Transcendentni brojevi

Pošpaić, Ana - Marija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana-Marija Pošpaić

TRANSCENDENTNI BROJEVI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. Andrej Dujella

Zagreb, lipanj, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj diplomski rad posvećujem svojoj obitelji koja me uvijek podržavala i ohrabrivala tijekom mog obrazovanja. Na tome sam im jako zahvalna.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Počeci teorije transcendentnih brojeva **2**
1.1 Dokaz iracionalnosti broja $\sqrt{2}$ 3
1.2 Gotovo svi kompleksni brojevi su transcendentni 5

2 Liovilleov teorem **7**
2.1 Kako dokazati da je broj α transcendentan 7
2.2 Od intuitivne ideje do Liouvilleovog teorema 8
2.3 Prvi transcendentan broj 9
2.4 Liouville-ovi brojevi 11
2.5 Mahlerov broj 13
2.6 Rothov teorem 16
2.7 Život nakon Liouvillea 17

3 Transcendentnost broja e **18**
3.1 Hermitov teorem 19

4 Transcendentnost broja π **21**
4.1 Lindenmannov teorem 24

5 Posljedice Lindemannova teorema **27**
5.1 Primjena Lindemann - Weierstrassovog teorema 29

Bibliografija **31**

Uvod

Kompleksan broj α zove se algebarski broj ako postoji polinom $f(x)$ s racionalnim koeficijentima, različit od nulpolinoma, takav da je $f(\alpha) = 0$. Kompleksan broj α zove se transcendentan ako nije algebarski.

U ovom radu obradit ću transcendentne brojeve. U teoriji transcendentnih brojeva zanimljiv je paradoks da iako su skoro svi kompleksni brojevi transcendentni, dokaz transcendentnosti konkretnog broja je često vrlo težak. Znamo da su transcendentni brojevi svuda oko nas, no ipak ih je teško pronaći. Opisivat ću najpoznatije rezultate klasične transcendentne teorije brojeva otkrivene u devetnaestom i početkom dvadesetog stoljeća. Iako je teorija transcendentnih brojeva vrlo važan i fundamentalan dio teorije brojeva, njezini rezultati nisu široko poznati. Smatralo se da su ti rezultati preteški, no zapravo temeljna načela na kojima se temelji čitava disciplina su jednostavna i temelj cijeloj teoriji brojeva. Stoga ću u ovome radu pokušati ne samo prikazati rezultate i njihove dokaze, već te rezultate i njihova opravdanja učiniti intuitivnima i prirodnima.
Neki od najranijih rezultata opisuju transcendentnost dobro poznatih brojeva e, π, e^{α} i slično, pa su to neki od rezultata koji će biti prikazani u ovom radu.

Poglavlje 1

Počeci teorije transcendentnih brojeva

Proučavanje transcendentnih brojeva krenulo je iz različitih izvora, kao što su antički Grci koji su se bavili problematikom kvadrature kruga, od istraživača Liouvillea i Cantora, Hermitovog istraživanja eksponencijalnih funkcija te Hilbertove poznate liste od 23 problema. Razvoj osnovnih matematičkih operacija zahtjevao je proučavanje i širenje pojma brojeva, te je stoga proučavanje prirode brojeva jedna od najstarijih osnova matematike. Krenemo li od najosnovnijeg vidimo da brojeve koristimo u svakodnevnom prebrojavanju stvari koje nas okružuju. Tim prebrojavanjem stvaramo skup prirodnih brojeva, odnosno skup $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Prirodni brojevi zadovoljavaju našu potrebu za prebrojavanjem, međutim ponekad nam ne daju odgovore čak ni kod elementarnih operacija, npr. zbrajanja. Primjerice, fiksiramo li prirodan broj $a > 1$, tada lako možemo odrediti prirodne brojeve x i y takve da vrijedi $x + y = a$, no fiksiramo li i prirodan broj $x > 1$ tada za dane x i a, u slučaju da je $x \geq a$, prirodan broj y za koji vrijedi $x + y = a$ ne postoji. Iz tog razloga skup prirodnih brojeva proširen je rješenjima takvih osnovnih linearnih jednadžbi te je stvoren skup cijelih brojeva $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Nadalje, primijetimo da ni skup cijelih brojeva ne daje odgovore na sve jednostavne aritmetičke probleme. Na primjer, ponovimo li isti cijeli pribrojnik n puta u zbroju, gdje je n prirodan broj dobivamo $x + ... + x = m$. Da bismo riješili tu linearnu jednadžbu potrebno je proširiti skup brojeva na racionalne brojeve, to jest na skup $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.

Prijeđemo li iz zbrajanja u množenje susrest ćemo se s analognim poteškoćama kao kod zbrajanja. Imamo li zadan racionalni broj $\frac{r}{s}$ lako je naći racionalne brojeve x i y takve da je $x \cdot y = \frac{r}{s}$, no fiksiramo li $x = \frac{u}{v}$ kao ne-nul racionalan broj i pomnožimo ga uzastopno nekoliko puta sa samim sobom, stvari će se brzo zakomplicirati. Promotrimo najprije najjednostavniju situaciju u kojoj rješavamo jednadžbu $x \cdot x = m$, gdje je m prirodan broj. Ukoliko imamo jednadžbu $x \cdot x = 1$, lako vidimo da dana jednadžba ima rješenja u dosad spomenutim skupovima. Uzmemo li jednadžbu $x \cdot x = 2$, odmah vidimo da jednadžba nema rješenja u skupu cijelih brojeva. Mogli bismo isprobavati uvrštavanjem racionalnih rješenja u jednadžbu, međutim tako nikad ne bismo odredili točno rješenje. Dakle, pretpostavljamo da trebamo ponovno proširiti skup brojeva, kako bi obuhvaćao i rješenje jednadžbe $x \cdot x = 2$ koje ćemo označiti posebnim simbolom $\sqrt{2}$, no najprije ćemo dokazati da broj $\sqrt{2}$ nije racionalan.

1.1 Dokaz iracionalnosti broja $\sqrt{2}$

Teorem 1.1.1. *Broj $\sqrt{2}$ nije racionalan.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, odnosno pretpostavimo da je broj $\sqrt{2}$ racionalan. Tada bismo mogli $\sqrt{2}$ zapisati u obliku razlomka, odnosno $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, za neke $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$. Znamo da je broj $\sqrt{2} > 0$ pa možemo uzeti i da je m prirodan broj, to jest $m \in \mathbb{N}$.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su brojevi m i n relativno prosti, to jest da vrijedi $\mathrm{M}(m, n) = 1$. Drugim riječima, razlomak $\frac{m}{n}$ je do kraja skraćen.

Tada je $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

Kvadriranjem tog izraza dobivamo $\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$. Slijedi da je $2 = \frac{m^2}{n^2}$, odnosno $2 \cdot n^2 = m^2$. Budući da je $n \neq 0$, pa je i $n^2 \neq 0$. Promotrimo sada lijevu i desnu stranu jednadžbe. Primijetimo da se na lijevoj strani jednadžbe nalazi paran broj, odnosno broj djeljiv brojem 2. Iz toga slijedi da je i izraz na desnoj strani jednadžbe paran broj, odnosno da je i m^2 paran broj, odnosno djeljiv brojem 2.

Zanima nas slijedi li iz činjenice da za neki $m \in \mathbb{N}$ takav da je m^2 djeljiv brojem 2, da je i broj m djeljiv brojem 2.

To možemo dokazati obratom po kontrapoziciji, odnosno dokazujući tvrdnju da za svaki $m \in \mathbb{N}$ koji nije djeljiv brojem 2, slijedi da ni broj m^2 nije djeljiv brojem 2.

Dakle, budući da m nije djeljiv brojem 2, možemo ga zapisati kao $m = 2 \cdot l + 1$, za neki $l \in \mathbb{N}_0$. Tada slijedi da je $m^2 = (2 \cdot l + 1)^2 = 4 \cdot l^2 + 4 \cdot l + 1 = 2 \cdot \left(2 \cdot l^2 + 2 \cdot l\right) + 1$. Primijetimo da smo dobili da je m^2 također neparan broj, odnosno da nije djeljiv brojem 2.

Dakle, znamo da za svaki $m \in \mathbb{N}$ takav da je m^2 djeljiv brojem 2 je i broj m djeljiv brojem 2.

Uočili smo ranije da desna strana jednadžbe $2 \cdot n^2 = m^2$ mora biti parna, odnosno da je m^2 paran broj, odnosno djeljiv brojem 2, pa sada znamo da je i broj m djeljiv brojem 2 te da ga možemo zapisati kao $m = 2 \cdot k$, gdje je $k \in \mathbb{N}$. Tada slijedi da je $m^2 = (2 \cdot k)^2 = 4 \cdot k^2$.

Vratimo li sada taj izraz u $2 \cdot n^2 = m^2$, dobivamo $2 \cdot n^2 = 4 \cdot k^2$, to jest $n^2 = 2 \cdot k^2$. Primijetimo da je desna strana jednadžbe djeljiva brojem 2, pa mora i lijeva strana jednadžbe biti djeljiva brojem 2, odnosno n^2 je djeljivo brojem 2, pa sada znamo da to povlači da je i n djeljiv brojem 2.

