Gilbreathov princip s primjenama na fraktale, popločavanja i magične trikove

Posavec, Ivana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Posavec

GILBREATHOV PRINCIP S PRIMJENAMA NA FRAKTALE, POPLOČAVANJA I MAGIČNE TRIKOVE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Franka Miriam Brückler

Zagreb, veljača, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svojoj mentorici doc. dr. sc. Franki Miriam Brückler na pomoći pri izradi ovog rada. Također, hvala mojoj obitelji i svima ostalima koji su mi bili podrška prilikom izrade ovog rada, kao i tijekom cijelog obrazovanja.

Sadržaj

Uvod

Jedan od načina da se djeci, ali i odraslima matematika učini zanimljivijom i zabavnijom, a ujedno doprinese boljem razumijevanju i savladavanju gradiva je korištenje zabavne matematike. U to spada i izvođenje i objašnjavanje različitih trikova. Iako su široj populaciji poznati mađioničarski trikovi za koje je opće poznato da su temeljeni na varanju, postoje i razni matematički trikovi u kojima nema klasičnog varanja, već za svaki trik postoji odgovarajuće matematičko objašnjenje. Većina matematičkih trikova je temeljena na modularnoj aritmetici, geometriji, topologiji ili algebri. Neki od njih bazirani su na poznavanju jednostavnijih pojmova iz navedenih područja, dok je za razumijevanje drugih potrebno poznavanje složenijih matematičkih koncepata. Neki od trikova koji se temelje na razumijevanju složenijih matematičkih koncepata vezanih za kombinatoriku opisani su u ovom radu i oni su prikladni za analizu s učenicima 4. razreda prirodoslovno – matematičkih gimnazija. Pozadina svakog od njih sakriva se u Gilbreathovu principu. Gilbreathov princip kombinatorni je princip koji opisuje invarijante u određenom tipu permutacija (Gilbreathove permutacije) koje odgovaraju miješanju kompleta igraćih karata na određen način.

U prvom poglavlju ovog rada najprije je opisan opći (prvi) Gilbreathov princip kojeg je Gilbreath otkrio 1958. godine, a koji nam govori da ako špil s parnim brojem karata složimo tako da u njemu alterniraju karte crvene i crne boje, onda će i nakon miješanja na točno određen način špil sadržavati parove raznobojnih karata. Osam godina kasnije, tj. 1966. godine, Gilbreath je otkrio da isto svojstvo vrijedi i ako u špilu alterniraju 4 svojstva. Najprije je mislio da se taj princip razlikuje od prvoga, pa ga je nazvao drugim Gilbreathovim principom. Međutim, kasnije je zaključio da je prvi princip samo specijalni slučaj drugoga te je generalizirao zaključke ova dva principa u jedan koji se po njemu naziva Gilbreathov princip. Prvo poglavlje sadrži i vizualna objašnjenja oba principa te iskaze i dokaze glavnih teorema vezanih za ovaj princip. U drugom poglavlju opisano je i objašnjeno nekoliko trikova koji se temelje na tom principu. U trećem poglavlju opisana je primjena Gilbreathova principa na fraktale i kvaziperiodična popločavanja. Veza ova dva naizgled nepovezana područja s Gilbreathovim principom otkrivena je tek nedavno. Od svih fraktala, veza s Gilbreathovim principom otkrivena je kod Mandelbrotova skupa, a od kvaziperiodičnih popločavanja otkrivena je veza s Penroseovim popločavanjima.

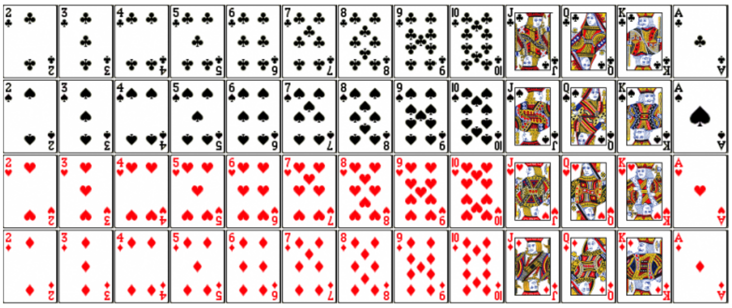
Poglavlje 1

Gilbreathov princip

1.1 Osnovni kartaški i kombinatorni pojmovi

Na početku ovoga poglavlja opisat ćemo osnovne pojmove koji su nam potrebni za daljnje praćenje ovoga rada.

Igraće karte, odnosno skup igraćih karata kojega nazivamo **špilom**, može nam poslužiti u slobodno vrijeme za razonodu, ali i za profesionalno kockanje. Ovisno o tome koju kartašku igru igramo, koristimo različite špilove karata. Najpoznatiji špilovi karata su: englesko-francuski špil, njemački špil, španjolsko-talijanske karte i karte za tarot. U svakom špilu karte se razlikuju po boji, vrijednosti i broju. U ovom radu koristit ćemo englesko-francuski špil karata koji se kod nas naziva i **standardni špil** (slika 1.1).



Slika 1.1: Standardni špil karata (izvornik: `http://www.jfitz.com/cards/classic-playing-cards.png`; *public domain*).

On se sastoji od 52 igraće karte u četiri boje: list (pik), romb (karo), djetelina (tref), srce (herc). Vrijednosti karata su redom: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J (dečko), Q (kraljica), K (kralj), A (as). Karte J (dečko), K (kraljica), K (kralj), ponekad i A (as), nazivaju se **dvorskim kartama**.

Mnoga kartaška pravila zahtijevaju da se špil karata prije dijeljenja presiječe. **Presijecanje** špila je postupak dizanja dijela karata s vrha špila i vraćanje tog dijela špila ispod drugog dijela s time da su karte cijelo vrijeme okrenute licem prema dolje. Navedenim postupkom gornja „polovica" špila postaje donja, a donja gornja. Presijecanjem špila sprječava se varanje, odnosno namještanje karata tijekom miješanja.

Karte možemo miješati na različite načine, a u ovom radu koristit ćemo postupak **uguravanja** (engl. riffle shuffle) jednog dijela špila u drugi. Postupak uguravanja sastoji se od toga da špil karata podijelimo na dva dijela (ne nužno jednaka). Jedan dio špila stavimo u lijevu ruku, a drugi u desnu. Složimo karte u rukama tako da je duži rub karata okrenut prema nama. Srednjim prstom, prstenjakom i malim prstom zahvatimo jedan kraći rub karata, a drugi palcem. Palac savijemo duž unutarnjeg ruba karata prema gore, a pomoću kažiprsta pritišćemo karte s vanjske strane prema stolu. Isti postupak napravimo s dijelom špila u drugoj ruci. Približimo ova dva dijela špila i pomičući palčeve prema gore, puštamo karte tako da padaju na stol. Na opisani način karate u lijevoj i desnoj ruci međusobno se ispreplíću. Postupak se izvodi sve dok u rukama imamo karata, te je bitno da su tijekom cijelog postupka karte okrenute licem prema dolje (vidi [9]). Postoje i drugi, uguravanju matematički ekvivalentni, načini miješanja koji bi se mogli koristiti umjesto uguravanja, ali jednostavnosti radi ćemo sve postupke opisivati pomoću miješanja uguravanjem.

Definicija 1.1.1. *Neka je N proizvoljan prirodan broj.* ***Permutacija*** *skupa $\{1, 2, \ldots, N\}$ je svaka bijekcija π: $\{1, 2, \ldots, N\} \to \{1, 2, \ldots, N\}$. Skup svih permutacija od N elemenata označavamo sa S_N.*

Drugim riječima, permutacija je svaki mogući razmještaj elemenata nekog skupa.

Uobičajeno, permutacije zapisujemo tablično:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & . & . & . & \mathrm{N} \\ \pi(1) & \pi(2) & . & . & . & \pi(N) \end{pmatrix}.$$

U ostatku rada N će predstavljati broj karata u pojedinim postupcima.

Teorem 1.1.2. *Broj permutacija N-članog skupa je $N!$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je N-člani skup skup $\{1, 2, \ldots, N\}$. Tada je permutacija uređena N-torka brojeva iz $\{1, 2, \ldots, N\}$. Postoji N mogućnosti za izbor prvog elementa, $N - 1$ mogućnosti za izbor drugog elementa, $N - 2$ mogućnosti za izbor trećeg elementa, itd. Prema principu produkta zaključujemo da ukupno ima $N \cdot (N - 1) \cdot (N - 2) \cdots 2 \cdot 1 = N!$ mogućnosti za izbor permutacije N-članog skupa. $\square$

Primjer 1.1.3. *Odredite broj permutacija u špilu koji se sastoji od 52 karte.*

U špilu od 52 karte sve su karte različite. Prvu kartu možemo odabrati na 52 načina, drugu na 51, treću na 50, četvrtu na 49, itd. Prema principu produkta, ukupno imamo $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdots 2 \cdot 1 = 52!$ *načina (to je reda veličine* 10^{67}*) za izbor 52 karte iz špila.*

Definicija 1.1.4. *Kažemo da je* π ***ciklus*** *ili* ***ciklička permutacija*** *ako* π *djeluje na sljedeći način:* $1 \mapsto \pi(1)$, $\pi(1) \mapsto \pi(\pi(1)) = \pi^2(1), \ldots, \pi^{n-1}(1) \mapsto 1$, *gdje je n broj elemenata skupa N.*

Cikličke permutacije obično zapisujemo ovako:

$$(1\ \pi(1)\ \pi^2(1) \ldots \pi^{n-1}(1))$$

U ovome radu, koristit ćemo i sljedeća dva teorema:

Teorem 1.1.5. *Skup od N elemenata ima* 2^N *podskupova.*

Dokaz. Teorem ćemo dokazati pomoću matematičke indukcije. Za $N = 1$ tvrdnja očito vrijedi jer skup koji se sastoji od jednog elementa ima dva podskupa: sebe samog i prazan skup.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za skup koji ima $N - 1$ element, tj. da je broj podskupova skupa od $N - 1$ elementa jednak 2^{N-1}.

Želimo dokazati da skup S koji se sastoji od N elemenata ima 2^N podskupova. Fiksirajmo neki element $a \in S$. Podijelimo podskupove od S u dvije klase: one koji sadrže a i oni koje ne sadrže a. Oni podskupovi koji ne sadrže a su podskupovi skupa $S_1 = S \setminus \{a\}$ koji ima $N - 1$ elemenata. Prema pretpostavci indukcije, tih podskupova ima 2^{N-1}. Oni podskupovi koji sadrže a mogu se napisati kao unija od $\{a\}$ i nekog podskupa od S_1, stoga i takvih ima 2^{N-1}. Prema principu sume, broj podskupova od S je $2^{N-1} + 2^{N-1} = 2^N$, čime smo dokazali korak indukcije. □

Teorem 1.1.6 (Teorem o dijeljenju s ostatkom)**.** *Za proizvoljan prirodan broj j i cijeli broj k postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je* $k = qj + r$, *pri čemu je* $0 \leq r < j$.

Dokaz. (Vidi [8]) Neka su $k \in \mathbb{Z}$ i $j \in \mathbb{N}$. Promotrimo niz cijelih brojeva: $\ldots, k - 2j, k - j, k, k + j, k + 2j, \ldots$ Izaberimo među njima najmanji nenegativan broj i označimo ga sa r. Dakle, $k - qj = \min(\mathbb{N}_0 \cap \{k - sj; s \in \mathbb{Z}\})$. Time smo dobili $r = k - qj, r \geq 0$ i pritom je $r < j$. U suprotnom, kada bi bilo $r \geq j$, onda je $k - qj \geq j$ iz čega bi slijedilo da je $k - j(q + 1) \geq 0$. To znači da $k - j(q + 1) < k - qj$, pa $k - qj$ nije najmanji nenegativan broj među navedenima. Došli smo do kontradikcije, tj. pretpostavka $r \geq j$ je kriva. Time smo pokazali da q i r postoje.

Dokažimo još da su q i r jedinstveni. Pretpostavimo da postoji još jedan par q_1 i r_1 takav da je $k = q_1 j + r_1$, $0 \leq r_1 < j$. Sada imamo $k = qj + r$ i $k = q_1 j + r_1$. Oduzimanjem ovih dviju jednakosti dobivamo $j(q-q_1) = r_1 - r$. Uzmimo da je $r < r_1$, odnosno $r_1 - r > 0$. Kako je $j > 0$, mora biti i $q - q_1 > 0$ pa je $r_1 - r \geq j$. No, vrijedi $0 < r_1 - r < j$ pa smo došli do kontradikcije. Analogno se dokazuje i da ne može biti $r > r_1$. Dakle, mora vrijediti $r = r_1$, a samim time je i $q = q_1$. □

Definicija 1.1.7. *Broj r iz prethodnog teorema naziva se* ***ostatak modulo*** *j. Pišemo: k mod* $j = r$.

Primjer 1.1.8. *Odredite r ako je:*

(a) $j = 3, k = 13.$

(b) $j = 5, k = 24.$

Rješenje:

(a) Ostatak pri dijeljenju 13 *sa* 3 *je* 1 *pa je* 13 *mod* $3 = 1$.

(b) Ostatak pri dijeljenju 24 *sa* 5 *je* 4 *pa je* 24 *mod* $5 = 4$.

1.2 Osnovni Gilbreathov princip

Napomena 1.2.1. *Kada u ovom poglavlju govorimo o boji karte ne mislimo na karo, herc, pik ili tref, već na to je li karta crvene ili crne boje.*

Norman Gilbreath, američki matematičar, informatičar i mađioničar, otkrio je 1958. godine zanimljivi kartaški trik. Sve što nam je potrebno za izvođenje trika je standardni špil karata. Karte posložimo tako da se crvena i crna boja međusobno izmjenjuju. Nakon toga, špil okrenemo licem prema dolje, presiječemo jedan ili više puta i podijelimo ga na dva podjednaka dijela tako da s vrha jednu po jednu odbrojimo neki broj karata. Jedan dio karata ostao je u rukama, a drugi na stolu. Uguramo jedan dio u drugi. U parovima uzimamo karte s vrha ili dna špila te ih okrećemo licem prema gore. One će biti međusobno različite boje, tj. u svakom paru jedna karta je crna, a druga crvena. Opisani način miješanja nazivamo Gilbreathovo miješanje.

