Spernerova lema i primjene

Pomper, Jurica

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Jurica Pomper

SPERNEROVA LEMA I PRIMJENE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Matija Kazalicki

Zagreb, rujan, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Spernerova lema je kombinatorni rezultat koji je prvi dokazao njemački matematičar Emmanuel Sperner, a uglavnom se primjenjuje u izračunavanju fiksnih točaka preslikavanja i na probleme pravedne raspodjele. Ona govori da svaka Spernerova triangulacija n-simpleksa sadrži neparan broj potpuno označenih n-simpleksa.

O tome detaljnije govorimo u Poglavlju 1, gdje na početku objašnjavamo Spernerovu triangulaciju trokuta i iskazujemo Spernerovu lemu za trokute. Nakon toga poopćavamo pojam Spernerove triangulacije na n-simplekse, kao i samu lemu, i dokazujemo je koristeći indukciju po dimenziji simpleksa i analogiju iz dimenzije 2.

Osim toga, koristimo je kao pomoć kod dokazivanja teorema vezanih za pravednu raspodjelu torte i stanarine na n osoba. Većina rezultata iz ovog poglavlja dolazi iz [2].

U Poglavlju 2 navodimo 2-dimenzionalnu verziju Brouwerovog teorema o fiksnoj točki i dokazujemo je koristeći Spernerovu lemu za trokute. Uglavnom se pozivamo na [3].

U Poglavlju 3 objašnjavamo pravila igre Hex za 2 igrača i navodimo Hex teorem vezan uz nju. Nakon toga pokazujemo vezu s Brouwerovim teoremom, a na kraju dokazujemo n-dimenzionalni Hex teorem. Poglavlje je rađeno po uzoru na [1].

Poglavlje 1

Spernerova lema

Cilj ovog poglavlja je iskazati i dokazati Spernerovu lemu za n-simplekse i primijeniti je na probleme pravedne raspodjele. Prvi korak prema tom cilju je Spernerova lema za 2-simplekse, odnosno trokute, koju ćemo onda poopćiti na n-simplekse. Na kraju poglavlja radimo primjenu leme na probleme raspodjele torte i stanarine.

1.1 Spernerova lema za trokute

Definirajmo za početak pojam *triangulacije* trokuta.

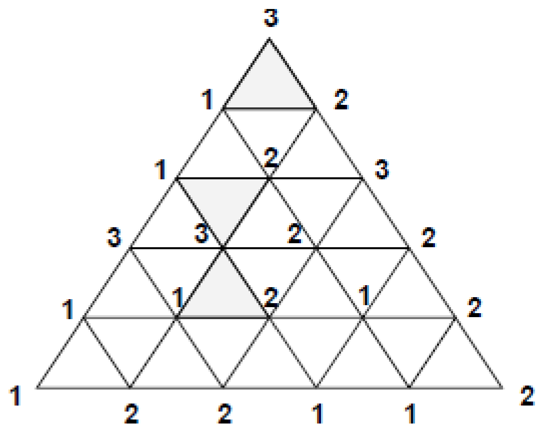
Definicija 1.1.1. *Triangulacijom trokuta T ćemo zvati familiju trokuta koji u uniji daju T, a međusobno se sijeku ili u jednoj zajedničkoj strani ili u jednom zajedničkom vrhu, ili se ne sijeku uopće.*

Neka je sada T trokut koji smo triangulirali na manje trokute koje ćemo zvati *elementarnim trokutima*, i označimo vrhove tih trokuta brojevima 1, 2 i 3, kao na slici 1.1 Vrhove smo označili prateći sljedeća pravila:

1. Svaki vrh od T ima drugačiju oznaku

2. Svaki vrh na nekoj od stranica trokuta T ima istu oznaku kao jedan od vrhova koji razapinju tu stranicu (svi vrhovi na stranici koja spaja vrhove 1 i 2 su označeni ili sa 1 ili sa 2, itd.), a svi unutarnji vrhovi imaju proizvoljne oznake

Takav način označavanja vrhova trokuta zove se Spernerov, pa ćemo u ovom radu trokut označen Spernerovim načinom označavanja nazivati *trokut sa Spernerovom triangulacijom*. Sada možemo iskazati Spernerovu lemu za trokute na sljedeći način:



Slika 1.1: Trokut sa Spernerovom triangulacijom

Teorem 1.1.2. *Svaki trokut sa Spernerovom triangulacijom sadrži neparan broj elementarnih trokuta koji imaju sva tri vrha označena različitim oznakama. Posebno, sadrži barem jedan takav trokut.*

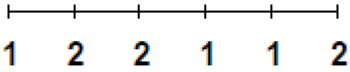
Na slici 1.1 su označeni svi takvi trokuti, ima ih 3 pa uočavamo da tvrdnja vrijedi za taj trokut. Sada ćemo tu tvrdnju poopćiti na n-simplekse.

1.2 Spernerova lema za n-simplekse

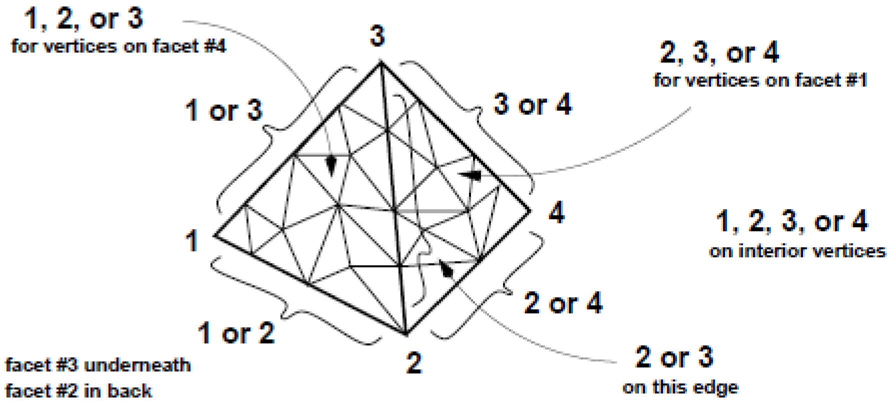
Da bismo mogli iskazati Spernerovu lemu za n-simplekse, moramo prvo shvatiti koncept n-simpleksa. 0-simpleks je točka, 1-simpleks dužina, 2-simpleks trokut, a 3-simpleks tetraedar, pa u skladu s tim n-simpleks možemo zamišljati kao n-dimenzionalni tetraedar i definirati ga kao konveksnu ljusku $n + 1$ afino nezavisnih točaka u prostoru $\mathbb{R}^m, m \geq n$. Te točke čine vrhove n-simpleksa. Svaki k-simpleks generiran nekim $(k + 1)$-podskupom tih $n+1$ točaka ćemo zvati *k-stranom n-simpleksa* (dakle 0-strana je vrh, 1-strana je brid, itd.). Sljedeće, moramo definirati što znači *triangulacija n-simpleksa S*.

Definicija 1.2.1. *Kao i u slučaju trokuta, reći ćemo da je triangulacija n-simpleksa S familija manjih n-simpleksa koji u uniji daju S, a sijeku se u jednoj zajedničkoj k-strani (za neki* $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$*), ili se ne sijeku uopće. Takve n-simplekse ćemo zvati elementarnim n-simpleksima, a njihove vrhove vrhovima triangulacije.*

Označimo sada $(n - 1)$-strane n-simpleksa brojevima $1, 2, \ldots, n + 1$. Proizvoljnu triangulaciju od S tada možemo označiti tako da svaki vrh označimo jednim od brojeva kojima su označene $(n - 1)$-strane od S, prateći sljedeća pravila:



Slika 1.2: 1-simpleks sa Spernerovom triangulacijom



Slika 1.3: 3-simpleks sa Spernerovom triangulacijom

1. Nijedan vrh na $(n-1)$-strani j nije označen sa j, $\forall j$
2. Unutrašnji vrhovi od S mogu biti označeni bilo kojim brojem

Kao u slučaju 2-simpleksa, i ovdje se takav način označavanja triangulacije n-simpleksa zove *Spernerova triangulacija n-simpleksa*. Na slikama 1.2 i 1.3 vidimo primjer Spernerove triangulacije 1-simpleksa, odnosno dužine, i 3-simpleksa, odnosno tetraedra.

Napomenimo da 1. pravilo označavanja uključuje i rub svake $(n-1)$-strane, što znači da npr. na tetraedru na slici 1.3 vrhovi na bridu koji je presjek 2-strana 1 i 4 mogu biti označeni samo brojevima 2 i 3 jer strana 1 onemogućava da budu označeni sa 1, a strana 4 da budu označeni sa 4. Zbog načina na koji smo označili $(n-1)$-strane su krajnji vrhovi tog brida označeni sa 2 i 3, što znači da je i taj brid označen Spernerovim oznakama, a to nas onda dovodi do zaključka da Spernerova triangulacija na n-simpleksu S povlači i Spernerovu triangulaciju na $(n-1)$-stranama od S kao $(n-1)$-simpleksima, itd.

Definicija 1.2.2. *Elementarni simpleks u triangulaciji ćemo zvati potpuno označenim ako mu nijedna dva vrha nemaju iste oznake.*

Uz gornju definiciju možemo izreći Spernerovu lemu za n-simplekse na sljedeći način:

Teorem 1.2.3. *Svaka Spernerova triangulacija n-simpleksa sadrži neparan broj potpuno označenih elementarnih n-simpleksa. Specijalno, sadrži barem jedan takav simpleks.*

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom po dimenziji simpleksa n. Za $n = 1$ naš simpleks je dužina, kao na slici 1.2. Zbog Spernerove triangulacije njezine krajnje točke su označene sa 1 i 2, a svi vrhovi između su također označeni ili sa 1 ili sa 2. Kako su njezine krajnje točke označene različitim oznakama, očito je da se, ako krenemo iz lijevog kraja prema desnom, oznake vrhova kojima prolazimo moraju promijeniti neparan broj puta, što onda daje i tvrdnju da 1-simpleks sadrži neparan broj baznih simpleksa (jer brojimo one simplekse koji su omeđeni vrhovima s različitim oznakama).

Pretpostavimo sada da tvrdnja teorema vrijedi za sve simplekse dimenzije do uključivo $(n-1)$ i dokažimo da u tom slučaju ona vrijedi i za simpleks dimenzije n. Dokazat ćemo da tvrdnja vrijedi za n-simpleks sa Spernerovom triangulacijom čiji su vrhovi označeni redom sa $1, \ldots, n+1$. Rezultati koje iznosimo odnose se na dimenziju n, ali da bismo lakše shvatili dokaz za neke stvari ćemo se referirati na dimenziju 2, dakle trokut, kao ovaj na slici 1.4.

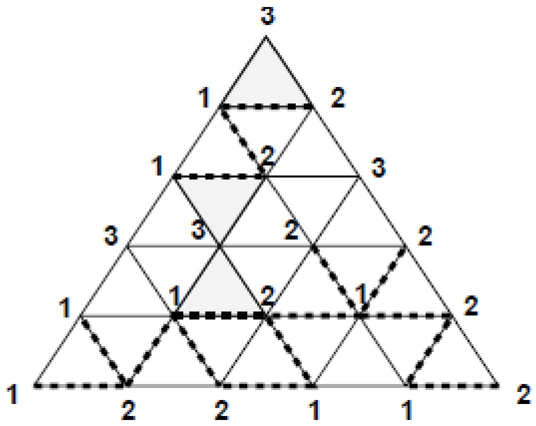
Zamislimo n-simpleks S kao *kuću* trianguliranu u *sobe*, koje su reprezentirane elementarnim simpleksima. $(n-1)$-stranu sobe zvat ćemo *vratima* ako je ona označena s prvih n od ukupno $n+1$ oznaka, odnosno, u našem konkretnom primjeru, vrata su bridovi $(1,2)$, a za $n = 3$ vrata bi bili trokuti $(1,2,3)$.