Dobili smo da su brojevi m i n djeljivi brojem 2, odnosno da je $\mathrm{M}(m,n) \geq 2$, a to je u kontradikciji s početnom pretpostavkom. Dakle, $\sqrt{2}$ nije racionalan broj. □

Analogno prethodnim proširenjima brojevnih skupova, željeli bismo proširiti skup racionalnih brojeva skupom koji bi sadržavao također i broj $\sqrt{2}$ kao i sva preostala rješenja analognih algebarskih jednadžbi. Štoviše nema razloga da se ograničimo samo na kvadratne jednadžbe već bismo željeli obuhvatiti rješenja svih algebarskih jednadžbi s racionalnim koeficijentima. Takav skup brojeva nazivamo *skup algebarskih brojeva* i označavamo $\overline{\mathbb{Q}}$. Iako skup algebarskih brojeva sadrži rješenja svih algebarskih jednadžbi, još uvijek postoje brojevi koje taj skup ne sadrži. Da bismo otkrili koji su to brojevi potrebno je sagledati analitičke probleme.

Prisjetimo li se traženja racionalnog rješenja za jednadžbu $x \cdot x = 2$, uočavamo da su neki racionalni brojevi, poput $\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \ldots$ vrlo blizu rješenju. Proučimo li pogreške vidjet ćemo da se uistinu radi o vrlo malim brojevima:

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - 2 &= \tfrac{1}{4}\\
\left(\tfrac{7}{5}\right)^2 - 2 &= -\tfrac{1}{25}\\
\left(\tfrac{17}{12}\right)^2 - 2 &= \tfrac{1}{144}\\
\left(\tfrac{41}{29}\right)^2 - 2 &= -\tfrac{1}{841}\\
\left(\tfrac{99}{70}\right)^2 - 2 &= \tfrac{1}{4900}
\end{aligned}$$

Primijetimo da bismo daljnjim izračunavanjem takvih racionalnih brojeva sve bolje aproksimirali broj $\sqrt{2}$. Uočimo da racionalnim brojevima možemo aproksimirati i neke druge vrijednosti, pa naziremo metodu za proširenje skupa brojeva brojevima koji su rješenja algebarskih jednadžbi. Da bismo mogli precizirati takve brojeve prisjetimo se najprije fundamentalne ideje matematičke analize koja definira broj kao graničnu vrijednost konvergirajućeg niza racionalnih brojeva. Također veliku ulogu u preciziranju takvih brojeva ima i Cauchyjev kriterij koji nam govori da možemo utvrditi da niz brojeva konvergira i bez da znamo njegov limes. Definiramo li sada broj kao graničnu vrijednost Cauchyjevog niza racionalnih brojeva, na taj način možemo proširiti skup brojeva svim brojevima kojima teže racionalni brojevi. Takve brojeve nazivamo *iracionalnim brojevima*. Skup racionalnih i skup iracionalnih brojeva zajedno čine skup realnih brojeva, kojeg označavamo s $\mathbb{R}$.

Definirali smo dva koncepta brojeva, s jedne strane brojevi su rješenja polinomijalnih jednadžbi s racionalnim koeficijentima, a s druge strane brojevi su granične vrijednosti Cauchyjevih nizova racionalnih brojeva. Obje definicije su korektne i razumne, međutim nisu jednake. Primjerice, broj $i = \sqrt{-1}$ nije granična vrijednost niza racionalnih brojeva. Kako uočavamo da je skup $\overline{\mathbb{Q}}$ različit od skupa $\mathbb{R}$, promatramo brojeve oblika $r \times \alpha$ gdje je $r \in \mathbb{R}$, a $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$. Primijetimo da je broj 1 realan broj, ali i algebarski broj, pa stoga odmah

uočavamo da takav novi skup brojeva sadrži sve realne i sve algebarske brojeve.
Želimo se uvjeriti kako s takvim brojevima možemo provoditi sve računske operacije, pa konstruiramo skup brojeva koji sadrži sve moguće sume, produkte i kvocijente brojeva oblika $r \times \alpha$ gdje je $r \in \mathbb{R}$, a $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$. Svaki element takvog skupa brojeva može se prikazati kao $r_1 + r_2 \cdot i$, gdje su $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. To je direktna posljedica teorema kojeg je u 19. stoljeću dokazao Carl Friedrich Gauss. Takvi brojevi nazvani su kompleksnima, pa se skup naziva *skup kompleksnih brojeva*, kojeg označavamo s $\mathbb{C}$.

Gauss je zapravo dokazao da je skup kompleksnih brojeva dovoljan za rješavanje svih algebarskih jednadžbi, ne samo onih s racionalnim koeficijentima, odnosno da je skup kompleksnih brojeva zatvoren na sve operacije, te time dobivamo prikladnu notaciju brojeva.

1.2 Gotovo svi kompleksni brojevi su transcendentni

Svaki algebarski broj je također kompleksni broj, što lako vidimo iz definicije brojeva. Zanima nas možemo li tvrditi i obratno. Matematičari su dugi niz godina smatrali da obrat ne vrijedi, to jest da bilo koji kompleksni broj nije nužno algebarski broj, te je to bio otvoren problem sve do 1844. kada je Joseph Liouville dokazao da postoji određena klasa realnih brojeva koji nisu algebarski brojevi. Realne ili kompleksne brojeve koji nisu algebarski nazivamo *transcendentnim brojevima*.

Teorem 1.2.1. *(Georg Cantor)*
Skup $\mathbb{R}$ je neprebrojiv, tj. nije ekvipotentan sa skupom $\mathbb{N}$.

Dokaz. (Cantorov dijagonalni postupak)

Pretpostavimo suprotno, to jest da je skup $\mathbb{R}$ prebrojiv. Skup $\mathbb{R}$ ekvipotentan je s intervalom $\langle 0, 1]$, jer je svaki omeđen interval od $\mathbb{R}$ ekvipotentan s $\mathbb{R}$. Zbog toga se i skup $\langle 0, 1]$ može poredati u niz: $\langle 0, 1] = \{x_1, x_2, ...\}$. Prikažimo ove brojeve u decimalnom zapisu. Taj prikaz nije jednoznačan, jer se na primjer broj s konačnim decimalnim prikazom 0.31 može pisati i u obliku beskonačnog decimalnog prikaza 0.30999 . . .. Za svaki broj iz $\langle 0, 1]$ koristit ćemo, radi jednoznačnosti, njegov beskonačan decimalni prikaz. Onda vrijedi

$$x_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\dots$$

$$x_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\dots$$

$$x_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}\dots,$$

gdje su a_{ij} znamenke između 0 i 9. Pogledajmo sada niz znamenaka $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$ na “dijagonali” u gornjem decimalnom prikazu. Odaberimo niz znamenaka b_n iz skupa $\{1, \dots, 9\}$

na ovaj način: znamenka b_1 neka je odabrana tako da bude različita od a_{11}, b_2 različita od a_{22} i tako dalje.
Onda je broj $b := 0.b_1b_2b_3\ldots$ različit od x_1 (ne podudaraju se u prvoj decimali), isto tako $b \neq x_2$ (ne podudaraju se u drugoj decimali), i tako dalje. Stoga $b \notin \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} = \langle 0, 1]$. To je kontradikcija, jer decimalni prikaz od b pokazuje da je $b \in \langle 0, 1]$. □

Propozicija 1.2.2. *Skup svih algebarskih brojeva je (samo) prebrojiv.*

Dokaz. Svakom polinomu s cjelobrojnim koeficijentima možemo pridružiti konačan niz njegovih cjelobrojnih koeficijenata. Budući da je to pridruživanje injektivno, i skup konačnih nizova cijelih brojeva prebrojiv (skup nizova prirodnih brojeva je prebrojiv), onda je i skup svih polinoma s cjelobrojnim koeficijentima prebrojiv, to jest možemo ga poredati u niz: $P_1, P_2, P_3, \ldots$. Svakom od tih polinoma pripada konačno mnogo kompleksnih nultočaka (najviše onoliko koliki je stupanj pripadnog polinoma; Gaussov osnovni teorem algebre). Prebrojivost skupa svih tih nultočaka (algebarskih brojeva) može se pokazati nadovezivanjem.
Npr. ako je P_1 polinom četvrtog stupnja s nul-točkama $z_{11}, z_{12}, z_{13}, z_{14}$, onda im pridružimo prirodne brojeve $1, 2, 3, 4$, ako je P_2 polinom desetog stupnja s nultočkama $z_{21}, z_{22}, \ldots, z_{2,10}$, pridružujemo im brojeve $5, 6, \ldots, 14$, i tako dalje. □

1872. godine Georg Cantor dokazuje slijedeći teorem:

Teorem 1.2.3. *Gotovo svi kompleksni brojevi su transcendentni.*

Dokaz. Teorem slijedi iz činjenica da je skup realnih (pa onda i kompleksnih) brojeva neprebrojiv, a skup algebarskih brojeva prebrojiv. □

G. Cantor tim teoremom zapravo implicira da odaberemo li bilo koji kompleksni broj gotovo sigurno možemo reći da smo pogodili transcendentni broj. Bez obzira na taj teorem, sam dokaz transcendentnosti nekog broja nije lagan, pa je stoga u drugoj polovici 19. stoljeća dokazana samo transcendentnost brojeva e i π. Određivanje transcendentnosti broja je i danas teško i rijetko postignuće, pa je stoga poznavanje transcendentnih brojeva izrazito ograničeno.