Vizualno objašnjenje osnovnog Gilbreathova principa

Da bismo lakše shvatili o čemu nam govori osnovni Gilbreathov princip, mogu nam poslužiti prsti obje ruke i samoljepljivi papirići u dvije boje. Stavimo ruke ispred sebe s dlanovima okrenutima prema sebi i na svaki prst lijeve ruke nalijepimo papirić. Bitno je da susjedni prsti imaju nalijepljene papiriće različite boje. Isti postupak napravimo i na desnoj ruci s time da mali prst na desnoj ruci i mali prst na lijevoj ruci imaju nalijepljene papiriće različite

Slika 1.2: Papirići nalijepljeni na prste

boje (slika 1.2). Isprepletimo prste obje ruke na bilo koji način (slika 1.3). Gledajući tako isprepletene prste vidimo da oni u parovima (počevši od najljevijeg ili najdesnijeg prsta) imaju nalijepljene papiriće različite boje (slika 1.4). Također, možemo primijetiti da u ne-

Slika 1.3: Isprepleteni prsti 1

Slika 1.4: Isprepleteni prsti 2

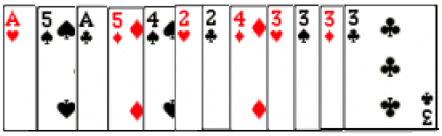
kim situacijama susjedni prsti imaju nalijepljene papiriće iste boje, ali ti prsti ne čine par (slika 1.5).

Ako zamislimo da nam prsti predstavljaju karte, a samoljepljivi papirići boje karata, dobivamo upravo ono što nam govori osnovni Gilbreathov princip. Lijeva ruka predstavlja jedan, a desna ruka drugi dio špila karata. Ispreplitanje prstiju nam predstavlja miješanje karata uguravanjem jednog dijela u drugi, a uvjet da mali prst na desnoj ruci i mali prst na lijevoj ruci imaju nalijepljene papiriće različite boje ekvivalentan je tome da su u oba dijela špila donje karte različite boje, što se automatski postiže ako gornje karte sa špila alternirajućih boja podijelimo jednu po jednu na hrpu, kako je ranije opisano.

Kao što je rečeno u opisanom primjeru s prstima, ako tako pomiješamo karte, možemo dobiti da su neke dvije susjedne iste boje, međutim one su u parovima različite, tj. karte

Slika 1.5: Isprepleteni prsti 3

na pozicijama $1-2, 3-4, 4-6, \ldots$ nikad neće biti iste boje (slika 1.6). Formalno: ako je N (broj karata) paran i prije su karte na neparnim pozicijama crne, a na parnim crvene (ili obrnuto), onda nakon Gilbreathova miješanja vrijedi: za svaki $i = 1, \ldots, \frac{N}{2}$ par karata na pozicijama $2i-1$ i $2i$ se sastoji od karata različite boje (vidi [3]).



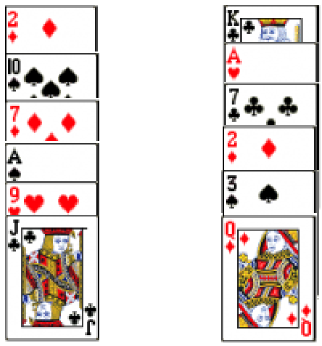
Slika 1.6: Špil nakon miješanja i dalje sadrži parove raznobojnih karata

Očigledno je da isti rezultat vrijedi za bilo koji način alterniranja karata, npr. karte alterniraju s obzirom na to jesu li njihove vrijednosti parne ili neparne. Dobiveni zaključak nazivamo **osnovnim (prvim) Gilbreathovim principom**.

Teorem 1.2.2. *Osnovno Gilbreathovo miješanje primijenjeno na špil s parnim brojem N=2n karata alternirajućih po boji rezultira špilom koji se sastoji redom od n parova raznobojnih karata.*

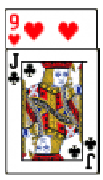
Dokaz. (Vidi [5]) Prvo primijetimo da eventualna početna presijecanja ne mijenjaju alternaciju karata, nego mogu samo promijeniti početnu boju s crvene na crnu ili obrnuto. Nakon presijecanja slijedi odbrojavanje nekog broja karata, čime dobivamo dva dijela špila. Primijetimo da time najgornja karta dolazi na dno odbrojanog dijela i redoslijed u njemu je obrnut od polaznog. Posebno, uvijek su prije uguravanja boje najdonjih karata u oba dijela različite. Tijekom uguravanja karata imamo tri dijela špila: dio u lijevoj ruci, dio u desnoj ruci i dio na stolu. Na početku miješanja dio na stolu je prazan, a na kraju su prazni dijelovi u lijevoj i desnoj ruci. Opišimo proces miješanja karata kao odlaganje po dvije karte iz dijelova u ruci na stol.

Dvije karte iz dijelova u ruci možemo odložiti na stol tako da su nam ili obje karte s dna dijela u lijevoj ruci ili obje s dna dijela u desnoj ruci ili po jedna s dna dijelova iz obje ruke. Cijeli se proces sastoji od uzastopnih ponavljanja navedenog koraka. Tijekom njegovog provođenja karte na dnu dijelova u rukama stalno su različite boje pa se zbog toga na stolu nalazi špil karata koji se sastoji od uzastopnih parova karata različite boje.

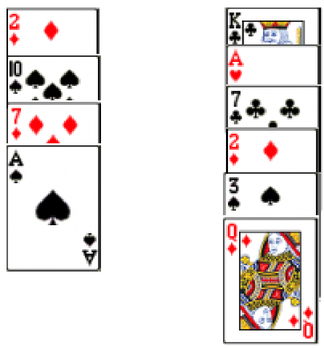


Slika 1.7: Karte u lijevoj i desnoj ruci

Uvjerimo se još da su karte na dnu dijelova u rukama nakon svakog koraka različite boje. Pretpostavimo da imamo sljedeća dva špila (slika 1.7) i pretpostavimo da su obje karte u špilu na stolu iz lijeve ruke (slika 1.8).



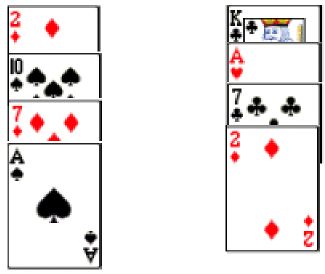
Slika 1.8
Karte na stolu nakon prvog odlaganja



Slika 1.9
Karte u lijevoj i desnoj ruci nakon prvog odlaganja

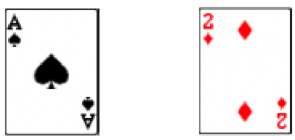
Tada je na dnu karata u lijevoj ruci ponovno crna karta, a na dnu karata u desnoj ruci i dalje (stara) crvena karta (slika 1.9). Dakle, one su različite boje. Ako su obje karte odložene na stol došle iz desne ruke (slika 1.10), onda je na dnu karata u desnoj ruci ponovno crvena karta, a na dnu karata u lijevoj ruci (stara) crna karta pa su one različite boje (slika 1.11).

Slika 1.10
U drugom koraku na stol odložene karte

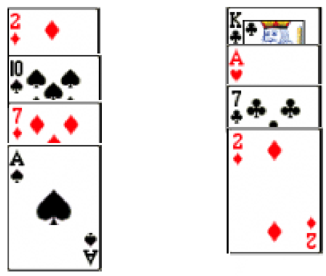


Slika 1.11
Karte u lijevoj i desnoj ruci nakon dva odlaganja

Pretpostavimo da su dvije na stol odložene karte došle po jedna iz lijeve i desne ruke (slika 1.12). Time su se očito promijenile boje karata na dnu oba dijela u rukama te su one opet raznobojne (slika 1.13). □



Slika 1.12
U trećem koraku na stol odložene karte



Slika 1.13
Karte u lijevoj i desnoj ruci nakon tri odlaganja

1.3 Gilbreathovo miješanje karata

U uvodnom dijelu teksta opisali smo, a sad ćemo formalizirati **Gilbreathovo miješanje**.

Definicija 1.3.1. ***Gilbreathovo miješanje*** *N karata je postupak u kojem za proizvoljni $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ odbrojimo (podijelimo jednu po jednu) prvih j karata s vrha špila i nakon toga uguramo tih j karata u preostalih $N - j$ karata. Odbrojavanju može prethoditi proizvoljni broj presijecanja špila (čime se očigledno ne mijenja ciklički poredak, dakle ni eventualni način alternacije karata).*

Sada ćemo na primjeru pokazati kako funkcionira Gilbreathovo miješanje karata.

Primjer 1.3.2. *Neka je $N = 10$, a $j = 4$. Na početku imamo 10 karata, označimo ih redom*

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$$

Budući da je $j = 4$, odbrojimo prve četiri karte 1 2 3 4 i čime smo im obrnuli redoslijed. Tako dobivamo sljedeća dva dijela špila:

$$4 \quad 3 \quad 2 \quad 1$$

$$5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$$

Jedna od permutacija koje možemo dobiti miješanjem ova dva dijela špila uguravanjem je sljedeća:

$$4 \quad 5 \quad 6 \quad 3 \quad 7 \quad 2 \quad 8 \quad 9 \quad 1 \quad 10$$

Tu permutaciju možemo zapisati kao:

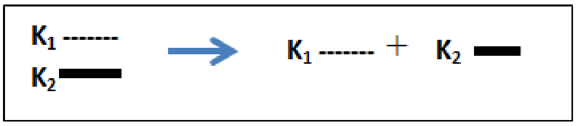
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 7 & 2 & 8 & 9 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Definicija 1.3.3. *Permutaciju nastalu Gilbreathovim miješanjem karata nazivamo* ***Gilbreathovom permutacijom****.*

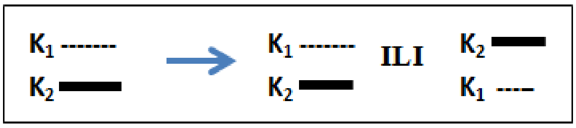
Zanima nas koliko je mogućih (različitih) razmještaja karata nakon Gilbreathova miješanja i koji su to. Broj različitih permutacija N karata je $N!$ (Teorem 1.1.2), međutim, nakon Gilbreathova miješanja nisu svi razmještaji mogući.

Za špil s N karata, označimo sa $P_M(N)$ broj svih mogućih načina Gilbreathova miješanja karata, a sa $P(N)$ broj mogućih Gilbreathovih permutacija (vidi [7], [13]).

Krenimo s najjednostavnijim primjerom u kojem se špil karata sastoji od dvije karte K_1 i K_2. Njega možemo predići samo na jedan način i to tako da se svaki dio špila sastoji od jedne karte (slika 1.14). Nakon što predignemo špil, karte možemo pomiješati uguravanjem na dva načina: karta K_1 nalazi se na vrhu špila, a K_2 na dnu ili se karta K_1 nalazi na dnu,



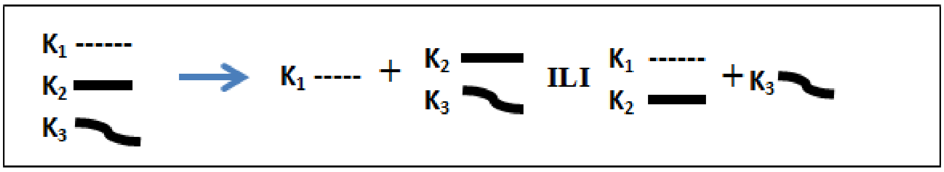
Slika 1.14: Način predizanja špila koji se sastoji od dvije karte



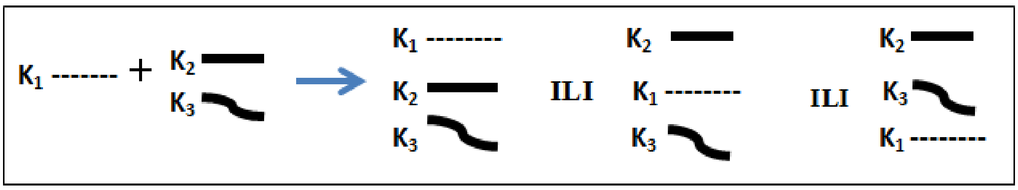
Slika 1.15: Načini miješanja dvije karte

a K_2 na vrhu špila (slika 1.15). To možemo zapisati kao K_1K_2 ili K_2K_1. Dakle, imamo 2 moguća načina miješanja karata, tj. $P_M(2) = 2$ i oba rezultiraju različitim permutacijama, tj. $P(2) = 2$.

Neka se sad špil karata sastoji od tri karte K_1, K_2 i K_3. Špil koji se sastoji od tri karte možemo predići na dva načina (slika 1.16). Prvi način je da se u prvo dijelu špila nalazi jedna, a u drugom dijelu dvije karte, tj. K_1+K_2K_3. Drugi način je da se u prvom dijelu špila nalaze dvije, a u drugom dijelu jedna karta, tj. K_1K_2+K_3. Nakon što na prvi



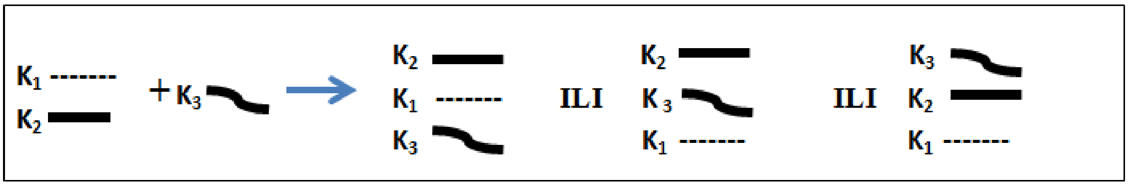
Slika 1.16: Načini predizanja špila koji se sastoji od tri karte



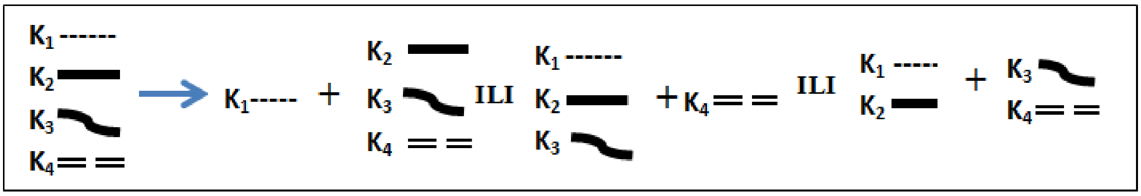
Slika 1.17: Prvi način miješanja tri karte

način predignemo špil i uguramo dijelove špila jedan u drugi, mogući su sljedeći rasporedi karata: $K_1K_2K_3$, $K_2K_1K_3$ i $K_2K_3K_1$ (slika 1.17). Nakon što na drugi način predignemo špil i uguramo dijelove špila jedan u drugi, mogući su sljedeći rasporedi karata: $K_2K_1K_3$, $K_2K_3K_1$ i $K_3K_2K_1$ (slika 1.18). Dakle, ukupno imamo 6 mogućih načina miješanja karata, tj. $P_M(3) = 6$, čime nastaju četiri različite Gilbreathove permutacije, tj. $P(3) = 4$.