Tvrdimo da je broj vrata na rubu od S neparan. To vrijedi jer je (zbog Spernerovih oznaka) jedina $(n-1)$-strana od S koja uopće može sadržavati vrata $(n+1)$-ta, koja je označena sa $1, \ldots, n$, pa po pretpostavci indukcije sadrži neparan broj potpuno označenih $(n-1)$-simpleksa, a ti simpleksi su po našoj definiciji upravo vrata.

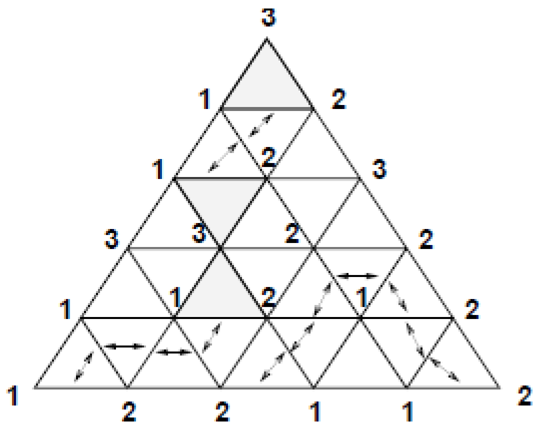
Ta granična vrata možemo iskoristiti kako bismo locirali potpuno označene sobe. Bitno je primijetiti da svaka soba može imati najviše 2 vrata i da ima točno 1 vrata ukoliko je ona potpuno označena. A to vrijedi jer svaka soba koja ima barem 1 vrata ima ili svaki vrh drugačije označen (dakle je potpuno označena) ili 2 vrha s istom oznakom. U prvom slučaju soba ima točno 1 vrata, u drugom točno 2. Tvrdnju možemo provjeriti i na slici 1.4, svaki elementarni trokut ima 0, 1 ili 2 vrata, odnosno bridova $(1,2)$.

Dakle, krenimo od nekih vrata na rubu od S i uđimo u sobu kojoj pripadaju. Ta je soba ili potpuno označena ili ima još jedna vrata kroz koja možemo proći. Nastavimo postupak prolazeći kroz vrata kad god nam je to omogućeno. Primijetimo da ćemo ovim postupkom kroz svaku sobu proći najviše jednom jer svaka soba ima najviše 2 vrata pa se nikako ne možemo vratiti u nju. Broj soba je konačan pa će postupak stati u konačnom vremenu, a posljednji korak će biti ili ulazak u potpuno označenu sobu ili prolazak kroz rubna vrata od S, odnosno *izlazak* iz S. Za ilustraciju, pogledajmo sliku 1.5. Strelice pokazuju puteve kojima se krećemo prateći gore opisani postupak prolazaka kroz sobe.

Kako je broj graničnih vrata od S neparan, a gore opisani putevi povezuju paran broj njih, ostaje neparan broj graničnih vrata koja nisu povezana s drugim graničnim vratima, dakle vode do potpuno označenih soba. Osim toga, sve potpuno označene sobe do kojih se ne može doći putevima koji kreću s ruba od S dolaze u parovima, i spojene su vlastitim



Slika 1.4: Kuća, sobe i vrata (označena isprekidanim linijama)



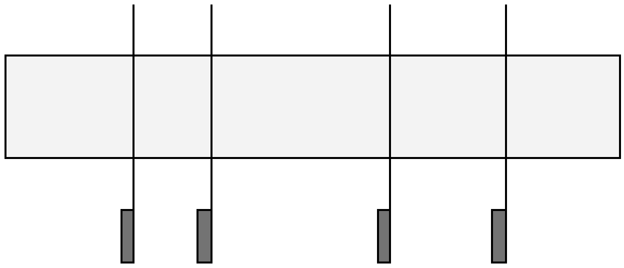
Slika 1.5: Primjer prolaska kroz sobe

putevima (slika 1.5). Dakle, ukupan broj potpuno označenih soba u S je neparan.

□

1.3 Primjena Spernerove leme na problem pravedne raspodjele

U nastavku ćemo vidjeti na koje načine se Spernerova lema može primijeniti na problem pravedne raspodjele. Navodimo probleme raspodjele torte i stanarine.



Slika 1.6: Primjer particije torte za $n = 5$

Raspodjela torte

Zamislimo tortu pravokutnog oblika koju treba razdijeliti na n osoba koje mogu imati različite preferencije oko veličine komada. U tu svrhu radimo particiju torte na n manjih pravokutnika, kao na slici 1.6.

Particija torte je u potpunosti definirana relativnim veličinama svojih komada. Ako pretpostavimo da je veličina torte 1 i označimo veličinu i-tog komada sa x_i, problem možemo zapisati kao $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1, \forall x_i \geq 0$. Prostor S svih mogućih particija torte je $(n-1)$-simpleks u $\mathbb{R}^n$, pri čemu svaka točka od S odgovara nekoj particiji torte. Cilj je naći particiju torte u kojoj je svaka osoba zadovoljna svojim komadom. Započinjemo definicijom što to znači da je osoba zadovoljna komadom torte.

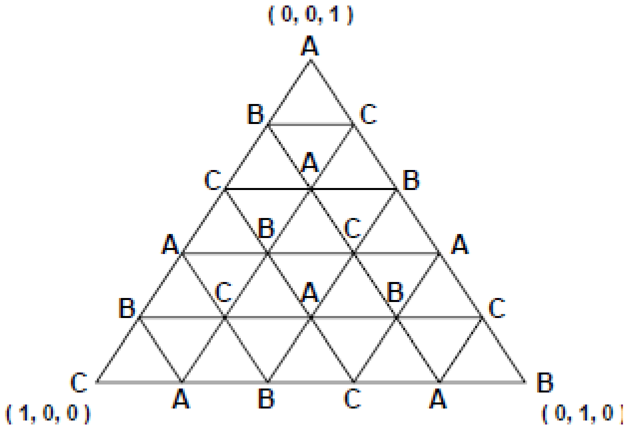
Definicija 1.3.1. *Reći ćemo da osoba preferira neki komad u danoj particiji torte ako joj taj komad odgovara više (ili jednako) od bilo kojeg drugog komada u toj particiji. Pretpostavljamo da ta preferencija ovisi samo o osobi koja bira i o particiji, ali ne i o izborima ostalih osoba.*

Primijetimo da svaka osoba u danoj particiji preferira barem jedan komad torte, a može se dogoditi i da preferira više od jednog. U tom slučaju je svejedno koji komad uzmemo kao preferiran. Ono što želimo postići je da nađemo particiju u kojoj svaka osoba preferira različiti komad. Prepostavit ćemo također sljedeće:

1. *Osobe su gladne.* To znači da svakoj osobi bilo koji neprazan komad odgovara više od praznog.

2. *Skupovi preferencija su zatvoreni.* To znači da ako osoba preferira neki komad u konvergentnom nizu particija torte, tada ga ona preferira i u graničnoj particiji.

Uz ove pretpostavke možemo izreći sljedeći teorem koji govori o raspodjeli torte na n komada:



Slika 1.7: Oznake vrhova po pripadnosti

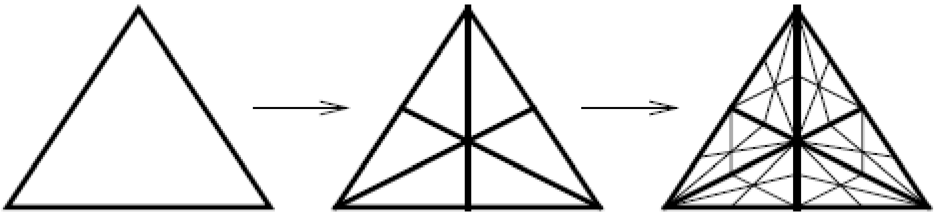
Teorem 1.3.2. *Za gladne osobe sa zatvorenim skupovima preferencija postoji particija torte takva da svaka osoba preferira različiti komad torte.*

Dokaz. Kao pomoć u dokazu teorema promatrat ćemo slučaj $n = 3$. Nazovimo osobe kojima dijelimo tortu Anđelko, Benjamin i Cecilija. Trebamo razdijeliti tortu ukupne veličine 1 na 3 komada. Označimo veličine komada torte sa x_1, x_2 i x_3. Kako je $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ i $\forall x_i \geq 0$, prostor rješenja S je ravnina presječena prvim oktantom, dakle trokut. Triangulirajmo S i označimo vrhove sa A, B, C, koji "pripadaju" redom Anđelku, Benjaminu i Ceciliji, kao na slici 1.7. Vrhovi su označeni na način da svi elementarni trokuti imaju vrhove A, B i C. Uočimo da se na isti način može označiti i finija triangulacija.

Sada uvodimo pomoćne oznake koristeći brojeve 1, 2 i 3, i to na sljedeći način: s obzirom da svaka točka trokuta odgovora jednoj particiji, pitamo vlasnika svakog vrha "Koji komad torte bi uzeo u slučaju da je torta razdijeljena na taj način?". Sukladno odgovoru označimo taj vrh sa 1, 2 ili 3.

Tvrdimo da je ovaj način označavanja vrhova Spernerov. U vrhu $(1, 0, 0)$ jedan komad sadrži cijelu tortu pa po pretpostavci *gladi* vlasnik tog vrha uvijek uzima prvi komad. Na sličan način vlasnici vrhova $(0, 1, 0)$ i $(0, 0, 1)$ uzimaju drugi, odnosno treći komad, pa dobivamo da vrhovi od S imaju različite oznake. Osim toga, svaka stranica od S sadrži točke kojima je jedna koordinata uvijek 0, pa su sve točke na toj stranici označene istim oznakama kao i njezini krajnji vrhovi, što povlači da je ovakav način označavanja vrhova zaista Spernerov.

Spernerova lema sada garantira da postoji barem jedan $(1, 2, 3)$-simpleks u triangulaciji, a kako je svaki takav nastao od trokuta ABC (jer smo na početku vrhove označili tako da su svi trokuti označeni sa A, B i C), znači da smo dobili 3 vrlo slične particije u kojima



Slika 1.8: Prva 2 koraka baricentrične subdivizije 2-simpleksa

različite osobe preferiraju različiti komad torte.

Kako bismo dokazali da postoji jedinstvena particija koja zadovoljava sve 3 osobe, samo trebamo provesti gore opisani postupak za sve finiju triangulaciju koja nam daje sve manji $(1, 2, 3)$-trokut. Zbog kompaktnosti trokuta i sve manje veličine trokuta $(1, 2, 3)$ postoji konvergentan podniz trokuta koji konvergira u točku i ta točka onda daje particiju kojom su sve osobe zadovoljne.