Poglavlje 2

Liovilleov teorem

Kao što smo već napomenuli teško je utvrditi transcendentnost nekog broja. Možemo reći da je to zbog toga što transcendentni brojevi nisu opisani onim što jesu, već kao nešto što takvi brojevi nisu, odnosno transcendentni brojevi su opisani kao brojevi koji nisu algebarski.

Budući da postoji beskonačno mnogo polinoma s cjelobrojnim koeficijentima, da bismo dokazali da je neki broj α transcendentan pretpostavimo da postoji ne-nul polinom $P(x)$ s cjelobrojnim koeficijentima takav da zadovoljava $P(\alpha) = 0$, te se nadamo da će takva pretpostavka biti u kontradikciji s osnovnim principima matematike. Iako je takav pristup efikasan, zahtjeva mnogo tehničke spretnosti i matematičkog argumentiranja. Da bismo mogli pojednostaviti dokazivanje transcendentnosti brojeva osvjestimo sljedeći fundamentalan princip teorije brojeva.

Fundamentalni princip teorije brojeva: Ne postoje cijeli brojevi između 0 i 1.

2.1 Kako dokazati da je broj α transcendentan

Dokaz da je broj α transcendentan možemo provesti na dva načina. Kraći dokaz provodimo tako da pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji ne-nul polinom $P(z)$ s cjelobrojnim koeficijentima takav da je $P(\alpha) = 0$. Uvrštavanjem broja α u polinom $P(z)$ dobivamo cijeli broj N koji je između 0 i 1. Uočimo da je dobiveni broj u kontradikciji s fundamentalnim principom teorije brojeva, pa zaključujemo da je broj α transcendentan.

Prošireni dokaz provodimo tako da također pretpostavimo suprotno, odnosno da je broj α algebarski broj, te da postoji ne-nul polinom $P(z)$ s cjelobrojnim koeficijentima takav da je $P(\alpha) = 0$. U drugom koraku, kao i u prvom načinu dokazivanja dobijemo cijeli broj N iz koeficijenata pretpostavljenog polinoma. U trećem koraku trebamo ograničiti broj N odozdo, odnosno pokazati da vrijedi $0 < |N|$. U četvrtom koraku proširenog dokaza trebamo ograničiti broj odozgo, odnosno pokazati da vrijedi $|N| < 1$. Na kraju primijenimo fundamentalni princip teorije brojeva, dolazimo do kontradikcije, te zaključujemo da je broj α transcendentan.

2.2 Od intuitivne ideje do Liouvilleovog teorema

Joseph Liouville je 1844. godine došao do elegantnog otkrića da algebarski brojevi ne mogu biti aproksimirani racionalnim brojevima s relativno malenim nazivnicima. Odnosno, Liouville je otkrio da ako je α algebarski broj i $\frac{p}{q}$ racionalan broj približno jednak broju α, tada q mora biti ekstremno velik u odnosu na razliku $\frac{p}{q}$ i α. Iz toga slijedi da ukoliko broj L može biti aproksimiran s izrazito velikom točnošću beskonačnim nizom razlomaka, koji imaju relativno male nazivnike, tada L ne može biti algebarski broj. Odnosno tada je L transcendentan broj.

Teorem 2.2.1. *(LIOUVILLEOV TEOREM)*
Neka je α iracionalan algebarski broj stupnja d. Tada postoji pozitivna konstanta u ovisnosti o α, to jest $c = c(\alpha)$ takva da za svaki racionalni broj $\frac{p}{q}$ vrijedi nejednakost:

$$\frac{c}{q^d} \leq \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|.$$

Provjerimo najprije odgovara li Liouville-ov teorem intuitivnoj ideji. Pretpostavimo da je α iracionalan algebarski broj stupnja d, te da za neki $\epsilon > 0$ postoji racionalan broj $\frac{p}{q}$ koji zadovoljava nejednakost:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \epsilon.$$

Primijenimo li nejednakost $\frac{c}{q^d} \leq \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$, dobivamo:

$$\frac{c}{q^d} < \epsilon,$$

odnosno

$$\left(\frac{c}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{d}} < q.$$

Ukoliko je broj ϵ izrazito mali, tada broj q mora biti ekstremno velik. Zbog toga, pronađemo li α koji ima beskonačno dobrih racionalnih aproksimacija za koje ne vrijedi nejednakost

$$\frac{c}{q^d} \leq \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$$

za bilo koji izbor d i c, tada broj α mora biti transcendentan.

Dokaz. (LIOUVILLEOV TEOREM)
Neka je $P(x)$ minimalni polinom od α. Množenjem polinoma zajedničkim nazivnikom svih koeficijenata od $P(x)$, dobivamo polinom stupnja d s cjelobrojnim koeficijenata koji je ireducibilan u $\mathbb{Z}[x]$ i ima pozitivan vodeći koeficijent. Neka je

$$f(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + a_{d-2}x^{d-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

taj polinom. Možemo reći da je to minimalni polinom od α u $\mathbb{Z}$. Tada imamo:

$$\left|f(\alpha) - f(\tfrac{p}{q})\right| = \left|f(\tfrac{p}{q})\right| = \left|\tfrac{a_d p^d + a_{d-1}p^{d-1}q + a_{d-2}p^{d-2}q^2 + \cdots + a_1 p q^{d-1} + a_0 q^d}{q^d}\right| \geq \tfrac{1}{q^n}.$$

Ako su $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ korijeni od f, neka je M maksimum od $|\alpha_i|$.
Ako je $\left|\frac{p}{q}\right|$ veće od $2M$ tada vrijedi:

$$\left|\tfrac{p}{q} - \alpha\right| \geq M \geq \tfrac{M}{q^d}.$$

Ako je $\left|\frac{p}{q}\right| \leq 2M$ tada vrijedi:

$$\left|\alpha_i - \tfrac{p}{q}\right| \geq 3M,$$

odnosno

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{|a_d|\, q^d \prod_d^{j=2} \left|\alpha_j - \frac{p}{q}\right|} \geq \frac{1}{|a_d|\, (3M)^{d-1} q^d}$$

.

Izaberemo li sada

$$c(\alpha) = min\left(M, \tfrac{1}{|a_d|(3M)^{d-1}}\right)$$

slijedi teorem. □

2.3 Prvi transcendentan broj

Prvi broj za koji je Liouville pokazao da je transcendentan, koristeći prethodni teorem jest broj

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

Korolar 2.3.1. *Broj*

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0.110001000000000000000000100...$$

je transcendentan.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, odnosno pretpostavimo da je broj L algebarski broj stupnja d. Najprije trebamo pokazati da je broj L iracionalan, to jest da je $d > 1$ kako bismo mogli primijeniti Liouvilleov teorem.

Budući da broj uzastopnih nula u decimalnom zapisu broja L raste neograničeno, decimalni dio ne može biti periodični, pa stoga broj L ne može biti racionalan. Pretpostavimo da je L algebarski broj, njegov stupanj mora biti najmanje 2.
Dakle, broj L ima stupanj $d \geq 2$, pa možemo primijeniti Liouvilleov teorem da bismo zaključili da postoji konstanta $c > 0$ koja zadovoljava nejednadžbu:

$$\frac{c}{q^d} \leq \left| L - \frac{p}{q} \right|,$$

za sve racionalne brojeve $\frac{p}{q}$. Konstruirajmo sada niz racionalnih aproksimacija od L kontradiktornih prethodnoj nejednakosti. Neka je

$$r_N = \sum_{n=1}^{N} 10^{-n!},$$

za N prirodan broj. Broj r_N je racionalan broj oblika $\frac{p_N}{q_N}$, gdje su brojevi p_N i q_N cijeli brojevi definirani kao

$$p_N = 10^{N!} \sum_{n=1}^{N} 10^{-n!}$$

$$q_N = 10^{N!}.$$

Tada imamo

$$\left| L - \frac{p_N}{q_N} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} - \sum_{n=1}^{N} 10^{-n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} 10^{-n!}.$$

Možemo raspisati:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} 10^{-n!} = 10^{-(N+1)!} + 10^{-(N+2)!} + 10^{-(N+3)!} + \cdots ,$$

iz čega možemo lako vidjeti da su eksponenti redom faktorijeli počevši od $(N+1)!$. Zapravo možemo uključiti sve potencije oblika 10^{-m}, gdje je m cijeli broj veći od $(N+1)!$, a ne samo one čiji su eksponenti faktorijele. Iz toga dobivamo geometrijski niz:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} 10^{-n!} < \sum_{n=(N+1)!}^{\infty} 10^{-n} = \frac{10^{-(N+1)!}}{1-10^{-1}} = \frac{10}{9} 10^{-(N+1)!}.$$