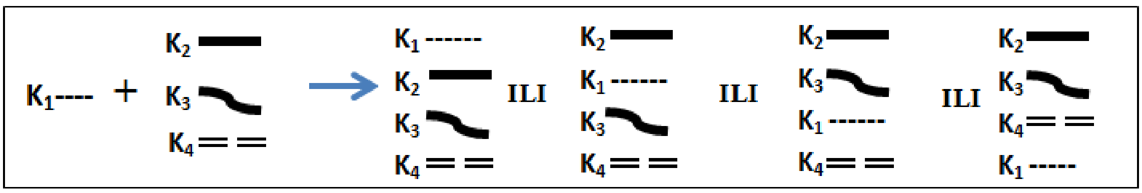
Opišimo još situaciju u kojoj se špil sastoji od četiri karte K_1, K_2, K_3 i K_4. Njega možemo predići na tri načina (slika 1.19). Prvi način je da se u prvom dijelu špila nalazi jedna, a u drugom dijelu tri karte, tj. $K_1+K_2K_3K_4$, drugi način je da se u prvom dijelu špila nalaze tri karte, a u drugom dijelu jedna, tj. $K_1K_2K_3+K_4$, a treći način je da se u oba dijela špila nalaze dvije karte, tj. $K_1K_2+K_3K_4$.



Slika 1.18: Drugi način miješanja tri karte



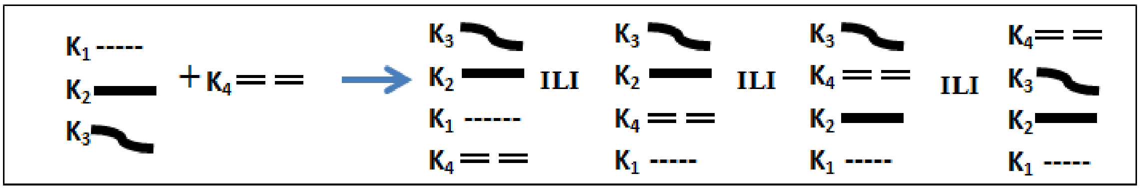
Slika 1.19: Načini predizanja špila koji se sastoji od četiri karte



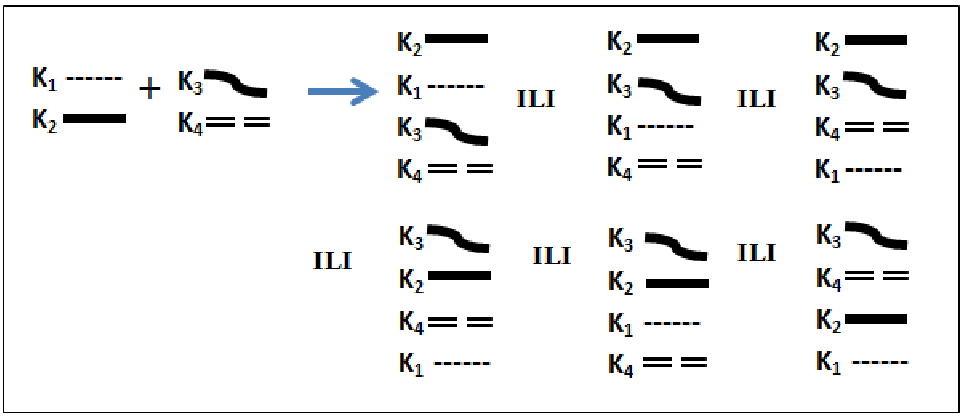
Slika 1.20: Prvi način miješanja četiri karte

Nakon što na prvi način predignemo špil i uguramo dijelove špila jedan u drugi, mogući su sljedeći rasporedi karata: $K_1K_2K_3K_4$, $K_2K_2K_3K_4$, $K_2K_3K_1K_4$ i $K_2K_3K_4K_1$ (slika 1.20).

Nakon što na drugi način predignemo špil i pomiješamo karte, mogući su sljedeći rasporedi karata: $K_3K_2K_1K_4$, $K_3K_2K_4K_1$, $K_3K_4K_2K_1$, i $K_2K_3K_4K_1$ (slika 1.21). Nakon što na treći način predignemo špil i uguramo dijelove špila jedan u drugi, mogući su sljedeći rasporedi karata: $K_2K_1K_3K_4$, $K_2K3K_1K_4$, $K_2K_3K_4K_1$, $K_3K_2K_4K_1$, $K_3K_2K_1K_4$, i $K_3K_4K_2K_1$ (slika 1.22). Dakle, ukupno imamo 14 mogućih načina miješanja karata, tj. $P_M(4) = 14$, a 8 različitih Gilbreathovih permutacija, tj. $P(4) = 8$.



Slika 1.21: Drugi način miješanja četiri karte



Slika 1.22: Treći način miješanja četiri karte

Generalizacijom možemo naslutiti da vrijedi:

Teorem 1.3.4. *Broj Gilbreathovih permutacija N karata nakon Gilbreathova miješanja je* $P(N) = 2^{N-1}$.

Dokaz. Neka je $S \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ skup pozicija na kojima redom završe karte $j = |S|, j-1, \ldots, 1$. Ostale karte završe na pozicijama $\{1, 2, \ldots, N\} \setminus S$. Gilbreathovo miješanje je potpuno određeno pozicijama na kojima završe karte $j, j-1, j-2, \ldots, 1$, a tih pozicija ima isto koliko i podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, N\}$, tj. 2^N (vidi Teorem 1.1.5). Na ovaj način smo

Gilbreathove permutacije brojali dva puta jer je gornja karta mogla doći iz bilo koje hrpe. Stoga postoji $\frac{2^N}{2} = 2^{N-1}$ različitih Gilbreathovih permutacija. □

1.4 Opći Gilbreathov princip

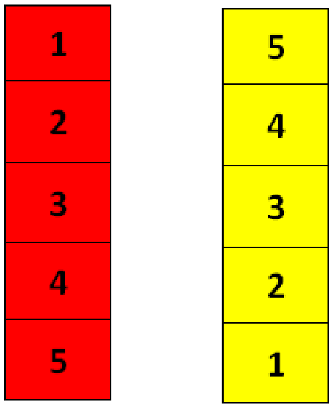
Do sada smo promatrali slučaj u kojem su u cijelom špilu alternirale karte obzirom na dva svojstva (osnovni Gilbreathov princip) pa se prirodno nameće pitanje vrijedi li isti zaključak ako alterniraju tri, četiri ili više svojstava karata. Odgovor je potvrdan, a dao ga je Gilbreath 1966. godine. On je otkrio: ako odaberemo bilo koji broj k svojstava karata u špilu u kojem je broj karata N višekratnik od k, te karte složimo tako da se svaka uzastopna k-torka sastoji od karata koje svaka imaju različito od k svojstava (u istom redoslijedu u svakoj k-torci), onda ćemo nakon Gilbreathova miješanja ponovno dobiti špil koji se sastoji od uzastopnih k-torki karata s različitim svojstvima. Primjerice, ako u standardnom špilu složimo karte tako da su u svakoj četvorci redom nalaze karte boja karo-herc-pik-tref, nakon Gilbreathova miješanja dobit ćemo špil u kojem su prve četiri karte različitih boja, a tako i druge četiri i treće četiri itd. Ovaj zaključak predstavlja generalizaciju osnovnog Gilbreathova principa i naziva se **općim (drugim) Gilbreathovim principom**.

Napomena 1.4.1. *U daljnjem tekstu ne ćemo više pisati osnovni (prvi) Gilbreathov princip i opći (drugi) Gilbreathov princip, već samo Gilbreathov princip. Otkrivši drugi princip, Gilbreath je mislio da se on razlikuje od prvog, ali je kasnije zaključio da je prvi princip samo specijalan slučaj drugoga. Zbog toga nema potrebe govoriti o prvom ili drugom principu, već je dovoljno reći samo Gilbreathov princip.*

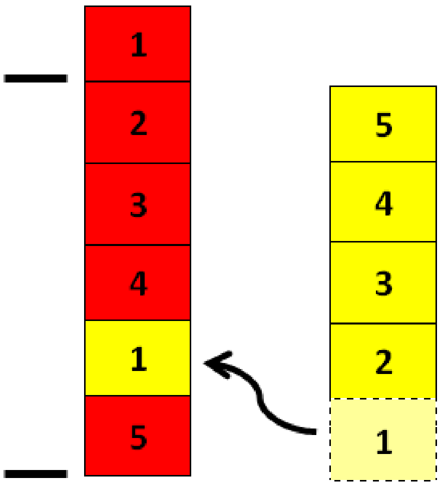
Vizualizacija Gilbreathova principa

Kao što smo osnovni Gilbreathov princip vizualizirali pomoću ljepljivih papirića na prstima ruke (vidi slike 1.2 - 1.5), možemo vizualizirati i Gilbreathov princip (vidi [11]). Na slici 1.23 prikazano je pet papirića crvene boje složenih jedan iznad drugoga u stupac numeriran od 1 do 5 od gore prema dolje. Pokraj tog stupca prikazan je još jedan stupac koji se sastoji od pet papirića žute boje numeriranih od 1 do 5, ali od dolje prema gore. Dakle, crveni i žuti papirići su numerirani obrnutim redoslijedom.

Papiriće žute boje uguravamo u stupac koji sadrži papiriće crvene boje tako da u svakom stupcu poredak papirića ostaje isti, tj. crveni papirić broj 1 mora biti iznad crvenog papirića broj 2, crveni papirić broj 2 mora biti iznad crvenog papirića broj 3, itd. Analogno mora vrijediti i za žute papiriće. To znači da ćemo papirić žute boje broj 1 prvi ugurati u stupac s crvenim papirićima. Nakon što žuti papirić broj 1 uguramo u stupac s crvenim papirićima, od dolje prema gore gledamo samo skupinu od pet papirića i uočavamo koji se sve brojevi papirića nalaze u toj skupini. Crveni papirić broj 1 više se ne nalazi u toj



Slika 1.23: Crveni i žuti paprići numerirani obrnutim redoslijedom

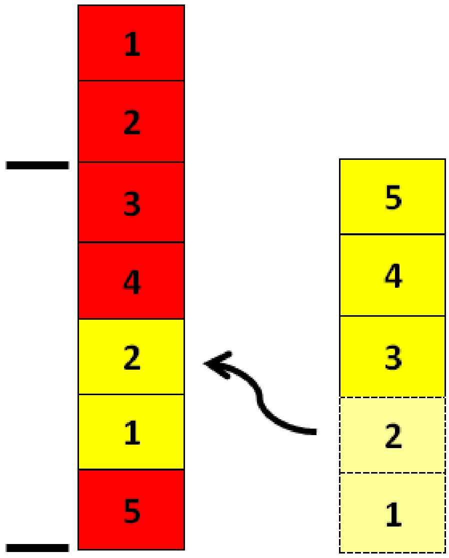


Slika 1.24: Žuti papirić broj 1 uguran u stupac s crvenim papirićima

skupini (slika 1.24). Također, u tom stupcu više nemamo papiriće samo crvene boje i oni više nisu poredani od 5 do 1 gledajući od dolje prema gore. Međutim, u toj skupini od pet papirića zastupljeni su svi brojevi od 1 do 5, ali ne u početnom redoslijedu.

Ako žuti papirić broj 2 uguramo u stupac s crvenim i žutim papirićima (slika 1.25), crveni papirić broj 2 više se ne nalazi u skupini od pet papirića gledajući od dolje prema gore. Papirići ponovno nisu poredani od 5 do 1, ali su svi različitih brojeva, tj. svaki broj je zastupljen točno jedanput. Isti postupak možemo ponoviti i za ostale papiriće žute boje.

Opisani postupak događa se i tijekom Gilbreathova miješanja karata; počevši od dna oba dijela špila, karte se uguravanjem isprepliću, ali zadržavaju svojstvo da je u svakoj



Slika 1.25: Žuti papirić broj 2 uguran u stupac s crvenim papirićima

skupini zastupljena samo po jedna karta s određenim svojstvom.

Primjer 1.4.2. *Pogledajmo kako ovaj princip funkcionira na primjeru s 4 alternirajuće karte. Posložimo špil karata tako da alterniraju pik, tref, herc i karo. Provedimo Gilbreathovo miješanje. S vrha ili dna špila uzimamo po 4 karte i okrećemo ih licem prema gore. U svakom dijelu špila od 4 karte bit će jedan pik, jedan tref, jedan herc i jedan karo.*

Sada ćemo iskazati i dokazati centralni teorem u ovom radu (vidi[7]).