Kako je svaki $(1, 2, 3)$ trokut nastao od trokuta ABC, i svaka osoba je mogla samo na konačno načina odabrati komad koji joj odgovara, mora postojati beskonačan niz u kojem su svi odabiri od A, B i C konstantni. Zatvoreni skupovi preferencija nam garantiraju da će na graničnoj točki ovog niza trokuta osobe biti zadovoljne različitim izborima. □

Poopćenje na n osoba

Kod poopćenja gornjeg dokaza za 3 osobe na n osoba jedina zahtjevnija stvar je odabir triangulacije za prostor rješenja S. Trebamo triangulaciju koja omogućuje da svaki elementarni simpleks bude potpuno označen, i to imenima osoba. Triangulaciju koju smo koristili za $n = 3$ je jako teško poopćiti pa ćemo ovdje koristiti triangulaciju po *baricentričnoj subdiviziji*.

Definicija 1.3.3. *Baricentrična subdivizija je (iterativni) postupak koji uzima svaki elementarni simpleks u triangulaciji simpleksa S i dijeli ga tako da označi težišta njegovih strana u svim dimenzijama i spaja ih međusobno, formirajući tako novu triangulaciju.*

Na slici 1.8 vidimo kako se baricentrična subdivizija primjenjuje na 2-simpleks. Primijetimo da mrežu subdivizije možemo učiniti proizvoljno malom iterirajući gore opisani postupak.

Pretpostavimo sada da smo iterirali baricentričnu subdiviziju m puta. Kako bismo dobili željene oznake vrhova, prvo označimo sve vrhove iz $(m-1)$-te iteracije sa A. Svi vrhovi koji nastaju m-tom iteracijom su težišta simpleksa iz $(m-1)$-te iteracije. S obzirom da su dosad svi vrhovi bili označeni samo jednim slovom, preostaje nam još $(n-1)$ neiskorištenih slova. Primijetimo da je isto toliko *klasa* težišta (prva klasa su težišta 1-simpleksa, druga težišta 2-simpleksa, ..., $(n-1)$-ta klasa su težišta $(n-1)$-simpleksa) pa sve vrhove iz iste klase označimo istim slovom, i svaku klasu različitim slovom. Na taj način smo iskoristili sva slova i označili sve vrhove.

Sad kad smo označili triangulaciju, dokaz nastavljamo potpuno analogno slučaju $n = 3$. Svaka točka u S odgovara nekoj particiji pa uvodimo nove oznake na način da vlasnika svakog vrha pitamo: "Koji komad bi uzeo da je torta razdijeljena na ovaj način?". Te oznake su opet Spernerove i daju nam particije koje su međusobno jako blizu i daju svakoj osobi drugi komad torte. S obzirom da postupak možemo provesti na proizvoljno finim triangulacijama, možemo naći nizove particija koji konvergiraju prema jednoj particiji u kojoj svaka osoba uzima drugi komad torte.

Raspodjela stanarine

U ovom potpoglavlju ćemo primijeniti metodu za raspodjelu torte na problem raspodjele stanarine, ali ćemo je malo modificirati. Problem se sastoji od toga da n osoba želi unajmiti kuću sa n soba za fiksan iznos stanarine koji trebaju pravedno razdijeliti među sobom, s tim da osobe mogu imati različite preferencije što se tiče karakteristika sobe i iznosa koji bi za nju trebalo plaćati - netko možda želi veliku sobu, netko sobu s pogledom, netko najjeftiniju, itd.

Definicija 1.3.4. *Reći ćemo da osoba preferira neku sobu u kući ako joj cijena te sobe odgovara više (ili jednako) nego cijena bilo koje druge sobe u kući.*

Zanima nas postoji li metoda koja će pravedno razdijeliti stanarinu, tako da svaki stanar preferira različitu sobu, pa ćemo dokazati da vrijedi sljedeće:

Teorem 1.3.5. *Pretpostavimo da n stanara u kući sa n soba želi odlučiti tko će uzeti koju sobu i za koji dio ukupne stanarine. Također, neka vrijede sljedeći uvjeti:*

1. *U danoj particiji stanarine svaki stanar preferira barem jednu sobu*
2. *Svakom stanaru besplatna soba odgovara više od bilo koje druge sobe.*
3. *Stanar koji preferira neku sobu za konvergentan niz cijena preferira tu sobu i na graničnoj cijeni*

Tada postoji particija stanarine takva da svaki stanar preferira drugu sobu.

Uvjet 1. nam osigurava da je problem dobro postavljen jer ne možemo uopće govoriti o preferencijama ako nekom stanaru nijedna soba ne odgovara, bilo zbog previsoke stanarine, lošeg stanja soba ili nećeg trećeg. Uvjet 2. osigurava da nijedna soba u kući nije apsolutno nepoželjna, odnosno nikad nećemo imati takvu sobu koju nitko ne bi uzeo ni da je besplatna. Uvjet 3. govori da su skupovi preferencija zatvoreni u topološkom smislu. Primijetimo da se skupovi preferencija mogu preklapati - ako u nekoj raspodjeli stanarine neki stanar preferira dvije ili više soba, tom stanaru možemo dati bilo koju od tih soba.

Odmah uočavamo sličnosti između problema raspodjele torte i problema raspodjele stanarine, ali također treba napomenuti da postoje razlike - s obzirom da su sobe fiksne veličine, ne možemo ih dijeliti na manje komade pa ne možemo izravno primijeniti metode za rješenje problema rezanja torte, ali ćemo svejedno pokušati riješiti problem stanarine pristupom koji koristi Spernerovu lemu.

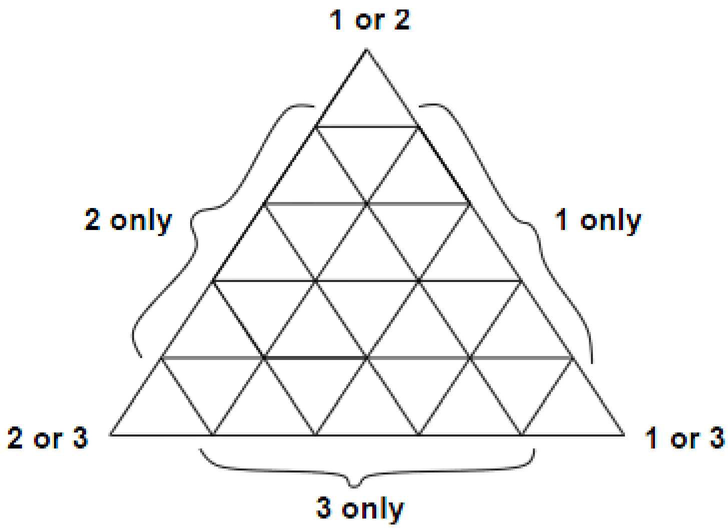
Zapišimo problem matematički. Ako imamo n stanara i n soba, označenih sa $1, \dots, n$, i ako označimo sa x_i cijenu i-te sobe, uz pretpostavku da je iznos ukupne stanarine 1, problem možemo zapisati na sljedeći način: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1, \forall x_i \geq 0$. Iz ovoga vidimo da je skup S svih raspodjela stanarine zapravo $(n-1)$-simpleks u $\mathbb{R}^n$, kao i u slučaju torte.

Također kao u slučaju torte, trianguliramo simpleks finom baricentričnom subdivizijom i označimo triangulaciju na isti način. Slova kojima su označeni vrhovi ćemo smatrati vlasnicima vrhova. Prisjetimo se da svaki vrh predstavlja jednu particiju stanarine i uvedimo nove oznake na način da pitamo vlasnika svakog vrha: "Kad bi stanarina bila razdijeljena na ovaj način, koju sobu bi uzeo?". Primijetimo da nam uvjet 1. osigurava da ćemo na ovakvo pitanje uvijek dobiti odgovor i označimo taj vrh upravo brojem sobe koji smo dobili kao odgovor. Ako stanar preferira dvije ili više soba, potpuno je svejedno koju od njih uzmemo kao oznaku.

Do ovog koraka smo dakle postupali potpuno jednako kao u slučaju torte, a sada ćemo ipak morati modificirati postupak jer oznake koje smo dobili nisu Spernerove. Zbog uvjeta 2., oznake su takve da je duž svake $(n-k)$-strane k soba besplatno pa stanari preferiraju jednu od tih k soba. Na slici 1.9 možemo vidjeti kako gore opisane oznake izgledaju u slučaju $n = 3$.

Vratimo se na trenutak na sliku 1.7 i uočimo da postoji izvjesna *dualnost* u oznakama vrhova u slučaju torte i u slučaju stanarine. Vrh A ima koordinate $(0, 0, 1)$, što u slučaju torte znači da uzima treći komad jer time dobiva cijelu tortu pa taj vrh dobiva oznaku 3. Međutim, u slučaju stanarine taj vrh bismo označili sa 1 ili 2 jer su to besplatne sobe. Slično, vrh B u slučaju torte dobiva oznaku 2, a u slučaju stanarine 1 ili 3, C u prvom slučaju 3, u drugom 1 ili 2. Također, duž stranice AB koordinate su oblika $(0, x, y)$, pri čemu je $x > 0$ i $y > 0$. U slučaju torte to daje oznake 2 ili 3 zbog pretpostavke *gladi*, a u slučaju stanarine 1 jer je prva soba besplatna. Analogno za preostale 2 stranice.

Dakle, iako u ovom slučaju oznake vrhova triangulacije nisu Spernerove, veza ipak postoji. Kad bismo nekako mogli zamijeniti oznake stranica i vrhova, dobili bismo Spernerove oznake i mogli bismo nastaviti kao u slučaju torte, uzimajući sve finije triangulacije sve dok ne nađemo niz potpuno označenih elementarnih simpleksa koji konvergiraju u točku koja nam onda zbog uvjeta 3. daje particiju stanarine u kojoj je svaki stanar zadovoljan različitom sobom.



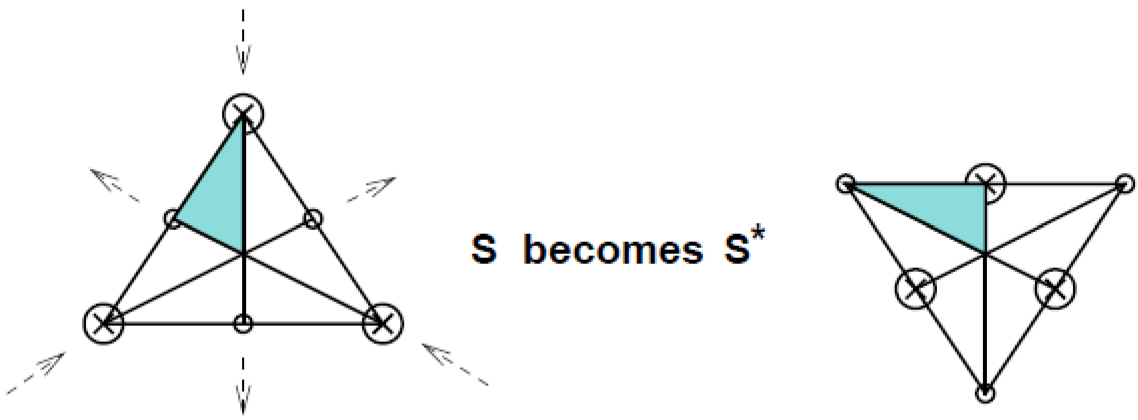
Slika 1.9: Oznake koje dobijemo ispitujući vlasnike o sobama

Sve to nas dovodi do pojma *dualnog simpleksa.*

Definicija 1.3.6. *Dualan simpleks S^* se dobije iz simpleksa S na način da im se zamijene dimenzije k-dimenzionalnih i $(n-1-k)$-dimenzionalnih strana.*

Konkretno, na primjeru trokuta, vrhovi od S postaju stranice u S^*, a stranice od S postaju vrhovi u S^*. Primijetimo da se i S^* može triangulizirati, štoviše, ako S i S^* trianguliziramo baricentričnom subdivizijom, dobijemo 1-1 korespondenciju težišta stranica u S s vrhovima u S^* i obratno, vrhova od S s težištima stranica u S^*.