Sumiranjem zaključaka dobivamo da vrijedi:

$$\left| L - \frac{p_N}{q_N} \right| < \frac{10}{9} 10^{-(N+1)!}.$$

Primijenimo li također činjenicu da je $\frac{c}{q^d} \leq \left| L - \frac{p}{q} \right|$ i da je $q_N = 10^{N!}$ dobivamo:

$$c10^{-dN!} < \frac{10}{9} 10^{-(N+1)!}.$$

Tada imamo da za svaki N vrijedi:

$$0 < \frac{9}{10} c < 10^{dN!-(N+1)!},$$

odnosno

$$0 < 9 < \frac{10}{c} 10^{dN!-(N+1)!}.$$

Primijetimo da je za $N \geq d$ eksponent $dN!-(N+1)!$ negativan, pa kad N teži u beskonačnost desna strana dobivene nejednakosti teži u nulu. Dakle, za dovoljno velike N dobivamo $0 < 9 < 1$, što je u kontradikciji s fundamentalnim principom teorije brojeva.
Dakle, pretpostavka da je L algebarski broj je pogrešna, odnosno broj L je transcendentan.
Dakle, broj

$$\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$$

je transcendentan. □

2.4 Liouville-ovi brojevi

Teorem 2.4.1. *(Preformulirani Liouvilleov teorem)*

Neka je α realan broj. Neka postoji beskonačan niz racionalnih brojeva $\frac{p_n}{q_n}$ koji zadovoljavaju nejednakost

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^n}.$$

Tada je broj α transcendentan broj.

Broj L je Liouvilleov broj ako za svaki prirodan broj n postoji racionalni broj $\frac{p_n}{q_n}$ za $q_n > 0$ takav da vrijedi aproksimacija

$$\left| L - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^n}.$$

Prisjetimo li se proširenog Liouvilleovog teorema primjetimo da su upravo Liouvilleovi brojevi opisani kao transcendentni brojevi, pa slijedi teorem:

Teorem 2.4.2. *Svaki Liouvilleov broj je transcendentan.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz definicije Liouvilleovih brojeva i prethodnog teorema. □

Budući da je svaki Liouvilleov broj transcendentan, možemo zaključiti da Liouvilleovih brojeva ima beskonačno mnogo. Međutim izaberemo li nasumično neki realan broj, vjerojatnost da smo pogodili upravo Liouvilleov broj je nula. Dakle, iako ima beskonačno mnogo Liouvilleovih brojeva teško ih je pronaći. Također, iako izgleda da je skup Liouvilleovih brojeva malen, vrijedi slijedeći teorem.

Teorem 2.4.3. *Svaki realan broj može se prikazati kao zbroj dvaju Liouvilleovih brojeva.*

Dokaz. (Ideja.)
Neka je α realan broj. Ako je α racionalan broj možemo ga zapisati kao beskonačan decimalan broj s beskonačno decimala različitih od nule (npr. imamo li broj 0.123, možemo ga zapisati kao 0.122999999...). Na taj način osigurali smo da bilo da je broj α racionalan ili iracionalan ima beskonačno mnogo decimala različitih od nule.
Možemo zapisati

$$\alpha = I.d_1d_2d_3d_4...,$$

gdje je I cijeli dio decimalnog broja, a broj d_n n-ta decimala.
Definirajmo dva Liouvilleova broja.

$$L_1 = I.0d_2d_300000d_10d_11 \cdots d_{33}00 \cdots ,$$

$$L_2 = 0.d_100d_4d_5d_6d_7d_8d_900 \cdots 0d_{34}d_{35} \cdots ,$$

gdje su nizovi nula u decimalama duljine $1!, 2!, 3!, 4!, \ldots$.
Svaki od ta dva decimalna zapisa prije blokova nula ima niz racionalnih aproksimacija, koje zadovoljavaju potrebne uvjete da bi brojevi L_1 i L_2 bili Liouvilleovi brojevi. Dakle, bilo koji α možemo zapisati kao $\alpha = L_1 + L_2$, što upotpunjuje ideju dokaza. □

2.5 Mahlerov broj

Do sada smo promatrali decimalne brojeve koji u svojim decimalama imaju beskonačno mnogo nizova nula, čija se duljina ekstremno povećava pa nam takvi brojevi daju izrazito dobre aproksimacije. No, za većinu brojeva nije lako odrediti racionalnu aproksimaciju iz decimalnog zapisa. Dapače za većinu brojeva, ni najbolja racionalna aproksimacija nije dovoljno blizu da bismo mogli zaključiti da je taj broj transcendentan.

Promotrimo to primjerice na Mahlerovom broju, poznatom još pod imenom Champernowneov broj. To je broj

$$M = 0.123456789101112131415161718192021...,$$

gdje su decimale dobivene dopisivanjem redom prirodnih brojeva jedan do drugog.

Kurt Mahler je 1930-tih prvi pokazao da je broj M transcendentan. To je izrazito težak dokaz, a da bismo pokazali složenost pokušajmo najprije pronaći racionalnu aproksimaciju. Tražimo kad se pojavljuje jedna nula u decimalnom zapisu broja M, te primjetimo da se jedna nula pojavljuje nakon 10 decimala: 0.12345678910.... Da bismo pronašli niz od dvije nule moramo preskočiti jos 179 decimala: 0.12345678910111213...979899100.... Općenito, želimo li pronaći niz od k nula u decimalnom zapisu broja moramo se pomaknuti za $k10^k$ decimala od prethodnog niza od $k - 1$ nula. Iz toga možemo zaključiti da nam ta metoda neće dati dovoljno male nazivnike u aproksimacijama broja M da bismo imali kontradikciju s Liovilleovim teoremom.

Teorem 2.5.1. *Broj* $M = 0.123456789101112131415...$ *je ili transcendentan ili algebarski broj stupnja barem 5.*

Dokaz. (Intuitivna skica dokaza)
Da bismo mogli primijeniti Liouvilleov teorem najprije trebamo pokazati da je broj M iracionalan, što slijedi iz zapažanja da broj M sadrži dugačke nizove nula, pa ne može biti periodičan decimalan broj. Najprije trebamo konstruirati slijed dobrih racionalnih aproksimacija broja M koji će nam omogučiti da primjenom Liouvilleovog teorema zaključimo da ako je broj M algebarski broj stupnja d, da je tada $d \geq 5$. Dovoljno je pokazati da za neki $\delta > 4$, postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva $\frac{p_n}{q_n}$ koji zadovoljavaju nejednadžbu:

$$\left|M - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^\delta}.$$

Odnosno, dovoljno je pronaći beskonačan niz racionalnih brojeva koji zadovoljavaju nejednadžbu

$$\left|M - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^\delta}.$$

Da bismo konstruirali dobre aproksimacije broja M, nećemo raditi direktno s brojem M nego s racionalnim brojevima:

$$M_1 = 0.123456789,$$

$$M_2 = 0.10111213\ldots979899,$$

$$M_3 = 0.100101102\ldots997998999,$$

$$\vdots$$

Ti racionalni brojevi su redom dobre aproksimacije brojeva $M, 10^9 M, 10^{189} M$ i tako dalje. Nakon dijeljenja broja M_n s odgovarajućom potencijom broja 10 i pribrajanja odgovarajućeg cijelog broja dobivamo dobru aproksimaciju broja M. No, te aproksimacije nisu dovoljno bliske broju M da bismo mogli primijeniti Liouvilleov teorem. Promotrimo stoga najprije brojeve $M_1, M_2, \ldots$.

Budući da se brojevi M i M_1 poklapaju u 9 decimala, znamo da vrijedi

$$|M - M_1| < \frac{1}{10^9}.$$

Ako broj M_1 zapišemo kao razlomak $\frac{123456789}{10^9}$ i označimo s $\frac{p}{q}$, onda iz prethodne nejednakosti slijedi

$$\left| M - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q}.$$

Primijetimo da gornja granica nije željenog oblika $\frac{1}{q^\delta}$ za neke $\delta > 4$, pa zaključujemo da je nazivnik broja M_1 prevelik s obzirom na relativno dobru aproksimaciju broja M. Zbog toga dolazimo do nove ideje u kojoj ćemo poboljšati aproksimaciju broja M tako da najprije aproksimiramo broj M_1 s racionalnim brojem koji ima mali nazivnik, a koji je dovoljno blizak broju M_1 da nam osigura jednako dobru aproksimaciju broja M. Postoji više načina za aproksimaciju broja M_1 racionalnim brojem. Mi ćemo iskoristiti zapažanje da je svaka decimalna znamenka broja M_1 dobivena dodavanjem broja 1 prethodnoj znamenci. Zbog toga slijedi

$$10M_1 - M_1 = 1.111111101$$

što se poklapa s brojem $\frac{10}{9}$ poklapa u 7 decimala. Dakle, $9M_1$ je relativno dobro aproksimirano razlomkom $\frac{10}{9}$, pa stoga vrijedi