Teorem 1.4.3 (Gilbreathov princip)**.** *Neka je π permutacija skupa $\{1,2,3, \ldots, N\}$. Sljedeće četiri tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) *π je Gilbreathova permutacija.*

(ii) *Za svaki j, prvih j karata $\{\pi(1), \pi(2), \pi(3), \ldots, \pi(j)\}$ imaju različiti ostatak modulo j.*

(iii) *Za svaki j i k za koje je $kj \leq N$, j karata $\{\pi((k-1)j+1), \pi((k-1)j+2), \ldots, \pi(kj)\}$ imaju različiti ostatak modulo j.*

(iv) *Za svaki j, prvih j karata čine uzastopan niz karata u početnom špilu.*

Prije dokaza samog teorema, pokazat ćemo kako on funkcionira na primjeru. Zamislimo da imamo špil od 10 karata. Predignemo ga tako da se, npr. u jednom dijelu špilu nalaze 4, a u drugom dijelu 6 karata. Uguravanjem ova dva dijela špila možemo dobiti sljedeće:

$$4 \quad 5 \quad 6 \quad 3 \quad 7 \quad 2 \quad 8 \quad 9 \quad 1 \quad 10$$

Tako smo dobili Gilbreathovu permutaciju što se tvrdi u (*i*).

Pogledajmo svojstvo (*ii*). Ono nam govori da za svaki izbor j, ostatci modulo j prvih j karata u špilu su različiti. Na primjer, ako je $j = 2$, prve dvije karte su 4 i 5, a 4 i 5 daju ostatak 0 odnosno 1 modulo 2. Ako je $j = 3$, prve tri karte su 4, 5 i 6, a 4, 5 i 6 imaju različite ostatke modulo 3, itd.

Svojstvo (*iii*) je dorada općeg Gilbreathova principa. Ako je $j = 2$, Gilbreathov princip nam govori da će se nakon Gilbreathova miješanja svaki par karata sastojati od jedne karte čija je vrijednost paran broj i jedne karte čija je vrijednost neparan broj. Ako su parne karte crvene boje, a neprane crne, dobivamo osnovni Gilbreathov princip. Svojstvo (*iii*) nam govori da N ne mora nužno biti djeljiv s j jer pod uvjetom da je $k \leq j$ i da je broj karata koje im prethode višekratnik od j slijedi da posljednjih k karata imaju različite ostatke modulo j.

Svojstvo (*iv*) nam govori da ako uzmemo, npr. prvih pet karata s vrha špila (u našem slučaju to su 4, 5, 6, 3, 7) one će činiti uzastopan niz karata u početnom špilu (karte možemo presložiti tako da idu redom 3, 4, 5, 6, 7).

Dokaz. (*i*) povlači (*ii*) i (*iv*): Neka je π Gilbreathova permutacija. Iz opisa Gilbreathova miješanja očito je da tada za svaki j najgornjih j karata $\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(j)$ čine interval oblika $k, k+1, ..., k+j-1$ za neki k (naravno, ne nužno u tom redosljedu), a u tom intervalu je j brojeva različitih modulo j. Dakle, vrijedi (*ii*), a ujedno i (*iv*).

(*iv*) očito povlači (*ii*).

(*ii*) povlači (*iii*): Uzmimo da π zadovoljava (*ii*) i odaberimo j. Prvih j karata $\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(j)$ je tada očito različito modulo j, tj. tvrdnja vrijedi za $k = 1$. Za $k = 2$ gledamo $\pi(j+1), \pi(j+2), \ldots, \pi(2j)$, tj. drugih j karata. No kako su prvih j karata različite modulo j, opis Gilbreathova miješanja povlači da su takve i karte u drugom bloku od j karata. Iz toga slijedi tvrdnja za $k = 3$ (treći blok $\pi(2j+1), \ldots, \pi(3j)$) i tako dalje za sve k takve da je $kj \leq N$, dakle vrijedi (*iii*).

(*iii*) očito povlači (*ii*), uzimajući $k = 1$.

(*ii*) povlači (*i*): Prvo primijetimo da (*ii*) znači da za svaki j gornjih j karata čini interval od j uzastopnih brojeva iz skupa $\{1, 2, \ldots, N\}$. Pretpostavimo suprotno. Za $j = 2$ to bi značilo $\pi(1) = a$ i $\pi(2) = a \pm d$ s $d > 1$, no tad gornjih d karata ne bi bilo različito modulo d ($\pi(1)$ i $\pi(2)$ bi bile jednake modulo d). Za veći j, ako gornjih $j-1$ karata čine interval oblika $k, k+1, \ldots, k+j-2$, gledamo sljedeću kartu $\pi(j)$. Ona mora biti $k-1$ ili $k+j-1$ (dakle, prvih j karata čine interval) jer bismo u suprotnom dobili kontradikciju s (*ii*). Sada dalje dokazujemo: π je Gilbreathova permutacija. Naime, iz upravo dokazanog, vidimo: ako je $\pi(1) = k$, onda je $\pi(2) = k \pm 1$, $\pi(3)$ je neka od vrijednosti $k \pm 1, k \pm 2$, itd. Preciznije, gledajući redom $\pi(1) = k, \pi(2), \ldots, \pi(N)$ možemo redom njihove vrijednosti slagati ili u lanac $k + 1, k + 2, \ldots, N$ (ako je sljedeća po redu veća od prethodnih, stavi se u njega) ili pak u lanac $k, k - 1, \ldots, 1$ (ako je sljedeća po redu manja od prethodnih, stavi se u njega). Dakle, π možemo rastaviti na dva lanca $k + 1, \ldots, N$ i $k, \ldots, 1$, odnosno π je Gilbreathova permutacija. $\square$

Poglavlje 2

Kartaški trikovi

U ovom poglavlju bit će opisani neki od zanimljivih kartaških trikova koji se temelje na Gilbreathovu principu (vidi [15], [16]). U svakom od trikova koristi se standardni špil karata koji je unaprijed pripremljen, a sudionik trika to ne zna.

2.1 Detektor laži

Izvođač daje sudioniku špil od desetak karata da ga presiječe, a zatim ga zamoli da odbroji otprilike, ali ne nužno točno, pola karata jednu po jednu na stol i zatim ugura jedan dio u drugi (Gilbreathovo miješanje). Zatim karte podijeli između sebe i sudionika po principu „jedna tebi, jedna meni". Nakon toga izvođač daje sljedeću uputu: „Otvaraj kartu jednu po jednu. Svaka je sigurno crna ili crvena. Smiješ odabrati reći istinu ili pak lagati o boji, a ja ću pogoditi lažeš li ili ne." Izvođač paralelno sa sudionikom otvara svoje karte i naravno uspijeva u svim slučajevima pogoditi je li sudionik lagao ili nije. Trik je zgodno izvesti uz uvod tipa „Smatraš li da si dobar u laganju?", a zgodno je i prvo ga izvesti tako da sudionik pokušava pogoditi laže li izvođač, kako bi se pokazalo da nije tako lako pogoditi koje su boje karte.

Objašnjenje trika

Kako trik ne bi trajao predugo, izvodi se s nevelikim, ali parnim brojem karata. Špil je preduređen tako da crvene i crne karte alterniraju, a zbog Gilbreathova principa, sve što izvođač treba raditi je redom gledati boju svoje karte i tako saznaje boju sudionikove (koja je različita od njegove).

2.2 Prosti i složeni brojevi

Prije početka izvođenja trika, izvođač podsjeća sudionika na činjenicu da svaka karta u špilu ima svoju vrijednost, pa tako i karte J, Q, K imaju vrijednost 11, 12 i 13. Također, izvođač prisjeća i što je prost, a što složen broj. Izvođač trika pita sudionika: „Ima li više prostih ili složenih brojeva?" i kaže mu da ćemo u ovom triku saznati odgovor na postavljeno pitanje. Sudionik miješa špil karata tehnikom uguravanja, a izvođač ih širi u lepezu i uvjerava sudionika da su karte dobro pomiješane. Izvođač stavlja špil iza leđa i iz njega uzima par karata i odlaže ga na stol tako da su karte licem okrenute prema gore. Sudionik uočava kako se par sastoji od jedne karte čija je vrijednost prost broj i jedne karte čija je vrijednost složen broj. Nakon toga izvođač uzima novi par karata iz špila iza leđa i odlaže ga na stol licem okrenut prema gore. I taj par se sastoji od jedne karte čija je vrijednost prost broj i jedne karte čija je vrijednost složen broj. Postupak se nastavlja sve dok izvođač ima karata u špilu u ruci iza leđa. U svakom od parova pojavit će se jedna karta čija je vrijednost prost broj i jedna karta čija je vrijednost složen broj. Na taj način sudionik će uočiti da je broj složenih i prostih brojeva jednak.

Objašnjenje trika

Standardni špil karata sastoji se od 52 karte koje imaju 13 različitih vrijednosti, a to su 2, 3,. . . ,10, A, J, Q, K (A ima vrijednost 1, J ima vrijednost 11, K 12, a Q 13) . Budući da broj 1 nije ni prost ni složen, sve asove u početku izbacimo iz špila. Sada imamo sljedeće vrijednosti karata: 2, 3,.., 12, 13. Među njima pola vrijednosti su prosti brojevi (2, 3, 5, 7, 11, 13), a pola složeni (4, 6, 8, 10, 12). Ako špil karata na početku složimo tako da alterniraju karte čije vrijednosti su prosti i složeni brojevi, te ako nakon sudionikova miješanja pri širenju karata u lepezu vidimo dvije susjedne karte koje su obje proste ili obje složene vrijednosti i u tom slučaju na tom mjestu presiječemo špil tako da karte na vrhu i dnu budu obje prostih ili obje složenih vrijednosti, prema Gilbreathovu principu i nakon miješanja svaki par karata imat će jednu kartu čija je vrijednost prost broj i jednu kartu čija je vrijednost složen broj.

2.3 Pola crno, pola crveno

Izvođač trika sudioniku daje unaprijed pripremljeni špil karata koji sudionik presijeca i miješa (Gilbreathovo miješanje). Izmiješani špil karata sudionik dijeli na dva jednaka dijela tako da jednu po jednu kartu naizmjenično stavlja na jedan od dijelova. Nakon što sudionik sve karte iz špila podijeli na dva dijela, odabire jedan dio, a izvođač trik uzima drugi dio i sakriva ga iza leđa. Sudionik okreće karte iz svog dijela licem prema gore i dijeli jednu po jednu kartu na lijevu ili desnu hrpu. Ako je karta crvene boje, stavlja je u lijevu hrpu, a ako je crne boje, u desnu hrpu. Izvođač trika govori sudioniku: „Najprije ste početni špil izmiješali i podijelili na dva jednaka dijela od kojih ste odabrali jedan, koji ste onda gledajući lica karata podijelili u crvenu i crnu hrpu. Ja sam isto želio podijeliti karte u crvenu i crnu hrpu, ali ne gledajući njihova lica. Pri tome sam se služio *šestim čulom.* Pogledajmo jesam li uspio.” Izvođač trika odlaže svoje dvije hrpe karata ispred sudionika i time ga uvjerava da je i on dobio isti rezultat: u lijevoj su ruci sve karte crvene boje, a u desnoj ruci sve karte crne boje.

Objašnjenje trika

Izvođač trika pripremi špil karata tako da se u njemu naizmjenično pojavljuju karte crvene i crne boje. Prema Gilbreathovu principu špil će se i nakon miješanja sastojati od alternirajućih parova karata crvene i crne boje. Nakon što sudionik proizvoljno odabere dio podijeljenih karata i krene ih dijeliti u crvenu i crnu hrpu, s rukama iza leđa izvođač trika zrcali poteze sudionika. Izvođač okreće karte licem prema gore i sve ih drži u lijevoj ruci. U desnoj ruci sakuplja karte slažući ih u gornju i donju hrpu. Pri tome se služi jednim prstom desne ruke za odvajanje hrpa, a malim prstom i palcem za njihovo učvršćivanje. Svaki put kada sudionik crvenu kartu stavi na lijevu hrpu, izvođač trika premjesti kartu iz lijeve ruke u donju hrpu u desnoj ruci. Svaki put kada sudionik crnu kartu stavi na desnu hrpu, izvođač trika premješta kartu iz lijeve ruke u gornju hrpu na desnoj ruci. Na kraju ovog postupka, donja hrpa će sadržavati karte crne boje, a gornja hrpa crvene boje. Jedino što preostaje izvođaču trika je da te dvije hrpe stavi svaku u jednu ruku i odloži ih na stol.

2.4 Trik s brojem π

Za izvođenje ovoga trika potreban je komad papira, olovka i standardni špil karata. Izvođač trika unaprijed pripremi špil karata u kojem su neke karte okrenute licem prema dolje, a neke licem prema gore. Na početku trika izvođač ih raširi u lepezu kako bi uvjerio sudionika da su karte dobro izmiješane. Nakon toga, špil karata daje sudioniku koji ih također miješa tehnikom uguravanja, a izvođač ih ponovno širi u lepezu kako bi opet uvjerio sudionika da su karte dobro izmiješane. Špil tako izmiješanih karata izvođač stavi u lijevu ruku iza leđa. Desnom rukom redom uzima tri para karata i stavlja ih na stol. Sudionik trika uočit će da su u svakom od tri para karte licem okrenute u istom smjeru; ili prema gore ili prema dolje. Sljedećih nekoliko karata izvođač nespretno baca na pod i kaže: „Sada je prekasno. Nikad nećemo znati kako su ove karte bile okrenute”. Izvođač uzima sljedeći par karata iz špila u lijevoj ruci. On se sastoji od karata koje su licem okrenute u suprotnom smjeru. Nakon toga izvođač uzima 4 para karata iz špila u lijevoj ruci. U svakom od parova karte su licem okrenute u istom smjeru. Sudionika trika na komad papira zapisuje uočenu pravilnost u obliku broj 314 jer su se najprije pojavila 3 para u kojima su karata bile licem okrenute u istom smjeru, nakon toga jedan par u kojem su karte bile okrenute u suprotnom smjeru i na kraju 4 para u kojima su karte bile okrenute u istom smjeru. Nakon toga izvođač nastavlja uzimati parove karata iz špila iza leđa: jedan par u kojem su karte licem okrenute u suprotnom smjeru, 5 parova u kojima su karte licem okrenute u istom smjeru i 9 parova u kojima su karte licem okrenute u suprotnom smjeru. Za to vrijeme sudionik trika zapisuje broj parova u kojima su karte licem okrenute u istom odnosno suprotnom smjeru na komad papira i dobiva sljedeći broj: 314159. Izvođač trika se prisjeća kako mu je nekoliko karata palo na pod nakon što je iz špila uzeo 3 para karata koje su bile licem okrenute u istom smjeru i kaže sudioniku neka na tom mjestu u broju 314159 stavi decimalni zarez. Tako dobiva broj 3,14159 što je približna vrijednost broja π.