Time su nam oznake vrhova unutarnjih simpleksa ostale iste, što se može vidjeti na slici 1.10, pa postoji i 1-1 korespondencija između elementarnih simpleksa u S i S^*. Ono što smo time dobili je da sad S^* ima Spernerove oznake pa možemo primijeniti Spernerovu lemu koja nam garantira egzistenciju barem jednog potpuno označenog elementarnog simpleksa u S^*, a to onda znači da takav simpleks postoji i u S, što nam omogućava da prethodno opisanim postupkom dođemo do točke koja predstavlja particiju stanarine u kojoj svaki stanar preferira različitu sobu.



Slika 1.10: Dualizacija. Označeni su vrhovi, težišta i jedan bazni simpleks kako bi se lakše uočila transformacija.

Poglavlje 2

Brouwerov teorem o fiksnoj točki

U ovom ćemo poglavlju iskazati Brouwerov teorem o fiksnoj točki i dokazati ga za $n = 2$, i to koristeći Spernerovu lemu za 2-simplekse. Usput ćemo dokazati i malo jači rezultat od Spernerove leme.

Počnimo s definicijom fiksne točke. Fiksna točka funkcije f sa skupa X u samoga sebe je točka x_0 koja zadovoljava $f(x_0) = x_0$. Ako označimo $D_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$, možemo izreći Brouwerov teorem o fiksnoj točki na sljedeći način:

Teorem 2.0.7. *Svaka neprekidna funkcija $f : D_n \to D_n$ ima fiksnu točku.*

Za početak pogledajmo kako dokaz izgleda za $n = 1$ pa ćemo kasnije dati i dokaz za $n = 2$.

Dokaz. Uočimo da je skup D_1 zapravo segment $[-1, 1]$, dakle promatramo $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$. Ako definiramo $g(x) = x - f(x)$, koja je neprekidna jer je f neprekidna, tada očito vrijedi $g(1) \geq 0$ i $g(-1) \leq 0$ pa po Teoremu srednje vrijednosti postoji točka x_0 takva da je $g(x_0) = 0$, a to upravo povlači $f(x_0) = x_0$. $\square$

Definirajmo sada pojam *domena fiksne točke*.

Definicija 2.0.8. *Domena fiksne točke je skup $G \subset \mathbb{R}^n$ takav da svaka neprekidna funkcija sa G u samoga sebe ima fiksnu točku.*

Uz takvu definiciju dobivamo da Brouwerov teorem o fiksnoj točki zapravo govori da je svaki D_n domena fiksne točke.

S druge strane, primijetimo da npr. skupovi $D_n \setminus \{x\}$, za bilo koji $x \in D_n$, $[0, 1] \cup [2, 3]$ ili $\mathbb{R}$ nisu domene fiksne točke. Ono što skupove D_n razlikuje od gornjih skupova je svojstvo kompaktnosti, koje je jako bitno za Brouwerov teorem o fiksnoj točki.

Na primjer, uzmimo skup $D_1 \setminus \{0\}$, dakle $[-1, 1] \setminus \{0\}$ i pogledajmo funkciju $f(x) = -x$ definiranu na tom skupu. Za $x \in [-1, 0\rangle$ je $f(x) \in \langle 0, 1]$, i obratno, što znači da f nema nijednu fiksnu točku, a neprekidna je pa $[-1, 1] \setminus \{0\}$ ne može biti domena fiksne točke.

Za skup $[0, 1] \cup [2, 3]$ uzmimo sljedeću funkciju:

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 2, x \in [0, 1] \\ &= x - 2, x \in [2, 3]. \end{aligned}$$

Za $x \in [0, 1]$ je $f(x) \in [2, 3]$, i obratno, što znači da f nema nijednu fiksnu točku, a neprekidna je pa $[0, 1] \cup [2, 3]$ ne može biti domena fiksne točke.

Skup $\mathbb{R}$ ne može biti domena fiksne točke jer npr. za funkciju $f(x) = x + 1$, koja je neprekidna, vrijedi $f(x) > x, \forall x$, pa ta funkcija nema nijednu fiksnu točku.

Može se dokazati da vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 2.0.9. *Ako je G domena fiksne točke, a $f : G \to H$ neprekidna bijekcija s neprekidnim inverzom, tada je i H domena fiksne točke.*

Dokaz. Ako je $g : H \to H$ neprekidna, onda je i $f^{-1} \circ g \circ f$ neprekidna kao kompozicija neprekidnih funkcija. To je neprekidna funkcija sa G u G, pa po definiciji domene fiksne točke slijedi da ima fiksnu točku x_0. Sada vrijedi $(f^{-1} \circ g \circ f)(x_0) = x_0$, dakle i $g(f(x_0)) = f(x_0)$, što znači da je $f(x_0)$ fiksna točka od g. □

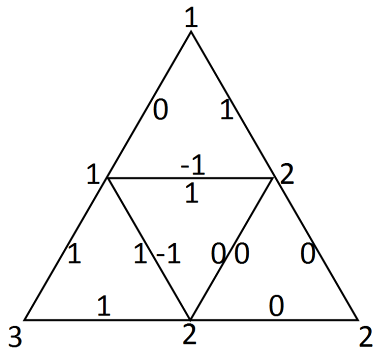
To sad znači da je *biti domena fiksne točke* topološko svojstvo. Specijalno, Brouwerov teorem o fiksnoj točki za $n = 2$ je sada ekvivalentan tome da svaka neprekidna funkcija s trokuta u taj isti trokut ima fiksnu točku jer postoji neprekidna bijekcija s neprekidnim inverzom koja ide iz kruga u trokut.

Za nastavak će nam trebati Spernerova lema, odnosno malo jača verzija Spernerove leme.

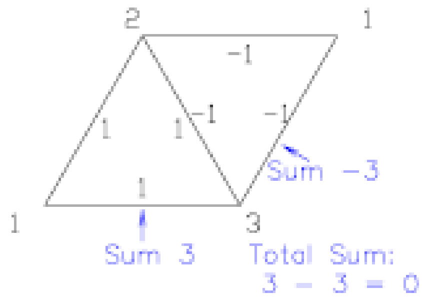
Teorem 2.0.10. *Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je glavni trokut T u Spernerovoj triangulaciji označen sa* $1-2-3$ *u smjeru kazaljke na satu. Ako sa A označimo broj elementarnih* $(1, 2, 3)$*-trokuta koji su također orijentirani u smjeru kazaljke na satu, a sa B broj takvih trokuta koji su orijentirani u smjeru suprotnom od kazaljke na satu, tada vrijedi $A - B = 1$.*

Primijetimo da je $A + B$ ukupan broj elementarnih $(1, 2, 3)$-trokuta u T, te da je on neparan ako gornji teorem vrijedi, dakle i veći od nule, pa je doista gornji teorem malo jača verzija Spernerove leme.

Dokaz. Označimo svaki brid u triangulaciji na sljedeći način: ako su dva krajnja vrha nekog brida označena sa i i j (u smjeru kazaljke na satu), označimo taj brid sa 0 ako vrijedi $i = j \bmod 3$, sa 1 ako vrijedi $j = i + 1 \bmod 3$, i sa -1 ako vrijedi $j = i - 1 \bmod 3$, kao na



Slika 2.1: Trokut s oznakama bridova



Slika 2.2: Mnogokut sastavljen od trokuta

slici 2.1. Ako je neki brid dio 2 različita elementarna trokuta, dobit će 2 oznake, po jednu za svaki od njih.

Sada primijetimo sljedeće 3 stvari:

1. Oznake bridova elementarnog trokuta u sumi daju 3 ako je trokut označen (1, 2, 3) u smjeru kazaljke na satu, -3 ako je (1, 2, 3) u smjeru suprotnom od kazaljke na satu, i 0 inače.

2. Ako je neki brid dio 2 različita elementarna trokuta, tada će njegove oznake s jedne i druge strane biti suprotni brojevi.

3. Suma oznaka bridova mnogokuta koji je sastavljen od elementarnih trokuta je jednaka sumi svih suma oznaka elementarnih trokuta, kao na slici 2.2.

Suma bridova glavnog trokuta je 3 jer svaka stranica doprinosi sa 1. S obzirom da je ta suma jednaka sumi svih suma oznaka bridova elementarnih trokuta, dobivamo $3A - 3B = 3$. □

Prije dokaza Brouwerovog teorema za $n = 2$ uvedimo još pojam *težišnih koordinata*. Težišne koordinate prikazuju točku trokuta kao težinsku sredinu vrhova trokuta, dakle to su uređene trojke čija je suma 1.

Definicija 2.0.11. *Svaka točka $x = (x_1, x_2)$ trokuta T čiji su vrhovi točke $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ i $c = (c_1, c_2)$ se može prikazati u obliku $x = \lambda_1 * a + \lambda_2 * b + \lambda_3 * c$, pri čemu je $\lambda_i \geq 0$ i $\sum \lambda_i = 1$. Zbrajanje se vrši po komponentama. Uređenu trojku $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ zovemo težišne koordinate točke x. Težišne koordinate vrhova trokuta su uvijek (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).*

Na primjer, ako uzmemo trokut čije su koordinate vrhova (0, 0), (0, 1), (1, 0) i ako stavimo da su težišne koordinate tih vrhova redom (1, 0, 0), (0, 1, 0) i (0, 0, 1), to onda znači da su težišne koordinate točke $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ uređena trojka $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ jer vrijedi $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{2} * (0,0) + \frac{1}{4} * (0,1) + \frac{1}{4} * (1,0)$. Težišne koordinate točke uvijek postoje jer na trokut možemo gledati kao na konveksnu ljusku svojih vrhova.

Sada ćemo iskazati i dokazati Brouwerov teorem o fiksnoj točki za $n = 2$.

Teorem 2.0.12. *Svaka neprekidna funkcija s trokuta u taj isti trokut ima fiksnu točku.*

Dokaz. Neka je f neprekidna funkcija s trokuta T u samog sebe. Pisat ćemo $(a, b, c) \mapsto (a', b', c')$ umjesto $f(a, b, c) = (a', b', c')$ u težinskim koordinatama. Označimo svaku točku u trokutu na sljedeći način. Neka vrijedi $(a, b, c) \mapsto (a', b', c')$.

- Ako je $a' < a$, označimo točku (a, b, c) sa 1.
- Ako je $a' \geq a$ i $b' < b$, označimo točku (a, b, c) sa 2.
- Ako je $a' \geq a$, $b' \geq b$ i $c' < c$ označimo točku (a, b, c) sa 3.

Ako ne možemo označiti točku (a, b, c) po gornjim pravilima, znači da vrijedi $a' \geq a$, $b' \geq b$ i $c' \geq c$, dakle i $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$ pa je točka (a, b, c) fiksna točka. Do kraja dokaza pretpostavljamo da svaku točku možemo označiti; ako je ne možemo, znači da je ona fiksna i da smo gotovi.