$$\left| 9M_1 - \frac{10}{9} \right| < 0.000000010111\ldots.$$

Podijelimo li nejednakost brojem 9 dobivamo

$$\left| M_1 - \frac{10}{81} \right| < \frac{0.000000010111\ldots}{9}.$$

Brojevi M i M_1 se poklapaju u prvih 10 decimala, pa prijašnja nejednakost vrijedi i za broj M. Još trebamo prikazati gornju granicu u obliku u kojem ju možemo usporediti s nazivnikom racionalne aproksimacije broja M, odnosno s brojem 81. Gornju granicu možemo drugačije zapisati kao

$$\frac{0.000000010111\dots}{9} < \frac{1}{9 \cdot 10^7},$$

odnosno

$$\frac{1}{9 \cdot 10^7} < \frac{1}{81^4},$$

pa tada možemo usporediti

$$\left| M_1 - \frac{10}{81} \right| < \frac{1}{81^4}.$$

Ako bi se eksponent 4 pojavio za sve daljnje racionalne aproksimacije, tada bi nas Liouvilleov teorem doveo do zaključka da ako je broj M algebarski, onda je njegov stupanj najmanje 4. Ako želimo dobiti jači uvjet da stupanj broja M mora biti najmanje 5, treba nam nejednakost

$$\frac{0.000000010111\dots}{9} < \frac{11}{9 \cdot 10^9},$$

u kombinaciji s nejednakosti $\frac{11}{9 \cdot 10^9} < \frac{1}{81^{4.5}}$. Zapišemo li $\frac{10}{9} = \frac{p_1}{q_1}$, dobivamo nejednakost

$$\left| M - \frac{p_1}{q_1} \right| < \frac{1}{q_1^{4.5}}.$$

Da bismo pronašli prvu dobru aproksimaciju broja M morali smo primijeniti nekoliko ideja. No koristeći te ideje, na analogan način lako dobijemo drugu aproksimaciju aproksimirajući broj M_2:

$$\left| M - \frac{p}{10^9 99^2} \right| < \frac{1}{10^{185}},$$

za neki veliki cijeli broj p. Označimo li broj $\frac{p}{10^9 99^2} = \frac{p_2}{q_2}$ dobivamo aproksimaciju

$$\left| M - \frac{p_2}{q_2} \right| < \frac{1}{q_2^{13}} < \frac{1}{q_2^{4.5}}.$$

Daljnjom aproksimacijom broja M s racionalnim brojevima čiji nazivnici poprimaju vrijednosti $9^2, 10^9 99^2, \dots, 10^{n_k}(10^k - 1)^2$, gdje n_k označuje broj znamenaka koje zauzima k-znamenkasti broj napisan uzastopno počevši od 10^{k-1}, možemo dobiti beskonačno mnogo racionalnih aproksimacija $\frac{p_n}{q_n}$ koje zadovoljavaju

$$\left| M - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^{4.5}}.$$

Iz dobivene relacije slijedi teorem. □

2.6 Rothov teorem

Nakon objavljivanja Liouvilleovog teorema mnogi su matematičari radili na poboljšanju Liouvilleove nejednakosti. Nekoliko matematičara je u narednih stotinjak godina došlo do bitnih napredaka. Neki od tih matematičara bili su Axel Thue, Carl Siegel i Freeman Dyson. Najveći napredak napravio je Klaus Roth, 1955. godine kada je dokazao sljedeći rezultat.

Teorem 2.6.1. *(ROTHOV TEOREM) Neka je α algebarski broj stupnja $d \geq 2$ i neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji konstanta $c(\alpha, \epsilon) > 0$ takva da za svaki $\frac{p}{q}$ vrijedi:*

$$\frac{c(\alpha, \epsilon)}{q^{2+\epsilon}} < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|.$$

Taj Rothov rezultat bio je veliko otkriće pa je 1958. godine bio i nagrađen Fieldsovom medaljom. Sada možemo primijeniti Rothov teorem kako bismo pokazali da je broj M transcendentan.

Teorem 2.6.2. *Broj $M = 0.123456789101112131415...$ je transcendentan.*

Dokaz. Neka je $M = 0.123456789101112...$ algebarski broj stupnja $d \geq 2$, te neka je $\epsilon = 0.5$. Možemo primijeniti Rothov teorem te zaključujemo da postoji konstanta $c > 0$ takva da za svaki $\frac{p}{q}$ vrijedi:

$$\frac{c}{q^{2.5}} < \left|M - \frac{p}{q}\right|.$$

Neka su $\frac{p_n}{q_n}$ racionalni brojevi opisani u dokazu Teorema 2.5.1.. Primijenimo li nejednakost $\left|M - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^{4.5}}$, dobivamo za svaki n:

$$\frac{c}{q_n^{2.5}} < \left|M - \frac{p_n}{q_N}\right| < \frac{1}{q_n^{4.5}},$$

što nam daje da za svaki n vrijedi

$$0 < c < q_n^{-2}.$$

Budući da q_n teži u beskonačnost, vidimo da nejednakost neće vrijediti za dovoljno velike n.
Dakle, broj M je transcendentan broj. $\square$

2.7 Život nakon Liouvillea

Primijetimo da broj M nije Liouvilleov broj, ali je transcendentan. Zapravo, većina transcendentnih brojeva nisu Liouvilleovi brojevi. Da bismo za takve brojeve mogli dokazati da su transcendentni bile su potrebne nove ideje. Kao što smo mogli primijetiti za sada možemo dokazati da je broj transcendentan samo ako se radi o nekom specijalnom broju. Primjerice, možemo uzeti specijalne brojeve e i π. U sljedećim poglavljima razvit ćemo sofisticiranije metode koje će nam pomoći dokazati da su takvi specijalni brojevi transcendentni.

Poglavlje 3

Transcendentnost broja e

Da bismo mogli dokazati da je broj e transcendentan, pokažimo najprije da je broj e iracionalan broj. 1815. godine Joseph Fourier dokazao je da je Eulerov broj e iracionalan. Ideja Fourierova dokaza bila je da najprije pretpostavi da je broj e racionalan, odnosno da možemo zapisati $e = \frac{r}{s}$. Nakon toga konstruirao je drugi racionalan broj $\frac{t}{u}$ koristeći nazivnik s tako da $\frac{t}{u}$ bude aproksimacija broja $\frac{r}{s}$. Zbog toga slije da je razlika $\left|\frac{r}{s} - \frac{t}{u}\right|$ pozitivan racionalan broj i to vrlo malen broj. Ako uzmemo broj d koji je najmanji zajednički višekratnik brojeva r i s, tada vrijedi

$$\left|\frac{r}{s} - \frac{t}{u}\right| < \frac{1}{d}.$$

Moženjem brojem d dobiva se nejednakost $0 < \left|d \cdot \frac{r}{s} - d \cdot \frac{t}{u}\right| < 1$, što je u kontradikciji s fundamentalnim principom teorije brojeva.

Teorem 3.0.1. *Broj e je iracionalan.*

Dokaz. Broj e možemo zapisati kao $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Pretpostavimo sada da je e racionalan broj, odnosno $e = \frac{r}{s}$, gdje je $s \geq 1$. Koristeći s konstruiramo racionalnu aproksimaciju broja $\frac{r}{s}$. Takav racionalan broj formiran je pribrajanjem beskonačnog reda za e kada je $n = s$:

$$\sum_{n=0}^{s} \frac{1}{n!}.$$

Zbog toga slijedi da je

$$\frac{r}{s} - \sum_{n=0}^{s} \frac{1}{n!}$$

pozitivno. Oba broja pomnožimo brojem $s!$, pa dobivamo:

$$s!\left(\frac{r}{s} - \sum_{n=0}^{s} \frac{1}{n!}\right) = s!\left(e - \sum_{n=0}^{s} \frac{1}{n!}\right) = s!\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{s} \frac{1}{n!}\right)$$

$$= s!\left(\frac{1}{(s+1)!} + \frac{1}{(s+2)!} + \frac{1}{(s+3)!} + \cdots\right)$$
$$= \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+2)(s+1)} + \frac{1}{(s+3)(s+2)(s+1)} + \cdots$$

što nam daje pozitivan cijeli broj. Budući da je $s \geq 1$ možemo taj prirodan broj ograničiti odozgo geometrijskim redom:

$$\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+2)(s+1)} + \frac{1}{(s+3)(s+2)(s+1)} + \cdots < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1.$$

Na taj smo način konstruirali cijeli broj između nule i jedinice, što je u kontradikciji s fundamentalnim principom teorije brojeva. Dakle, broj e je iracionalan. □

3.1 Hermitov teorem

Charles Hermite je 1873. godine u svojim memoarima objavio rezultat u kojem dokazuje transcendentnost broja e. Kao što sam već opisala, Fourier je 1815. godine pokazao iracionalnost broja e dok je Liouville 1840. godine pokazao da brojevi e i e^2 ne mogu biti racionalni, ni rješenja kvadratne jednadžbe s racionalnim koeficijentima. To su dva rezultata koja su doprinjela Hermiteovoj metodi kojom započinje novo poglavlje u svijetu transcendentnih brojeva.