Objašnjenje trika

Izvođač trika pripremi špil karata tako da se u njemu naizmjenično pojavljuju karte okrenute licem prema gore i prema dolje. Nakon što sudionik pomiješa karte, izvođač ih raširi u lepezu. Ako karta na vrhu i karta na dnu špila nisu licem okrenute u istom smjeru, izvođač traži dvije susjedne karte u špilu koje su licem okrenute u istom smjeru i između njih presiječe špil. Prema Gilbreathovu principu, tako pomiješan špil karata sastoji se od parova karata od kojih je po jedna okrenuta licem prema dolje i jedna prema gore. S kartama u rukama iza leđa, izvođač trika može svaki od alternirajućih parova karata okrenutih licem u suprotnom smjeru pretvoriti u par karata koje su licem okrenute u istom smjeru tako da jednu od karata okrene na drugu stranu. Na taj način, izvođač trika može kontrolirati broj parova karata koje će biti okrenute licem u istom, odnosno suprotnom smjeru. U trenutku *nespretnosti* bitno je baciti na pod paran broj karata kako se ne bi pokvarila pravilnost.

Napomena 2.4.1. *Na ovaj način možemo dobiti bilo koji telefonski ili kućni broj, približnu vrijednost broja* $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, *e, itd. Zapravo, svaki konačni niz brojeva možemo prikazati na ovaj način.*

2.5 Magičari zapisuju svoja predviđanja na papir

Za izvođenje ovog trika potrebna nam je bilo koja knjiga; u našem slučaju to će biti *Matematički dvoboji* autorice Franke Miriam Brückler. Izvođač trika sudioniku ispriča sljedeće: „Mnoge velike matematičke ideje i dokazi teorema u povijesti nisu prošli glatko, odnosno izazvali su kontroverze unutar svijeta matematičara. Ponekad se radilo o sukobima oko prvenstva, ponekad oko točnosti rezultata, ponekad oko autorstva, a ponekad oko smislenosti neke matematičke teorije. Ovdje ćemo koristiti knjigu *Matematički dvoboji* u kojoj su opisani neki od dvoboja matematičara. Meni je najdraži dvoboj *Descartes protiv de*

Fermata ili kako naći tangentu." Izvođač zapisuje naziv tog dvoboja na papir. Zatim uzima unaprijed pripremljeni špil karata kojeg presijeca nekoliko puta. Prije nego što karte preda sudioniku trika da ih izmiješa, izvođač trika kaže: „Ovaj trik bolje se izvodi bez dvorskih karata.", okreće karte licem prema gore, raširi ih u lepezu i izbaci iz špila sve dvorske karte (J, Q, K). Sudionik trika miješa preostale karte u špilu (Gilbreathovo miješanje), uzima prvih 9 karata s vrha špila i računa zbroj njihovih vrijednosti. Nakon što izračuna zbroj, sudionik uzima knjigu *Matematički dvoboji* i otvara je na onoj stranici koliki je zbroj vrijednosti prvih 9 karata s vrha špila i naglas čita naslov dvoboja koji je opisan na toj stranici. To je upravo onaj dvoboj koji je izvođaču najzanimljiviji i koji je zapisao na papir.

Objašnjenje trika

Prije izvođenja trika izvođač pripremi špil karata na sljedeći način: najprije iz standardnog špila izbaci sve osmice, a zatim i dvorske karte. Preostale karte u špilu posloži po vrijednostima (boja nije bitna) počevši od najmanje na sljedeći način: A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10. U tako posloženi špil nasumično ubaci dvorske karte. Činjenica da se dvorske karte nalaze na nasumičnim pozicijama u špilu, sugerira sudioniku trika da ostale karte u špilu nisu poredane nekim redoslijedom. Nakon što sudionik pomiješa karte i iz špila izbaci sve dvorske karte, u špilu će ostati samo karte A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10 u nekom poretku. Gilbreathov princip nam garantira da će u prvih 9 karata biti točno po jedan karta svake vrijednosti u nekom poretku. Budući da je zbroj vrijednosti karata A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10 jednak 47, prije početka izvođenja trika izvođač je otvorio knjigu na toj stranici te je znao koji će dvoboj sudionik dobiti, odnosno pročitati.

Napomena 2.5.1. *Postoje različite varijante ovog trika. Izvođač trika u pripremi špila ne mora nužno iz njega izbaciti sve osmice, ali onda moramo paziti na to da je u tom slučaju zbroj vrijednosti na kartama 55. Tada otvaramo knjigu na 55. stranici, a ne 47. Umjesto osmica izvođač može izbaciti bilo koju drugu kartu iz špila. Također, nije nužno da sudionik pročita naslov poglavlja na određenoj stranici. Ovisno o tome koja je rečenica prikladnija, izvođač može tražiti da sudionik pročita prvu, drugu, treću, posljednju ili pretposljednju cjelovitu rečenicu na određenoj strani.*

2.6 Odaberi broj

Izvođač trika sudioniku daje unaprijed pripremljeni špil karata okrenut licem prema dolje koji sudionik presijeca i izmiješa (Gilbreathovo miješanje). Sudionik trika odabire jedan broj između 1 i 13, a izvođač će pokušati pogoditi boju i vrijednost karte koja se nalazi na toj poziciji u špilu. Izvođač trika odabire oko trećinu karata iz špila te ih redom slaže na stol. Sve karte su licem okrenute prema gore osim one karte koja se nalazi na poziciji koju je sudionik izabrao. Ona je okrenuta licem prema dolje. Izvođač trika može naglasiti kako ne zna hoće li uspjeti pogoditi koja se karta nalazi na poziciji koju je sudionik izabrao jer ne vidi sve 52 karate. Također, tijekom izvođenja trika izvođač može zabaviti sudionika mrmljajući naglas nešto poput: „Vidim kralja. On ima vrijednost 13, 13 na osmu iznosi.. Uzmimo ostatak pri dijeljenju s 51, primijenimo Kineski teorem s ostatkom i da vidimo. Vaša karta je..."

Objašnjenje trika

Izvođač trika pripremi špil karata tako da svaka skupina od 13 karata ima sve karte različite vrijednosti i svaka skupina od 4 karte sadrži karte različite boje. Prema Gilbreathovu principu, nakon miješanja svaka skupina od 13 karata imat će točno jednu kartu od svake vrijednosti i svaka skupina od 4 karte imat će sve karte različite boje. Ako je sudionik trika izabrao broj 9, boju karte koja se nalazi na devetoj poziciji u špilu otkrit ćemo tako da karte okrenute licem prema dolje u mislima grupiramo u skupine od po 4 i pogledamo koja nam od boja nedostaje. U ovom slučaju zanimat će nas boje karata na poziciji broj 10, 11 i 12. Tako ćemo znati koje je boje karta na poziciji broj 9. Vrijednost karte otkrit ćemo tako da pogledamo koja nam vrijednost u prvih 13 karata nedostaje. Uočimo da je uvijek bolje odabrati nešto više od 13 karata koje će izvođač okrenuti licem prema gore; ako sudionik odabere broj 13, boju karte na trinaestoj poziciji moći ćemo odrediti samo ako znamo koje nam se karte nalaze na poziciji broj 14, 15 i 16.

Više trikova baziranih na Gilbreathovu principu može se naći u:

- `http://www.mathaware.org/mam/2014/calendar/gilbreath.html`
- `http://www.themagiccafe.com/forums/viewtopic.php?topic=496136&forum=99`
- `http://www.andyfieldcardtricks.com/details-card-trick.php?Card_Trick=617`
- `http://www.maa.org/community/maa-columns/past-columns-card-colm/also-in-his-own-words-more-mathemagical_games-and-tricks-with-cards-from-martin-gardner`
- `http://www.thecardtrickteacher.com/card-trick-video.php?v=24590`

Poglavlje 3

Primjena Gilbreathova principa

Zanimljivo je da se Gilbreathov princip može povezati i s dva naizgled s njime nepovezana područja: fraktalima i popločavanjima. U ovom ćemo poglavlju ukratko opisati te veze.

3.1 Fraktali

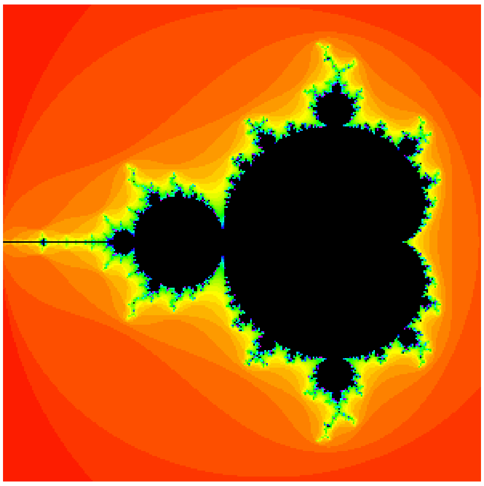
Fraktal (*lat.* fractus: izlomljen) je samosličan skup. To znači da je svaki njegov dio sličan cijelom tom obliku. Fraktali su objekti koju daju jednaku razinu detalja neovisno o razlučivosti koju koristimo. Može ih se uvećavati beskonačno mnogo puta, a da se pri svakom novom povećanju vide neki detalji koji prije povećanja nisu bili vidljivi i da količina novih detalja uvijek bude otprilike jednaka. Fraktali u pravilu nastaju uzastopnim ponavljanjem nekog računskog ili geometrijskog postupka, tj. iteracijom. Tipično za fraktale je da u pravilu imaju tzv. razlomljenu dimenziju, tj. dimenziju između dva prirodna broja.

Fraktali su ljudima poznati od pamtivijeka, samo što ih se dugo nije znalo precizno opisati. U 17. stoljeću Leibniz je opisao ponavljanje samosličnosti, međutim uzeo je u obzir samo kod pravca. U 19. stoljeću Karl Weierstrass je dao primjer funkcije sa svojstvom samosličnosti. To je bila funkcija koja je svugdje neprekidna, a nigdje diferencijabilna. Međutim, ta definicija je bila odveć apstraktna pa je Helge von Koch 1904. godine dao geometrijsku interpretaciju slične funkcije, koja je danas poznata kao „Kochova pahuljica”. Nedugo kasnije, 1915. Waclaw Sierpinski je kreirao svoj uzorak fraktala pomoću trokuta. Iz tog razdoblja dolaze nam još cijeli nizovi skupova fraktalnog tipa poput onih Henria Poincaréa, Felixa Kleina, Pierrea Fatoua, Gastona Julie i Georga Cantora. Svi su oni krajem 19. i početkom 20. stoljeća proučavali te fascinantne tvorevine dobivene iteracijom, ali bez računala nisu mogli uočiti sav njihov značaj i ljepotu. Većina ih je smatrala krivuljama, a ne objektima drugačijih dimenzija. Takvo poimanje tih zanimljivih sebi sličnih matematičkih objekata zadržalo se sve do kraja 20. stoljeća. Tada se za samosličnost počeo zanimati Benoit Mandelbrot. On je uspio ujediniti sav rad svojih prethodnika u jedinstvenu teoriju te ga se smatra začetnikom fraktalne geometrije. Služeći se za današnje pojmove primitivnim računalom, Mandelbrot je 1979. godine po prvi put uspio dobiti sliku jednog od najpoznatijeg fraktala koji se po njemu naziva Mandelbrotov skup. Od tada pa do danas fraktali su predmet nesmanjenog interesa. Otkriveni su brojni oblici koji nas podsjećaju na fraktale, odnosno koji su približno fraktali: brokula, paprat, puževa kućica, izgled galaksija, oblaka, razni simetrični uzorci na sagovima itd. (vidi [14])

Što je Mandelbrotov skup i kako nastaje

Mandelbrotov skup (slika 3.1) je najpoznatiji fraktal koji se dobiva promatranjem specifičnog rekurzivnog niza kompleksnih brojeva

$$z_{n+1} = z_n^2 + c.$$



Slika 3.1: Mandelbrotov skup (izvornik: `http://plus.maths.org/content/unveiling-mandelbrot-set`); *public domain*).

Pogledajmo kako se ovaj niz ponaša za različite vrijednosti z_0 i c. Ako je $z_0 = 0$, a $c = 1$, onda dobivamo niz $0, 1, 2, 5, 26, 677, \dots$, čiji se članovi sve više i više povećavaju, odnosno niz „teži” u beskonačnost.

Ako je $z_0 = 0$, a $c = -1$, onda dobivamo niz $0, -1, 0, -1, 0, \dots$, čiji članovi alterniraju između 0 i -1.

Ako je $z_0 = 0$, a $c = -\frac{1}{2}$, dobivamo niz $0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{7}{16}, \dots$, čiji su članovi između 0 i -1.

Ako je $z_0 = 0$, a $c = -2$, dobivamo niz $0, -2, 2, 2, 2, \ldots$

Iz prethodnih primjera možemo naslutiti (a to se može i dokazati) da dodavanjem bilo kojeg realnog broja c većeg od 0 i manjeg od -2 dobivamo niz koji „teži" u beskonačnost, a dodavanjem realnog broja c između -2 i 0 dobivamo niz koji je ograničen. Za realne brojeve c za koje dobivamo ograničeni niz kažemo da pripadaju Mandelbrotovu skupu, a realne brojeve c za koje dobivamo neograničen niz kažemo da ne pripadaju Mandelbrotovu skupu.

Postupak opisan u prethodnim primjerima može se proširiti na skup kompleksnih brojeva, gdje je

$$c = a + ib.$$

Evo nekoliko primjera s kompleksnim brojevima. Ako je $z_0 = 0$, a $c = i$, onda dobivamo niz $0, i, -1+i, -i, -1+i, -i, -1+i, \ldots$ Uočavamo da sve veći i veći članovi niza imaju ili vrijednosti $-i$ ili $-1+i$. Zbog toga točka $c = i$ pripada Mandelbrotovu skupu. Ako je $z_0 = 0$, a $c = 2i$, onda dobivamo niz $0, 2i, -4+2i, 12-14i, -52-334i, \ldots$ Uočavamo da su članovi tog niza po apsolutnoj vrijednosti sve veći i veći, tj. sve su udaljeniji od 0. Prema tome, točka $c = 2i$ ne pripada Mandelbrotovu skupu.

Na primjerima smo vidjeli kako nastaje Mandelbrotov skup, a sada ga možemo i formalno definirati.

Definicija 3.1.1. *Neka je c proizvoljan kompleksan broj. Ako je niz zadan iterativno formulom $z_0 = 0$, $z_{n+1} = z_n^2 + c$ ograničen, kažemo da c pripada Mandelbrotovu skupu, a u suprotnom kažemo da c ne pripada Mandelbrotovu skupu.*

Tako zadanom nizu možemo razmatrati razna svojstva, a nas će zanimati periodičnost. Ako niz započinjemo brojem $z_0 = 0$ i ako je svaki sljedeći član niza dobiven navedenim pravilom, dobivamo niz:

$$\begin{gathered} 0, \quad 0^2 + c = c, \quad c^2 + c, \quad (c^2+c)^2 + c = c^4 + 2c^3 + c^2 + c, \\ (c^4 + 2c^3 + c^2 + c)^2 + c = c + c^2 + 2c^3 + 5c^4 + 6c^5 + 6c^6 + 4c^7 + c^8, \ldots \end{gathered} \tag{3.1}$$

Ako želimo da niz 3.1 bude periodičan, neki član mora biti jednak prvom članu, tj. 0. Jednostavnosti radi, razmatrat ćemo samo realne nultočke članova niza.

Ako je $c = 0$, očito dobivamo konstantan, dakle i periodičan niz, tj. 0 je u Mandelbrotovu skupu.

Pogledajmo za koje vrijednosti c će treći član niza 3.1, tj. $c^2 + c$ biti jednak 0:

$$\begin{aligned} c^2 + c &= 0 \\ c(c+1) &= 0 \\ c_0 = 0 \text{ ili } c_1 &= -1 \end{aligned}$$

Slučaj $c_0 = 0$ već smo imali, a za $c_1 = -1$ dobivamo niz $0, -1, 0, -1, \ldots$, koji je periodičan s periodom duljine 2 pa je i -1 u Mandelbrotovu skupu.

Pogledajmo za koje vrijednosti c će četvrti član niza 3.1, tj. $(c^2+c)^2+c = c^4+2c^3+c^2+c$, biti jednak 0.

Ako je $c = 0$, očito će $c^4 + 2c^3 + c^2 + c$ biti jednak 0. Taj smo slučaj već imali i on nam nije zanimljiv. Ako je $c \neq 0$, onda $c^4 + 2c^3 + c^2 + c$ možemo podijeliti sa c i dobivamo $c^3 + 2c^2 + c + 1$. Sada tražimo nultočke c ovog kubnog polinoma, tj. rješavamo jednadžbu

$$c^3 + 2c^2 + c + 1 = 0$$

Formula za rješenja kubne jednadžbe je komplicirana pa ćemo ovdje navesti samo konačno rješenje koje vodi periodičnom nizu, a to je

$$c_2 = -\frac{\sqrt[3]{100+12\sqrt{69}}}{6} - \frac{2}{\sqrt[3]{100+12\sqrt{69}}} - \frac{2}{3} = -1{,}75487\ldots$$

Osim ove, naš kubni polinom ima i dvije kompleksno konjugirane nultočke.

Za vrijednost $c = -1{,}75487...$ dobivamo sljedeći niz:

$$0, -1{,}75487..., (-1{,}75487\ldots)^2 - 1{,}75487\ldots = 1{,}32471\ldots, 0, -1{,}75487\ldots, \ldots$$

On je periodičan s periodom duljine 3 pa $-1{,}75487...$ pripada Mandelbrotovu skupu.

Sada nas zanima kada će peti član niza 3.1, tj. $c^8 + 4c^7 + 6c^6 + 6c^5 + 5c^4 + 2c^3 + c^2 + c$ biti jednak 0. Rješavanjem ove jednadžbe osmog stupnja pomoću, primjerice, aplikacije *Wolfram Alpha* dobit ćemo već poznate vrijednosti 0 i -1 te još dvije realne vrijednosti c za koje dobivamo periodičan niz s periodom duljine 4. To su vrijednosti $c_3 = -1{,}3107\ldots$ i $c_4 = -1{,}9407\ldots$ Njima odgovaraju nizovi

$$0, -1{,}3107\ldots, 0{,}4072\ldots, -1{,}1448\ldots, 0, \ldots \quad \text{i}$$
$$0, -1{,}9408\ldots, 1{,}8259\ldots, 1{,}3932\ldots, 0, \ldots$$

Nastavljajući ovaj postupak dobit ćemo niz realnih vrijednosti c_n koje pripadaju Mandelbrotovu skupu.

Veza Mandelbrotova skupa i Gilbreathova principa

U prethodnim primjerima vidjeli smo da za određene realne vrijednosti broja c dobivamo periodične nizove. Vidjeli smo primjerice da ako je $c = -1{,}75487\ldots$ dobivamo niz s periodom duljine 3, tj. $0, -1{,}75487\ldots, 1{,}32471\ldots, 0, \ldots$ Ako vrijednosti članova niza poredamo od najmanje prema najvećoj, tj. ako svakom članu niza pridružimo jedan broj od 1 do 3 (1 najmanjem članu niza, 2 srednjem, a 3 najvećem članu niza) koji zapišemo iznad vrijednosti svakog člana niza, dobivamo sljedeću tablicu:

2	1	3
0	$-1{,}75487\ldots$	$1{,}32472\ldots$

Ako pridružene brojeve čitamo od broja 1 ciklički ulijevo, dobivamo cikličku permutaciju (123) koja nam označava $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 1$. Ovu cikličku permutaciju, koja je ujedno i Gilbreathova, možemo zapisati tablično na sljedeći način:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Slično vrijedi i za bilo koju vrijednost c za koju dobivamo periodičan niz. Pogledajmo primjer u kojem smo dobili da je niz periodičan s periodom duljine 4. To je bilo za $c = -1{,}3107\ldots$ i $c = -1{,}9407\ldots$

Ako za $c = -1{,}3107\ldots$ članovima niza pridružimo brojeve od 1 do 4 na način kako je opisano u prethodnom primjeru, onda dobivamo sljedeću tablicu:

3	1	4	2
0	$-1{,}3107\ldots$	$0{,}4072\ldots$	$-1{,}1448\ldots$

Brojeve zapisane iznad vrijednosti članova niza čitamo od 1 ulijevo i dobivamo cikličku Gilbreathovu permutaciju (1324) koju tablično zapisujemo kao:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Za $c = -1{,}9407\ldots$ pridruživanjem brojeva od 1 do 4 članovima niza, dobivamo sljedeću tablicu:

2	1	4	3
0	$-1{,}9407\ldots$	$1{,}8259\ldots$	$1{,}3931\ldots$

Ciklička Gilbreathova permutacija dobivena na ovaj način zapisana tablično je:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Primijetimo da su dobivene vrijednosti c neke od nultočaka niza polinoma $P_1, P_2, P_3, \ldots$ koji su definirani na sljedeći način: $P_1(x) = x$, $P_2(x) = x^2 + x$, $P_3(x) = P_2(x)^2 + x = (x^2 + x)^2 + x, \ldots, P_n(x) = P_{n-1}(x)^2 + x$.

Sada ćemo iskazati centralni teorem koji daje vezu između Gilbreathova principa i Mandelbrotova skupa. Teorem ovdje nećemo dokazivati, a za više o njemu upućujemo na [7] i tamo navedenu literaturu.

Teorem 3.1.2. *Neka je $P_1(x) = x$ i $P_{k+1}(x) = P_k(x)^2 + x$, za $k < n$. Tada postoji bijekcija koja svakoj realnoj nultočki c polinoma P_n, koja vodi periodičnom nizu s periodom duljine n, pridružuje cikličku Gilbreathovu permutaciju duljine n. Bijekciju formiramo na sljedeći način: za vrijednost c nultočke polinoma P_n , formiramo niz 0, c, $c^2 + c$, $c^4 + 2c^3 + c^2 + c \ldots$ Članu niza čija je vrijednost najmanja pridružimo broj 1, sljedećem po veličini pridružimo broj 2, itd. sve do člana niza čija je vrijednost najveća - njemu pridružimo broj n. Pridružene brojeve zapisujemo iznad vrijednosti članova niza i čitamo ih ulijevo počevši od jedinice. Tako dobivamo cikličku Gilbreathovu permutaciju koju zapisujemo tablično.*

Napomena 3.1.3. *Primijetimo da nije svaka Gilbreathova permutacija nužno ciklička. Na primjer, ako kartu s vrha špila uguramo u sredinu, dobivamo Gilbreathovu permutaciju koja nije ciklička.*

Definicija 3.1.4. *Funkciju $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definiranu na sljedeći način:*

$$\mu(d) = \begin{cases} 0, & \text{ako } d \text{ nije kvadratno slobodan} \\ (-1)^k, & \text{ako je } d = p_1 p_2 \cdots p_k, \text{ gdje su } p_i \text{ svi različiti prosti brojevi} \end{cases}$$

*nazivamo **Möbiusova funkcija**. Pritom kažemo da je d **kvadratno slobodan** ako je 1 najveći kvadrat koji dijeli d.*

Primjer 3.1.5. *Izračunajmo vrijednost Möbiusove funkcije za brojeve 56 i 165.*

Rastavimo brojeve na proste faktore:
$56 = 28 \cdot 2 = 14 \cdot 2 \cdot 2 = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. *Iz rastava vidimo da broj 56 nije kvadratno slobodan jer je djeljiv brojem 4, odnosno kvadratom broja 2 pa je* $\mu(56) = 0$.
$165 = 3 \cdot 55 = 3 \cdot 5 \cdot 11$. *Iz rastava vidimo da su svi prosti brojevi različiti pa je* $\mu(165) = (-1)^3 = -1$.

Od ranije znamo da je broj Gilbreathovih permutacija jednak 2^{n-1} (Teorem 1.3.4). Može se pokazati (vidi [7]) da je broj cikličkih Gilbreathovih permutacija s periodom duljine n jednak

$$\frac{1}{2n} \sum_{\substack{d \mid n \\ d \text{ neparan}}} \mu(d) 2^{n/d}, \tag{3.2}$$

gdje je s $\mu(d)$ označena Möbiusova funkcija. Ova formula nam govori da je približno $\frac{2^{n-1}}{n}$ cikličkih Gilbreathovih permutacija s periodom duljine n.

Sada ćemo na nekoliko primjera za različite n-ove izračunati broj cikličkih Gilbreathovih permutacija pomoću formule 3.2, a zatim ćemo taj broj usporediti s brojem cikličkih Gilbreatovih permutacija kojega smo dobili ranije promatranjem nultočaka c članova niza 3.1.

Primjer 3.1.6. *Ako je $n = 3$, onda je broj cikličkih Gilbreathovih permutacija s periodom duljine 3 prema formuli 3.2 jednak 1, tj.*

$$\frac{1}{2 \cdot 3}(\mu(1) \cdot 2^3 + \mu(3) \cdot 2^1) = \frac{1}{6}(2^3 - 2) = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1.$$

Isti rezultat, tj. jednu cikličku Gilbreathovu permutaciju s periodom duljine 3 dobili smo za $c = -1{,}75487\ldots$ Ako je $n = 4$, onda od ranije znamo da imamo dvije cikličke Gilbreathove permutacije s periodom duljine 4 i to za $c = -1{,}3107\ldots$ i $c = -1{,}9407\ldots$ Isti rezultat, tj. dvije cikličke Gilbreathove permutacije s periodom duljine 4 dobivamo ako uvrstimo $n = 4$ u 3.2.

3.2 Kvaziperiodična popločavanja ravnine

Prije nego definiramo kvaziperiodična popločavanja ravnine i prikažemo vezu s Gilbreathovim principom, navesti ćemo neke pojmove iz *Teorije grafova* koji su nam potrebni u ovom poglavlju (vidi [17]).

Definicija 3.2.1. ***Graf*** *G je uređen par skupova $G = (V, E)$, gdje je $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ skup vrhova, a $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ skup bridova. Svaki brid $e \in E$ spaja dva vrha $v, u \in V$. Kažemo da su vrhovi v, u* ***incidentni*** *s bridom e ili vrhovi $v, u \in V$ su* ***susjedni****.*

Ovu definiciju možemo proširiti tako da dopustimo **petlje** (bridove koji spajaju vrh sa samim sobom), **višestruke bridove** (više bridova između para vrhova), **usmjerene bridove** (bridovi koji imaju orijentaciju). S obzirom na ovakvu podjelu bridova, razlikujemo: **usmjereni graf** (graf koji ima usmjerene bridove) i **multigraf** (graf koji ima višestruke bridove). Graf koji nema ni petlji ni višestruke bridove nazivamo **jednostavnim grafom**.

Budući da od jednog vrha grafa do drugog možemo doći na različite načine, možemo definirati različite načine „kretanja” po grafu. **Šetnja** u grafu G je niz $v_0 e_1 v_1 \ldots e_n v_n$ čiji su članovi naizmjence vrhovi v_i i bridovi e_i, tako da su krajevi od e_i vrhovi v_{i-1} i v_i, za svako i, $1 \leq i \leq n$. Ako su bridovi $e_1, e_2, \ldots, e_n$ u šetnji $v_0 e_1 v_1 \ldots e_n v_n$ međusobno različiti, onda takvu šetnju nazivamo **stazom**. Ako su u stazi i vrhovi međusobno različiti, onda se takva staza naziva **put**. Zatvorena šetnja, kod koje su početak i unutrašnji vrhovi različiti, zove se **ciklus**. **Tura** na G je zatvorena šetnja koja sadrži svaki brid od G barem jednom.

