jer je α epi. Dakle, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(t,a)$ je jednočlan za sve objekte a u $\mathscr{A}$. □

Napomena 1.2.5. Očito vrijedi i dualna tvrdnja za i inicijalan objekt u predaditivnoj kategoriji $\mathscr{A}$.

Definicija 1.2.6. Neka je $\{a_i\}_{i\in I}$ familija objekata u kategoriji $\mathscr{A}$ s nul-objektom. *Biprodukt* familije $\{a_i\}_{i\in I}$ jest trojka $(b, \{\pi_i\}_{i\in I}, \{\iota_i\}_{i\in I})$ pri čemu su $\pi_i\colon b \to a_i$, $\iota_i\colon a_i \to b$ za koje vrijedi $\pi_i\iota_j = \delta_{ij}$ (u smislu Kroneckerovog simbola) te je $(b, \{\pi_i\}_{i\in I})$ produkt, a $(b, \{\iota_i\}_{i\in I})$ koprodukt familije $\{a_i\}_{i\in I}$ u kategoriji $\mathscr{A}$. Biprodukt ćemo označavati $\bigoplus_{i\in I} a_i$.

Napomena 1.2.7. Morfizam $f_1 \oplus f_2\colon a_1 \oplus a_2 \to a_1' \oplus a_2'$ jedinstveno je određen kao morfizam za koji vrijedi $\pi_i' \circ (f_1 \oplus f_2) \circ \iota_j = f_i\pi_i\iota_j = f_i\delta_{ij}$. Zaista, ako vrijedi $\pi_i' h \iota_j = f_i\delta_{ij}$, tada slijedi da je $\pi_1' h = f_1 \vee 0 = f_1\pi_1$ i $\pi_2' h = 0 \vee f_2 = f_2\pi_2$, no, tada je $h = f_1\pi_1 \wedge f_2\pi_2 = f_1 \oplus f_2$.

Lema 1.2.8. *Neka je $\{a_i\}_{i=1,\dots,n}$ familija objekata u predaditvnoj kategoriji $\mathscr{A}$ s nul-objektom te neka su $\pi_i\colon b \to a_i$ i $\iota_i\colon a_i \to b$ morfizmi u $\mathscr{A}$ za koje vrijedi $\pi_i\iota_j = \delta_{ij}$. Tada je $(b, \{\pi_i\}, \{\iota_i\})$ biprodukt familije $\{a_i\}$ ako i samo ako je $\sum_{i=1}^n \iota_i\pi_i = 1_b$.*

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi $\sum_{i=1}^n \iota_i\pi_i = 1_b$ te definirajmo

$$\bigwedge_{i=1}^n f_i := \sum_{i=1}^n \iota_i f_i \qquad \bigvee_{i=1}^n g_i := \sum_{i=1}^n g_i\pi_i$$

za familiju morfizama $f_i\colon c \to a_i$, odnosno $g_i\colon a_i \to c$. Iz bilinearnosti te $\pi_i\iota_j = \delta_{ij}$ slijedi

$$\pi_j\left(\bigwedge_{i=1}^n f_i\right) = f_j, \quad \left(\bigvee_{i=1}^n g_i\right)\iota_j = g_j, \quad \forall j = 1,\dots,n.$$

Neka je $h\colon c \to b$ takav da je $\pi_i h = f_i,\ i = 1,\dots,n$. Tada slijedi

$$h = \left(\sum_{i=1}^n \iota_i\pi_i\right)h = \sum_{i=1}^n \iota_i\pi_i h = \sum_{i=1}^n \iota_i f_i = \bigwedge_{i=1}^n f_i,$$

a time je onda pokazano univerzalno svojstvo produkta. Analogno se pokazuje jedinstvenost induciranog morfizma $\bigvee_{i=1}^{n} g_i$, odnosno univerzalno svojstvo koprodukta. Obratno,

$$\pi_j \left(\sum_{i=1}^{n} \iota_i \pi_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \pi_j \iota_i \pi_i = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} \pi_i = \pi_j, \ \forall j = 1, \dots, n,$$

pa univerzalno svojstvo produkta povlači $\sum_{i=1}^{n} \iota_i \pi_i = 1_b$. □

Propozicija 1.2.9. *Neka je $\mathscr{A}$ predaditivna kategorija. Ekvivalentno je:*

(i) $\mathscr{A}$ ima sve konačne produkte,

(ii) $\mathscr{A}$ ima sve konačne koprodukte,

(iii) $\mathscr{A}$ ima sve konačne biprodukte.

Dokaz. Prvo primjetimo da je zbog dualizacije dovoljno pokazati $(i) \Leftrightarrow (iii)$.

$(i) \Rightarrow (iii)$ Iz leme 1.2.4 slijedi da $\mathscr{A}$ ima nul-objekt, budući da je terminalan objekt nularan produkt. Neka je $\{a_i\}_{i=1,\dots,n}$ familija objekata u $\mathscr{A}$ i $(p, \{\pi_i\})$ njen produkt. Za sve $i = 1, \dots, n$ definirajmo $\iota_i \colon a_i \to p$ kao morfizam

$$\iota_i := 0 \wedge \dots \wedge 0 \wedge 1_{a_i} \wedge 0 \wedge \dots \wedge 0$$

pri čemu je 1_{a_i} na i-tom mjestu. Tada očito vrijedi $\pi_i \iota_j = \delta_{ij}$, a onda iz dokaza leme 1.2.8 slijedi i $\sum_{i=1}^{n} \iota_i \pi_i = 1_p$. Prema istoj lemi je tada $(p, \{\pi_i\}, \{\iota_i\})$ biprodukt familije $\{a_i\}$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Trivijalno.

□

Definicija 1.2.10. Predaditivnu kategoriju $\mathscr{A}$ sa svim konačnim produktima (ekvivalentno koproduktima, biproduktima) nazivamo *aditivnom* kategorijom.

Primjer 1.2.11.

(i) $\mathrm{Mod}(R)$ je aditivna. Nul-objekt je, jasno, trivijalni modul, a produkt modula M i N je kartezijev produkt $M \times N$ s operacijama definiranim po točkama: $(m, n) + (m'n') := (m + m', n + n')$, $\alpha(m, n) := (\alpha m, \alpha n)$.

(ii) Kategorija konačno generiranih modula $\mathrm{Mod}_f(R)$ je aditivna budući da za epimorfizme $f \colon R^m \twoheadrightarrow M$ i $g \colon R^n \twoheadrightarrow N$ preslikavanje $R^{m+n} \cong R^m \sqcup R^n \overset{f \sqcup g}{\twoheadrightarrow} M \sqcup N$ epimorfizam kao koprodukt epimorfizama, tj. koprodukt konačno generiranih modula je konačno generiran.

(*iii*) Kategorija prstenova s jedinicom Ring *nije* aditivna bući da Ring nema nul-objekt. Naime, nul-morfizam ne čuva jedinicu.

(*iv*) Za aditivnu kategoriju $\mathscr{A}$ kategorija $\mathscr{A}$-predsnopova $[\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathscr{A}]$ je aditivna za proizvoljnu kategoriju $\mathscr{C}$. Nul-objekt je nul-funktor koji svakom objektu u c pridružuje 0 u $\mathscr{A}$, a svakom morfizmu nul-morfizam. Produkt funktora F i F' definiramo po točkama: $(F \times F')(f) := Ff \times F'f$ za proizvoljan morfizam f, a projekcije π i π' su prirodne transformacije čije su komponente u c dane projekcijama $Fc \times F'c \to Fc$ i $Fc \times F'c \to F'c$.

Očito je dualna kategorija aditivne kategorije opet aditivna. Pokažimo sada da postojanje svih konačnih biprodukata nije samo tehnički ukras, već potpuno karakterizira aditivnu strukturu predaditivne kategorije. U vezi s tim dajemo sljedeći teorem:

Teorem 1.2.12. *Neka je $\mathscr{A}$ aditivna kategorija. Tada za sve objekte a i b u $\mathscr{A}$ te proizvoljne morfizme $f, g\colon a \to b$ vrijedi*

$$f + g = \nabla_b \circ (f \oplus g) \circ \Delta_a$$

pri čemu su $\Delta_a\colon a \to a \oplus a$ i $\nabla_a\colon a \oplus a \to a$ definirani s $\Delta_a := 1_a \wedge 1_a$, $\nabla_a := 1_a \vee 1_a$ te ih nazivamo dijagonala *i* kodijagonala*, redom.*

Dokaz. Iz leme 1.2.8 slijedi:

$$\begin{aligned}
\nabla_b \circ (f \oplus g) \circ \Delta_a &= \nabla_b \circ (f \oplus g) \circ (\iota_1\pi_1 + \iota_2\pi_2) \circ \Delta_a \\
&= \nabla_b \circ (f \oplus g) \circ \iota_1 \circ \pi_1 \circ \Delta_a + \nabla_b \circ (f \oplus g) \circ \iota_2 \circ \pi_2 \circ \Delta_a \\
&= \nabla_b \circ \iota_1 \circ f \circ \pi_1 \circ \Delta_a + \nabla_b \circ \iota_2 \circ g \circ \pi_2 \circ \Delta_a \\
&= f + g
\end{aligned}$$

□

Ne samo da postojanje konačnih biprodukata u predaditivnoj kategoriji potpuno karakterizira aditivnu strukturu, kategorije sa svim konačnim biproduktima su gotovo pa aditivne! Naime, vrijedi:

Teorem 1.2.13. *Neka kategorija $\mathscr{A}$ ima sve konačne biprodukte. Tada za sve objekte a, b u $\mathscr{A}$ na $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(a, b)$ imamo strukturu komutativnog monoida takvu da je kompozicija morfizama bilinearna. Nadalje, ako za svaki objekt a u $\mathscr{A}$ postoji $\nu_a\colon a \to a$ takav da je $\nu_a + 1_a = 0_a$, onda je $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(a, b)$ Abelova grupa za sve objekte a, b u $\mathscr{A}$.*

Dokaz. Neka su a i b proizvoljni objekti u $\mathscr{A}$ te $f, g\colon a \to b$ morfizmi u $\mathscr{A}$. Definiramo

$$f + g := \nabla_b \circ (f \oplus g) \circ \Delta_a$$

i tvrdimo da na taj način dobivamo strukturu komutativnog monoida. Pokažimo prvo da je dijagonala Δ prirodna transformacija (dualno, kodijagonala). Neka su dani neki objekti a i b te morfizam $f\colon a \to b$. Tvrdimo da je $\Delta_b \circ f = (f \oplus f) \circ \Delta_a$. Označimo projekcije $\pi_i\colon a \oplus a \to a$, $\pi_i'\colon b \oplus b \to b$ i tada imamo

$$\pi_1' \circ \Delta_b \circ f = f,\ \pi_2' \circ \Delta_b \circ f = f \Rightarrow \Delta_b \circ f = f \wedge f,$$

$$\pi_1 \circ (f \oplus f) \circ \Delta_a = f \circ \pi_1 \circ \Delta_a = f,\ \pi_2 \circ (f \oplus f) \circ \Delta_a = f \circ \pi_2 \circ \Delta_a = f \Rightarrow (f \oplus f) \circ \Delta_a = f \wedge f,$$

odnosno, Δ je prirodna. Slično pokazujemo i jednakost $(f \oplus g) \circ \Delta = f \wedge g$, odnosno vrijedi $f + g = \nabla \circ f \wedge g$. Pokažimo da je kompozicija bilinearna u odnosu na $+$:

$$(f+g) \circ h = \nabla_b \circ (f \oplus g) \circ \Delta_a \circ h = \nabla_b \circ (f \oplus g) \circ (h \oplus h) \circ \Delta_a = \nabla_b \circ (fh \oplus fh) \circ \Delta_a = fh + gh,$$

$$h \circ (f+g) = h \circ \nabla_b \circ (f \oplus g) \circ \Delta_a = \nabla_b \circ (h \oplus h) \circ (f \oplus g) \circ \Delta_a = \nabla_b \circ (hf \oplus hg) \circ \Delta_a = hf + hg.$$

Pokažimo da je nulmorfizam neutralan element. Lako se vidi da je $f \oplus 0 = \iota_1 f \pi_1$. Naime $\pi_i \circ (\iota_1 f \pi_1) \circ \iota_j$ je jednako f za $i = j = 1$, a 0 inače, što jedinstveno karakterizira $f \oplus 0$. No, tada je očito $f + 0 = \nabla_b \circ \iota_1 \circ f \circ \pi_1 \circ \Delta_a = f$. Analogno za $0 + f = f$. Uočimo sada da vrijedi $(f + g) \wedge h = f \wedge 0 + g \wedge h$. To direktno slijedi iz bilinearnosti, neutralnosti 0 s obzirom na $+$ te univerzalnog svojstva produkta. Sada imamo

$$\begin{aligned}
(f + g) + h &= \nabla \circ (f + g) \wedge h \\
&= \nabla \circ (f \wedge 0 + g \wedge h) \\
&= \nabla \circ (f \wedge 0) + \nabla \circ (g \wedge h) \\
&= (f + 0) + (g + h) \\
&= f + (g + h)
\end{aligned}$$

Preostaje još pokazati komutativnost. Definirajmo preslikavanje $\gamma_{ab}\colon a \oplus b \to b \oplus a$ formulom $\gamma_{ab} := \pi_2 \wedge \pi_1$. Iz univerzalnog svojstva produkta odmah slijedi da je ${\gamma_{ab}}^{-1} = \gamma_{ba}$. Tvrdimo da je $f_1 \oplus f_2 = \gamma_{b'a'} \circ (f_2 \oplus f_1) \circ \gamma_{ab}$ za proizvoljne $f_1\colon a \to a'$, $f_2\colon b \to b'$. Neka su dane projekcije kao na dijagramima

$$\begin{tikzcd}
& a \oplus b \arrow[dl, bend right, "\pi_2"'] \arrow[d, dashed, "\gamma_{ab}"] \arrow[dr, bend left, "\pi_1"] & \\
b & b \oplus a \arrow[l, "\rho_1"] \arrow[r, "\rho_2"'] & a
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& b' \oplus a' \arrow[dl, bend right, "\rho_2'"'] \arrow[d, dashed, "\gamma_{b'a'}"] \arrow[dr, bend left, "\rho_1'"] & \\
a' & a' \oplus b' \arrow[l, "\pi_1'"] \arrow[r, "\pi_2'"'] & b'
\end{tikzcd}$$

Tada vrijedi

$$
\begin{aligned}
\pi_i' \circ \gamma_{b'a'} \circ (f_2 \oplus f_1) \circ \gamma_{ab} \circ \iota_j &= \rho_{t(i)} \circ (f_2 \oplus f_1) \circ \gamma_{ab} \circ \iota_j \\
&= f_i \circ \rho_{t(i)} \circ \gamma_{ab} \circ \iota_j \\
&= f_i \pi_i \iota_j \\
&= f_i \delta_{ij}
\end{aligned}
$$

pri čemu je t transpozicija skupa $\{1,2\}$ te $i, j \in \{1,2\}$ pa prema napomeni 1.2.7 slijedi tvrdnja. Nadalje, $\gamma_a \circ \Delta_a = \Delta_a$ jer je

$$
\begin{aligned}
\pi_1 \circ \gamma_a \circ \Delta_a = \pi_2 \circ \Delta_a = 1_a, \\
\pi_2 \circ \gamma_a \circ \Delta_a = \pi_1 \circ \Delta_a = 1_a.
\end{aligned}
$$

Dualno, $\nabla_b \circ \gamma_b = \nabla_b$. Sada imamo

$$
\begin{aligned}
f + g &= \nabla_b \circ (f \oplus g) \circ \Delta_a \\
&= \nabla_b \circ \gamma_b \circ (g \oplus f) \circ \gamma_a \circ \Delta_a \\
&= \nabla_b \circ (g \oplus f) \circ \Delta_a \\
&= g + f
\end{aligned}
$$

Dakle, imamo strukturu komutativnog monoida.

Neka za svaki objekt a u $\mathscr{A}$ postoji $\nu_a \colon a \to a$ takav da je $\nu_a + 1_a = 0_a$ i neka je $f \colon a \to b$ proivoljan. Tada je $\nu_a f + f = (\nu_a + 1_a) \circ f = 0_a \circ f = 0_{ab}$, pa na $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(a,b)$ imamo strukturu Abelove grupe. $\square$

Neka su $f \colon \bigoplus_{i=1}^n a_i \to \bigoplus_{i=1}^m a_i'$ i $g \colon \bigoplus_{i=1}^m a_i' \to \bigoplus_{i=1}^l a_i''$ te definirajmo $f_{ij} = \pi_i' f \iota_j$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, $g_{ij} = \pi_i'' g \iota_j'$, $i = 1, \ldots, l$, $j = 1, \ldots, m$ pri čemu su π i ι kanonski morfizmi. Tada morfizme f i g možemo reprezentirati matricama (f) i (g) tako da je $(f)_{ij} = f_{ij}$, odnosno $(g)_{ij} = g_{ij}$, te je zbog leme 1.2.8 kompozicija gf dana standardnim množenjem matrica

$$
\begin{aligned}
((g)(f))_{ij} &= \sum_{k=1}^m g_{ik} f_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^m \pi_i'' g \iota_k' \pi_k' f \iota_j \\
&= \pi_i'' g \left(\sum_{k=1}^m \iota_k' \pi_k' \right) f \iota_j \\
&= \pi_i'' g f \iota_j \\
&= (gf)_{ij}
\end{aligned}
$$

Također, iz bilinearnosti odmah slijedi da je suma morfizama dana sumom njihovih matričnih reprezentacija. Iz ovoga je jasno da su aditivne kategorije općeniti kontekst u kojem prsteni matrica imaju smisla.

Definicija 1.2.14. Neka su $\mathscr{A}$ i $\mathscr{A}'$ predaditivne kategorije. Funktor $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ zovemo *aditivnim* ako je restrikcija $F\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(a,b) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}'}(Fa,Fb)$ homomorfizam Abelovih grupa za sve objekte a, b u $\mathscr{A}$.

Propozicija 1.2.15. *Neka je $F : \mathscr{A} \rightleftarrows \mathscr{B} : G$ adjungirani par između predaditivnih kategorija. Tada je F aditivan ako i samo ako je G aditivan funktor te je bijekcija $\Phi_{a,b}\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{B}}(Fa,b) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(a,Gb)$ homomorfizam Abelovih grupa za sve objekte a u $\mathscr{A}$, b u $\mathscr{B}$.*

Dokaz. Zbog dualnosti je dovoljno pokazati jedan smjer. Pretpostavimo da je G aditivan. Tada je $\Phi_{a,b}\, g = Gg \circ \eta_a$ za sve objekte a u $\mathscr{A}$, b u $\mathscr{B}$ te sve $g\colon Fa \to b$, pri čemu je $\eta\colon 1_{\mathscr{A}} \Rightarrow GF$ jedinica adjunkcije. Sada lako slijedi

$$\Phi_{a,b}(g+g') = G(g+g') \circ \eta_a = Gg \circ \eta_a + Gg' \circ \eta_a = \Phi_{a,b}\, g + \Phi_{a,b}\, g'.$$

Nadalje, iz prirodnosti jedinice slijedi

$$\left.\begin{aligned} GFf \circ \eta_a &= \eta_{a'} \circ f \\ GFf' \circ \eta_a &= \eta_{a'} \circ f' \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ \begin{aligned} G(Ff+Ff')\circ\eta_a &= (GFf + GFf')\circ \eta_a \\ &= \eta_{a'} \circ (f+f') \\ &= GF(f+f')\circ\eta_a \end{aligned}$$

za sve morfizme $f, f'\colon a \to a'$ u $\mathscr{A}$, no, iz univerzalnog svojstva jedinice sada slijedi $F(f+f') = Ff + Ff'$. $\square$

Teorem 1.2.16. *Neka je $\mathscr{A}$ aditivna, a $\mathscr{A}'$ predaditivna kategorija. Funktor $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ je aditivan ako i samo ako čuva binarne biprodukte.*

Dokaz. Pretpostavimo da je F aditivan i neka su a i b objekti u $\mathscr{A}$, $\pi_{1,2}$, $\iota_{1,2}$ kanonski morfizmi biprodukta $a \oplus b$. Relacije $\pi_i\iota_j = \delta_{ij}$ i $\iota_1\pi_1 + \iota_2\pi_2 = 1_{a\oplus b}$ zbog funktorijalnosti i aditivnosti od F ostaju očuvane u $\mathscr{A}'$. Pokažimo da je $(F(a\oplus b), F\pi_1, F\pi_2)$ produkt od Fa i Fb u $\mathscr{A}'$. Neka su $f\colon c \to Fa$ i $g\colon c \to Fb$ morfizmi u $\mathscr{A}'$. Definiramo $f \wedge g := F\iota_1 \circ f + F\iota_2 \circ g$ te očito vrijedi

$$\begin{aligned} F\pi_1 \circ (F\iota_1 \circ f + F\iota_2 \circ g) &= f \\ F\pi_2 \circ (F\iota_1 \circ f + F\iota_2 \circ g) &= g \end{aligned}$$

Neka je h takav da vrijedi $F\pi_1 \circ h = f$ i $F\pi_2 \circ h = g$. Supstitucijom u izraz $F\iota_1 \circ f + F\iota_2 \circ g$ dobivamo $h = f \wedge g$. Dakle, $(F(a\oplus b), F\pi_1, F\pi_2)$ je produkt od Fa i Fb. Dualno je

$(F(a \oplus b), F\iota_1, F\iota_2)$ koprodukt. Obratno, ako F čuva binarne biprodukte za morfizme $f, g\colon a \to b$ u $\mathscr{A}$ vrijedi

$$\begin{aligned} F(f+g) &= F\nabla_b \circ F(f \oplus g) \circ F\Delta_a \\ &= \nabla_{Fb} \circ (Ff \oplus Fg) \circ \Delta_{Fa} \\ &= Ff + Fg. \end{aligned}$$

□

Napomena 1.2.17. Uočimo i da aditivan funktor između aditivnih kategorija nužno čuva nul-objekte. Naime, nul-objekt je karakteriziran time da je identiteta jednaka nul-morfizmu, a aditivan funktor čuva oboje.

Korolar 1.2.18. *Neka je $F : \mathscr{A} \rightleftarrows \mathscr{B} : G$ adjungirani par između aditivnih kategorija. Tada su F i G aditivni te je bijekcija $\Phi_{a,b}\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(Fa, b) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(a, Gb)$ homomorfizam Abelovih grupa za sve objekte a u $\mathscr{A}$, b u $\mathscr{B}$.*

Dokaz. F je koneprekidan, a G neprekidan funktor, pa oba čuvaju binarne biprodukte (preciznije, čuvaju binarne koprodukte, odnosno produkte, no to su nužno biprodukti u aditivnoj kategoriji što vidimo iz dokaza propozicije 1.2.9). Primjenimo prethodni teorem. Da je $\Phi_{a,b}$ homomorfizam Abelovih grupa slijedi iz propozicije 1.2.15. □

Definicija 1.2.19. Neka je $\mathscr{A}$ aditivna kategorija. Funktor $a^\bullet\colon (\mathbb{Z}, \leq) \to \mathscr{A}$ zovemo *kolancem* u $\mathscr{A}$. Objekt $a^\bullet n$ ćemo označavati s a^n, a morfizam $a^\bullet(n \leq n+1)$ ćemo označavati s d_a^n i nazivamo ga *n-tim diferencijalom.* Kolanac $a^\bullet$ nazivamo *kolančanim kompleksom* ako vrijedi $d_a^n \circ d_a^{n-1} = 0$, za sve $n \in \mathbb{Z}$. Kolančani kompleks $a^\bullet$ je *konačan* ako su $a^n \cong 0$ za gotovo sve $n \in \mathbb{Z}$.

Kolanac možemo vizualizirati kao dijagram

$$\cdots \longrightarrow a^{n-1} \xrightarrow{d_a^{n-1}} a^n \xrightarrow{d_a^n} a^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

Napomena 1.2.20. Funktor $a_\bullet\colon (\mathbb{Z}, \leq)^{\mathrm{op}} \to \mathscr{A}$ zovemo *lancem*, a odgovarajući kompleks *lančanim kompleksom.* Lančani i kolančani kompleksi su usko vezani uz homologiju i kohomologiju. Ako imamo kolanac $a^\bullet\colon (\mathbb{Z}, \leq) \to \mathscr{A}$, onda možemo definirati lanac u $\mathscr{A}$, $a_\bullet\colon (\mathbb{Z}, \leq)^{\mathrm{op}} \to \mathscr{A}$, tako da $a^\bullet$ dokomponiramo funktorom $\cdot(-1)\colon (\mathbb{Z}, \leq^{\mathrm{op}}) \to (\mathbb{Z}, \leq)$. Konkretno, $a_n := a^{-n}$ i $d_n := d^{-n}$. Analogno svaki lanac u $\mathscr{A}$ definira kolanac u $\mathscr{A}$, pa je iz naše perspektive svejedno hoćemo li proučavati lančane ili kolančane komplekse. Ovdje ćemo pručavati kolančane komplekse i skraćeno ih zvati *kompleksima.*

Abelove kategorije

U ovom odjeljku proučit ćemo dodatnu strukturu na aditivnim kategorijama.

Definicija 1.2.21. Neka je $\mathscr{C}$ kategorija s nul-objektom i neka je f morfizam u $\mathscr{C}$. Ujednačitelj $\mathrm{eq}(f, 0)$ zovemo *jezgrom* od f i označavamo ga s $\ker f$. Koujednačitelj $\mathrm{coeq}(f, 0)$ nazivamo *kojezgrom* od f i označavamo ga s $\operatorname{coker} f$.

Napomena 1.2.22. Striktno govoreći, jezgra i kojezgra su uređeni par prirodne transformacije (univerzalnih (ko)konusa) i objekta. Iz povijesnih razloga, uobičajeno je s $\ker f$, odnosno $\operatorname{coker} f$ označavati odgovarajuće univerzalne objekte (te ih zvati jezgrom, odnosno kojezgrom), slično kao i za (ko)produkt. Ipak, mi ćemo ponekad jezgrom (kojezgrom) zvati kanonski morfizam iz univerzalnog objekta (u univerzalni objekt). Pouzdajemo se da će iz konteksta uvijek biti jasno na što točno mislimo.

Lako se vidi da jezgru $\mu\colon \ker f \to c$ morfizma $f\colon c \to d$ možemo opisati sljedećim univerzalnim svojstvom: $\mu\colon \ker f \to c$ je jezgra ako vrijedi $f\mu = 0$ te za svaki morfizam $g\colon c' \to c$ takav da je $fg = 0$ postoji jedinstveni $g'\colon c' \to \ker f$ takav da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r, "\mu"] & c \arrow[r, "f"] & d \\
c' \arrow[u, dashed, "g'"] \arrow[ur, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

i dualno za kojezgru: $\nu\colon d \to \operatorname{coker} f$ je kojezgra ako vrijedi $\nu f = 0$ te za svaki morfizam $g\colon d \to d'$ takav da je $gf = 0$ postoji jedinstveni $g'\colon \operatorname{coker} f \to d'$ takav da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "f"] & d \arrow[r, "\nu"] \arrow[dr, bend right, "g"'] & \operatorname{coker} f \arrow[d, dashed, "g'"] \\
& & d'
\end{tikzcd}$$

Primjer 1.2.23.

(*i*) U kategoriji $\mathrm{Mod}(R)$ jezgra morfizma $f\colon M \to N$ je dana praslikom $f^{-1}(0)$. Kojezgra je dana kvocijentom $N/f(M)$ gdje je $f(M)$ skupovno-teorijska slika od f.

(*ii*) U Grp jezgra morfizma $f\colon G \to H$ je praslika jedinice $f^{-1}(e_H)$, a kojezgra je dana kvocijenom $H/f(G)^H$ gdje je $f(G)^H := \{hxh^{-1} \mid x \in f(G), h \in H\}$ *normalni zatvarač* slike $f(G)$. Univerzalno svojstvo slijedi iz teorema o homomorfizmu budući da je $f(G)^H \subseteq \ker g$ za homomorfizam g takav da je $gf = 0$. Primjetimo da je kojezgra Abelove grupe dana u prethodnom primjeru samo specijalni slučaj budući da je svaka podgrupa Abelove grupe normalna.

(*iii*) U kategoriji $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ gdje je $\mathscr{D}$ kategorija sa svim jezgrama, jezgru prirodne transformacije $\eta\colon F \Rightarrow G$ definiramo ovako: $\ker\eta$ je funktor koji objekt c iz $\mathscr{C}$ šalje u objekt $\ker\eta_c$. Komponente prirodne transformacije $\mu\colon \ker\eta \Rightarrow F$ su jezgre $\mu_c\colon \ker\eta_c \to Fc$. Preostaje nam definirati kako $\ker\eta$ djeluje na morfizmima. Ako je $f\colon c \to c'$ neki morfizam u $\mathscr{C}$ imamo komutativni dijagram

$$\begin{tikzcd} \ker\eta_c \arrow[r, "\mu_c"] \arrow[d, dashed, "(\ker\eta)f"'] & Fc \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "Ff"] & Gc \arrow[d, "Gf"] \\ \ker\eta_{c'} \arrow[r, "\mu_{c'}"] & Fc' \arrow[r, "\eta_{c'}"] & Gc' \end{tikzcd}$$

pri čemu je morfizam $(\ker\eta)f$ induciran univerzalnim svojstvom budući da je $\eta_{c'} \circ Ff \circ \mu_c = Gf \circ \eta_c \circ \mu_c = 0$ čime je automatski zadovoljena i prirodnost od μ. Univerzalno svojstvo je lako provjeriti, inducirana transformacija će za komponente imati morfizme inducirane jezgrama u $\mathscr{D}$. Dualno za kojezgre.

Napomena 1.2.24. Primjetimo da zahtjev $f\mu = 0$ da bi μ bila jezgra nije suvišan, on sprječava da identiteta bude jezgra! Osim, naravno, ako je f nul-morfizam. Prema tome, imamo da je $\ker(0\colon a \to b) \cong a$, odnosno, dualno, $\operatorname{coker}(0\colon a \to b) \cong b$. Vrijedi i obrat: neka je $\mu\colon \ker(f\colon a \to b) \to a$ izomorfizam. Tada je $f\mu = 0 \Rightarrow f = 0 \circ \mu^{-1} = 0$. To zapravo nije iznenađujuće, imavši na umu intuiciju o nul-morfizmu iz, primjerice, linearne algebre.

Iz univerzalnih svojstava jezgre i kojezgre lako se vidi da je jezgra morfizma nužno monomorfizam, a kojezgra nužno epimorfizam. To odmah slijedi iz jedinstvenosti faktorizacije. Također, lako je provjeriti da je u predaditivnoj kategoriji f monomorfizam ako i samo je $\ker f \cong 0$ i dualno, f je epimorfizam ako i samo ako je $\operatorname{coker} f \cong 0$. Nadalje, u predaditivnoj kategoriji iz bilinearnosti trivijalno slijedi da je $\operatorname{eq}(f, g) \cong \ker(f - g)$ i dualno za koujednačitelj i kojezgru. Time smo zapravo utvrdili propoziciju

Propozicija 1.2.25. *Neka je $\mathscr{A}$ aditivna kategorija i neka svaki morfizam u $\mathscr{A}$ ima jezgru. Tada je $\mathscr{A}$ konačno potpuna. Dualno, $\mathscr{A}$ je konačno kopotpuna ako svaki morfizam u $\mathscr{A}$ ima kojezgru.*

Dokaz. Trivijalno, budući da $\mathscr{A}$ ima sve konačne produkte i sve jezgre, a onda prema gornjoj primjedbi ima i sve ujednačitelje. To je dovoljno jer svaki konačni limes možemo prikazati pomoću konačnih produkata i ujednačitelja. □

Pokažimo sad korisnu lemu:

Lema 1.2.26. *Neka su $f\colon a \to b$, $g\colon b \to c$ morfizmi u kategoriji $\mathscr{C}$ s nul-objektom. Tada*

(i) ako je g monomorfizam, onda $\ker(gf)$ postoji ako i samo ako postoji $\ker f$ te je $\ker(gf) \cong \ker f$,

(ii) ako je g izomorfizam, onda $\operatorname{coker}(gf)$ postoji ako i samo ako postoji $\operatorname{coker} f$ te je $\operatorname{coker}(gf) \cong \operatorname{coker} f$.

Dokaz.

(i) Neka je $\mu\colon \ker f \to a$ jezgra od f i neka je $h\colon a' \to a$ takav da je $gfh = 0$. Budući da je g monomorfizam, to slijedi $fh = 0$, pa postoji jedinstveni $h'\colon a' \to \ker f$ takav da je $\mu h' = h$. Kako je još i $gf\mu = 0$, to je $\mu\colon \ker f \to a$ jezgra od gf. Neka je sada $\mu\colon \ker(gf) \to a$ jezgra od gf te neka je $h\colon a' \to a$ takav da je $fh = 0$. Slijedi da je $gfh = 0$ pa postoji jedinstveni $h'\colon a' \to \ker(gf)$ takav da je $\mu h' = h$. Kako je $gf\mu = 0$ i g monomorfizam, to je $f\mu = 0$, odnosno $\mu\colon \ker(gf) \to a$ je jezgra od f.

(ii) Neka je $\nu\colon b \to \operatorname{coker} f$ kojezgra od f te neka je $h\colon c \to c'$ takav da je $hgf = 0$. Tada univerzalno svojstvo kojezgre od f povlači da postoji jedinstveni $h'\colon \operatorname{coker} f \to c'$ takav da je $h'\nu = hg$, odnosno $h'\nu g^{-1} = h$. Budući da je još i $\nu g^{-1} gf = \nu f = 0$, to je $\nu g^{-1}\colon c \to \operatorname{coker} f$ kojezgra od gf. Za obrat primjenimo upravo dokazano na gf i $g^{-1}gf$.

□

Jasno, vrijede i dualni rezultati.

Definicija 1.2.27. Neka je f morfizam u kategoriji $\mathscr{C}$ s nul-objektom. *Slikom* morfizma f zovemo $\ker \operatorname{coker} f$ i označavamo ju s $\operatorname{im} f$. Dualno, *koslika* od f je $\operatorname{coker} \ker f$ i označavamo ju s $\operatorname{coim} f$.

Napomena 1.2.28. Upozoravamo na zlouporabu notacije u prethodnoj definiciji po uzoru na napomenu 1.2.22.

Napomena 1.2.29. Neka je $f\colon a \to b$ neki morfizam i neka su $\mu\colon \ker f \to a$, $\nu\colon b \to \operatorname{coker} f$, $\iota\colon \operatorname{im} f \to b$ i $\kappa\colon a \to \operatorname{coim} f$ njegova jezgra, kojezgra, slika i koslika, redom. Kako je $f\mu = 0$, iz univerzalnog svojstva koslike slijedi da postoji jedinstveni $f'\colon \operatorname{coim} f \to b$ takav da je $f'\kappa = f$. Nadalje, $0 = \nu f = \nu f'\kappa \Rightarrow \nu f' = 0$ jer je κ epimorfizam. Sada univerzalno svojstvo slike povlači da postoji jedinstveni $\bar{f}\colon \operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ takav da je $\iota\bar{f} = f'$, odnosno $f = \iota\bar{f}\kappa$.

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r, "\mu"] & a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\kappa"'] & b \arrow[r, "\nu"] & \operatorname{coker} f \\
& \operatorname{coim} f \arrow[ur, dashed, "f'"] \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] & \operatorname{im} f \arrow[u, "\iota"'] &
\end{tikzcd}$$

Definicija 1.2.30. Neka je $\mathscr{A}$ aditivna kategorija za koju vrijedi:

(AB1) Svaki morfizam u $\mathscr{A}$ ima jezgru i kojezgru.

(AB2) Za svaki morfizam f u $\mathscr{A}$, inducirani morfizam $\bar{f}\colon \operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ je izomorfizam.

Tada kategoriju $\mathscr{A}$ zovemo *Abelova kategorija.*

Aksiom (AB1) i propozicija 1.2.25 daju da je Abelova kategorija konačno potpuna i konačno kopotpuna, dok aksiom (AB2) nije ništa drugo nego dobro poznati 1. teorem o izomorfizmu. Također, jasno je da je pojam Abelove kategorije autodualan, tj. ako je $\mathscr{A}$ Abelova, onda je to i $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$. Do kraja odjeljka, sve kategorije će biti Abelove.

Primjer 1.2.31.

(*i*) Kategorija $\mathrm{Mod}(R)$ je Abelova. Jezgre i kojezgre smo dali u primjeru 1.2.23, dok je slika dana skupovno-teorijskom slikom, a koslika kvocijentom $M/\ker f$ za morfizam $f\colon M \to N$. Kako za module vrijedi 1. teorem o izomorfizmu, zadovoljen je i (AB2).

(*ii*) Kategorija $\mathrm{Mod}_f(R)$ općenito ne mora biti Abelova jer podmodul konačno generiranog modula nije nužno konačno generiran. Uzmimo prsten polinoma u prebrojivo mnogo varijabli $R = \mathbb{Z}[X_1, X_2, \ldots]$. R je očito konačno generiran R-modul. Pogledajmo ideal I u R koji se sastoji od svih polinoma kojima je slobodni koeficijent 0. Tada on nije konačno generiran budući da u njemu nije sadržana jedinica. Naime, za svaki konačan skup polinoma nužno postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da se X_n ne pojavljuje u niti jednoj od njihovih homogenih komponenti. Tada polinom X_n ne možemo generirati tim skupom. Dakle, kanonski epimorfizam $R \twoheadrightarrow R/I$ nema jezgru u $\mathrm{Mod}_f(R)$.

(*iii*) Za Abelovu kategoriju $\mathscr{A}$ i proizvoljnu kategoriju $\mathscr{C}$, kategorija $\mathscr{A}$-predsnopova $[\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathscr{A}]$ je Abelova, a to pokazujemo kao i za jezgre u primjeru 1.2.23 tako da definiramo sve funktore i prirodne transformacije po točkama, što možemo prikazati u komutativnom dijagramu:

$$\begin{tikzcd}
\ker\eta_a \arrow[rr, tail, "\mu_a"] \arrow[dd, dashed, "(\ker\eta)f"] & & Fa \arrow[rr, "\eta_a"] \arrow[dl, "\kappa_a"'] \arrow[dd, "Ff"] & & Ga \arrow[rr, two heads, "\nu_a"] \arrow[dd, "Gf"] & & \operatorname{coker}\eta_a \arrow[dd, dashed, "(\operatorname{coker}\eta)f"] \\
& \operatorname{coim}\eta_a \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dd, dashed, "(\operatorname{coim}\eta)f"] & & \operatorname{im}\eta_a \arrow[ur, "\iota_a"] \arrow[dd, dashed, "(\operatorname{im}\eta)f"] & & & \\
\ker\eta_b \arrow[rr, tail, "\mu_b"'] & & Fb \arrow[rr, "\eta_b"'] \arrow[dl, "\kappa_b"'] & & Gb \arrow[rr, two heads, "\nu_b"'] & & \operatorname{coker}\eta_b \\
& \operatorname{coim}\eta_b \arrow[rr, "\sim"] & & \operatorname{im}\eta_b \arrow[ur, "\iota_b"] & & &
\end{tikzcd}$$

Morfizmi prikazani isprekidanim strelicama su inducirani univerzalnim svojstvima.

Propozicija 1.2.32. *Za proizvoljan morfizam $f\colon a \to b$ vrijedi da je f monomorfizam ako i samo ako je $\operatorname{im} f \cong a$. Dualno, f je epimorfizam ako i samo ako je $\operatorname{coim} f \cong b$. Posebno je svaki monomorfizam jezgra nekog morfizma (svoje kojezgre), a svaki epimorfizam kojezgra nekog morfizma (svoje jezgre).*

Dokaz. Budući da je f monomorfizam, $\ker f \cong 0$, a prema napomeni 1.2.24, koslika $\kappa\colon a \to \operatorname{coim} f$ je izomorfizam, pa je $\bar{f}\kappa\colon a \to \operatorname{im} f$ traženi izomorfizam. Štoviše, $f = \kappa\bar{f}\iota$, pa je f jezgra ($\iota\colon \operatorname{im} f \to b$ je slika od f). Obratno, ako je $\operatorname{im} f \cong a$, to je i $\operatorname{coim} f \cong a$, a onda je prema napomeni 1.2.24 jezgra od f nul-morfizam, pa je f monomorfizam. $\square$

Za monomorfizam (epimorfizam) kažemo da je *normalan* ako je jezgra (kojezgra) nekog morfizma. Kategoriju u kojoj su svi monomorfizmi normalni nazivamo *normalnom* kategorijom, a u kojoj su svi epimorfizmi normalni, nazivamo *konormalnom.* Prethodna propozicija kaže da je svaka Abelova kategorija *binormalna.* Naziv normalan potječe iz teorije grupa. Naime, monomorfizam grupa je normalan ako i samo ako mu je slika normalna podgrupa kodomene. To se lako vidi budući da je jezgra uvijek normalna podgrupa, dok je inkluzija normalne podgrupe $N \trianglelefteq G$ jezgra kanonskog epimorfizma $G \twoheadrightarrow G/N$. Tako je kategorija Abelovih grupa Ab normalna, a kategorija grupa Grp nije.

Teorem 1.2.33. (epi-mono rastav) *Svaki morfizam u Abelovoj kategoriji dopušta rastav kao kopomoziciju epimorfizma i monomorfizma. Štoviše, svaki epi-mono rastav je jedinstven do na jedinstveni izomorfizam, tj. ako su gf i $g'f'$ dva epi-mono rastava, postoji jedinstveni izomorfizam φ takav da komutira dijagram*

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dr, tail, "g"] \arrow[dd, dashed, "\varphi"', "\wr"] & \\
\bullet \arrow[ur, two heads, "f"] \arrow[dr, two heads, "f'"'] & & \bullet \\
 & \bullet \arrow[ur, tail, "g'"'] &
\end{tikzcd}$$

Dokaz. Egzistencija takvog rastava dana je u napomeni 1.2.29. Pretpostavimo da vrijedi $gf = g'f'$ pri čemu su f i f' epimorfizmi, a g i g' monomorfizmi. Prema lemi 1.2.26 imamo

$$\ker f \cong \ker(gf) \cong \ker(g'f') \cong \ker f',$$

a prema propoziciji 1.2.32 tada imamo da su f i f' kojezgra istog morfizma, pa postoji jedinstveni izomorfizam φ takav da je $\varphi f = f'$. No,

$$gf = g'f' \Rightarrow gf = g'\varphi f \Rightarrow g = g'\varphi$$

jer je f epimorfizam, a onda imamo i da su dani rastavi izomorfni. $\square$

U napomeni 1.2.29 smo proizvoljan morfizam $f\colon a \to b$ rastavljali na kompoziciju

$$a \twoheadrightarrow \operatorname{coim} f \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} f \rightarrowtail b$$

što ima svoje prednosti u kategorijama gdje slika i koslika imaju svoju konkretnu skupovnu realizaciju, poput kategorija modula. Ipak, u svijetlu prethodnog teorema, u nastavku ćemo morfizam f faktorizirati kroz njegovu sliku

$$a \twoheadrightarrow \operatorname{im} f \rightarrowtail b$$

te ćemo ponekad epimorfizam $a \twoheadrightarrow \operatorname{im} f$ zvati koslikom morfizma f, a monomorfizam $\operatorname{im} f \rightarrowtail b$ njegovom slikom. To, jasno, nije problem zbog aksioma (AB2).

Korolar 1.2.34. *Svaki bimorfizam u Abelovoj kategoriji je izomorfizam.*

Dokaz. Neka je f monomorfizam i epimorfizam. Tada su $1 \circ f$ i $f \circ 1$ dva epi-mono rastava istog morfizma, pa prema prethodnom teoremu postoji izomorfizam φ takav da je $\varphi \circ 1 = f$ i $1 \circ \varphi = f$, odnosno $\varphi = f$, dakle, f je izomorfizam. □

Kategoriju u kojoj su svi bimorfizmi izomorfizmi zovemo *balansirana kategorija.* U balansiranim kategorijama vrijedi sljedeći rezultat:

Propozicija 1.2.35. *Neka je $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ vjeran funktor i neka je $\mathscr{C}$ balansirana. Tada je F konzervativan.*

Dokaz. Budući da je F vjeran, on reflektira monomorfizme i epimorfizme, pa ako je Ff izomorfizam, f je bimorfizam u $\mathscr{C}$, a po pretpostavci je onda i izomorfizam. □

Egzaktnost

Promotrimo sad kompleks

$$a \xrightarrow{\ f\ } b \xrightarrow{\ g\ } c \qquad (gf = 0)$$

i komutativni dijagram

$$\begin{tikzcd}
& & \operatorname{im} f \arrow[rr, dashed, "\varphi"] \arrow[dr, tail, "\iota"] & & \ker g \arrow[rr, two heads] \arrow[dl, tail, "\mu"] & & \operatorname{coker} \varphi \\
& a \arrow[ur] \arrow[rr, "f"] & & b \arrow[rr, "g"] \arrow[dl, two heads, "\nu"'] \arrow[dr, two heads, "\kappa"] & & c & \\
\ker \psi \arrow[rr, tail] & & \operatorname{coker} f \arrow[rr, dashed, "\psi"'] & & \operatorname{im} g \arrow[ur, tail] & &
\end{tikzcd}$$

Morfizmi φ i ψ su inducirani univerzalnim svojstvima jer je $g\iota = 0$ i $\kappa f = 0$ (što slijedi iz $gf = 0$). Također, napomenimo da je φ monomorfizam jer vrijedi $\mu\varphi = \iota$, a μ i ι su monomorfizmi i slično je ψ epimorfizam. Ako označimo $\chi = \nu\mu$, onda je φ jezgra od χ, a ψ kojezgra od χ. Provjerimo. Neka je $h\colon d \to \ker g$ neki morfizam za koji vrijedi $\chi h = 0$. Tada je $\nu\mu h = 0$, a kako je ι jezgra od ν, to postoji jedinstveni $h'\colon d \to \operatorname{im} f$ takav da vrijedi $\iota h' = \mu h$ što povlači $\mu\varphi h' = \mu h$, odnosno $\varphi h' = h$ jer je μ monomorfizam. Dakle, h se jedinstveno faktorizira kroz $\operatorname{im} f$, pa je φ zaista jezgra. Slično se dobije da je ψ kojezgra. No, sada imamo da je $\operatorname{coker} \varphi \cong \operatorname{coim} \chi \cong \operatorname{im} \chi \cong \ker \psi$. Za posljedicu imamo propoziciju

Propozicija 1.2.36. *Ekvivalentno je:*

(i) φ *je izomorfizam,*

(ii) ψ *je izomorfizam,*

(iii) $\operatorname{coker}\varphi \cong 0$*,*

(iv) $\ker\psi \cong 0$*.*

Dokaz. Ekvivalencija $(iii) \Leftrightarrow (iv)$ slijedi iz prethodne rasprave, dok $(i) \Leftrightarrow (iii)$ vrijedi budući da je φ epimorfizam ako i samo ako je $\operatorname{coker}\varphi \cong 0$, a već znamo da je φ monomorfizam. Tvrdnja tada slijedi iz korolara 1.2.34. Ekvivalencija $(ii) \Leftrightarrow (iv)$ se dobije analogno prethodnoj. $\square$

Ako vrijedi nešto iz prethodne propozicije, kažemo da je kompleks

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$$

egzaktan u b. Za neki dijagram kažemo da je *egzaktan* ako je egzaktan u svim objektima (osim u rubnima gdje niti nema smisla govoriti o egzaktnosti). Linearne dijagrame ćemo često zvati nizovima. Kompleks $a^\bullet$ zovemo *dugi egzaktni niz* ako je egzaktan dijagram. Ponekad za dugi egzaktni niz kažemo da je *aciklični kompleks*.

Od posebne važnosti su tzv. *kratki egzaktni nizovi*. Kratki egzaktni niz je kompleks oblika

$$a \overset{f}{\rightarrowtail} b \overset{g}{\twoheadrightarrow} c$$

egzaktan u b, ili, ekvivalentno, egzaktan niz

$$0 \longrightarrow a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \longrightarrow 0$$

jer, kao što je pokazujemo u sljedećoj lemi, egzaktnost u a je ekvivalentna tome da je f monomorfizam, a egzaktnost u c tome da je g epimorfizam.

Lema 1.2.37. *Neka je dan niz*

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$$

egzaktan u b. Tada je f epimorfizam ako i samo ako je g nul-morfizam. Obratno, ako je f epimorfizam, a g nul-morfizam, tada je dani niz egzaktan u b.

Dokaz. Neka je dani niz egzaktan u b. To znači da je inducirani morfizam $\varphi\colon \operatorname{im} f \to \ker g$ izmorfizam. Ako je f epimorfizam, onda je $b \cong \operatorname{coim} f$, odnosno morfizam $\iota\colon \operatorname{im} f \to b$ je izomorfizam, a onda i za $\mu\colon \ker g \to b$ vrijedi $\mu = \iota\varphi^{-1}$, odnosno μ je iomorfizam. No, onda je g nužno nul-morfizam. Obratno, ako je g nul-morfizam, onda je μ izomorfizam, pa je i ι izomorfizam, odnosno f je epimorfizam.

Neka je f epimorfizam, a g nul-morfizam. Tada su ι i μ izomorfizmi, pa je i $\varphi = \mu^{-1}\iota$ izomorfizam. □

Sljedeća propozicija nam daje vezu između jezgri i egzaktnosti:

Propozicija 1.2.38. *Neka su $f\colon a \to b$ i $g\colon b \to c$ morfizmi u Abelovoj kategoriji. Tada je f jezgra od g ako i samo ako je niz*

$$0 \longrightarrow a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$$

egzaktan.

Dokaz. Neka je f jezgra od g. Tada je $gf = 0$ i inducirani morfizam $\varphi\colon \operatorname{im} f \to \ker g$ je izomorfizam. Dakle, dijagram je egzaktan u b. Egzaktnost u a slijedi jer je f monomorfizam. Obratno, ako je gornji niz egzaktan, onda imamo izomorfizam $a \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} f \xrightarrow{\sim} \ker g$ te je taj izomorfizam faktorizacija morfizma f kroz $\ker g$ pa je f jezgra od g. □

Kao i ranije, propoziciju možemo dualizirati pa imamo rezultat da je dijagram

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \longrightarrow 0$$

egzaktan ako i samo je g kojezgra od f.

Definicija 1.2.39. Neka je $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ aditivan funktor između Abelovih kategorija.

(i) Kažemo da je F *egzaktan* ako svaki kratki egzaktni niz

$$0 \longrightarrow a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \longrightarrow 0$$

u $\mathscr{A}$ preslikava u kratki egzaktni niz

$$0 \longrightarrow Fa \xrightarrow{Ff} Fb \xrightarrow{Fg} Fc \longrightarrow 0$$

(*ii*) Kažemo da je F *lijevo egzaktan* ako svaki egzaktni niz

$$0 \longrightarrow a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$$

u $\mathscr{A}$ preslikava u egzaktni niz

$$0 \longrightarrow Fa \xrightarrow{Ff} Fb \xrightarrow{Fg} Fc$$

(*iii*) Kažemo da je F *desno egzaktan* ako svaki egzaktni niz

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \longrightarrow 0$$

u $\mathscr{A}$ preslikava u kratki egzaktni niz

$$Fa \xrightarrow{Ff} Fb \xrightarrow{Fg} Fc \longrightarrow 0$$

Očito je F egzaktan funktor ako i samo ako je lijevo egzaktan i desno egzaktan te je F lijevo egzaktan ako i samo ako je F^{op} desno egzaktan. Dajemo važnu karakterizaciju egzaktnosti:

Teorem 1.2.40. *Neka je $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ aditivan funktor između Abelovih kategorija.*

(i) F je lijevo egzaktan ako i samo ako čuva konačne limese.

(ii) F je desno egzaktan ako i samo ako čuva konačne kolimese.

(iii) F je egzaktan ako i samo ako čuva konačne limese i konačne kolimese.

Dokaz. Dovoljno je pokazati (*i*) jer (*ii*) onda slijedi po dualnosti, a (*iii*) iz (*i*) i (*ii*). Pretpostavimo da je F lijevo egzaktan. Tada čuva jezgre prema propoziciji 1.2.38, a onda i ujednačitelje jer je $\mathrm{eq}(f', g') \cong \ker(f' - g')$ za proizvoljne morfizme f' i g'. No, teorem 1.2.16 daje da F čuva i konačne produkte, a onda mora čuvati i sve konačne limese. Obratno, ako F čuva sve konačne limese, posebno čuva i jezgre, a onda rezultat slijedi iz propozicije 1.2.38. □

Vratimo se za trenutak u situaciju kad imamo kompleks

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$$

egzaktan u b. Kako egzaktan funktor čuva konačne limese i kolimese, to je $F(\operatorname{im} f)$ slika od Ff, a $F(\ker g)$ jezgra od Fg te je $F\varphi\colon F(\operatorname{im} f) \to F(\ker g)$ izomorfizam, pa je

$$Fa \xrightarrow{Ff} Fb \xrightarrow{Fg} Fc$$

egzaktan u Fb. Drugim riječima, egzaktni funktori egzaktne dijagrame šalju u egzaktne dijagrame.

Korolar 1.2.41. *Neka je $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ aditivan funktor između Abelovih kategorija.*

(i) F je egzaktan ako i samo ako je desno egzaktan i čuva monomorfizme.

(ii) F je egzaktan ako i samo ako je lijevo egzaktan i čuva epimorfizme.

Dokaz. Neka je F egzaktan. Očito je tada desno egzaktan, a za monomorfizam $f\colon a \to b$, dijagram egzaktan u a

$$0 \longrightarrow a \xrightarrow{f} b$$

F šalje u dijagram

$$0 \longrightarrow Fa \xrightarrow{Ff} Fb$$

egzaktan u Fa, pa je Ff monomorfizam. Obratno, neka je F desno egzaktan i čuva monomorfizme i neka je

$$0 \longrightarrow a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \longrightarrow 0$$

kratki egzaktni niz. Tada je

$$0 \longrightarrow Fa \xrightarrow{Ff} Fb \xrightarrow{Fg} Fc \longrightarrow 0$$

egzaktan u Fa jer je Ff monomorfizam, a u Fb i Fc jer je F desno egzaktan. $\square$

Propozicija 1.2.42. *Neka je $\mathscr{A}$ Abelova kategorija i x objekt u $\mathscr{A}$. Tada je hom-funktor* $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(x, -)\colon \mathscr{A} \to \mathrm{Ab}$ *lijevo egzaktan funktor.*

Dokaz. Neka je dan egzaktan niz

$$0 \longrightarrow a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$$

u $\mathscr{A}$. Prema propoziciji 1.2.38, to je ekvivalentno tvrdnji da je f jezgra od g. Tvrdimo da je i niz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(x,a) \xrightarrow{f\circ -} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(x,b) \xrightarrow{g\circ -} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(x,c)$$

egzaktan u Ab. Budući da je f monomorfizam, očito je to i $f \circ -$ jer

$$(f\circ -)(h) = (f\circ -)(h') \Rightarrow fh = fh' \Rightarrow h = h'.$$

Preostaje pokazati da je $\mathrm{im}(f\circ -) = \ker(g\circ -)$. Neka je $h \in \ker(g\circ -)$. Tada je $gh = 0$, pa jer je f jezgra od g, postoji jedinstveni $h'\colon x \to a$ takav da je $fh' = h$, dakle $h \in \mathrm{im}(f\circ -)$. Obratno, ako je $h \in \mathrm{im}(f\circ -)$, onda je $h = fh'$ za neki h', a tada je $(g\circ -)(h) = gh = gfh' = 0$ jer je $gf = 0$, odnosno, $h \in \ker(g\circ -)$. □

Jasno, dualizacijom imamo rezultat da je i $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,x)\colon \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$ lijevo egzaktan. Općenito, niti jedan od njih ne mora biti desno egzaktan. U vezi s tim dajemo sljedeći rezultat:

Teorem 1.2.43. *Neka je $\mathscr{A}$ Abelova kategorija i P objekt u $\mathscr{A}$. Tada je ekvivalentno:*

(i) Za svaki morfizam $f\colon P \to a$ i svaki epimorfizam $g\colon b \to a$ u $\mathscr{A}$, postoji $h\colon P \to b$ takav da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[d, "g"] \\ P \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "f"'] & a \end{tikzcd}$$

(ii) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P,-)\colon \mathscr{A} \to \mathrm{Ab}$ *je egzaktan funktor.*

Dokaz. Iz prethodne propozicije te korolara 1.2.41, dovoljno je pokazati da je (i) ekvivalentno s tim da $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P,-)$ čuva epimorfizme. Pretpostavimo da je P projektivan i uzmimo proizvoljan epimorfizam $g\colon b \twoheadrightarrow a$. Tvrdimo da je

$$g\circ -\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P,b) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P,a)$$

epimorfizam. No, za proizvoljan morfizam $f\colon P \to a$ iz projektivnosti od P slijedi da postoji $h\colon P \to b$ takav da je $gh = f$, pa je $g \circ -$ surjektivno. Obratno, neka $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P, -)$ čuva epimorfizme. Uzmimo proizvoljne $f\colon P \to a$ i $g\colon b \twoheadrightarrow a$, takav da je g epimorfizam. Kako je po pretpostavci $g \circ -\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P, b) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P, a)$ epimorfizam, to postoji $h\colon P \to b$ takav da je $gh = f$, a to je točno projektivnost od P. □

Objekt P koji zadovoljava (i) ili (ii) iz prethodnog teorema nazivamo *projektivnim objektom*. Dualan pojam je *injektivni objekt*; to je objekt I za kojeg je $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, I)\colon \mathscr{A} \to \mathrm{Ab}$ egzaktan.

Lema 1.2.44. *Biprodukt injektivnih objekata je ponovno injektivan.*

Dokaz. Neka su I i I' injektivni objekti u $\mathscr{A}$. Budući da je

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, I \oplus I') \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, I) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, I'),$$

za epimorfizam f u $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$, imamo da su $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(f, I)$ i $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(f, I')$ epimorfizmi, a onda je i njihov biprodukt epimorfizam. Dakle, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(f, I \oplus I')$ je epimorfizam, pa je $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, I \oplus I')$ egzaktan. □

Navedimo još neke korisne rezultate za Abelove kategorije.

Lema 1.2.45. (4-lema) *Neka je $\mathscr{A}$ Abelova kategorija.*

(i) Za komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & b \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta", tail] & c \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] & d \arrow[d, "\delta", tail] \\
a' \arrow[r, "f'"] & b' \arrow[r, "g'"] & c' \arrow[r, "h'"] & d'
\end{tikzcd}$$

u kojem su retci egzaktni, a α epimorfizam, ako su β i δ monomorfizmi, onda je i γ monomorfizam.

(ii) Za komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & c \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] & d \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\delta"] & e \arrow[d, "\varepsilon", tail] \\
b' \arrow[r, "g'"] & c' \arrow[r, "h'"] & d' \arrow[r, "k'"] & e'
\end{tikzcd}$$

u kojem su retci egzaktni, a ε monomorfizam, ako su β i δ epimorfizmi, onda je i γ epimorfizam.

Dokaz. Vidi [6]. □

Korolar 1.2.46. (5-lema) *Za komutativan dijagram*

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & b \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & c \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] & d \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\delta"] & e \arrow[d, "\varepsilon"] \\
a' \arrow[r, "f'"] & b' \arrow[r, "g'"] & c' \arrow[r, "h'"] & d' \arrow[r, "k'"] & e'
\end{tikzcd}$$

u kojem su retci egzaktni, α epimorfizam, a ε monomorfizam vrijedi:

(i) Ako su β i δ monomorfizmi, onda je i γ monomorfizam.

(ii) Ako su β i δ epimorfizmi, onda je i γ epimorfizam.

(iii) Ako su β i δ izomorfizmi, onda je i γ izomorfizam.

Dokaz. (*i*) i (*ii*) slijede direktno iz 4-leme, a (*iii*) iz (*i*) i (*ii*) te 1.2.34. □

Kao direktnu posljedicu 5-leme imamo tzv. kratku 5-lemu:

Korolar 1.2.47. (kratka 5-lema) *Neka je dan komutativan dijagram*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & b \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & c \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & a' \arrow[r, "f'"] & b' \arrow[r, "g'"] & c' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

u kojem su retci egzaktni.

(i) Ako su α i γ monomorfizmi, onda je i β monomorfizam.

(ii) Ako su α i γ epimorfizmi, onda je i β epimorfizam.

(iii) Ako su α i γ izomorfizmi, onda je i β izomorfizam.

Lema 1.2.48. *Neka je dan komutativan dijagram*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & b \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & c \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & a' \arrow[r, "f'"] & b' \arrow[r, "g'"] & c' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

u kojem su retci egzaktni. Tada postoji jedinstveni morfizam $\gamma\colon c \to c'$ takav da je $\gamma g = g'\beta$. Ako su α i β izomorfizmi, onda je to i γ.

Dokaz. Prema dualu propozicije 1.2.38 morfizam g je kojezgra od f. Imamo

$$g'\beta f = g'f'\alpha = 0$$

pa je $\gamma\colon c \to c'$ induciran univerzalnim svojstvom kojezgre. Ako su α i β izomorfizmi, onda je i γ prema 5-lemi (s desne strane možemo dodati nul-morfizme). □

Neka je

$$0 \longrightarrow a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \longrightarrow 0$$

kratki egzaktni niz te neka postoji $h\colon b \to a$ takav da je $hf = 1_a$. Tada dani niz zovemo *rascijepljenim.*

Propozicija 1.2.49. *Niz*

$$0 \longrightarrow a \xrightarrow{\iota_a} a \oplus b \xrightarrow{\pi_b} b \longrightarrow 0$$

je egzaktan i rascijepljen.

Dokaz. Prema propoziciji 1.2.38 dovoljno je pokazati da je ι_a jezgra od π_b budući da je π_b epimorfizam. Neka je $f\colon c \to a \oplus b$ takav da je $\pi_b f = 0$. Tada slijedi da je i $\iota_b \pi_b f = 0$, a onda imamo $\iota_a \pi_a f = \iota_a \pi_a f + \iota_b \pi_b f = f$, dakle f se faktorizira kroz a. Morfizam $\pi_a f\colon c \to a$ je jedinstven morfizam za koji je $\iota_a \pi_a f = f$ jer je ι_a monomorfizam. Time smo pokazali univerzalno svojstvo jezgre. □

Pokazat ćemo da su svi rascijepljeni nizovi tog oblika u sljedećoj lemi.

Lema 1.2.50. (lema o cijepanju) *Neka je dan kratki egzaktni niz*

$$0 \longrightarrow a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \longrightarrow 0$$

Tada je ekvivalentno:

(i) postoji $h\colon b \to a$ takav da je $hf = 1_a$,

(ii) postoji $h\colon c \to b$ takav da je $gh = 1_c$,

(iii) $b \cong a \oplus c$ pri čemu su f i g kanonski morfizmi biprodukta.

Dokaz. Zbog dualizacije je dovoljno pokazati $(i) \Leftrightarrow (iii)$, pri čemu je $(iii) \Rightarrow (i)$ trivijalno. Pretpostavimo, dakle, (i) te definirajmo $P := fh$. P je idempotentan, tj. $P \circ P = fhfh = fh = P$. Označimo s $\pi_P\colon b \twoheadrightarrow \operatorname{im} P$ i $\iota_P\colon \operatorname{im} P \rightarrowtail b$ kosliku i sliku morfizma P. Zbog jedinstvenosti epi-mono faktorizacije postoji jedinstveni izomorfizam $\varphi\colon a \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} P$ takav da je $\varphi h = \pi_P$ i $f = \iota_P \varphi$. Budući da je $hf = 1_a$, vrijedi

$$\varphi = \varphi hf = \pi_P f \Rightarrow \pi_P \iota_P \varphi = \pi_P f = \varphi \Rightarrow \pi_P \iota_P = 1_{\operatorname{im} P}.$$

Definirajmo $Q := 1_b - P$ te označimo s $\pi_Q\colon b \twoheadrightarrow \operatorname{im} Q$ i $\iota_Q\colon \operatorname{im} Q \rightarrowtail b$ njegovu kosliku i sliku. Imamo

$$\begin{aligned} Q \circ Q &= (1_b - P)(1_b - P) \\ &= 1_b - P - P + P \circ P, \\ &= 1_b - P = Q \end{aligned}$$

a onda i $\iota_Q \pi_Q \iota_Q \pi_Q = \iota_Q \pi_Q$ što povlači $\pi_Q \iota_Q = 1_{\operatorname{im} Q}$ jer je ι_Q monomorfizam, a π_Q epimorfizam. Također vrijedi

$$\begin{aligned} \pi_P \iota_Q = 0 &\Leftrightarrow \pi_P \iota_Q \pi_Q = 0 \\ &\Leftrightarrow \pi_P(1_b - \iota_P \pi_P) = 0 \\ &\Leftrightarrow \pi_P - \pi_P \iota_P \pi_P = 0 \\ &\Leftrightarrow \pi_P - \pi_P = 0 \end{aligned},$$

a slično se dobije i $\pi_Q \iota_P = 0$. No, to znači da imamo $\pi_i \iota_j = \delta_{ij}$ za $i, j \in \{P, Q\}$ te $\iota_P \pi_P + \iota_Q \pi_Q = P + Q = 1_b$, a onda prema lemi 1.2.8 imamo $b \cong \operatorname{im} P \oplus \operatorname{im} Q$. Imamo komutativan dijagram s egzaktnim retcima

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"', "\wr"] & b \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1_b"', "\wr"] & c \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{im} P \arrow[r, "\iota_P"] & b \arrow[r, "\pi_Q"] & \operatorname{im} Q \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

a onda prema lemi 1.2.48 postoji jedinstveni izomorfizam $\psi\colon c \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} Q$ za koji je $\psi g = \pi_Q$ iz čega slijedi da je $hf = 1_a$, $g(\iota_Q \psi) = 1_c$ i $fh + (\iota_Q \psi) g = 1_b$, pa prema lemi 1.2.8 slijedi (iii). $\square$

Lema 1.2.51. (lema o zmiji) *Za komutativan dijagram*

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & b \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & c \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & a' \arrow[r, "f'"] & b' \arrow[r, "g'"] & c' &
\end{tikzcd}$$

pri čemu su retci egzaktni, postoji morfizam $\delta\colon \ker\gamma \to \operatorname{coker}\alpha$ *takav da je niz*

$$0 \longrightarrow \ker\alpha \longrightarrow \ker\beta \longrightarrow \ker\gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}\alpha \longrightarrow \operatorname{coker}\beta \longrightarrow \operatorname{coker}\gamma \longrightarrow 0$$

egzaktan.

Dokaz leme o zmiji možemo pronaći primjerice u [6]. Napomenimo samo da su morfizmi između jezgri i kojezgri inducirani univerzalnim svojstvima.

1.3 Lokalizacija kategorija

Ranije smo već dali kategorifikaciju pojma prstena, a u ovom odjeljku ćemo poopćiti *lokalizaciju* prstena. Kada radimo teoriju prstenova, lokalizacijom nazivamo formalno uvođenje inverza s obzirom na operaciju množenja u prstenu, a poučeni primjerom da elementi prstena definiraju endomorfizme predaditivne kategorije s jednim objektom, lokalizacija kategorije će formalno uvoditi inverze s obzirom na kompoziciju u kategoriji. Pokazat ćemo i da taj prošireni pojam lokalizacije poopćuje klasičan pojam, odnosno lokalizacija predaditivne kategorije s jednim objektom će točno odgovarati lokalizaciji prstena. U ovom odjeljku posebno naglašavamo univerzum u kojem se nalaze hom-skupovi, budući da će lokalizacija općenito povećavati univerzum. Ako ne kažemo drugačije, kategorija $\mathscr{C}$ će biti $\mathcal{U}$-kategorija, a kategorija Set kategorija $\mathcal{U}$-malih skupova.

Lokalizacija kategorije

Definicija 1.3.1. Neka je $\mathscr{C}$ $\mathcal{U}$-kategorija, a S neki skup morfizama u $\mathscr{C}$. Kategoriju $\mathscr{C}[S^{-1}]$ s funktorom $Q\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}[S^{-1}]$ nazivamo *lokalizacijom* kategorije $\mathscr{C}$ u odnosu na skup S ukoliko vrijedi:

(i) Qs je izomorfizam u $\mathscr{C}[S^{-1}]$ za sve $s \in S$.

(*ii*) za proizvoljan funktor $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ takav da je Fs izomorfizam u kategoriji $\mathscr{D}$ za sve $s \in S$, postoji jedinstveni funktor $\widetilde{F}\colon \mathscr{C}[S^{-1}] \to \mathscr{D}$ takav da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"] & \mathscr{D} \\
\mathscr{C}[S^{-1}] \arrow[ur, "\widetilde{F}"'] &
\end{tikzcd}$$

Konstruirajmo lokalizaciju. Za objekte u kategoriji $\mathscr{C}[S^{-1}]$ uzmimo objekte iz $\mathscr{C}$, a da bi definirali morfizme, promotrimo sljedeću konstrukciju:

Put između objekata c i d u $\mathscr{C}[S^{-1}]$ je konačan niz $(c_1, g_1, \ldots, c_{n-1}, g_{n-1}, c_n)$ tako da $c_i \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}[S^{-1}]$, $i = 1, \ldots, n$, $c_1 = c$, $c_n = d$, $g_i \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(c_i, c_{i+1}) \sqcup (\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(c_{i+1}, c_i) \cap S)$. Svaki par objekata c, d iz $\mathscr{C}[S^{-1}]$ određuje inkluzije

$$\iota_0(c,d)\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(c,d) \hookrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(c,d) \sqcup (\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(d,c) \cap S)$$

$$\iota_1(c,d)\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(d,c) \cap S \hookrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(c,d) \sqcup (\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(d,c) \cap S)$$

te budući da su domena i kodomena morfizma jedinstveno određene, put možemo skraćeno zapisati $(\iota_{i_1} f_1, \ldots, \iota_{i_n} f_n)$, $i_k \in \{0,1\}$, $k = 1, \ldots, n$. Nadalje, definiramo elementarne transformacije puta:

(*i*) zamjena $(\ldots, \iota_1 f, \iota_1 g, \ldots)$ i $(\ldots, \iota_1(g \circ f), \ldots)$,

(*ii*) zamjena $(\ldots, \iota_1 f, \iota_2 f, \ldots)$ i $(\ldots, \iota_1 1_{\operatorname{dom} f}, \ldots)$,

(*iii*) zamjena $(\ldots, \iota_2 f, \iota_1 f, \ldots)$ i $(\ldots, \iota_1 1_{\operatorname{cod} f}, \ldots)$,

(*iv*) zamjena $(\ldots, \iota_1 1_{\operatorname{dom} f}, \iota_2 f, \ldots)$ i $(\ldots, \iota_2 f, \ldots)$.

Kažemo da su dva puta ekvivalentna ako se jedan iz drugoga mogu dobiti primjenom konačno mnogo elementarnih transformacija (očito je to relacija ekvivalencije). Kompoziciju puteva definiramo kao konkatenaciju, što očito inducira kompoziciju klasa ekvivalencije puteva. Sada $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}[S^{-1}]}(c,d)$ definiramo kao klase ekvivalencije puteva između c i d. Identiteta na c u $\mathscr{C}[S^{-1}]$ je klasa reprezentirana putem $(\iota_1 1_c)$. Funktor Q definiramo kao identitetu na objektima, a na morfizmima $Qf := (\iota_1 f)$. Elementarne transformacije (*ii*) i (*iii*) daju da je $(Qs)^{-1} = (\iota_2 s)$, $\forall s \in S$.

Teorem 1.3.2. *Kategorija $\mathscr{C}[S^{-1}]$ je lokalizacija kategorije $\mathscr{C}$ u odnosu na S te je ona jedinstvena do na jedinstven izomorfizam.*

Dokaz. Jedinstvenost do na jedinstveni izomorfizam se pokazuje analogno svakoj univerzalnoj konstrukciji. Preostaje još pokazati univerzalno svojstvo. Za funktor $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ definiramo $\widetilde{F}(\iota_{i_1} f_1, \dots, \iota_{i_n} f_n) := (Ff_n)^{1-2i_n} \circ \dots \circ (Ff_1)^{1-2i_1}$. Definicija neće ovisiti o izboru reprezentanta jer je F funktor, tj. čuva kompozicije i identitete. Nadalje, $\widetilde{F}Qf = \widetilde{F}(\iota_1 f) = Ff$ pa je $\widetilde{F} \circ Q = F$. Neka je $G\colon \mathscr{C}[S^{-1}] \to \mathscr{D}$ proizvoljan funktor za koji vrijedi $G \circ Q = F$. Sada imamo:

$$\begin{aligned} G(\iota_{i_1} f_1, \dots, \iota_{i_n} f_n) &= G((\iota_{i_n} f_n) \circ \dots \circ (\iota_{i_1} f_1)) \\ &= G((Qf_n)^{1-2i_n} \circ \dots \circ (Qf_1)^{1-2i_1}) \\ &= (GQf_n)^{1-2i_n} \circ \dots \circ (GQf_1)^{1-2i_1} \\ &= (Ff_n)^{1-2i_n} \circ \dots \circ (Ff_1)^{1-2i_1} \\ &= \widetilde{F}(\iota_{i_1} f_1, \dots, \iota_{i_n} f_n). \end{aligned}$$

□

Napomena 1.3.3. Iz konstrukcije morfizama u lokalizaciji je jasno da $\mathscr{C}[S^{-1}]$ više neće nužno biti $\mathcal{U}$-kategorija.

Neka je S neki skup morfizama u $\mathscr{C}$, $Q_S\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}[S^{-1}]$ funktor lokalizacije te neka je $Q_S^{\mathrm{op}}\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{C}[S^{-1}]^{\mathrm{op}}$ funktor induciran s Q_S. Tada je S^{op} neki skup morfizama u $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ te su $Q_S^{\mathrm{op}} s^{\mathrm{op}} = (Qs)^{\mathrm{op}}$ invertibilni u $\mathscr{C}[S^{-1}]^{\mathrm{op}}$, za sve $s^{\mathrm{op}} \in S^{\mathrm{op}}$, pa posebno postoji jedinstveni $F\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}}[(S^{\mathrm{op}})^{-1}] \to \mathscr{C}[S^{-1}]^{\mathrm{op}}$ takav da je $F \circ Q_{S^{\mathrm{op}}} = Q_S^{\mathrm{op}}$.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \arrow[r, "Q_S^{\mathrm{op}}"] \arrow[d, "Q_{S^{\mathrm{op}}}"] & \mathscr{C}[S^{-1}]^{\mathrm{op}} \\ \mathscr{C}^{\mathrm{op}}[(S^{\mathrm{op}})^{-1}] \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Ako označimo

$$\begin{aligned} \iota_0^{\mathrm{op}}(c,d)\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(c,d) &\hookrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(c,d) \sqcup (\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(d,c) \cap S^{\mathrm{op}}) \\ \iota_1^{\mathrm{op}}(c,d)\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(d,c) \cap S^{\mathrm{op}} &\hookrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(c,d) \sqcup (\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(d,c) \cap S^{\mathrm{op}}) \end{aligned}$$

očito vrijedi $\iota_i^{\mathrm{op}}(c,d) = \iota_i(d,c)$ pa imamo:

$$\begin{aligned} F(\iota_{i_1}^{\mathrm{op}} f_1, \dots, \iota_{i_n}^{\mathrm{op}} f_n) &= (Q_S^{\mathrm{op}} f_n^{\mathrm{op}})^{1-2i_n} \circ^{\mathrm{op}} \dots \circ^{\mathrm{op}} (Q_S^{\mathrm{op}} f_1^{\mathrm{op}})^{1-2i_1} \\ &= (Q_S f_n)^{1-2i_n} \circ^{\mathrm{op}} \dots \circ^{\mathrm{op}} (Q_S f_1)^{1-2i_1} \\ &= (Q_S f_1)^{1-2i_1} \circ \dots \circ (Qf_n)^{1-2i_n} \\ &= \iota_{i_n} f_n, \dots, \iota_{i_1} f_1 \end{aligned}$$

odakle očito slijedi da je F potpuno vjeran. Nadalje, Q_S^{op} na objektima djeluje kao identiteta, pa je posebno F bijektivan na objektima, dakle F je izomorfizam kategorija. Time smo pokazali propoziciju:

Propozicija 1.3.4. *Neka je S neki skup morfizama u kategoriji $\mathscr{C}$. Tada je S^{op} neki skup morfizama u $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ te vrijedi $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}[(S^{\mathrm{op}})^{-1}] \cong \mathscr{C}[S^{-1}]^{\mathrm{op}}$.*

Lokalizacija kategorije po lokalizirajućem skupu

Iako je nedvojbeno korisno, bar iz teoretskih razloga, imati dobro definiran pojam lokalizacije za sve kategorije, činjenica je da o morfizmima u lokalizaciji u općem slučaju nećemo moći reći ništa pametno. Ponekad čak niti je li lokalizicija trivijalna ili ne. Prihvativši takvo činjenično stanje, idući zadatak je bar definirati *dobru* klasu morfizama, po kojoj će lokalizacija biti jednostavno opisiva. U teoriji lokalizacije nekomutativnih prstena, uvjeti koje dajemo su poznati kao *Oreovi* (Øystein Ore). Uz te uvjete dat ćemo alternativnu konstrukciju lokalizacije, analognu lokalizaciji prstena u algebri, te pokazati da je tako definirana kategorija izomorfna lokalizaciji kako smo je u početku definirali (teorem 1.3.9).

Definicija 1.3.5. Neka je $\mathscr{C}$ kategorija te neka je S neki skup morfizama u $\mathscr{C}$ takva da vrijedi:

(LS1) Za sve objekte c u $\mathscr{C}$, identiteta 1_c na c je u S.

(LS2) Za sve morfizme f, g u S kompozicija fg je u S, ukoliko je definirana.

(LS3) Za sve morfizme f u $\mathscr{C}$ te morfizme s u S sa zajedničkom domenom, postoje morfizmi g u $\mathscr{C}$ i t u S takvi da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, dashed, "g"] \\ c \arrow[r, dashed, "t"] & d \end{tikzcd}$$

(LS4) Za sve morfizme f, g u $\mathscr{C}$, ako postoji s u S takav da je $fs = gs$, onda postoji t u S takav da je $tf = tg$.

Tada S zovemo *desno lokalizirajućim skupom* u kategoriji $\mathscr{C}$. S zovemo *lijevo lokalizirajućim skupom* u kategoriji $\mathscr{C}$ ako je S^{op} desno lokalizirajući skup u $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, odnosno ako umjesto (LS3) i (LS4) vrijede njihovi duali koje ćemo označavati (LS3*) te (LS4*).

Skup morfizama S koji je i lijevo i desno lokalizirajući skup zovemo *lokalizirajućim skupom.*

Napomena 1.3.6. Kako to često biva u matematici, različiti autori koriste različite konvencije u terminologiji, pa tako ono što mi zovemo desno lokalizirajućim skupom, neki autori zovu lijevo lokalizirajućim i obratno. Ubrzo ćemo vidjeti da desno (lijevo) lokalizirajući skupovi dopuštaju jednostavan opis morfizama u lokalizaciji preko kolimesa u kategoriji Set te ćemo tada dati lako pamtljivu heuristiku za određivanje što je lijevo, a što desno lokalizirajući skup u našem smislu. Također, umjesto termina (lijevo, desno) lokalizirajući skup, često se u literaturi kaže da skup *dopušta (lijevi, desni) račun razlomaka* što je savršeno opravdana terminologija uzevši u obzir da je lokalizacija kategorije poopćenje klasične lokalizacije prstena te će morfizmi u lokalizaciji zaista izgledati kao razlomci, ako su dani uvjeti (LS1)-(LS4) (ili njihovi duali), što ćemo pokazati u sljedećoj napomeni.

Napomena 1.3.7. Primjetimo da nam (LS1) i (LS2) uz primjenu elementarnih transformacija puteva daju da svaki morfizam u $\mathscr{C}[S^{-1}]$ možemo reprezentirati putem $(\iota_1 f_1, \iota_2 s_1, \ldots, \iota_1 f_n, \iota_2 s_n)$. Nadalje, iz (LS3) slijedi da za svaki put $(\iota_2 s, \iota_1 f)$ postoje morfizmi g i t takvi da je $(\iota_2 s, \iota_1 f) = (\iota_1 g, \iota_2 t)$. Naime, $(\iota_2 s, \iota_1 f) = Qf \circ (Qs)^{-1}$ pa posebno na f i s možemo primjeniti (LS3), odnosno postoje morfizmi g i t ($t \in S$) takvi da je $tf = gs$ te imamo

$$Qt \circ Qf = Qg \circ Qs \Rightarrow Qf \circ (Qs)^{-1} = (Qt)^{-1} \circ Qg \Rightarrow (\iota_2 s, \iota_1 f) = (\iota_1 g, \iota_2 t).$$

No, tada slijedi da za svaki put oblika $(\iota_1 f_1, \iota_2 s_1, \ldots, \iota_1 f_n, \iota_2 s_n)$ postoje morfizmi f u $\mathscr{C}$ i s u S takvi da je $(\iota_1 f_1, \iota_2 s_1, \ldots, \iota_1 f_n, \iota_2 s_n) = (\iota_1 f, \iota_2 s) = (Qs)^{-1} \circ Qf$.

Napomena 1.3.8. Neka smo u situaciji iz (LS3), te neka je F proizvoljan funktor za koji je Fs invertibilan za sve s u S. Kao i u prethodnoj napomeni, vrijedi

$$tf = gs \Rightarrow Ft \circ Ff = Fg \circ Fs \Rightarrow Ff \circ (Fs)^{-1} = (Ft)^{-1} \circ Fg,$$

tj. lijevi razlomak uvijek možemo zamijeniti desnim razlomkom, što smo i napravili u prehodnoj napomeni za Q.

Dakle, svaki morfizam iz $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}[S^{-1}]}(c, d)$ možemo reprezentirati pomoću dva morfizma f i s takvih da je $s \in d/S$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(c, \operatorname{cod} s)$, pri čemu je d/S puna potkategorija kategorije morfizama pod d $d/\mathscr{C}$ (eng. *coslice category*, *under category*) čiji su objekti morfizmi u S s domenom d. Za svaki $s \in d/S$ definirajmo $q_s\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(c, \operatorname{cod} s) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}[S^{-1}]}(c, d)$, $q_s f := (Qs)^{-1} \circ Qf$. Neka je $p\colon s \to s'$ proizvoljan morfizam u d/S. Tada imamo da je $Qp = Qs' \circ (Qs)^{-1}$ invertibilan te

$$q_{s'}(pf) = (Q(ps))^{-1} \circ Q(pf) = (Qs)^{-1} \circ (Qp)^{-1} \circ Qp \circ Qf = q_s f$$

odnosno, komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(c, \operatorname{cod} s) \arrow[r, "q_s"] \arrow[d, "p \circ \_"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}[S^{-1}]}(c, d) \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(c, \operatorname{cod} s') \arrow[ur, "q_{s'}"'] & \end{tikzcd}$$

no, tada preslikavanja q_s preko univerzalnog svojstva kolimesa induciraju preslikavanje $\pi_{cd}\colon \operatorname{colim}_{t\in d/S} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(c, \operatorname{cod} t) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}[S^{-1}]}(c, d)$. Kada bismo imali da su π_{cd} bijekcije za sve parove objekata $c, d \in \mathscr{C}$, lako bismo mogli definirati kategoriju $S^{-1}\mathscr{C}$ čiji bi objekti bili objekti iz $\mathscr{C}$, a morfizmi $\mathrm{Hom}_{S^{-1}\mathscr{C}}(c, d) := \operatorname{colim}_{t\in d/S} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(c, \operatorname{cod} t)$ te bi preslikavanja π_{cd} definirala izomorfizam kategorija $S^{-1}\mathscr{C} \cong \mathscr{C}[S^{-1}]$, što bi nam dalo kategorijski opis morfizama u lokalizaciji. Nažalost, nije očito zašto bi preslikavanja π_{cd} nužno bila bijektivna, no, koristeći π možemo definirati kompoziciju u $S^{-1}\mathscr{C}$ te pokazati da je tako definirana kategorija lokalizacija kategorije $\mathscr{C}$, tj. da zadovoljava univerzalno svojstvo iz definicije 1.3.1. Prije svega, izračunajmo $\operatorname{colim}_{t\in d/S} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(c, \operatorname{cod} t)$. Definiramo $H(c, d) := \{(s, f) \mid s \in d/S,\ f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(c, \operatorname{cod} s)\}/_{\sim}$, pri čemu je relacija $\sim$ definirana tako da $(s, f) \sim (t, g)$ ako i samo ako postoje morfizmi p i q takvi da je $ps \in S$ te komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[d, "p"] & \\ c \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & b & d \arrow[ul, "s"'] \arrow[dl, "t"] \\ & a' \arrow[u, "q"] & \end{tikzcd}$$

Iz aksioma (LS1)-(LS4) slijedi da je $\sim$ relacija ekvivalencije (v. [9]). Nadalje, definirajmo $\iota_s\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(c, \operatorname{cod} s) \to H(c, d)$, $\iota_s f := [s, f]$. Neka su sada $s \in d/S$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(c, \operatorname{cod} s)$ te p morfizam u $\mathscr{C}$ takav da je $ps \in S$. Tada imamo da je $(s, f) \sim (ps, pf)$ jer komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[d, "p"] & \\ c \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "pf"'] & b & d \arrow[ul, "s"'] \arrow[dl, "ps"] \\ & b \arrow[u, "1_b"] & \end{tikzcd}$$

pa posebno imamo da je $\iota_s f = \iota_{s'}(pf)$ za sve morfizme $p\colon s \to s'$ u d/S. Neka je dana familija funkcija $\varphi_s\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(c, \operatorname{cod} s) \to a$ takva da za sve morfizme $p\colon s \to s'$ u d/S vrijedi $\varphi_s f = \varphi_{s'}(pf)$. Definiramo $\varphi\colon H(c,d) \to a$ formulom $\varphi[s,f] := \varphi_s f$. Pretpostavimo za trenutak da je φ dobro definirano i neka je $\psi\colon H(c,d) \to a$ funkcija takva da je $\psi\iota_s = \varphi_s$, $\forall s \in d/S$. Tada je $\psi[s,f] = \varphi_s f = \varphi[s,f]$, za sve $[s,f] \in H(c,d)$, tj. $\psi = \varphi$. Nadalje, očito komutira dijagram

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(c, \operatorname{cod} s) \arrow[dd, "p \circ _"] \arrow[dr, "\iota_s"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_s"] & & \\
& H(c,d) \arrow[r, dashed, "\varphi"] & a \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(c, \operatorname{cod} s') \arrow[ur, "\iota_{s'}"'] \arrow[urr, bend right, "\varphi_{s'}"'] & &
\end{tikzcd}$$

pa čim dokažemo da je φ dobro definirano, imat ćemo $\operatorname{colim}_{t \in d/S} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(c, \operatorname{cod} t) = H(c,d)$. No, ako je $(s,f) \sim (t,g)$, onda postoje morfizmi p, q u $\mathscr{C}$ takvi da je $pf = qg$, $ps = qt$, $ps \in S$, pa imamo $\varphi[s,f] = \varphi_s f = \varphi_{ps}(pf) = \varphi_{qt}(qg) = \varphi_t g = \varphi[t,g]$. Sada možemo eksplicitno zapisati i $\pi_{cd}[s,f] = (Qs)^{-1} \circ Qf$. Surjektivnost od π_{cd} je sada očita, no i dalje ne znamo je li π_{cd} nužno injektivno. Uzmimo sad neke objekte a, b, c u $\mathscr{C}$. Želimo definirati kompoziciju $\circ\colon H(a,b) \times H(b,c) \to H(a,c)$ tako da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd}
H(a,b) \times H(b,c) \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "\pi_{ab} \times \pi_{bc}"] & H(a,c) \arrow[d, "\pi_{ac}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}[S^{-1}]}(a,b) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}[S^{-1}]}(b,c) \arrow[r, "\circ"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}[S^{-1}]}(a,c)
\end{tikzcd}$$

Dakle, za proizvoljne morfizmef, g u $\mathscr{C}$ te s, t u S mora vrijediti

$$\begin{aligned}
\pi_{bc}[s,f] \circ \pi_{ab}[t,g] &= (Qs)^{-1} \circ Qf \circ (Qt)^{-1} \circ Qg \\
&= (Qs)^{-1} \circ (Qu)^{-1} \circ Qh \circ Qf \\
&= Q(us)^{-1} \circ Q(hg) \\
&= \pi_{ac}[us, hg]
\end{aligned}$$

za sve morfizme h u $\mathscr{C}$ i u u S takve da je $ht = uf$. Neka su dani takvi h i u te definirajmo $[s,f] \circ [t,g] := [us, hg]$. Prvo naglasimo da zbog (LS3) uvijek postoje h i u s danim svojstvima. Nadalje, iz aksioma (LS1)-(LS4) slijedi da definicija ne ovisi ni o izboru reprezentanata, ni o izboru h i u (v. [9]). Kompoziciju u $S^{-1}\mathscr{C}$ možemo prikazati sljedećim komutativnim dijagramom

$$\begin{tikzcd}
 & & d'' & & \\
 & d \arrow[ur, dashed, "h"] & & d' \arrow[ul, dashed, "u"'] & \\
a \arrow[ur, "g"] & & b \arrow[ul, "t"'] \arrow[ur, "f"] & & c \arrow[ul, "s"']
\end{tikzcd}$$

i obratno, svaki takav dijagram određuje kompoziciju u $S^{-1}\mathscr{C}$. Iz te obzervacije lako slijedi asocijativnost kompozicije, kao i da je identiteta na c dana klasom $[1_c, 1_c]$. Time smo u potpunosti definirali kategoriju $S^{-1}\mathscr{C}$ te vrijedi

Teorem 1.3.9. *Neka je S desno lokalizirajući skup u kategoriji $\mathscr{C}$. Tada je kategorija $S^{-1}\mathscr{C}$ lokalizacija kategorije $\mathscr{C}$ te je izomorfizam $S^{-1}\mathscr{C} \cong \mathscr{C}[S^{-1}]$ dan funktorom $\pi(c \xrightarrow{f} d) := c \xrightarrow{\pi_{cd}f} d$.*

Dokaz. Funktor $Q' \colon \mathscr{C} \to S^{-1}\mathscr{C}$ definirajmo kao identitetu na objektima, a na morfizmima formulom $Q'f := [1_{\operatorname{cod} f}, f]$. Tada imamo da vrijedi $Q'1_c = [1_c, 1_c]$ te $Q'(fg) = [1_c, fg] = [1_c, f] \circ [1_b, g] = Q'f \circ Q'g$, pa je Q' zaista funktor. Neka je sada $F \colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funktor takav da je Fs invertibilan za sve $s \in S$. Definiramo $\widetilde{F}[s, f] = (Fs)^{-1} \circ Ff$. Sada imamo $\widetilde{F}[1_c, 1_c] = (F1_c)^{-1}F1_c = 1_{Fc}$ te

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}([s, f] \circ [t, g]) &= \widetilde{F}[us, hg] \\
&= F(us)^{-1} \circ F(hg) \\
&= (Fs)^{-1} \circ (Fu)^{-1} \circ Fh \circ Fg \\
&= (Fs)^{-1} \circ Ff \circ (Ft)^{-1} \circ Fg \\
&= \widetilde{F}[s, f] \circ \widetilde{F}[t, g]
\end{aligned}$$

za neke morfizme h u $\mathscr{C}$ i u u S takve da je $ht = uf$. Nadalje, $\widetilde{F}Q'f = \widetilde{F}[1_{\operatorname{cod} f}, f] = Ff$. Neka je G proizvoljan funktor za kojeg vrijedi $GQ' = F$. Tada imamo da za sve morfizme f iz $\mathscr{C}$, s iz S vrijedi $G[1_{\operatorname{cod} f}, f] = Ff$ i $G[s, 1_{\operatorname{cod} s}] = (G[1_{\operatorname{cod} s}, s])^{-1} = (Fs)^{-1}$, odnosno $G[s, f] = G[s, 1_{\operatorname{cod} f}] \circ G[1_{\operatorname{cod} f}, f] = (Fs)^{-1} \circ Ff = \widetilde{F}[s, f]$. Dakle, $S^{-1}\mathscr{C}$ je lokalizacija kategorije $\mathscr{C}$ pa se posebno funktor $Q \colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}[S^{-1}]$ faktorizira kroz $S^{-1}\mathscr{C}$ te vrijedi $\pi \circ Q' = Q$. S druge strane, $\mathscr{C}[S^{-1}]$ je također lokalizacija kategorije $\mathscr{C}$ pa se Q' faktorizira kroz $\mathscr{C}[S^{-1}]$ te vrijedi $\pi' \circ Q = Q'$. Sada zbog jedinstvenosti faktorizacije funktora kroz lokalizaciju slijedi $\pi\pi' = 1_{\mathscr{C}[S^{-1}]}$ te $\pi'\pi = 1_{S^{-1}\mathscr{C}}$. $\square$

Napomena 1.3.10. Jasno, zbog propozicije 1.3.4 odmah imamo da vrijedi i dualan rezultat ukoliko je S lijevo lokalizirajući skup u $\mathscr{C}$.

Napomena 1.3.11. Morfizme u lokalizaciji sada možemo dobiti kao kolimes funktora $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(c, \mathrm{cod}\,-)$ za neki fiksan c. Otuda naziv *desno* lokalizirajući skup, varijabilni dio je u *desnom* argumentu Hom funktora. Primjetimo sličnost s terminologijom za lijevo, odnosno desno adjungirani funktor.

Nažalost, čak ni u slučaju lokalizacije po desnom (lijevom) lokalizirajućem skupu, $S^{-1}\mathscr{C}$ neće nužno biti $\mathcal{U}$-kategorija. Razlog tome je što d/S nije nužno $\mathcal{U}$-mala kategorija, pa onda ni $H(c,d)$ nije nužno $\mathcal{U}$-malen. U slučaju derivirane kategorije, uglavnom ćemo biti u takvoj situaciji. Ipak, možemo dati neke uvjete uz koje neće doći do povećanja univerzuma.

Lema 1.3.12. *Neka je S desno lokalizirajući skup morfizama u $\mathscr{C}$. Tada je c/S filtrirana kategorija za sve objekte c u $\mathscr{C}$.*

Dokaz. Iz (LS1) slijedi da je $1_c \in c/S$ pa je c/S neprazna. Neka su s, s' objekti u c/S. Iz (LS3) slijedi da postoje morfizmi t i t', pri čemu je $t \in S$, takvi da je $ts = t's'$. Definiramo $s'' := ts = t's'$ što je morfizam u S prema (LS2), pa slijedi da je $s'' \in c/S$ te da su $t\colon s \to s''$ i $t'\colon s' \to s''$ morfizmi u c/S. Uzmimo sada s, s' objekte u c/S te par paralelnih morfizama $f, g\colon s \to s'$. Posebno imamo da je $fs = s' = gs$, pa prema (LS4) postoji $t \in S$ takav da je $tf = tg$. Definiramo $s'' := ts'$ (f, g i s' imaju istu kodomenu, pa je ovo zaista dobro definirano). Iz (LS2) slijedi da je $s'' \in c/S$, a $t\colon s' \to s''$ morfizam u c/S takav da je $tf = tg$. Dakle, c/S je filitrirana. $\square$

Korolar 1.3.13. *Neka je S desno lokalizirajući skup u $\mathscr{C}$ te neka je za sve objekte c u $\mathscr{C}$ kategorija c/S kofinalno $\mathcal{U}$-mala, tj. neka za svaki c postoji $\mathcal{U}$-mala kategorija I i kofinalan funktor $F\colon I \to c/S$. Tada je $S^{-1}\mathscr{C}$ $\mathcal{U}$-kategorija.*

Dokaz. Neka su c, d objekti u $\mathscr{C}$ te $F\colon I \to d/S$ kofinalan funktor. Tada je prema teoremu 1.1.25 $\mathrm{colim}_{s \in d/S} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(c, \mathrm{cod}\, s) \cong \mathrm{colim}_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(c, \mathrm{cod}\, Fi)$, no I je $\mathcal{U}$-mala, pa je zbog kopotpunosti od Set $\mathrm{colim}_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(c, \mathrm{cod}\, Fi)$ $\mathcal{U}$-malen. Sada slijedi da je $\mathrm{Hom}_{S^{-1}\mathscr{C}}(c,d)$ $\mathcal{U}$-malen. $\square$

Korolar 1.3.14. *Neka je S desno lokalizirajući skup u $\mathscr{C}$ te neka je $S' \subseteq S$ $\mathcal{U}$-malen podskup od S takav da $(\forall c \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C})(\forall s \in c/S)(\exists s' \in c/S')(\exists\, p\colon\ \mathrm{cod}\, s \to \mathrm{cod}\, s')\, ps = s'$. Tada je $S^{-1}\mathscr{C}$ $\mathcal{U}$-kategorija.*

Dokaz. Neka je c objekt u $\mathscr{C}$. Inkluzija $I\colon c/S' \to c/S$ zadovoljava uvjete leme 1.1.26, pa budući da je c/S filtrirana prema 1.3.12, I je kofinalan funktor. Budući da je S' $\mathcal{U}$-malen, a $\mathscr{C}$ $\mathcal{U}$-kategorija, c/S' je $\mathcal{U}$-mala kategorija. Dakle, c/S je kofinalno $\mathcal{U}$-mala za sve objekte c u $\mathscr{C}$, pa je prema korolaru 1.3.13 $S^{-1}\mathscr{C}$ $\mathcal{U}$-kategorija. $\square$

Napomena 1.3.15. Zbog teorema 1.1.25, dovoljno je da je J kofinalno $\mathcal{U}$-mala.

Nakon ove digresije s univerzumima, pokažimo iznimno bitno svojstvo funktora lokalizacije.

Teorem 1.3.16. *Neka je $\mathscr{C}$ $\mathcal{U}$-kategorija i neka je S desno lokalizirajući skup u $\mathscr{C}$. Tada funktor $Q\colon \mathscr{C} \to S^{-1}\mathscr{C}$ čuva konačne kolimese.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{V}$ univerzum takav da je c/S kofinalno $\mathcal{V}$-mala za sve objekte c u $\mathscr{C}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
& Q(\operatorname{colim} F) \cong \operatorname{colim}(QF) \\
\Leftrightarrow \quad & \operatorname{Hom}_{S^{-1}\mathscr{C}}(Q \operatorname*{colim}_{i\in I} Fi, c) \cong \lim_{i\in I} \operatorname{Hom}_{S^{-1}\mathscr{C}}(QFi, c),\ \forall c \in \operatorname{Ob}\mathscr{C} \\
\Leftrightarrow \quad & \operatorname*{colim}_{s\in c/S} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(\operatorname*{colim}_{i\in I} Fi, \operatorname{cod} s) \cong \lim_{i\in I} \operatorname*{colim}_{s\in c/S} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Fi, \operatorname{cod} s),\ \forall c \in \operatorname{Ob}\mathscr{C} \\
\Leftrightarrow \quad & \operatorname*{colim}_{s\in c/S} \lim_{i\in I} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Fi, \operatorname{cod} s) \cong \lim_{i\in I} \operatorname*{colim}_{s\in c/S} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Fi, \operatorname{cod} s),\ \forall c \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}
\end{aligned}$$

no, posljednji izomorfizam je upravo onaj iz teorema 1.1.23.

Pokažimo da će izomorfizam $\operatorname{Hom}_{S^{-1}\mathscr{C}}(\operatorname{colim}_{i\in I} Fi, c) \cong \lim_{i\in I} \operatorname{Hom}_{S^{-1}\mathscr{C}}(Fi, c)$ biti prirodan u c. Fiksirajmo neki objekt c u $\mathscr{C}$ i označimo kanonske morfizme:

$$\begin{aligned}
\iota_{d,t}\colon\ & \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(d, \operatorname{cod} t) \to \operatorname*{colim}_{s\in c/S} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(d, \operatorname{cod} s), \\
\iota_t\colon\ & \lim_{i\in I} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Fi, \operatorname{cod} t) \to \operatorname*{colim}_{s\in c/S} \lim_{i\in I} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Fi, \operatorname{cod} s), \\
\mu_i\colon\ & Fi \to \operatorname{colim} F.
\end{aligned}$$

Tada je izomorfizam iz teorema 1.1.23 dan formulom $\bigvee_s \lim_i(\iota_{Fi,s})$. Nadalje, izomorfizam $\bigvee_s(\iota_s \circ \Phi_s)\colon \operatorname{Hom}_{S^{-1}\mathscr{C}}(\operatorname{colim} F, c) \xrightarrow{\sim} \operatorname{colim}_{s\in c/S} \lim_{i\in I} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Fi, \operatorname{cod} s)$ induciran je univerzalnim svojstvom prikazanim u komutativnom dijagramu

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(\operatorname{colim} F, \operatorname{cod} s) \arrow[r, "\Phi_s"] \arrow[d, "\iota_{\operatorname{colim} F,s}"] & \lim_i \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Fi, \operatorname{cod} s) \arrow[d, "\iota_s"] \\
\operatorname{colim}_t \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(\operatorname{colim} F, \operatorname{cod} s) \arrow[r, dashed, "\bigvee_s(\iota_s \circ \Phi_s)"] & \operatorname{colim}_t \lim_i \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Fi, \operatorname{cod} s)
\end{tikzcd}$$

pri čemu su $\Phi_t\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(\operatorname{colim} F, \operatorname{cod} t) \xrightarrow{\sim} \lim_{i\in I} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Fi, \operatorname{cod} t)$ dani s $f \mapsto (f\mu_i)_{i\in I}$. Sada imamo da je izomorfizam $\alpha_c\colon \operatorname{Hom}_{S^{-1}\mathscr{C}}(\operatorname{colim} F, c) \xrightarrow{\sim} \lim_{i\in I} \operatorname{Hom}_{S^{-1}\mathscr{C}}(Fi, c)$

dan formulom $\alpha_c = \bigvee_s \lim_i(\iota_{Fi,s}) \circ \bigvee_s(\iota_s \circ \Phi_s)$, tj.

$$\begin{aligned}
\alpha_c[t,g] &= \left(\bigvee_s \lim_i(\iota_{Fi,s}) \circ \bigvee_s(\iota_s \circ \Phi_s)\right)[t,g] \\
&= \left(\bigvee_s \lim_i(\iota_{Fi,s})\right)(\iota_t(g\mu_i)_i) \\
&= \lim_i(\iota_{Fi,t})(g\mu_i)_i \\
&= (\iota_{Fi,t}(g\mu_i))_i \\
&= [t, g\mu_i]_{i\in I}
\end{aligned}$$

Sada za proizvoljne morfizme $[s,f]\colon c \to d$ i $[t,g]\colon \operatorname{colim} F \to c$ u $S^{-1}\mathscr{C}$ te morfizme h u $\mathscr{C}$ i u u S takve da je $ht = uf$ imamo komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd}
{[t,g]} \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & {[t,g\mu_i]_i} \arrow[ddd, mapsto] \\
& \operatorname{Hom}_{S^{-1}\mathscr{C}}(\operatorname{colim} F, c) \arrow[r, "\alpha_c"] \arrow[d, "{[s,f]\circ _}"] & \lim_i \operatorname{Hom}_{S^{-1}\mathscr{C}}(Fi, c) \arrow[d, "{\lim_i([s,f]\circ _)}"] & \\
& \operatorname{Hom}_{S^{-1}\mathscr{C}}(\operatorname{colim} F, d) \arrow[r, "\alpha_d"] & \lim_i \operatorname{Hom}_{S^{-1}\mathscr{C}}(Fi, d) & \\
{[s,f]\circ[t,g] = [us,hg]} \arrow[rrr, mapsto] & & & {[us,hg\mu_i]_i = ([s,f]\circ[t,g\mu_i])_i}
\end{tikzcd}$$

što je točno prirodnost od α. □

Lema 1.3.17. („svođenje na zajednički nazivnik") *Neka je S desno lokalizirajući skup u kategoriji $\mathscr{C}$ i neka su $\varphi, \psi\colon c \to d$ morfizmi u $S^{-1}\mathscr{C}$. Tada postoji $s \in d/S$ te $f, g\colon c \to \operatorname{cod} s$ morfizmi u $\mathscr{C}$ takvi da je $\varphi = [s,f]$ i $\psi = [s,g]$.*

Dokaz. Neka su $\varphi = [s,f]$ i $\psi = [t,g]$. Kako su domene od s i t jednake, možemo primjeniti (LS3) te dobiti morfizme s' i t' takve da je $s's = t't$ i $s' \in S$. Posebno je onda i $s's \in S$ zbog (LS2). No, otprije znamo da je $[s's, s'f] = [s,f]$ čim je $s's \in S$, a analogno i $[t't, t'g] = [t,g]$. Definirajmo $f' := s'f$, $g' := t'g$ te $u := s's = t't$, pa imamo $\varphi = [u, f']$, $\psi = [u, g']$, čime je lema dokazana. □

Teorem 1.3.18. *Neka je S desno lokalizirajući skup u $\mathscr{C}$. Tada vrijedi:*

(i) ako $\mathscr{C}$ ima sve konačne koprodukte, onda ih ima i $S^{-1}\mathscr{C}$,

(ii) ako $\mathscr{C}$ ima sve konačne koujednačitelje, onda ih ima i $S^{-1}\mathscr{C}$,

(iii) ako je $\mathscr{C}$ konačno kopotpuna, onda je to i $S^{-1}\mathscr{C}$.

Dokaz. Kako smo iskazali, tim redom i pokažimo:

(i) Neka je I konačan skup, a $\{c_i\}_{i\in I}$ familija objekata u $S^{-1}\mathscr{C}$. Tada zbog teorema 1.3.16 imamo da je $Q(\coprod_{i\in I} c_i) \cong \coprod_{i\in I} c_i$, pa budući da postoji $\coprod_{i\in I} c_i$ koprodukt u $\mathscr{C}$, to je $Q(\coprod_{i\in I} c_i)$ koprodukt familije $\{c_i\}_{i\in I}$ u $S^{-1}\mathscr{C}$.

(ii) Neka su φ, $\psi\colon c \to d$ morfizmi u $S^{-1}\mathscr{C}$. Tada prema lemi 1.3.17 φ i ψ možemo reprezentirati redom sa $[s, f]$ i $[s, g]$. Neka je h koujednačitelj morfizama f i g u $\mathscr{C}$, pa prema teoremu 1.3.16 imamo da je Qh koujednačitelj od Qf i Qg u $S^{-1}\mathscr{C}$. Tvrdimo da je $Q(hs)$ koujednačitelj od φ i ψ u $S^{-1}\mathscr{C}$. Očito je $Q(hs)\circ\varphi = Qh\circ Qf = Qh\circ Qg = Q(hs)\circ\psi$. Nadalje, neka je χ morfizam u $S^{-1}\mathscr{C}$ takav da je $\chi\circ\varphi = \chi\circ\psi$. No, tada slijedi da je $\chi\circ(Qs)^{-1}\circ Qf = \chi\circ(Qs)^{-1}\circ Qg$, pa budući da je Qh koujednačitelj od Qf i Qg, postoji jedinstveni χ' takav da je $\chi\circ(Qs)^{-1} = \chi'\circ Qh$, što vrijedi ako i samo ako postoji jedinstveni χ' takav da je $\chi = \chi'\circ Q(hs)$. Time je tvrdnja pokazana.

(iii) Direktno slijedi iz (i) i (ii).

$\square$

Propozicija 1.3.19. *Neka je S desno lokalizirajući skup u $\mathscr{C}$ i neka je $\mathscr{B}$ puna potkategorija kategorije $\mathscr{C}$ tako da vrijedi:*

(i) $S_{\mathscr{B}} := S \cap \operatorname{Mor}\mathscr{B}$ je lokalizirajući skup u $\mathscr{B}$,

(ii) za svaki morfizam $s\colon b \to c$ u S, pri čemu je b objekt u $\mathscr{B}$, postoji objekt b' u $\mathscr{B}$ i morfizam $t\colon c \to b'$ takav da je $ts \in S$.

Tada je $\mathscr{B}[S_{\mathscr{B}}{}^{-1}]$ puna potkategorija kategorije $\mathscr{C}[S^{-1}]$.

Dokaz. Iz (i) slijedi da je $S_{\mathscr{B}}{}^{-1}\mathscr{B}$ lokalizacija kategorije $\mathscr{B}$. Ako s $Q_{\mathscr{C}}$ i $Q_{\mathscr{B}}$ označimo pripadne funktore lokalizacije, a s $i\colon \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ inkluziju kategorija, očito možemo inducirati funktor $i'\colon S_{\mathscr{B}}{}^{-1}\mathscr{B} \to S^{-1}\mathscr{C}$ tako da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} \mathscr{B} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "Q_{\mathscr{B}}"'] & \mathscr{C} \arrow[d, "Q_{\mathscr{C}}"] \\ S_{\mathscr{B}}{}^{-1}\mathscr{B} \arrow[r, "i'"] & S^{-1}\mathscr{C} \end{tikzcd}$$

te očito i' na objektima djeluje kao identiteta.

Fiksirajmo objekte a i b u $\mathscr{B}$ te neka su $\varphi, \varphi' \colon a \to b$ morfizmi u ${S_{\mathscr{B}}}^{-1}\mathscr{B}$ i neka su oni reprezentirani kao razlmoci

$$\varphi = (Q_{\mathscr{B}}s)^{-1} \circ Q_{\mathscr{B}}f,\ \varphi' = (Q_{\mathscr{B}}s')^{-1} \circ Q_{\mathscr{B}}f',$$

pri čemu je kodomena od f i s objekt a' u $\mathscr{B}$, a kodomena od f' i s' objekt b' u $\mathscr{B}$. Pretpostavimo da je $i'\varphi = i'\varphi'$, odnosno

$$\begin{aligned}
&(i'Q_{\mathscr{B}}s)^{-1} \circ i'Q_{\mathscr{B}}f = (i'Q_{\mathscr{B}}s')^{-1} \circ i'Q_{\mathscr{B}}f' \\
\Rightarrow &(Q_{\mathscr{C}}is)^{-1} \circ Q_{\mathscr{C}}if = (Q_{\mathscr{C}}is)^{-1} \circ Q_{\mathscr{C}}if \\
\Rightarrow &(Q_{\mathscr{C}}s)^{-1} \circ Q_{\mathscr{C}}f = (Q_{\mathscr{C}}s)^{-1} \circ Q_{\mathscr{C}}f
\end{aligned}$$

Tada slijedi da su dani razlomci ekvivalentni u $\mathscr{C}$, pa postoji objekt c u $\mathscr{C}$ i morfizmi $p \colon a' \to c$, $p' \colon b' \to c$ takvi da je $pf = p'f'$, $ps = p's'$ i $ps \in S$. Prema (ii) postoji $t \colon c \to b''$ takav da je b'' u $\mathscr{B}$ i $spt \in S$, a onda imamo i komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd}
 & a' \arrow[d, "tp"] & \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & b'' & b \arrow[ul, "s"'] \arrow[dl, "s'"] \\
 & b' \arrow[u, "tp'"'] &
\end{tikzcd}$$

iz čega slijedi da je $\varphi = \varphi'$, odnosno i' je vjeran.

Neka je sada $\varphi \colon a \to b$ morfizam u $S^{-1}\mathscr{C}$. Reprezentirajmo ga razlomkom $\varphi = (Q_{\mathscr{C}}s)^{-1} \circ Q_{\mathscr{C}}f$, pri čemu je kodomena od f i s objekt c ne nužno u $\mathscr{B}$. Iz (ii) slijedi da postoji morfizam $t \colon c \to b'$ takav da je b' objekt u $\mathscr{B}$ te $ts \in S$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
\varphi &= (Q_{\mathscr{C}}s)^{-1} \circ Q_{\mathscr{C}}f \\
&= (Q_{\mathscr{C}}(ts))^{-1} \circ Q_{\mathscr{C}}(tf) \\
&= (Q_{\mathscr{C}}i(ts))^{-1} \circ Q_{\mathscr{C}}i(tf) \\
&= (i'Q_{\mathscr{B}}(ts))^{-1} \circ i'Q_{\mathscr{B}}(tf) \\
&= i'((Q_{\mathscr{B}}(ts))^{-1} \circ Q_{\mathscr{B}}(tf))
\end{aligned}$$

odakle slijedi da je i' pun. □

Napomena 1.3.20. U slučaju lijevo lokalizirajućeg skupa, tvrdnja prethodne propozicije vrijedi ako (ii) zamijenimo njegovom dualnom verzijom:

(ii^*) *za svaki morfizam $s \colon c \to b$ u S, pri čemu je b objekt u $\mathscr{B}$, postoji objekt b' u $\mathscr{B}$ i morfizam $t \colon b' \to c$ takav da je $st \in S$.*

Lokalizacija aditivne i Abelove kategorije

U ovom odjeljku pokazujemo da lokalizacija po (lijevo) lokalizirajućem skupu čuva aditivnu strukturu kategorije te kao jednu od posljedica dobiti da je lokalizacija prstena uz Oreove uvjete opet prsten.

Teorem 1.3.21. *Neka je S desno lokalizirajući skup u $\mathscr{C}$. Ako je $\mathscr{C}$ predaditivna kategorija, onda je to i $S^{-1}\mathscr{C}$ te je $Q\colon \mathscr{C} \to S^{-1}\mathscr{C}$ aditivan funktor.*

Dokaz. Neka su c i d objekti u $S^{-1}\mathscr{C}$. Tada su morfizmi između c i d dani s $\operatorname{colim}_{s\in d/S} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(c, \operatorname{cod} s)$, no, kako na $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(c, \operatorname{cod} s)$ imamo strukturu Abelove grupe za sve $s \in d/S$ te budući da je d/S filtrirana, to na $\operatorname{colim}_{s\in d/S} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(c, \operatorname{cod} s)$ postoji struktura Abelove grupe takva da su $\iota_s\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(c, \operatorname{cod} s) \hookrightarrow \operatorname{colim}_{t\in d/S} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(c, \operatorname{cod} t)$, $\iota_s f = [s, f]$ homomorfizmi grupa za sve $s \in d/S$ (v. [4]). Posebno za proizvoljne morfizme f, $g\colon c \to d$ vrijedi $Q(f+g) = \iota_{1_d}(f+g) = \iota_{1_d} f + \iota_{1_d} g = Qf + Qg$. Pokažimo bilinearnost kompozicije. Neka su φ, $\psi\colon c \to d$, $\chi\colon d \to e$ morfizmi u $S^{-1}\mathscr{C}$ redom reprezentirani sa $[s, f]$, $[s, g]$ i $[t, h]$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
[t, h] \circ ([s, f] + [s, g]) &= [t, h] \circ [s, f + g] \\
&= [s't, h'(f + g)] \\
&= [s't, h'f] + [s't, h'g] \\
&= [t, h] \circ [s, f] + [t, h] \circ [s, g]
\end{aligned}$$

pri čemu su morfizmi h' u $\mathscr{C}$ i s' u S takvi da je $h's = s'h$. Time je pokazano $\chi \circ (\varphi + \psi) = \chi \circ \varphi + \chi \circ \psi$. Da bismo pokazali drugu linearnost, postupimo u koracima. Neka su φ i ψ kao prije, a $h\colon e \to c$ morfizam u $\mathscr{C}$. Tada

$$\begin{aligned}
([s, f] + [s, g]) \circ [1_c, h] &= [s, f + g] \circ [1_c, h] \\
&= [s, (f + g)h] \\
&= [s, fh] + [s, gh] \\
&= [s, f] \circ [1_c, h] + [s, g] \circ [1_c, h]
\end{aligned}$$

čime je uspostavljeno $(\varphi + \psi) \circ Qh = \varphi \circ Qh + \psi \circ Qh$ za sve morfizme φ, ψ u $S^{-1}\mathscr{C}$ te h u $\mathscr{C}$ za koje dane kompozicije imaju smisla. Sada za t iz c/S imamo $(\varphi \circ (Qt)^{-1} + \psi \circ (Qt)^{-1}) \circ Qt = \varphi \circ (Qt)^{-1} \circ Qt + \psi \circ (Qt)^{-1} \circ Qt = \varphi + \psi$, što povlači $\varphi \circ (Qt)^{-1} + \psi \circ (Qt)^{-1} = (\varphi + \psi) \circ (Qt)^{-1}$. Tada za sve morfizme φ, ψ u $S^{-1}\mathscr{C}$ te t u S za koje dane kompozicije imaju smisla vrijedi $(\varphi + \psi) \circ (Qt)^{-1} = \varphi \circ (Qt)^{-1} + \psi \circ (Qt)^{-1}$. No, kako svaki morfizam u $S^{-1}\mathscr{C}$ možemo prikazati kao $(Qt)^{-1} \circ Qh$ za neke h i t, sada direktno slijedi $(\varphi + \psi) \circ \chi = \varphi \circ \chi + \psi \circ \chi$. $\square$

Korolar 1.3.22. *Neka je S desno lokalizirajući skup u $\mathscr{C}$. Ako je $\mathscr{C}$ aditivna kategorija, onda je to i $S^{-1}\mathscr{C}$.*

Dokaz. Prema prethodnom teoremu kategorija $S^{-1}\mathscr{C}$ je predaditivna, a prema teoremu 1.3.18 (i), ima i sve konačne koprodukte. Dakle, $S^{-1}\mathscr{C}$ je aditivna kategorija. $\square$

Korolar 1.3.23. *Neka je S lokalizirajući skup u $\mathscr{C}$. Ako je $\mathscr{C}$ Abelova kategorija, onda je to i $S^{-1}\mathscr{C}$ te je $Q\colon \mathscr{C} \to S^{-1}\mathscr{C}$ egzaktan.*

Dokaz. Kategorija $S^{-1}\mathscr{C}$ je aditivna, a prema teoremu 1.3.18 (i) te njegovom dualu, $S^{-1}\mathscr{C}$ je konačno potpuna i kopotpuna. Preostaje još pokazati da za proizvoljne objekte c i d te morfizme $\varphi\colon c \to d$ u $S^{-1}\mathscr{C}$ vrijedi $\operatorname{im}\varphi \cong \operatorname{coim}\varphi$. Neka je $\varphi = (Qs)^{-1} \circ Qf$ za neke morfizme f i s iz $\mathscr{C}$. Budući da je $(Qs)^{-1}$ izomorfizam, to je $\ker\varphi \cong \ker Qf$, $\operatorname{coker}\varphi \cong \operatorname{coker} Qf$ prema lemi 1.2.26, odnosno, $\operatorname{im}\varphi \cong \operatorname{im} Qf$ te $\operatorname{coim}\varphi \cong \operatorname{coim} Qf$. No, prema teoremu 1.3.16 (i njegovom dualu), imamo $\operatorname{im} Qf \cong Q(\operatorname{im} f)$ te $\operatorname{coim} Qf \cong Q(\operatorname{coim} f)$, pa budući da je $\operatorname{im} f \cong \operatorname{coim} f$ te funktori čuvaju izomorfizme, to slijedi $\operatorname{im}\varphi \cong \operatorname{coim}\varphi$. Egzaktnost od Q slijedi budući da Q čuva konačne limese i kolimese prema teoremu 1.3.16 i njegovom dualu, a onda je i egzaktan prema teoremu 1.2.40. $\square$

Poglavlje 2

Derivirane kategorije

2.1 Kategorija kolančanih kompleksa i homotopska kategorija kolančanih kompleksa

U definiciji 1.2.19 za aditivnu kategoriju $\mathscr{A}$ definirali smo kolance kao funktore $a^\bullet\colon (\mathbb{Z}, \leq) \to \mathscr{A}$. Jasno, možemo promatrati kategoriju $[(\mathbb{Z}, \leq), \mathscr{A}]$ koja je prema primjeru 1.2.31 Abelova, čim je $\mathscr{A}$ Abelova kategorija. Kategoriju $C\mathscr{A}$ definiramo kao punu potkategoriju kategorije $[(\mathbb{Z}, \leq), \mathscr{A}]$ čiji su objekti kompleksi, tj. oni lanci kojima je kompozicija susjednih diferencijala 0. Kategoriju $C\mathscr{A}$ zovemo *kategorija kolančanih kompleksa* ili skraćeno *kategorija kompleksa* kategorije $\mathscr{A}$.

Objekti u $C\mathscr{A}$ su funktori $a^\bullet\colon (\mathbb{Z}, \leq) \to \mathscr{A}$, a morfizmi prirodne transformacije. Eksplicitno, $f \in \mathrm{Hom}_{C\mathscr{A}}(a^\bullet, b^\bullet)$ je familija morfizama takva da za sve $n \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$f^{n+1} \circ d_a^n = d_b^n \circ f^n$$

pri čemu su, podsjećamo, $d_a^n = a^\bullet(n \leq n+1)$ diferencijali kompleksa $a^\bullet$.

Očito je $C\mathscr{A}$ predaditivna, no vrijedi i više.

Propozicija 2.1.1. *Ako je $\mathscr{A}$ Abelova kategorija, onda je i $C\mathscr{A}$ Abelova kategorija.*

Dokaz. Kako biprodukti, jezgre i kojezgre postoje u $[(\mathbb{Z}, \leq), \mathscr{A}]$ te je ona Abelova, potrebno je samo provjeriti da oni zaista leže u $C\mathscr{A}$, tj. da je kompozicija diferencijala 0. Za biprodukte je to očito, naime

$$d_{a\oplus b}^n \circ d_{a\oplus b}^{n-1} = (d_a^n \oplus d_b^n) \circ (d_a^{n-1} \oplus d_b^{n-1}) = (d_a^n \circ d_a^{n-1}) \oplus (d_b^n \circ d_b^{n-1}) = 0 \oplus 0 = 0,$$

dok za jezgre imamo

$$\begin{array}{rrcl} & d_{\ker f}^n \circ d_{\ker f}^{n-1} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \mu_f^{n+1} \circ d_{\ker f}^n \circ d_{\ker f}^{n-1} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & d_a^n \circ d_a^{n-1} \circ \mu_f^{n-1} & = & 0 \end{array}$$

budući da je μ monomorfizam, a diferencijali jezgre su inducirani univerzalnim svojstvima. Tvrdnja za kojezgre slijedi dualno. Tvrdnja za nul-objekt je trivijalna. $\square$

U nastavku će nam $\mathscr{A}$ uvijek označavati Abelovu kategoriju.

Možemo definirati funktor $C\colon \mathscr{A} \to C\mathscr{A}$ tako da svakom objektu a pridružimo kompleks

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow a \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

koji je trivijalan u svim komponentama, osim u nultoj, a svakom morfizmu prirodnu transformaciju koja je trivijalna u svim komponentama, osim u nultoj, gdje je jednaka zadanom morfizmu. Takav kompleks nazivamo 0-*kompleksom*. Očito je C potpuno vjeran funktor, štoviše, egzaktan je.

Definirajmo funktor $T\colon C\mathscr{A} \to C\mathscr{A}$ tako da $(Ta^\bullet)^n := a^{n+1}$ i $(Tf)^n := f^{n+1}$, za sve $n \in \mathbb{Z}$. Diferencijal definirajmo kao $d^n_{Ta^\bullet} := -d^{n+1}_a$. Očito je T automorfizam kategorije $C\mathscr{A}$ i zovemo ga *translacijskim funktorom*. Primjetimo da za svaki kompleks $a^\bullet$, familija morfizama $d^n_a\colon a^n \to a^{n+1}$ čini prirodnu transformaciju $d_a\colon a^\bullet \Rightarrow Ta^\bullet$. Štoviše, možemo definirati i prirodnu transformaciju $d\colon 1_{C\mathscr{A}} \Rightarrow T$ čije su komponente diferencijali kompleksa. Naime, ako je $f \in \mathrm{Hom}_{C\mathscr{A}}(a^\bullet, b^\bullet)$, onda direktno slijedi $Tf \circ d_a = d_b \circ f$, što je točno prirodnost od f.

Definicija 2.1.2. Za proizvoljnu familiju morfizama $h^n\colon a^n \to b^{n-1}$ između kompleksa $a^\bullet$ i $b^\bullet$ u $C\mathscr{A}$, definiramo prirodnu transformaciju $f^n := h^{n+1}d^n + d^{n-1}h^n$ te sve prirodne transformacije takvog oblika nazivamo *nul-homotopnim morfizmom* kompleksa $a^\bullet$ i $b^\bullet$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & a^{n-1} \arrow[r, "d_a^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & a^n \arrow[r, "d_a^n"] \arrow[d, "f^n"'] \arrow[dl, "h^n"'] & a^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"'] \arrow[dl, "h^{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & b^{n-1} \arrow[r, "d_b^{n-1}"'] & b^n \arrow[r, "d_b^n"'] & b^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Iako smo translacijski funktor T uveli kao automorfizam kategorije $C\mathscr{A}$, proširit ćemo njegovu definiciju na familije morfizama indeksirane sa $\mathbb{Z}$ koje nisu nužno prirodne. Tako familiju morfizama $h^n\colon a^n \to b^{n-1}$ možemo skraćeno pisati $h\colon a^\bullet \to T^{-1}b^\bullet$ (uočimo da ne koristimo dvostruku strelicu, jer h ne mora biti prirodna), odnosno $f = Th \circ d_a + T^{-1}d_b \circ h$, za $f \in \mathrm{Hom}_{C\mathscr{A}}(a^\bullet, b^\bullet)$. Preostaje nam provjeriti da je f zaista prirodno, no, imamo

$$d_b \circ f = d_b \circ Th \circ d_a + d_b \circ T^{-1}d_b \circ h = d_b \circ Th \circ d_a,$$

$$Tf \circ d_a = T^2 h \circ Td_a \circ d_a + d_b \circ Th \circ d_a = d_b \circ Th \circ d_a,$$

pa vrijedi $d_b \circ f = Tf \circ d_a$.

Označimo s $\mathrm{Ht}(a^\bullet, b^\bullet)$ podskup hom-skupa $\mathrm{Hom}_{C\mathscr{A}}(a^\bullet, b^\bullet)$ čiji su elementi nul-homotopni morfizmi.

Propozicija 2.1.3. $\mathrm{Ht}(a^\bullet, b^\bullet)$ *je podgrupa Abelove grupe* $\mathrm{Hom}_{C\mathscr{A}}(a^\bullet, b^\bullet)$*, za sve komplekse* $a^\bullet$*,* $b^\bullet$ *u* $\mathscr{A}$*. Štoviše, za* $f \in \mathrm{Hom}_{C\mathscr{A}}(a^\bullet, b^\bullet)$ *i* $g \in \mathrm{Hom}_{C\mathscr{A}}(b^\bullet, c^\bullet)$*,* $g \circ f$ *je nul-homotopno čim je* f *nul-homotopno ili* g *nul-homotopono.*

Dokaz. Neka su f i g nul-homotopni morfizmi između kompleksa $a^\bullet$ i $b^\bullet$. Tada su oblika $f = Th \circ d_a + T^{-1}d_b \circ h$, $g = Th' \circ d_a + T^{-1}d_b \circ h'$, za neke familije morfizama $h, h' \colon a^\bullet \to T^{-1}b^\bullet$. Iz bilinearnosti slijedi $f - g = T(h - h') \circ d_a + T^{-1}d_b \circ (h - h')$, pa je i $f - g$ nul-homotopan morfizam. Neka su sad $f \colon a^\bullet \Rightarrow b^\bullet$ i $g \colon b^\bullet \Rightarrow c^\bullet$ i neka je f nul-homotopno. To znači da je f oblika $Th \circ d_a + T^{-1}d_b \circ h$. Definirajmo $k := T^{-1}g \circ h$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & a^{n-1} \arrow[r, "d_a^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & a^n \arrow[r, "d_a^n"] \arrow[d, "f^n"] \arrow[dl, "h^n"'] & a^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] \arrow[dl, "h^{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & b^{n-1} \arrow[r, "d_b^{n-1}"'] \arrow[d, "g^{n-1}"'] & b^n \arrow[r, "d_b^n"'] \arrow[d, "g^n"] & b^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "g^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & c^{n-1} \arrow[r, "d_c^{n-1}"] & c^n \arrow[r, "d_c^n"] & c^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
g \circ f &= g \circ Th \circ d_a + g \circ T^{-1}d_b \circ h \\
&= Tk \circ d_a + T^{-1}d_c \circ T^{-1}g \circ h \\
&= Tk \circ d_a + T^{-1}d_c \circ k
\end{aligned}$$

pa je $g \circ f$ nul-homotopno. Tvrdnja za pretpostavku da je g nul-homotopno je dualna. $\square$

Budući da je $\mathrm{Ht}(a^\bullet, b^\bullet)$ podgrupa, na $\mathrm{Hom}_{C\mathscr{A}}(a^\bullet, b^\bullet)$ definiramo relaciju ekvivalencije $f \simeq g$ ako i samo ako je $f - g \in \mathrm{Ht}(a^\bullet, b^\bullet)$. Klase reprezentanata u $\mathrm{Hom}_{C\mathscr{A}}(a^\bullet, b^\bullet)/\,\mathrm{Ht}(a^\bullet, b^\bullet)$ ćemo označavati s $\underline{f}$ za $f \in \mathrm{Hom}_{C\mathscr{A}}(a^\bullet, b^\bullet)$. Neka su f i f' iz $\mathrm{Hom}_{C\mathscr{A}}(a^\bullet, b^\bullet)$, a g i g' iz $\mathrm{Hom}_{C\mathscr{A}}(b^\bullet, c^\bullet)$ za proizvoljne komplekse $a^\bullet$, $b^\bullet$ i $c^\bullet$ u $\mathscr{A}$ te neka vrijedi $f \simeq f'$ i $g \simeq g'$. Tada imamo

$$g \circ f \simeq g' \circ f' \Leftrightarrow g \circ f - g' \circ f' \simeq 0 \Leftrightarrow (g - g') \circ f + g' \circ (f - f') \simeq 0,$$

no, to slijedi iz prethodne propozicije.

Drugim riječima, za svaka tri kompleksa $a^\bullet$, $b^\bullet$ i $c^\bullet$ u $\mathscr{A}$, dobro je definirano preslikavanje

$$\circ\colon (\mathrm{Hom}_{C\mathscr{A}}(a^\bullet, b^\bullet)/\,\mathrm{Ht}(a^\bullet, b^\bullet)) \times (\mathrm{Hom}_{C\mathscr{A}}(b^\bullet, c^\bullet)/\,\mathrm{Ht}(b^\bullet, c^\bullet)) \to \mathrm{Hom}_{C\mathscr{A}}(a^\bullet, b^\bullet)/\,\mathrm{Ht}(a^\bullet, b^\bullet)$$

$$\underline{g} \circ \underline{f} := \underline{g \circ f}$$

koje je očito bilinearno, asocijativno i kome je $\underline{1}$ neutralni element.

Definicija 2.1.4. Kategorija čiji su objekti kompleksi u $\mathscr{A}$, a morfizmi između kompleksa $a^\bullet$ i $b^\bullet$ dani Abelovom grupom $\mathrm{Hom}_{C\mathscr{A}}(a^\bullet, b^\bullet)/\,\mathrm{Ht}(a^\bullet, b^\bullet)$, pri čemu je kompozicija dana formulom $\underline{g} \circ \underline{f} = \underline{g \circ f}$, za neke $f\colon a^\bullet \Rightarrow b^\bullet$ i $g\colon b^\bullet \Rightarrow c^\bullet$, nazivamo *homotopskom kategorijom kolančanih kompleksa* i označavamo ju s $K\mathscr{A}$.

$K\mathscr{A}$ je očito predaditivna, ali je i više. Trivijalni kompleks je nul-objekt, ali $K\mathscr{A}$ ima i sve konačne biprodukte, zbog leme 1.2.8, budući da su očuvane relacije $\pi_i\iota_j = \delta_{ij}$ i $\sum_i \iota_i\pi_i = 1$. Funktor $\underline{\cdot}\colon C\mathscr{A} \to K\mathscr{A}$ je aditivan i pun.

Jasno je da možemo inducirati translacijski funktor $T\colon K\mathscr{A} \to K\mathscr{A}$ koji će biti izomorfizam kategorija, jer je $f \simeq 0$ ako i samo ako je $Tf \simeq 0$, a isto tako i funktor $K\colon \mathscr{A} \to K\mathscr{A}$, koji svakom objektu pridružuje kompleks koji je trivijalan u svim, osim u nultom argumentu, gdje je jednak početnom objektu. Budući da između dva 0-kompleksa jedini nul-homotopan morfizam je nul-morfizam, $\mathscr{A}$ možemo shvatiti kao punu potkategoriju kategorije $K\mathscr{A}$ te pripadni potpuno vjeran funktor označiti s $K\colon \mathscr{A} \to K\mathscr{A}$.

Ako je $f \in \mathrm{Ht}(a^\bullet, b^\bullet)$, onda postoji familija morfizama $h\colon a^\bullet \to T^{-1}b^\bullet$ u $\mathscr{A}$ takva da je $f = Th \circ d_a + T^{-1}d_b \circ h$. Za funktor $\iota : (C\mathscr{A})^{\mathrm{op}} \to C\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ tada imamo

$$\begin{aligned}(\iota f)^n = f^{-n} &= h^{-n+1} \circ d_a^{-n} + d_b^{-n-1} \circ h^{-n}\\ &= h^{-n} \circ^{\mathrm{op}} d^n_{\iota b^\bullet} + d^{n-1}_{\iota a^\bullet} \circ^{\mathrm{op}} h^{-n+1}\end{aligned}$$

pa ako definiramo $k^n = h^{-n+1}$, za sve $n \in \mathbb{Z}$, imamo da je ιf nul-homotopno u $C\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$. Dakle, prema teoremu o homomorfizmu, inducira se homomorfizam grupa $\iota\colon \mathrm{Hom}_{(K\mathscr{A})^{\mathrm{op}}}(b^\bullet, a^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{K\mathscr{A}^{\mathrm{op}}}(b^\bullet, a^\bullet)$, odnosno funktor $\iota\colon (K\mathscr{A})^{\mathrm{op}} \to K\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$, koji je, kao i u slučaju $C\mathscr{A}$, izomorfizam kategorija.

2.2 Kohomologija

Neka je $\mathscr{A}$ Abelova kategorija i $a^\bullet$ kompleks u $\mathscr{A}$. Prisjetimo se rasprave s početka odjeljka 1.2 Egzaktnost, gdje smo proučavali komutativni dijagram oblika

$$\begin{tikzcd}
& & \operatorname{im} d^{n-1} \arrow[rr, dashed, "\varphi^n"] \arrow[dr] & & \ker d^n \arrow[rr, two heads] \arrow[dl] & & \operatorname{coker}\varphi \\
\cdots \arrow[r] & a^{n-1} \arrow[rr, "d^{n-1}"] \arrow[ur] & & a^n \arrow[rr, "d^n"] \arrow[dl] \arrow[dr] & & a^{n+1} \arrow[r] & \cdots \\
& \ker\psi \arrow[r, tail] & \operatorname{coker} d^{n-1} \arrow[rr, dashed, "\psi^n"] & & \operatorname{im} d^n \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Definicija 2.2.1. Za kompleks $a^\bullet$ u kategoriji $\mathscr{A}$ te za svaki $n \in \mathbb{Z}$, definiramo $H^n a^\bullet := \operatorname{coker}\varphi^n$, pri čemu je $\varphi^n \colon \operatorname{im} d^{n-1} \to \ker d^n$ preslikavanje inducirano univerzalnim svojstvima. $H^n a^\bullet$ zovemo *n-tom kohomologijom* kompleksa $a^\bullet$.

Napomena 2.2.2. Budući da je $\operatorname{coker}\varphi^n \cong \ker\psi^n$, pri čemu je $\psi^n \colon \operatorname{coker} d^{n-1} \to \operatorname{im} d^n$, mogli smo definirati n-tu kohomologiju i tako. Međutim, klasično se kohomologija definira upravo kao kvocijent $\ker d^n / \operatorname{im} d^{n-1}$, što se u potpunosti poklapa s našom definicijom u kategorijama modula, gdje je kojezgra morfizma φ točno dani kvocijentni modul.

Preslikavanje $H^n \colon C\mathscr{A} \to \mathscr{A}$ je funktor. Da to vidimo, proučimo komutativni dijagram

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[rr] & & a^{n-1} \arrow[rr, "d_a^{n-1}"] \arrow[dl, "\kappa_a^{n-1}"'] \arrow[dd, "f^{n-1}"] & & a^n \arrow[rr, "d_a^n"] \arrow[dd, "f^n"] & & a^{n+1} \arrow[r] \arrow[dd, "f^{n+1}"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \operatorname{im} d_a^{n-1} \arrow[rr, "\varphi_a^n"] \arrow[urrr, "\iota_a^{n-1}"] \arrow[dd, dashed, "B^n f"] & & \ker d_a^n \arrow[rr, "\nu_{\varphi_a}^n"] \arrow[ur, "\mu_a^n"] \arrow[dd, dashed, "Z^n f"] & & H^n a^\bullet \arrow[rr] \arrow[dd, dashed, "H^n f"] & & 0 \\
\cdots \arrow[rr] & & b^{n-1} \arrow[rr, "d_b^{n-1}"] \arrow[dl, "\kappa_b^{n-1}"'] & & b^n \arrow[rr, "d_b^n"] & & b^{n+1} \arrow[r] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \operatorname{im} d_b^{n-1} \arrow[rr, "\varphi_b^n"] \arrow[urrr, "\iota_b^{n-1}"] & & \ker d_b^n \arrow[rr, "\nu_{\varphi_b}^n"] \arrow[ur, "\mu_b^n"] & & H^n b^\bullet \arrow[rr] & & 0
\end{tikzcd}$$

gdje su s μ označene jezgre, s ι slike, a s κ koslike odgovarajućih morfizama.

Morfizam $B^n f\colon \operatorname{im} d_a^{n-1} \to \operatorname{im} d_b^{n-1}$ induciramo univerzalnim svojstvom jezgre primjenjenim na morfizam $f^n \circ \iota_a^{n-1}$. Označimo s ν_b^{n-1} kojezgru morfizma d_b^{n-1}, pa imamo

$$\begin{array}{rrcl} & \nu_b^{n-1} \circ f^n \circ \iota_a^{n-1} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \nu_b^{n-1} \circ f^n \circ \iota_a^{n-1} \circ \kappa_a^{n-1} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \nu_b^{n-1} \circ f^n \circ d_a^{n-1} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \nu_b^{n-1} \circ d_b^{n-1} \circ f^{n-1} & = & 0 \end{array}$$

pa postoji jedinstveni morfizam $B^n f\colon \operatorname{im} d_a^{n-1} \to \operatorname{im} d_b^{n-1}$ takav da je

$$\iota_b^{n-1} \circ B^n f = f^n \circ \iota_a^{n-1}$$

budući da je $\operatorname{im} d_b^{n-1}$ jezgra morfizma ν_b^{n-1}.

Morfizam $Z^n f\colon \ker d_a^n \to \ker d_b^n$ je jedinstveni morfizam takav da je

$$\mu_b^n \circ Z^n f = f^n \circ \mu_a^n.$$

Zaista,

$$d_b^n \circ f^n \circ \mu_a^n = 0 \Leftrightarrow f^{n+1} \circ d_a^n \circ \mu_a^n = 0$$

pa $Z^n f$ induciramo univerzalnim svojstvom jezgre.

Uočimo još i da vrijedi

$$\begin{array}{rrcl} & Z^n f \circ \varphi_a^n & = & \varphi_b^n \circ B^n f \\ \Leftrightarrow & \mu_b^n \circ Z^n f \circ \varphi_a^n & = & \mu_b^n \circ \varphi_b^n \circ B^n f \\ \Leftrightarrow & f^n \circ \mu_a^n \circ \varphi_a^n & = & \iota_b^{n-1} \circ B^n f \\ \Leftrightarrow & f^n \circ \iota_a^{n-1} & = & \iota_b^{n-1} \circ B^n f, \end{array}$$

dok je posljednja jednakost upravo kako smo inducirali $B^n f$. Dakle imamo komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{im} d_a^{n-1} \arrow[r, "\varphi_a^n"] \arrow[d, "B^n f"] & \ker d_a^n \arrow[r, "\nu_{\varphi_a}^n"] \arrow[d, "Z^n f"] & H^n a^\bullet \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{im} d_b^{n-1} \arrow[r, "\varphi_a^n"] & \ker d_b^n \arrow[r, "\nu_{\varphi_b}^n"] & H^n b^\bullet \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

pri čemu se retci egzaktni, pa prema lemi 1.2.48 postoji jedinstveni $H^n f\colon H^n a^\bullet \to H^n b^\bullet$ takav da vrijedi

$$H^n f \circ \nu_{\varphi_a}^n = \nu_{\varphi_b}^n \circ Z^n f.$$

Jasno, funktorijalnost i aditivnost od B^n, Z^n i H^n slijedi iz jedinstvenosti morfizama induciranih univerzalnim svojstvima. Također je očito da je $H^n T a^\bullet = H^{n+1} a^\bullet$.

Napomena 2.2.3. Da smo H^n definirali kao $\operatorname{coker}\psi^n$, dobili bismo funktor kanonski izomorfan upravo konstruiranom.

Lema 2.2.4. *Neka je $f \in \mathrm{Ht}(a^\bullet, b^\bullet)$ za neke komplekse $a^\bullet$ i $b^\bullet$ u $\mathscr{A}$. Tada je $H^n f = 0$, za sve $n \in \mathbb{Z}$.*

Dokaz. Neka je dana familija $h\colon a \to T^{-1}b$ za koju vrijedi $f = Th \circ d_a + T^{-1}d_b \circ h$, pa imamo

$$\begin{array}{rrcl} & f^n & = & h^{n+1} \circ d_a^n + d_b^{n-1} \circ h^n \\ \Rightarrow & f^n \circ \mu_a^n & = & h^{n+1} \circ d_a^n \circ \mu_a^n + d_b^{n-1} \circ h^n \circ \mu_a^n \\ \Rightarrow & \mu_b^n \circ Z^n f & = & d_b^{n-1} \circ h^n \circ \mu_a^n \\ \Rightarrow & \mu_b^n \circ Z^n f & = & \mu_b^n \circ \varphi_b^n \circ \kappa_b^{n-1} \circ h^n \circ \mu_a^n \\ \Rightarrow & Z^n f & = & \varphi_b^n \circ \kappa_b^{n-1} \circ h^n \circ \mu_a^n \\ \Rightarrow & \nu_{\varphi_b}^n \circ Z^n f & = & 0 \\ \Rightarrow & H^n f \circ \nu_{\varphi_a}^n & = & 0 \\ \Rightarrow & H^n f & = & 0 \end{array}$$

$\square$

Dakle, prema teoremu o homomorfizmu, za sve komplekse $a^\bullet$ i $b^\bullet$ inducira se homomorfizam grupa $H^n\colon \mathrm{Hom}_{K\mathscr{A}}(a^\bullet, b^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(H^n a^\bullet, H^n b^\bullet)$, a prema tome i funktor $H^n\colon K\mathscr{A} \to \mathscr{A}$.

Primjetimo još i da je kompleks $a^\bullet$ egzaktan u a^n ako i samo ako je $H^n a^\bullet \cong 0$. To je posljedica propozicije 1.2.36. U tom smislu kohomologija mjeri koliko kompleks odstupa od egzaktnosti.

Teorem 2.2.5. *Neka je dan kratki egzaktni niz kompleksa*

$$0 \longrightarrow a^\bullet \xrightarrow{f} b^\bullet \xrightarrow{g} c^\bullet \longrightarrow 0$$

Tada imamo dugi egzaktni niz kohomologija *u $\mathscr{A}$*

$$\cdots \longrightarrow H^{n-1}c^\bullet \xrightarrow{\delta^{n-1}} H^n a^\bullet \longrightarrow H^n b^\bullet \longrightarrow H^n c^\bullet \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}a^\bullet \longrightarrow \cdots$$

Dokaz. Za kompleks $a^\bullet$ imamo egzaktan niz

$$\cdots \longrightarrow H^n a^\bullet \longrightarrow \operatorname{coker} d_a^{n-1} \xrightarrow{\partial_a^n} \ker d_a^{n+1} \longrightarrow H^{n+1}a^\bullet \longrightarrow \cdots$$

pri čemu je $\partial_a^n = \varphi_a^{n+1} \circ \psi_a^n$. Egzaktnost u $\operatorname{coker} d_a^{n-1}$ i $\ker d_a^{n+1}$ slijedi jer je

$$\operatorname{coker} d_a^{n-1} \xrightarrow{\psi_a^n} \operatorname{im} d_a^n \xrightarrow{\varphi_a^{n+1}} \ker d_a^{n+1}$$

epi-mono rastav morfizma ∂_a^n, dok su $H^n a^\bullet \to \operatorname{coker} d_a^{n-1}$ jezgra od ψ_a^n (a onda i od ∂_a^n), a $\ker d_a^{n+1} \to H^{n+1}a^\bullet$ kojezgra od φ_a^{n+1} (a onda i od ∂_a^n). Ako pokažemo da je dijagram

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{coker} d_a^{n-1} \arrow[r, "\eta_f^{n-1}"] \arrow[d, "\partial_a^n"] & \operatorname{coker} d_b^{n-1} \arrow[r, "\eta_g^{n-1}"] \arrow[d, "\partial_b^n"] & \operatorname{coker} d_c^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_c^n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker d_a^{n+1} \arrow[r, "\upsilon_f^{n+1}"] & \ker d_b^{n+1} \arrow[r, "\upsilon_g^{n+1}"] & \ker d_c^{n+1} &
\end{tikzcd}$$

komutativan s egzaktnim retcima, onda prema lemi o zmiji imamo egzaktan niz

$$H^n a^\bullet \longrightarrow H^n b^\bullet \longrightarrow H^n c^\bullet \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1} a^\bullet$$

Jasno, translacijom dobivamo odgovarajući dugi egzaktni niz, čime bi dokaz bio gotov.

Da su retci egzaktni dobivamo iz leme o zmiji, budući da zbog prirodnosti od $d\colon 1 \Rightarrow T$ imamo komutativne dijagrame

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T^{-1}a^\bullet \arrow[r, "T^{-1}f"] \arrow[d, "T^{-1}d_a"] & T^{-1}b^\bullet \arrow[r, "T^{-1}g"] \arrow[d, "T^{-1}d_b"] & T^{-1}c^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "T^{-1}d_c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & a^\bullet \arrow[r, "f"] & b^\bullet \arrow[r, "g"] & c^\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

i

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Ta^\bullet \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "Td_a"] & Tb^\bullet \arrow[r, "Tg"] \arrow[d, "Td_b"] & Tc^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "Td_c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & T^2a^\bullet \arrow[r, "T^2f"] & T^2b^\bullet \arrow[r, "T^2g"] & T^2c^\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Preostaje još pokazati $\upsilon_f^{n+1} \circ \partial_a^n = \partial_b^n \circ \eta_f^{n-1}$ i $\upsilon_g^{n+1} \circ \partial_b^n = \partial_c^n \circ \eta_g^{n-1}$. Pokazat ćemo jednu jednakost, dok druga ide analogno:

$$\begin{aligned}
& & \upsilon_f^{n+1} \circ \partial_a^n &= \partial_b^n \circ \eta_f^{n-1} \\
&\Leftrightarrow & \mu_b^{n+1} \circ \upsilon_f^{n+1} \circ \partial_a^n \circ \nu_a^{n-1} &= \mu_b^{n+1} \circ \partial_b^n \circ \eta_f^{n-1} \circ \nu_a^{n-1} \\
&\Leftrightarrow & f^{n+1} \circ \mu_a^{n+1} \circ \partial_a^n \circ \nu_a^{n-1} &= \mu_b^{n+1} \circ \partial_b^n \circ \nu_b^{n-1} \circ \eta_f^n \\
&\Leftrightarrow & f^{n+1} \circ d_a^n &= d_b^n \circ f^n
\end{aligned}$$

□

2.3 Konusi, standardni trokuti i istaknuti trokuti

Neka je $f\colon a^\bullet \Rightarrow b^\bullet$ morfizam kompleksa $a^\bullet$ i $b^\bullet$ u $C\mathscr{A}$. Definiramo kompleks $C_f^\bullet$ tako da je

$$C_f^n := a^{n+1} \oplus b^n,$$

a diferencijal

$$d_{C_f} := \begin{pmatrix} d_{Ta^\bullet} & 0 \\ Tf & d_b \end{pmatrix}$$

Provjerimo da je d_{C_f} zaista diferencijal:

$$Td_{C_f} \circ d_{C_f} = \begin{pmatrix} Td_{Ta^\bullet} & 0 \\ T^2 f & Td_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{Ta^\bullet} & 0 \\ Tf & d_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Td_{Ta^\bullet} \circ d_{Ta^\bullet} & 0 \\ T^2 f \circ d_{Ta^\bullet} + Td_b \circ Tf & Td_b \circ d_b \end{pmatrix} = 0$$

budući da je

$$T^2 f \circ d_{Ta^\bullet} + Td_b \circ Tf = T(d_b \circ f - Tf \circ d_a) = 0.$$

Primjetimo da se $C_f^\bullet$ razlikuje od direktne sume $Ta^\bullet \oplus b^\bullet$ samo u diferencijalu. Kompleks $C_f^\bullet$ zovemo *konusom* nad f.

Definiramo prirodne transformacije

$$i_f := \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{b^\bullet} \end{pmatrix} \colon b^\bullet \Rightarrow C_f^\bullet, \quad p_f := \begin{pmatrix} 1_{Ta^\bullet} & 0 \end{pmatrix} \colon C_f^\bullet \Rightarrow Ta^\bullet$$

te provjerimo da zaista komutiraju s diferencijalima

$$d_{C_f} \circ i_f = \begin{pmatrix} d_{Ta^\bullet} & 0 \\ Tf & d_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{b^\bullet} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d_{b^\bullet} \end{pmatrix} = Ti_f \circ d_b$$

$$Tp_f \circ d_{C_f} = \begin{pmatrix} 1_{T^2a^\bullet} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{Ta^\bullet} & 0 \\ Tf & d_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{Ta^\bullet} & 0 \end{pmatrix} = d_{Ta^\bullet} \circ p_f$$

Lema 2.3.1. *Niz kompleksa*

$$0 \longrightarrow b^\bullet \xrightarrow{i_f} C_f^\bullet \xrightarrow{p_f} Ta^\bullet \longrightarrow 0$$

je kratki egzaktan niz u $C\mathscr{A}$.

Dokaz. Morfizmi i_f i p_f su očito monomorfizam, odnosno epimorfizam. Tada je prema propoziciji 1.2.38 dovoljno provjeriti da je i_f jezgra morfizma p_f. No, ako je

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \colon c^\bullet \Rightarrow C_f^\bullet$$

takav da je $p_f \circ g = 0$, onda je $g_1 = 0$, a $g_2 \colon c^\bullet \Rightarrow b^\bullet$ jedinstveni morfizam za koji je $i_f \circ g_2 = g$. $\square$

Definicija 2.3.2. Prirodne transformacije $f\colon a^\bullet \Rightarrow b^\bullet$, $g\colon b^\bullet \Rightarrow c^\bullet$ i $h\colon c^\bullet \Rightarrow Ta^\bullet$, za neke komplekse $a^\bullet$, $b^\bullet$, $c^\bullet$ u $\mathscr{A}$, zovemo *trokutom* te ćemo trokute označavati s (f,g,h). Za prirodnu transformaciju $f\colon a^\bullet \Rightarrow b^\bullet$, trokut (f,i_f,p_f) zovemo *standardnim trokutom.* Morfizam (u,v,w) između trokuta (f,g,h) i (f',g',h') u $C\mathscr{A}$, odnosno $K\mathscr{A}$, je komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd}
a^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & b^\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & c^\bullet \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"] & Ta^\bullet \arrow[d, "Tu"] \\
a_1^\bullet \arrow[r, "f'"] & b_1^\bullet \arrow[r, "g'"] & c_1^\bullet \arrow[r, "h'"] & Ta_1^\bullet
\end{tikzcd}$$

u $C\mathscr{A}$, odnosno $K\mathscr{A}$. Morfizam trokuta (u,v,w) je izomorfizam ako su u, v i w izomorfizmi. Trokut (f,g,h) zovemo *istaknutim trokutom* u $K\mathscr{A}$ ako je izomorfan nekom standardnom trokutu u $K\mathscr{A}$.

Za istaknuti trokut i standardni trokut koristit ćemo skraćenice i.t. i s.t.

Uočimo da za prirodnu transformaciju $f\colon a^\bullet \Rightarrow b^\bullet$ imamo

$$d_{TC_f^\bullet} = -Td_{C_f} = \begin{pmatrix} -Td_{Ta^\bullet} & 0 \\ -T^2f & -Td_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{T^2a^\bullet} & 0 \\ T(-Tf) & d_{Tb^\bullet} \end{pmatrix} = d_{C_{-Tf}}$$

a onda slijedi i da je $d_{C_{T^2f}} = T^2 d_{C_f}$, odnosno $T^2C_f^\bullet = C_{T^2f}^\bullet$ i analogno $T^{-2}C_f^\bullet = C_{T^{-2}f}^\bullet$. Kako trivijalno vrijedi $T^{\pm 2}i_f = i_{T^{\pm 2}f}$ i $T^{\pm 2}p_f = p_{T^{\pm 2}f}$, imamo lemu

Lema 2.3.3. *Trokut (f,g,h) je istaknut ako i samo ako je (T^2f, T^2g, T^2h) istaknut.*

Dokaz. Ako je (f,g,h) i.t., onda je izomorfan nekom standardnom trokutu $(f', i_{f'}, p_{f'})$, a tada slijedi da je (T^2f, T^2g, T^2h) izomorfan standardnon trokutu $(T^2f', i_{T^2f'}, p_{T^2f'})$ prema prethodnoj raspravi i činjenici da funktori čuvaju izomorfizme i kompozicije. Obrat se pokazuje analogno. □

Neka je dan komutativan dijagram u $K\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
a^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & b^\bullet \arrow[d, "v"] \\
a_1^\bullet \arrow[r, "g"] & b_1^\bullet
\end{tikzcd}$$

te neka je $h\colon a^\bullet \to T^{-1}b_1^\bullet$ homotopija između $v \circ f$ i $g \circ u$, odnosno

$$v \circ f - g \circ u = Th \circ d_a + T^{-1}d_{b_1} \circ h.$$

Definirajmo prirodnu transformaciju

$$c_{u,v,h} := \begin{pmatrix} Tu & 0 \\ Th & v \end{pmatrix} \colon C_f^\bullet \Rightarrow C_g^\bullet$$

Provjerimo da $c_{u,v,h}$ zaista komutira s diferencijalima:

$$\begin{aligned} Tc_{u,v,h} \circ d_{C_f} &= \begin{pmatrix} T^2u & 0 \\ T^2h & Tv \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} d_{Ta^\bullet} & 0 \\ Tf & d_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^2u \circ d_{Ta^\bullet} & 0 \\ T^2h \circ d_{Ta^\bullet} + Tv \circ Tf & Tv \circ d_b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_{Ta_1^\bullet} \circ Tu & 0 \\ Tg \circ Tu + d_{b_1} \circ Th & d_{b_1} \circ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{Ta_1^\bullet} & 0 \\ Tg & d_{b_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Tu & 0 \\ Th & v \end{pmatrix} = d_{C_g} \circ c_{u,v,h} \end{aligned}$$

budući da vrijedi

$$v \circ f - g \circ u = Th \circ d_a + T^{-1}d_{b_1} \circ h \Rightarrow T^2h \circ d_{Ta^\bullet} + Tv \circ Tf = d_{b_1} \circ Th + Tg \circ Tu,$$

$$Tu \circ d_a = d_{a_1} \circ u \Rightarrow T^2u \circ d_{Ta^\bullet} = d_{Ta_1^\bullet} \circ Tu,$$

$$Tv \circ d_b = d_{b_1} \circ v.$$

Nadalje, vrijedi

$$c_{u,v,h} \circ i_f = \begin{pmatrix} Tu & 0 \\ Th & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{b^\bullet} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = i_g \circ v,$$

$$p_g \circ c_{u,v,h} = \begin{pmatrix} 1_{Tb_1^\bullet} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Tu & 0 \\ Th & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Tu \\ 0 \end{pmatrix} = Tu \circ p_f,$$

odnosno u $K\mathscr{A}$ komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} a^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & b^\bullet \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, "v"] & C_f^\bullet \arrow[r, "p_f"] \arrow[d, "c_{u,v,h}"] & Ta^\bullet \arrow[d, "Tu"] \\ a_1^\bullet \arrow[r, "g"] & b_1^\bullet \arrow[r, "i_g"] & C_g^\bullet \arrow[r, "p_g"] & Ta_1^\bullet \end{tikzcd}$$

Naglasimo da drugi i treći kvadrat komutiraju u $C\mathscr{A}$ bez obzira je li $v \circ f \simeq g \circ u$ ili $v \circ f = g \circ u$. Uočimo da iz leme 2.3.1 i kratke 5-leme slijedi da ako su u i v izomorfizmi, onda je $c_{u,v,h}$ izomorfizam. Time smo dokazali lemu:

Lema 2.3.4. *Za komutativan dijagram*

$$\begin{tikzcd} a^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & b^\bullet \arrow[d, "v"] \\ a_1^\bullet \arrow[r, "g"] & b_1^\bullet \end{tikzcd}$$

u $C\mathscr{A}$, odnosno $K\mathscr{A}$, postoji prirodna transformacija $c_{u,v,h}\colon C_f^\bullet \Rightarrow C_g^\bullet$ za koju imamo morfizam standardnih trokuta (f, i_f, p_f) i (g, i_g, p_g) u $C\mathscr{A}$, odnosno $K\mathscr{A}$. Ako su u i v izomorfizmi, onda je i $c_{u,v,h}$ izomorfizam.

Označimo s $D_f^\bullet$ konus morfizma i_f. Eksplicitno,

$$D_f^n = b^{n+1} \oplus a^{n+1} \oplus b^n$$

$$d_{D_f} = \begin{pmatrix} d_{Tb^\bullet} & 0 & 0 \\ 0 & d_{Ta^\bullet} & 0 \\ 1_{Tb^\bullet} & Tf & d_b \end{pmatrix}$$

Propozicija 2.3.5. *Neka je $f\colon a^\bullet \Rightarrow b^\bullet$ prirodna transformacija. Tada je trokut $(i_f, p_f, -Tf)$ izomorfan standardnom trokutu (i_f, i_{i_f}, p_{i_f}) u $K\mathscr{A}$.*

Dokaz. Definirajmo prirodne transformacije $\alpha_f\colon Ta^\bullet \Rightarrow D_f^\bullet$ te $\beta_f\colon D_f^\bullet \Rightarrow Ta^\bullet$ matricama

$$\alpha_f := \begin{pmatrix} -Tf \\ 1_{Ta^\bullet} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_f := \begin{pmatrix} 0 & 1_{Ta^\bullet} & 0 \end{pmatrix}$$

te provjerimo da komutiraju s diferencijalima:

$$d_{D_f} \circ \alpha_f = \begin{pmatrix} d_{Tb^\bullet} & 0 & 0 \\ 0 & d_{Ta^\bullet} & 0 \\ 1_{Tb^\bullet} & Tf & d_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -Tf \\ 1_{Ta^\bullet} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_{Tb^\bullet} \circ Tf \\ d_{Ta^\bullet} \\ -Tf + Tf \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T^2 f \circ d_{Ta^\bullet} \\ 1_{Ta^\bullet} \\ 0 \end{pmatrix} = T\alpha_f \circ d_{Ta^\bullet},$$

$$T\beta_f \circ d_{D_f} = \begin{pmatrix} 0 & 1_{T^2 a^\bullet} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{Tb^\bullet} & 0 & 0 \\ 0 & d_{Ta^\bullet} & 0 \\ 1_{Tb^\bullet} & Tf & d_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d_{Ta^\bullet} & 0 \end{pmatrix} = d_{Ta^\bullet} \circ \beta_f.$$

Očito vrijedi $p_{i_f} \circ \alpha_f = -Tf$ te $\beta_f \circ i_{i_f} = p_f$, kao i $\beta_f \circ_f = 1_{Ta^\bullet}$. S druge strane, neće vrijediti $\alpha_f \circ \beta_f = 1_{D_f^\bullet}$, ali hoće do na homotopiju! Definirajmo $h\colon D_f^\bullet \to T^{-1} D_f^\bullet$ matricom

$$h := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{b^\bullet} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pa izračunajmo

$$
\begin{aligned}
Th \circ d_{D_f} + T^{-1}d_{D_f} \circ h &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{Tb^\bullet} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{Tb^\bullet} & 0 & 0 \\ 0 & d_{Ta^\bullet} & 0 \\ 1_{Tb^\bullet} & Tf & d_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d_{b^\bullet} & 0 & 0 \\ 0 & -d_{a^\bullet} & 0 \\ 1_{b^\bullet} & f & T^{-1}d_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{b^\bullet} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1_{Tb^\bullet} & Tf & d_{b^\bullet} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -d_{b^\bullet} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{b^\bullet} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1_{Tb^\bullet} & Tf & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{b^\bullet} \end{pmatrix} = 1_{D_f^\bullet} - \alpha_f \circ \beta_f
\end{aligned}
$$

budući da vrijedi

$$
\alpha_f \circ \beta_f = \begin{pmatrix} -Tf \\ 1_{Ta^\bullet} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1_{Ta^\bullet} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -Tf & 0 \\ 0 & 1_{Ta^\bullet} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Zaključujemo da u $K\mathscr{A}$ imamo komutativan dijagram

$$
\begin{tikzcd}
a^\bullet \arrow[r, "f"] & b^\bullet \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, "1_{b^\bullet}"] & C_f^\bullet \arrow[r, "p_f"] \arrow[d, "1_{C_f^\bullet}"] & Ta^\bullet \arrow[r, "-Tf"] \arrow[d, "\alpha_f"] & Tb^\bullet \arrow[d, "1_{Tb^\bullet}"] \\
 & b^\bullet \arrow[r, "i_f"] & C_f^\bullet \arrow[r, "i_{i_f}"] & D_f^\bullet \arrow[r, "p_{i_f}"] & Tb^\bullet
\end{tikzcd}
$$

te da je α_f izomorfizam u $K\mathscr{A}$, odnosno imamo izomorfizam trokuta $(i_f, p_f, -Tf)$ i (i_f, i_{i_f}, p_{i_f}) u $K\mathscr{A}$, kako smo i tvrdili. $\square$

Teorem 2.3.6. *Neka je $\mathscr{A}$ Abelova kategorija Tada za istaknute trokute u $K\mathscr{A}$ vrijedi:*

(i) $(1_{a^\bullet}, 0, 0)$ *je i.t., za svaki kompleks* $a^\bullet$.

(ii) Svaki trokut izomorfan istaknutom je i sam istaknut.

(iii) Za svaki morfizam f *u* $K\mathscr{A}$ *postoji istaknuti trokut* (f, g, h).

(iv) Trokut (f, g, h) *je istaknuti trokut ako i samo ako je* $(g, h, -Tf)$ *istaknuti trokut.*

(v) Ako su (f, g, h) i (f', g', h') istaknuti te imamo komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd} a^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & b^\bullet \arrow[d, "v"] \\ a_1^\bullet \arrow[r, "f'"] & b_1^\bullet \end{tikzcd}$$

onda postoji morfizam w takav da je (u, v, w) morfizam istaknutih trokuta (f, g, h) i (f', g', h'). Ako su u i v izomorfizmi, onda je to i w.

(vi) Ako je (f, g, h) istaknuta, onda je $g \circ f = 0$.

Dokaz.

(i) Dovoljno je pokazati da je konus nad $1_{a^\bullet}$ izomorfan 0 u $K\mathscr{A}$. Definirajmo homotopiju $h\colon C^\bullet_{1_{a^\bullet}} \to T^{-1}C^\bullet_{1_{a^\bullet}}$ matricom

$$h := \begin{pmatrix} 0 & 1_{a^\bullet} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

te izračunajmo

$$\begin{aligned} Th \circ d_{C_{1_{a^\bullet}}} + T^{-1}d_{C_{1_{a^\bullet}}} \circ h &= \begin{pmatrix} 0 & 1_{Ta^\bullet} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_{Ta^\bullet} & 0 \\ 1_{Ta^\bullet} & d_{a^\bullet} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d_{a^\bullet} & 0 \\ 1_{a^\bullet} & T^{-1}d_{a^\bullet} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1_{a^\bullet} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1_{Ta^\bullet} & d_{a^\bullet} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -d_{a^\bullet} \\ 0 & 1_{a^\bullet} \end{pmatrix} = 1_{C^\bullet_{1_{a^\bullet}}}. \end{aligned}$$

Dakle, identiteta na $C^\bullet_{1_{a^\bullet}}$ je nul-homotopna, pa je $C^\bullet_{1_{a^\bullet}}$ izomorfan 0 u $K\mathscr{A}$.

(ii) Direktno iz definicije. Ako je trokut izomorfan istaknutom, onda je izomorfan i nekom s.t.

(iii) Dovoljno je uzeti konus nad f: (f, i_f, p_f) je i.t.

(iv) Pretpostavimo da je (f, g, h) i.t. Tada postoji s.t. $(f', i_{f'}, p_{f'})$ i izomorfizam trokura $(f, g, h) \xrightarrow{\sim} (f', i_{f'}, p_{f'})$ u $K\mathscr{A}$. Tada je trokut $(g, h, -Tf)$ izomorfan trokutu $(i_{f'}, p_{f'}, -Tf')$, a prema prethodnoj propoziciji, trokut $(i_{f'}, p_{f'}, -Tf')$ je izomorfan s.t. $(i_{f'}, i_{i_{f'}}, p_{i_{f'}})$, dakle, trokut $(g, h, -Tf)$ je izomorfan nekom standardnom trokutu u $K\mathscr{A}$, pa je istaknut.

$$\begin{tikzcd}
a^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\wr"] & b^\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\wr"] & c^\bullet \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\wr"] & Ta^\bullet \arrow[r, "-Tf"] \arrow[d, "\wr"] & Tb^\bullet \arrow[d, "\wr"] \\
a_1^\bullet \arrow[r, "f'"] & b_1^\bullet \arrow[r, "i_{f'}"] \arrow[d, "\wr"] & C_{f'}^\bullet \arrow[r, "p_{f'}"] \arrow[d, "\wr"] & Ta_1^\bullet \arrow[r, "-Tf'"] \arrow[d, "\wr"] & Tb_1^\bullet \arrow[d, "\wr"] \\
 & b_1^\bullet \arrow[r, "i_{f'}"] & C_{f'}^\bullet \arrow[r, "i_{i_{f'}}"] & D_{f'}^\bullet \arrow[r, "p_{i_{f'}}"] & Tb_1^\bullet
\end{tikzcd}$$

Obratno, ako je $(g, h, -Tf)$ i.t., onda je prema upravo dokazanom $(h, -Tf, -Tg)$ i.t., $(-Tf, -Tg, -Th)$ i.t., ... , $(T^2 f, T^2 g, T^2 h)$ i.t., odnosno, (f, g, h) je i.t. prema lemi 2.3.3.

(v) Ako su dani trokuti istaknuti, onda su izomorfni nekim standardnima, a onda prema lemi 2.3.4 postoji traženi w, budući da inducirani morfizam između konusa možemo dokomponirati izomorfizmima. Iz toga je također očito da je w izomorfizam čim su to u i v.

(vi) Budući da je dijagram

$$\begin{tikzcd}
a^\bullet \arrow[r, "1_{a^\bullet}"] \arrow[d, "1_{a^\bullet}"] & a^\bullet \arrow[d, "f"] \\
a^\bullet \arrow[r, "f"] & b^\bullet
\end{tikzcd}$$

komutativan, to prema (v) postoji morfizam između istaknutih trokuta $(1_{a^\bullet}, 0, 0)$ i (f, g, h), odnosno komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd}
a^\bullet \arrow[r, "1_{a^\bullet}"] \arrow[d, "1_{a^\bullet}"] & a^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Ta^\bullet \arrow[d, "1_{Ta^\bullet}"] \\
a^\bullet \arrow[r, "f"] & b^\bullet \arrow[r, "g"] & c^\bullet \arrow[r, "h"] & Ta^\bullet
\end{tikzcd}$$

Sada slijedi tvrdnja.

∎

Teorem 2.3.7. *Ako je trokut*

$$a^\bullet \xrightarrow{f} b^\bullet \xrightarrow{g} c^\bullet \xrightarrow{h} Ta^\bullet$$

istaknut, onda imamo dugi egzaktni niz kohomologija

$$\cdots \longrightarrow H^n a^\bullet \xrightarrow{H^n f} H^n b^\bullet \xrightarrow{H^n g} H^n c^\bullet \xrightarrow{H^n h} H^{n+1} a^\bullet \longrightarrow \cdots$$

Dokaz. Budući da je (f, g, h) i.t., to imamo izomorfizam trokuta

$$\begin{tikzcd}
a^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\wr"] & b^\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\wr"] & c^\bullet \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\wr"] & Ta^\bullet \arrow[d, "\wr"] \\
a_1^\bullet \arrow[r, "f'"] & b_1^\bullet \arrow[r, "i_{f'}"] & C_{f'}^\bullet \arrow[r, "p_{f'}"] & Ta_1^\bullet
\end{tikzcd}$$

a onda i komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd}
H^n b^\bullet \arrow[r, "H^n g"] \arrow[d, "\wr"] & H^n c^\bullet \arrow[r, "H^n h"] \arrow[d, "\wr"] & H^{n+1} a^\bullet \arrow[d, "\wr"] \\
H^n b_1^\bullet \arrow[r, "H^n i_{f'}"] & H^n C_{f'}^\bullet \arrow[r, "H^n p_{f'}"] & H^{n+1} a_1^\bullet
\end{tikzcd}$$

u $\mathscr{A}$ pri čemu su vertikalne strelice izomorfizmi. No, prema teoremu 2.2.5, imamo egzaktnost u $H^n C_{f'}^\bullet$, a onda i u $H^n c^\bullet$, jer je

$$0 \longrightarrow b_1^\bullet \xrightarrow{i_{f'}} C_{f'}^\bullet \xrightarrow{p_{f'}} Ta_1^\bullet \longrightarrow 0$$

egzaktan. Egzaktnost u ostalim komponentama slijedi primjenom (iv) iz prethodnog teorema. ∎

2.4 Derivirana kategorija

Funktor H^n čuva izomorfizme, kao i svaki funktor, no, ne reflektira ih nužno. Stoga uvodimo definiciju:

Definicija 2.4.1. Za morfizam $f \in \mathrm{Hom}_{C\mathscr{A}}(a^\bullet, b^\bullet)$ kažemo da je *kvazi-izomorfizam* u $C\mathscr{A}$ ako je $H^n f$ izomorfizam u $\mathscr{A}$, za sve $n \in \mathbb{Z}$. Analogno definiramo kvazi-izomorfizam u $K\mathscr{A}$.

Jasno je da je f kvazi-izomorfizam u $C\mathscr{A}$ ako i samo ako je $\underline{f}$ kvazi-izomorfizam u $K\mathscr{A}$.

Teorem 2.4.2. *Lokalizacija kategorije $C\mathscr{A}$ po kvazi-izomorfizmima u $C\mathscr{A}$ kanonski je izomorfna lokalizaciji kategorije $K\mathscr{A}$ po kvazi-izomorfizmima u $K\mathscr{A}$.*

Dokaz. Označimo s $D\mathscr{A}$ lokalizaciju kategorije $C\mathscr{A}$ po kvazi-izomorfizmima, s $D'\mathscr{A}$ lokalizaciju kategorije $K\mathscr{A}$ po kvazi-izomorfizmima te s $Q\colon C\mathscr{A} \to D\mathscr{A}$ i $Q'\colon K\mathscr{A} \to D'\mathscr{A}$ odgovarajuće funktore lokalizacije.

Pretpostavimo da vrijedi implikacija $f \simeq g \Rightarrow Qf = Qg$, za sve morfizme u $C\mathscr{A}$. Tada možemo inducirati funktor $\underline{Q}\colon K\mathscr{A} \to D\mathscr{A}$ takav da vrijedi $\underline{Q}\,\underline{f} = Qf$. Budući da je $\underline{f}$ kvazi-izomorfizam u $K\mathscr{A}$ čim je f kvazi-izomorfizam u $C\mathscr{A}$, to je $Q'\underline{f}$ izomorfizam u $D'\mathscr{A}$ za sve kvazi-izomorfizme f u $C\mathscr{A}$, pa zbog univerzalnog svojstva lokalizacije postoji jedinstveni $F\colon D\mathscr{A} \to D'\mathscr{A}$ takav da je $Q'\underline{f} = FQf$. Nadalje, za kvazi-izomorfizam $\underline{f}$ u $K\mathscr{A}$ imamo $\underline{Q}\,\underline{f} = Qf$, što je izomorfizam u $D\mathscr{A}$, pa iz univerzalnog svojstva lokalizacije slijedi da postoji jedinstveni $G\colon D'\mathscr{A} \to D\mathscr{A}$ takav da je $GQ' = \underline{Q}$. Budući da je $F\underline{Q}\,\underline{f} = FQf = Q'\underline{f}$ i dani funktori djeluju kao indentitete na objektima, imamo $F\underline{Q} = Q'$, pa iz komutativnosti dijagrama

$$\begin{tikzcd}
C\mathscr{A} \arrow[r, "\underline{\cdot}"] \arrow[d, "Q"] & K\mathscr{A} \arrow[dl, "\underline{Q}"'] \arrow[d, "Q'"] \arrow[dr, "\underline{Q}"] \arrow[drr, bend left, "Q'"] & & \\
D\mathscr{A} \arrow[r, "F"] & D\mathscr{A}' \arrow[r, "G"] & D\mathscr{A} \arrow[r, "F"] & D\mathscr{A}'
\end{tikzcd}$$

vidljivo je da je $GFQ = Q$ te $FGQ' = Q'$, a onda iz jedinstvenosti faktorizacije kroz lokalizaciju slijedi da je $GF = 1_{D\mathscr{A}}$ i $FG = 1_{D'\mathscr{A}}$, odnosno imamo $D\mathscr{A} \cong D'\mathscr{A}$.

Preostaje još pokazati da vrijedi $f \simeq g \Rightarrow Qf = Qg$ za $f, g\colon a^\bullet \Rightarrow b^\bullet$. Označimo s h homotopiju između f i g te s

$$c_h = c_{1_{a^\bullet}, 1_{b^\bullet}, h} \colon C^\bullet_f \Rightarrow C^\bullet_g,$$

$$d_h = c_{1_{b^\bullet}, c_h, 0} \colon D^\bullet_f \Rightarrow D^\bullet_g,$$

gdje su ovi morfizmi definirani kao u lemi 2.3.4 te s α_f, β_f, α_g i β_g morfizme iz propozicije 2.3.5. Prema lemi 2.3.4 i propoziciji 2.3.5 imamo komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd}
Ta^\bullet \arrow[r, "\alpha_f"] \arrow[d, "-Tf"'] & D^\bullet_f \arrow[r, "d_h"] \arrow[d, "p_{i_f}"] & D^\bullet_g \arrow[r, "\beta_g"] \arrow[d, "p_{i_g}"] & Ta^\bullet \arrow[d, "-Tg"] \\
Tb^\bullet \arrow[r, "1_{Tb^\bullet}"] & Tb^\bullet \arrow[r, "1_{Tb^\bullet}"] & Tb^\bullet \arrow[r, "1_{Tb^\bullet}"] & Tb^\bullet
\end{tikzcd}$$

pri čemu prva dva kvadrata komutiraju u $C\mathscr{A}$, dok posljednji samo u $K\mathscr{A}$. Sada imamo relacije

$$Qf = -QT^{-1}p_{i_g} \circ QT^{-1}d_h \circ QT^{-1}\alpha_f$$

$$Qg = -QT^{-1}p_{i_g} \circ QT^{-1}\alpha_g$$

Budući da su $T^{-1}\underline{\alpha}_g$ i $T^{-1}\underline{\beta}_g$ izomorfizmi u $K\mathscr{A}$, oni su posebno i kvazi-izomorfizmi u $K\mathscr{A}$, a onda i u $C\mathscr{A}$, tj. $QT^{-1}\alpha_g$ i $QT^{-1}\beta_g$ su izomorfizmi u $D\mathscr{A}$. No, kako vrijedi $T^{-1}\beta_g \circ T^{-1}\alpha_g = 1_{a^\bullet}$, onda je $(QT^{-1}\alpha_g)^{-1} = QT^{-1}\beta_g$. Uvrštanjem u gornje izraze dobije se

$$Qf = Qg \circ QT^{-1}(\beta_g \circ d_h \circ \alpha_f),$$

a sada direktnom provjerom imamo

$$\beta_g \circ d_h \circ \alpha_f = \begin{pmatrix} 0 & 1_{Ta^\bullet} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{Tb^\bullet} & 0 & 0 \\ 0 & 1_{Ta^\bullet} & 0 \\ 0 & Th & 1_{b^\bullet} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -Tf \\ 1_{Ta^\bullet} \\ 0 \end{pmatrix} = 1_{Ta^\bullet}$$

pa slijedi $Qf = Qg$. □

Definicija 2.4.3. Neka je $\mathscr{A}$ Abelova kategorija. Lokalizaciju kategorije $C\mathscr{A}$ po skupu kvazi-izomorfizama zovemo *derivirana kategorija* kategorije $\mathscr{A}$.

Lema 2.4.4. *Neka je trokut*

$$a^\bullet \xrightarrow{f} b^\bullet \xrightarrow{g} c^\bullet \xrightarrow{h} Ta^\bullet$$

istaknut. Tada je f kvazi-izomorfizam ako i samo ako je $c^\bullet$ acikličan kompleks.

Dokaz. Neka je f kvazi-izomorfizam. Prema teoremu 2.3.7 i lemi 1.2.37 imamo komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd}
H^n a^\bullet \arrow[r, "H^n f"] \arrow[d, "1_{H^n a^\bullet}"'] & H^n b^\bullet \arrow[r, "H^n g"] \arrow[d, "1_{H^n b^\bullet}"] & H^n c^\bullet \arrow[r, "H^n h"] \arrow[d] & H^{n+1} a^\bullet \arrow[r, "H^{n+1} f"] \arrow[d, "1_{H^{n+1} a^\bullet}"'] & H^{n+1} b^\bullet \arrow[d, "1_{H^{n+1} b^\bullet}"] \\
H^n a^\bullet \arrow[r, "H^n f"] & H^n b^\bullet \arrow[r] & 0 \arrow[r] & H^{n+1} a^\bullet \arrow[r, "H^{n+1} f"] & H^{n+1} b^\bullet
\end{tikzcd}$$

s egzaktnim retcima, a onda prema 5-lemi imamo da je $H^n c^\bullet \cong 0$.

Obratno, ako je $c^\bullet$ acikličan, iz teorema 2.3.7 imamo egzaktan niz

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^n a^\bullet \arrow[r, "H^n f"] & H^n b^\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

a onda je $H^n f$ nužno bimorfizam prema lemi 1.2.37 a onda i izomorfizam prema korolaru 1.2.34. □

Teorem 2.4.5. *Skup kvazi-izomorfizama u $K\mathscr{A}$ je lokalizirajući.*

Dokaz. U dokazu koristimo svojstva istaknutih trokuta dokazanih u teoremu 2.3.6 bez naglašavanja.

Identiteta je očito kvazi-izomorfizam. Neka su $f \in \mathrm{Hom}_{K\mathscr{A}}(a^\bullet, b^\bullet)$ i $g \in \mathrm{Hom}_{K\mathscr{A}}(b^\bullet, c^\bullet)$ kvazi-izomorfizmi. Tada je i $H^n(g \circ f) = H^n g \circ H^n f$ izomorfizam, dakle $g \circ f$ je kvazi-izomorfizam.

Neka su $f \in \mathrm{Hom}_{K\mathscr{A}}(a^\bullet, a_1{}^\bullet)$ i $s \in \mathrm{Hom}_{K\mathscr{A}}(a^\bullet, b^\bullet)$, pri čemu je s kvazi-izomorfizam. Neka je (s, i, p) i.t. nad s. Pogledajmo i.t. $(-f \circ T^{-1}p, t, i')$ nad $-f \circ T^{-1}p$. Imamo komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd}
T^{-1}c^\bullet \arrow[r, "-T^{-1}p"] \arrow[d, "1_{T^{-1}c^\bullet}"'] & a^\bullet \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"] & b^\bullet \arrow[r, "i"] & c^\bullet \arrow[r, "p"] \arrow[d, "1_{c^\bullet}"] & Ta^\bullet \arrow[d, "Tf"] \\
T^{-1}c^\bullet \arrow[r, "-f \circ T^{-1}p"] & a_1^\bullet \arrow[r, "t"] & b_1^\bullet \arrow[r, "i'"] & c^\bullet \arrow[r, "Tf \circ p"] & Ta_1^\bullet
\end{tikzcd}$$

gdje su retci istaknuti trokuti, pa postoji $g\colon b^\bullet \Rightarrow b_1^\bullet$ takav da je $g \circ s = t \circ f$. Budući da je s kvazi-izomorfizam, to je $c^\bullet$ acikličan, a onda je i t kvazi-izomorfizam, prema prethodnoj lemi, jer je i $(t, i', Tf \circ p)$ i.t.

Neka su $f \in \mathrm{Hom}_{K\mathscr{A}}(b_1^\bullet, b^\bullet)$ i $s \in \mathrm{Hom}_{K\mathscr{A}}(a^\bullet, b^\bullet)$, pri čemu je s kvazi-izomorfizam. Ponovo uzmimo i.t. (s, i, p) nad s te pogledajmo i.t. $(i \circ f, i', p')$ nad $i \circ f$. Tada postoji h takav da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd}
T^{-1}a_1^\bullet \arrow[r, "-T^{-1}p'"] \arrow[d, dashed, "T^{-1}h"'] & b_1^\bullet \arrow[r, "i \circ f"] \arrow[d, "f"] & c^\bullet \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "1_{c^\bullet}"] & a_1^\bullet \arrow[r, "p'"] \arrow[d, dashed, "h"] & Tb_1^\bullet \arrow[d, "Tf"] \\
a^\bullet \arrow[r, "s"] & b^\bullet \arrow[r, "i"] & c^\bullet \arrow[r, "p"] & Ta^\bullet \arrow[r, "-Ts"] & Tb^\bullet
\end{tikzcd}$$

pri čemu su retci istaknuti trokuti. Ako označimo $g = T^{-1}h$ i $t = -T^{-1}p'$, onda vrijedi $f \circ t = s \circ g$. Štoviše, t je kvazi-izomorfizam budući da je $(t, i \circ f, i')$ i.t., a $c^\bullet$ acikličan jer je s kvazi-izomorfizam.

Preostaje nam još pokazati (LS4) i njegov dual, a budući da je $K\mathscr{A}$ aditivna, ekvivalentno možemo pokazati da za morfizam f postoji kvazi-izomorfizam s takav da je $s \circ f = 0$ ako i samo ako postoji kvazi-izomorfizam t takav da je $f \circ t = 0$.

Neka su $f \in \mathrm{Hom}_{K\mathscr{A}}(a^\bullet, b^\bullet)$ i $s \in \mathrm{Hom}_{K\mathscr{A}}(b^\bullet, c^\bullet)$ te $s \circ f = 0$, pri čemu je s kvazi-izomorfizam. Neka je (s, i, p) i.t. Budući da je $(1_{a^\bullet}, 0, 0)$ i.t., to je i $(0, 0, -1_{Ta^\bullet})$ i.t. te postoji g takav da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd}
a^\bullet \arrow[r, "1_{a^\bullet}"] \arrow[d, dashed, "T^{-1}g"'] & a^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Ta^\bullet \arrow[r, "-1_{Ta^\bullet}"] \arrow[d, dashed, "g"] & Ta^\bullet \arrow[d, "Tf"] \\
T^{-1}a_1^\bullet \arrow[r, "-T^{-1}p"] & b^\bullet \arrow[r, "s"] & c^\bullet \arrow[r, "i"] & a_1^\bullet \arrow[r, "p"] & Tb^\bullet
\end{tikzcd}$$

Neka je $(T^{-1}g, i', p')$ i.t., a tada je i $(p', -g, -Ti')$ i.t., pa je $g \circ p' = 0$ što onda povlači i da je $-Tf \circ p' = p \circ g \circ p' = 0$. Ako označimo s $t = -T^{-1}p'$, imamo $f \circ t = 0$, a t je kvazi-izomorfizam budući da je $(t, T^{-1}g, i')$ i.t., a $T^{-1}a_1^\bullet$ acikličan jer je $a_1^\bullet$ acikličan, što vrijedi jer je s kvazi-izomorfizam.

Obratno, neka su $f \in \mathrm{Hom}_{K\mathscr{A}}(b^\bullet, c^\bullet)$ i $t \in \mathrm{Hom}_{K\mathscr{A}}(a^\bullet, b^\bullet)$ te $f \circ t = 0$, pri čemu je t kvazi-izomorfizam. Neka je (t, i, p) i.t., a onda postoji g takav da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd}
a^\bullet \arrow[r, "t"] \arrow[d] & b^\bullet \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & c_1^\bullet \arrow[r, "p"] \arrow[d, dashed, "g"] & Ta^\bullet \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & c^\bullet \arrow[r, "1_{c^\bullet}"] & c^\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

budući da su retci istaknuti trokuti. Neka je (g, s, p') i.t. Tada vrijedi $s \circ f = s \circ g \circ i = 0$, a s je kvazi-izomorfizam budući da je $c_1^\bullet$ acikličan jer je t kvazi-izomorfizam, a onda je i $Tc_1^\bullet$ acikličan, pa slijedi tvrdnja jer je $(s, p', -Tg)$ i.t. $\square$

Dakle, derivirana kategorija se sastoji od kompleksa, dok su morfizmi razlomci (lijevi ili desni), tj. sastoje se od para prirodnih transformacija f i s, pri čemu je s kvazi-izomorfizam, i sasvim je svejedno hoćemo li f i s promatrati do na homotopiju ili ne, u deriviranoj kategoriji će odgovarajući razlomci biti jednaki ako reprezentante klasa homotopije zamjenimo nekim drugima.

Neka je $a^\bullet$ neki kompleks u $\mathscr{A}$. Za cijeli broj n definiramo kompleks $\tau_{\leq n} a^\bullet$ tako da

$$(\tau_{\leq n} a^\bullet)^k := \begin{cases} a^k, & k < n \\ \ker d_a^n, & k = n \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$d^k_{\tau_{\leq n} a^\bullet} := \begin{cases} d_a^k, & k < n-1 \\ \varphi_a^n \circ \kappa_a^{n-1}, & k = n-1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

pri čemu je κ_a^{n-1} koslika diferencijala d_a^{n-1}, a $\varphi_a^n \colon \operatorname{im} d_a^{n-1} \to \ker d_a^n$ kanonski induciran morfizam. Da je $\tau_{\leq n} a^\bullet$ kompleks, treba provjeriti da je kompozicija susjednih diferencijala 0, a to je očito osim u slučaju $d^{n-1}_{\tau_{\leq n} a^\bullet} \circ d^{n-1}_{\tau_{\leq n} a^\bullet} = \varphi_a^n \circ \kappa_a^{n-1} \circ d_a^{n-2} = 0$, no, tada imamo

$$\begin{aligned} \varphi_a^n \circ \kappa_a^{n-1} \circ d_a^{n-2} = 0 &\Leftrightarrow \mu_a^n \circ \varphi_a^n \circ \kappa_a^{n-1} \circ d_a^{n-2} = 0 \\ &\Leftrightarrow d_a^{n-1} \circ d_a^{n-2} = 0 \end{aligned}$$

budući da vrijedi

$$\mu_a^n \circ \varphi_a^n \circ \kappa^{n-1} = \iota_a^{n-1} \circ \kappa_a^{n-1} = d_a^{n-1}$$

pri čemu je μ_a^n jezgra diferencijala d_a^n, a ι_a^{n-1} slika diferencijala d_a^{n-1}.

Za $f \in \operatorname{Hom}_{C\mathscr{A}}(a^\bullet, b^\bullet)$ možemo definirati

$$(\tau_{\leq n} f)^k := \begin{cases} f^k, & k < n \\ Z^n f, & k = n \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

te je očito na taj način definiran funktor $\tau_{\leq n} \colon C\mathscr{A} \to C\mathscr{A}$, ako pokažemo da je $\tau_{\leq n} f$ zaista prirodna transformacija, tj. $T(\tau_{\leq n} f) \circ d_{\tau_{\leq n} a^\bullet} = d_{\tau_{\leq n} b^\bullet} \circ \tau_{\leq n} f$. Ta tvrdnja slijedi izravno iz definicije budući da je $f \in \operatorname{Hom}_{C\mathscr{A}}(a^\bullet, b^\bullet)$, osim slučaja $(\tau_{\leq n} f)^n \circ d^{n-1}_{\tau_{\leq n} a^\bullet} = d^{n-1}_{\tau_{\leq n} b^\bullet} \circ (\tau_{\leq n} f)^{n-1}$, ali to slijedi iz definicije morfizma $Z^n f$ i prirodnosti od f jer imamo

$$\begin{aligned} Z^n f \circ \varphi_a^n \circ \kappa_a^{n-1} = \varphi_b^n \circ \kappa_b^{n-1} \circ f^{n-1} &\Leftrightarrow \mu_b^n \circ Z^n f \circ \varphi_a^n \circ \kappa_a^{n-1} = \mu_b^n \circ \varphi_b^n \circ \kappa_b^{n-1} \circ f^{n-1} \\ &\Leftrightarrow f^n \circ \mu_a^n \circ \varphi_a^n \circ \kappa_a^{n-1} = d_b^{n-1} \circ f^{n-1} \\ &\Leftrightarrow f^n \circ d_a^{n-1} = d_b^{n-1} \circ f^{n-1} \end{aligned}$$

Funktor $\tau_{\leq n}\colon C\mathscr{A} \to C\mathscr{A}$ zovemo *trunkacijskim funktorom* ili skraćeno *trunkacija* i on je očito aditivan. Dualno možemo definirati i trunkacijski funktor $\tau_{\geq n}\colon C\mathscr{A} \to C\mathscr{A}$ tako da zamijenimo jezgru kojezgrom. Svi rezultati u nastavku se mogu dualizirati u tom slučaju.

Za svaki kompleks $a^\bullet$ u $\mathscr{A}$ možemo definirati prirodnu transformaciju $i_a\colon \tau_{\leq n}a^\bullet \Rightarrow a^\bullet$ tako da je

$$i_a^k := \begin{cases} 1_{a^k}, & k < n \\ \mu_a^n, & k = n \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

pri čemu je μ_a^n jezgra od d_a^n. Prirodnost je trivijalna osim za $i_a^n \circ d_{\tau_{\leq n}a^\bullet}^{n-1} = d_a^{n-1} \circ i_a^{n-1}$ u kom slučaju imamo

$$i_a^n \circ d_{\tau_{\leq n}a^\bullet}^{n-1} = \mu_a^n \circ \varphi_a^n \circ \kappa^{n-1} = d_a^{n-1} \circ 1_a^{n-1} = d_a^{n-1} \circ i_a^{n-1}.$$

Očito je i_a monomorfizam za sve komplekse $a^\bullet$. Štoviše, $i\colon \tau_{\leq n} \Rightarrow 1_{C\mathscr{A}}$ je prirodni monomorfizam. Provjerimo prirodnost za neki $f \in \operatorname{Hom}_{C\mathscr{A}}(a^\bullet, b^\bullet)$; jednakost $f \circ i_a = i_b \circ \tau_{\leq n} f$ je trivijalna osim u n-tom argumentu, a tada slijedi iz definicije morfizma $Z^n f$. Naime,

$$f^n \circ i_a^n = i_b^n \circ (\tau_{\leq n} f)^n \Leftrightarrow f^n \circ \mu_a^n = \mu_b^n \circ Z^n f.$$

Ključno svojstvo trunkacije leži u sljedećoj lemi:

Lema 2.4.6. *Neka je $a^\bullet$ kompleks u $\mathscr{A}$ i neka je $n \in \mathbb{Z}$, a $i\colon \tau_{\leq n} \Rightarrow 1_{C\mathscr{A}}$ prirodni monomorfizam definiran kao gore. Tada je $H^k i_a\colon H^k(\tau_{\leq n}a^\bullet) \to H^k a^\bullet$ izomorfizam za $k \leq n$, a 0 inače.*

Dokaz. Tvrdnja za $k > n$ je očita. Neka je $k \leq n$. Iz definicije kompleksa $\tau_{\leq n}a^\bullet$ slijedi da je $\operatorname{im} d_{\tau_{\leq} a^\bullet}^k \cong \operatorname{im} d_a^k$ za $k < n-1$, dok ista tvrdnja vrijedi i za $k = n-1$ budući da je $\varphi_a^n \circ \kappa_a^{n-1}\colon a^{n-1} \twoheadrightarrow \operatorname{im} d_a^{n-1} \rightarrowtail \ker d_a^n$ epi-mono rastav diferencijala $d_{\tau_{\leq} a^\bullet}^{n-1}$. Slično, $\ker d_{\tau_{\leq} a^\bullet}^k \cong \ker d_a^k$ za $k < n-1$ direktno iz definicije kompleksa $\tau_{\leq n}a^\bullet$. Iz leme 1.2.26 slijedi da je $\ker d_a^{n-1} \cong \ker(\mu_a^n \circ \varphi_a^n \circ \kappa_a^{n-1}) \cong \ker(\varphi_a^n \circ \kappa_a^{n-1}) \cong \ker d_{\tau_{\leq n}a^\bullet}^{n-1}$, a jezgra diferencijala $\ker d_a^n \to 0$ je $1_{\ker d_a^n}$ prema napomeni 1.2.24, pa imamo $\ker d_{\tau_{\leq n}a^\bullet}^n \cong \ker d_a^n$. Iz definicija funktora $B^k i_a\colon \operatorname{im} d_{\tau_{\leq} a^\bullet}^k \to \operatorname{im} d_a^k$, $Z^k\colon \ker d_{\tau_{\leq} a^\bullet}^k \to \ker d_a^k$ te defincije prirodne transformacije $i_a\colon \tau_{\leq n}a^\bullet \Rightarrow a^\bullet$, jasno je da su $B^k i_a$, $Z^k i_a$ upravo gore navedeni izomorfizmi za $k \leq n$, a onda je prema lemi 1.2.48 i $H^k i_a$ izomorfizam za $k \leq n$. $\square$

Direktna posljedica prethodne leme je

Korolar 2.4.7. *Neka je $a^\bullet$ kompleks u $\mathscr{A}$, $n \in \mathbb{Z}$ te neka je $H^k a^\bullet \cong 0$ za $k > n$. Tada je $i_a\colon \tau_{\leq n}a^\bullet \Rightarrow a^\bullet$ kvazi-izomorfizam kompleksa.*

Za neke komplekse $a^\bullet$ i $b^\bullet$ u $\mathscr{A}$ uzmimo neki nul-homotopan morfizam $f\colon a^\bullet \Rightarrow b^\bullet$, tj. takav morfizam f koji možemo prikazati kao $f = Th \circ d + T^{-1}d \circ h$ za neku homotopiju $h\colon a^\bullet \to T^{-1}b^\bullet$. Tvrdimo da je i $\tau_{\leq n} f$ nul-homotopno. Definirajmo $h'\colon \tau_{\leq n} a^\bullet \to T^{-1}(\tau_{\leq n} b^\bullet)$ s komponentama

$$(h')^k := \begin{cases} h^k, & k < n \\ h^n \circ \mu_a^n, & k = n \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Provjerimo da je zaista $(\tau_{\leq n} f)^k = (h')^{k+1} \circ d^k_{\tau_{\leq n} a^\bullet} + d^{k-1}_{\tau_{\leq n} b^\bullet} \circ (h')^k$. Za $k < n-1$ tvrdnja je očita. Ako je $k = n-1$, onda imamo

$$\begin{aligned}(\tau_{\leq n} f)^{n-1} = f^{n-1} &= h^n \circ d_a^{n-1} + d_b^{n-2} \circ h^{n-1} \\ &= h^n \circ \mu_a^n \circ \varphi_a^n \circ \kappa^{n-1} + d_b^{n-2} \circ h^{n-1} \\ &= (h')^n \circ d^{n-1}_{\tau_{\leq n} a^\bullet} + d^{n-2}_{\tau_{\leq n} b^\bullet} \circ (h')^{n-1}.\end{aligned}$$

Nadalje, iz definicije morfizma $Z^n f$ slijedi

$$\begin{aligned}\mu_b^n \circ Z^n f = f^n \circ \mu_a^n &= f^n \circ \mu_a^n - h^{n+1} \circ d_a^n \circ \mu_a^n \\ &= (f^n - h^{n+1} \circ d_a^n) \circ \mu_a^n \\ &= d_b^{n-1} \circ h^n \circ \mu_a^n \\ &= \mu_b^n \circ \varphi_b^n \circ \kappa_b^{n-1} \circ h^n \circ \mu_a^n \\ &= \mu_b^n \circ d^{n-1}_{\tau_{\leq n} b^\bullet} \circ (h')^n\end{aligned}$$

a onda slijedi i

$$(\tau_{\leq n} f)^n = Z^n f = d^{n-1}_{\tau_{\leq n} b^\bullet} \circ (h')^n = (h')^{n+1} \circ d_{\tau_{\leq n} a^\bullet} + d^{n-1}_{\tau_{\leq n} b^\bullet} \circ (h')^n$$

budući da je μ_b^n monomorfizam. Dakle, zaista je $\tau_{\leq n} f$ nul-homotopono čim je to i f, pa se inducira funktor $\tau_{\leq n}\colon K\mathscr{A} \to K\mathscr{A}$ kojeg ćemo također zvati trunkacijom. Jasno, vrijede analogoni leme 2.4.6 i korolara 2.4.7.

Neka je sada $f\colon a^\bullet \Rightarrow b^\bullet$ kvazi-izomorfizam kompleksa u $\mathscr{A}$. To znači da je $H^k f$ izomorfizam za sve $k \in \mathbb{Z}$. Tvrdimo da je i $\tau_{\leq n} f$ kvazi-izomorfizam, odnosno da je $H^k(\tau_{\leq n} f)$ izomorfizam za sve $k \in \mathbb{Z}$. Tvrdnja je očita za $k > n$ budući da su $H^k(\tau_{\leq n} a^\bullet)$ i $H^k(\tau_{\leq n} b^\bullet)$ nul-objekti, dok za $k \leq n$ dijagram

$$\begin{tikzcd} H^k(\tau_{\leq n} a^\bullet) \arrow[r, "H^k i_a"] \arrow[d, "H^k(\tau_{\leq n} f)"'] & H^k a^\bullet \arrow[d, "H^k f"] \\ H^k(\tau_{\leq n} b^\bullet) \arrow[r, "H^k i_a"] & H^k b^\bullet \end{tikzcd}$$

komutira zbog prirodnosti od $i\colon \tau_{\leq n} \Rightarrow 1_{C\mathscr{A}}$, a budući da su za $k \leq n$ morfizmi $H^k i_a$, $H^k i_b$ te $H^k f$ izomorfizmi, to je i $H^k(\tau_{\leq n} f)$ izomorfizam. Time smo pokazali da je $\tau_{\leq n} f$ kvazi-izomorfizam, a onda se preko univerzalnog svojstva lokalizacije inducira i funktor $\tau_{\leq n}\colon D\mathscr{A} \to D\mathscr{A}$.

Za Abelovu kategoriju $\mathscr{A}$ smo pokazali da se preko funktora C i K ulaže u kategorije $C\mathscr{A}$ i $K\mathscr{A}$. Analogan rezultat vrijedi i za deriviranu kategoriju:

Propozicija 2.4.8. *Neka je $\mathscr{A}$ Abelova kategorija. Tada je funktor $D\colon \mathscr{A} \to D\mathscr{A}$ definiran kao kompozicija funktora $C\colon \mathscr{A} \to C\mathscr{A}$ i funktora lokalizacije $Q\colon C\mathscr{A} \to D\mathscr{A}$ potpuno vjeran.*

Dokaz. Neka su a i b objekti u $\mathscr{A}$. Želimo pokazati da je funkcija

$$D_{a,b}\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(a,b) \to \operatorname{Hom}_{D\mathscr{A}}(Da, Db)$$

bijekcija. Neka je $f\colon a \to b$ morfizam u $\mathscr{A}$. Budući da su Da i Db 0-kompleksi, očito je $H^0 Df = f$, pa je $D_{a,b}$ injekcija.

Da pokažemo da je $D_{a,b}$ surjekcija uzmimo neki morfizam $\varphi \in \operatorname{Hom}_{D\mathscr{A}}(Da, Db)$. Prema teoremu 2.4.5 φ možemo reprezentirati lijevim razlomkom $\varphi = Qf \circ (Qs)^{-1}$ pri čemu su $f\colon c^\bullet \Rightarrow Db$ i $s\colon c^\bullet \Rightarrow Da$ morfizmi u $C\mathscr{A}$ te je s kvazi-izomorfizam. Definirajmo $g\colon Da \Rightarrow Db$ tako da je

$$g^0 = H^0 f \circ (H^0 s)^{-1},\ g^n = 0,\ n \neq 0$$

te $h\colon \tau_{\leq 0} c^\bullet \Rightarrow Da$ tako da je

$$h^0 = H^0 s \circ \nu^0_{\varphi_c},\ h^n = 0,\ n \neq 0,$$

pri čemu je $\nu^0_{\varphi_c}\colon \ker d^0_c \to H^0 c^\bullet$ kojezgra kanonskog morfizma $\varphi^0_c\colon \operatorname{im} d^{-1}_c \to \ker d^0_c$. Pokažimo da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd}
 & c^\bullet \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
Da & \tau_{\leq 0} c^\bullet \arrow[u, "i_c"'] \arrow[d, "h"] & Db \\
 & Da \arrow[ul, "1_{Da}"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Da bi vrijedilo $s \circ i_c = h$, dovoljno je pokazati $s^0 \circ \mu^0_c = H^0 s \circ \nu^0_{\varphi_c}$ budući da je Da 0-kompleks. No, to slijedi direktno iz definicije morfizma $H^0 s$, odnosno komutativnosti dijagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r] & c^{-1} \arrow[rr, "d_c^{-1}"] \arrow[dl, "\kappa_c^{-1}"'] \arrow[dd] & & c^0 \arrow[rr, "d_c^0"] \arrow[dd, "s^0"'] & & c^1 \arrow[rr] \arrow[dd] & & \cdots \\
0 \arrow[r] & \operatorname{im} d_c^{-1} \arrow[rr, "\varphi_c^0"] \arrow[dd] & & \ker d_c^0 \arrow[rr, "\nu_{\varphi_c}^0"] \arrow[ur, "\mu_c^0"] \arrow[dd, "Z^0 s"'] & & H^0 c^\bullet \arrow[rr] \arrow[dd, "H^0 s"] & & 0 & \\
 & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[rr] \arrow[dl] & & a \arrow[rr] \arrow[dl, "1_a"] & & 0 \arrow[rr] & & \cdots \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[rr] & & a \arrow[rr, "1_a"] & & a \arrow[rr] & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

budući da je $\operatorname{im} d_{Da}^{-1} \cong 0$, a 1_a jezgra diferencijala $d_{Da}^0 \colon a \to 0$. Potpuno analogno imamo rezultat $H^0 f \circ \nu_{\varphi_c}^0 = f^0 \circ \mu_c^0$ iz čega direktno slijedi $g \circ h = f \circ i_c$. Kako je s kvazi-izomorfizam, posebno je $H^n c^\bullet \cong 0$ za $n > 0$, pa je $i_c \colon \tau_{\leq 0} c^\bullet \Rightarrow c^\bullet$ kvazi-izomorfizam prema koralaru 2.4.7 čime smo pokazali da su razlomci $Qf \circ (Qs)^{-1}$ i Qq ekvivalentni u lokalizaciji $D\mathscr{A}$, odnosno, $\varphi = Qg = D_{a,b} g^0$. Dakle, $D_{a,b}$ je surjekcija, pa onda i bijekcija. $\square$

Za kompleks $a^\bullet$ u $\mathscr{A}$ kažemo da je H^0-*kompleks* ako je $H^n a^\bullet \cong 0$, za sve $n \neq 0$. U deriviranoj kategoriji $D\mathscr{A}$ svaki H^0-kompleks je izomorfan nekom 0-kompleksu. Da bismo to vidjeli, za H^0-kompleks $a^\bullet$ uočimo dijagram

$$a^\bullet \xleftarrow{\ i_a\ } \tau_{\leq 0} a^\bullet \xrightarrow{\ f\ } D(H^0 a^\bullet)$$

pri čemu su $i_a \colon \tau_{\leq 0} a^\bullet \Rightarrow a^\bullet$ kanonski monomorfizam, a f definiran po komponentama tako da je $f^0 = \nu_{\varphi_a}^0$ kojezgra kanonskog morfizma $\varphi_a^0 \colon \operatorname{im} d_a^{-1} \to \ker d_a^0$ te $f^n = 0$ za $n \neq 0$. Kako je $H^n a^\bullet \cong 0$ za $n \neq 0$, to je i_a kvazi-izomorfizam, te su $H^n f = 0$ izomorfizmi za $n \neq 0$. Pokažimo još da je $H^0 f$ izomorfizam: to direktno slijedi iz komutativnog dijagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r] & a^{-1} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & \ker d_a^0 \arrow[rr] \arrow[dd, "\nu_{\varphi_a}^0"'] & & 0 \arrow[rr] \arrow[dd] & & \cdots \\
0 \arrow[r] & \operatorname{im} d_a^{-1} \arrow[rr, "\varphi_a^0"] \arrow[dd] & & \ker d_a^0 \arrow[rr, "\nu_{\varphi_a}^0"] \arrow[ur, "1_{\ker d_a^0}"] \arrow[dd, "\nu_{\varphi_a}^0"'] & & H^0 a^\bullet \arrow[rr] \arrow[dd, "1_{H^0 a^\bullet}"'] & & 0 & \\
 & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[rr] \arrow[dl] & & H^0 a^\bullet \arrow[rr] \arrow[dl, "1_{H^0 a^\bullet}"] & & 0 \arrow[rr] & & \cdots \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[rr] & & H^0 a^\bullet \arrow[rr, "1_{H^0 a^\bullet}"'] & & H^0 a^\bullet \arrow[rr] & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

budući da imamo izomorfizme

$$\operatorname{im} d^{-1}_{\tau_{\leq 0} a^{\bullet}} \cong \operatorname{im} d^{-1}_{a}, \ \ker d^{0}_{\tau_{\leq 0} a^{\bullet}} \cong \ker d^{0}_{a}, \ H^0(\tau_{\leq 0} a^{\bullet}) \cong H^0 a^{\bullet},$$

$$\operatorname{im} d^{-1}_{D(H^0 a^{\bullet})} \cong 0, \ \ker d^{0}_{D(H^0 a^{\bullet})} \cong H^0 a^{\bullet}, \ H^0(D(H^0 a^{\bullet})) \cong H^0 a^{\bullet}.$$

Tako iz prethodne propozicije slijedi korolar

Korolar 2.4.9. *Abelova kategorija $\mathscr{A}$ je ekvivalentna punoj potkategoriji derivirane kategorije $D\mathscr{A}$ koju čine H^0-kompleksi.*

Poglavlje 3

Derivirani funktori

Funktori između Abelovih kategorija nisu nužno egzaktni što može pružiti određene probleme u primjenama. Čak ni osnovni primjeri poput hom-funktora nisu nužno egzaktni, već samo lijevo ili desno egzaktni. U ovom poglavlju pokazujemo da lijevo ili desno egzaktne funktore, uz neke dodatne pretpostavke, možemo proširiti do funktora između deriviranih kategorija koji će biti egzaktni u određenom smislu. To nas dovodi do pojma deriviranog funktora.

3.1 Kompleksi ograničeni odozdo i kompleksi injektivnih objekata

Neka je $\mathscr{A}$ Abelova kategorija i neka su $C\mathscr{A}$, $K\mathscr{A}$ i $D\mathscr{A}$ odgovarajuće kategorije kompleksa pridružene kategoriji $\mathscr{A}$. Za kompleks $a^\bullet$ u $\mathscr{A}$ kažemo da je *ograničen odozdo* ako postoji $n_0 \in \mathbb{Z}$ takav da je $a^n \cong 0$, za sve $n < n_0$. Punu potkategoriju kategorije $C\mathscr{A}$ čiji su objekti kompleksi ograničeni odozdo ćemo označavati s $C^+\mathscr{A}$. Kvocijentiranjem morfizama u $C^+\mathscr{A}$ po homotopijama dobivamo odgovarajuću punu potkategoriju kategorije $K\mathscr{A}$ koju ćemo označavati s $K^+\mathscr{A}$. Prolaskom kroz dokaze teorema 2.4.2 i 2.4.5 vidljivo je da ih bez izmjena možemo primjeniti na kategorije $C^+\mathscr{A}$ i $K^+\mathscr{A}$, odnosno, lokalizacija kategorije $C^+\mathscr{A}$ po kvazi-izomorfizmima kanonski je izomorfna lokalizaciji kategorije $K^+\mathscr{A}$ po kvazi-izomorfizmima, te ćemo dobivenu lokalizaciju označavati s $D^+\mathscr{A}$, a također ja skup kvazi-izomorfizama u $K^+\mathscr{A}$ lokalizirajući. Iz propozicije 1.3.19 dobivamo da je $D^+\mathscr{A}$ puna potkategorija kategorije $D\mathscr{A}$ budući da za svaki kvazi-izomorfizam $s\colon a^\bullet \Rightarrow b^\bullet$ takav da je $a^\bullet$ ograničen odozdo, tj. postoji $n_0 \in \mathbb{Z}$ takav da je $a^n \cong 0$ za sve $n < n_0$, imamo kanonski kvazi-izomorfizam $p_b\colon b^\bullet \Rightarrow \tau_{\geq n_0} b^\bullet$. Da je p_b kvazi-izomorfizam slijedi iz činjenice da je $H^n b^\bullet \cong H^n a^\bullet \cong 0$ za $n < n_0$ i dualne verzije korolara 2.4.7.

Definicija 3.1.1. Za Abelovu kategoriju $\mathscr{A}$ kažemo da ima dovoljno injektivnih objekata ako za svaki objekt a u $\mathscr{A}$ postoji injektivan objekt I u $\mathscr{A}$ i monomorfizam $a \rightarrowtail I$.

Za Abelovu kategoriju $\mathscr{A}$ s $\mathcal{I}$ ćemo označavati punu potkategoriju koja se sastoji od injektivnih objekata te ćemo s $K^+\mathcal{I}$ označavati homotopsku kategoriju kompleksa koji se sastoje od injektivnih objekata. Izrazito je važan sljedeći rezultat:

Teorem 3.1.2. *Za Abelovu kategoriju $\mathscr{A}$, kategorija $K^+\mathcal{I}$ je puna potkategorija kategorije $D^+\mathscr{A}$. Štoviše, ako $\mathscr{A}$ ima dovoljno injektivnih objekata, kategorije $K^+\mathcal{I}$ i $D^+\mathscr{A}$ su ekvivalentne.*

Dokaz. Označimo s $S_\mathcal{I}$ skup kvazi-izomorfizama u $K^+\mathcal{I}$. Prema lemi 1.2.44 biprodukt injektivnih objekata je opet injektivan, pa kao i u slučaju $K^+\mathscr{A}$, možemo iskoristiti dokaz teorema 2.4.5 da zaključimo kako je $S_\mathcal{I}$ lokalizirajući skup u $K^+\mathcal{I}$. Cilj nam je pokazati da vrijede uvjeti propozicije 1.3.19, a u tu svrhu ćemo pokazati i jaču tvrdnju:

(∗) Neka je $s\colon I^\bullet \Rightarrow a^\bullet$ kvazi-izomorfizam, pri čemu je $I^\bullet$ objekt u $K^+\mathcal{I}$, a $a^\bullet$ objekt u $K^+\mathscr{A}$. Onda postoji prirodna transformacija $t\colon a^\bullet \Rightarrow I^\bullet$ tako da je $t \circ s \simeq 1_{I^\bullet}$.

Pokažimo prvo da je morfizam s acikličnog kompleksa u kompleks injektivnih objekata nužno nul-homotopan. Neka je dakle $a^\bullet$ acikličan, $I^\bullet$ kompleks injektivnih objekata, a f morfizam iz $a^\bullet$ u $I^\bullet$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su $a^n \cong 0$ za $n < 0$. To nije smanjenje općenitosti jer uvijek možemo reindeksirati kompleks. Homotopiju ćemo konstruirati induktivno. Neka je $h^0\colon a^0 \to I^{-1}$ nul-morfizam. Kako je $a^\bullet$ acikličan, to je d_a^0 monomorfizam, pa zbog injektivnosti postoji $h^1\colon a^1 \to I^0$ takav da je $h^1 \circ d_a^0 = f^0$, odnosno $f^0 = h^1 \circ d_a^0 + d_I^{-1} \circ h^0$.

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & a^0 \arrow[r, "d_a^0"] \arrow[d, "f^0"] \arrow[dl, "h^0"'] & a^1 \arrow[r, "d_a^1"] \arrow[d, "f^1"] \arrow[dl, "h^1"'] & a^2 \arrow[r] \arrow[d, "f^2"] \arrow[dl, "h^2"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & I^{-1} \arrow[r, "d_I^{-1}"'] & I^0 \arrow[r, "d_I^0"'] & I^1 \arrow[r, "d_I^1"'] & I^2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Pretpostavimo da smo konstruirali $h^n\colon a^n \to I^{n-1}$ tako da vrijedi

$$f^{n-1} = h^n \circ d_a^{n-1} + d_I^{n-2} \circ h^{n-1}$$

i pogledajmo komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd}
a^{n-1} \arrow[r, "d_a^{n-1}"] & a^n \arrow[r, two heads, "\nu_a^{n-1}"] \arrow[rr, bend left, "d_a^n"] \arrow[dr, "f^n - d_I^{n-1} \circ h^n"'] & \operatorname{coker} d_a^{n-1} \arrow[r, tail, "\iota_a^n \circ \psi_a^n"] \arrow[d, dashed] & a^{n+1} \arrow[dl, dashed, "h^{n+1}"] \\
 & & I^n &
\end{tikzcd}$$

pri čemu su, jasno, ι, ν i ψ odgovarajući kanonski morfizmi kako su definirani ranije. Morfizam $\operatorname{coker} d_a^{n-1} \to I^n$ induciran je univerzalnim svojstvom budući da vrijedi

$$\begin{aligned}
(f^n - d_I^{n-1} \circ h^n) \circ d_a^{n-1} &= f^n \circ d_a^{n-1} - d_I^{n-1} \circ h^n \circ d_a^{n-1} \\
&= f^n \circ d_a^{n-1} - d_I^{n-1} \circ (f^{n-1} - d_I^{n-2} \circ h^{n-1}) \\
&= f^n \circ d_a^{n-1} - d_I^{n-1} \circ f^{n-1} = 0,
\end{aligned}$$

dok je h^{n+1} tada induciran injektivnošću objekta I^n, budući da je $\iota_a^n \circ \psi_a^n$ monomorfizam jer je ψ_a^n izomorfizam zbog acikličnosti kompleksa $a^\bullet$. Imamo, dakle, $f^n = h^{n+1} \circ d_a^n + d_I^{n-1} \circ h^n$, čime je dovršen korak indukcije, pa zaključujemo da je $f \simeq 0$.

Pokažimo sada $(*)$. Neka je $s\colon I^\bullet \Rightarrow a^\bullet$ kvazi-izomorfizam, pri čemu je $I^\bullet$ objekt u $K^+\mathcal{I}$, a $a^\bullet$ objekt u $K^+\mathscr{A}$. Tada imamo standardni trokut (s, i_s, p_s) te je prema lemi 2.4.4 konus $C_s^\bullet$ acikličan, a onda je prema upravo dokazanom $p_s\colon C_s^\bullet \Rightarrow TI^\bullet$ nul-homotopan. Ako s $h\colon C_s^\bullet \to I^\bullet$ označimo odgovarajuću homotopiju, onda imamo $p_s = Th \circ d_{C_s} + T^{-1}d_{TI^\bullet} \circ h$. Kako je, do na diferencijal, $C_s^\bullet$ biprodukt objekata, to h možemo prikazati matrično $h = \begin{pmatrix} k & t \end{pmatrix}$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1_{TI^\bullet} & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Tk & Tt \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} d_{TI^\bullet} & 0 \\ Ts & d_a \end{pmatrix} + T^{-1}d_{TI^\bullet} \circ \begin{pmatrix} k & t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Tk \circ d_{TI^\bullet} + T(t \circ s) & Tt \circ d_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T^{-1}d_{TI^\bullet} \circ k & T^{-1}d_{TI^\bullet} \circ t \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

odakle direktno slijedi

$$\begin{aligned}
1_{TI^\bullet} - T(t \circ s) &= Tk \circ d_{TI^\bullet} + T^{-1}d_{TI^\bullet} \circ k, \\
Tt \circ d_a &= d_{TI^\bullet} \circ t,
\end{aligned}$$

odnosno da je t prirodna transformacija i $t \circ s \simeq 1_{I^\bullet}$.

Sada prema propoziciji 1.3.19 imamo da je $(K^+\mathcal{I})[S_{\mathcal{I}}{}^{-1}]$ puna potkategorija kategorije $D^+\mathscr{A}$. Štoviše, iz $(*)$ direktno slijedi da su svi elementi u $S_{\mathcal{I}}$ izomorfizmi, a onda i $(K^+\mathcal{I})[S_{\mathcal{I}}{}^{-1}] \cong K^+\mathcal{I}$, čime je dokazana prva tvrdnja teorema.

Dokaz da je $K^+\mathcal{I}$ ekvivalentna $D^+\mathscr{A}$ ako $\mathscr{A}$ ima dovoljno injektivnih objekata može se pronaći u [5].

□

3.2 Podizanje aditivnih funktora do homotopske kategorije kompleksa

U nastavku će nam C^*, K^* i D^* označavati bilo C bilo C^+, odnosno K ili K^+, D ili D^*.

Neka su $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$ Abelove kategorije i neka je $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ aditivan funktor. Definiramo funktor $C^*F\colon C^*\mathscr{A} \to C^*\mathscr{B}$ po točkama:

$$((C^*F)a^\bullet)^n := Fa^n,\ ((C^*F)f)^n := Ff^n$$

za kompleks $a^\bullet$ i prirodnu transformaciju f. Diferencijal kompleksa $(C^*F)a^\bullet$ također definiramo po točkama

$$d_{(C^*F)a^\bullet} = (C^*F)d_a.$$

Lako je provjeriti da je C^*F aditivan funktor i da nul-homotopna preslikavanja preslikava u nul-homotopna, pa se inducira funktor $K^*F\colon K^*\mathscr{A} \to K^*\mathscr{B}$.

Definicija 3.2.1. Za trokut (f, g, h) morfizama u $D^*\mathscr{A}$ kažemo da je istaknut ako je izomorfan slici istaknutog trokuta u $K^*\mathscr{A}$ po funktoru lokalizacije. Za aditivan funktor $F\colon D^*\mathscr{A} \to D^*\mathscr{B}$ kažemo da je egzaktan ako istaknute trokute u $D^*\mathscr{A}$ preslikava u istaknute trokute u $D^*\mathscr{B}$. Analogno se definira egzaktan funktor između kategorija $K^*\mathscr{A}$ i $K^*\mathscr{B}$.

Nije teško vidjeti da će za istaknute trokute u deriviranoj kategoriji vrijediti analogan rezultat teoremu 2.3.6 (detalji se mogu pronaći u [9]).

Lema 3.2.2. *Neka su $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$ Abelove kategorije i $F\colon C\mathscr{A} \to C\mathscr{B}$ aditivan funktor. Tada za svaki morfizam f u $C\mathscr{A}$ vrijedi $FC_f^\bullet \cong C_{Ff}^\bullet$.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno budući da aditivni funktori čuvaju biprodukte. □

Funktor K^*F općenito neće kvazi-izomorfizme slati u kvazi-izomorfizme, pa nećemo nužno moći inducirati odgovarajući funktor između deriviranih kategorija. Ipak uz pretpostavku egzaktnosti, imat ćemo taj rezultat.

Propozicija 3.2.3. *Neka je $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ egzaktan funktor između Abelovih kategorija.*

(i) K^*F *je egzaktan.*

(ii) K^*F *preslikava aciklične komplekse u* $K^*\mathscr{A}$ *u aciklične komplekse u* $K^*\mathscr{B}$.

(iii) K^*F *preslikava kvazi-izomorfizme u* $K^*\mathscr{A}$ *u kvazi-izomorfizme u* $K^*\mathscr{B}$, *dakle inducira se funktor* $D^*F\colon D^*\mathscr{A} \to D^*\mathscr{B}$.

(iv) D^*F *je egzaktan.*

Dokaz.

(i) Kako je K^*F aditivan, prema prethodnoj lemi preslikava konuse u konuse, tj. standardan trokut (f, i_f, p_f) će preslikati u trokut izomorfan standardnom, a prema tome i istaknuti trokut u istaknuti.

(ii) Slijedi direktno iz egzaktnosti od F; budući da egzaktni funktori čuvaju konačne limese i kolimese, F preslikava egzaktan dijagram u egzaktan dijagram, a kako je K^*F definiran po točkama, slijedi tvrdnja.

(iii) Neka je s kvazi-izomorfizam. Tada je konus $C_s^\bullet$ acikličan, a onda (ii) i prethodna lema povlače da je i $C_{(K^*F)s}^\bullet$ acikličan, odnosno, $(K^*F)s$ je kvazi-izomorfizam.

(iv) Neka je dan istaknut trokut (φ, ψ, χ) u $D^*\mathscr{A}$. Po definiciji, on je izomorfan slici istaknutog trokuta (f, g, h) u $K^*\mathscr{A}$. Kako D^*F na slici po funktoru lokalizacije djeluje kao K^*F, to je trokut $((D^*F)\varphi, (D^*F)\psi, (D^*F)\chi)$ izomorfan slici trokuta $((K^*F)f, (K^*F)g, (K^*F)h)$, a taj je istaknut u $K^*\mathscr{B}$ prema (i).

□

3.3 Definicija, egzistencija i jedinstvenost deriviranih funktora

U nastavku ćemo promatrati lijevo egzaktne funktore. Napomenimo odmah da sve rezultate možemo dualizirati za desno egzaktne funktore, pa nema potrebe da promatramo i jedne i druge.

Ranije smo proučavali komplekse koji se sastoje od injektivnih objekata i tu kategoriju označavali s $K^+\mathcal{I}$. Sada ćemo to poopćiti i proučavati pune potkategorije koje zadovoljavaju neka od svojstava kategorije $\mathcal{I}$.

Definicija 3.3.1. Neka je $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ lijevo egzaktan funktor između Abelovih kategorija. Za punu potkategoriju $\mathcal{R}$ kategorije $\mathscr{A}$ kažemo da je *adaptirana* funktoru F ako je zatvorena na biprodukte i vrijedi:

(R1) K^+F preslikava acikličan kompleks iz $K^+\mathcal{R}$ u acikličan kompleks,

(R2) za svaki objekt a u $\mathscr{A}$ postoji monomorfizam $a \rightarrowtail b$, pri čemu je b objekt u $\mathcal{R}$.

Poopćimo teorem 3.1.2 za slučaj adaptirane potkategorije.

Teorem 3.3.2. *Neka je $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ lijevo egzaktan funktor i neka mu je $\mathcal{R}$ adaptirana potkategorija. Neka je $S_{\mathcal{R}}$ skup kvazi-izomorfizama u $K^+\mathcal{R}$. Tada je $S_{\mathcal{R}}$ lokalizirajući skup u $K^+\mathcal{R}$ i $(K^+\mathcal{R})[S_R^{-1}]$ je ekvivalentna kategoriji $D^+\mathscr{A}$.*

Dokaz. Da dokažemo da je $S_{\mathcal{R}}$ lokalizirajući, argumentiramo kao u 3.1.2 za $S_{\mathcal{I}}$. Nadalje, analogno kao i za $\mathcal{I}$ iz teorema 3.1.2, pokazuje se da je svaki kompleks u $K^+\mathscr{A}$ kvazi-izomorfan nekom kompleksu u $K^+\mathcal{R}$, budući da se u dokazu koristi samo da $\mathscr{A}$ ima dovoljno injektivnih objekata (analogno (ii) u prethodnoj definiciji), ali ne i svojstvo injektivnosti objekata u $\mathcal{I}$. Na kraju, da dokažemo da je funktor $(K^+\mathcal{R})[S_R^{-1}] \to D^+\mathscr{A}$ potpuno vjeran, koristimo propoziciju 1.3.19; preostaje još samo pokazati da za svaki kvazi-izomorfizam $s\colon a^\bullet \Rightarrow b^\bullet$, pri čemu je $a^\bullet$ u $\mathcal{R}$, postoji morfizam $t\colon b^\bullet \Rightarrow c^\bullet$ takav da je $c^\bullet$ u $K^+\mathcal{R}$ i $t \circ s$ u S_R. No, to slijedi jer je svaki objekt u $K^+\mathscr{A}$ kvazi-izomorfan objektu u $K^+\mathcal{R}$. $\square$

Sada smo spremni definirati derivirani funktor. Kao što smo napomenuli, radit ćemo s lijevo egzaktnim funktorom, no analogno se pojam deriviranog funktora definira i za desno egzaktni funktor, tako da umjesto kompleksa ograničenih odozdo gledamo komplekse ograničene odozgo te prikladno dualiziramo pojam adaptirane potkategorije.

Definicija 3.3.3. Neka je $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ lijevo egzaktan funktor između Abelovih kategorija i neka su $Q_{\mathscr{A}}\colon K^+\mathscr{A} \to D^+\mathscr{A}$, $Q_{\mathscr{B}}\colon K^+\mathscr{B} \to D^+\mathscr{B}$ funktori lokalizacije. Za uređeni par (RF, ε_F) kažemo da je *(desno) derivirani funktor* funktoru F, pri čemu je $RF\colon D^+\mathscr{A} \to D^+\mathscr{B}$, a $\varepsilon_F\colon Q_{\mathscr{B}} \circ K^+F \Rightarrow RF \circ Q_{\mathscr{A}}$ prirodna transformacija, ako vrijedi sljedeće univerzalno svojstvo: za svaki uređeni par (G, ε), $G\colon D^+\mathscr{A} \to D^+\mathscr{B}$, $\varepsilon\colon Q_{\mathscr{B}} \circ K^+F \Rightarrow G \circ Q_{\mathscr{A}}$ postoji jedinstvena prirodna transformacija $\eta\colon RF \Rightarrow G$ takva da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} Q_{\mathscr{B}} \circ K^+F \arrow[r, "\varepsilon_F"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & RF \circ Q_{\mathscr{A}} \arrow[d, "\eta Q_{\mathscr{A}}"] \\ & G \circ Q_{\mathscr{A}} \end{tikzcd}$$

Ponekad deriviranim funktorom zovemo samo RF, bez isticanja prirodne transformacije ε_F, slično kao kad objekt $\ker f$ zovemo jezgrom bez naglašavanja kanonskog morfizma iz jezgre. Uočimo da postojanje deriviranog funktora nije trivijalno. Ipak, u slučaju kad je funktor F egzaktan, lako se vidi da je derivirani funktor dan s D^+F, dok je ε_F dan identitetom. Nadalje, ako derivirani funktor postoji, onda je on jedinstven do na jedinstven izomorfizam. Zaista, neka su (G, ε) i (G', ε') derivirani funktori funktoru F. Tada postoje jedinstveni $\eta\colon G \Rightarrow G'$ i $\eta'\colon G' \Rightarrow G$ takvi da je $\eta Q_{\mathscr{A}} \circ \varepsilon = \varepsilon'$ i $\eta' Q_{\mathscr{A}} \circ \varepsilon' = \varepsilon$. Tada je

$$(\eta' \circ \eta) Q_{\mathscr{A}} \circ \varepsilon = \eta' Q_{\mathscr{A}} \circ \eta Q_{\mathscr{A}} \circ \varepsilon = \eta' Q_{\mathscr{A}} \circ \varepsilon' = \varepsilon$$

$$1_G Q_{\mathscr{A}} \circ \varepsilon = 1_{GQ_{\mathscr{A}}} \circ \varepsilon = \varepsilon$$

pa jedinstvenost iz univerzalnog svojstva povlači da je $\eta' \circ \eta = 1_G$, a analogno se pokazuje i $\eta \circ \eta' = 1_{G'}$. Sljedeći teorem je od krucijalne važnosti za teoriju.

Teorem 3.3.4. *Neka je $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ lijevo egzaktan funktor između Abelovih kategorija te neka postoji potkategorija $\mathcal{R}$ adaptirana funktoru F. Tada postoji derivirani funktor (RF, ε_F) funktoru F te je RF egzaktan.*

Da dokažemo teorem, u nastavku ćemo dati konstrukciju deriviranog funktora te pokazati da zadovoljava univerzalno svojstvo.

Prema teoremu 3.3.2 imamo ekvivalenciju kategorija $(K^+\mathcal{R})[S_{\mathcal{R}}^{-1}]$ i $D^+\mathscr{A}$. Označimo s

$$\Psi\colon (K^+\mathcal{R})[S_{\mathcal{R}}^{-1}] \to D^+\mathscr{A}$$

ulaganje kategorija, a s

$$\Phi\colon D^+\mathscr{A} \to (K^+\mathcal{R})[S_{\mathcal{R}}^{-1}]$$

njegov kvazi-inverz te s

$$\alpha\colon 1_{(K^+\mathcal{R})[S_{\mathcal{R}}^{-1}]} \Rightarrow \Phi\Psi$$

$$\beta\colon 1_{D^+\mathscr{A}} \Rightarrow \Psi\Phi$$

odgovarajuće prirodne izomorfizme.

Funktor K^+F je egzaktan prema propoziciji 3.2.3 (i) (uočimo da se u dokazu ne koristi egzaktnost funktora F već samo aditivnost), a njegova restrikcija na $K^+\mathcal{R}$ prema svojstvu (R1) adaptirane kategorije i dokazu 3.2.3 (iii) preslikava kvazi-izomorfizme u kvazi-izomorfizme, pa se inducira funktor

$$\bar{F}\colon (K^+\mathcal{R})[S_{\mathcal{R}}^{-1}] \to D^+\mathscr{B}$$

takav da vrijedi $\bar{F} Q_{\mathcal{R}} = Q_{\mathscr{B}} \circ K^+F$.

Definirajmo $RF\colon D^+\mathscr{A} \to D^+\mathscr{B}$ kao kompoziciju $RF := \Phi\bar{F}$ te pokažimo da je taj funktor egzaktan. Da je $\bar{F}$ egzaktan pokazuje se analogno kao za D^*F u propoziciji 3.2.3 (iv). Da pokažemo da je Φ egzaktan, koristimo sljedeću lemu:

Lema 3.3.5. *Neka je (φ, ψ, χ) trokut u $(K^+\mathcal{R})[S_{\mathcal{R}}^{-1}]$ takav da je $(\Psi\varphi, \Psi\psi, \Psi\chi)$ istaknut u $D^+\mathscr{A}$. Tada je $(\Psi\varphi, \Psi\psi, \Psi\chi)$ izomorfan slici standardnog trokuta u $K^+\mathcal{R}$ po funktoru lokalizacije.*

Dokaz. Morfizam φ možemo reprezentirati razlomkom $\varphi = Q_{\mathcal{R}}f \circ (Q_{\mathcal{R}}s)^{-1}$, odnosno $\Psi\varphi = Q_{\mathscr{A}}f \circ (Q_{\mathscr{A}}s)^{-1}$. Imamo komutativan dijagram u $D^+\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
x^\bullet \arrow[r, "Q_{\mathscr{A}}f"] \arrow[d, "Q_{\mathscr{A}}s"'] & b^\bullet \arrow[r, "Q_{\mathscr{A}}i_f"] \arrow[d, "1_{b^\bullet}"] & C_f^\bullet \arrow[r, "Q_{\mathscr{A}}p_f"] & Tx^\bullet \arrow[d, "TQ_{\mathscr{A}}s"] \\
a^\bullet \arrow[r, "\Psi\varphi"] & b^\bullet \arrow[r, "\Psi\psi"] & c^\bullet \arrow[r, "\Psi\chi"] & Ta^\bullet
\end{tikzcd}$$

pa prema analogonu teorema 2.3.6 (v) za derivirane kategorije postoji izomorfizam trokuta $(\Psi\varphi, \Psi\psi, \Psi\chi) \cong (Q_{\mathscr{A}}f, Q_{\mathscr{A}}i_f, Q_{\mathscr{A}}p_f)$. $\square$

Neka je (φ, ψ, χ) i.t. u $D^+\mathscr{A}$. Tada imamo

$$(\varphi, \psi, \chi) \cong (\Psi\Phi\varphi, \Psi\Phi\psi, \Psi\Phi\chi) \cong (\Psi Q_{\mathcal{R}}f, \Psi Q_{\mathcal{R}}i_f, \Psi Q_{\mathcal{R}}p_f)$$

budući da imamo prirodan izomorfizam β i možemo primjeniti prethodnu lemu, a tada imamo i

$$(\Phi\varphi, \Phi\psi, \Phi\chi) \cong (\Phi\Psi Q_{\mathcal{R}}f, \Phi\Psi Q_{\mathcal{R}}i_f, \Phi\Psi Q_{\mathcal{R}}p_f) \cong (Q_{\mathcal{R}}f, Q_{\mathcal{R}}i_f, Q_{R}p_f),$$

jer imamo prirodan izomorfizam α, odnosno, $(\Phi\varphi, \Phi\psi, \Phi\chi)$ je izomorfan slici i.t. u $K^+\mathcal{R}$, pa je i sam istaknut. Time smo pokazali egzaktnost od Φ. Očito je sada RF egzaktan kao kompozicija egzaktnih funktora.

Konstruirajmo sada prirodnu transformaciju ε_F. Neka je $a^\bullet$ objekt u $K^+\mathscr{A}$ i $\beta_{a^\bullet} \colon a^\bullet \xrightarrow{\sim} \Psi\Phi a^\bullet = \Phi a^\bullet$ komponenta prirodnog izomorfizma β u $a^\bullet$. Izomorfizam $\beta_a^\bullet$ možemo reprezentirati razlomkom

$$a^\bullet \xrightarrow{\ s\ } x^\bullet \xleftarrow{\ t\ } \Phi a^\bullet$$

pri čemu su s i t kvazi-izomorfizmi. Štoviše, možemo pretpostaviti da je $x^\bullet$ u $K^+\mathcal{R}$ jer prema dokazu teorema 3.3.2 svaki kompleks u $K^+\mathscr{A}$ je kvazi-izomorfan nekom kompleksu u $K^+\mathcal{R}$. Tada je $t \in S_{\mathcal{R}}$ pa je $(K^+F)t$ kvazi-izomorfizam u $K^+\mathscr{B}$. Sada $(\varepsilon_F)_{a^\bullet}$ možemo definirati kao kompoziciju

$$(\varepsilon_F)_{a^\bullet} := ((Q_{\mathscr{B}} \circ K^+F)t)^{-1} \circ (Q_{\mathscr{B}} \circ K^+F)s$$

Pokažimo da definicija morfizma $(\varepsilon_F)_{a^\bullet}$ ne ovisi o reprezentaciji morfizma $\beta_{a^\bullet}$. Zaista, ako su (s,t) i (s',t') ekvivalentni razlomci, onda imamo komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd} & x^\bullet \arrow[d, "p"] & \\ a^\bullet \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "s'"'] & z^\bullet & \Phi a^\bullet \arrow[ul, "t"'] \arrow[dl, "t'"] \\ & y^\bullet \arrow[u, "p'"'] & \end{tikzcd}$$

pri čemu ponovno možemo pretpostaviti da su $x^\bullet$, $y^\bullet$ i $z^\bullet$ u $K^+\mathcal{R}$, onda vrijedi

$$\begin{aligned} ((Q_{\mathscr{B}} \circ K^+F)t)^{-1} \circ (Q_{\mathscr{B}} \circ K^+F)s &= ((Q_{\mathscr{B}} \circ K^+F)(pt))^{-1} \circ (Q_{\mathscr{B}} \circ K^+F)(ps) \\ &= ((Q_{\mathscr{B}} \circ K^+F)(p't'))^{-1} \circ (Q_{\mathscr{B}} \circ K^+F)(p's') \\ &= ((Q_{\mathscr{B}} \circ K^+F)t')^{-1} \circ (Q_{\mathscr{B}} \circ K^+F)s' \end{aligned}$$

Prirodnost od ε_F će slijediti iz prirodnosti od β.

Preostaje još provjeriti univerzalno svojstvo. Neka je $G\colon D^+\mathscr{A} \to D^+\mathscr{B}$ funktor i $\varepsilon\colon Q_{\mathscr{B}} \circ K^+F \Rightarrow G \circ Q_{\mathscr{A}}$ prirodna transformacija tako da vrijedi $\eta Q_{\mathscr{A}} \circ \varepsilon_F = \varepsilon$. Uzmimo kompleks $a^\bullet$ u $D^+\mathscr{A}$ i reprezentirajmo izomorfizam $\beta_{a^\bullet}$ kao ranije

$$a^\bullet \xrightarrow{\ s\ } x^\bullet \xleftarrow{\ t\ } \Phi a^\bullet$$

pri čemu je $x^\bullet$ u $K^+\mathcal{R}$. Uzevši u obzir da $Q_{\mathscr{A}}$ i $Q_{\mathscr{B}}$ na objektima djeluju kao identitete iz prirodnosti od ε slijedi da imamo komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd} (K^+F)a^\bullet \arrow[r, "\varepsilon_{a^\bullet}"] \arrow[d, "(Q_{\mathscr{B}} \circ K^+F)s"'] & Ga^\bullet \arrow[d, "GQ_{\mathscr{A}}s"] \\ (K^+F)a^\bullet \arrow[r, "\varepsilon_{x^\bullet}"] & Gx^\bullet \\ (K^+F)\Phi a^\bullet \arrow[r, "\varepsilon_{\Phi a^\bullet}"] \arrow[u, "(Q_{\mathscr{B}} \circ K^+F)t"] & G\Phi a^\bullet \arrow[u, "GQ_{\mathscr{A}}s"'] \end{tikzcd}$$

u $D^+\mathscr{B}$. Budući da su $(Q_{\mathscr{B}} \circ K^+F)t$ i $GQ_{\mathscr{A}}t$ izomorfizmi iz definicije od ε_F slijedi da imamo komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd}
(Q_{\mathscr{B}} \circ K^+F)a^\bullet \arrow[r, "\varepsilon_{a^\bullet}"] \arrow[d, "(\varepsilon_F)_{a^\bullet}"'] & Ga^\bullet \arrow[d, "G\beta_{a^\bullet}"] \\
(RF \circ Q_{\mathscr{A}})a^\bullet \arrow[r, "\varepsilon_{\Psi\Phi a^\bullet}"] & G\Psi\Phi a^\bullet
\end{tikzcd}$$

Kako je $\beta_{a^\bullet}$ izomorfizam, onda je to i $G\beta_{a^\bullet}$ pa možemo definirati

$$\eta_{a^\bullet} := (G\beta_{a^\bullet})^{-1} \circ \varepsilon_{\Psi\Phi a^\bullet} \colon (RF)a^\bullet \to Ga^\bullet.$$

Iz prirodnosti od β slijedi i prirodnost od $\eta\colon RF \Rightarrow G$ te iz gornjeg dijagrama slijedi da je $\eta Q_{\mathscr{A}} \circ \varepsilon_F = \varepsilon$. Jedinstvenost od η također slijedi iz komutativnosti gornjeg dijagrama i činjenice da je $G\beta$ izomorfizam. Time je dovršen dokaz teorema 3.3.4.

Teorem 3.3.6. *Neka je $\mathscr{A}$ Abelova kategorija koja ima dovoljno injektivnih objekata. Tada je $\mathcal{I}$ adaptirana svakom lijevom egzaktnom funktoru F s domenom $\mathscr{A}$.*

Dokaz. Prema lemi 1.2.44, $\mathcal{I}$ je zatvorena na biprodukte. Kako $\mathscr{A}$ ima dovoljno injektivnih, to je (R2) zadovoljeno. Treba još provjeriti da vrijedi (R1). Neka je dan acikličan kompleks $I^\bullet$ u $K^+\mathcal{I}$. Nul-morfizam $0\colon I^\bullet \to I^\bullet$ je kvazi-izomorfizam zbog acikličnosti od $I^\bullet$. Tada prema dokazu teorema 3.1.2 postoji morfizam $t\colon I^\bullet \Rightarrow I^\bullet$ takav da je $t \circ 0 \simeq 1_{I^\bullet}$. No, to onda povlači da je $1_{FI^\bullet}$ nul-homotopno preslikavanje, pa je $FI^\bullet$ acikličan. $\square$

Bibliografija

[1] *nLab*, `http://ncatlab.org/nlab/show/HomePage`, posjećena siječanj 2015.

[2] J. Adámek, H. Herrlich i G. E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories The Joy of Cats*, Online Edition, 2004, `http://katmat.math.uni-bremen.de/acc/`.

[3] S. Awodey, *Category Theory*, Oxford University Press, 2006.

[4] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 1: Basic Category Theory*, Cambridge University Press, 1994.

[5] S. I. Gelfand i Yu. I. Manin, *Methods of Homological Algebra*, Springer-Verlag, 2003.

[6] M. Kashiwara i P. Schapira, *Categories and Sheaves*, Springer-Verlag, 2006.

[7] S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, 1971.

[8] P. Maddy, *Believing the Axioms. I*, The Journal of Symbolic Logic **53** (1988), br. 2, 481–511.

[9] D. Miličić, *Lectures on Derived Categories*, `http://www.math.utah.edu/~milicic/Eprints/dercat.pdf`, posjećena 20.1.2015.

[10] M. A. Shulman, *Set theory for category theory*, (2008), `http://arxiv.org/abs/0810.1279v2`.

Sažetak

U ovom radu uvodi se jezik teorije kategorija. Razvija se teorija aditivnih i Abelovih kategorija, kulminirajući pojmom egzaktnosti što je kasnije korišteno da bi se proučila kohomologija kolančanih kompleksa, osnovni pojam homološke algebre. Uvodi se lokalizacija kategorija kao nužan alat za definiranje deriviranih kategorija, koje su korištene kao okruženje da bi se istražili derivirani funktori. Dobiven je rezultat egzistencije i jedinstvenosti deriviranog funktora kad postoji adaptirana potkategorija za lijevo egzaktan funktor.

Summary

In this thesis the language of category theory is briefly introduced. The theory of additive and Abelian categories is developed culminating with the notion of exactness. This is later used to study cohomology of cochain complexes, the main focus of homological algebra. Localization of categories is introduced as neccessary tool for defining derived categories which are used as a setting for the study of derived functors. The result of existence and uniqueness of derived functors when adapted subcategory for left exact functor exists is obtained.

Životopis

Rođen sam 30.1.1991. u Novoj Gradiški gdje pohađam Osnovnu školu Ljudevita Gaja Nova Gradiška (1997.-2005.) te Opću gimnaziju Nova Gradiška (2005.-2009.). Po završenom srednjoškolskom obrazovanju upisujem studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu gdje završavam preddiplomski studij Matematika (2009.-2012.) te upisujem diplomski studij Teorijska matematika (2012.-). Na drugoj godini preddiplomskog studija bio sam demonstrator, a od jeseni 2014. godine sam zaposlen kao nastavnik matematike u Osnovnoj školi Ljudevita Gaja Nova Gradiška.