Teorem 3.1.1. *Broj e je transcendentan.*

Dokaz. Neka je t kompleksan broj, a $f(x)$ polinom. Parcijalno integriramo funkciju $e^{-x}f(x)$ po segmentu koji spaja 0 i t:

$$\int_0^t e^{-x}f(x)dx = [-e^{-x}f(x)]_0^t + \int_0^t e^{-x}f'(x)dx.$$

Definiramo li

$$I(t,f) := \int_0^t e^{t-x}f(x)dx,$$

tada vrijedi da je

$$I(t,f) = e^t f(0) - f(t) + I(t,f').$$

Ako je polinom f stupnja m, tada iteracijom prethodne relacije dobivamo da vrijedi

$$I(t,f) = e^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t).$$

Neka je F polinom dobiven od polinoma f na način da koeficijente polinoma f zamijenimo njihovim apsolutnim vrijednostima, tada lako vidimo iz definicije od $I(t,f)$ da vrijedi:

$$I(t,f) \leq |t|\, e^{|t|} F(|t|).$$

Primjenjujući ova razmatranja možemo dokazati polazni teorem. Pretpostavimo suprotno, odnosno pretpostavimo da je broj e algebarski broj stupnja n. Tada vrijedi

$$a_n e^n + a_{n-1} e^{n-1} + \cdots + a_1 e + a_0 = 0$$

gdje su a_i cijeli brojevi i $a_0, a_n \neq 0$. Definirajmo još

$$J := \sum_{k=0}^{n} a_k I(k,f)$$

gdje je

$$f(x) = x^{p-1}(x-1)^p \cdots (x-n)^p$$

i $p > a_0$ veliki prosti broj. Primijenimo li te pretpostavke na jednadžbu $a_n e^n + a_{n-1} e^{n-1} + \cdots + a_1 e + a_0 = 0$ dobivamo da je

$$J = -\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_k f^{(j)}(k)$$

gdje je $m = (n+1)p - 1$. Budući da je $f^p = 0$ za $p = 1, 2, 3, \ldots, n$ i $f^{p-1} = 0$ za $p = 0$, gornja sumacija zapravo započinje s $j = p-1$ pa tada imamo

$$f^{p-1}(0) = (p-1)!(-1)^{np} n!^p.$$

Ako je $n < p$, onda je $f^{(p-1)}(0)$ dijeljivo s $(p-1)!$, ali ne i s p. Ako je $j \geq p$, vidimo da je $f^{(j)}(0)$ i $f^{(j)}(k)$ dijeljivo s $p!$ za $1 \leq k \leq n$. Budući da je J cijeli broj različiti od nule dijeljiv brojem $(p-1)!$, slijedi da je $(p-1)! \leq |J|$. S druge strane, primijenimo li nejednakost $I(t,f) \leq |t|\, e^{|t|} F(|t|)$ dobivamo da vrijedi

$$|J| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|\, e^k F(k) k \leq A n e^n (2n)!^p$$

gdje je A maksimalna vrijednost svih apsolutnih vrijednosti od a_k. Primijetimo također da

$$e^p \geq \frac{p^{p-1}}{(p-1)!}$$

povlači tvrdnju

$$p^{p-1} e^{-p} \leq (p-1)! \leq |J| \leq A n e^n (2n)!^p.$$

Usporedimo li rast gornje i donje ograde kada p teži u beskonačnost dolazimo do kontradikcije. Dakle, broj e je transcendentan. □

Poglavlje 4

Transcendentnost broja π

Najprije želimo pokazati da je broj π iracionalan. Da bismo mogli dokazati tu tvrdnju pogledajmo najprije slijedeću propoziciju:

Propozicija 4.0.1. *Neka je $P(z) \in \mathbb{Z}[z]$ stupnja d. Tada je $P(\sqrt{\frac{a}{b}}) + P(-\sqrt{\frac{a}{b}})$ racionalan broj s nazivnikom b^d.*

Dokaz. Neka je $P(z) \in \mathbb{Z}[z]$ stupnja d, odnosno $P(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_d$ cijeli brojevi.
Tada imamo:

$$P\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right) = a_d\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^d + a_{d-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{d-1} + \cdots + a_1\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^1 + a_0$$

$$P\left(-\sqrt{\frac{a}{b}}\right) = a_d\left(-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^d + a_{d-1}\left(-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{d-1} + \cdots + a_1\left(-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^1 + a_0$$

Uzmimo najprije da je d paran broj, te zbrojimo polinome.

$$P\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right) + P\left(-\sqrt{\frac{a}{b}}\right) = a_d\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^d + a_{d-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{d-1} + \cdots + a_1\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^1 + a_0$$

$$+a_d\left(-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^d + a_{d-1}\left(-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{d-1} + \cdots + a_1\left(-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^1 + a_0,$$

$$P\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right) + P\left(-\sqrt{\frac{a}{b}}\right) = a_d\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^d + a_{d-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{d-1} + \cdots + a_1\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^1 + a_0$$

$$+a_d(-1)^d\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^d + a_{d-1}(-1)^{d-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{d-1} + \cdots + a_1(-1)^1\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^1 + a_0,$$

$$P\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+P\left(-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)=a_d\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^d+a_{d-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{d-1}+\cdots+a_1\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^1+a_0$$
$$+a_d\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^d-a_{d-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{d-1}+\cdots-a_1\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^1+a_0,$$
$$P\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+P\left(-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)=2a_d\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^d+2a_{d-2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{d-2}+\cdots+2a_2\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2+2a_0.$$

Prilikom zbrajanja poništili su se pribrojnici koji sadrže potencije s neparnim eksponentima, odnosno preostali eksponenti nad razlomcima su parni brojevi pa možemo izlučiti broj 2 u eksponentima.

$$P\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+P\left(-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)=2a_d\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{2\frac{d}{2}}+2a_{d-2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{2\frac{d-2}{2}}+\cdots+2a_2\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2+2a_0,$$
$$P\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+P\left(-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)=2a_d\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{d}{2}}+2a_{d-2}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{d-2}{2}}+\cdots+2a_2\left(\frac{a}{b}\right)+2a_0.$$

Uzmemo li sada da je broj d neparan, također će se poništiti svi pribrojnici s neparnim eksponentima, odnosno dobivamo:

$$P\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+P\left(-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)=2a_{d-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{d-1}+2a_{d-3}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{d-3}+\cdots+2a_0.$$

Također možemo primijetiti da su preostali eksponenti nad razlomcima parni brojevi pa također možemo izlučiti broj 2 u eksponentima.

$$P\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+P\left(-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)=2a_{d-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{d-1}{2}}+2a_{d-3}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{d-3}{2}}+\cdots+2a_0.$$

Primijetimo da smo se na taj način riješili svih korijena, pa zaključujemo da je broj $P\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+P\left(-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$ racionalan. Nadalje, još nam preostaje promotriti pribrojnik s najvećom potencijom, jer nas zanima potencija nazivnika:

$$2a_d\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{d}{2}}=\frac{2a_da^{\frac{d}{2}}}{b^{\frac{d}{2}}}$$

Dobivena potencija nazivnika je $b^{d/2}$ ako je d paran, ali ako je d neparan, onda je $b^{(d-1)/2}$ što je manje od d, pa zaključujemo da je $P\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+P\left(-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$ racionalan broj s nazivnikom b^d. □

Teorem 4.0.2. *Neka su* $\frac{a}{b}$ *racionalni brojevi različiti od nule. Tada je broj* $e^{\sqrt{\frac{a}{b}}}$ *iracionalan.*

Dokaz. Neka je $\frac{a}{b}$ racionalan broj različit od nule i neka je $\alpha = \sqrt{\frac{a}{b}}$. Želimo pokazati da je broj e^{α} iracionalan, pa pretpostavimo suprotno, odnosno broj e^{α} je racionalan i možemo zapisati $e^{\alpha} = \frac{r}{s}$. Tada imamo $r - se^{\alpha} = 0$.
Kao i u prijašnjim dokazima želimo e^{α} aproksimirati polinomom $P(z) \in \mathbb{Z}[z]$, kojeg možemo iskoristiti za izgradnju cijelog broja koji je u kontradikciji s fundamentalnim principom teorije brojeva. U tom pristupu problem nastaje jer je $P(\alpha)$ algebarski broj, ali ne nužno cjelobrojni ili racionalni.
Međutim znamo da je $P(\sqrt{\frac{a}{b}}) + P(-\sqrt{\frac{a}{b}})$ racionalan broj s nazivnikom b^d.
Povežemo li tu tvrdnju sa prije spomenutom $r - se^{\alpha} = 0$, znamo da $(r - se^{\alpha})(r - se^{-\alpha}) = 0$ zbog čega dobivamo da vrijedi:

$$(s^2 + r^2) - rs(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) = 0.$$

Nadalje, konstruirajmo polinom $P_p(z) \in \mathbb{Z}[z]$, koji istovremeno dobro aproksimira brojeve e^{α} i $e^{-\alpha}$. Definirajmo najprije

$$f(z) = b^p z^{p-1}(z-\alpha)^p(z+\alpha)^p = z^{p-1}(bz^2 - a)^p \in \mathbb{Z},$$

koji možemo zapisati i kraće

$$f(z) = \sum_{n=p-1}^{3p-1} c_n z^n.$$

Kombinacijom dosadašnjih zaključaka dolazimo do jednakosti

$$\left| \frac{s^2 + r^2}{(p-1)!} P_p(0) - \frac{rs}{(p-1)!}(P_p(\alpha) + P_p(-\alpha)) \right| = \left| \frac{rs}{(p-1)!}(T_p(\alpha) + T_p(-\alpha)) \right|,$$

gdje je $P_p(z)$ polinom koji vrlo dobro aproksimira broj e^z, a $T_p(z)$ greška aproksimacije. Primijetimo da sada možemo iz izraza

$$\frac{s^2 + r^2}{(p-1)!} P_p(0) - \frac{rs}{(p-1)!}(P_p(\alpha) + P_p(-\alpha))$$

konstruirati traženi cijeli broj različit od nule. Iz prijašnjeg argumenta možemo vidjeti da je prvi pribrojnik cijeli broj, no u drugom pribrojniku pojavljuje se iracionalan broj α. Primijetimo da prema definiciji od $P_p(z)$, polinom $\frac{1}{(p-1)!} P_p(z)$ ima cjelobrojne koeficijente. Stoga možemo pomnožiti polinom i dobiti cijeli broj:

$$\frac{b^{3p-1}(s^2 + r^2)}{(p-1)!} P_p(0) - \frac{b^{3p-1} rs}{(p-1)!}(P_p(\alpha) + P_p(-\alpha)).$$