Penroseova popločavanja ravnine

Ideja popločavanja intuitivno je jasna jer se s pojmom popločavanja susrećemo u svakodnevnom životu kod prekrivanje površine keramičkim pločicama, popločavanje dvorišta, terasa, itd. Dakle, **popločavanje** je prekrivanje ravnine određenim likovima tako da se nikoja dva lika ne preklapaju i da između njih nema praznina. Međutim, intuitivna definicija nije nam dovoljna da bismo popločavanje mogli primijeniti kao matematički model, pa je potrebno formalizirati taj pojam.

Definicija 3.2.2. *Popločavanje Euklidske ravnine je prebrojiva familija zatvorenih skupova (pločica) koje zadovoljavaju sljedeća dva uvjeta:*

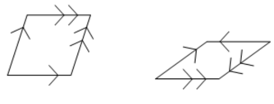
(i) unija svih pločica je čitava ravnina;

(ii) svake dvije pločice su disjunktne do na rubove.

Postoje različite vrste popločavanja. Iako su nam svima najbliža ona koja se pravilno ponavljaju u beskonačnost (tzv. periodična popločavanja), primjerice slaganje kvadratnih pločica u kupaonici ili šahovska ploča, vizualno zanimljiva su i popločavanja koja nisu ni pravilna ni sasvim nasumična. Takva popločavanja nazivamo kvaziperiodična popločavanja.

Preciznije, popločavanje je **periodično** ako posjeduje translacijsku simetriju. To je zadovoljeno ako postoji neki vektor (različit od nulvektora) tako da pomakom objekta za taj vektor dobivamo objekt koji ne možemo razlikovati od polaznog. U pravilu se pod periodičnošću podrazumijeva da se translacijska simetrija pojavljuje u onoliko nezavisnih smjerova kolika je dimenzija prostora. Osim periodičnih postoje i **neperiodična** popločavanja. Kao što i samo ime govori, ta popločavanja nisu periodična. Među neperiodičnim popločavanjima neka su se pokazala jako pravilnima te su postala poznata pod nazivom kvaziperiodična popločavanja. **Kvaziperiodična popločavanja** su neperiodična popločavanja koja imaju samo lokalnu periodičnost s obzirom na neke transformacije: osnovni uzorak se translacijom i/ili rotacijom ponavlja drugdje u ravnini, ali ne postoji jedinstvena translacija koja bi generirala čitavo popločavanje (vidi [6]).

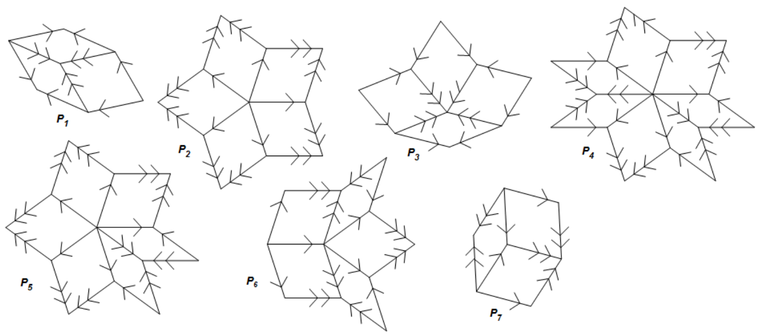
Najpoznatija kvaziperiodična popločavanja su **Penroseova popločavanja**. Otkrio ih je 1974. engleski matematičar, kozmolog, te jedan od najpoznatijih suvremenih teorijskih fizičara Sir Roger Penrose. Penroseova popločavanja koriste dvije protopločice oblika romba: „tanki" Penroseov romb čiji manji unutrašnji kut ima veličinu 36° i „debeli" Penroseov romb čiji manji unutrašnji kut ima veličinu 72°. Oba romba imaju stranice jednake duljine i označene su s dvije vrste strelica kao na slici 3.2.



Slika 3.2: „Debeli" i „tanki" romb

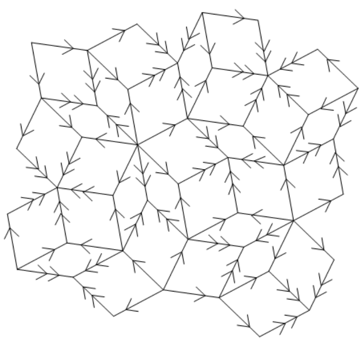
Budući da se od takvih pločica mogu složiti i periodična i neperiodična popločavanja, Penrose je definirao pravila slaganja kako bi se spriječilo nastajanje periodičnog popločavanja. Uzimajući beskonačno mnogo rombova ovih dviju vrsta i slaganjem tako da među njima nema praznina i preklapanja te da susjedni rombovi imaju istu vrstu strelice u istom smjeru duž zajedničke stranice, dobivamo kvaziperiodična Penroseova popločavanja. Penroseova popločavanja imaju mnoga svojstva, od kojih je zanimljivo to da se u tim popločavanjima može pojaviti jedinstveni centar simetrije reda 5 [1], pri čemu kažemo da je **rotacija reda** n simetrija objekta (ovdje popločavanja) ako se rotacijom za n-ti dio punog kuta (ali ne i puni kut) taj objekt poklopi sam sa sobom.

Postoji sedam načina (slika 3.3) na koje možemo oko nekog vrha započeti slagati Penroseova popločavanja, no samo će jedan od njih, tj. P_2 generirati rotacijsku simetriju reda 5. Ako nastavimo s postupkom slaganja rombova na opisani način oko P_2, dobit ćemo ne-



Slika 3.3: Sedam načina kako započeti Penroseova popločavanja

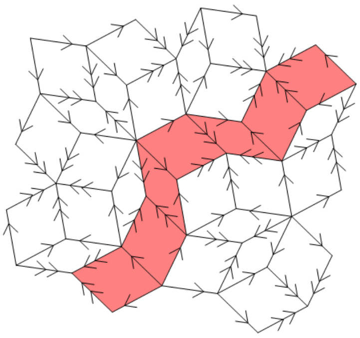
periodična Penroseova popločavanja. Primjer isječka jednog takvog popločavanja prikazan je na slici 3.4.



Slika 3.4: Isječak jednog Penroseovog popločavanja

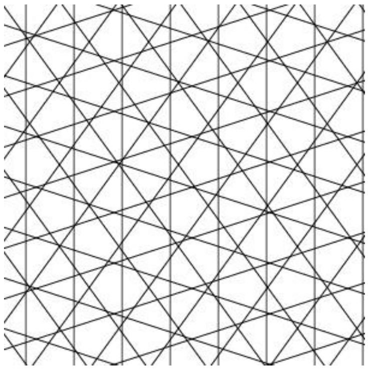
[1] Postojanje centra simetrije reda 5 nemoguće je u periodičnih popoločavanja.

Ako na slici 3.4 odaberemo jedan romb i promatramo jedan par njegovih paralelnih stranica, onda promatranjem svih ostalih rombova čije su stranice paralelne stranicama početnog promatranog romba dobivamo traku (slika 3.5). Može se pokazati da se cijelo Penroseovo popločavanje može prikazati samo pomoću pet različitih traka. Ostale trake dobivaju se translacijom i rotacijom ovih pet.



Slika 3.5: Jedna od traka

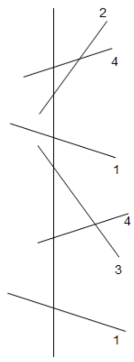
Da bismo opisali vezu Penroseova popločavanja i Gilbreathova principa potrebna nam je regularna peterostruka rešetka. **Peterostruka rešetka** (slika 3.6) je geometrijski lik do-



Slika 3.6: Peterostruka rešetka (izvornik: `http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-ribbons`; *public domain*).

biven slaganjem pet rešetki u ravnini koje nastaju rotacijom za višekratnik kuta od 72°. Svaka od rešetki je skup paralelnih pravaca udaljenih za jediničnu duljinu. Tako dobivamo da se u jednoj točki peterostruke rešetke može sijeći pet pravaca. Nas će zanimati slučaj kada se u jednoj točki u peterostrukoj rešetci sijeku samo dva pravca. Takvu rešetku nazivamo **regularnom peterostrukom rešetkom.** Označimo s e_j, $j = 0, \ldots, 4$ pet realnih parametara koji predstavljaju pravce u pet različitih smjerova (smjerovi se razlikuju za višekratnik kuta od 72°).

Pogledajmo što se događa duž jednog pravca u regularnoj peterostrukoj rešetci, npr. za $j = 0$ to je vertikalni pravac (slika 3.7).



Slika 3.7: Jedan vertikalni pravac u peterostrukoj rešetci

Kao što je već rečeno, zbog rotacije dovoljno je promatrati samo ovaj slučaj. Uzlazne pravce koji sijeku vertikalni označimo sa $j = 2$ i $j = 4$, a silazne pravce sa $j = 1$ i $j = 3$. Kut između vertikalnog pravca i pravaca $j = 1$ iznosi 72°, kao i kut između vertikalnog pravca i pravca $j = 4$ (jer gledamo manji od kutova koje ti pravci zatvaraju s vertikalnim pravcem). Kut između vertikalnog pravca i pravaca $j = 2$ iznosi 36°, kao i kut između vertikalnog pravca i pravca $j = 3$. Zbog toga, udaljenost sjecišta dvaju paralelnih pravaca $j = 1$ s vertikalnim pravcem iznosi $d_{72} = \frac{1}{\sin 72^\circ}$. Ista udaljenost je između sjecišta dvaju paralelnih pravaca $j = 4$ s vertikalnim pravcem. Udaljenost sjecišta dvaju paralelnih pravaca $j = 2$ s vertikalnim pravcem iznosi $d_{36} = \frac{1}{\sin 36^\circ}$. Ista je udaljenost između sjecišta dvaju paralelnih pravaca $j = 3$ s vertikalnim pravcem. Iz dobivenog zaključujemo da sjecišta vertikalnog pravca s pravcima $j = 1$ i $j = 4$ alterniraju. Analogno, alterniraju i sjecišta vertikalnog pravca s pravcima $j = 2$ i $j = 3$.

Ova nam činjenica može pomoći u dokazu da Penroseova popločavanja nisu periodična. Argument o neperiodičnosti Penroseova popločavanja valjan je zbog veze peterostruke rešetke i Penroseova popločavanja dane niže teoremom 3.2.3. Na segmentu duljine h u regularnoj peterostrukoj rešetci promotrimo broj sjecišta vertikalnog pravca s pravcima $j = 1$ i $j = 4$, tj. s pravcima koji određuju „debele” rombove. Broj tih sjecišta jednak je $\frac{h}{d_{72}} = h \sin 72^\circ$. Analogno, broj sjecišta vertikalnog pravca s pravcima $j = 2$ i $j = 3$, tj. s pravcima koji određuju „tanke” rombove jednak je $\frac{h}{d_{36}} = h \sin 36^\circ$. Zbog toga je omjer broja „debelih” i broja „tankih” rombova na segmentu duljine h jednak omjeru zlatnog reza, tj.

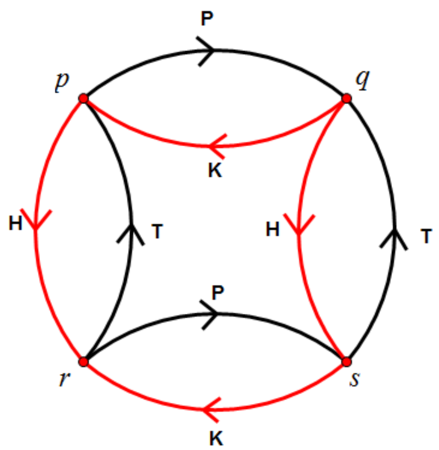
$$\frac{h\sin 72^\circ}{h\sin 36^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} \approx 1{,}618\ldots = \phi$$

Budući da je omjer zlatnog reza iracionalan broj, Penroseova popločavanja nisu periodična.

Veza Penroseova popločavanja i Gilbreathova principa

Neka su karte pik (P) i tref (T) crne boje, a karo (K) i herc (H) crvene boje. Također, neka su pik (P) i herc (H) karte veće vrijednosti nego tref (T) i karo (K). Posložimo ove karte u dva dijela špila: jedan dio neka se sastoji od alternirajućih karata pik (P) i karo (K) i nalazi se u lijevoj ruci, a drugi dio od alternirajućih karata herc (H) i tref (T) i nalazi se u desnoj ruci. Na taj način u svakom dijelu špila alterniraju karte crne i crvene boje i karte veće i manje vrijednosti. Ako pomiješamo (Gilbreathovo miješanje) ova dva dijela špila, zbog Gilbreathova principa dobit ćemo špil karata koji se sastoji od parova karata različite boje i različite vrijednosti. Dakle, svaki par karata sastojat će se od jedne karte crne boje i jedna karte crvene boje i jedna od njih će biti veće vrijednosti, a jedna manje (Teorem 1.2.2).

Miješanje ovako posloženog špila karata možemo prikazati pomoću usmjerenog grafa koji ima 4 vrha p, q, r i s (slika 3.8). Označimo sa (P) usmjereni brid koji spaja vrhove p i q i vrhove r i s, sa (K) označimo usmjereni brid koji spaja vrhove q i p i vrhove s i r, sa (H) usmjereni brid koji spaja vrhove p i r te q i s i sa (T) označimo usmjereni brid koji spaja vrhove r i p te s i q.



Slika 3.8: Usmjereni graf

Miješanje karata sada možemo opisati kao šetnju u usmjerenom grafu jer odlaganje karata iz dijelova u ruci u dio na stolu (kao u Teoremu 1.2.2) odgovara šetnji u usmjerenom grafu. Početni vrh šetnje odabiremo tako da na početku miješanja karata karte na dnu špilova u lijevoj i desnoj ruci odgovaraju mogućim šetnjama u grafu. Ako su na dnu špilova u ruci karte (P) i (H) (jedna u lijevoj, a druga u desnoj ruci), onda šetnju počinjemo iz vrha p. Ako su to karte (K) i (H), onda krećemo iz vrha q. Iz vrha r krećemo ako su karte na dnu špilova u ruci (P) i (T), a iz vrha s ako su to karte (T) i (K). Primijetimo da odlaganje karata iz špila u lijevoj ruci u špil na stolu odgovara horizontalnoj šetnji u grafu, dok odlaganje karata iz špila u desnoj ruci u špil na stolu odgovara vertikalnoj šetnji u grafu. Primijetimo još da je u svakoj šetnji u grafu usmjereni brid koji vodi prema vrhu q označen kartom crne boje, a usmjereni brid koji vodi iz tog vrha kartom crvene boje. Također, usmjereni brid koji vodi prema vrhu p označen je kartom manje vrijednosti, a brid koji vodi iz tog vrha kartom veće vrijednosti. Usmjereni brid koji vodi prema vrhu s označen je kartom veće vrijednosti, a onaj koji vodi iz tog vrha kartom manje vrijednosti.

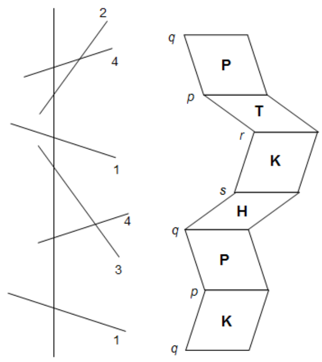
Da bismo povezali Penroseova popločavanja s Gilbreathovim principom potrebno je regularnoj peterostrukoj rešetci na slici 3.6 pridružiti njezin dual i to povezati sa šetnjom u usmjerenom grafu na slici 3.8. U tome će nam pomoći centrali teorem ovog poglavlja koji daje vezu Penroseova popločavanja i Gilbretahova principa. Teorem ćemo ovdje samo opisati, a za više o njemu upućujemo na [4].

Teorem 3.2.3. *Svako Penroseovo popločavanje ravnine rombovima dualno je regularnoj peterostrukoj rešetci.*

Opišimo kako dobivamo dual regularne peterostruke rešetke. Dual regularne peterostruke rešetke dobivamo tako da u svakoj točki sjecišta peterostruke rešetke konstruiramo romb jedinične duljine čije su stranice okomite na dva pravca koji formiraju to sjecište. Skup svih takvih rombova možemo posložiti tako da popločе ravninu bez da ih rotiramo.

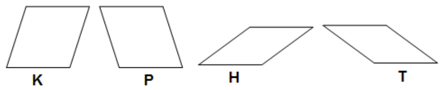
Kako smo već rekli, čitavo se Penroseovo popločavanje može generirati iz jedne trake rotacijama i translacijama, pa je dovoljno promatrati što se događa duž jednog pravca u regularnoj peterostrukoj rešetci. Drugim riječima, dovoljno je samo u sjecištima vertikalnog pravca s pravcima $j = 1, 2, 3$ i 4 na slici 3.7 konstruirati rombove na opisani način. Na taj način svakom od četiri različita tipa sjecišta pridružujemo jedan romb i dobivamo dual vertikalnog pravca (slika 3.9).

Budući da imamo četiri različita tipa sjecišta, imamo i četiri različita romba (slika 3.10). Označimo dobivene rombove na sljedeći način: romb koji konstruiramo u sjecištu vertikalnog pravca i pravca $j = 4$ označimo sa (P), romb koji konstruiramo u sjecištu vertikalnog pravca i pravca $j = 2$ označimo sa (T), romb koji konstruiramo u sjecištu vertikalnog pravca i pravca $j = 3$ označimo sa (H), a romb koji konstruiramo u sjecištu vertikalnog pravca i pravca $j = 1$ označimo sa (K). Budući da sjecišta pravaca $j = 1$ i $j = 4$ s vertikalnim pravcem alterniraju, kao i sjecišta pravaca $j = 2$ i $j = 3$ s vertikalnim pravcem, uz prethodne oznake dobivamo da u traci rombova na slici 3.9 alterniraju rombovi označeni sa (H) i (T) te rombovi označeni sa (P) i (K). Dakle, traka rombova na slici 3.9 odgovara



Slika 3.9: Vertikalni pravac i njegov dual

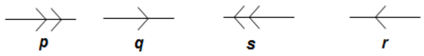
špilu karata koji se sastoji od alternirajući karata herc (H) i tref (T) te karata pik (P) i karo (K).



Slika 3.10: Rombovi u traci

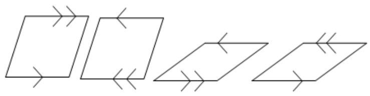
U traci rombova na slici 3.9 svaka horizontalna linija zajednička je stranica za neka dva romba. Budući da rombovi u traci odgovaraju usmjerenim bridovima u grafu, stranice romba možemo označiti sa p, q, r, i s, tj. onako kako su označeni vrhovi u grafu, ali poštujući pritom neka pravila. U traci rombova na slici 3.9 horizontalnu stranicu označavamo sa r samo ako je iznad te stranice romb (P), a ispod romb (H). Oznaka je takva jer u šetnji u grafu na slici 3.8, brid (P) slijedit će nakon brida (H) jedino ako se oni susretnu u vrhu r. Analogno dobivamo oznake ostalih horizontalnih stranica.

Sada nam još preostaje označiti stranice rombova pomoću strelica. Ako je horizontalna stranica romba označena s p, onda na tu stranicu crtamo dvostruku strelicu udesno. Ako je ona označena sa q, onda crtamo jednostruku strelicu udesno. Jednostruku strelicu ulijevo crtamo ako je stranica označena sa r, a dvostruku ulijevo ako je stranica označena sa s (slika 3.11).



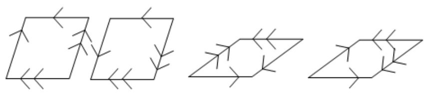
Slika 3.11: Strelice koje odgovaraju vrhovima u grafu

Tako dobivamo rombove koji su označeni strelicama kao na slici 3.12.



Slika 3.12: Horizontalne stranice romba označene sa strelicama

Ono što smo napravili duž jednog vertikalnog pravca u regularnoj peterostrukoj rešetki, možemo napraviti za svaki pravac u preostala četiri smjera. Tako ćemo dual peterostruke rešetke prikazati samo s 4 različita romba označena s jednostrukim i dvostrukim strelicama kao na slici 3.13. Prema tome, ravninu možemo popločiti samo s kopijama ova 4 romba.



Slika 3.13: Sve stranice rombova označene sa strelicama

Dakle, Penroseova popločavanja mogu se povezati s Gilbreathovim miješanjem tako da se sjecišta svakog pravca s preostalima u regularnoj peterostrukoj rešetci povežu s miješanja karata i to na sljedeći način: uzmimo bilo koju traku rombova u Penroseovom popločavanju i dvostruku strelicu udesno zamijenimo oznakom p. Analogno, sve ostale strelice zamijenimo oznakama kako je opisano ranije u tekstu. Redoslijed tako dobivenih oznaka p, q, r i s, gledano odozdo prema gore, odgovara šetnji u usmjerenom grafu (slika 3.8). Također, oznake usmjerenih bridova (K), (T), (H) i (P) u grafu odgovaraju rombovima na slici 3.10. Konačno, svaka šetnja u grafu odgovara miješanju alternirajućeg špila karata (P) i (K) s alternirajućim špilom karata (H) i (T) (vidi [5]).

Zaključak

Gilbreathov princip kombinatorni je princip koji se najčešće koristi u kartaškim trikovima, a opisuje svojstva karata koja ostaju očuvana nakon specifičnog načina miješanja karata kojeg nazivamo Gilbreathovim miješanjem. Gilbreathovo miješanje karata sastoji se od dva koraka: najprije iz vrha špila odbrojimo, tj. podijelimo jednu po jednu nekoliko karata i nakon toga tako poredane karte uguramo u preostale. Takvim miješanjem dobivamo novi raspored, tj. permutaciju karata koju nazivamo Gilbreathovom permutacijom.

Osim s kartaškim trikovima, uočena je veza Gilbreathova principa i najpoznatijeg fraktala - Mandelbrotova skupa. Ako točkama koje pripadaju Mandelbrotovu skupu i koje iterativnim postupkom vode periodičnom nizu duljine n pridružimo prirodne brojeve od 1 do n tako da najmanjoj vrijednosti pridružimo broj 1, a najvećoj broj n, onda će pridruženi brojevi čitani određenim redoslijedom, tj. od 1 prema lijevo, formirati cikličku Gilbreathovu permutaciju.

Gilbreathov princip primjenjuje se i na kvaziperiodična Penroseova popločavanja ravnine sastavljena od dva romba čiji manji unutarnji kutovi iznose 36° i 72° i čije su stranice označene točno određenim strelicama. Rombovi posloženi u Penroseovu popločavanju odgovaraju špilu karata koji se dobije nakon Gilbreathova miješanja špila u kojem alterniraju karte s obzirom na četiri svojstva.

Budući da mnogi učenici matematiku smatraju nezanimljivom i beskorisnom, potrebno je nastavu više temeljiti na istraživačkom učeničkom radu na zanimljivim primjerima iz svakodnevnog života. Jedan od načina je i korištenje špila karata i izvođenje različitih trikova koji imaju matematičku pozadinu. Špil karata može nam poslužiti za otkrivanje pojma funkcije i njezinih svojstava: injekcija, surjekcija, bijekcija, permutacije. Kartaški trikovi temeljeni na Gilbreathovu principu mogu poslužiti kao dobra motivacija u nastavi.

Bibliografija

[1] D. Austin, *Penrose Tilings Tied up in Ribbons*, dostupno na: `http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-ribbons` (prosinac, 2014.)

[2] R. Beattie, *Kartaške igre*, Mozaik knjiga, 2011.

[3] E. Behrends, *On the mathematical background of Gilbreaths card trick*, dostupno na: `ftp://ftp.math.fu-berlin.de/pub/math/publ/pre/1997/Pr-A-97-11.ps.gz` (siječanj, 2015.)

[4] N. G. de Bruijn, *Algebraic theory of Penroses non-periodic tilings of the plane.*, dostupno na: `http://www.math.brown.edu/~res/M272/pentagrid.pdf` (siječanj, 2015.)

[5] N. G. de Bruijn, *A Riffle Shuffle Card Trick and its Relation to Quasicrystal Theory*, Nieuw Archief voor Wiskunde (4) 5 (1987) 285-301

[6] F. M. Brückler, V. Stilinović, *Kvazikristali - otkriće, struktura i svojstva*, Kem. Ind. 61 (7-8) 349-359 (2012)

[7] P. Diaconis, R. Graham, *Magical Mathematics*, Princeton Univ. Press, 2012.

[8] A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva*, dostupno na: `http://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/utb/utblink.pdf` (studeni, 2014.)

[9] *How to Riffle and Bridge Shuffle*, dostupno na: `http://www.wikihow.com/Riffle-and-Bridge-Shuffle` (studeni, 2014.)

[10] V. Lopac, *Fizika kaosa - nova revolucija u znanosti: Fraktali - čudesne slike kaosa*, Matematičko-fizički list 2/171 (1992./93) 66-73

[11] J. Morton, *Understanding the Gilbreath Principle*, dostupno na: `http://popvoid.blogspot.com/2014/03/understanding-gilbreath-principle.html` (studeni, 2014.)

[12] C. Mulcahy, *Mathematical Card Magic*, CRC Press, 2013.

[13] P. Schott, *How to Introduce the Basis of Algorithmics? Thanks to the Enumeration and Composition of All Riffle Shuffles from an N Card Deck Used in MathMAgic*, dostupno na: dx.doi.org/10.4236/ce.2012.34082 (listopad, 2014.)

[14] M. Šimac, *Teorija kaosa - novi pogled na svijet*, dostupno na: http://www.zvjezdarnica.com\/znanost/nas-planet/teorija-kaosa-novi-pogled-na-svijet/157 (siječanj, 2015.)

[15] *The First Norman Invasion*, dostupno na: http://www.maa.org/community/maa-columns/past-columns-card-colm/the-first-norman-invasion (studeni, 2014.)

[16] *The Second Norman Invasion*, dostupno na: http://www.maa.org/community/maa-columns/past-columns-card-colm/the-second-norman-invasion (studeni, 2014.)

[17] D. Veljan, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

Sažetak

U ovom diplomskom radu prikazan je relativno novi kombinatorni princip koji se naziva Gilbreathov princip. Cilj ovog rada bio je prikazati taj zanimljiv, u Hrvatskoj relativno nepoznati princip i pokušati naći primjenu istog u nastavi matematike u prirodoslovno - matematičkoj gimnaziji. Glavno značenje Gilbreathova principa je sljedeće: ako u špilu s N karata odaberemo bilo koji broj k svojstava karata, pri čemu je N višekratnik od k, te špil karata posložimo tako da se svaka uzastopna k-torka sastoji od karata koje svaka ima različito od k svojstava (u istom redoslijedu u svakoj k-torci), onda će se i nakon specifičnog miješanja karata (koje se naziva Gilbreathovo miješanje) špil sastojati od uzastopnih k-torki karata s različitim svojstvima. U ovom je radu dokazano nekoliko varijanti tog principa, opisana je primjena istog na fraktale i kvaziperiodična Penroseova popločavanja ravnine te su opisani neki od kartaških trikova u kojima se on primjenjuje.

Summary

In this thesis we described relatively new combinatorial principle which is called Gilbreath principle. The main purpose of this thesis was to show that interesting, in Croatia rather unknown principle and try to find the application of the same in high school mathematics. The main result of this principle is following: if in a deck of N cards we choose any number of k properties of cards, where N is multiple of k, and we arrange a deck of cards so that the every consecutive k-tuples consist of cards which has distinct of k properties (in the same order in every k-tuples), then after specific card shuffling (which is called Gilbreath shuffle) a deck of cards will consist of consecutive k-tuples cards with distinct properties. In this thesis we proven several variants of this principle, described the use of principle on fractals and quasiperiodic Penrose tiling of plane and we described several card tricks which are based on Gilbreath principle.

Životopis

Rođena sam 30. travnja 1990. godine u Varaždinu. Osnovnu školu pohađala sam Kamenici, malom mjestu pokraj Ivanca. U Ivancu sam 2009. godine završila Opću gimnaziju. Tijekom svog osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja bila sam aktivna članica jednog atletskog kluba, te sam postizala zapažene rezultate. Godine 2009. upisala sam nastavnički smjer Matematika na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2012. završavam preddiplomski studij i stječem akademski naziv sveučilišne prvostupnice edukacije matematike. Te godine upisujem diplomski studij Matematike; smjer nastavnički.