Intuitivno, ovim postupkom zapravo tražimo vrh trokuta kojem se točka ne približava. Na kraju dobijemo niz malih $(1, 2, 3)$-trokuta koji konvergiraju u jednu točku. Kad ta točka ne bi bila fiksna, neprekidnost od f bi povlačila da su oznake vrhova jednake kako se trokuti približavaju točki. To ćemo sada i formalizirati.

Za početak moramo provjeriti da su ove oznake Spernerove. U vrhovima trokuta dobijemo sljedeće:

- Ako vrijedi $(1, 0, 0) \mapsto (a, b, c)$, onda je $a \leq 1$ osim ako je ovo fiksna točka, dakle ovaj vrh dobiva oznaku 1.
- Ako vrijedi $(0, 1, 0) \mapsto (a, b, c)$, onda je $a \geq 0$ i $b < 1$ osim ako je ovo fiksna točka, dakle ovaj vrh dobiva oznaku 2.
- Ako vrijedi $(0, 0, 1) \mapsto (a, b, c)$, onda je $a \geq 0$, $b \geq 0$ i $c \leq 1$ osim ako je ovo fiksna točka, dakle ovaj vrh dobiva oznaku 3.

Pogledajmo točku $(a, b, 0)$ na stranici koja spaja vrhove $(1, 0, 0)$ i $(0, 1, 0)$. Uočavamo sljedeće: ako je $(a, b, 0) \mapsto (c, d, e)$, tada je $c < a$ ili $b < d$ pa je oznaka te točke 1 ili 2. U suprotnom, imamo $c \geq a, b \geq d$ pa i $c = a, d = b, e = 0$ pa je ta točka fiksna točka.

Na sličan način dobijemo da su točke na stranici koja spaja vrhove $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$ označene sa 2 ili 3 i točke na stranici koja spaja vrhove $(0,0,1)$ i $(1,0,0)$ sa 3 ili 1. Dakle, triangulacija označena na ovaj način je doista Spernerova triangulacija.

Sada uzimamo niz takvih triangulacija čiji promjer ide u 0, pri čemu promjer triangulacije definiramo kao najveću udaljenost između dva susjedna vrha u triangulaciji. Svaka od tih triangulacija sadrži bar jedan elementarni $(1,2,3)$-trokut. Pretpostavimo da su težišne koordinate vrhova tih trokuta

$$(x_{n,1}, y_{n,1}, z_{n,1})$$

$$(x_{n,2}, y_{n,2}, z_{n,2})$$

$$(x_{n,3}, y_{n,3}, z_{n,3})$$

s oznakama redom 1, 2 i 3. Ovdje n označava da je trokut iz n-te triangulacije u nizu.

Koristimo Bolzano-Weierstrassov teorem kako bismo našli konvergentan podniz

$$(x_{n_k,i}, y_{n_k,i}, z_{n_k,i}) \to (x, y, z)$$

za $1 \leq i \leq 3$. Ovo možemo napraviti za sva tri niza istovremeno jer su to vrhovi trokuta čiji promjer teži u 0.

Ako bismo htjeli izbježi korištenje Bolzano-Weierstrassovog teorema, mogli smo koristiti pod-triangulacije i naći ugnježđene $(1,2,3)$-trokute. Ako sada vrijedi

$$(x_{n_k,i}, y_{n_k,i}, z_{n_k,i}) \mapsto (x'_{n_k,i}, y'_{n_k,i}, z'_{n_k,i})$$

i

$$(x, y, z) \mapsto (x', y', z')$$

zbog Spernerovih oznaka imamo $x'_{n_k,1} \leq x_{n_k,1}$, pa zbog neprekidnosti i $x' \leq x$. Slično dobijemo $y' \leq y$ i $z' \leq z$ pa je (x, y, z) fiksna točka. $\square$

Poglavlje 3

Igra Hex i Brouwerov teorem

Svrha ovog poglavlja je pokazati da je Brouwerov teorem o fiksnoj točki, koji smo dokazali u prošlom poglavlju, posljedica činjenice da igra Hex ne može završiti remijem, odnosno da igra Hex uvijek ima pobjednika. Taj rezultat je jako važan jer se 2-dimenzionalna igra Hex za 2 igrača može poopćiti na n-dimenzionalnu igru za n igrača, a pomoću dokaza da takva igra uvijek ima pobjednika se može konstruirati algoritam za aproksimiranje fiksnih točaka neprekidnih preslikavanja. Prvi korak će biti opis igre Hex i njenih pravila, a kasnije ćemo istražiti njezinu vezu s Brouwerovim teoremom o fiksnoj točki.

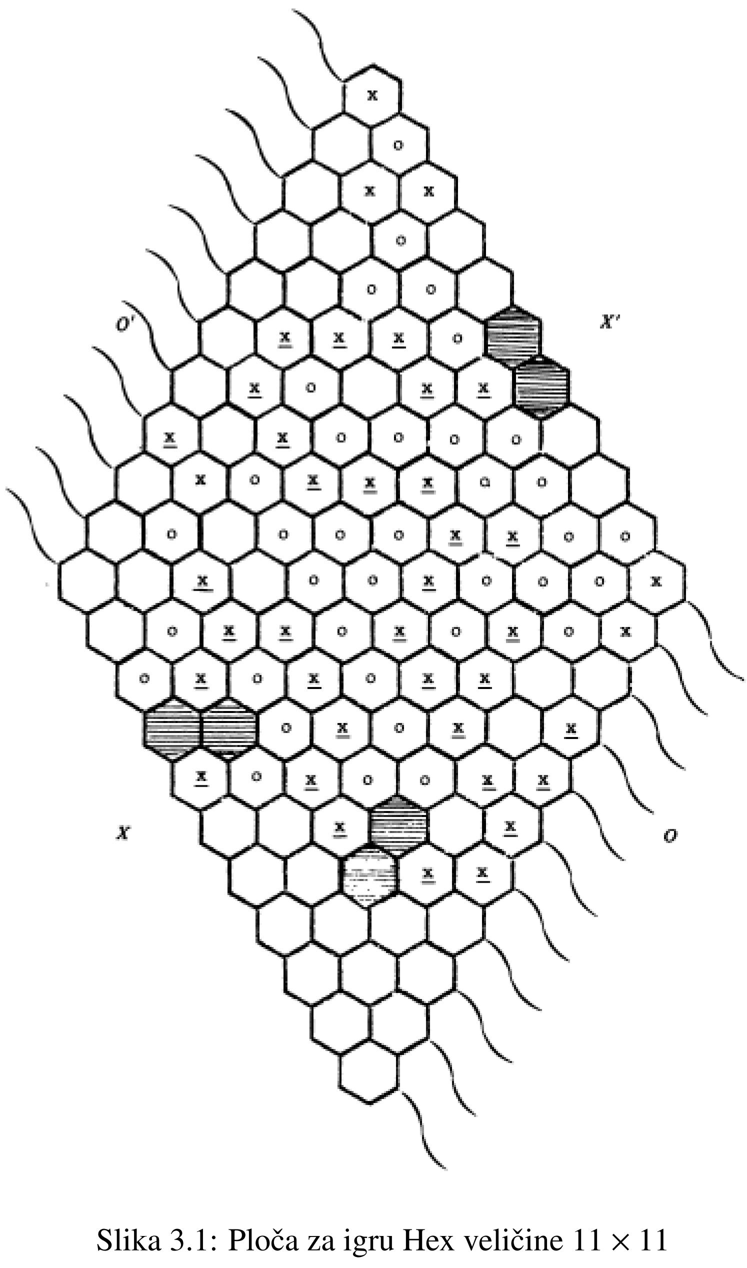
3.1 Igra Hex

Igru je izmislio danski inženjer i pjesnik Piet Hein 1942. godine, a ponovno otkrio John Nash 1948. na Princetonu. U nekim zemljama, poput Francuske, Njemačke i Izraela, je i danas popularna.

Može se igrati na pločama različite veličine, npr. 11×11, kao na Slici 3.1. Pravila su jednostavna. Kao u igri Križić-kružić, igrači igraju naizmjence jedan za drugim, i to tako da označavaju dotad neoznačene šesterokute (pločice) sa x ili o. Igrač x (ili o) je pobijedio ako je uspio označiti povezan niz šesterokuta (pločica) koji spaja regije X i X' (O i O'). Reći ćemo da je skup pločica S povezan ako bilo koja dva člana h i h' od S mogu biti povezana *putem* $P = (h = h^1, h^2, \ldots, h^m = h')$, gdje su h^i i h^{i+1} susjedni, i $h^i \in S, \forall i$.

Na slici 3.1 još uvijek nijedan igrač nije pobijedio i na redu je igrač o, ali igrač x ima sigurnu pobjedu u 3 poteza ako označi po jednu iz svakog od 3 osjenčana skupa pločica. U tom slučaju, potencijalno pobjednički put s jedne na drugu stranu označen je podcrtanim x-evima.

Ono što razlikuje igru Hex od igre Križić-kružić je činjenica da igra Hex ne može završiti remijem, što je čest slučaj u igri Križić-Kružić. Razlog tome je činjenica da u igri Hex jedan igrač može blokirati drugog samo ako uspije kompletirati svoj put s jedne na



Slika 3.1: Ploča za igru Hex veličine 11×11

drugu stranu, odnosno drugim riječima ako uspije pobijediti. Da budemo malo precizniji, izrecimo sljedeći teorem, koji ćemo zvati Hex teorem:

Teorem 3.1.1. *Ako je svaka pločica na Hex ploči označena ili sa x ili sa o, tada postoji put x koji spaja regije X i X' ili put o koji spaja regije O i O'.*

Ovaj teorem je intuitivno prilično jasan. Zamislimo da su X-regije nasuprotne obale rijeke O (kao što slika 3.1 sugerira) i da igrač x pokušava sagraditi branu postavljajući kamenje. Očito je da će uspjeti u svom naumu samo ako je postavio kamenje na način da može proći preko njih na drugu obalu rijeke. Iako je očit, ovaj teorem ipak ima i određenu matematičku dubinu jer omogućuje relativno kratak dokaz Brouwerovog teorema.

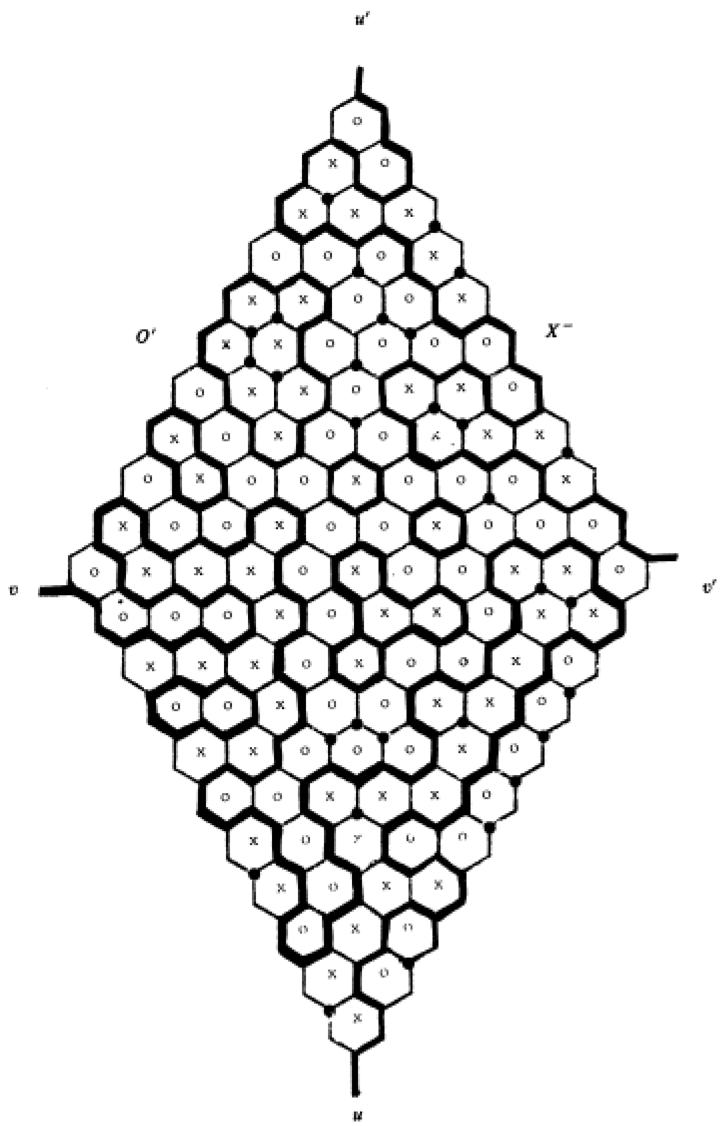
Tvrdnja Hex teorema se može i ojačati na način da kažemo da igra može imati samo jednog pobjednika. Ta tvrdnja je intuitivno jasna, možda i jasnija od one koju smo iznijeli maloprije. Na primjeru rijeke i brane, ako igrač x uspije postaviti branu, on je uz činjenicu da je ostvario svoj naum, odnosno pobijedio, također i onemogućio igrača o da pobijedi jer rijeka ne može proteći kroz branu kako bi spojila regije O i O'. Taj bi se rezultat mogao povezati s Teoremom o Jordanovoj krivulji (jednostavnoj zatvorenoj krivulji). Iznijeli smo ga da naglasimo kako nam za Brouwerov teorem ta jača tvrdnja nije potrebna, dovoljno nam je samo da igra uvijek ima (barem jednog) pobjednika.

Dokažimo sada tvrdnju Hex teorema.

Dokaz. Neka je Hex ploča prekrivena x-evima i o-ovima kao na slici 3.2. U ovom dokazu ćemo X-stranom smatrati pločicu označenu sa x ili jednu od X-regija i analogno za O-stranu.

Promotrimo graf bridova Γ na Hex ploči kojem su dodani bridovi koji završavaju vrhovima u, u', v, v' i koji razdvajaju 4 granične regije, kao na slici 3.2. Konstruirat ćemo algoritam za pronalaženje pobjedničkog skupa pločica na potpuno označenoj ploči. Proći ćemo grafom Γ, i to krenuvši iz vrha u i prateći jednostavno pravilo obilaska - uvijek idemo bridom koji je zajednički O-strani i X-strani. Brid od kojeg počinjemo, dakle onaj koji sadrži u, zadovoljava to pravilo jer razdvaja regije X i O. Ključno je primijetiti da ovo pravilo jedinstveno određuje put Γ; zamislimo da smo prošli nekim bridom e i došli u vrh w. U vrhu w se sastaju 3 strane od čega 2 sadrže brid e pa je jedna X-strana, a druga O-strana. Treća strana može biti bilo koja, ali u svakom slučaju postoji točno jedan brid e' koji zadovoljava naše pravilo obilaska (može se provjeriti na slici 3.2).

Mogli bismo umjesto ovog pravila uvesti pravilo da uvijek idemo bridom kojem je X-strana "zdesna" i O-strana "slijeva" ili obratno, ali to bi nam uvelike otežalo posao jer bismo morali paziti na orijentaciju, a to nam nije potrebno za dokaz. Ako naše pravilo obilaska garantira da se nikad nećemo vratiti u vrh koji smo već prošli, bit ćemo gotovi s dokazom. Naime, to bi onda značilo da obilazak jednom mora stati, s obzirom da graf ima samo konačan broj vrhova, a jedine moguće završne točke su vrhovi u', v i v'. Sada



Slika 3.2: Hex ploča s označenim grafom bridova

primijetimo da se u svakom od tih vrhova sastaju strane od kojih je bar jedna X' ili O' (ili obje u slučaju u'). Ako je završni vrh susjedan strani X', tada igrač x ima pobjednički skup jer je skup X-strana koji su susjedne našem obilasku povezan i spaja regije X i X'. □

Ključni dio dokaza bila je činjenica da obilazak grafa kroz svaki vrh prođe najviše jednom. To je posljedica sljedećeg teorema iz teorije grafova:

Teorem 3.1.2. *Konačan graf čiji vrhovi su najviše stupnja 2 je unija disjunktnih podgrafova od kojih je svaki jedno od sljedećeg:*

1. *izolirani vrh*
2. *jednostavan ciklus*
3. *jednostavan put*

Može se dokazati indukcijom po broju vrhova. Veza sa Hex teoremom je sljedeća. Ako uzmemo samo podskup Γ' od Γ koji se sastoji od bridova koji razdvajaju X-stranu i O-stranu, tada je očito zadovoljena pretpostavka teorema pa dobivamo da komponenta od Γ koja kreće iz u mora završiti u jednom od vrhova u', v, v'.

Na 3.2 je označen graf Γ' na potpuno označenoj ploči. Sastoji se od 6 jednostavnih ciklusa, 30 izoliranih vrhova i 2 jednostavna puta, u ovom slučaju od u do v' i od u' do v.

3.2 Veza s Brouwerovim teoremom

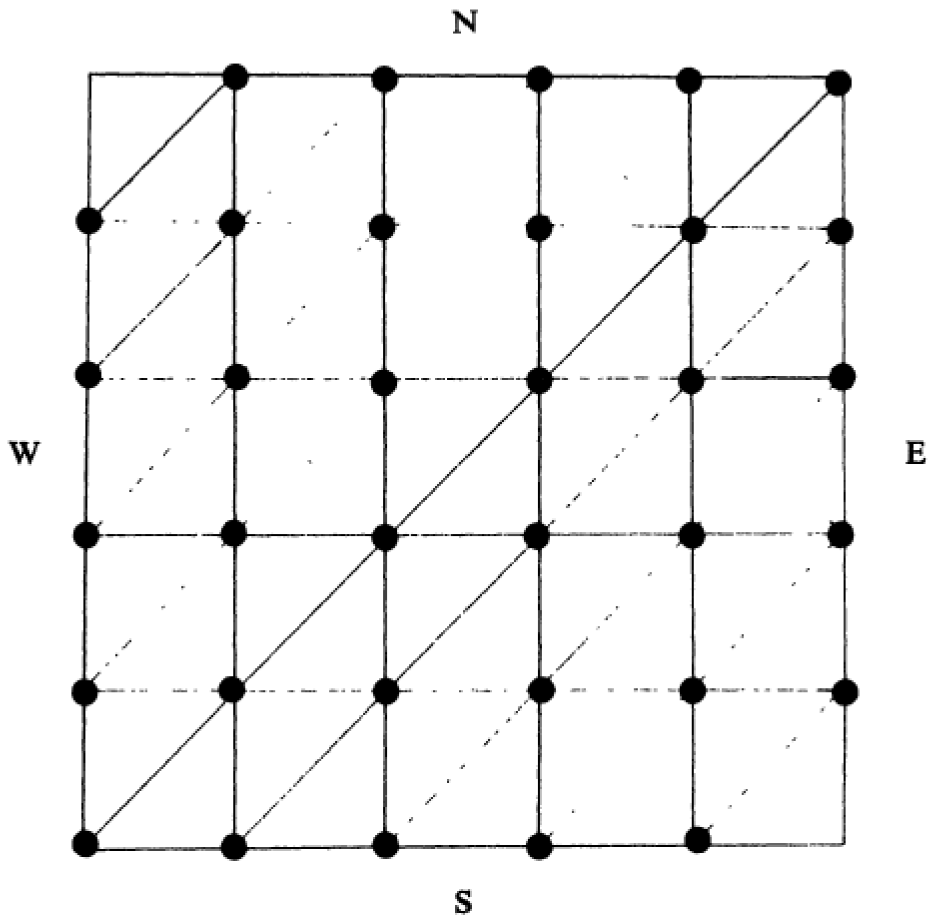
Kad je John Nash ponovno otkrio igru 1948. godine, zamislio je da se ona igra na malo drugačijoj, ali ekvivalentnoj Hex ploči. Njegova ploča sastojala se od kvadrata koji su bili susjedni ako su bili jedan kraj drugog horizontalno ili vertikalno ili duž pozitivne dijagonale. Jasno je da je takav model ploče ekvivalentan onom sa šesterokutima koji smo dosad koristili, jedina razlika je što ploča sa šesterokutima ljepše izgleda. Ovakvu reprezentaciju Hex ploče možemo matematički zapisati tako da se lako generalizira na n dimenzija. Neka je $\mathbb{Z}^n$ rešetka u $\mathbb{R}^n$.

Definicija 3.2.1. *Za $x \in \mathbb{R}^n$ definiramo $|x| = max_i|x_i|$, što je norma na $\mathbb{R}^n$.*

Definicija 3.2.2. *Za $x \neq y \in \mathbb{R}^n$, reći ćemo da je $x \leq y$ ako $x_i \leq y_i, \forall i$, a točke x i y će biti usporedive ako vrijedi $x \leq y$ ili $y \leq x$.*

Definicija 3.2.3. *Dvodimenzionalna Hex ploča B_k veličine k je graf čiji su vrhovi svi $z \in \mathbb{Z}^2$ za koje vrijedi $(1, 1) \leq z \leq (k, k)$. Vrhovi z i z' su susjedni (razapinju brid) u B_k ako vrijedi $|z - z'| = 1$, gdje su z i z' usporedivi.*

Na slici 3.3 možemo vidjeti grafičku reprezentaciju Hex ploče veličine 5. Rubni bridovi označeni su kao na kompasu slovima N, S, E i W koja predstavljaju redom sjever, jug, istok i zapad. Ako označimo vrhove sa $z = (z_1, z_2)$, tada za vrhove na sjeveru vrijedi $z_2 = k$, na jugu $z_2 = 0$, na istoku $z_1 = k$, a na zapadu $z_1 = 0$. *Horizontalni (vertikalni)* igrač pokušava napraviti put koji spaja E i W (N i S). S ovakvim oznakama možemo ponovo izreći Hex teorem na sljedeći način:



Slika 3.3: Hex ploča veličine 5

Teorem 3.2.4. *Neka je B_k prekriven dvama skupovima, H i V. Tada ili H sadrži skup vrhova koji spajaju E i W ili V sadrži skup vrhova koji spajaju N i S.*

Kasnije ćemo dati kombinatorni dokaz ovog teorema u n dimenzija, a sada ćemo pokazati da je ovaj teorem ekvivalentan sljedećoj verziji Brouwerovog teorema o fiksnoj točki:

Teorem 3.2.5. *Neka je f neprekidno preslikavanje s jediničnog kvadrata I^2 u samog sebe. Tada postoji $x \in I^2$ takav da vrijedi $f(x) = x$.*

Dokaz. Prvo dokazujemo da *Hex* povlači *Brouwera*. Neka je $f : I^2 \to I^2$ zadana sa $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. I^2 je kompaktan pa je dovoljno pokazati da za svaki $\epsilon > 0$ postoji

$x \in I^2$ takav da vrijedi $|f(x) - x| < \epsilon$. Zbog uniformne neprekidnosti od f znamo da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi $\delta < \epsilon$ i ako je $|x - x'| < \delta$, tada je $|f(x) - f(x')| < \epsilon$.

Zamislimo sada Hex ploču B_k na kojoj je $1/k < \delta$. Definiramo podskupove H^+, H^-, V^+, V^- od B_k na sljedeći način:

$$\begin{aligned} H^+ &= \{z | f_1(z/k) - z_1/k > \epsilon\} \\ H^- &= \{z | z_1/k - f_1(z/k) > \epsilon\} \\ V^+ &= \{z | f_2(z/k) - z_2/k > \epsilon\} \\ V^- &= \{z | z_2/k - f_2(z/k) > \epsilon\}. \end{aligned}$$

Intuitivno, vrh z spada u H^+, H^-, V^+, V^- ako f pomakne z/k barem ϵ jedinica desno, lijevo, gore ili dolje.

Teorem će biti dokazan ako pokažemo da ta četiri skupa ne pokrivaju B_k. Naime, ako z ne leži ni u jednom od tih skupova, tada vrijedi $|f(z/k) - z/k| < \epsilon$, a zbog činjenice da to vrijedi za svaki ϵ i kompaktnosti kvadrata tada slijedi da je z/k fiksna točka od f. Ključno je primijetiti da se (disjunktni) skupovi H^+ i H^- *ne dodiruju* (podskupovi A i B nekog grafa se dodiruju ako postoje $a \in A$ i $b \in B$ takvi da su a i b susjedni vrhovi). To znači, ako je $z \in H^+$ i $z' \in H^-$, tada vrijedi

$$f_1(z/k) - z_1/k > \epsilon$$

i

$$z'_1/k - f_1(z'/k) > \epsilon.$$

Zbrajanjem dobijemo

$$f_1(z/k) - f_1(z'/k) + z'_1/k - z_1/k > 2\epsilon,$$

a k i δ smo odabrali na način da vrijedi $z'_1/k - z_1/k < \delta < \epsilon$, pa dobivamo

$$z'_1/k - z_1/k > -\epsilon.$$

Zbrojimo li posljednje dvije nejednakosti, dobijemo

$$f_1(z/k) - f_1(z'/k) > \epsilon,$$

dakle z i z' nisu susjedni, jer bi u suprotnom vrijedilo $|z/k - z'/k| = 1/k < \delta$, a to je u kontradikciji s izborom δ.

Analogno se pokaže i da se V^+ i V^- ne dodiruju. Sada označimo $H = H^+ \cup H^-$ i $V = V^+ \cup V^-$, te pretpostavimo da je Q povezan skup u H. Kako se H^+ i H^- ne dodiruju, Q mora ležati sav u H^+ ili u H^-. Primijetimo da H^+ ne dodiruje E jer f preslikava iz I^2 u I^2 pa se nijedna točka na desnoj granici ne može preslikati udesno. Na sličan način možemo zaključiti da H^- ne dodiruje W pa Q ne može spajati E i W. Analogno, V ne može sadržavati skup koji bi spajao N i S. Sada po Hex teoremu dobivamo da skupovi H i V ne pokrivaju B_k, čime je dokaz gotov. □

Sada ćemo dokazati obratni smjer, odnosno da *Brouwer* povlači *Hex*.

Dokaz. Koristimo činjenicu da Hex ploča B_k daje triangulaciju kvadrata I_k^2 veličine $k \times k$ u $\mathbb{R}^2$. Očito je da se svaka točka u I^2 može jedinstveno prikazati kao konveksna kombinacija nekog skupa od najviše 3 vrha triangulacije koji su međusobno (u parovima) susjedni. Ti skupovi vrhova su bridovi i trokuti na slici 3.3.

Koristit ćemo također činjenicu da se svako preslikavanje $f : B_k \to \mathbb{R}^2$ može proširiti na neprekidno po dijelovima linearno preslikavanje $\hat{f}$ na I_k^2. Naime, ako je $x = \lambda_1 z^1 + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 z^3$, gdje su λ_i nenegativni brojevi koji u sumi daju 1, tada je po definiciji $\hat{f}(x) = \lambda_1 f(z^1) + \lambda_2 f(z^2) + \lambda_3 f(z^3)$.

U nastavku ćemo H-putem zvati bilo koji niz susjednih vrhova u H. Analogno će V-put biti niz susjednih vrhova u V.

Pretpostavimo sada da je B_k particioniran na 2 skupa, H i V, i definirajmo 4 nova skupa na sljedeći način: neka je $\hat{W}$ skup svih vrhova koji su spojeni sa W nekih H-putem, a $\hat{E} = H - \hat{W}$. Analogno, neka je $\hat{S}$ skup svih vrhova koji su spojeni sa S nekim V-putem i $\hat{N} = V - \hat{S}$. Iz definicije je jasno da se $\hat{W}$ i $\hat{E}$ ($\hat{N}$ i $\hat{S}$) ne dodiruju. Pretpostavimo da ne postoji nijedan H-put od E do W i nijedan V-put od N do S, ako dobijemo kontradikciju dokaz će biti gotov. Neka su e^1 i e^2 jedinični vektori u $\mathbb{R}^2$. Definiramo f sa B_k u samog sebe na sljedeći način:

$$\begin{aligned} f(z) &= z + e^1, z \in \hat{W} \\ &= z - e^1, z \in \hat{E} \\ &= z + e^2, z \in \hat{S} \\ &= z - e^2, z \in \hat{N}. \end{aligned}$$

Za svaku od gornje četiri mogućnosti treba provjeriti da f zaista ide u I_k^2. Na primjer, $z + e^1$ nije u B_k samo ako je $z \in E$; ali po pretpostavci da ne postoji H-put od W do E slijedi da $\hat{W}$ ne dodiruje E pa je $z + e^1 \in I_k^2, \forall z \in \hat{W}$. Za preostala tri slučaja se dobije analogno.

Sada proširujemo f po dijelovima linearno na cijeli I_k^2 i dobivamo kontradikciju na način da pokažemo da f nema fiksnu točku. To je posljedica sljedeće činjenice:

Teorem 3.2.6. *Neka su z^1, z^2 i z^3 vrhovi nekog trokuta u $\mathbb{R}^2$ i neka je $\hat{\rho}$ po dijelovima linearno proširenje preslikavanja ρ definiranog s $\rho(z^i) = z^i + v^i$, gdje su v^1, v^2 i v^3 zadani vektori. Tada ρ ima fiksnu točku ako i samo ako 0 leži u konveksnoj ljusci od v^1, v^2 i v^3.*

Dokaz. Neka je $x = \lambda_1 z^1 + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 z^3$. Tada je $\hat{\rho}(x) = \lambda_1(z^1 + v^1) + \lambda_2(z^2 + v^2) + \lambda_3(z^3 + v^3)$ i x je fiksna točka ako i samo ako je $\lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 v^3 = 0$. □

Primijenimo sada taj teorem na naše preslikavanje f. Ponovno je ključna činjenica da se $\hat{W}$ i $\hat{E}$ ($\hat{N}$ i $\hat{S}$) ne dodiruju. Ako uzmemo bilo koji trokut čiji su vrhovi susjedni u triangulaciji, nikad se ne događa da se jedan od tih vrhova translatira za e^i, a drugi za $-e^i$. To znači da se ta 3 vrha translatiraju za vektore koji leže u istom kvadratnu od $\mathbb{R}^2$ pa nemaju 0 u svojoj konveksnoj ljusci. Po gornjem teoremo dobivamo da f nema fiksnu točku, što je u kontradikciji s Brouwerovim teoremom. □

3.3 n-dimenzionalni Hex teorem

U ovom dijelu ćemo iskazati i dokazati n-dimenzionalni Hex teorem. Definicija Hex ploče dimenzije n je direktno proširenje one koju smo koristili u slučaju $n = 2$:

H^n_k, n-dimenzionalna Hex ploča veličine k, sadrži sve vektore (vrhove) $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}^n$ za koje vrijedi $1 \le z_i \le k, i = 1, \dots, n$. Vrhovi z i z' su susjedni ako vrijedi $|z - z'| = 1$ i z i z' su usporedivi (dakle, vrijedi $z_i \ge z'_i$ ili $z_i \le z'_i$).

Kako bismo malo olakšali notaciju, umjesto H^n_k pisat ćemo jednostavno H. Za svaki i sada definiramo

$$H_i^- = \{z | z \in H, z_i = 1\}$$

$$H_i^+ = \{z | z \in H, z_i = k\}.$$

Preslikavanje L sa H u $N = \{1, 2, \dots, n\}$ ćemo zvati *oznakom* od H. Sada možemo ponovno izreći Hex teorem:

Teorem 3.3.1. *Za svaku oznaku L postoji barem jedan i $\in N$ takav da $L^{-1}(i)$ sadrži povezan skup koji spaja H_i^- i H_i^+. (Takav skup ćemo zvati pobjednički i-skup.)*

Dokaz da su n-dimenzionalni Brouwerov i Hex teorem ekvivalentni je samo poopćenje dokaza za $n = 2$. Sa stajališta teorije igara igra Hex za n igrača vjerojatno nije previše zanimljiva. Naime, osim problema oko dizajna Hex ploče za n igrača tu dolaze u obzir i savezi pa je teško složiti zadovoljavajuću teoriju koja bi uključivala i njih. Kad je uključeno više igrača, mogu se igrati i različite verzije igre Hex, npr. da onaj koji prvi spoji svoje nasuprotne strane nije pobjednik nego gubitnik, ili da igrač i pobjeđuje ako igrač $i+1$ spoji svoje nasuprotne strane. Vratimo se sada na dokaz teorema.

Dokaz. Kako bismo dokazali teorem, na početku definiramo *proširenu Hex ploču* $\hat{H}$ tako da sadrži sve $z \in \mathbb{Z}^n$ za koje je $0 \le z_i \le k + 1$. Nadalje, definiramo

$$F_i^+ = \{z | z \in \hat{H}, z_i = k + 1\}$$
$$F_i^- = \{z | z \in \hat{H}, z_i = 0\}.$$

Skupove F_i^+ i F_i^- ćemo zvati *stranama od* $\hat{H}$. U nastavku uvodimo još neke pojmove.

Neka je e^i i-ti jedinični vektor u $\mathbb{R}^n$ i e neka je n-vektor, čije su sve koordinate 1. Definiramo n-simpleks kao $(n+1)$-torku vrhova $\sigma = (z^0, \ldots, z^n)$, gdje su $z^i \in \mathbb{Z}^n$ i

$$z^{i+1} - z^i = e^r, \text{ za neki } r \in N, \tag{3.1}$$

te

$$z^{i+1} - z^i \neq z^{j+1} - z^j, \text{ za } i \neq j. \tag{3.2}$$

Primijetimo da je za $\sigma \subset \hat{H}$ svaki par z^i i z^j susjedan. Definiramo *i-stranu od σ* kao n-torku $\tau^i = (z^1, \ldots, z^{i-1}, z^{i+1}, \ldots, z^n)$. Značajan će nam biti i simpleks $\sigma^0 = (0, e^1, e^1 + e^2, \ldots, e)$. Primijetimo da svi vrhovi tog simpleksa leže u H i njegova n-strana $\tau^0 = (0, \ldots, e^1 + e^2 + \ldots + e^{n-1})$ leži u F_n^-.

Za $0 < i < n$ *i-susjed* od σ je simpleks $\tilde{\sigma}$ čiji vrhovi su isti kao i oni od σ, jedino je z^i zamijenjen sa $\tilde{z}^i = z^{i-1} - z^i + z^{i+1}$. Vrh $\tilde{z}^i$ ćemo zvati *parnjakom vrha z^i s obzirom na σ*. Lako se vidi da σ zadovoljava (3.1) i (3.2), te da je $\tilde{\sigma}$ i-susjed od σ ako i samo ako je σ i-susjed od $\tilde{\sigma}$ i σ i $\tilde{\sigma}$ se sijeku u svojoj zajedničkoj i-strani. Također definiramo *0-susjeda* od σ kao $\tilde{\sigma} = (z^1, \ldots, z^n, \tilde{z}_0)$, gdje je $\tilde{z}_0 = z^1 - z^0 + z^n$ i *n-susjeda od σ* kao $\tilde{\sigma} = (\tilde{z}^n, z^0, \ldots, z^{n-1})$, gdje je $\tilde{z}^n = z^{n-1} - z^n + z^0$. Opet z^0 i $\tilde{z}^0$, te z^n i $\tilde{z}^n$ zovemo parnjacima, i ako je $\tilde{\sigma}$ 0-susjed od σ, tada je σ n-susjed od $\tilde{\sigma}$ i $\sigma \cap \tilde{\sigma}$ je n-strana od σ i 0-strana od $\tilde{\sigma}$.

Sada proširimo oznaku l na $\hat{H}$ na način da je definiramo na stranama od $\hat{H}$ koristeći *leksikografsko pravilo.*

$$\begin{aligned} L(z) &= Min\{i | z \in F_i^-\}, \text{za} z \in \cup F_i^- \\ &= Min\{i | z \in F_i^+\}, \text{inače} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Trebat će nam još jedna definicija. Simpleks σ ili strana τ će biti *potpuno označeni* ako L preslikava σ ili τ u cijeli N. Primijetimo da su simpleks σ^0 i njegova n-stranica τ^0 potpuno označeni s obzirom da po (3.3) vrhovi od τ^0 imaju oznake $1, 2, \ldots, n$. Sada definiramo graf Γ čiji čvorovi su svi potpuno označeni simpleksi u $\hat{H}$. Par takvih simpleksa, σ i $\tilde{\sigma}$ je susjedan ako je njihov presjek potpuno označena stranica. Ovdje je opet ključna sljedeća činjenica, kao i u slučaju $n = 2$:

Teorem 3.3.2. *Svaki čvor od Γ je stupnja najviše 2.*

Dokaz. Neka je $\sigma = (z^0, \ldots, z^n)$ potpuno označen. Tada σ ima točno dva čvora, z^i i z^j, s istom oznakom. Dakle, $\tilde{\sigma}$ je potpuno označen susjed od σ ako i samo ako je i- ili j-susjed od σ jer za bilo kojeg drugog susjeda njihov presjek ne bi bio potpuno označena stranica. □

Sada primijetimo da simpleks σ^0 ima točno jednog potpuno označenog susjeda. Odnosno, pretpostavimo da je $L(e) = i > 1$. U tom slučaju je $\tilde{\sigma}^0 = (-e^n, 0, \ldots, e^1 + \ldots + e^{n-1})$

n-susjed od σ^0, a to nije u $\hat{H}$ s obzirom da je $-e^n$ negativan. Drugi vrh od σ^0 s oznakom i je $e^1 + \ldots + e^{i-1}$ i njegov parnjak je $e^1 + \ldots + e^{i-2} + e^i$, koji je u $\hat{H}$, pa σ^0 ima stupanj 1.

Primijenimo li Teorem 3.1.2., dobijemo da je σ^0 početni čvor jednostavnog puta $P = (\sigma^0, \sigma^1, \ldots, \sigma^m)$. Tvrdimo:

Teorem 3.3.3. *Potpuno označena stranica od σ^m leži na nekoj strani F_i^+ od $\hat{H}$.*

Dokaz. Neka je $\sigma^m = (z^0, \ldots, z^n)$. Kako σ^m ima samo jednog susjeda, mora vrijediti da za neki i parnjak $\tilde{z}^i$ od z^i nije u $\hat{H}$. Za $0 < i < n$ se to ne može dogoditi jer je $z^{i-1} < \tilde{z}^i < z^{i+1}$ i z^{i-1} i z^{i+1} su u $\hat{H}$ pa je i $\tilde{z}^i$. Pretpostavimo da σ^m nema nijednog 0-susjeda; to znači da $\tilde{z}^0 = z^1 - z^0 + z^n$ nije u $\hat{H}$. Neka je $z^1 - z^0 = e_r$. Tada $\tilde{z}^0$ nije u $\hat{H}$ samo ako je $z_r^n = k + 1$; ali onda iz (3.2) slijedi $z_r^i = k + 1$ za sve $i > 0$, pa 0-stranica od σ^m leži na F_r^+, što je u skladu s tvrdnjom.

Ostalo je još istražiti mogućnost da σ^m nema nijednog n-susjeda, što bi impliciralo da $\tilde{z}^n = z^0 - z^n + z^{n-1}$ nije u $\hat{H}$. Ako je $z^n - z^{n-1} = e_r$, tada je $z_r^0 = 0$; ali opet zbog (3.2) to znači da je $z_r^i = 0$ za $i < n$ pa n-stranica τ od σ^m leži u F_r^-. Ali iz (3.3) τ može imati samo oznake $i \leq r$ pa s obzirom da je τ potpuno označena slijedi $r = n$ i $\tau \in F_n^-$. Kako bismo pokazali da to nije moguće, pokazujemo da je $\tau = \tau^0$ ako je $\tau = (z^0, \ldots, z^{n-1})$ potpuno označena i leži u F_n^-. Prvo tvrdimo da je $z^0 = 0$; jer ako je $z^0 > 0$, tada je $z_r^i > 0$ za sve i pa r ne može biti oznaka od τ. Na isti način dobijemo $z^1 = e^1$, jer kad bi z^1 bio bilo koji drugi jedinični vektor, tada nijedan vrh od τ ne bi imao oznaku 2. Isti argument nam daje $z^2 - z^1 = e^2$ i tako dalje. S druge strane, σ^m ne može imati τ^0 kao stranicu jer bi onda P bio ciklus, a znamo da je put. □

Sada je Hex teorem dokazan, jer ako σ^m ima potpuno označenu stranicu na F_i^+, tada postoji pobjednički i-skup. Potrebno je jednostavno odabrati vrhove označene sa i u svakom simpleksu niza P i primijetiti da oni tvore povezan skup. Dalje vrh $e^1 + \ldots + e^{i-1}$ od σ^0 leži na F_i^- i njegova oznaka je i pa taj skup spaja F_i^- i F_i^+. □

Valja napomenuti da je gornji dokaz u potpunosti konstruktivan i iz njega se može izvesti jednostavan algoritam za pronalaženje pobjedničkog i-skupa. Također, daje efikasan način nalaženja "gotovo fiksnih točaka" preslikavanja.

Evo i algoritma. Pretpostavimo da nam je dana oznaka L i pogledajmo oznaku vrha e. Ako je $L(e) = i$, uzmimo parnjak $\tilde{z}^i$ vrha z^i (s obzirom na σ^0). Nazovimo novi simpleks σ^1. Sada pogledajmo oznaku od $\tilde{z}^i$. Postoji točno jedan vrh od σ^1 s tom oznakom. Zamijenimo ga njegovim parnjakom itd. Svaki put kad u simpleks σ^k dovodimo novi vrh, drugi vrh od σ^k s istom oznakom mičemo i zamijenimo ga njegovim parnjakom. Na taj način u nekom trenutku dolazimo do pobjedničkog i-puta.

Kombinirajući ideje iz ovog i prethodnog dijela možemo za svaku neprekidnu funkciju f sa I^n u samog sebe naći točke koje ona pomiče za proizvoljno malo. Preciznije, reći ćemo da je točka x u n-kocki I^n *pomaknuta u smjeru i* ako je $|f(x) - x| = |f_i(x) - x_i|$ (ako ovo vrijedi za više različitih i, uzimamo najmanji). Kako bismo našli skoro fiksnu točku, uzmimo Hex ploču H_k^n. Što je veći k, to će naša aproksimacija biti bolja. Oznaku $L(z)$ vrha z sada definiramo kao smjer u kojem se z/k pomakne pod utjecajem f. Uočimo da nije potrebno računati oznake svih $n!k^n$ točaka od H_k^n. Umjesto toga, jednostavno pratimo Hex algoritam, računajući oznaku vrha samo ako ga donosimo u neki simpleks puta P. Hex teorem garantira da ćemo u nekom trenutku sresti dva vrha, z i z', koji su susjedni i takvi da ih f oba pomakne u smjeru i, ali je prvi pomaknut prema *naprijed*, odnosno $f_i(z) - z_i \geq 0$; a drugi je pomaknut prema *natrag*, odnosno $f_i(z) - z_i \leq 0$ (u originalu piše $\geq$). To slijedi iz činjenice da točke na stražnjoj (prednjoj) i-strani n-kocke ne mogu biti pomaknute prema natrag (naprijed). Ali, naravno, ako se dvije obližnje točke pomaknu u suprotnim smjerovima, tada nijedna ne može biti pomaknuta daleko ako je k velik.

Bibliografija

[1] D. Gale, *The Game of Hex and The Brouwer Fixed Point Theorem*, The American Mathematical Monthly **86** (1979), br. 10, 818–827.

[2] F. E. Su, *Rental Harmony: Sperner's Lemma in Fair Division*, The American Mathematical Monthly **106** (1999), br. 10, 930–942.

[3] A. Wright, *Sperner's Lemma and Brouwer's Fixed Point Theorem*, (2005), `http://web.stanford.edu/~amwright/BFPT.pdf`.

Sažetak

Njemački matematičar Emmanuel Sperner prvi je dokazao rezultat koji će se kasnije po njemu zvati Spernerova lema, a on kaže da svaka Spernerova triangulacija n-simpleksa sadrži neparan broj potpuno označenih n-simpleksa.

U ovom radu navodimo dokaz tog rezultata, kao i njegovu primjenu na probleme pravedne raspodjele torte i stanarine. Osim toga, pokazujemo vezu s Brouwerovim teoremom o fiksnoj točki i na kraju navodimo vezu Brouwerovog teorema s igrom Hex.

Summary

Emmanuel Sperner, a german mathematician, was the first to prove a result which will later be named after him and known as Sperner's lemma, which says that every Sperner triangulation of an n-simplex contains an odd number of fully labelled n-simplexes.

We present the proof of that result and apply it on fair division problems, namely on cake cutting and rental division. Besides that we show the connection with the Brouwer's fixed point theorem and in the end the connection betwen the Brouwer's theorem and the game of Hex.

Životopis

Jurica Pomper rođen je 20. prosinca 1990. godine u Varaždinu. Pohađao je i završio Osnovnu školu Vidovec te Varaždinsku gimnaziju. Sudjelovao je na općinskom i županijskom natjecanju iz matematike tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja, kao i na državnom natjecanju iz osnova informatike u srednjoj školi. Nakon završetka srednje škole, 2009. godine upisuje preddiplomski studij Matematike na Prirodoslovno–matematičkom fakultetu u Zagrebu. 2012. godine završava preddiplomski studij i upisuje diplomski studij Matematičke statistike.