Činjenica da je ovo cijeli broj različit od nule može se pokazati analogno kao u dokazu transcendentnosti broja e. Sada se gornji identitet može zapisati na sljedeći način:

$$\left|\frac{b^{3p-1}(s^2+r^2)}{(p-1)!}P_p(0) - \frac{b^{3p-1}rs}{(p-1)!}(P_p(\alpha)+P_p(-\alpha))\right| = \left|\frac{b^{3p-1}rs}{(p-1)!}(T_p(\alpha)+T_p(-\alpha))\right|.$$

Za dovoljno velike proste brojeve p konstruirali smo pozitivan cijeli broj manji od 1, što je u kontradikciji s fundamentalnim principom teorije brojeva.
Dakle, broj $e^{\sqrt{\frac{a}{b}}}$ je iracionalan. □

Sada možemo lako pokazati da je i broj π iracionalan.

Teorem 4.0.3. *Broj π je iracionalan.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, odnosno pretpostavimo da je broj π racionalan. Tada možemo zapisati $\pi = \frac{c}{d}$.
Primijenimo li Teorem 4.0.1. vidimo da je $e^{\sqrt{\frac{-c^2}{d^2}}}$ iracionalan broj. Međutim lako vidimo da vrijedi

$$e^{\sqrt{\frac{-c^2}{d^2}}} = e^{(\sqrt{-1})(\frac{c}{d})} = e^{i\pi} = -1.$$

Iz toga slijedi da je broj -1 iracionalan, što ne vrijedi.
Dakle, broj π je iracionalan. □

4.1 Lindenmannov teorem

Carl Louis Ferdinand von Lindenmann 1882. godine modificirajući Hermitove metode dokazao je da je broj π transcendentan. Prije samog dokaza prisjetimo se nekoliko važnih činjenica iz algebarske teorije brojeva.

Prva važna činjenica je da ako je α algebarski broj s minimalnim polinomom s cjelobrojnim koeficijentima

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

tada je $a_n\alpha$ algebarski cijeli broj. Pomnožimo li polinom brojem a_n^{n-1} dobivamo

$$(a_n\alpha)^n + a_{n-1}(a_n\alpha)^{n-1} + \cdots + a_0 a_n^{n-1} = 0$$

zbog čega vidimo da $a_n\alpha$ zadovoljava normiranu polinomijalnu jednadžbu s cjelobrojnim koeficijentima. Ostala rješenja minimalnog polinoma od α nazivamo konjugatima broja α, a zapisujemo ih kao $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$.

Neka je $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ simetrični polinom u $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ takav da vrijedi

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

za bilo koji element $\sigma \in S_n$, gdje je S_n simetrična grupa. Druga činjenica kaže da ako je α algebarski broj stupnja n, s konjugatima $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, tada je $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Q}$. Štoviše, ako je α algebarski cijeli broj i f ima cjelobrojne koeficijente, onda je $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ cijeli broj.

Koristeći te činjenice možemo dokazati transcendentnost broja π.

Teorem 4.1.1. *Broj π je transcendentan.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, odnosno pretpostavimo da je broj π algebarski. Tada je i broj $\alpha = i\pi$ isto algebarski broj. Neka je α stupnja d i neka su $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ konjugati od α. Neka je N vodeći koeficijent minimalnog polinoma od α s cjelobrojnim koeficijentima. Iz činjenica koje smo prije naveli slijedi da je broj $N\alpha$ algebarski cijeli broj. Budući da je $e^{i\pi} = -1$, vrijedi

$$(1 + e^{\alpha_1})(1 + e^{\alpha_2}) \cdots (1 + e^{\alpha_d}) = 0.$$

Dobiveni produkt možemo zapisati i kao sumu od 2^d pribrojnika oblika e^θ, gdje je

$$\theta = \epsilon_1\alpha_1 + \cdots + \epsilon_d\alpha_d, \epsilon_i = 0, 1.$$

Pretpostavimo da je točno n od tih brojeva različito od nule i označimo ih s $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Primijetimo da su ti brojevi zapravo svi korijeni nekog polinoma s cjelobrojnim koeficijentima. Da bismo to vidjeli dovoljno je gledati polinom

$$\prod_{\epsilon_1=0}^{1} \cdots \prod_{\epsilon_d=0}^{1} (x - (\epsilon_1\alpha_1 + \cdots + \epsilon_d\alpha_d))$$

koji je simetričan s obzirom na $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$, te stoga pripada $\mathbb{Q}[x]$. Nultočke danog polinoma su $\beta_1, \ldots, \beta_n$ i 0 stupnja $a = 2^d - n$.

Podijelimo li polinom brojem x^a i množenjem zajedničkim nazivnikom dobivamo polinom s cjelobrojnim koeficijentima s nultočkama $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Tada imamo

$$(1 + e^{\alpha_1})(1 + e^{\alpha_2}) \cdots (1 + e^{\alpha_d}) = 0$$

iz čega slijedi

$$(2^d - n) + e^{\beta_1} + \cdots + e^{\beta_n} = 0.$$

Definiramo li

$$I(t, f) := \int_0^t e^{t-x} f(x)dx,$$

kao u prethodnom poglavlju možemo promatrati kombinaciju

$$K := I(\beta_1, f) + \cdots + I(\beta_n, f)$$

gdje je funkcija zadana pravilom

$$f(x) = N^{np} x^{p-1}(x - \beta_1)^p \cdots (x - \beta_n)^p$$

u kojem broj p ponovno predstavlja veliki prosti broj. Tada vrijedi

$$K = -(2^d - n) \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=1}^{n} f^{(j)}(\beta_k)$$

gdje je $m = (n + 1)p - 1$. Suma po k je simetrična funkcija s obzirom na $N\beta_1, \ldots, N\beta_n$, koji su ujedno i nultočke polinoma nad cijelim brojevima, pa zaključujemo da će suma biti racionalan broj. Štoviše derivacije of $f^{(j)}(\beta_k)$ nestaju za $j < p$, a suma za $j \geq p$ je djeljiva s $p!$. Također za dovoljno velike p vrijedi da

$$f^{(p-1)}(0) = (p - 1)!(-N)^{np}(\beta_1 \cdots \beta_n)^p$$

nije djeljivo brojem p. Ali, $f^{(j)}$ je djeljivo brojem $p!$, za $j \geq p$.
Neka je F polinom dobiven od polinoma f tako da je svaki koeficijent zamijenjen njegovom apsolutnom vrijednošću. Nastavimo li kao u dokazu transcendentnosti broja e dobivamo da vrijedi

$$|K| \leq \sum_{k=1}^{n} |\beta_k| \, e^{|\beta_k|} F(|\beta_k|) \leq AC^p$$

za neke konstante A i C. S druge strane, broj K je racionalni broj različiti od nule djeljiv brojem $(p-1)!$ pa stoga mora biti barem toliko velik po apsolutnoj vrijednosti. Usporedimo li rast gornje i donje ograde kada p teži u beskonačnost dolazimo do kontradikcije. Dakle, broj π je transcendentan. □

Poglavlje 5

Posljedice Lindemannova teorema

Lindemann je 1882. godine napisao rad u kojem je skicirao specijalne slučajeve svog teorema u kojima pokazuje transcendentnost brojeva e i π. Njegove rezultate je 1885. preciznije dokazao K. Weierstrass.

Prisjetimo se najprije nekih važnih zaključaka iz algebarske teorije brojeva. Neka je K polje algebarskih brojeva. Skup algebarskih cijelih brojeva iz K je prsten, kojeg označavamo O_K. Poznato je da postoji θ takav da je $K = \mathbb{Q}(\theta)$. Ako su $\theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(r)}$ konjugati od θ, onda govorimo o konjugiranom polju $K^{(i)} := \mathbb{Q}(\theta^{(i)})$. To je osnova za izomorfizam σ_i polja $K \cong K^{(i)}$ dan s $\sigma_i(\theta) = \theta^{(i)}$, koji se proširuje na čitavo polje K.

Teorem 5.0.1. *(Lindemann - Weierstrass, 1885.)*
Ako su $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ različiti algebarski brojevi, onda su $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_s}$ linearno nezavisni na $\bar{\mathbb{Q}}$.

Dokaz. Pretpostavimo da imamo

$$d_1 e^{\alpha_1} + \cdots + d_s e^{\alpha_s} = 0$$

za neke algebarske brojeve $d_1, \ldots, d_s$, koji nisu svi nula. Množenjem gornje jednadžbe s izrazima oblika

$$\sum_{j=1}^{s} \sigma_k(d_j) e^{\alpha_j}$$

za sva ulaganja σ_k polja $\mathbb{Q}(d_1, \ldots, d_s)$, možemo pretpostaviti relaciju

$$a_1 e^{\gamma_1} + \cdots + a_n e^{\gamma_n} = 0$$

gdje su a_i-ovi cijeli brojevi, a γ_i različiti algebarski brojevi.

Nadalje možemo pretpostaviti da je svaki konjugat od γ_i sadržan u gornjoj listi algebarskih brojeva. Neka je K polje algebarskih brojeva generirano brojevima $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ i svim njihovim konjugatima. Tada je prirodno promatrati konjugirane funkcije realne varijable t:

$$A_i(t) := a_1 e^{\gamma_1^{(i)} t} + \cdots + a_n e^{\gamma_n^{(i)} t}.$$

Budući da su γ_i različiti ove funkcije nisu identički jednake nula. Neka je

$$B(t) = \prod_i A_i(t) = b_1 e^{\beta_1 t} + \cdots + b_M e^{\beta_M t},$$

gdje se produkt prolazi po svim konjugiranim funkcijama. Tada je jasno da su Taylorovi koeficijenti od $B(t)$ simetrične funkcije od svih konjugiranih brojeva. Štoviše b_i su cijeli brojevi koji nisu svi jednaki nuli.
Neka je N cijeli broj takav da su $N\beta_1, \ldots, N\beta_M$ algebarski cijeli brojevi. Dalje nastavljamo kao i u prethodnim poglavljima.
Promatrajmo kombinaciju

$$J_r := \sum_{k=1}^{M} b_k I(\beta_k, f_r)$$

gdje je

$$f_r(x) = N^{Mp} \frac{(x-\beta_1)^p (x-\beta_2)^p \cdots (x-\beta_M)^p}{c - \beta_r},$$

za $1 \leq r \leq M$. Jasno je da je

$$f(x) = f_1(x) + \cdots + f_M(x)$$

invarijantna na preslikavanja σ_i, pa ima cjelobrojne koeficijente. Primijenimo li relaciju

$$I(t, f) = e^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t)$$

i budući da je $B(1) = 0$ dobivamo

$$J_r = -\sum_{k=1}^{M} b_k \sum_{j=0}^{m} f_r^{(j)}(\beta_k),$$

gdje je m stupanj od f_r.
Uočimo da budući da je produkt $J_1 \cdots J_M$ Galoisova invarijanta algebarskog broja, da je taj produkt cijeli broj. Nadalje taj produkt je dijeljiv brojem $(p-1)!$, ali nije dijeljiv brojem p za dovoljno velike p. S druge strane, budući da je

$$|J_r| \leq (c_r)^p$$

za odgovarajuće c_r imamo

$$(p-1)! \leq C^p$$

za neku konstantu C. Za dovoljno velike p imamo kontradikciju, što dokazuje teorem. □

5.1 Primjena Lindemann - Weierstrassovog teorema

Lindemann - Weierstrassov teorem generalizacija je Hermitovog i Lindemannova teorema. Lako vidimo da odaberemo li $\alpha_1 = 0$ i $\alpha_2 = 1$, ponovno dobivamo Hermitov rezultat da je broj e transcendentan. Također odaberemo li $\alpha_1 = 0$ i $\alpha_2 = i\pi$ dobivamo Lindemannov teorem.

Teorem 5.1.1. *Ako su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ algebarski brojevi linearno nezavisni nad $\mathbb{Q}$, onda su i $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ algebarski nezavisni.*

Dokaz. Pretpostavimo da su

$$e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$$

algebarski zavisni. Tada imamo

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1,\ldots,i_n} e^{i_1\alpha_1+\cdots+i_n\alpha_n} = 0,$$

za određene brojeve $a_{i_1,\ldots,i_n}$ koji nisu svi jednaki nuli.
Iz Lindemann-Weierstrassovog teorema slijedi da ne mogu svi brojevi

$$i_1\alpha_1 + \cdots + i_n\alpha_n$$

biti različiti pa slijedi da su linearno zavisni nad $\mathbb{Q}$. □

Evo još nekih korolara u kojima primjenjujemo Lindemann - Weierstrassov teorem.

Korolar 5.1.2. *Ako je $\alpha \neq 0$ algebarski broj, onda je broj e^α transcendentan.*

Dokaz. Uzmemo li $\alpha_1 = 0$ i $\alpha_2 = \alpha$, tvrdnja slijedi direktno iz Lindemann - Weierstrassovog teorema. □

Korolar 5.1.3. *Ako je α algebarski broj, onda je broj $sin(\alpha)$ transcendentan.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $sin(\alpha) = a$, gdje je a algebarski broj. Znamo da vrijedi

$$sin(\alpha) = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} = a$$

Odnosno, sredimo li izraz dobivamo:

$$e^{ia} - e^{-ia} - 2aie^0 = 0$$

Dobivena relacija daje linearnu zavisnost brojeva e^{ia}, e^{-ia} i e^0 nad poljem algebarskih brojeva, i to se protivi Lindemannovu teoremu koji ne dopušta tu zavisnost.
Kontradikcija dokazuje transcendentnost broja $sin(\alpha)$. □

Transcendentnost ostalih trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija dokazujemo analogno, raspisivanjem preko eksponencijalnih funkcija.

Korolar 5.1.4. *Ako je* $\alpha \neq 0, 1$ *algebarski broj, onda je broj* $ln(\alpha)$ *transcendentan.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $ln(\alpha) = a$, gdje je a algebarski broj. Ako ovo zapišemo u obliku eksponencijalne funkcije imamo $e^a = \alpha$.
Zbog Korolara 5.1.2. dobivena relacija daje jednakost između transcendentnog i algebarskog broja (osim za $a = 0$ i $\alpha = 1$), što je kontradikcija, pa zaključujemo da je $ln(\alpha)$ transcendentan broj. □

Bibliografija

[1] A. Baker, *Transcendental Number Theory*, Cambridge University Press, 1990.

[2] E. B. Burger, R. Tubbs, *Making transcendende transparent - An Intuitive Approach to Classical Transcendental Number Theory*, Springer, USA, 2004.

[3] A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva*, skripta, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/utb/utblink.pdf`

[4] M. Ram Murty, P. Rath, *Transcendental numbers*, Springer, 2014.

[5] D. Žubrinić, *Diskretna matematika*, Element, Zagreb, 2002.

Sažetak

Transcendentne brojeve otkrio je 1844. godine francuski matematičar Liouville. Vrlo značajno otkriće na području transcendentnih brojeva je Lindemannov teorem iz 1882. godine. Iz tog teorema kao specijalni slučaj slijede transcendentnosti brojeva e i π. Otkrićem transcendentnosti broja π Lindemann je riješio antički grčki problem vezan uz kvadraturu kruga. U ovome radu opisani su najpoznatiji rezultati klasične transcendentne teorije brojeva otkrivene u devetnaestom i početkom dvadesetog stoljeća. Iako je teorija transcendentnih brojeva vrlo važan i fundamentalan dio teorije brojeva, njezini rezultati nisu široko poznati. Smatralo se da su ti rezultati preteški, no zapravo temeljna načela na kojima se temelji čitava disciplina su jednostavna i temelj su cijeloj teoriji brojeva.

Summary

Transcendental numbers were discovered in 1844 by French mathematician Liouville. Very important discovery in the area of transcendental numbers is Lindemann's theorem from 1882. Special case of this theorem imply the transcendence of numbers e and π. Discovering transcendence of the number π, Lindemann solved the ancient Greek problem of squaring the circle. This paper describes the results of the most famous classic transcendental number theory discovered in the nineteenth and the beginning of the twentieth century. Although the theory of transcendental numbers is very important and fundamental part of the theory of numbers, its results are not widely known. These results were considered too difficult, but in fact fundamental principles underlying the whole discipline are simple and represent foundation of the whole theory of numbers.

Životopis

Rođena sam 29. kolovoza 1992. godine u Čakovcu. Osnovnu školu "Šemovec" pohađala sam u mjestu Šemovec. Nakon završetka osnovne škole, 2007. godine upisala sam matematički smjer "Prve gimnazije Varaždin" u Varaždinu. Srednjoškolsko obrazovanje završila sam 2011. godine. Iste godine upisala sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno–matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Godine 2014. završila sam preddiplomski studij te na istom fakultetu upisala diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički.