SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Danijela Piškor

NIZOVI I REDOVI FUNKCIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Ljiljana Arambašić

Zagreb, rujan 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj diplomski rad posvećujem svojim roditeljima, bratu i dečku koji su me uvijek ohrabrivali i podržavali tijekom mog obrazovanja. Na tome sam im jako zahvalna.

Sadržaj

Uvod

Nizovi i redovi te njihova konvergencija jedno su od najvažnijih područja matematičke analize s mnogim primjenama u ostalim područjima matematike. Kada se spominju nizovi i redovi, najčešće se govori o nizovima i redovima realnih brojeva. Međutim, vrlo koristan koncept u analizi su nizovi i redovi funkcija. Upravo zbog toga, cilj ovog rada je detaljnije proučiti nizove i redove funkcija. Dakle, proučit ćemo konvergenciju te svojstva nizova i redova složenijih oblika, funkcija, čiju je definiciju 1923. godine dao Edouard Jean-Baptiste.

Nizovima i redovima bavili su se već i stari Grci pokušavajući riješiti neke praktične probleme kao što je izračunavanje površine kruga. Budući da do konačnog rješenja nisu mogli doći u konačno mnogo koraka u matematiku su uveli pojmove konvergencije i limesa niza. Definiciju limesa funkcija, kao i oznake lim i $\lim_{x\to x_0}$, postavio je Weierstrass.

Sve do razvoja derivabilnog računa nije bilo značajnijih rezultata o konvergenciji i limesu niza, a definiciju konvergencije kakvu poznajemo danas možemo zahvaliti matematičarima 19. stoljeća Gaussu, Bolzanu i posebice Cauchyju. Augustin Louis Cauchy prvi je precizno proučio pojam konvergencije odnosno limesa i tako opravdao otprije poznate koncepte derivacija, integrala, neprekidnih funkcija i redova.

Ovaj rad prvenstveno se bavi nizovima i redovima funkcija te njihovim svojstvima, a naročito konvergencijom kao najvažnijim svojstvom. Kako bi teoremi i primjeri vezani uz nizove i redove funkcija bili u potpunosti razumljivi, najprije navodimo osnovne definicije i teoreme o nizovima i redovima realnih brojeva. Nakon toga slijedi poglavlje *Nizovi funkcija* u kojem su detaljnije, kroz nekoliko primjera, proučene dvije vrste konvergencije, konvergencija po točkama i uniformna konvergencija.

Nadalje, navodimo neke važnije testove uniformne konvergencije redova funkcija kao i neka svojstva redova funkcija.

Na kraju se bavimo specijalnim oblicima redova funkcija, redovima potencija. Dana je definicija te osnovni pojmovi i svojstva vezani uz radijus konvergencija, kao i svojstva i aritmetičke operacije s redovima potencija. Također, definirani su i Taylorovi redovi, koji omogućuju računanje vrijednosti elementarnih funkcija.

Zahvaljujem se mentorici dr. sc. Ljiljani Arambašić za pomoć pri pisanju ovog diplomskog rada.

Poglavlje 1

Nizovi i redovi realnih brojeva

1.1 Definicija i osnovna svojstva nizova realnih brojeva

Niz realnih brojeva je funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Niz obično pišemo kao (a_n), gdje je $a_n = a(n)$ za $n \in \mathbb{N}$. Kažemo da je a_n n-ti član niza, $n \in \mathbb{N}$. Umjesto (a_n) ponekad ćemo pisati $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ili $(a_n)_n$.

Definicija 1.1.1. *Neka je (a_n) niz u $\mathbb{R}$. Kažemo da je niz (a_n):*

(a) ***rastući**, ako je $a_n \leq a_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$,*

(b) ***strogo rastući**, ako je $a_n < a_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$,*

(c) ***padajući**, ako je $a_n \geq a_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$,*

(d) ***strogo padajući**, ako je $a_n > a_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$,*

(e) ***monoton**, ako je rastući ili padajući,*

(f) ***strogo monoton**, ako je strogo rastući ili strogo padajući,*

(h) ***ograničen odozgo**, ako postoji $M \in \mathbb{R}$ tako da je $a_n \leq M$ za svaki $n \in \mathbb{N}$,*

(i) ***ograničen odozdo**, ako postoji $m \in \mathbb{R}$ tako da je $a_n \geq m$ za sve $n \in \mathbb{N}$,*

(j) ***ograničen**, ako je ograničen odozdo i odozgo, tj. ako postoje realni brojevi m i M takvi da je $m \leq a_n \leq M$ za svaki n.*

Za niz $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ kažemo da je **podniz** niza $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, ako postoji strogo rastući niz p u $\mathbb{N}$ takav da je $b = a \circ p$, odnosno $b_n = a_{p_n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Kažemo da niz (a_n) realnih brojeva **konvergira** ili **teži** prema realnom broju a ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $a_n \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$. Broj a zovemo **granična vrijednost** ili **limes** niza (a_n) i pišemo

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n. \tag{1.1}$$

Prema tome, kakvu god proizvoljnu simetričnu okolinu $\langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$ izaberemo oko broja a, postojat će $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da se svi članovi niza nakon a_{n_0} nalaze u toj okolini. Dakle, svi članovi niza (a_n), osim možda konačno mnogo članova, nalazit će se u okolini $\langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$. Simbolički, konvergenciju niza možemo zapisati i na sljedeći način:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(n > N) \Longrightarrow (|a_n - a| < \varepsilon)\,.$$

Za niz (a_n) koji ima limes $a \in \mathbb{R}$ kažemo da je **konvergentan**. U protivnom, niz je **divergentan**. Na primjer, niz $a_n = \frac{n}{n+1}$ je konvergentan i njegov limes je 1, dok je niz $a_n = (-1)^n$ divergentan.

U sljedećim tvrdnjama prisjetit ćemo se osnovnih svojstava konvergentnih nizova.

Teorem 1.1.2. *(a) Svaki konvergentan niz u $\mathbb{R}$ ima samo jednu graničnu vrijednost.*

(b) Svaki konvergentan niz u $\mathbb{R}$ je ograničen. Obrat ne vrijedi.

(c) Svaki ograničen i monoton niz u $\mathbb{R}$ je konvergentan.

(d) Svaki podniz konvergentnog niza u $\mathbb{R}$ i sam je konvergentan i ima istu graničnu vrijednost kao i niz.

(e) Ako su (a_n) i (b_n) konvergentni nizovi, te ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $a_n \leq b_n$ za svaki $n \geq n_0$ tada je $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.

(f) (Teorem o sendviču) Ako su nizovi (a_n), (b_n) i (c_n) takvi da je $a_n \leq c_n \leq b_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ veći od nekog $n_0 \in \mathbb{N}$ te ako vrijedi $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$ tada je niz (c_n) konvergentan i vrijedi $\lim_{n\to\infty} c_n = L$.

Uočimo da ograničenost niza nije dovoljna za konvergenciju niza. Pogledajmo, na primjer, gore spomenuti niz $a_n = (-1)^n$. Taj niz je ograničen s 1 i -1, no nije konvergentan. Nadalje, monotonost nije nužna za konvergenciju niza. Na primjer, niz zadan s $\frac{(-1)^n}{n}$ konvergira k 0, ali nije monoton.

Nakon što smo definirali što je to konvergentan niz, vidjet ćemo koji su nužni i dovoljni uvjeti za konvergenciju niza. Sljedeća karakterizacija je korisna jer omogućuje ispitivanje konvergencije niza i u situaciji kada ne znamo kandidata za limes. Prisjetimo se najprije definicije Cauchyjevog niza.

Kažemo da je niz (a_n) realnih brojeva **Cauchyjev**[1] niz ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_ε takav da za sve $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > n_\varepsilon$ vrijedi

$$|a_n - a_m| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Teorem 1.1.3. *Niz realnih brojeva je konvergentan ako i samo ako je Cauchyjev.*

Dokaz. Neka je (a_n) konvergentan niz i $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, to jest,

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\Big((n > n_\varepsilon) \Longrightarrow \Big(|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\Big)\Big). \tag{1.3}$$

Tada za sve $n, m > n_\varepsilon$ vrijedi

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

Dakle uvjet (1.3) je nužan.

Obratno, neka je (a_n) Cauchyjev niz. Pokažimo najprije da je taj niz ograničen. Iz (1.2) za $\varepsilon = 1$ slijedi da postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n, m > n_1$ vrijedi $|a_n - a_m| < 1$, odakle, za $n > n_1$ imamo

$$|a_n| \leq \left|a_n - a_{n_1+1}\right| + \left|a_{n_1+1}\right|.$$

Označimo li $M = \max\left\{|a_1|, ..., \left|a_{n_1}\right|, 1 + \left|a_{n_1+1}\right|\right\}$, tada je $|a_n| \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Neka je $\left(a_{p_n}\right)$ konvergentan podniz od (a_n) i $a = \lim_{n\to\infty} a_{p_n}$. Pokažimo da vrijedi $a = \lim_n a_n$. Uzmimo proizvoljan $\varepsilon > 0$. Iz konvergencije podniza $\left(a_{p_n}\right)$ slijedi da postoji $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\left(\left(n > n'_\varepsilon\right) \Longrightarrow \left(\left|a_{p_n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right)\right).$$

Budući da je niz (a_n) Cauchyjev, postoji $n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da

$$\left(\left(n, m > n''_\varepsilon\right) \Longrightarrow \left(|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}\right)\right).$$

Ako je $n_\varepsilon = \max\left\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\right\}$ tada za $n > n_\varepsilon$, zbog $p_n \geq n$ slijedi

$$|a_n - a| \leq \left|a_n - a_{p_n}\right| + \left|a_{p_n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

to jest, $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. □

[1] Augustin Louis Cauchy (Pariz, 21. kolovoza 1789. - Sceaux, 23. svibnja 1857.), francuski matematičar. Bio je jedan od prvih koji je matematički strogo zasnovao i razvijao infinitezimalni račun.

1.2 Redovi realnih brojeva

Neka je zadan niz (a_n) realnih brojeva. Pomoću niza (a_n) definiramo novi niz (s_n) na sljedeći način

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Općenito, n-ti član niza (s_n) definiramo kao zboj prvih n članova niza a_n, odnosno $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$. Uređeni par nizova brojeva $((a_n), (s_n))$ nazivamo **redom brojeva**.

Broj a_n zovemo **općim** ili n-tim članom reda, dok s_n nazivamo n-tom **parcijalnom sumom** reda. Umjesto zapisa reda kao uređenog para nizova $((a_n), (s_n))$, češće koristimo oznaku

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ili} \quad a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots .$$

Primjer 1.2.1. *Navedimo nekoliko primjera:*

(a) *Neka je dan niz $a_n = n$ prirodnih brojeva.*
Pripadni red je $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$.

(b) *Neka je dan niz s općim članom $a_n = \frac{1}{n}$.*
Pripadni red je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \ldots$.

(c) *Neka je dan niz s općim članom $a_n = (-1)^n$.*
Pripadni red je $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n + \cdots$.

Definirajući red brojeva $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zapravo smo članove niza (a_n) povezali znakom zbrajanja. Primijetimo da se ovdje radi o zbrajanju beskonačno mnogo članova nekog niza. Upravo zbog toga, promatramo niz parcijalnih suma (s_n) čije članove dobivamo zbrajajući prvih n članova niza.

Kažemo da je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konvergentan** ako je konvergentan niz njegovih parcijalnih suma (s_n), tj. ako postoji $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Ako je red konvergentan, onda broj $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ nazivamo zbrojem ili sumom reda i pišemo

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1.4}$$

Za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kažemo da je **divergentan** ako je divergentan niz njegovih parcijalnih suma (s_n). Kažemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira prema ∞ ako je $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ i pišemo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, dok red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira prema $-\infty$ ako je $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$ i pišemo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$.

Primjer 1.2.2. *Ispitajmo konvergenciju nekoliko danih redova:*

1. *Provjerimo konvergenciju reda* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

   Prikažimo opći član reda $a_n = \frac{1}{n(n+2)}$ *kao zbroj parcijalnih razlomaka:*

   $$\frac{1}{n\,(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}.$$

   Slijedi da je

   $$\frac{1}{n\,(n+2)} = \frac{A(n+2)+Bn}{n(n+2)} = \frac{(A+B)n+2A}{n(n+2)},$$

   pa dobivamo da je $A + B = 0$ i $2A = 1$, čije rješenje je $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$. *Dakle, opći član možemo zapisati kao*

   $$a_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right). \tag{1.5}$$

   Zbrajanjem prvih n članova niza (a_n) *dobivamo*

   $$s_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}.$$

   Sada je

   $$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}\right) = \frac{3}{4} \tag{1.6}$$

   i zaključujemo da red konvergira i da je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}$.

2. *Za red* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ *vrijedi*

   $$s_n = \begin{cases} 0, & \textit{ako je n paran}, \\ -1, & \textit{ako je n neparan}. \end{cases}$$

   Budući da je niz (s_n) *parcijalnih suma divergentan, slijedi da je i red* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ *divergentan.*

Navedimo jedan jednostavni kriterij pomoću kojeg možemo utvrditi da neki red ne konvergira.

Teorem 1.2.3. *Nužan uvjet konvergencije reda* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dokaz. Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan i neka je s njegova suma, te (s_n) pripadni niz parcijalnih suma. Tada je $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ i, također, $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Kako je $a_n = s_n - s_{n-1}$, tada je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

□

Prethodni uvjet nije i dovoljan za konvergenciju reda, to jest, ako za neki red vrijedi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, to još uvijek ne znači da je on konvergentan. Sljedeći teorem upravo nam daje jedan takav primjer.

Teorem 1.2.4. *Harmonijski red* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *divergira.*

Dokaz. Promotrimo parcijalne sume s_{2^k}, $k \in \mathbb{N}$. Vrijedi

$$\begin{aligned} s_{2^k} &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &> 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Prema tome, $s_{2^k} > 1 + \frac{k}{2}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, pa harmonijski red divergira. □

Očito, harmonijski niz zadovoljava nužan uvjet konvergencije, tj. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Prisjetimo se nekoliko poznatih redova.

1. **Geometrijski red** je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ čiji članovi čine geometrijski niz (a_n), to jest, takav da postoji $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tako da je $a_{n+1} = a_n q$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

   Proučimo konvergenciju geometrijskog reda. Suma prvih n članova geometrijskog niza (a_n) iznosi

$$s_n = \begin{cases} a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, & \text{ako je } q \neq 1; \\ n a_1, & \text{ako je } q = 1. \end{cases}$$

Kako je $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ za $|q| < 1$, to je

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}. \tag{1.7}$$

Za $q > 1$ i za $q \le -1$ niz (q^n) je divergentan, pa je stoga i (s_n) divergentan. Za $q = 1$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} na_1$ što je jednako ∞ ili $-\infty$ (ovisno o a_n), pa je i u tom slučaju geometrijski red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan.

2. **Poopćeni harmonijski red** je red oblika $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, pri čemu je $p \in \mathbb{R}$. U slučaju $p = 1$ dobivamo harmonijski red.

   Pokazuje se da poopćeni harmonijski red konvergira kada je $p > 1$, a divergira za $p \le 1$.

U daljnjem tekstu navest ćemo nekoliko kriterija pomoću kojih možemo ispitati konvergenciju redova s pozitivnim članovima. Pritom, za red $\sum a_n$ kažemo da je **red s pozitivnim članovima** ako je $a_n \ge 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Teorem 1.2.5. ***(Kriterij uspoređivanja redova)*** *Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ redovi s pozitivnim članovima, te neka postoji realan broj $c > 0$ tako da je $a_n \le cb_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi:*

1. *Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, onda konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ te vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le c \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

2. *Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, onda divergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Teorem 1.2.6. *Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ redovi sa strogo pozitivnim članovima i neka postoji $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0$. Tada ili oba reda konvergiraju ili oba divergiraju.*

Teorem 1.2.7. ***(Leibnizov kriterij)*** *Neka je (a_n) niz pozitivnih realnih brojeva takvih da*

(a) *postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $a_{n+1} < a_n$ za sve $n \ge m$,*

(b) $\lim_n a_n = 0$.

Tada red $\sum(-1)^n a_n$ konvergira.

Teorem 1.2.8. ***(D'Alembertov kriterij)***. *Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red sa strogo pozitivnim članovima, te neka je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q. \tag{1.8}$$

1. *Ako je $q < 1$, red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentan.*

2. *Ako je $q > 1$, red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentan.*

Teorem 1.2.9. ***(Cauchyjev kriterij)*** *Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red sa strogo pozitivnim članovima, te neka je*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q. \tag{1.9}$$

1. *Ako je $q < 1$, red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentan.*
2. *Ako je $q > 1$, red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentan.*

Teorem 1.2.10. ***(Raabeov kriterij)*** *Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red sa strogo pozitivnim članovima, te neka je*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q. \tag{1.10}$$

1. *Ako je $q > 1$, red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentan.*
2. *Ako je $q < 1$, red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentan.*

Primjer 1.2.11. *Ispitajmo konvergenciju sljedećih redova uz pomoć prethodno navedenih kriterija.*

1. *Iz primjera 1.2.2 (1) znamo da je red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ konvergentan i da njegova suma iznosi $\frac{3}{4}$. Sada ćemo vidjeti da se konvergencija ovog reda može ispitati uspoređujući ga s poopćenim harmonijskim redom.*

   Opći član danog reda je $a_n = \frac{1}{n(n+2)}$. Za velike vrijednosti broja n, broj $n + 2$ se ponaša slično kao i broj n. Stoga za velike n-ove vrijedi

$$\frac{1}{n(n+2)} \approx \frac{1}{n \cdot n} = \frac{1}{n^2}.$$

   Dakle, konvergenciju danog reda mogli bismo utvrditi uspoređujući ga s poopćenim harmonijskim redom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ za koji znamo da konvergira. Opći član ovog reda je $b_n = \frac{1}{n^2}$. Uočimo da je

$$a_n = \frac{1}{n(n+2)} < \frac{1}{n^2} = b_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.11}$$

   iz čega, zbog konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, po teoremu o uspoređivanju redova, slijedi da je dani red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ konvergentan.

2. *Za red* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ *računamo*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot (n+1)^3}{n^3 \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^3 = \frac{1}{2} < 1.$$

Prema tome, red konvergira prema D'Alembertovom kriteriju. Do istog rezultata dolazimo primjenom Cauchyjevog kriterija. Zaista,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^3}{2} = \frac{1}{2} < 1, \tag{1.12}$$

pa red konvergira i prema Cauchyjevom kriteriju.

Prethodni kriteriji su se odnosili na redove s pozitivnim članovima. Zbog pozitivnosti njihovih članova, bitno je naglasiti da je niz parcijalnih suma redova s pozitivnim članovima rastući niz. Za njihovu konvergenciju dovoljno je pokazati da je taj niz omeđen. No, ako promatramo niz čiji svi članovi nisu pozitivni, situacija je složenija.

Pretpostavimo da dani red ima beskonačno mnogo pozitivnih i beskonačno mnogo negativnih članova. Uz svaki takav red povezujemo red čiji su članovi jednaki apsolutnim vrijednostima članova zadanog niza.

Dakle, zadanom redu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pridružen je red apsolutnih vrijednosti $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Želimo ispitati odnos konvergencije tih dvaju redova.

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira, tada kažemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **apsolutno** konvergira. Primjer takvog red je red

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \cdots$$

jer je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{2^n} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Teorem 1.2.12. *Ako red* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konvergira, tada red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira.*

Dokaz. Neka je s_k k-ta parcijalna suma reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prema nejednakosti trokuta, za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$-\sum_{n=1}^{k} |a_n| \le s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \le \sum_{n=1}^{k} |a_n|. \tag{1.13}$$

Kako $\left(\sum_{n=1}^{k} |a_n|\right)_k$ konvergira po pretpostavci, prema teoremu o sendviču slijedi da i $(s_k)_k$ konvergira. □

Obrat prethodnog teorema ne vrijedi. Na primjer, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergira, ali $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, ali red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergira, tada kažemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **uvjetno** konvergira.

Poglavlje 2

Nizovi funkcija

Osim nizova realnih brojeva koje smo definirali u prethodnom poglavlju, možemo promatrati i nizove funkcija. U ovom slučaju moći ćemo promatrati nekoliko vrsta konvergencije, a to su konvergencija po točkama i uniformna konvergencija.

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Označimo s $\mathbb{R}^S$ skup svih funkcija iz S u $\mathbb{R}$. **Niz funkcija** je svaka funkcija $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^S$ pri čemu je $f(n) = f_n : S \longrightarrow \mathbb{R}$. Funkcija f_n je n-ti član niza. Niz funkcija označavamo s (f_n) ili $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots$.

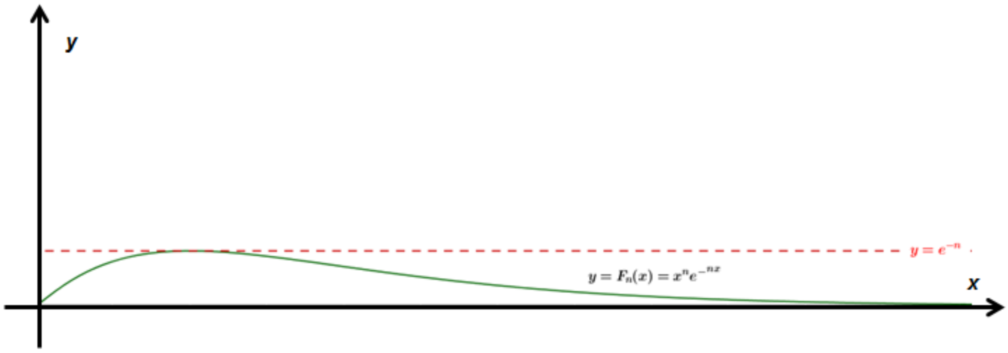
2.1 Konvergencija po točkama

Konvergencija po točkama (koja se često naziva i obična konvergencija) definira konvergenciju funkcija u smislu konvergencije funkcijskih vrijednosti u svakoj pojedinoj točki danog skupa.

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Ako je (f_n) niz funkcija na S i ako niz brojeva $(f_n(x))$ konvergira za svaki x iz nekog podskupa A od S, tada kažemo da niz funkcija (f_n) **konvergira po točkama** (ili **obično**) na A prema funkciji f definiranoj kao

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in A. \tag{2.1}$$

Primjer 2.1.1. *Na sljedećoj slici promotrimo grafove funkcija $f_n(x) = x^n e^{-nx}$, $x \geq 0$, $n \geq 1$.*



Standardnom provjerom se pokaže da je $|f_n(x)| \leq e^{-n}$ *za svaki* $x \geq 0$ *odakle je* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ *za svaki* $x \geq 0$. *U tom je slučaju funkcija kojoj niz funkcija konvergira po točkama jednaka nuli na* $[0, \infty\rangle$.

Primjer 2.1.2. *Ispitajmo konvergenciju sljedećih nekoliko nizova funkcija:*

1. *Funkcije* $f_n(x) = (1 - \frac{nx}{n+1})^{\frac{n}{2}}$, $n \geq 1$ *definiraju niz na* $D = (-\infty, 1]$. *Lako se vidi da je*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \infty, & \textit{ako je } x < 0, \\ 1, & \textit{ako je } x = 0, \\ 0, & \textit{ako je } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

   Stoga, (f_n) *konvergira po točkama na* $S = [0, 1]$ *prema funkciji definiranoj s*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{ako je } x = 0, \\ 0, & \textit{ako je } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

2. *Neka je* (f_n) *niz funkcija na* $\mathbb{R}$ *definiranih s* $f_n(x) = nx$. *Tada je* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} nx = \infty$ *za svaki* $x > 0$, *pa ovaj niz ne konvergira.*

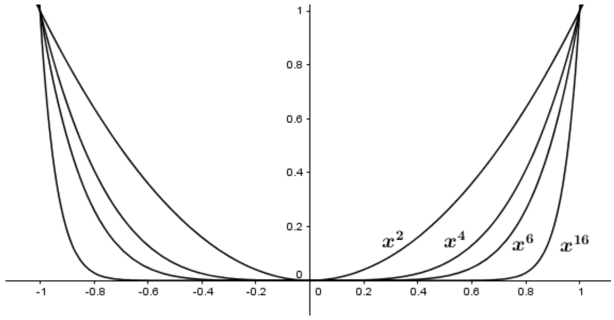
3. *Neka je* (f_n) *niz funkcija na* $\mathbb{R}$ *definiranih s* $f_n(x) = \frac{x}{n}$. *Ovaj niz konvergira po točkama prema nulfunkciji na* $\mathbb{R}$ *jer je* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$.

Iz sljedećeg primjera zaključujemo da konvergencija po točkama ne čuva neprekidnost.

Primjer 2.1.3. *Niz funkcija definiranih s* $f_n(x) = x^{2n}$ *konvergira po točkama funkciji* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *na* $[-1, 1]$, *gdje je*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{ako je } x = -1 \textit{ ili } x = 1, \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$

Pogledajmo sljedeću sliku.



Kako bismo vidjeli da je to doista tako, uzmimo najprije $x \in (-1, 1)$. *Tada je* $0 \le x^2 < 1$. *Budući da je* $\left|x^{2n} - 0\right| = \left(x^2\right)^n \to 0$ *kada* $n \to \infty$, *stoga je* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. *Kada je* $x = 1$ *ili* $x = -1$, *tada je* $x^{2n} = 1$ *za sve* n *i* $\lim f_n(x) = 1$. *Očito su sve funkcije* f_n *neprekidne, dok* f *ima prekide u* 1 *i* -1.

U sljedećem primjeru pokažimo da konvergencija po točkama ne čuva omeđenost.

Primjer 2.1.4. *Neka je* $f_n : (0, 1) \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana s* $f_n(x) = \frac{n}{nx+1}$. *Tada za* $x \neq 0$ *vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x + \frac{1}{n}} = \frac{1}{x}.$$

Dakle, niz (f_n) *konvergira po točkama prema funkciji* $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ *definiranoj s* $f(x) = \frac{1}{x}$. *Budući da je* $|f_n(x)| < n$ *za svaki* $x \in (0, 1)$, *to je svaka funkcija* f_n *omeđena na* $(0, 1)$, *no funkcija* f *nije.*

Sljedeća napomena daje nam alternativnu definiciju konvergencije niza funkcija po točkama, a slijedi direktno iz definicije konvergencije nizova realnih brojeva.

Napomena 2.1.5. *Neka su* $f_n : S \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *i* $f : S \to \mathbb{R}$ *funkcije. Tada niz* (f_n) *konvergira po točkama prema funkciji* f *ako i samo ako za svaki* $x \in S$ *i svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $N \in \mathbb{N}$ *tako da je*

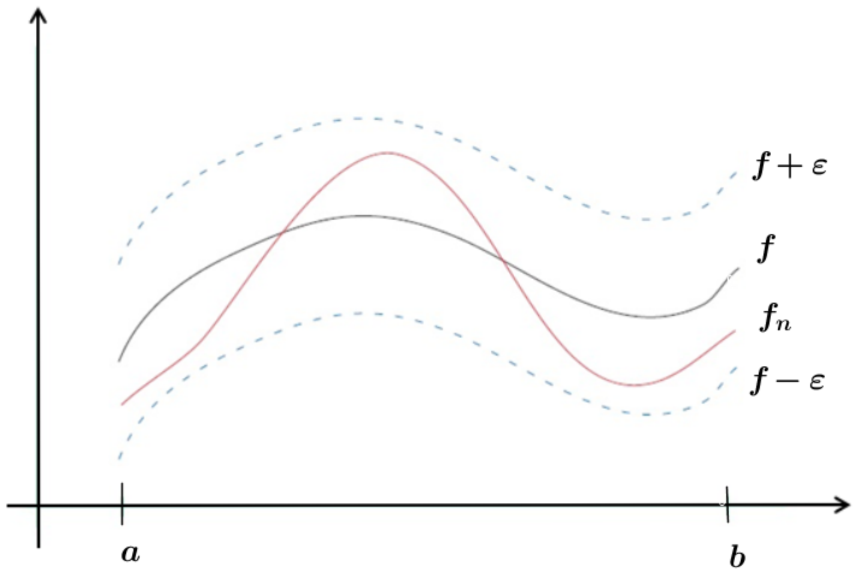
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \ge N. \tag{2.2}$$

2.2 Uniformna konvergencija

Definicija 2.2.1. *Neka su* $f_n : S \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *i* $f : S \to \mathbb{R}$ *funkcije. Kažemo da niz funkcija* (f_n) ***konvergira uniformno*** *prema funkciji* f *ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $N \in \mathbb{N}$ *tako da je*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in S, \quad \forall n \ge N. \tag{2.3}$$

Sljedeća slika geometrijski interpretira izraz $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ na segmentu $[a, b]$.



Razlika između konvergencije po točkama i uniformne konvergencije je u tome što kod konvergencije po točkama konvergencija funkcije f_n prema f može varirati po brzini u svakoj od točaka skupa S. Kod uniformne konvergencije je brzina približno jednaka u svim točkama skupa S. Navedimo sljedeću očitu tvrdnju.

Propozicija 2.2.2. *Ako niz funkcija* (f_n) *konvergira uniformno prema funkciji* f*, onda konvergira i po točkama prema* f*. Obrat ne vrijedi.*

Primjer 2.2.3. *Pogledajmo funkcije zadane s* $f_n(x) = x^{2n}, x \in [-1, 1]$ *. U primjeru 2.1.3. vidjeli smo da niz funkcija* (f_n) *konvergira po točkama na* $[-1, 1]$*. Pokažimo da ovaj niz ne konvergira uniformno.*

Pretpostavimo da niz (f_n) *konvergira uniformno. Kako* (f_n) *konvergira po točkama prema nulfunkciji, to je i* f*, uniformni limes od* f_n*, jednak nulfunkciji. Tada za* $\varepsilon = \frac{1}{3}$ *postoji* $N \in \mathbb{N}$ *takav da je* $x^{2n} = \left|x^{2n} - 0\right| < \frac{1}{3}$ *za sve* $x \in (-1, 1)$ *i sve* $n > N$*. Posebno, za* $x_n = 1 - \frac{1}{2n}$*,* $n > N$ *vrijedi*

$$\left|\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\right|^{2n} < \frac{1}{3}, \quad \forall n > N.$$

Kako je $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e^{-1}$*, slijedi* $\frac{1}{e} < \frac{1}{3}$*, što je kontradikcija.*

Za omeđene funkcije koristiti ćemo malo apstraktniji način kako bismo definirali uniformnu konvergenciju. Za takve funkcije uvodimo pojam uniformne norme.

Neka je $f : S \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija. **Uniformna norma od** f se definira kao

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in S\}.$$

Lema 2.2.4. *Ako su $g, h : S \to \mathbb{R}$ tada vrijedi*

$$\|g + h\| \leq \|g\| + \|h\| \quad i \quad \|gh\| \leq \|g\| \, \|h\| \, . \tag{2.4}$$

Dokaz. Po definiciji uniformne norme slijedi

$$\begin{aligned} \|g + h\| &= \sup \{|g(x) + h(x)| : x \in S\} \\ &\leq \sup \{|g(x)| + |h(x)| : x \in S\} \\ &\leq \sup \{|g(x)| : x \in S\} + \sup \{|h(x)| : x \in S\} \\ &= \|g\| + \|h\| \, . \end{aligned}$$

Slično,

$$\begin{aligned} \|gh\| &= \sup \{|g(x)h(x)| : x \in S\} \\ &\leq \sup \{|g(x)| \, |h(x)| : x \in S\} \\ &\leq \sup \{|g(x)| : x \in S\} \cdot \sup \{|h(x)| : x \in S\} \\ &= \|g\| \cdot \|h\| \, . \end{aligned}$$

□

Definiciju 2.2.1 sada možemo iskazati i u terminima uniformne norme: niz omeđenih funkcija $f_n : S \to \mathbb{R}$ **konvergira uniformno** prema funkciji $f : S \to \mathbb{R}$ ako je

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0. \tag{2.5}$$

Drugim riječima, (f_n) konvergira uniformno prema f na skupu S ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji broj $N \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\|f_n - f\| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N. \tag{2.6}$$

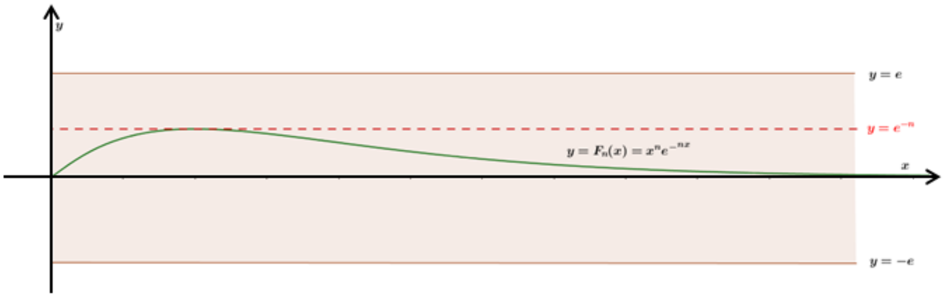
Primjer 2.2.5. *Neka je $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definirana s $f_n(x) = \frac{nx + \sin nx^2}{n}$. Tvrdimo da (f_n) konvergira uniformno prema $f(x) = x$. Zaista,*

$$\begin{aligned} \|f_n - f\| &= \sup \{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0, 1]\} \\ &= \sup \left\{ \left| \frac{nx + \sin nx^2}{n} - x \right| : x \in [0, 1] \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \frac{\sin nx^2}{n} \right| : x \in [0, 1] \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \frac{1}{n} : x \in [0, 1] \right\} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Budući da je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$*, slijedi* $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$.

Primjer 2.2.6. *Niz funkcija definiranih s* $f_n(x) = x^n e^{-nx}$*,* $n \geq 1$ *konvergira uniformno prema* $f = 0$ *na* $[0, \infty\rangle$.

Kao što smo vidjeli u primjeru 2.1.1 imamo $\|f_n - f\| = \|f_n\| = e^{-n}$*, pa je* $\|f_n - f\| < \varepsilon$ *ako je* $n > -\log\varepsilon$*. Za takve vrijednosti n, graf od* $y = f_n(x), 0 \leq x < \infty$*, leži u pruzi* $-\varepsilon \leq y \leq \varepsilon$*,* $x \geq 0$ *što prikazuje i sljedeća slika.*



Sljedeća definicija i teorem omogućuju nam da ispitamo uniformnu konvergenciju bez da određujemo limes funkcije, analogno kao što smo imali kod Cauchyjevog kriterija konvergencije nizova realnih brojeva.

Definicija 2.2.7. *Niz funkcija* (f_n)*,* $f_n : S \to \mathbb{R}$*, je* ***uniformno Cauchyjev*** *na* S *ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $N \in \mathbb{N}$ *tako da je*

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in S, \quad \forall m, n > N. \tag{2.7}$$

Teorem 2.2.8. *Niz funkcija* (f_n)*,* $f_n : S \to \mathbb{R}$*, konvergira uniformno na* S *ako i samo ako je taj niz uniformno Cauchyjev na* S.

Dokaz. Pretpostavimo da (f_n) konvergira uniformno prema f na S. Za $\varepsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ tako da je

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in S, \quad \forall n > N.$$

Ako je $m, n > N$ tada za svaki $x \in S$ vrijedi

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \tag{2.8}$$

iz čega slijedi da je (f_n) uniformno Cauchyjev.

Obrnuto, pretpostavimo da je (f_n) uniformno Cauchyjev niz. Tada je niz realnih brojeva $(f_n(x))$ Cauchyjev za svaki $x \in \mathbb{R}$, pa je zato i konvergentan.

Definiramo $f : S \to \mathbb{R}$ s $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Tada (f_n) konvergira po točkama prema f. Kako bismo dokazali da (f_n) konvergira uniformno prema f, uzmimo $\varepsilon > 0$. Kako je (f_n) uniformno Cauchyjev možemo uzeti $N \in \mathbb{N}$ tako da je

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in S, \quad \forall m, n > N.$$

Neka je $n > N$. Tada za svaki $m > N$ i sve $x \in S$ vrijedi

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + |f_m(x) - f(x)|.$$

Budući da niz $(f_m(x))$ konvergira prema $f(x)$, za svaki x postoji neki $m_x > N$ takav da je

$$\left|f_{m_x}(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sada za sve $n > N$ vrijedi

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \left|f_{m_x}(x) - f(x)\right| < \varepsilon. \tag{2.9}$$

Zbog proizvoljnosti od $x \in S$ slijedi da (f_n) konvergira uniformno prema f. □

Sada ćemo pokazati da uniformna konvergencija niza funkcija, za razliku od konvergencije po točkama, čuva neprekidnost i omeđenost. Također, vidjet ćemo što vrijedi za svojstva integrabilnosti i derivabilnosti.

Teorem 2.2.9. *Pretpostavimo da je $f_n : S \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, niz omeđenih funkcija na S takvih da niz (f_n) konvergira uniformno prema funkciji f na S. Tada je funkcija $f : S \to \mathbb{R}$ omeđena na S.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon = 1$. Budući da (f_n) uniformno konvergira k f na S, postoji $N \in \mathbb{N}$ tako da je

$$|f_n(x) - f(x)| < 1, \quad \forall x \in S, \quad \forall n > N.$$

Uzmimo neki $n > N$. Tada, budući da je f_n omeđena, postoji konstanta $M_n \geq 0$ tako da je $|f_n(x)| \leq M_n, \forall x \in S$. Iz toga slijedi

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| < 1 + M_n, \quad \forall x \in S, \tag{2.10}$$

što znači da je i f omeđena na S. □

Prethodni rezultat možemo koristiti i ovako: ako niz omeđenih funkcija konvergira po točkama k neomeđenoj funkciji, tada taj niz ne konvergira uniformno.

Primjer 2.2.10. *Niz funkcija $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ iz primjera 2.1.3 definiran s $f_n(x) = \frac{n}{nx+1}$ ne konvergira uniformno na $(0,1)$. Svaka funkcija f_n je omeđena na $(0,1)$, ali funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$, kojoj niz funkcija konvergira po točkama, nije omeđena.*

No, niz (f_n) konvergira uniformno prema f na svakom intervalu $[a,1)$ gdje je $0 < a < 1$. Zaista, za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{n}{nx+1} - \frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x(nx+1)} < \frac{1}{nx^2} \leq \frac{1}{na^2}.$$

Sada, za proizvoljan $\varepsilon > 0$ izaberemo $N = \frac{1}{a^2\varepsilon}$ i vrijedi $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ za svaki $x \in [a,1)$ ako je $n > N$, što dokazuje da niz (f_n) konvergira uniformno prema f na $[a,1)$.

Očuvanje neprekidnosti jedno je od bitnih svojstava uniformne konvergencije, o čemu govori sljedeći teorem.

Teorem 2.2.11. *Ako niz neprekidnih funkcija $f_n : S \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, konvergira uniformno na $S \subset \mathbb{R}$ prema $f : S \to \mathbb{R}$, tada je i f neprekidna funkcija na S.*

Dokaz. Uzmimo $c \in S$ i $\varepsilon > 0$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|f(x) - f(c)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f(c)|.$$

Iz uniformne konvergencije od (f_n) slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $\left|f_{n_0}(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ za sve $x \in S$ i tada imamo

$$|f(x) - f(c)| < \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(c)\right| + \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{2.11}$$

Budući da je f_{n_0} neprekidna u c, postoji $\delta > 0$ tako da je $\left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(c)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ za sve $x \in S$ za koje je $|x - c| < \delta$, što povlači da je $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ ako $|x - c| < \delta$ i $x \in S$.

Time smo dokazali da je f neprekidna u c, a zbog proizvoljnosti od c slijedi da je f neprekidna na S. □

Teorem 2.2.12. *Neka su dane funkcije $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da su sve funkcije f_n integrabilne na $[a,b]$, te da niz funkcija (f_n) konvergira uniformno prema funkciji f koja je integrabilna na intervalu $[a,b]$. Tada vrijedi*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx. \tag{2.12}$$

Dokaz. Kako je

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \\ &\leq (b-a)\,\|f_n - f\|\end{aligned}$$

i $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$, slijedi tvrdnja teorema. □

Uniformna konvergencija derivabilnih funkcija, općenito ne implicira ništa o konvergenciji njihovih derivacija ili derivabilnosti njihovih limesa. To je upravo zbog toga što vrijednosti dviju funkcija mogu biti blizu jedna drugoj, dok su vrijednosti njihovih derivacija udaljene. Stoga bismo trebali postaviti jake uvjete na nizove funkcija i njihovih derivacija kako bismo dokazali da uniformna konvergencija od f_n prema f povlači uniformnu konvergenciju od f_n' prema f'.

Sljedeći primjer pokazuje da limes derivacija ne mora biti jednak derivaciji limesa čak i ako niz derivabilnih funkcija konvergira uniformno i njihove derivacije konveriraju po točkama.

Primjer 2.2.13. *Promotrimo niz funkcija (f_n), $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiranih s*

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}. \tag{2.13}$$

Tada niz (f_n) konvergira uniformno prema 0 na $\mathbb{R}$. Kako bismo to pokazali napišimo

$$|f_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\sqrt{n}\,|x|}{1+nx^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{t}{1+t^2}\right), \quad \textit{gdje je} \quad t = \sqrt{n}\,|x|\,.$$

Iz $(1-t)^2 \geq 0$ slijedi $2t \leq 1 + t^2$, odakle je

$$\frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Koristeći tu nejednakost dobivamo da je

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.14}$$

Sada, za proizvoljni $\varepsilon > 0$, izaberemo $N = 1/(4\varepsilon^2)$. Tada je $|f_n(x)| < \varepsilon$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ ako je $n > N$, što dokazuje da (f_n) konvergira uniformno prema 0 na $\mathbb{R}$. Svaka funkcija f_n je derivabilna i vrijedi

$$f_n'(x) = \frac{1 - nx^2}{(1+nx^2)^2}. \tag{2.15}$$

Iz toga slijedi da niz funkcija (f_n') konvergira po točkama prema g kada $n \to \infty$, gdje je $g(x) = 0$ ako je $x \neq 0$ i $g(x) = 1$ ako je $x = 0$. Konvergencija nije uniformna jer g ima prekid u 0.

Međutim, korisne rezultate možemo dobiti ako postrožimo pretpostavke i zahtijevamo da derivacije konvergiraju uniformno, a ne samo po točkama.

Teorem 2.2.14. *Pretpostavimo da je (f_n) niz derivabilnih funkcija $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ koji konvergira po točkama prema funkciji f te neka niz (f_n') konvergira uniformno prema funkciji g za neke $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$. Tada je funkcija f derivabilna na (a, b) i $f' = g$.*

Dokaz. Neka je $c \in (a,b)$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Kako bismo dokazali da je $f'(c) = g(c)$, moramo procijeniti razliku kvocijenta od f u točkama od razlike kvocijenta od f_n:

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - g(c)\right| \leq \left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - \frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c}\right| + \left|\frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c} - f_n'(c)\right| + \left|f_n'(c) - g(c)\right|$$

gdje je $x \in (a,b)$ i $x \neq c$. Želimo da svaki pribrojnik s desne strane nejednakosti bude manji od $\varepsilon/3$. To je jednostavno za drugi pribrojnik (jer je f_n derivabilna u c) i za treći pribrojnik (jer $f_n'(c) \to g(c)$ kada $n \to \infty$).

Kako bismo procijenili prvi pribrojnik, koristit ćemo teorem srednje vrijednosti. Kako je $f_m - f_n$ derivabilna, teorem srednje vrijednosti povlači da postoji η između c i x tako da je

$$\frac{f_m(x)-f_m(c)}{x-c} - \frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c} = \frac{(f_m-f_n)(x)-(f_m-f_n)(c)}{x-c} = f_m'(\eta) - f_n'(\eta),$$

odakle slijedi

$$\left|\frac{f_m(x)-f_m(c)}{x-c} - \frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c}\right| \leq \left\|f_m' - f_n'\right\|.$$

Kako (f_n') konvergira uniformno, konvergencija je uniformno Cauchyjeva. Stoga, postoji $N_1 \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\left\|f_m' - f_n'\right\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall m,n > N_1,$$

što povlači da je

$$\left|\frac{f_m(x)-f_m(c)}{x-c} - \frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c}\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall m,n > N_1 \tag{2.16}$$

Ako pustimo limes kada $m \to \infty$ te ako iskoristimo činjenicu da (f_m) konvergira po točkama prema f, dobivamo da je

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - \frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c}\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n > N_1. \tag{2.17}$$

Nadalje, kako (f_n') konvergira prema g, postoji $N_2 \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\left|f_n'(c) - g(c)\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n > N_2. \tag{2.18}$$

Uzmimo neki $n > \max\{N_1, N_2\}$. Derivabilnost od f_n povlači da postoji $\delta > 0$ tako da je

$$\left|\frac{f_n(x)-f_n(x)}{x-c} - f_n'(c)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{ako je} \quad 0 < |x-c| < \delta. \tag{2.19}$$

Iz nejednakosti (2.17), (2.18) i (2.19) slijedi

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - g(c)\right| < \varepsilon \quad \text{ako je} \quad 0 < |x-c| < \delta,$$

što dokazuje da je f derivabilna u c i da je $f'(c) = g(c)$.

□

Poglavlje 3

Redovi funkcija

3.1 Definicija i osnovni pojmovi

Neka je $(f_n)_n$ niz funkcija definiranih na S. **Red funkcija** $\sum f_n$ je uređeni par nizova funkcija $((f_n), (S_n))$, gdje je $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$, $x \in S$. Funkcije S_n, $n \in \mathbb{N}$, nazivamo parcijalnim sumama. Red funkcija uobičajeno označavamo s

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_k(x) + \cdots . \tag{3.1}$$

Za svaki pojedini $x_0 \in S$ dobivamo pripadni red brojeva $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$.

Primjer 3.1.1. *Neka je zadan niz funkcija $f : \langle 0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ formulom $f_n(x) = \ln^n x$, $n \in \mathbb{N}$. Ovim nizom definiran je red funkcija*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x, \quad x \in \langle 0, \infty\rangle . \tag{3.2}$$

Za konkretni x dobivamo red realnih brojeva. Na primjer, za $x = 2$ dobivamo red

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n 2. \tag{3.3}$$

U prvom poglavlju definirali smo sumu reda realnih brojeva kao limes niza njegovih parcijalnih suma. Istu definiciju možemo primijeniti i na redove funkcija, iz čega slijedi sljedeća definicija.

Definicija 3.1.2. *Neka je (f_n) niz funkcija $f_n : S \to \mathbb{R}$ i neka je (S_n) niz parcijalnih suma $S_n : S \to \mathbb{R}$. Tada red funkcija $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$*

(a) ***konvergira po točkama*** *k funkciji* $S : S \to \mathbb{R}$, *ako niz* (S_n) *konvergira po točkama k* S *na* S,

(b) ***konvergira uniformno*** *k funkciji* S *na* S, *ako niz* (S_n) *konvergira uniformno k* S *na* S.

Primjer 3.1.3. *Geometrijski red*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \tag{3.4}$$

ima parcijalnu sumu

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad x \neq 1. \tag{3.5}$$

Ako je $|x| < 1$ *tada* $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{1-x}$. *Ako je* $|x| \geq 1$, *tada* $(S_n(x))_n$ *divergira. Odavde slijedi da* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ *konvergira po točkama na* $(-1, 1)$.

Kako funkcija $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ *nije omeđena na* $(-1, 1)$, *iz teorema 2.4.1 slijedi da konvergencija nije uniformna. No, red konvergira uniformno na* $[-r, r]$ *za svaki* $0 \leq r < 1$. *Kako bismo to pokazali uzmimo* $|x| \leq r$. *Tada je*

$$\left| S_n(x) - \frac{1}{1-x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \leq \frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

Kako je $\lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}}{1-r} = 0$, *za proizvoljni* $\varepsilon > 0$ *postoji* $N \in \mathbb{N}$, *ovisan samo o* ε *i* r, *tako da* $0 \leq \frac{r^{n+1}}{1-r} < \varepsilon$ *za svaki* $n > N$. *Iz toga slijedi da je*

$$\left| \sum_{k=0}^{n} x^k - \frac{1}{1-x} \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in [-r, r], \quad \forall n > N,$$

što dokazuje da red konvergira uniformno na $[-r, r]$.

3.2 Testovi uniformne konvergencije redova funkcija

Cauchyjev test uniformne konvergencije

Teorem 3.2.1. *Neka je* (f_n), $f_n : S \to \mathbb{R}$ *niz funkcija. Red* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konvergira uniformno na* S *ako i samo ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $N \in \mathbb{N}$ *tako da je*

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in S, \quad \forall n > m > N. \tag{3.6}$$

Dokaz. Neka je

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x).$$

Prema Cauchyjevom kriteriju uniformne konvergencije niz (S_n), a onda i red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, konvergira uniformno ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ tako da je

$$|S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in S, \quad \forall n, m > N.$$

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $n > m$. Tada je

$$S_n(x) - S_m(x) = f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \cdots + f_n(x) = \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x), \tag{3.7}$$

iz čega slijedi tvrdnja teorema. □

Teorem 3.2.1 dovodi nas odmah do sljedećeg vrlo važnog testa za uniformnu konvergenciju redova funkcija.

Weierstrassov test uniformne konvergencije

Teorem 3.2.2. *Neka je (f_n), $f_n : S \to \mathbb{R}$, niz funkcija takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji konstanta $M_n \geq 0$ tako da je $|f_n(x)| \leq M_n$ za svaki $x \in S$, pri čemu je $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. Tada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira uniformno na S.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Promatrajući red brojeva $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ kao red konstantnih funkcija, prema prethodnom teoremu postoji $N \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi

$$\sum_{k=m+1}^{n} M_k < \varepsilon, \quad \forall n > m > N.$$

Tada za sve $n > m > N$, vrijedi

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} M_k < \varepsilon, \quad \forall x \in S. \tag{3.8}$$

Prema teoremu 3.2.1. slijedi da $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira uniformno na S. □

Primjer 3.2.3. *U primjeru 3.1.3 proučavali smo geometrijski red $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Ako je $|x| \leq r$ gdje je $0 \leq r < 1$, tada je*

$$|x^n| \leq r^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} r^n < 1. \tag{3.9}$$

Po Weierstrassovom kriteriju, gdje je $M_n = r^n$, slijedi da geometrijski red konvergira uniformno na $[-r, r]$.

Primjer 3.2.4. *Neka su funkcije $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirane kao $f_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}$. Označimo $M_n = \frac{1}{n^2}$. Tada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty \quad \text{i} \quad |f_n(x)| < M_n, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Prema Weierstrassovom kriteriju red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ konvergira uniformno.

Kažemo da red funkcija $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira apsolutno na S ako $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ konvergira po točkama na S, a ako $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ konvergira uniformno tada kažemo da red funkcija $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira apsolutno uniformno. Pritom je $|f|(x) = |f(x)|$, $x \in S$.

Sljedeći teorem se odnosi na redove koji konvergiraju unifomno, ali možda ne i apsolutno uniformno.

Dirichletov test uniformne konvergencije

Teorem 3.2.5. *Neka su zadane funkcije $f_n, g_n : S \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Ako niz (f_n) konvergira uniformno prema 0 na S, te $\sum_{n=1}^{\infty}(f_{n+1} - f_n)$ konvergira apsolutno uniformno na S i ako postoji $M > 0$ tako da je*

$$\|g_1 + g_2 + \cdots + g_n\| \leq M, \quad n \geq 1, \tag{3.10}$$

tada red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ konvergira uniformno na S.

Dokaz. Neka je $G_n = g_1 + g_2 + \cdots + g_n$ i neka je parcijalna suma od $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ dana s

$$H_n = f_1 g_1 + f_2 g_2 + \cdots + f_n g_n. \tag{3.11}$$

Supstitucijom $g_1 = G_1$ i $g_n = G_n - G_{n-1}$ u (3.11) dobivamo

$$H_n = f_1 G_1 + f_2(G_2 - G_1) + \cdots + f_n(G_n - G_{n-1}),$$

što možemo zapisati i kao

$$H_n = (f_1 - f_2)G_1 + (f_2 - f_3)G_2 + \cdots + (f_{n-1} - f_n)G_{n-1} + f_n G_n.$$

Označimo li,

$$J_{n-1} = (f_1 - f_2)G_1 + (f_2 - f_3)G_2 + \cdots + (f_{n-1} - f_n)G_{n-1}. \tag{3.12}$$

imamo

$$H_n = J_{n-1} + f_n G_n, \quad \forall n \geq 1. \tag{3.13}$$

Tada je (J_n) niz parcijalnih suma reda

$$\sum_{j=1}^{\infty}(f_j - f_{j+1})G_j. \tag{3.14}$$

Iz (3.10) i definicije od G_j imamo

$$\left|\sum_{j=n}^{m}\left[f_j(x) - f_{j+1}(x)\right]G_j(x)\right| \leq M\sum_{j=n}^{m}\left|f_j(x) - f_{j+1}(x)\right|, \quad \forall x \in S,$$

pa je

$$\left\|\sum_{j=n}^{m}(f_j - f_{j+1})G_j\right\| \leq M\left\|\sum_{j=n}^{m}\left|f_j - f_{j+1}\right|\right\|.$$

Pretpostavimo da je $\varepsilon > 0$. Kako $\sum_{j=1}^{\infty}(f_j - f_{j+1})$ konvergira apsolutno uniformno na S, tada postoji N tako da je desna strana zadnje nejednakosti manja od ε ako je $m \geq n \geq N$. Tada isto vrijedi i za lijevu stranu, pa prema Cauchyjevom kriteriju uniformne konvergencije slijedi da red u (3.14) konvergira uniformno na S.

Sada trebamo još pokazati da (J_n), definiran u (3.12), konvergira prema J na S.Vraćajući se na (3.13) vidimo da je $H_n - J = J_{n-1} - J + f_nG_n$. Sada iz leme 2.2.5 i (3.10) slijedi da je $\|H_n - J\| \leq \|J_{n-1} - J\| + \|f_n\|\,\|G_n\| \leq \|J_{n-1} - J\| + M\,\|f_n\|$.

Kako nizovi $(J_{n-1} - J)$ i (f_n) konvergiraju uniformno prema 0 na S, slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty}\|H_n - J\| = 0.$$

Dakle, (H_n) konvergira uniformno na S. □

Korolar 3.2.6. *Neka su zadane funkcije $f_n, g_n : S \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Ako je $f_{n+1}(x) \leq f_n(x), x \in S, n \geq 1$, te ako niz (f_n) konvergira uniformno prema 0 na S i vrijedi $\|g_1 + g_2 + \cdots + g_n\| \leq M, n \geq 1$, za neku konstantu M, tada red $\sum_{n=1}^{\infty} f_ng_n$ konvergira uniformno na S .*

Dokaz. Kako bismo primijenili prethodni teorem, treba provjeriti da $\sum_{n=1}^{\infty}(f_{n+1} - f_n)$ konvergira apsolutno uniformno. Zbog $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$, $x \in S$, $n \in \mathbb{N}$ je $|f_{n+1} - f_n| = f_n - f_{n+1}$ i

$$\sum_{n=1}^{m}|f_{n+1} - f_n| = \sum_{n=1}^{m}(f_n - f_{n+1}) = f_1 - f_{m+1}, \quad \text{za sve} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Kako niz (f_n) uniformno konvergira k 0, to $\sum_{n=1}^{\infty}(f_{n+1} - f_n)$ apsolutno uniformno konvergira k f_1. □

Primjer 3.2.7. *Red*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2} \tag{3.15}$$

zadovoljava pretpostavke prethodnog korolara na $(-\infty, \infty)$*, gdje je*

$$f_n(x) = \frac{1}{n+x^2}, \quad g_n = (-1)^n.$$

Dakle, red konvergira uniformno na $(-\infty, \infty)$*. Taj rezultat ne bismo mogli dobiti pomoću Weierstrassovog kriterija, budući da je* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2} = \infty$ *za svaki* x*.*

3.3 Svojstva redova funkcija

Sljedeće rezultate dobivamo primjenom ranije proučenih svojstava niza funkcija (neprekidnost, derivabilnost i integrabilnost) na niz parcijalnih suma reda funkcija.

Teorem 3.3.1. ***(Neprekidnost)*** *Ako su sve funkcije* f_n *,* $n \in \mathbb{N}$*, neprekidne na intervalu* $[a, b]$ *i ako red* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konvergira uniformno prema funkciji* f *na* $[a, b]$*, onda je* f *neprekidna funkcija.*

Dokaz. Prema pretpostavci, sve funkcije f_n su neprekidne na intervalu $[a, b]$, pa su prema tome i parcijalne sume također neprekidne funkcije kao konačni zbrojevi neprekidnih funkcija. Nadalje, iz pretpostavke o uniformnoj konvergenciji slijedi da ostaci reda mogu biti po volji mali (neovisno o x), ako uzmemo dovoljno veliku parcijalnu sumu. Dakle, neka je zadan $\varepsilon > 0$. Imamo

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots = S_n(x) + R_n(x), \tag{3.16}$$

$$f(x+h) - f(x) = S_n(x+h) + R_n(x+h) - S_n(x) - R_n(x).$$

Kako su S_n neprekidne funkcije na segmentu $[a, b]$, one su i uniformno neprekidne. Zato za zadani ε postoji $\delta(\varepsilon) > 0$ takav da je

$$|S_n(x+h) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{za} \quad |h| < \delta. \tag{3.17}$$

Zbog uniformne konvergencije slijedi $|R_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3}$ za $|h| < \delta$ i posebno $|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Prema tome, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 tako da za svaki $n > n_0$ i sve $x, x+h \in [a, b]$ vrijedi:

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |S_n(x+h) - S_n(x)| + |R_n(x+h)| + |R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

to jest

$$|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{za} \quad |h| < \delta, \tag{3.18}$$

što upravo povlači neprekidnost funkcije f. □

Teorem 3.3.2. ***(Derivabilnost)*** *Pretpostavimo da su sve funkcije $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabilne tako da red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira po točkama prema funkciji f i red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konvergira uniformno prema funkciji g za neke $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$. Tada je funkcija f derivabilna na (a,b) i vrijedi*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x). \tag{3.19}$$

Dokaz. Definiramo $s_k = \sum_{n=1}^{k} f_n$, $k \in \mathbb{N}$. Tada je (s_k) niz derivabilnih funkcija na (a,b) koji po točkama konvergira prema funkciji f i (s_k') konvergira uniformno prema funkciji g. Prema teoremu 2.2.15 je funkcija f derivabilna na (a,b) i vrijedi $f' = g$, odnosno

$$f'(x) = g(x) = \lim_{k\to\infty} s_k'(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \quad x \in (a,b)\,.$$

□

U situaciji kao u prethodnom teoremu kažemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ možemo derivirati član po član na (a,b).

Primjer 3.3.3. *Red*

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{3.20}$$

konvergira uniformno na svakom intervalu $[-r,r]$ prema Weierstrassovom kriteriju, jer je $\frac{|x|^n}{n!} \le \frac{r^n}{n!}$, $|x| \le r$ i $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!} < \infty$. Deriviranjem desne strane od (3.20) član po član dobivamo red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \tag{3.21}$$

koji je isti kao i red (3.20). Dakle, red (3.21) je isto uniformno konvergentan na $[-r,r]$ za svaki r, pa se zaista može derivirati član po član i vrijedi $E'(x) = E(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Rezultat nije iznenađujući jer red (3.20) definira eksponencijalnu funkciju e^x.

Teorem 3.3.4. ***(Integrabilnost)*** *Neka su dane funkcije $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da su sve funkcije f_n integrabilne na $[a,b]$ i da red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira uniformno na $[a,b]$ prema funkciji f koja je integrabilna na $[a,b]$. Tada vrijedi*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx. \tag{3.22}$$

Dokaz. Definiramo $s_k = \sum_{n=1}^{k} f_n$, $k \in \mathbb{N}$. Tada su sve funkcije s_k integrabilne na $[a, b]$ i niz funkcija (s_k) konvergira uniformno prema funkciji f. Prema teoremu 2.2.13 slijedi

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{k\to\infty} \int_a^b s_k(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b \sum_{n=1}^{k} f_n(x)dx \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_a^b f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx.\end{aligned}$$

□

Kažemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ možemo integrirati član po član na cijelom $[a, b]$.

Primjer 3.3.5. *Znamo da je* $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, -1 < x < 1$. *Red konvergira uniformno i funkcija kojoj konvergira je integrabilna na svakom zatvorenom intervalu* $[a, b] \subset (-1, 1)$. *Dakle,*

$$\int_a^b \frac{dx}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b x^n dx, \tag{3.23}$$

pa je

$$\ln(1-a) - \ln(1-b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

Stavimo li $a = 0$ *i* $b = x$ *dobivamo*

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1. \tag{3.24}$$

Poglavlje 4

Redovi potencija

4.1 Definicija i radijus konvergencije

Redovi potencija su specijalni oblici redova funkcija. Mogli bismo reći da su to relativno jednostavni redovi jer su funkcije koje se pojavljuju u tim redovima oblika

$$f_n(x) = a_n(x-c)^n, \quad a_n \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Definicija 4.1.1. *Neka je $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ niz realnih brojeva i neka je $c \in \mathbb{R}$. Red potencija oko c s koeficijentima a_n je red oblika*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n. \tag{4.2}$$

Pogledajmo primjer reda potencija oko 0:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n!)x^n = 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + 24x^4 + \cdots$$

i jedan primjer reda potencija oko 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots .$$

Sljedeći teorem daje nam odgovor na pitanje o konvergenciji redova potencija, štoviše daje motivaciju za uvođenje pojma radijusa konvergencije reda potencija.

Teorem 4.1.2. *Neka je*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \tag{4.3}$$

red potencija. Tada postoji $0 \leq R \leq \infty$ *tako da dani red konvergira apsolutno za* $|x - c| < R$ *i divergira za* $|x - c| > R$*.*

Štoviše, ako je $0 \leq \rho < R$*, tada red potencija konvergira uniformno na intervalu* $|x - c| \leq \rho$ *i suma reda je neprekidna funkcija na* $|x - c| < R$*.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $c = 0$ (inače, zamijenimo x s $x-c$). Pretpostavimo da red potencija

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \tag{4.4}$$

konvergira za neki $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$. Tada njegov opći član teži u 0, pa je omeđen, to jest, postoji $M \geq 0$ tako da je $\left|a_n x_0^n\right| \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Ako je $|x| < |x_0|$, tada je $|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n\right| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M r^n$ gdje je $r = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$.

Usporedimo li red potencija s konvergentnim redom $\sum_{n=1}^{\infty} M r^n$, vidimo da je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ apsolutno konvergentan. Stoga, ako je red potencija konvergentan za neki $x_0 \in \mathbb{R}$, tada on konvergira apsolutno za svaki $x \in \mathbb{R}$ takav da je $|x| < |x_0|$. Neka je

$$R = \sup \left\{ |x| \geq 0 : \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \text{konvergira} \right\}. \tag{4.5}$$

Ako je $R = 0$, tada red konvergira samo za $x = 0$. Ako je $R > 0$, tada red konvergira apsolutno za svaki $x \in \mathbb{R}$, $|x| < R$, jer konvergira za neki $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $|x| < |x_0| < R$.

Štoviše, iz definicije od R slijedi da red divergira za svaki $x \in \mathbb{R}$ gdje je $|x| > R$. Ako je $R = \infty$, tada red konvergira za svaki $x \in \mathbb{R}$. Na kraju, neka je $0 \leq \rho \leq R$ i pretpostavimo da je $|x| \leq \rho$. Uzmimo $\sigma > 0$ tako da je $\rho < \sigma < R$. Tada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \sigma^n|$ konvergira, pa postoji $M > 0$ takav da je $|a_n \sigma^n| \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i stoga je

$$|a_n x^n| = |a_n \sigma^n| \left|\frac{x}{\sigma}\right|^n \leq |a_n \sigma^n| \left|\frac{\rho}{\sigma}\right|^n \leq M r^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{4.6}$$

gdje je $r = \rho/\sigma < 1$. Kako je $\sum_{n=1}^{\infty} M r^n < \infty$, tada Weierstrassov test uniformne konvergencije povlači da red konvergira uniformno na $|x| \leq \rho$, pa je suma neprekidna na $|x| \leq \rho$. Kako to vrijedi za svaki $0 \leq \rho < R$, suma je neprekidna na $|x| < R$. □

Sljedeća definicija sada ima smisla za svaki red potencija.

Definicija 4.1.3. ***Radijus konvergencije*** *reda potencija*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n \tag{4.7}$$

je broj $R \in [0, \infty]$ *takav da red (4.7) konvergira za* $|x - c| < R$ *i divergira za* $|x - c| > R$*.*

Teorem 4.1.2 ne opisuje što se događa u rubnim točkama $x = c \pm R$. Može se dogoditi da red potencija konvergira ili divergira u tim točkama. Stoga, svaki od sljedećih intervala može biti interval konvergencije

$$(c - R, c + R), \quad (c - r, c + R], \quad [c - R, c + R), \quad [c - R, c + R].$$

D'Alembertov kriterij daje nam jednostavan, ali koristan način za računanje radijusa konvergencije, o čemu govori sljedeći teorem, premda se ne može primijeniti na svaki red potencija.

Teorem 4.1.4. *Pretpostavimo da je $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, te da niz $\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right)_n$ konvergira ili teži u ∞. Označimo*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \in [0, \infty]. \tag{4.8}$$

Tada red potencija

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$$

ima radijus konvergencije R.

Dokaz. Neka je

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x - c)^{n+1}}{a_n (x - c)^n} \right| = |x - c| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|. \tag{4.9}$$

Iz D'Alembertovog kriterija, red potencija konvergira ako $0 \leq r < 1$, tj. $|x - c| < R$, te divergira ako je $1 < r \leq \infty$, tj. $|x - c| > R$, iz čega slijedi tvrdnja teorema. □

Cauchyjev kriterij daje nam izraz za radijus konvergencije općenitog reda potencija.

Teorem 4.1.5. *(**Hadamard**) Radijus konvergencije R reda potencija*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$$

dan je s

$$R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}, \tag{4.10}$$

pri čemu je $R = 0$ ako je nazivnik u (4.10) jednak ∞, a $R = \infty$ ukoliko je nazivnik u (4.10) jednak 0.

Dokaz. Neka je

$$r = \limsup |a_n (x - c)^n|^{1/n} = |x - c| \limsup |a_n|^{1/n}.$$

Prema Cauchyjevom kriteriju, red konvergira ako je $0 \leq r < 1$ i divergira ako je $1 < r \leq \infty$, tj. $|x - c| > R$, iz čega slijedi tvrdnja teorema. □

Primjer 4.1.6. *Promotrimo geometrijski red*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n. \tag{4.11}$$

Kako je $c = 0$ *i* $a_n = 1$ *za sve* $n \in \mathbb{Z}_+$*, prema Hadamardovoj formuli (4.10) slijedi da je*

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{1}} = 1.$$

Stoga red (4.11) konvergira apsolutno uniformno na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ *prema funkciji* $x \mapsto \frac{1}{1-x}$*, tj. vrijedi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle . \tag{4.12}$$

Kako u rubnim točkama intervala $\langle -1, 1\rangle$ *red (4.11) ne konvergira jer opći član ne teži prema* 0*, zaključujemo da je njegov interval konvergencije* $\langle -1, 1\rangle$*.*

Napomena 4.1.7. *Ukoliko postoji* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in [0, +\infty]$*, tada postoji* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty]$ *i vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

U tom slučaju je

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

pa radijus konvergencije R *reda potencija* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *možemo računati koristeći formulu*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{4.13}$$

Kroz sljedećih nekoliko primjera proučit ćemo nekoliko redova potencija i njihove radijuse konvergencije.

Primjer 4.1.8. *1. Za red* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *je* $a_n = \frac{1}{n!}$*,* $n \geq 0$*. Zato je*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{n!} = n + 1 \to \infty \tag{4.14}$$

kada $n \to \infty$*. Dakle, radijus konvergencije je* $R = \infty$*, odnosno red* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *konvergira za svaki* x*. Ovim redom definirana je eksponencijalna funkcija* $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*.*

2. *Promotrimo red* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^n$. *Tada je*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}} = \frac{(n!)^2 \cdot (2n+2)!}{(2n)! \cdot ((n+1)!)^2} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1} \to 4$$

kada $n \to \infty$. *Prema (4.13) radijus konvergencije reda*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^n \tag{4.15}$$

jednak je $R = 4$. *Stoga red potencija (4.15) konvergira apsolutno uniformno na intervalu* $\langle -3, 5\rangle$. *U rubnim točkama intervala* $\langle -3, 5\rangle$ *imamo redove*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!} \quad \text{za} \quad x = -3, \tag{4.16}$$

odnosno,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!} \quad \text{za} \quad x = 5, \tag{4.17}$$

koji divergiraju, jer je

$$\frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!} \geq 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+,$$

pa nije zadovoljen nužan uvjet konvergencije reda. Dakle, interval konvergencije reda (4.15) je interval $\langle -3, 5\rangle$.

3. *Prema Hadamardovoj formuli radijus konvergencije R reda potencija* $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n (x-1)^n$ *iznosi*

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup \left|\frac{2n-1}{3n+2}\right|} = \frac{3}{2}. \tag{4.18}$$

Stoga red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n (x-1)^n$ *konvergira apsolutno uniformno na intervalu* $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle$. *U rubnim točkama intervala* $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle$ *riječ je o redovima*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2n-1}{3n-2}\right)^n \quad \text{za} \quad x = -\frac{1}{2}, \tag{4.19}$$

odnosno,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2n-1}{3n-2}\right)^n \quad \text{za} \quad x = \frac{5}{2}, \tag{4.20}$$

koji divergiraju budući da nije zadovoljen nužan uvjet konvergencije reda. Dakle, intreval konvergencije danog reda potencija je $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle$.

4.2 Svojstva redova potencija

Za početak, možemo promatrati derivabilnost redova potencija. Suma reda potencija

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

je beskonačno derivabilna unutar intervala konvergencije i njezina derivacija

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots$$

je dobivena deriviranjem član po član. Kako bismo to dokazali, prvo ćemo pokazati da red dobiven deriviranjem polaznog reda član po član ima isti radijus konvergencije kao i polazni red potencija.

Teorem 4.2.1. *Pretpostavimo da red potencija*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \tag{4.21}$$

ima radijus konvergencija R. Tada red potencija

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1} \tag{4.22}$$

ima također radijus konvergencije R.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $c = 0$ i $|x| < R$. Uzmimo ρ takav da je $|x| < \rho < R$. Za $r = \frac{|x|}{\rho}$ vrijedi $r \in \langle 0, 1\rangle$. Kako bismo usporedili članove reda potencija (4.22) s članovima polaznog reda, zapisat ćemo njihove apsolutne vrijednosti na sljedeći način:

$$\left|n a_n x^{n-1}\right| = \frac{n}{\rho}\left(\frac{|x|}{\rho}\right)^{n-1} |a_n \rho^n| = \frac{n r^{n-1}}{\rho} |a_n \rho^n| . \tag{4.23}$$

Iz D'Alembertovog kriterija slijedi da red $\sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1}$ konvergira jer je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)r^n}{n r^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n}) r = r < 1.$$

Zato je niz $(n r^{n-1})_n$ omeđen s nekim M. Slijedi da je

$$\left|n a_n x^{n-1}\right| \leq \frac{M}{\rho} |a_n \rho^n| , \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.24}$$

Red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \rho^n|$ konvergira za $\rho < R$, pa iz testa uspoređivanja slijedi da red $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ konvergira apsolutno za $|x| < \rho$. Time smo pokazali da je radijus konvergencije reda (4.22) barem R.

Pretpostavimo da je radijus konvergencije reda (4.22) veći od R. Tada postoji x takav da je $|x| > R$ i da red $\sum_{n=1}^{\infty} |n a_n x^n|$ konvergira. Iz

$$\left| n a_n x^{n-1} \right| \geq \frac{1}{|x|} |a_n x^n|, \quad n \in \mathbb{N}$$

slijedi da $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n|$ konvergira. To znači da $\exists x, |x| > R$ takav da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ konvergira, što je nemoguće. Slijedi da je radijus konvergencije od (4.22) jednak R. □

Teorem 4.2.2. *Pretpostavimo da red potencija*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

ima radijus konvergencije $R > 0$ i neka je $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$, $x \in \langle c-R, c+R \rangle$. Tada je f derivabilna na $x \in \langle c-R, c+R \rangle$ i vrijedi

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}. \tag{4.25}$$

Dokaz. Red potencija dobiven deriviranjem član po član je konvergentan za $x \in \langle c-R, c+R \rangle$ prema prethodnom teoremu. Označimo njegovu suma s

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}. \tag{4.26}$$

Neka je $0 < \rho < R$. Prema teoremu 4.2.1 redovi potencija za f i g konvergiraju uniformno za $|x-c| < \rho$. Nadalje, f je derivabilna za $|x-c| < \rho$ i $f' = g$.

Kako to vrijedi za svaki $0 \leq \rho < R$, slijedi da je f derivabilna za $|x-c| < R$ i $f' = g$, iz čega slijedi tvrdnja teorema. □

Teorem 4.2.3. *Red potencija*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n,$$

s pozitivnim radijusom konvergencije R, ima derivaciju svakog reda na cijelom području svoje konvergencije. Derivacije svakog reda dobivene su uzastopnim deriviranjem član po član, odnosno vrijedi da je

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (x-c)^{n-k}. \tag{4.27}$$

Radijus konvergencije tako dobivenog reda također je jednak R.

Dokaz. Tvrdnju teorema dokazujemo principom matematičke indukcije. Prema prethodnom teoremu, tvrdnja vrijedi za $k = 1$.

Pretpostavimo sada da vrijedi za neki $k \geq 1$. Promijenimo li indeks sumacije, izraz iz tvrdnje teorema možemo zapisati i kao

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)a_{n+k}(x-c)^n, \quad |x-c| < R. \tag{4.28}$$

Definiramo $b_n = (n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)a_{n+k}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n, \quad |x-c| < R. \tag{4.29}$$

Tako dobiveni red možemo derivirati član po član, pa dobivamo

$$f^{(k+1)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n(x-c)^{n-1}, \quad |x-c| < R. \tag{4.30}$$

Supstitucijom b_n slijedi da je

$$f^{(k+1)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)na_{n+k}(x-c)^{n-1}, \quad |x-c| < R.$$

Promijenimo li indeks sumacije, vrijedi

$$f^{(k+1)}(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k)a_n(x-c)^{n-k-1}, \quad |x-c| < R, \tag{4.31}$$

čime smo dokazali da tvrdnja teorema vrijedi i za $k+1$, pa vrijedi za svaki $k \geq 1$. □

Teorem 4.2.4. *Ako red potencija*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \tag{4.32}$$

ima radijus konvergencije $R > 0$, tada f ima derivacije svakog reda na $|x-c| < R$ i vrijedi

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}. \tag{4.33}$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $c = 0$. Primijenimo li teorem 4.2.2 na red potencija

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

k puta, vidimo da f ima derivaciju svakog reda za $|x| < R$ i vrijedi

$$\begin{aligned}
f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots\,,\\
f''(x) &= 2a_2 + (3\cdot 2)a_3 x + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots\,,\\
f'''(x) &= (3\cdot 2\cdot 1)a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + \cdots\,,\\
&\vdots\\
f^{(k)}(x) &= (k!)a_k + \cdots + \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} + \cdots\,,
\end{aligned} \tag{4.34}$$

pri čemu svi redovi potencija imaju radijus konvergencije R. Za $x = 0$ dobivamo

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad \ldots, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!},$$

iz čega slijedi tvrdnja teorema. □

Jedna od posljedica ovog rezultata je ta da konvergentni redovi potencija s različitim koeficijentima ne mogu imati istu sumu.

Korolar 4.2.5. *Ako dva reda potencija*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n \tag{4.35}$$

imaju radijus konvergencije različit od 0 *i ako su jednaki u okolini od* 0*, tada vrijedi* $a_n = b_n$ *za svaki* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Dokaz. Ako je zajednička suma na $|x - c| < \delta$ jednaka $f(x)$, tada prema prethodnom teoremu vrijedi

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}, \quad b_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}. \tag{4.36}$$

Budući da su derivacije od f u c određene vrijednostima od f na nekom proizvoljnom malom intervalu oko c, slijedi da su koeficijenti jednaki. □

Promatrajući svojstvo integrabilnosti iz teorema 3.3.4 i 4.1.2 slijedi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n (x-c)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b (x-c)^n dx,$$

tj. red potencija se može integrirati član po član, pri čemu tako dobiveni red potencija ima isti radijus konvergencije kao i polazni red.

Primjer 4.2.6. *(a) Pokažimo da je* $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ *za svaki* $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

Pogledajmo red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. *Red brojeva* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *je geometrijski red za svaki* $x \in \mathbb{R}$ *s količnikom* $q = x$. *Vidjeli smo već da geometrijski red konvergira za* $|q| = |x| < 1$ *i ima sumu*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \tag{4.37}$$

Dakle, na području konvergencije $I = \langle -1, 1 \rangle$ *definirana je funkcija* $f : I \to \mathbb{R}$ *formulom* $f(x) = \frac{1}{1-x}$. *Kao što smo prije vidjeli, derivaciju tako dobivene funkcije* f *možemo izračunati deriviranjem član po član reda potencija* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, *odnosno*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}. \tag{4.38}$$

S druge strane,

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}. \tag{4.39}$$

Prema tome,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad \forall x \in I.$$

Nadalje, u ovom primjeru možemo vidjeti da svakim ponovnim deriviranjem dobivamo

$$\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)x^n,$$

pa je stoga

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n, \quad |x| < 1. \tag{4.40}$$

(b) U primjeru 4.2.7 vidjeli smo da red potencija

$$E(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \tag{4.41}$$

ima radijus konvergencije ∞. *Stoga taj red definira beskonačno derivabilnu funkciju* $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Derivirajući (4.41) član po član slijedi da je*

$$E'(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{(n-1)} + \cdots, \tag{4.42}$$

pa je $E' = E$. *Štoviše, E(0)=1. Tako definirana funkcija je jedinstvena s tim svojstvom i predstavlja eksponencijalnu funkciju* e^x. *Stoga, navedeni red predstavlja analitičku definiciju eksponencijalne funkcije.*

(c) *Dokažimo da je* $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ *za svaki* $x \in \langle -1, 1\rangle$.

Pogledajmo red potencija $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ *koji je geometrijski s količnikom* $q = -x$. *Taj red apsolutno konvergira za* $|q| = |x| < 1$ *i ima sumu*

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n. \tag{4.43}$$

Integriranjem član po član ovog reda potencija dobije se

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^n dt, \tag{4.44}$$

odakle je

$$\ln(1+t)\Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}\right)\Big|_0^x,$$

odnosno

$$\ln(1+x) - \ln 1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Prema tome,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \quad x \in \langle -1, 1\rangle. \tag{4.45}$$

4.3 Aritmetičke operacije s redovima potencija

Redove potencija možemo zbrajati, množiti i dijeliti. Radi jednostavnosti, promatrat ćemo redove potencija oko 0.

Teorem 4.3.1. *Ako je* $R, S > 0$ *i ako su funkcije*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad za \quad |x| < R, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad za \quad |x| < S$$

sume konvergentnih redova potencija, tada vrijedi

$$(f+g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n \quad za \quad |x| < T, \tag{4.46}$$

$$(fg)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad za \quad |x| < T, \tag{4.47}$$

pri čemu je $T = \min\{R, S\}$ *i* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$.

Dokaz. Red potencija od $f + g$ slijedi direktno iz linearnosti limesa. Red potencija od fg slijedi iz Cauchyjevog produkta, a kako red potencija konvergira apsolutno na svom intervalu konvergencije vrijedi

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}x^{n-k} \cdot b_k x^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \tag{4.48}$$

□

Primjer 4.3.2. *Ako je* $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *za* $|x| < 1$ *i* $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *za* $|x| < R$, *tada je*

$$\frac{g(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n, \quad |x| < \min\{1, R\},$$

pri čemu je $s_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$.

Moguće je da se dogodi da je radijus konvergencije redova potencija $f + g$ ili fg veći od radijusa konvergencije redova potencija od f, g. Na primjer, ako je $g = -f$, radijus konvergencije reda potencija $f + g = 0$ je ∞, bez obzira na radijus konvergencije reda potencija od f.

Sljedeći teorem daje nam rezultat za recipročnu vrijednost reda potencija radijusa konvergencije različitog od 0.

Teorem 4.3.3. *Ako je* $R > 0$ *i ako je*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad |x| < R, \tag{4.49}$$

suma reda potencija pri čemu je $a_0 \neq 0$, *tada postoji* $S > 0$ *tako da je*

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad |x| < S. \tag{4.50}$$

Koeficijenti b_n *određeni su rekurzivno s*

$$b_0 = \frac{1}{a_0}, \quad b_n = -\frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} b_k, \quad n \geq 1.$$

Dokaz. Pogledajmo najprije red potencija

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \tag{4.51}$$

tako da je produkt fg jednak 1. Taj uvjet je zadovoljen ako za sve x vrijedi

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right) x^n = 1. \tag{4.52}$$

Promatrajući koeficijente uz x^n, vidimo da je

$$a_0 b_0 = 1, \quad a_0 b_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} b_k = 0, \quad \forall n \geq 1,$$

iz čega slijedi navedena rekurzivna relacija. Još trebamo pokazati da red potencija za g ima radijus konvergencije različit od 0.

Prethodni teorem pokazuje nam da je $fg = 1$ unutar zajedničkog intervala konvergencije od f i g, pa za $\frac{1}{f} = g$ postoji pripadni red potencija. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $a_0 = 1$, inače zamijenimo f s f/a_0. Red potencija od f konvergira apsolutno i uniformno na kompaktnim skupovima unutar intervala konvergencije, pa je funkcija

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,|x|^n \tag{4.53}$$

neprekidna za $|x| < R$ i njen limes u nuli je jednak 0. Zato postoji $\delta > 0$ tako da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,|x|^n \leq 1 \quad \text{za} \quad |x| < \delta. \tag{4.54}$$

Tada je $f(x) \neq 0$ za $|x| < \delta$, a kako je

$$|f(x)| \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,|x|^n > 0, \tag{4.55}$$

$1/f(x)$ je dobro definirano za $|x| < \delta$. Tvrdimo da je

$$|b_n| \leq \frac{1}{\delta^n}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{4.56}$$

Tvrdnju dokazujemo principom matematičke indukcije. Kako je $b_0 = \frac{1}{a_0} = 1$ prethodna nejednakost je istinita za $n = 0$. Ako je $n \geq 1$ i ako nejednakost vrijedi za b_k, $0 \leq k \leq n-1$, uzimajući apsolutnu vrijednost na rekurzivnu relaciju od b_n, dobivamo

$$|b_n| \leq \sum_{k=1}^{n-1} |a_k|\,|b_{n-k}| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{\delta^{n-k}} \leq \frac{1}{\delta^n} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\,\delta^k \leq \frac{1}{\delta^n}, \tag{4.57}$$

pa nejednakost vrijedi za b_k pri čemu je $0 \le k \le n$. Sada dobivamo da je

$$\limsup |b_n|^{1/n} \le \frac{1}{\delta}, \tag{4.58}$$

pa iz Hadamardove formule slijedi da je radijus konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ veći ili jednak od $\delta > 0$, čime smo u potpunosti dokazali tvrdnju teorema. □

Kao posljedica prethodna dva teorema za produkt i recipročnu vrijednost reda potencija, slijedi da je kvocijent konvergentnih redova potencija također konvergentni red potencija pri čemu je nazivnik različit od 0, o čemu govori sljedeći teorem.

Teorem 4.3.4. *Ako je $R, S > 0$ i ako su*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad za \quad |x| < R, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad za \quad |x| < S$$

sume konvergentnih redova potencija pri čemu je $b_0 \neq 0$, tada postoji $T > 0$ i koeficijenti c_n tako da je

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad |x| < T. \tag{4.59}$$

Primjer 4.3.5. *Kako bismo pronašli prvih nekoliko članova recipročne vrijednosti reda potencija*

$$g(x) = 1 + e^x = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \tag{4.60}$$

u tvrdnji prethodnog teorema stavimo da je $f(x) = 1$. Ako je

$$\frac{1}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{4.61}$$

tada je

$$1 = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(2 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots) = 2a_0 + (a_0 + 2a_1)x + (\frac{a_0}{2} + a_1 + 2a_2)x^2 + \cdots .$$

Sada vrijedi

$$2a_0 = 1, \quad a_0 + 2a_1 = 0, \quad \frac{a_0}{2} + a_1 + 2a_2 = 0, \quad \ldots .$$

Rješavanjem tih jednadžbi dobivamo

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = -\frac{a_0}{2} = -\frac{1}{4}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{48}, \quad \ldots,$$

pa je stoga

$$\frac{1}{1 + e^x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + \cdots . \tag{4.62}$$

4.4 Taylorovi redovi

Ako je $R > 0$ radijus konvergencije reda potencija

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n, \tag{4.63}$$

tada na intervalu $I = \langle c-R, c+R \rangle$ taj red konvergira apsolutno. Također, njime je dobro definirana funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ takva da je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n, \quad x \in I. \tag{4.64}$$

Vidjeli smo ranije da funkcija f ima derivacije svakog reda na intervalu I, odnosno za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (x-c)^{n-k}. \tag{4.65}$$

Iz teorema 4.2.4 slijedi

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{4.66}$$

pa je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \quad x \in I.$$

Red potencija

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots \tag{4.67}$$

nazivamo **Taylorovim redom** funkcije f u točki c i taj red na intervalu I predstavlja funkciju f. Kažemo da je funkcija f razvijena u Taylorov red u okolini točke c ili po potencijama od $x - c$. Posebno, za $c = 0$ dobivamo red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(c) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots \tag{4.68}$$

koji nazivamo **Maclaurinovim redom** funkcije f.

Promotrimo sada problem na drugačiji način. Neka je zadana funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ koja na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ ima derivaciju svakog reda. Neka je $c \in I$. Tada ima smisla promatrati Taylorov red funkcije f u točki c.

Pokazuje se da tako definiran red u okolini točke c ne mora konvergirati prema funkciji f. Štoviše, može se dogoditi da Taylorov red funkcije f divergira za svaku vrijednost $x \neq c$, odnosno da konvergira prema nekoj drugoj funkciji. Pogledajmo to na sljedećem primjeru.

Primjer 4.4.1. *Neka je zadana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulom*

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & \text{ako je} \quad |x| < 1, \\ 0, & \text{ako je} \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$

Funkcija f ima derivacije svakog reda na skupu $\mathbb{R}$. Također, derivacije funkcije f u točki 1 iznose nula. Dakle, vrijedi $f^{(n)}(1) = 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Stoga Taylorov red funkcije f u točki $c = 1$ glasi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = 0. \tag{4.69}$$

Prema tome, Taylorov red funkcije f u točki $c = 1$ konvergira na skupu $\mathbb{R}$, ali ne prema funkciji f, nego prema nul-funkciji.

Sada nam se nameću sljedeća pitanja. Ako funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ definirana na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ ima na tom intervalu derivacije svakog reda, koje je područje konvergencije Taylorovog reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

funkcije f u točki $c \in I$, te konvergira li taj red na svom području konvergencije prema funkciji f? Kako bismo odgovorili na ta pitanja, uvodimo najprije sljedeće pojomove.

Za funkciju f definiramo **n-ti Taylorov polinom** u točki c

$$T_n(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.70}$$

Općenito, $f(x)$ je suma Taylorovog reda ako vrijedi

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x). \tag{4.71}$$

Ako je

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

tada $R_n(x)$ nazivamo **ostatak** Taylorovog reda. Ako je $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, tada

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty} [f(x) - R_n(x)] = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x).$$

Drugim riječima, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 4.4.2. *Ako vrijedi $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, gdje je T_n n-ti Taylorov polinom funkcije f u točki c i ako je*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \tag{4.72}$$

za svaki $|x - c| < R$, tada je funkcija f jednaka sumi Taylorovog reda na intervalu $|x - c| < R$.

Kada želimo pokazati da za neke specifične funkcije vrijedi $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ najčešće koristimo sljedeći teorem.

Teorem 4.4.3. *(**Taylorova formula**) Ako funkcija f ima derivacije $n + 1$ reda na intervalu I koji sadrži točku c, tada za $x \in I$ postoji točka z koja se nalazi između točaka x i c tako da Taylorov ostatak $R_n(x)$ možemo izraziti kao*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}. \tag{4.73}$$

Napomena 4.4.4. *Stavimo li u Taylorovu formulu $x = b$ i $z = c$ za posebni slučaj kada je $n = 0$ dobivamo*

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a) \tag{4.74}$$

što je zapravo teorem srednje vrijednosti.

Napomena 4.4.5. *Uočimo da je izraz ostatka*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \tag{4.75}$$

*vrlo sličan izrazima Taylorovog reda osim što je derivacija $f^{(n+1)}$ u točki z umjesto u točki c. Sve što znamo reći o točki z je to da se nalazi negdje između x i c. Izraz $R_n(x)$ dan u (4.75) poznat je kao **Lagrangeov oblik ostatka**.*

Za kraj navodimo nekoliko primjera.

Primjer 4.4.6. *Nađimo Maclaurin red za $\sin x$ i dokažimo da on predstavlja $\sin x$ za svaki x.*

Funkcija $f(x) = \sin x$ ima derivacije svakog reda. Prve četiri redom iznose

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)} = \sin x,$$

pa je

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 0.$$

Kako je $f^{(4)}(x) = f(x)$, slijedit će

$$f^{(5)}(x) = f'(x), \quad f^{(6)}(x) = f''(x), \quad f^{(7)}(x) = f'''(x), \quad f^{(8)}(x) = f(x), \quad \ldots.$$

Posebno, računanjem derivacija funkcije f u nuli dobiva se

$$f^{(2n)}(0) = 0, \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Maclaurinov red funkcije f glasi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \tag{4.76}$$

Uočimo da se u redu pojavljuju samo potencije od x neparnog eksponenta.

Koristeći izraz (4.75) i $c = 0$ dobivamo

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

gdje je $f(x) = \sin x$ i točka z je između 0 i x. No, $f^{(n+1)}(z)$ je $\pm \sin z$ ili $\pm \cos z$. U svakom slučaju, $\left| f^{(n+1)}(z) \right| \leq 1$ pa vrijedi

$$0 \leq |R_n(x)| = \frac{\left| f^{(n+1)}(z) \right|}{(n+1)!} \left| x^{n+1} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \left| x^{n+1} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \tag{4.77}$$

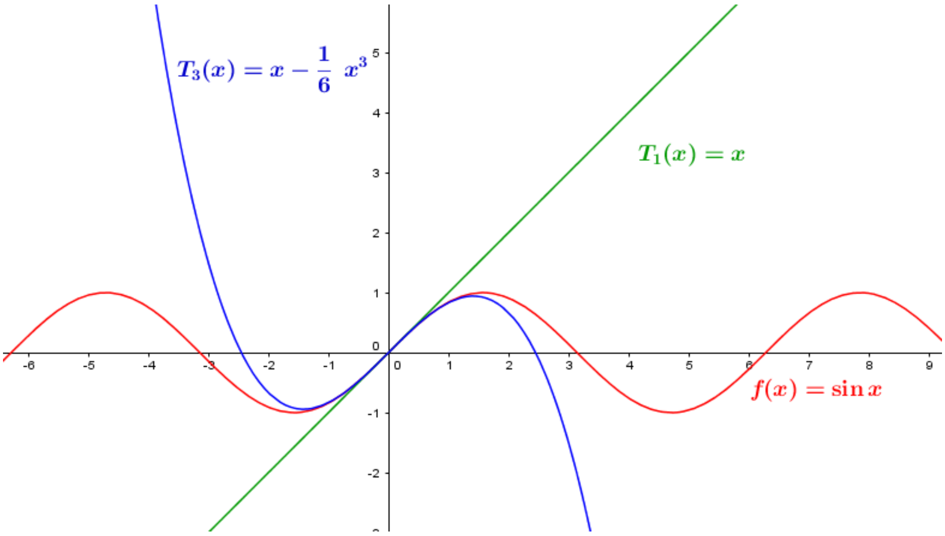
Desna strana nejednakosti (4.77) teži u 0 kada $n \to \infty$, pa $R_n(x) \to 0$. Slijedi da $R_n(x) \to 0$ kada $n \to \infty$, pa je suma reda (4.76) jednaka $\sin x$.

Dakle, vrijedi

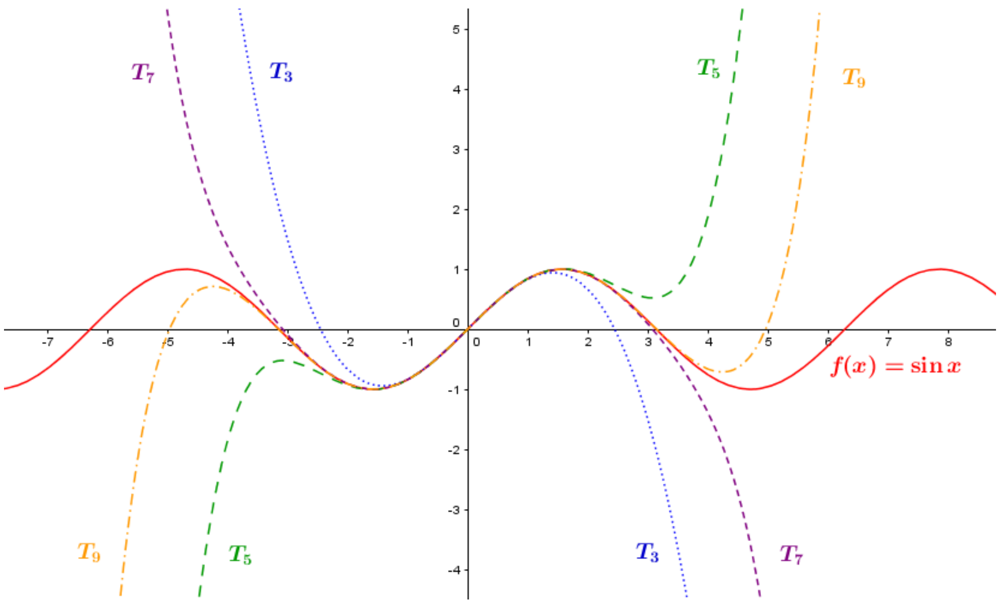
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4.78}$$

Primjer 4.4.7. *U istom koordinatnom sustavu skicirajmo funkciju $f(x) = \sin x$, te njezine Taylorove polinome prvog i trećeg stupnja.*

U prethodnom primjeru dokazali smo da vrijedi:
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$,
$T_1(x) = x$,
$T_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3$, *što u koordinatnom sustavu izgleda ovako:*



Sljedeća slika prikazuje aproksimaciju funkcije $y = \sin x$ polinomima T_3, T_5, T_7 i T_9.



Bibliografija

[1] J. K. Hunter, *An Introduction to Real Analysis*
https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/intro_analysis_pdf/intro_analysis.pdf, USA, 2014.

[2] P. Javor, *Matematička analiza 1*, Element, Zagreb, 1999.

[3] S. Kurepa, *Matematička analiza 2, Funkcije jedne varijable*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[4] J. Lebl, *Introduction to Real Analysis*
http://www.jirka.org/ra/realanal.pdf, USA, 2016.

[5] R. Rajić, *Numerička matematika*
http://rgn.hr/~rrajic/nids_rajnarajic/predavanja-NM.pdf

[6] D. Sejdinović, I. Tanović, *O harmonijskom redu i njegovim dijelovima*, Osječki matematički list 9 (31-39), 2009.

[7] W. F. Trench, *Introduction to Real Analysis*
http://www.math.uri.edu/~pakula/mth435/TRENCH_REAL_ANALYSIS.pdf, USA, 2003.

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavamo nizove i redove funkcija. U prvom poglavlju navodimo osnovne činjenice o nizovima i redovima realnih brojeva. Drugo poglavlje detaljnije proučava dvije osnovne vrste konvergencije nizova funkcija, konvergenciju po točkama i uniformnu konvergenciju. Navodimo osnovni kriterij uniformne konvergencije i proučavamo svojstva funkcija koja čuva uniformna konvergencija. Sljedeće poglavlje bavi se redovima funkcija; primjenjujemo rezultate prethodnog poglavlja kako bismo dobili analogne rezultate za redove funkcija. Posljednje poglavlje bavi se specijalnim oblicima redova funkcija, redovima potencija. Proučavamo radijus konvergencije, kao i aritmetičke operacije s redovima potencija. Na kraju poglavlja definirani su Taylorovi redovi, te su dane neke primjene Taylorovih redova.

Summary

In this thesis we study sequences and series of functions. In the first chapter we present basic facts about sequences and series of numbers. The second chapter considers two basic types of convergence of sequences of functions, pointwise and uniform convergence. We present several test for uniform convergence and study properties of functions that uniform convergence preserves. The next chapter deals with series of functions; we apply results from the previous chapter to obtain analogous results for series of functions. The last chapter considers the special forms of series of functions, power series. We study the radii of convergence as well as arithmetic operations on power series. At the end of this chapter we define Taylor series and give some applications.

Životopis

Rođena sam 2. ožujka 1992. godine u Čakovcu. Osnovnu školu pohađala sam u obližnjim selima Podbrest i Orehovica. Nakon završetka osnovne škole, 2007. godine upisujem opći smjer gimnazije "Gimnazija Čakovec" u Čakovcu. Srednjoškolsko obrazovanje završila sam 2011. godine. Iste godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Godine 2014. završila sam preddiplomski studij te na istom fakultetu upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički.