

# Apsolutna geometrija

---

Poturica, Tea

Master's thesis / Diplomski rad

2014

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:660946>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-15**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Tea Poturica

**APSOLUTNA GEOMETRIJA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, rujan 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Mojim roditeljima...*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Ravnina</b>	<b>3</b>
1.1 Ravnina . . . . .	3
1.2 Primjer: Euklidski model . . . . .	8
1.3 P - ravnina . . . . .	11
<b>2 Metrička ravnina</b>	<b>17</b>
2.1 Metrička ravnina . . . . .	17
2.2 Izometrije . . . . .	23
<b>3 Apsolutna ravnina</b>	<b>33</b>
3.1 Apsolutna ravnina . . . . .	33
<b>Bibliografija</b>	<b>43</b>

# Uvod

U ovom diplomskom radu proučavamo pojam apsolutne ravnine kao jedne apstraktne strukture u kojoj su propisana neka osnovna svojstva (aksiomi), a sva ostala svojstva se izvode iz osnovnih.

U prvom poglavlju krećemo od pojma ravnine, a zatim nastavljamo proučavati pojam *P*-ravnine. U drugom poglavlju bavimo se pojmom metričke ravnine te proučavamo razna svojstva metričke ravnine, a s tim u vezi važan pojam koji proučavamo je pojam izometrije. U trećem poglavlju definiramo apsolutnu ravninu te dokazujemo da neke tvrdnje vrijede u apsolutnoj ravnini.

U ovom diplomskom radu su svi pojmovi precizno definirani, a dokazi tvrdnji su matematički precizno utemeljeni.



# Poglavlje 1

## Ravnina

### 1.1 Ravnina

Neka je  $S$  skup. Za podskup  $\rho$  od  $S \times S$  kažemo da je **binarna relacija** na  $S$ . Za  $x, y \in S$  umjesto  $(x, y) \in \rho$  obično pišemo  $x\rho y$ . Za binarnu relaciju  $\rho$  na skupu  $S$  kažemo da je **linearni uređaj** na  $S$  ako  $\rho$  ima sljedeća svojstva:

1.  $\rho$  refleksivna ( $x\rho x, \forall x \in S$ )
2.  $\rho$  antisimetrična ( $x\rho y$  i  $y\rho x \Rightarrow x = y$ )
3.  $\rho$  tranzitivna ( $x\rho y$  i  $y\rho z \Rightarrow x\rho z$ )
4. usporedivost: Za sve  $x, y$  vrijedi  $x\rho y$  ili  $y\rho x$ .

**Definicija 1.1.1.** Neka je  $M$  skup, te neka je  $\mathcal{A}$  familija podskupova od  $M$  (tj.  $\mathcal{A} \subseteq P(M)$ ), pri čemu je  $P(M)$  partitivni skup od  $M$ , dakle skup svih podskupova od  $M$ ) tako da vrijede sljedeća svojstva (aksiomi):

- I.1. Za sve  $A, B \in M$  tako da je  $A \neq B$  postoji jedinstven  $p \in \mathcal{A}$  tako da je  $A, B \in p$ .
- I.2. Za svaki  $p \in \mathcal{A}$  postoje  $A, B, C \in p$  tako da je  $A \neq B \neq C \neq A$ .
- I.3. Postoje  $A, B, C \in M$  tako da ne postoji  $p \in \mathcal{A}$  takav da su  $A, B, C \in p$ .
- I.4. Postoje  $A, B \in M$  tako da je  $A \neq B$ .

Nadalje, neka je  $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \bigcup_{p \in \mathcal{A}} \mathcal{P}(p \times p)$  funkcija takva da je za svaki  $p \in \mathcal{A}$   $\rho(p)$  linearni uređaj na  $p$ .

Tada za uređenu trojku  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  kažemo da je **ravnina**.



Za  $p \in \mathcal{A}$  linearni uređaj  $f(p)$  označavamo sa  $\leq_p$ . Dakle, za svaki  $p \in \mathcal{A}$  imamo linearni uređaj  $\leq_p$  na  $p$ .

$A \leq_p B$  čitamo:  $A$  ispred  $B$  (na pravcu  $p$ ).

**Lema 1.1.2.** *Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  ravnina. Za elemente skupa  $M$  kažemo da su **točke**, a za elemente skupa  $\mathcal{A}$  kažemo da su **pravci** u toj ravnini. Neka su  $T \in M$ , te  $p \in \mathcal{A}$  tako da je  $T \in p$ . Tada kažemo da pravac  $p$  prolazi točkom  $T$  te da  $T$  leži na pravcu  $p$ .*

*Za točke  $A, B, C$  kažemo da su **kolinearne** ako postoji pravac  $p$  koji ih sadrži.*

*Za točke  $A, B, C$  kažemo da su **nekolinearne** ako nisu kolinearne.*

*Ako su  $A, B \in M$ ,  $A \neq B$  onda sa  $AB$  označavamo jedinstveni pravac koji sadrži te točke.*

Uočimo da za svaki  $p \in \mathcal{A}$  činjenica da je  $\leq_p$  linearni uređaj na  $p$  povlači sljedeće:

1.  $A \leq_p A, \forall A \in p$
2.  $A \leq_p B$  i  $B \leq_p A \Rightarrow A = B$
3.  $A \leq_p B$  i  $B \leq_p C \Rightarrow A \leq_p C$
4.  $\forall A, B \in p$  ( $A \leq_p B$  ili  $B \leq_p A$ )

Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  ravnina. Neka su  $A, B, T \in M$ . Kažemo da je  $T$  **između**  $A$  i  $B$  u ravnini  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  ako postoji pravac  $p \in \mathcal{A}$  tako da  $A, B, T \in p$  i  $A \leq_p T \leq_p B$  ili  $B \leq_p T \leq_p A$ .

Neka su  $A, B, T \in M$  te neka je  $T$  između  $A$  i  $B$ . Onda je  $T$  između  $B$  i  $A$ .

**Napomena 1.1.3.** *Ako je  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  ravnina, onda svaka točka iz  $M$  leži na nekom pravcu. Neka je  $T \in M$ . Prema aksiomu I.4. postoji  $T' \in M$  tako da je  $T \neq T'$ . Po aksiomu I.1. postoji pravac  $p \in \mathcal{A}$  tako da je  $T, T' \in p$ . Dakle  $T \in p$ .*

**Propozicija 1.1.4.** *Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  ravnina. Neka su  $A, B \in M$ . Tada je  $A$  između  $A$  i  $B$ .*

*Dokaz.* Sigurno postoji pravac  $p$  takav da su  $A, B \in p$ .

(Ako  $A \neq B$  onda po aksiomu I.1. postoji pravac  $p$  koji ih sadrži, a ako je  $A = B$  onda prema Napomeni 1.1.3 postoji pravac  $p$  koji sadrži  $A$ , dakle  $A, B \in p$ .)

Budući da je  $\leq_p$  linearni uređaj, za  $\leq_p$  vrijedi svojstvo usporedivosti. Stoga je  $A \leq_p B$  ili  $B \leq_p A$ . Stoga je  $A \leq_p A \leq_p B$  ili  $B \leq_p A \leq_p A$ .

Dakle,  $A$  je između  $A$  i  $B$ . □

Uočimo sada: Ako su  $A, B \in M$ , onda je  $B$  između  $B$  i  $A$  (prema dokazanom), a to povlači da je  $B$  između  $A$  i  $B$ .

**Lema 1.1.5.** *Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  ravnina. Ako su  $A, T \in M$ , te ako je  $T$  između  $A$  i  $A$ , onda je  $T = A$ .*

*Dokaz.* Budući da je  $T$  između  $A$  i  $A$  postoji pravac  $p$  tako da su  $A, T \in p$  te da je  $A \leq_p T \leq_p A$ , tj.  $A \leq_p T$  i  $T \leq_p A$ . Zbog antisimetričnosti relacije  $\leq_p$  imamo da je  $T = A$ .  $\square$

**Propozicija 1.1.6.** *Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  ravnina. Neka su  $A, B, T \in M$ , te neka  $T$  leži između  $A$  i  $B$ . Pretpostavimo da je  $p$  pravac tako da su  $A, B \in p$  te da je  $A \leq_p B$ . Tada je  $T \in p$  i  $A \leq_p T \leq_p B$ .*

*Dokaz.* 1. slučaj:  $A = B$ . Tada  $T$  leži između  $A$  i  $A$ , pa je  $T = A$ . Stoga je  $T \in p$  i  $A \leq_p T$  i  $T \leq_p A$ , dakle  $A \leq_p T \leq_p B$ .

2. slučaj:  $A \neq B$ . Znamo da je  $T$  između  $A$  i  $B$ . Stoga postoji pravac  $q$  tako da  $A, B, T \in q$  i  $A \leq_q T \leq_q B$  ili  $B \leq_q T \leq_q A$ . Imamo  $A, B \in p$  i  $A, B \in q$  po aksiomu I.1. slijedi da je  $p = q$ .

Stoga je  $T \in p$  i  $A \leq_p T \leq_p B$  ili  $B \leq_p T \leq_p A$ .

Pretpostavimo da vrijedi  $B \leq_p T \leq_p A$ . Tada iz tranzitivnosti relacije  $\leq_p$  slijedi da je  $B \leq_p A$ . Imamo da je  $A \leq_p B$  pa sada iz antisimetričnosti relacije  $\leq_p$  slijedi da je  $A = B$ . Kontradikcija.

Dakle, vrijedi  $A \leq_p T \leq_p B$ .  $\square$

**Definicija 1.1.7.** *Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  ravnina. Neka su  $A, B \in M$ . Definiramo  $\overline{AB}$  kao skup svih točaka iz  $M$  koje leže između  $A$  i  $B$ , tj.*

$$\overline{AB} = \{T \in M \mid T \text{ između } A \text{ i } B\}$$

Za  $\overline{AB}$  kažemo da je **dužina (segment)** određen točkama  $A$  i  $B$ .

Uočimo:  $A, B \in \overline{AB}$

Nadalje, uočimo da za sve  $A, B \in M$  vrijedi  $\overline{AB} = \overline{BA}$ . Naime, neka je  $T \in \overline{AB}$ . Tada je  $T$  između  $A$  i  $B$ , pa je stoga  $T$  između  $B$  i  $A$ . Dakle,  $T \in \overline{BA}$ .

Obratno, neka je  $T \in \overline{BA}$ . Tada je  $T$  između  $B$  i  $A$ , pa je stoga  $T$  između  $A$  i  $B$ . Dakle  $T \in \overline{AB}$ .

Zaključak:  $\overline{AB} = \overline{BA}$

**Korolar 1.1.8.** *Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  ravnina, neka je  $p \in \mathcal{A}$ , te  $A, B \in p$ . Tada je  $\overline{AB} \subseteq p$ .*

*Dokaz.* Imamo  $A \leq_p B$  ili  $B \leq_p A$  (usporedivost relacije  $\leq_p$ ).

1. slučaj:  $A \leq_p B$

Iz Propozicije 1.1.6 slijedi  $\overline{AB} \subseteq p$ .

$(T \in \overline{AB} \Rightarrow T \text{ leži između } A \text{ i } B \xrightarrow{\text{Prop.1.1.6}} T \in p)$

2. slučaj:  $B \leq_p A$

Iz propozicije 1.1.6 slijedi  $\overline{BA} \subseteq p$ .

Dakle,  $\overline{AB} \subseteq p$ .  $\square$

**Lema 1.1.9.** *Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  ravnina,  $p \in \mathcal{A}$  (pravac u ravnini) te neka su  $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in p$  tako da je  $P_1 \leq_p Q_1$  i  $P_2 \leq_p Q_2$ , te tako da je  $\overline{P_1 Q_1} = \overline{P_2 Q_2}$ . Tada je  $P_1 = P_2$  i  $Q_1 = Q_2$ .*

*Dokaz.* Iz  $P_1 \in \overline{P_1 Q_1}$  i  $\overline{P_1 Q_1} = \overline{P_2 Q_2}$  slijedi da je  $P_1 \in \overline{P_2 Q_2}$ .  
Iz propozicije 1.1.6 zaključujemo da je  $P_2 \leq_p P_1$ .

Iz  $P_2 \in \overline{P_2 Q_2}$  i  $\overline{P_1 Q_1} = \overline{P_2 Q_2}$  slijedi da je  $P_2 \in \overline{P_1 Q_1}$ .  
Iz propozicije 1.1.6 zaključujemo da je  $P_1 \leq_p P_2$ .

Prema tome je  $P_1 = P_2$ .

Analogno slijedi da je  $Q_1 = Q_2$ . □

**Propozicija 1.1.10.** *Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  ravnina te neka su  $A, B, C$  i  $D$  točke u toj ravnini takve da je  $\overline{AB} = \overline{CD}$ . Tada je  $A = C$  i  $B = D$  ili  $A = D$  i  $B = C$ .*

*Dokaz.* Neka je  $p$  pravac koji sadrži točke  $A$  i  $B$ .

Iz korolara 1.1.8 slijedi  $\overline{AB} \subseteq p$ . Stoga je i  $\overline{CD} \subseteq p$ , a iz ovog slijedi  $C, D \in p$ . Dakle,  $A, B, C, D \in p$ .

1. slučaj:  $A \leq_p B$

1. podslučaj:  $C \leq_p D$ . Iz leme 1.1.9 slijedi  $A = C$  i  $B = D$ .

2. podslučaj:  $D \leq_p C$ . Iz leme 1.1.9 slijedi  $A = D$  i  $B = C$ .

2. slučaj:  $B \leq_p A$

1. podslučaj:  $C \leq_p D$ . Iz leme 1.1.9 slijedi  $B = C$  i  $A = D$ .

2. podslučaj:  $D \leq_p C$ . Iz leme 1.1.9 slijedi  $B = D$  i  $A = C$ . □

**Lema 1.1.11.** *Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  ravnina. Neka su  $A, B, C \in M$  točke takve da je  $C \in \overline{AB}$  i  $C \neq B$ . Tada  $B \notin \overline{AC}$ .*

*Dokaz.* Neka je  $p$  pravac tako da su  $A, B \in p$ .

1. slučaj:  $A \leq_p B$

Tada iz propozicije 1.1.6 slijedi  $A \leq_p C$  i  $C \leq_p B$ .

Pretpostavimo  $B \in \overline{AC}$ . Iz propozicije 1.1.6 slijedi  $A \leq_p B$  i  $B \leq_p C$ .

Slijedi  $B = C$ , što je u kontradikciji s  $B \neq C$ .

Dakle,  $B \notin \overline{AC}$ .

2. slučaj:  $B \leq_p A$

Tada iz propozicije 1.1.6 slijedi  $B \leq_p C$  i  $C \leq_p A$ .

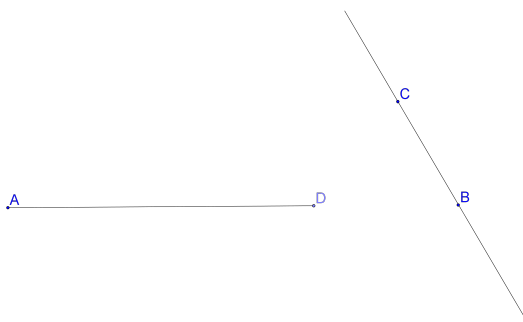
Pretpostavimo  $B \in \overline{AC}$ . Iz propozicije 1.1.6 slijedi  $C \leq_p B$  i  $B \leq_p A$ .

Slijedi  $B = C$ , što je u kontradikciji s  $B \neq C$ .

Dakle,  $B \notin \overline{AC}$ . □

**Propozicija 1.1.12.** *Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  ravnina te neka su točke  $A, B, C$  nekolinearne točke u toj ravnini. Neka je  $D \in \overline{AB}$  i  $D \neq B$ . Tada je*

$$BC \cap \overline{AD} = \emptyset$$



Slika 1.1:  $BC \cap \overline{AD} = \emptyset$

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno, dakle  $BC \cap \overline{AD} \neq \emptyset$ . Stoga postoji  $E \in BC \cap \overline{AD}$ . Dakle,  $E \in BC$  i  $E \in \overline{AD}$ . Prema lemi 1.1.11  $B \notin \overline{AD}$ . Stoga  $B \neq E$ .

Iz  $\overline{AB} \subseteq AB$  slijedi  $D \in AB$ . No iz ovog slijedi  $\overline{AD} \subseteq AB$ . Stoga je  $E \in AB$ .

Dakle,  $E$  i  $B$  su različite točke koje leže na pravcima  $AB$  i  $BC$ . Iz toga slijedi  $AB = BC$  što je u kontradikciji s tim da su  $A, B, C$  nekolinearne točke.

Prema tome  $BC \cap \overline{AD} = \emptyset$ . □

**Lema 1.1.13.** *Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  ravnina te neka su  $A, B, C$  točke takve da je  $C$  između  $A$  i  $B$ . Tada je*

$$\overline{AC} \cap \overline{CB} = \{C\}$$

*Dokaz.* Neka je  $p$  pravac koji sadrži točke  $A$  i  $B$ .

1. slučaj:  $A \leq_p B$

Prema propoziciji 1.1.6 imamo  $A \leq_p C \leq_p B$ . Neka je  $T \in \overline{AC} \cap \overline{CB}$ . Tada je  $T \in \overline{AC}$  i  $T \in \overline{CB}$ .

Iz propozicije 1.1.6 slijedi  $A \leq_p T \leq_p C$  i  $C \leq_p T \leq_p B$ . Stoga je  $T = C$  (antisimetričnost relacije  $\leq_p$ ).

Dakle  $\overline{AC} \cap \overline{CB} \subseteq \{C\}$ . S druge strane očito je  $\{C\} \subseteq \overline{AC} \cap \overline{CB}$ . Prema tome  $\overline{AC} \cap \overline{CB} = \{C\}$ .

2. slučaj:  $B \leq_p A$

Analogno slijedi  $\overline{AC} \cap \overline{CB} = \{C\}$ . □

**Propozicija 1.1.14.** *Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  ravnina, te neka je  $p \in \mathcal{A}$ . Neka su  $A, B, C \in p$ . Tada jedna od ovih točaka leži između preostale dvije.*

*Dokaz.* 1. slučaj:  $A \leq_p B$

Vrijedi  $C \leq_p A$  ili  $A \leq_p C$

Ako je  $C \leq_p A$  onda imamo  $C \leq_p A \leq_p B$  pa slijedi da je  $A$  između  $B$  i  $C$ .

Pretpostavimo  $A \leq_p C$

1. podslučaj:  $C \leq_p B$ . Tada je  $A \leq_p C \leq_p B$  pa je  $C$  između  $A$  i  $B$ .

2. podslučaj:  $B \leq_p C$ . Tada je  $A \leq_p B \leq_p C$  pa je  $B$  između  $A$  i  $C$ .

2. slučaj:  $B \leq_p A$

Vrijedi  $C \leq_p B$  ili  $B \leq_p C$

1. podslučaj:  $C \leq_p B$ . Tada je  $C \leq_p B \leq_p A$  pa je  $B$  između  $C$  i  $A$ .

2. podslučaj:  $B \leq_p C$ .

2. podslučaj 1)  $C \leq_p A$ . Tada je  $B \leq_p C \leq_p A$  pa je  $C$  između  $B$  i  $A$ .

2. podslučaj 2)  $A \leq_p C$ . Tada je  $B \leq_p A \leq_p C$  pa je  $A$  između  $B$  i  $C$ . □

## 1.2 Primjer: Euklidski model

Označimo s  $\mathbb{R}^2$  skup svih uređenih parova  $(x, y)$  tako da su  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Znamo da na  $\mathbb{R}^2$  imamo strukturu realnog vektorskog prostora uz zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom definirane sa

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad i \quad \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y),$$

$$x_1, y_1, x_2, y_2, x, y, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Za  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  i  $a \in \mathbb{R}^2$  definiramo skup  $a + S = \{a + x \mid x \in S\}$ .

**Primjer 1.2.1.** *Neka je  $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$ ,  $a = (-2, 4)$ . Tada je  $a + S = \{(-1, 4), (-2, 5)\}$ .*

*Neka je  $\mathcal{A}$  familija podskupova od  $\mathbb{R}^2$  oblika  $a + W$ , gdje je  $a \in \mathbb{R}^2$  te  $W$  potprostor od  $\mathbb{R}^2$  dimenzije 1.*

**Lema 1.2.2.** *Neka je  $a \in \mathbb{R}^2$  te neka je  $W$  potprostor od  $\mathbb{R}^2$ . Neka je  $p = a + W$ . Tada je  $W = \{x - y \mid x, y \in p\}$ .*

*Dokaz.* Neka su  $x, y \in p$ . Tada je  $x = a + w_1$  i  $y = a + w_2$ , gdje su  $w_1, w_2 \in W$ .

Tada je  $x - y = w_1 - w_2 \in W$ , dakle  $x - y \in W$ .

Time je dokazano  $\{x - y \mid x, y \in p\} \subseteq W$ .

Obratno, neka je  $w \in W$ . Neka je  $x = a + w$ ,  $y = a$ .

Tada su  $x, y \in p$  ( $y = a + (0, 0)$  i  $(0, 0) \in W$ ) te vrijedi  $x - y = w$ .

Prema tome  $W \subseteq \{x - y \mid x, y \in p\}$ .

Time je tvrdnja leme dokazana. □

**Lema 1.2.3.** Neka su  $W_1, W_2$  potprostori od  $\mathbb{R}^2$  te neka su  $a, b \in \mathbb{R}^2$  takvi da je  $a + W_1 = b + W_2$ . Tada je  $W_1 = W_2$ .

*Dokaz.* Prema prethodnoj lemi vrijedi  $W_1 = \{x - y \mid x, y \in a + W_1\}$ . Isto tako vrijedi  $W_2 = \{x - y \mid x, y \in a + W_2\}$ . Stoga je  $W_1 = W_2$ . □

**Lema 1.2.4.** Neka je  $a \in \mathbb{R}^2$  te neka je  $W$  potprostor od  $\mathbb{R}^2$ . Neka je  $b \in a + W$ . Tada je  $a + W = b + W$ .

*Dokaz.* Iz  $b \in a + W$  slijedi da je  $b = a + w_0$ , za neki  $w_0 \in W$ .

Neka je  $x \in a + W$ . Tada je  $x = a + w$ , za neki  $w \in W$ .

Budući da je  $a = b - w_0$ , dobivamo  $x = b - w_0 + w = b + (w - w_0) \in b + W$ , dakle  $x \in b + W$ .

Ovime smo dokazali da je  $a + W \subseteq b + W$ .

Obratno, neka je  $x \in b + W$ . Tada je  $x = b + w$ , za neki  $w \in W$ .

Imamo  $x = (a + w_0) + w = a + (w_0 + w) \in a + W$ , dakle  $x \in a + W$ .

Ovime smo dokazali da je  $b + W \subseteq a + W$ .

Slijedi tvrdnja leme. □

**Propozicija 1.2.5.** Za sve  $a, b \in \mathbb{R}^2$ ,  $a \neq b$  postoji jedinstveni  $p \in \mathcal{A}$  takav da su  $a, b \in p$ .

*Dokaz.* Neka su  $a, b \in \mathbb{R}^2$ ,  $a \neq b$ .

Tada je  $b - a \neq (0, 0)$ , te je  $W = \{\lambda(b - a) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  potprostor od  $\mathbb{R}^2$  dimenzije 1.

Neka je  $p = a + W$ . Očito je  $p \in \mathcal{A}$ .

Imamo  $a = a + (0, 0)$  i  $(0, 0) \in W$ , stoga je  $a \in a + W$ , tj.  $a \in p$ .

Nadalje, vrijedi  $b = a + (b - a)$  i  $b - a \in W$ . Stoga je  $b \in a + W$ , tj.  $b \in p$ .

Prema tome postoji  $p \in \mathcal{A}$  takav da su  $a, b \in p$ .

Pretpostavimo da su  $p, q \in \mathcal{A}$  takvi da su  $a, b \in p$  i  $a, b \in q$ .

Budući da je  $p \in \mathcal{A}$  postoji  $c \in \mathbb{R}^2$  i  $W$  jednodimenzionalni potprostor od  $\mathbb{R}^2$  tako da je  $p = c + W$ . Isto tako postoji  $c' \in \mathbb{R}^2$  i  $W'$  jednodimenzionalni potprostor od  $\mathbb{R}^2$  tako da je  $q = c' + W'$ .

Iz leme 1.2.2 slijedi  $a - b \in W$  i  $a - b \in W'$ .

Budući da je  $a - b \neq (0, 0)$ , slijedi  $W = \{\lambda(a - b) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  i  $W' = \{\lambda(a - b) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

Stoga je  $W = W'$ .

Iz  $a \in p$  slijedi  $a \in c + W$ , pa iz leme 1.2.4 slijedi da je

$$a + W = c + W. \quad (1.1)$$

Nadalje iz  $a \in q$  slijedi  $a \in c' + W'$ , tj.  $a \in c' + W$ , pa je prema lemi 1.2.4

$$a + W = c' + W. \quad (1.2)$$

Iz (1.1) i (1.2) slijedi  $c + W = c' + W$ , tj.  $p = q$ .

Time je propozicija dokazana.  $\square$

**Propozicija 1.2.6.** *Neka je  $p \in \mathcal{A}$ . Tada postoje  $a, b, c \in p$  tako da  $a \neq b \neq c \neq a$ .*

*Dokaz.* Imamo  $p = a + W$ , gdje je  $a \in \mathbb{R}^2$  te  $W \leq \mathbb{R}^2$ ,  $\dim W = 1$ .

Neka je  $x \in W$  i  $x \neq (0, 0)$  takav da je  $W = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ . Tada su vektori  $x, 2x, 3x$  međusobno različiti elementi od  $W$ . Stoga su  $a + x, a + 2x, a + 3x$  međusobno različiti elementi od  $p$ .  $\square$

**Propozicija 1.2.7.** *Postoje  $a, b, c \in \mathbb{R}^2$  sa svojstvom da ne postoji  $p \in \mathcal{A}$  takav da su  $a, b, c \in p$ .*

*Dokaz.* Neka je  $a = (0, 0), b = (1, 0), c = (0, 1)$ .

Pretpostavimo da postoji  $p \in \mathcal{A}$  takav da su  $a, b, c \in p$ .

Imamo  $p = e + W$  gdje je  $e \in \mathbb{R}^2$  i  $W \leq \mathbb{R}^2$ ,  $\dim W = 1$ .

Iz  $a, b, c \in e + W$  slijedi  $b - c, c - a \in W$  (lema 1.2.2).

Dakle,  $(1, 0), (0, 1) \in W$ .

Ovo je nemoguće jer su vektori  $(1, 0)$  i  $(0, 1)$  linearno nezavisni, a  $W$  je potprostor dimenzije 1.

Prema tome ne postoji  $p \in \mathcal{A}$  takav da  $a, b, c \in p$ .  $\square$

**Napomena 1.2.8.** *Za svaki  $p \in \mathcal{A}$  postoji jedinstveni  $W \leq \mathbb{R}^2$ ,  $\dim W = 1$  takav da je  $p = e + W$  za neki  $e \in \mathbb{R}^2$ . Naime iz definicije od  $\mathcal{A}$  jasno je da takav  $W$  postoji. S druge strane ako je  $W' \leq \mathbb{R}^2$ ,  $\dim W' = 1$  te ako je  $p = e' + W'$  za neki  $e' \in \mathbb{R}^2$  onda imamo  $e + W = e' + W'$  pa slijedi  $W = W'$  prema lemi 1.2.3.*

*Za takav  $W$  kažemo da je smjer od  $p$ .*

*Neka je  $p \in \mathcal{A}$ . Tada postoje  $e \in \mathbb{R}^2$  i  $W \leq \mathbb{R}^2$ ,  $\dim W = 1$  takvi da je  $p = e + W$ . Odaberimo  $x \in W$  tako da je  $W = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ . Uočimo da tada za svaki  $a \in p$  postoji jedinstveni  $\lambda \in \mathbb{R}$  takav da je  $a = e + \lambda x$ . Naime jasno je da takav  $\lambda$  postoji, a ako su  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$  takvi da je  $a = e + \lambda x$  i  $a = e + \lambda' x$ , onda je  $e + \lambda x = e + \lambda' x$  iz čega slijedi  $(\lambda - \lambda')x = 0$  pa je  $\lambda - \lambda' = 0$  (jer je  $x \neq (0, 0)$ ), dakle  $\lambda = \lambda'$ . Za  $a \in p$  neka je  $\lambda_a \in \mathbb{R}$*

takav da je  $a = e + \lambda_a x$ . Definirajmo binarnu relaciju  $\leq_p$  na  $p$  na sljedeći način:

Neka su  $a, b \in p$  (tada je dakle  $a = e + \lambda_a x$  i  $b = e + \lambda_b x$ .)

Definiramo  $a \leq_p b$  ako je  $\lambda_a \leq \lambda_b$ . Tvrđimo da je  $\leq_p$  **linearni uređaj** na  $p$ .

#### 1) REFLEKSIVNOST

Neka je  $a \in p$ . Tada je  $a \leq_p a$  jer je  $\lambda_a \leq \lambda_a$ .

#### 2) ANTISIMETRIČNOST

Neka su  $a, b \in p$  takvi da je  $a \leq_p b$  i  $b \leq_p a$ . Tada je  $\lambda_a \leq \lambda_b$  i  $\lambda_b \leq \lambda_a$  pa slijedi  $\lambda_a = \lambda_b$ .

Imamo  $a = e + \lambda_a x = e + \lambda_b x = b$ , tj.  $a = b$ .

#### 3) TRANZITIVNOST

Neka su  $a, b, c \in p$  takvi da je  $a \leq_p b$  i  $b \leq_p c$ . Tada je  $\lambda_a \leq \lambda_b$  i  $\lambda_b \leq \lambda_c$  pa slijedi  $\lambda_a \leq \lambda_c$ .

Stoga je  $a \leq_p c$ .

#### 4) USPOREDIVOST

Neka su  $a, b \in p$ . Tada je  $\lambda_a \leq \lambda_b$  ili  $\lambda_b \leq \lambda_a$  pa slijedi  $a \leq_p b$  ili  $b \leq_p a$ .

Prema tome  $\leq_p$  je linearni uređaj na  $p$ .

Uočimo da definicija od  $\leq_p$  ovisi o izboru točke  $e$  i vektora  $x$ .

Neka je  $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \bigcup_{p \in \mathcal{A}} \mathcal{P}(p \times p)$  funkcija definirana sa  $\rho(p) = \leq_p$ ,  $\forall p \in \mathcal{A}$

**Teorem 1.2.9.** Uređena trojka  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{A}, \rho)$  je **RAVNINA**.

*Dokaz.* Ovo slijedi iz propozicija 1.2.6, 1.2.7, 1.2.5 i iz činjenice da je  $\leq_p$  linearni uređaj na  $p$  za svaki  $p \in \mathcal{A}$ . □

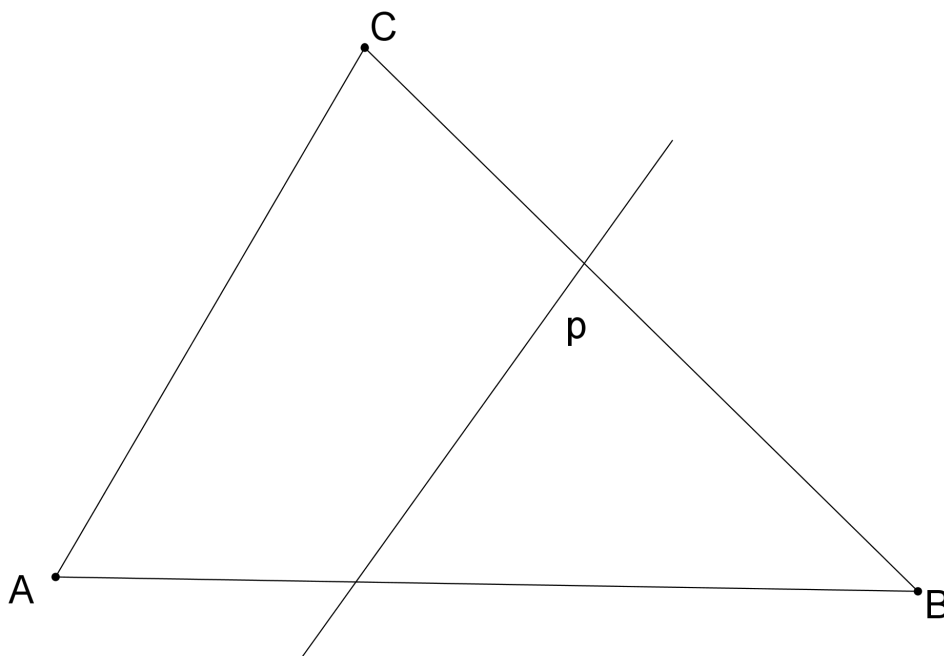
## 1.3 P - ravnina

**Definicija 1.3.1.** Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  ravnina. Za  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  kažemo da je **P – ravnina** ako vrijedi sljedeće (**Paschov aksiom**):

Ako su  $A, B, C \in M$  točke te  $p \in \mathcal{A}$  pravac takav da  $p$  siječe segment  $\overline{AB}$  (tj.  $p \cap \overline{AB} \neq \emptyset$ ), onda  $p$  siječe  $\overline{AC}$  ili  $\overline{CB}$ .

**Propozicija 1.3.2.** Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  P – ravnina. Neka su  $A, B, C \in M$  te neka je  $p \in \mathcal{A}$  pravac koji ne prolazi niti jednom od ovih točaka. Tada  $p$  ne siječe sva tri segmenta  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  i  $\overline{AC}$ .





Slika 1.2: Paschov aksiom

*Dokaz.* **Promotrimo slučaj kada su točke  $A, B, C$  kolinearne.** Tada postoji pravac  $l$  takav da su točke  $A, B, C \in l$ .

Prema propoziciji 1.2.2 vrijedi sljedeće:  $C$  između  $A$  i  $B$  ili  $A$  između  $B$  i  $C$  ili  $B$  između  $A$  i  $C$ .

1. slučaj:  **$C$  između  $A$  i  $B$**

Pretpostavimo da pravac  $p$  siječe sva 3 segmenta  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ .

Neka je  $T_1$  točka takva da je  $T_1 \in \overline{AC}$  i  $T_1 \in p$ .

Neka je  $T_2$  točka takva da je  $T_2 \in \overline{BC}$  i  $T_2 \in p$ .

Jasno je da je  $\overline{AC} \subseteq l$  i  $\overline{CB} \subseteq l$ .

Stoga je  $T_1 \in l, T_2 \in l$ . Pretpostavimo  $T_1 \neq T_2$ . Tada su  $p$  i  $l$  pravci koji sadrže točke  $T_1$  i  $T_2$ . Stoga je prema (I.1.)  $p = l$ . No, ovo je nemoguće jer pravac  $l$  prolazi točkama  $A, B, C$ , a pravac  $p$  ne prolazi tim točkama. Stoga je  $T_1 = T_2$ .

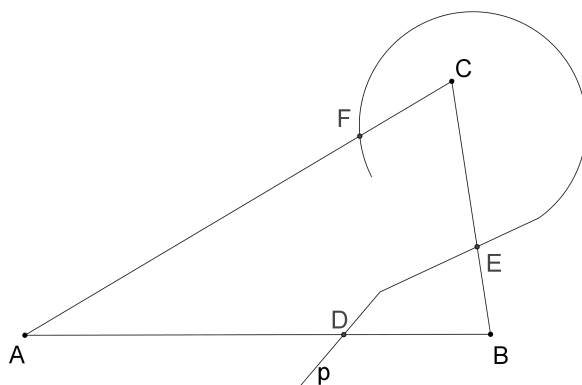
Stoga imamo  $T_1 \in \overline{AC}$  i  $T_1 \in \overline{BC}$  pa je  $T_1 \in \overline{AC} \cap \overline{CB}$ . Prema lemi 1.1.13 slijedi  $\overline{AC} \cap \overline{CB} = \{C\}$ . Prema tome  $T_1 = C$ . No, ovo je nemoguće jer je  $T_1 \in p$ , a pravac  $p$  ne prolazi kroz  $C$ .

Prema tome pravac  $p$  ne siječe sva tri segmenta  $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ .

Isti zaključak dobijemo u slučajevima kada je točka  $A$  između  $B$  i  $C$  i točka  $B$  između  $A$  i  $C$ .

**Promotrimo sada slučaj kada su točke  $A, B, C$  nekolinearne.**

Pretpostavimo da pravac  $p$  siječe sva tri segmenta  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ .



Slika 1.3: Točke  $A, B, C$  su nekolinearne

Neka je  $D \in \overline{AB} \cap p, E \in \overline{BC} \cap p$  i  $F \in \overline{AC} \cap p$ . Imamo  $D, E, F \in p$ .

Pretpostavimo da je  $E$  između  $D$  i  $F$ . Tada je  $E \in \overline{DF}$ . No,  $E \in \overline{BC}$ . Stoga pravac  $BC$  siječe segment  $\overline{DF}$ . Iz Paschovog aksioma slijedi da  $BC$  siječe  $\overline{AD}$  ili  $\overline{AF}$ . No ovo je nemoguće prema propoziciji 1.1.12. (Uočimo da je  $F \neq C$  i  $D \neq B$  jer  $p$  ne prolazi niti jednom od točaka  $A, B$  i  $C$ ).

Analogno slijedi da slučajevi  $F \in \overline{DE}$  i  $D \in \overline{EF}$  vode na kontradikciju.

Prema tome pravac  $p$  ne siječe sva tri segmenta  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  i  $\overline{AC}$ .  $\square$

**Definicija 1.3.3.** Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  ravnina, te neka je  $S \subseteq M$ . Za  $S$  kažemo da je **konveksan skup** u ravnini  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  ako za sve  $A, B \in S$  vrijedi  $\overline{AB} \subseteq S$ .

**Primjer 1.3.4.** Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  ravnina. Neka je  $p$  pravac u ovoj ravnini (tj.  $p \in \mathcal{A}$ ). Tada je  $p$  konveksan skup. Naime za sve  $A, B \in p$  vrijedi  $\overline{AB} \subseteq p$  prema korolaru 1.1.8.

**Propozicija 1.3.5.** Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  ravnina te neka su  $A, B \in M$ . Tada je  $\overline{AB}$  konveksan skup.

*Dokaz.* Neka su  $C, D \in \overline{AB}$ . Želimo dokazati da je  $\overline{CD} \subseteq \overline{AB}$ .

Neka je  $p$  pravac takav da je  $A, B \in p$ . Možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je  $A \leq_p B$ . Imamo  $\overline{AB} \subseteq p$ , pa su  $C, D \in p$ . Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti  $C \leq_p D$ .

Iz  $C \in \overline{AB}$  slijedi  $A \leq_p C \leq_p B$  prema propoziciji 1.1.6.

Isto tako iz  $D \in \overline{AB}$  slijedi  $A \leq_p D \leq_p B$ . Stoga imamo  $A \leq_p C \leq_p D \leq_p B$ .

Neka je  $T \in \overline{CD}$ . Iz propozicije 1.1.6 slijedi  $C \leq_p T \leq_p D$ . Imamo  $A \leq_p C$  i  $C \leq_p T$ , pa je  $A \leq_p T$ . Isto tako dobivamo  $T \leq_p B$ . Dakle,  $A \leq_p T \leq_p B$ . Prema tome  $T$  je između  $A$  i  $B$ , tj.  $T \in \overline{AB}$ .

Prema tome,  $\overline{CD} \subseteq \overline{AB}$ . Dakle,  $\overline{AB}$  je konveksan skup.  $\square$

**Definicija 1.3.6.** Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  ravnina i  $p \in \mathcal{A}$  pravac, te neka je  $O \in p$ . Tada za skupove

$$\{T \in p \mid O \leq_p T\} \text{ i } \{T \in p \mid T \leq_p O\}$$

kažemo da su **polupravci s vrhom  $O$**  (ili polupravci od  $p$  s vrhom  $O$ ).

**Propozicija 1.3.7.** Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  ravnina. Tada je svaki polupravac u toj ravnini konveksan skup.

*Dokaz.* Neka je  $r$  polupravac u ravnini  $(M, \mathcal{A}, \rho)$ . Tada postoje  $p \in \mathcal{A}$  i  $O \in p$  tako da je  $r$  polupravac s vrhom  $O$  određen s  $p$ .

$$1. \text{ slučaj: } r = \{T \in p \mid O \leq_p T\}$$

Neka su  $A, B \in r$ . Želimo dokazati da je  $\overline{AB} \subseteq r$ .

Neka je  $T \in \overline{AB}$ .

Ako je  $A \leq_p B$ , onda je  $A \leq_p T \leq_p B$ , pa iz  $O \leq_p A$  (što vrijedi jer je  $A \in r$ ) slijedi  $O \leq_p T$  pa je  $T \in r$ .

Ako je  $B \leq_p A$ , onda je  $B \leq_p T \leq_p A$ , pa iz  $O \leq_p B$  slijedi  $O \leq_p T$  pa je  $T \in r$ .

Dakle, u svakom slučaju imamo  $T \in r$ .

Prema tome  $\overline{AB} \subseteq r$ . Stoga je  $r$  konveksan skup.

2. slučaj:  $r = \{T \in p \mid T \leq_p O\}$

Neka su  $A, B \in r$ . Želimo dokazati da je  $\overline{AB} \subseteq r$ .

Neka je  $T \in \overline{AB}$ .

Ako je  $A \leq_p B$ , onda je  $A \leq_p T \leq_p B$ , pa iz  $B \leq_p O$  slijedi  $T \leq_p O$ .

Ako je  $B \leq_p A$ , onda je  $B \leq_p T \leq_p A$ , pa iz  $A \leq_p O$  slijedi  $T \leq_p O$ .

Dakle, u svakom slučaju imamo  $T \leq_p O$ , pa je  $T \in r$ .

Prema tome  $\overline{AB} \subseteq r$ . Stoga je  $r$  konveksan skup.  $\square$

**Propozicija 1.3.8.** Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho)$   $P$  – ravnina, te neka je  $p$  pravac u toj ravnini. Na skupu  $M \setminus p$  definiramo relaciju  $\sim$  sa

$$A \sim B \text{ ako } \overline{AB} \cap p = \emptyset$$

Tada je  $\sim$  relacija ekvivalencije na skupu  $M \setminus p$  i rastavlja  $M \setminus p$  na najviše dvije klase ekvivalencije. Za klasu ekvivalencije pri relaciji  $\sim$  kažemo da je **poluravnina određena pravcem  $p$** .

*Dokaz.* Dokažimo da je  $\sim$  relacija ekvivalencije na skupu  $M \setminus p$ .

Neka je  $A \in M \setminus p$ . Tada je  $\overline{AA} \cap p = \{A\} \cap p = \emptyset$  jer  $A \notin p$ . Prema tome  $A \sim A$ . Dakle,  $\sim$  je refleksivna.

Pretpostavimo sada da su  $A, B \in M \setminus p$  takvi da je  $A \sim B$ . Tada je  $\overline{AB} \cap p = \emptyset$  pa je  $\overline{BA} \cap p = \emptyset$  jer je  $\overline{AB} = \overline{BA}$ . Prema tome  $B \sim A$ . Dakle,  $\sim$  je simetrična.

Neka su  $A, B, C \in M \setminus p$  takve da je  $A \sim B$  i  $B \sim C$ .

Dokažimo da je  $A \sim C$ . Pretpostavimo suprotno. Tada je  $\overline{AC} \cap p \neq \emptyset$ . Iz Paschovog aksioma slijedi  $\overline{AB} \cap p \neq \emptyset$  ili  $\overline{BC} \cap p \neq \emptyset$ . No iz  $A \sim B$  i  $B \sim C$  slijedi  $\overline{AB} \cap p = \emptyset$  i  $\overline{BC} \cap p = \emptyset$ . Kontradikcija.

Dakle,  $A \sim C$ . Prema tome  $\sim$  je tranzitivna.

Dakle  $\sim$  je relacija ekvivalencije.

Dokažimo sada da  $\sim$  rastavlja  $M \setminus p$  na najviše dvije klase ekvivalencije, tj. da skup  $\{[A] \mid A \in M \setminus p\}$  ima najviše 2 elementa.

Odaberimo neku točku  $A \in M \setminus p$ .

1. slučaj: Za svaki  $B \in M \setminus p$  vrijedi  $A \sim B$ . Tada za svaki  $B \in M \setminus p$  vrijedi  $[A] = [B]$ .

2. slučaj: Postoji  $B \in M \setminus p$  takav da  $A \not\sim B$ .

Iz ovoga slijedi da je  $\overline{AB} \cap p \neq \emptyset$ . Neka je  $C \in M \setminus p$ . Tvrdimo da je  $A \sim C$  ili  $B \sim C$ .

Pretpostavimo suprotno. Tada  $A \not\sim C$  i  $B \not\sim C$  pa slijedi  $\overline{AC} \cap p \neq \emptyset$  i  $\overline{BC} \cap p \neq \emptyset$ . Dakle  $p$  je

pravac koji ne prolazi niti jednom od točaka  $A, B, C$  (jer su  $A, B, C \in M \setminus p$ ), a siječe svaki od segmenata  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ . Ovo je nemoguće prema propoziciji 1.3.2. Prema tome  $A \sim C$  ili  $B \sim C$ . Ovo znači  $[A] = [C]$  ili  $[B] = [C]$ . Dakle,  $\{[C] \mid C \in M \setminus p\} = \{[B], [A]\}$ .  $\square$

## Poglavlje 2

# Metrička ravnina

### 2.1 Metrička ravnina

**Definicija 2.1.1.** Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho)$   $P$  – ravnina te neka je  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija tako da vrijedi sljedeće:

III.1. Za sve  $A, B \in M$  vrijedi  $d(A, B) \geq 0$  te  $d(A, B) = 0$  akko  $A = B$ .

III.2 Za sve  $A, B \in M$  vrijedi  $d(A, B) = d(B, A)$

III.3. Za sve  $A, B, C \in M$  vrijedi  $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ . Nadalje  $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$  akko je  $C \in \overline{AB}$ .

III.4. Ako je  $r$  polupravac s vrhom  $O$  onda za  $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$ , postoji  $T \in r$  takav da je  $d(O, T) = x$ .

Tada za uređenu četvorku  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  kažemo da je **METRIČKA RAVNINA**.

Ako su  $A, B \in M$  onda za broj  $d(A, B)$  kažemo da je udaljenost točaka  $A$  i  $B$  (u metričkoj ravnini  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$ ).

**Propozicija 2.1.2.** Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  metrička ravnina te neka su  $O, O' \in M$ . Pretpostavimo da je  $r$  polupravac s vrhom  $O$  te ujedno polupravac s vrhom  $O'$ . Tada je  $O = O'$ .

*Dokaz.* Imamo da je  $r$  polupravac s vrhom  $O$ . To znači da postoji pravac  $p$  takav da je  $r$  polupravac od  $p$  s vrhom  $O$ . To znači da je  $r = \{T \in p \mid T \leq_p O\}$  ili  $r = \{T \in p \mid O \leq_p T\}$ . Pretpostavimo da je  $O \neq O'$ .

Budući da je  $r$  polupravac s vrhom  $O'$ , vrijedi  $O' \in r$ .

1. slučaj:  $r = \{T \in p \mid T \leq_p O\}$

Iz  $O' \in r$  slijedi  $O' \in p$  i  $O' \leq_p O$ .

Budući da je  $r$  polupravac s vrhom  $O'$  postoji pravac  $q$  takav da je  $r$  polupravac od  $q$  s vrhom  $O'$ . Tada je  $r \subseteq q$  pa slijedi  $O, O' \in q$ . No  $O, O' \in p$ . Dakle,  $p = q$ .

Prema tome  $r$  je polupravac od  $p$  s vrhom  $O'$ .

Stoga je

$$r = \{T \in p \mid T \leq_p O'\}$$

ili

$$r = \{T \in p \mid O' \leq_p T\}$$

Pretpostavimo da je  $r = \{T \in p \mid T \leq_p O'\}$ . Iz  $O \in r$  slijedi  $O \leq_p O'$ . Ovo, zajedno sa  $O' \leq_p O$ , daje  $O = O'$  (antisimetričnost). Kontradikcija.

Stoga je  $r = \{T \in p \mid O' \leq_p T\}$ .

Slijedi da za svaki  $T \in r$  vrijedi  $O' \leq_p T \leq_p O$ .

Iz ovoga zaključujemo da je  $r = \{T \in p \mid O' \leq_p T \leq_p O\}$ , dakle,  $r = \overline{OO'}$ .

Odaberimo  $x \in \mathbb{R}$  tako da je  $d(O, O') < x$ . Tada je  $x > 0$ , pa postoji  $T \in r$  takav da je  $d(O, T) = x$  (aksiom III.4.).

Iz  $r = \overline{OO'}$  slijedi da je  $T \in \overline{OO'}$ . Stoga je

$$d(O, O') = d(O, T) + d(T, O')$$

pa je  $d(O, T) \leq d(O, O')$ , tj.  $x \leq d(O, O')$ . Ovo je u kontradikciji s odabirom broja  $x$ .

Zaključujemo da 1. slučaj vodi na kontradikciju.

2. slučaj:  $r = \{T \in p \mid O \leq_p T\}$

Iz  $O' \in r$  slijedi  $O' \in p$  i  $O \leq_p O'$ .

Budući da je  $r$  polupravac s vrhom  $O'$  postoji pravac  $q$  takav da je  $r$  polupravac od  $q$  s vrhom  $O$ . Tada je  $r \subseteq q$  pa slijedi  $O, O' \in q$ . No  $O, O' \in p$ . Dakle,  $p = q$ .

Prema tome  $r$  je polupravac od  $p$  s vrhom  $O'$ .

Stoga je

$$r = \{T \in p \mid O' \leq_p T\}$$

ili

$$r = \{T \in p \mid T \leq_p O'\}.$$

Pretpostavimo da je  $r = \{T \in p \mid O' \leq_p T\}$ . Iz  $O \in r$  slijedi  $O' \leq_p O$ . Ovo, zajedno sa  $O \leq_p O'$ , daje  $O = O'$  (antisimetričnost). Kontradikcija.

Stoga je  $r = \{T \in p \mid T \leq_p O'\}$ .

Slijedi da za svaki  $T \in r$  vrijedi  $O \leq_p T \leq_p O'$ .

Iz ovoga zaključujemo da je

$$r = \{T \in p \mid O \leq_p T \leq_p O'\},$$

dakle  $r = \overline{OO'}$ .

Odaberimo  $x \in \mathbb{R}$  tako da je  $d(O, O') < x$ . Tada je  $x > 0$ , pa postoji  $T \in r$  takav da je  $d(O, T) = x$  (aksiom III.4.).

Iz  $r = \overline{OO'}$  slijedi da je  $T \in \overline{OO'}$ . Stoga je  $d(O, O') = d(O, T) + d(T, O')$  pa je  $d(O, T) \leq d(O, O')$ , tj.  $x \leq d(O, O')$ . Ovo je u kontradikciji s odabirom broja  $x$ .

Zaključujemo da 2. slučaj vodi na kontradikciju.

Zaključak:  $O = O'$ . □

**Propozicija 2.1.3.** *Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  metrička ravnina. Neka je  $O \in M$ , te neka je  $r$  polupravac s vrhom  $O$ . Neka je  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > 0$ . Tada postoji jedinstvena točka  $T \in r$  takva da je  $d(O, T) = x$ .*

*Dokaz.* Da takva točka  $T$  postoji slijedi iz III.4. Treba dokazati da je točka  $T$  s tim svojstvom jedinstvena.

Pretpostavimo da su  $T_1, T_2 \in r$  točke takve da je  $d(O, T_1) = x$  i  $d(O, T_2) = x$ . Želimo dokazati da je  $T_1 = T_2$ .

Neka je  $p$  pravac takav da je  $r$  polupravac od  $p$  s vrhom  $O$ .

Tada je

$$r = \{T \in p \mid T \leq_p O\}$$

ili

$$r = \{T \in p \mid O \leq_p T\}.$$

1. slučaj:  $r = \{T \in p \mid T \leq_p O\}$

Iz  $T_1, T_2 \in r$  slijedi  $T_1 \leq_p O$  i  $T_2 \leq_p O$ .

1. podslučaj:  $T_1 \leq_p T_2$ . Tada imamo  $T_1 \leq_p T_2 \leq_p O$ , pa je  $T_2 \in \overline{T_1O}$ .

Iz III.3. slijedi  $d(T_1, O) = d(T_1, T_2) + d(T_2, O)$ , dakle  $x = d(T_1, T_2) + x$ , pa je  $d(T_1, T_2) = 0$ . Stoga je  $T_1 = T_2$ .

2. podslučaj:  $T_2 \leq_p T_1$ . Tada imamo  $T_2 \leq_p T_1 \leq_p O$ , pa je  $T_1 \in \overline{T_2O}$ .

Tada je  $d(T_2, O) = d(T_2, T_1) + d(T_1, O)$ , pa je  $d(T_2, T_1) = 0$ , tj.  $T_1 = T_2$ .

2. slučaj:  $r = \{T \in p \mid O \leq_p T\}$

Analogno kao u prvom slučaju zaključujemo da je  $T_1 = T_2$ .

Dakle,  $T_1 = T_2$ , prema tome postoji jedinstvena točka  $T \in r$  tako da je  $d(O, T) = x$ . □



**Napomena 2.1.4.** Uočimo da u metričkoj ravnini  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  polupravac s vrhom  $O$ , gdje je  $O \in M$ , sadrži točke različite od  $O$ .

**Propozicija 2.1.5.** Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  metrička ravnina, te neka je  $p \in \mathcal{A}$  pravac. Tada postoje točno dvije poluravnine u  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  određene pravcem  $p$ .

*Dokaz.* Neka je  $\sim$  relacija na  $M \setminus p$  definirana s  $A \sim B$  ako  $\overline{AB} \cap p = \emptyset$ . Znamo da je  $\sim$  relacija ekvivalencije te da su poluravnine određene s  $p$  klase ekvivalencije s obzirom na tu relaciju. Nadalje također znamo da postoje najviše dvije poluravnine određene s  $p$  (zato jer postoje najviše dvije klase ekvivalencije). Stoga je dovoljno pokazati da postoje točke  $A, B \in M \setminus p$  tako da  $A \not\sim B$ , tj. takve da je  $\overline{AB} \cap p \neq \emptyset$ .

Odaberimo neku točku  $O \in p$ . Neka je  $q$  pravac koji prolazi točkom  $O$  (tj.  $O \in q$ ) te takav da je  $p \neq q$  (sigurno postoji točka  $T \in M$  takva da  $T \notin p$  pa uzmemo  $q = OT$ ). Uočimo da je tada  $p \cap q = \{O\}$ .

Neka je  $r_1 = \{T \in q \mid T \leq_q O\}$  te  $r_2 = \{T \in q \mid O \leq_q T\}$ .

Tada su  $r_1$  i  $r_2$  polupravci s vrhom  $O$ , pa stoga postoje  $A \in r_1$  i  $B \in r_2$  tako da je  $A \neq O$  i  $B \neq O$ .

Tada je  $A \leq_q O \leq_q B$  pa je onda  $O \in \overline{AB}$ .

Prema tome  $\overline{AB} \cap p \neq \emptyset$ .

Iz  $A \in q$  i  $A \neq O$  slijedi  $A \notin p$  (zbog  $p \cap q = \{O\}$ ). Isto tako zaključujemo da  $B \notin p$ .

Dakle,  $A, B \in M \setminus p$  i to su tražene točke. □

**Lema 2.1.6.** Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  ravnina, neka je  $p$  pravac te neka je  $O \in p$ . Neka su  $A, B \in p \setminus \{O\}$ . Tada točke  $A$  i  $B$  leže na istom polupravcu od  $p$  s vrhom  $O$  akko  $O \notin \overline{AB}$ .

*Dokaz.* Pretpostavimo da točke  $A, B$  sadrži isti polupravac od  $p$  s vrhom  $O$ . Označimo taj polupravac s  $r$ . Tada je

$$r = \{T \in p \mid T \leq_p O\}$$

ili

$$r = \{T \in p \mid O \leq_p T\}.$$

Promotrimo 1. slučaj:  $r = \{T \in p \mid T \leq_p O\}$ .

Imamo  $A, B \in r$  pa slijedi  $A \leq_p O$  i  $B \leq_p O$ .

1. podslučaj:  $A \leq_p B$

Pretpostavimo  $O \in \overline{AB}$ . Iz propozicije 1.1.6 slijedi  $A \leq_p O \leq_p B$ . Iz  $B \leq_p O$  i  $O \leq_p B$  slijedi  $O = B$  što je u kontradikciji s  $B \in p \setminus \{O\}$ .

Dakle,  $O \notin \overline{AB}$ .

2. podslučaj:  $B \leq_p A$

Pretpostavimo  $O \in \overline{AB}$ . Iz propozicije 1.1.6 slijedi  $B \leq_p O \leq_p A$ . Iz  $A \leq_p O$  i  $O \leq_p A$  slijedi  $O = A$  što je u kontradikciji s  $A \in p \setminus \{O\}$ .

Dakle,  $O \notin \overline{AB}$ .

2. slučaj:  $r = \{T \in p \mid O \leq_p T\}$   
Iz ovog slijedi  $O \leq_p A$  i  $O \leq_p B$

1. podslučaj:  $A \leq_p B$

Pretpostavimo  $O \in \overline{AB}$ . Tada je  $A \leq_p O \leq_p B$  pa zbog  $O \leq_p A$  imamo  $A = O$  što je nemoguće.

Dakle,  $O \notin \overline{AB}$ .

2. podslučaj:  $B \leq_p A$

Analogno slijedi  $O \notin \overline{AB}$ .

Pretpostavimo sada  $O \notin \overline{AB}$ . Želimo dokazati da postoji polupravac od  $p$  s vrhom  $O$  koji sadrži točke  $A$  i  $B$ .

1. slučaj:  $O \leq_p B$

Imamo  $A \leq_p O$  ili  $O \leq_p A$ . Kada bi vrijedilo  $A \leq_p O$  onda bismo imali  $A \leq_p O \leq_p B$ , što bi povlačilo da je  $O$  između  $A$  i  $B$ , tj.  $O \in \overline{AB}$ , a to je nemoguće. Stoga je  $O \leq_p A$ . Dakle,  $O \leq_p A$  i  $O \leq_p B$ .

Prema tome polupravac od  $p$  s vrhom  $O$  sadrži točke  $A$  i  $B$ .

2. slučaj:  $B \leq_p O$

Imamo  $A \leq_p O$  ili  $O \leq_p A$ . Kada bi vrijedilo  $O \leq_p A$  onda je  $O$  između  $A$  i  $B$ , tj.  $O \in \overline{AB}$ , a to je nemoguće. Stoga je  $A \leq_p O$ .

Prema tome polupravac od  $p$  s vrhom  $O$  sadrži točke  $A$  i  $B$ . □

**Propozicija 2.1.7.** *Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  metrička ravnina. Neka su  $A, B \in M$ ,  $A \neq B$ . Tada postoji jedinstvena točka  $T \in AB$  takva da je  $d(A, T) = d(T, B)$ . Ta točka leži na segmentu  $\overline{AB}$  i zovemo je **polovište dužine  $\overline{AB}$** .*

*Dokaz.* Neka je  $p = AB$ . Neka je  $r$  polupravac od  $p$  s vrhom  $A$  tako da je  $B \in r$ . Neka je  $x = d(A, B)$ . Tada je  $x > 0$  (jer  $A \neq B$ ). Stoga je  $\frac{x}{2} > 0$ , pa postoji točka  $T \in r$  takva da je  $d(A, T) = \frac{x}{2}$ . Očito je  $T \in AB$ . Uočimo da je  $T \neq A$ .

Želimo dokazati da je  $T$  između  $A$  i  $B$ . Pretpostavimo suprotno.

Tada prema propoziciji 1.1.14 imamo da je  $A$  između  $B$  i  $T$  ili  $B$  između  $A$  i  $T$ . No,  $B, T \in p \setminus \{A\}$  i  $B, T$  se nalaze na istom polupravcu od  $p$  s vrhom  $A$ , a to je  $r$ . Iz leme 2.1.6 slijedi  $A \notin \overline{BT}$ , tj.  $A$  nije između  $B$  i  $T$ . Stoga je  $B$  između  $A$  i  $T$ , tj.  $B \in \overline{AT}$ .

Iz III.3. slijedi da je

$$d(A, T) = d(A, B) + d(B, T),$$

pa je

$$\frac{x}{2} = x + d(B, T) \Rightarrow -\frac{x}{2} = d(B, T).$$

Ovo je kontradikcija.

Prema tome  $T$  je između  $A$  i  $B$ , tj.  $T \in \overline{AB}$ . Iz III.3. slijedi

$$d(A, B) = d(A, T) + d(T, B),$$

pa je

$$x = \frac{x}{2} + d(T, B).$$

Stoga je

$$d(T, B) = \frac{x}{2},$$

dakle

$$d(T, B) = d(T, A).$$

### JEDINSTVENOST

Pretpostavimo sada da je  $T' \in AB$  točka takva da je  $d(A, T') = d(B, T')$ .

Želimo dokazati da je  $T' = T$

Prema propoziciji 1.1.14 imamo  $T' \in \overline{AB}$  ili  $A \in \overline{T'B}$  ili  $B \in \overline{T'A}$ .

Pretpostavimo da je  $A \in \overline{T'B}$ . Tada je  $d(T', A) + d(A, B) = d(T', B)$ , pa slijedi  $d(A, B) = 0$ .

Ovo je u kontradikciji s  $A \neq B$ .

Pretpostavimo da je  $B \in \overline{T'A}$ . Tada je  $d(T', B) + d(B, A) = d(T', A)$ , pa slijedi  $d(A, B) = 0$ .

Ovo je u kontradikciji s  $A \neq B$ .

Prema tome  $T' \in \overline{AB}$ .

Dakle,

$$d(A, T') + d(T', B) = d(A, B) = x,$$

pa je

$$2 d(A, T') = x.$$

Iz ovoga slijedi da je

$$d(A, T') = \frac{x}{2}.$$

Budući da je  $r$  konveksan skup (svaki polupravac je konveksan) te da su  $A, B \in r$ , imamo  $\overline{AB} \subseteq r$ . Stoga je  $T' \in r$ . Dakle,  $T, T' \in r$  i

$$d(A, T) = \frac{x}{2},$$

$$d(A, T') = \frac{x}{2}.$$

Iz propozicije 2.1.3 slijedi  $T = T'$ . □

Za točku  $T$  iz prethodne propozicije kažemo da je polovište dužine  $\overline{AB}$ . Ako je  $A=B$ , onda kažemo da je  $A$  polovište dužine  $AA$ .

## 2.2 Izometrije

**Definicija 2.2.1.** Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  metrička ravnina. Neka je  $f : M \rightarrow M$ . Za funkciju  $f$  kažemo da je **izometrija** ravnine  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  ako za sve  $A, B \in M$  vrijedi

$$d(A, B) = d(f(A), f(B)).$$

Uočimo sljedeće: ako je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  metrička ravnina onda je  $id_M$  izometrija te ravnine. Pri tome za skup  $S$  sa  $id_S$  označavamo **identitetu** na  $S$ , dakle  $id_S$  je funkcija sa  $S$  u  $S$  definirana s

$$id_S(x) = x, \forall x \in S.$$

**Propozicija 2.2.2.** Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  metrička ravnina, te neka je  $f$  izometrija te ravnine. Tada je  $f$  **injekcija**.

*Dokaz.* Neka su  $A, B \in M, A \neq B$ . Tada je  $d(A, B) > 0$ .

No  $d(A, B) = d(f(A), f(B))$ .

Prema tome  $d(f(A), f(B)) > 0$ , pa je  $f(A) \neq f(B)$ .

Dakle,  $f$  je injekcija. □

**Propozicija 2.2.3.** Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  metrička ravnina te neka su  $f, g$  izometrije ove ravnine. Tada je  $g \circ f$  izometrija.

*Dokaz.* Neka su  $A, B \in M$ .

Imamo  $d(A, B) \stackrel{f \text{ izometrija}}{=} d(f(A), f(B)) \stackrel{g \text{ izometrija}}{=} d(g(f(A)), g(f(B)))$

Stoga je  $d(A, B) = d((g \circ f)(A), (g \circ f)(B))$ .

Dakle,  $g \circ f$  je izometrija. □

**Lema 2.2.4.** *Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  metrička ravnina te neka je  $r$  polupravac s vrhom  $O$ . Neka su  $A, B \in r$ . Tada je*

$$A \in \overline{OB} \Leftrightarrow d(O, A) \leq d(O, B).$$

*Dokaz.*  $\Rightarrow$  *Pretpostavimo  $A \in \overline{OB}$ .*

Tada je  $d(O, B) = d(O, A) + d(A, B) \geq d(O, A)$ , dakle  $d(O, A) \leq d(O, B)$ .

$\Leftarrow$  *Pretpostavimo  $d(O, A) \leq d(O, B)$ . Ako je  $A = O$  onda je očito  $A \in \overline{OB}$ . Ako je  $B = O$  onda je  $d(O, B) = 0$ , pa je  $d(O, A) = 0$ , tj.  $O = A$ , dakle  $A \in \overline{OB}$ .*

Pretpostavimo da  $A \neq O$  i  $B \neq O$ .

Neka je  $p$  pravac takav da je  $r$  polupravac od  $p$  s vrhom  $O$ . Imamo  $O, A, B \in p$ . Tada je  $O \in \overline{AB}$  ili  $A \in \overline{OB}$  ili  $B \in \overline{OA}$ . Uočimo  $A, B \in p \setminus \{O\}$ . Iz leme 2.1.6 slijedi  $O \notin \overline{AB}$ .

Prema tome  $A \in \overline{OB}$  ili  $B \in \overline{OA}$ .

Pretpostavimo  $B \in \overline{OA}$ .

Tada je  $d(O, A) = d(O, B) + d(B, A) \geq d(O, B)$ , dakle  $d(O, B) \leq d(O, A)$ .

Stoga je  $d(O, B) = d(O, A)$ .

Iz propozicije 2.1.3 i činjenice da su  $A, B \in r$  slijedi  $A = B$ , pa je  $A \in \overline{OB}$ .

Prema tome u svakom slučaju vrijedi  $A \in \overline{OB}$ . □

*Uočimo da općenito vrijedi:*

*ako je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  metrička ravnina te ako su  $A, B \in M$  i  $T \in \overline{AB}$ , onda je  $d(A, T) \leq d(A, B)$ .*

**Lema 2.2.5.** *Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  metrička ravnina te neka su  $A, B \in M$ . Tada za svaki  $x \in [0, d(A, B)]$  postoji jedinstvena točka  $T \in \overline{AB}$  takva da je  $d(A, T) = x$ .*

*Dokaz.* Neka je  $x \in [0, d(A, B)]$ .

Ako je  $x = 0$ , onda za  $T = A$  vrijedi  $T \in \overline{AB}$  i  $d(A, T) = 0$  te je to očito jedina točka s tim svojstvom.

Pretpostavimo da je  $x > 0$ .

Neka je  $r$  polupravac s vrhom  $A$  tako da  $B \in r$ .

Prema aksiomu III.4. postoji točka  $T \in r$  takva da je  $d(A, T) = x$ .

Budući da je  $x \leq d(A, B)$  imamo  $d(A, T) \leq d(A, B)$  pa iz leme 2.2.4 slijedi da je  $T \in \overline{AB}$ .

Pretpostavimo da je  $T' \in \overline{AB}$  točka takva da je  $d(A, T') = x$ .

Iz  $A, B \in r$  slijedi  $\overline{AB} \subseteq r$  pa je  $T' \in r$ .

Dakle,  $T$  i  $T'$  su dvije točke polupravca  $r$  udaljene od  $A$  za  $x$ .

Iz propozicije 2.1.3 slijedi  $T = T'$ . □

**Propozicija 2.2.6.** *Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  metrička ravnina, neka su  $A, B \in M$ , te neka je  $f : M \rightarrow M$  izometrija. Tada je*

$$f(\overline{AB}) = \overline{f(A)f(B)}.$$

*Dokaz.* Neka je  $T \in \overline{f(AB)}$ .

Tada je  $T = f(C)$  za neki  $C \in \overline{AB}$ . Slijedi da je  $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$ .

Budući da je  $f$  izometrija imamo  $d(f(A), f(B)) = d(f(A), f(C)) + d(f(C), f(B))$ , pa je  $f(C) \in \overline{f(A)f(B)}$ . Dakle,  $T \in \overline{f(A)f(B)}$ .

Prema tome  $f(\overline{AB}) \subseteq \overline{f(A)f(B)}$ .

Neka je  $T \in \overline{f(A)f(B)}$ .

Želimo dokazati da  $T \in f(\overline{AB})$ .

Dakle, želimo pokazati da postoji  $C \in \overline{AB}$  tako da je  $f(C) = T$ .

Neka je  $x = d(f(A), T)$ . Budući da je  $T \in \overline{f(A)f(B)}$ , vrijedi  $x \leq d(f(A), f(B))$ . No  $f$  je izometrija pa je  $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$ . Dakle,  $x \leq d(A, B)$ , pa je  $x \in [0, d(A, B)]$ .

Prema lemi 2.2.5 postoji točka  $C \in \overline{AB}$  tako da je  $d(A, C) = x$ .

Imamo  $f(C) \in \overline{f(AB)}$ , a prema dokazanom vrijedi  $f(\overline{AB}) \subseteq \overline{f(A)f(B)}$ .

Stoga je  $f(C) \in \overline{f(A)f(B)}$ . Iz  $d(A, C) = x$  i činjenice da je  $f$  izometrija slijedi  $d(f(A), f(C)) = x$ .

Dakle,  $T$  i  $f(C)$  su točke segmenta  $\overline{f(A)f(B)}$  koje su od  $f(A)$  udaljene za  $x$ , a  $x \in [0, d(f(A), f(B))]$ .

Iz leme 2.2.5 slijedi  $f(C) = T$ .

Dakle,  $T \in f(\overline{AB})$ . Prema tome  $\overline{f(A)f(B)} \subseteq f(\overline{AB})$ .

Dakle,  $f(\overline{AB}) = \overline{f(A)f(B)}$ . □

**Napomena 2.2.7.** Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  ravnina, te neka su  $A, B \in M$ ,  $A \neq B$ . Tada postoji jedinstveni polupravac  $r$  s vrhom  $A$  tako da je  $B \in r$ . Naime, neka je  $p = \overline{AB}$ .

Znamo da postoje 2 polupravca od  $p$  s vrhom  $A$ , te da se  $B$  nalazi na točno jednom od ta 2 polupravca. Označimo taj polupravac s  $r$ .

Pretpostavimo da je  $s$  polupravac s vrhom  $A$  takav da je  $B \in s$ . Tada postoji pravac  $q$  takav da je  $s$  polupravac od  $q$  s vrhom  $A$ . Iz  $s \subseteq q$  slijedi  $B \in q$ . Dakle, imamo  $A, B \in q$ , pa iz  $A \neq B$  slijedi  $p = q$ . Dakle,  $s$  je polupravac od  $p$  s vrhom  $A$  i  $B \in s$ .

Stoga je  $s = r$ .

**Propozicija 2.2.8.** Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  metrička ravnina. Neka je  $f : M \rightarrow M$  izometrija. Neka je  $p$  pravac,  $O \in p$  te  $r$  polupravac od  $p$  s vrhom  $O$ . Tada je  $f(p)$  pravac te je  $f(r)$  polupravac od  $f(p)$  s vrhom  $f(O)$ .

*Dokaz.* Neka je  $s$  polupravac od  $p$  s vrhom  $O$  različit od  $r$ . Prema aksiomu III.4. postoji  $A \in r$  takav da je  $d(O, A) = 1$ .

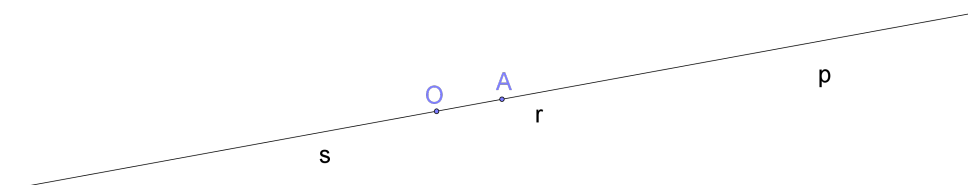
Isto tako postoji točka  $B \in s$  takva da je  $d(O, B) = 1$ .

Uočimo da je  $A \neq O$  i  $B \neq O$ .

Također,  $A \neq B$  jer je  $r \cap s = \{O\}$ . Stoga je  $f(A) \neq f(B)$ .

Neka je  $q = \overline{f(A)f(B)}$ . Iz leme 2.1.6 slijedi da je  $O \in \overline{f(AB)}$ . Ovo povlači da je  $f(O) \in \overline{f(AB)}$ .

Prema propoziciji 2.1.3 vrijedi  $f(\overline{AB}) = \overline{f(A)f(B)}$ . Stoga je  $f(O) \in \overline{f(A)f(B)}$ .



Slika 2.1: Skica

No,  $\overline{f(A)f(B)} \subseteq q$  jer je  $q$  konveksan pa je  $f(O) \in q$ .

Neka je  $r'$  polupravac od  $q$  s vrhom  $f(O)$  takav da je  $f(A) \in r'$ .

Neka je  $s'$  polupravac od  $q$  s vrhom  $f(O)$  takav da je  $f(B) \in s'$ .

Budući da je  $f(O) \in \overline{f(A)f(B)}$  prema lemi 2.1.6 slijedi da točke  $f(A)$  i  $f(B)$  ne sadrži isti polupravac od  $q$  s vrhom  $f(O)$ .

Stoga je  $r' \neq s'$ .

Dokažimo sada da je  $f(r) = r'$ .

Dokažimo prvo da je  $f(r) \subseteq r'$ .

U tu svrhu potrebno je dokazati da je  $f(T) \in r', \forall T \in r$ .

Neka je  $T \in r$ .

Ako je  $T = O$ , onda je  $f(T) = f(O)$ , a očito je  $f(O) \in r'$ .

Pretpostavimo  $T \neq O$ . Tada su  $B, T \in p \setminus \{O\}$  točke koje ne sadrži isti polupravac od  $p$  s vrhom  $O$ . Iz leme 2.1.6 slijedi da je  $O \in \overline{BT}$ . Ovo povlači da je  $f(O) \in \overline{f(B)f(T)}$  pa zaključujemo da točke  $f(O), f(B), f(T)$  sadrži isti pravac. No jedini pravac koji sadrži točke  $f(O)$  i  $f(B)$  je  $q$  jer  $f(O) \neq f(B)$ . Stoga je  $f(T) \in q$ . Imamo  $f(B), f(T) \in q \setminus \{f(O)\}$ . Iz leme 2.1.6 slijedi da točke  $f(B)$  i  $f(T)$  ne sadrži isti polupravac od  $q$  s vrhom  $f(O)$ . Budući da je  $f(B) \in s'$  imamo da  $f(T) \notin s'$ . Stoga je  $f(T) \in r'$ .

Prema tome  $f(r) \subseteq r'$ .

Dokažimo sada  $r' \subseteq f(r)$ .

Neka je  $C \in r'$ . Ako je  $C = f(O)$ , onda je  $C \in f(r)$  jer je  $O \in r$ .

Pretpostavimo da je  $C \neq f(O)$ .

Neka je  $x = d(C, f(O))$ . Tada je  $x > 0$ .

Prema aksiomu III.4. postoji točka  $T \in r$  takva da je  $d(O, T) = x$ . Budući da je  $f$  izometrija vrijedi  $d(f(O), f(T)) = x$ . Iz  $T \in r$  prema dokazanom slijedi da je  $f(T) \in r'$ . Iz propozicije 2.1.3 slijedi da je  $C = f(T)$ .

Dakle,  $C \in f(r)$ .

Zaključak:  $r' \subseteq f(r)$ .

Prema tome  $f(r) = r'$ .

Posve analogno dobijemo da je  $f(s) = s'$ .

Ostalo je još pokazati da je  $f(p) = q$ .

Imamo  $f(p) = f(r \cup s) = f(r) \cup f(s) = r' \cup s' = q$ .

Dakle,  $f(p) = q$ . □

**Korolar 2.2.9.** Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  metrička ravnina,  $f$  izometrija, te  $A, B \in M$ ,  $A \neq B$ . Tada je

$$f(AB) = f(A)f(B)$$

.

*Dokaz.* Prema propoziciji 2.2.8  $f(AB)$  je pravac.

Nadalje  $f(A), f(B) \in f(AB)$  i  $f(A) \neq f(B)$  (jer je  $f$  injekcija).

Stoga je  $f(AB) = f(A)f(B)$ . □

**Lema 2.2.10.** Neka su  $S$  i  $T$  skupovi te  $f : S \rightarrow T$  injekcija.

(1) Ako su  $A \subseteq S$  i  $x \in S$  takvi da  $x \notin A$ , onda  $f(x) \notin f(A)$ .

(2) Ako su  $A, B \subseteq S$  takvi da  $A \cap B = \emptyset$ , onda je  $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ .

*Dokaz.* 1. slučaj: Pretpostavimo da je  $f(x) \in f(A)$ .

Stoga postoji  $a \in A$  takav da je  $f(x) = f(a)$ .

Budući da je  $f$  injekcija iz ovog slijedi  $x = a$ . Ovo znači da je  $x \in A$  što je u kontradikciji s pretpostavkom  $x \notin A$ .

Prema tome  $f(x) \notin f(A)$ .

2. slučaj: Pretpostavimo  $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$ .

Tada postoji  $y \in f(A) \cap f(B)$ . Slijedi  $y \in f(A)$  i  $y \in f(B)$ .

Iz  $y \in f(A)$  slijedi da postoji  $a \in A$  takav da je  $y = f(a)$ .

Iz  $y \in f(B)$  slijedi da postoji  $b \in B$  takav da je  $y = f(b)$ .

Stoga je  $f(a) = f(b)$ .

Budući da je  $f$  injekcija imamo  $a = b$ . Dakle,  $a \in A$  i  $a \in B$ , tj.  $a \in A \cap B$ , što je u



kontradikciji s  $A \cap B = \emptyset$ .

Zaključak:  $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ . □

**Propozicija 2.2.11.** *Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  metrička ravnina, te  $f : M \rightarrow M$  izometrija. Neka je  $p$  pravac u ovoj ravnini te  $K$  poluravnina određena pravcem  $p$ . Tada je  $f(K)$  podskup jedne od dvije poluravnine određene s  $f(p)$ .*

*Dokaz.* Neka je  $\sim$  relacija na  $M \setminus p$  definirana s  $T_1 \sim T_2$  ako  $\overline{T_1 T_2} \cap p = \emptyset$ . Znamo da je  $\sim$  relacija ekvivalencije te da je  $K$  klasa ekvivalencije nekog elementa pri toj relaciji. Dakle, postoji  $A \in M \setminus p$  takav da je  $K = [A]$ , tj.

$$K = \{T \in M \setminus p \mid \overline{TA} \cap p = \emptyset\}.$$

S druge strane neka je  $\sim'$  binarna relacija na  $M \setminus f(p)$  definirana sa  $Z_1 \sim' Z_2$  ako je  $\overline{Z_1 Z_2} \cap f(p) = \emptyset$ .

Znamo da je  $f$  injekcija, stoga lema 2.2.10 (1) povlači da  $f(A) \notin f(p)$ . Dakle,  $f(A) \in M \setminus f(p)$ .

Neka je  $L$  klasa od  $f(A)$  pri relaciji  $\sim'$ . Dakle,

$$L = \{Z \in M \setminus f(p) \mid \overline{f(A)Z} \cap f(p) = \emptyset\}.$$

Tada je  $L$  poluravnina određena s  $f(p)$ .

Tvrdimo da je  $f(K) \subseteq L$ .

Neka je  $Z \in f(K)$ . Tada postoji  $T \in K$  takav da je  $Z = f(T)$ .

Budući da je  $T \in K$ , imamo  $\overline{TA} \cap p = \emptyset$ .

Iz leme 2.2.10 (2) slijedi da je  $\overline{f(TA)} \cap f(p) = \emptyset$ .

Iz propozicije 2.2.6 slijedi  $\overline{f(A)f(T)} \cap f(p) = \emptyset$ , tj.  $\overline{f(A)Z} \cap f(p) = \emptyset$ . Iz ovog posebno slijedi da  $Z \notin f(p)$ , tj.  $Z \in M \setminus f(p)$  pa slijedi da je  $Z \in L$ .

Zaključak:  $f(K) \subseteq L$ . □

**Definicija 2.2.12.** *Neka je  $S$  skup te  $f : S \rightarrow S$ . Za  $x \in S$  kažemo da je **fiksna točka** funkcije  $f$  ako je*

$$f(x) = x.$$

**Propozicija 2.2.13.** *Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  metrička ravnina te neka je  $f : M \rightarrow M$  izometrija. Neka su  $A, B \in M$ ,  $A \neq B$ . Pretpostavimo da su  $A$  i  $B$  fiksne točke od  $f$ . Tada je svaka točka pravca  $AB$  fiksna točka od  $f$ .*

*Dokaz.* Neka je  $r$  polupravac s vrhom  $A$  takav da je  $B \in r$  te neka je  $r'$  polupravac s vrhom  $B$  tako da je  $A \in r'$ .

Iz propozicije 2.2.8 slijedi da je  $f(r)$  polupravac s vrhom  $f(A)$ , a očito je  $f(B) \in f(r)$ .

Dakle,  $f(r)$  je polupravac s vrhom  $A$  te je  $B \in f(r)$ .

Stoga je  $f(r) = r$  (prema napomeni 2.2.7).

Isto tako dobijemo  $f(r') = r'$ .

Neka je  $T \in AB$ .

Iz propozicije 1.2.2 slijedi da je  $T \in \overline{AB}$  ili  $A \in \overline{TB}$  ili  $B \in \overline{AT}$ .

1. slučaj:  $T \in \overline{AB}$  ili  $B \in \overline{AT}$

Ako je  $T \in \overline{AB}$  onda je  $T \in r$ .

S druge strane ako je  $B \in \overline{AT}$  onda je  $T \in r$ .

Zašto?

Neka je  $s$  polupravac od  $AB$  s vrhom  $A$  takav da je  $s \neq r$ . Tada je  $AB = s \cup r$ .

Pretpostavimo da  $T \notin r$ . Tada je  $T \in s$ . No,  $A, T \in s$  povlači da je  $\overline{AT} \subseteq s$  pa je  $B \in s$ .

Dakle,  $B \in r \cap s$ , no ovo je nemoguće jer je  $r \cap s = \{A\}$ .

Dakle,  $T \in r$  pa je  $f(T) \in f(r)$ , tj.  $f(T) \in r$ .

Budući da je  $f$  izometrija imamo  $d(A, T) = d(f(A), f(T)) = d(A, f(T))$ .

Dakle,  $d(A, T) = d(A, f(T))$ .

Ako je  $A = T$ , onda je  $T$  fiksna točka od  $f$ .

Pretpostavimo da je  $A \neq T$ .

Neka je  $x = d(A, T)$ . Tada je  $x > 0$  pa iz propozicije 2.1.3 slijedi da postoji jedinstvena točka  $C \in r$  takav da je  $d(A, C) = x$ .

Imamo  $d(A, T) = x$ ,  $d(A, f(T)) = x$  pa slijedi  $f(T) = T$ .

Dakle,  $T$  je fiksna točka od  $f$ .

2. slučaj:  $A \in \overline{TB}$

Tvrdimo da je  $T \in r'$ .

Pretpostavimo suprotno. Neka je  $s$  polupravac od  $AB$  s vrhom  $B$  različit od  $r'$ . Tada je  $T \in s$ . Stoga imamo  $B, T \in s$ , pa je segment  $\overline{BT} \subseteq s$ . Iz ovoga slijedi  $A \in s$ .

Dakle,  $A \in r' \cap s$ , no  $r' \cap s = \{B\}$ .

Slijedi da je  $A = B$  što je nemoguće.

Prema tome  $T \in r'$ .

Iz ovog slijedi  $f(T) \in f(r')$  pa je  $f(T) \in r'$ .

Budući da je  $f$  izometrija vrijedi  $d(B, T) = d(f(B), f(T))$ , dakle  $d(B, T) = d(B, f(T))$ .

Prema tome  $T$  i  $f(T)$  su dvije točke na  $r'$  jednako udaljene od  $B$ . Prema propoziciji 2.1.3 slijedi da je  $T = f(T)$ .

Dakle, svaka točka pravca  $AB$  je fiksna točka za  $f$ . □

**Propozicija 2.2.14.** Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  metrička ravnina te neka je  $f : M \rightarrow M$  izometrija. Neka su  $A, B \in M$  točke takve da je  $f(A) = B$  i  $f(B) = A$ . Tada je polovište dužine  $\overline{AB}$  fiksna točka od  $f$ .

*Dokaz.* Ako je  $A = B$ , onda je  $A$  fiksna točka od  $f$ , a polovište od segmenta  $\overline{AA}$  je  $A$ .

Pretpostavimo  $A \neq B$ .

Neka je  $T$  polovište dužine  $\overline{AB}$ . Tada je  $T \in \overline{AB}$  i  $d(A, T) = d(T, B)$ .

Budući da je  $f$  izometrija vrijedi  $d(f(A), f(T)) = d(f(T), f(B))$ ,

tj.  $d(B, f(T)) = d(f(T), A)$ .

Iz  $T \in AB$  slijedi  $f(T) \in f(AB)$ .

Prema korolaru 2.2.9 vrijedi  $f(AB) = f(A)f(B)$ , tj.  $f(AB) = BA = AB$ .

Dakle,  $f(T) \in AB$ .

Iz ovoga i  $d(B, f(T)) = d(f(T), A)$  zaključujemo da je  $f(T)$  polovište dužine  $\overline{AB}$ .

Stoga je  $f(T) = T$ . □

**Propozicija 2.2.15.** *Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  metrička ravnina te neka su  $A, B, C$  tri nekolinearne točke ove ravnine. Neka je  $f : M \rightarrow M$  izometrija. Pretpostavimo da su  $A, B, C$  fiksne točke od  $f$ . Tada je  $f$  **identiteta** na  $M$ , tj.  $f = id_M$ .*

*Dokaz.* Uočimo da su točke  $A, B, C$  međusobno različite.

Prema propoziciji 2.2.13 svaka točka koja leži na jednom od pravaca  $AB, AC, BC$  je fiksna točka za  $f$ .

Neka je  $T \in M$  takva da  $T \notin AB$  i  $T \notin AC$  i  $T \notin BC$ .

Neka je  $P$  polovište dužine  $\overline{AC}$ . Tada je  $P \in \overline{AC}$  i  $P \neq A, P \neq C$ .

Budući da je  $P \in AC$  imamo da  $P \neq T$ .

Promotrimo pravac  $TP$ . Taj pravac siječe segment  $\overline{AC}$  pa prema Paschovom aksiomu  $TP$  siječe  $\overline{AB}$  ili  $\overline{BC}$ .

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da  $TP$  siječe  $AB$ .

Neka je  $Q \in TP$  tako da je  $Q \in \overline{AB}$ .

Tvrdimo da je  $P \neq Q$ .

Pretpostavimo suprotno, tj.  $P = Q$ . Tada je  $P \in AC \cap AB$ .

No,  $AC \cap AB = \{A\}$ . Stoga je  $P = A$ . Kontradikcija.

Dakle,  $P \neq Q$ .

Uočimo da su  $P$  i  $Q$  fiksne točke od  $f$  (jer je  $P \in AC$ , a  $Q \in AB$ , a sve točke tih pravaca su fiksne).

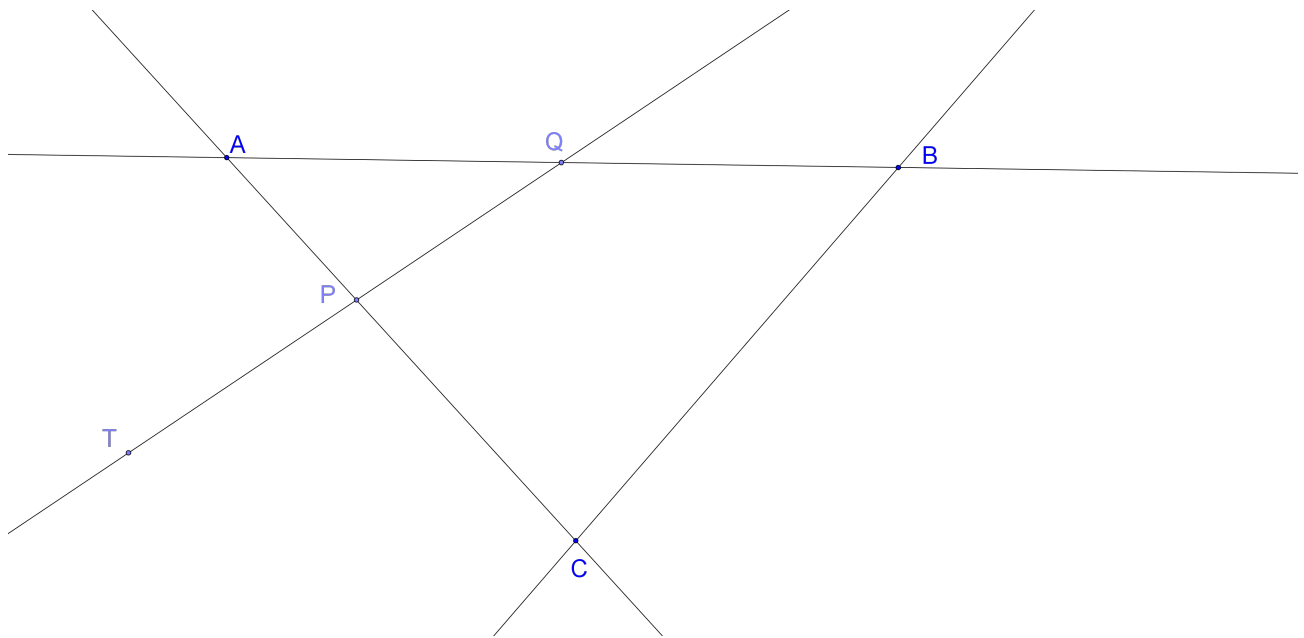
Stoga je prema propoziciji 2.2.13 svaka točka pravca  $PQ$  fiksna za  $f$ .

Iz  $Q \in TP$  slijedi  $TP = PQ$  pa je  $T \in PQ$ .

Stoga je  $T$  fiksna točka za  $f$ .

Prema tome svaka točka  $T \in M$  je fiksna za  $f$ . Drugim riječima  $f(T) = T, \forall T \in M$ .

Dakle,  $f$  je identiteta na  $M$ . □



Slika 2.2: Skica



## Poglavlje 3

# Apsolutna ravnina

### 3.1 Apsolutna ravnina

**Definicija 3.1.1.** Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  metrička ravnina, neka je  $p \in \mathcal{A}$  pravac, te neka je  $f : M \rightarrow M$  izometrija. Za  $f$  kažemo da je **osna simetrija** obzirom na pravac  $p$  u  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  ako vrijedi sljedeće:

1. svaka točka pravca  $p$  je fiksna točka za  $f$  (tj.  $T = f(T)$ ,  $\forall T \in p$ )
2.  $f \neq id_M$

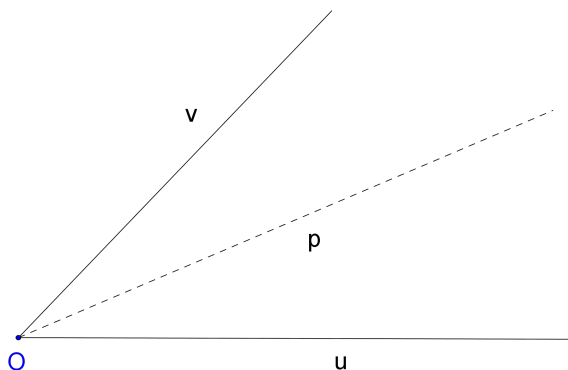
**Definicija 3.1.2.** Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  metrička ravnina. Za  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  kažemo da je **AP-SOLUTNA RAVNINA** ako vrijedi sljedeće:

- IV.1. Za svaki pravac  $p \in \mathcal{A}$  postoji jedinstvena osna simetrija obzirom na pravac  $p$ . Tu osnu simetriju označavamo sa  $s_p$ .
- IV.2. Ako je  $O \in M$  te ako su  $u, v$  polupravci s vrhom  $O$ , onda postoji pravac  $p$  takav da je  $s_p(u) = v$ .

**Lema 3.1.3.** Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho)$  ravnina te neka su  $p, q \in \mathcal{A}$  pravci takvi da je  $p \subseteq q$ . Tada je  $p = q$ .

*Dokaz.* Prema I.2. postoje 2 različite točke na pravcu  $p$ , označimo ih s  $A$  i  $B$ . Tada je  $A, B \in q$ . Iz I.1. slijedi  $p = q$ .  $\square$

**Propozicija 3.1.4.** Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  metrička ravnina, neka su  $p, q$  pravci u toj ravnini, neka je  $f$  osna simetrija obzirom na pravac  $p$ , te  $g$  osna simetrija obzirom na  $q$ . Pretpostavimo da je  $f = g$ . Tada je  $p = q$ .



Slika 3.1: Skica

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno, tj.  $p \neq q$ .

Tada postoji točka  $T \in q$  takva da  $T \notin p$ . Naime, u suprotnom bi svaka točka od  $q$  ležala na  $p$  što bi značilo da je  $q \subseteq p$ , pa bi prema lemi 3.1.3 slijedilo  $q = p$  što je nemoguće.

Odaberimo dvije različite točke  $A, B$  na pravcu  $p$ . Uočimo sljedeće:

Točke  $A, B, T$  su nekolinearne.

Naime u suprotnom bi postojao pravac  $r$  takav da je  $A, B, T \in r$  onda bi slijedilo  $r = p$  (jer su  $A, B \in p$ ) što je nemoguće jer  $T \notin p$ .

Budući da su  $A, B \in p$  imamo da su  $A, B$  fiksne točke za  $f$  (jer je  $f$  osna simetrija obzirom na  $p$ ).

Nadalje iz  $T \in q$  slijedi da je  $T$  fiksna točka za  $g$  (jer je  $g$  osna simetrija s obzirom na  $q$ ).

No,  $f = g$  pa slijedi da je  $T$  fiksna točka za  $f$ .

Dakle,  $A, B, T$  su fiksne točke za  $f$ , pa iz propozicije 2.2.15 slijedi da je  $f = id_M$ . To je u kontradikciji s činjenicom da je  $f$  osna simetrija s obzirom na  $p$ .

Prema tome  $p = q$ . □

**Korolar 3.1.5.** Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  apsolutna ravnina, te neka su  $p, q$  pravci u toj ravnini takvi da je  $s_p = s_q$ . Tada je  $p = q$ . □

*Prisjetimo se:* Ako su  $S, T$  skupovi, te  $f : S \rightarrow T$  bijekcija, onda inverznu funkciju  $f^{-1} : T \rightarrow S$  definiramo tako da za  $y \in T$  stavimo  $f^{-1}(y) = x$ , gdje je  $x \in S$  takav da je  $f(x) = y$ . (Takav  $x$  postoji jer je  $f$  surjekcija, a jedinstven je jer je  $f$  injekcija).

Uočimo da za svaki  $x \in S$  vrijedi  $f^{-1}(f(x)) = x$ .

Nadalje za svaki  $y \in T$  vrijedi  $f(f^{-1}(y)) = y$ .

Dakle,  $(f^{-1} \circ f)(x) = x = id_S(x)$ , za svaki  $x \in S$ . Imamo  $f^{-1} \circ f : S \rightarrow S$  i  $id_S : S \rightarrow S$ , pa zaključujemo  $f^{-1} \circ f = id_S$ .

Isto tako imamo  $(f \circ f^{-1})(y) = y = id_T(y)$ , za  $\forall y \in T$ .

Zaključujemo da je  $f \circ f^{-1} = id_T$ .

**Napomena 3.1.6.** Neka su  $S, T, V$  skupovi te neka su  $f : S \rightarrow T$  i  $g : S \rightarrow V$  funkcije.

1) Ako su  $f, g$  injekcije, onda je  $g \circ f$  injekcija.

2) Ako su  $f, g$  surjekcije, onda je  $g \circ f$  surjekcija.

3) Ako je  $g \circ f$  injekcija, onda je  $f$  injekcija.

4) Ako je  $g \circ f$  surjekcija, onda je  $g$  surjekcija.

Zašto?

1) Pretpostavimo da su  $f, g$  injekcije.

Neka su  $x, y \in S$ . Tada

$$x \neq y \stackrel{f \text{ injekcija}}{\implies} f(x) \neq f(y) \stackrel{g \text{ injekcija}}{\implies} g(f(x)) \neq g(f(y)) \implies (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(y)$$

Dakle,  $g \circ f$  injekcija.

2) Pretpostavimo da su  $f, g$  surjekcije.

Neka je  $z \in V$ . Tada postoji  $y \in T$  takav da je  $g(y) = z$  (jer je  $g$  surjekcija).

Budući da je  $f$  surjekcija i  $y \in T$  postoji  $x \in S$  takav da je  $f(x) = y$ .

Imamo,  $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ .

Dakle,  $g \circ f$  je surjekcija.

3) Pretpostavimo da je  $g \circ f$  injekcija.

Neka su  $x, y \in S$  takvi da je  $x \neq y$ . Želimo dokazati da je  $f(x) \neq f(y)$ .

Pretpostavimo suprotno, tj.  $f(x) = f(y)$ . Tada je  $g(f(x)) = g(f(y))$ , tj.  $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ .

Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je  $g \circ f$  injekcija.

Dakle,  $f(x) \neq f(y)$ .

Prema tome  $f$  je injekcija.

4) Pretpostavimo da je  $g \circ f$  surjekcija.

Neka je  $z \in V$ . Tada postoji  $x \in S$  takav da je  $(g \circ f)(x) = z$ , tj.  $g(f(x)) = z$ . Označimo



$y = f(x)$ . Imamo  $y \in T$  i  $g(y) = z$ .

Dakle,  $g$  je surjektivna.

**Napomena 3.1.7.** Neka su  $S, T$  skupovi, te neka su  $f : S \rightarrow T$  i  $g : T \rightarrow S$  funkcije takve da je  $g \circ f = id_S$  i  $f \circ g = id_T$ . Tada je  $f$  bijektivna i  $f^{-1} = g$ .

Naime, iz  $g \circ f = id_S$ , napomene 3.1.6 i činjenice da je  $id_S$  injektivna slijedi da je  $f$  injektivna.

Isto tako iz  $f \circ g = id_T$ , napomene 3.1.6 i činjenice da je  $id_T$  surjektivna slijedi da je  $f$  surjektivna.

Dakle,  $f$  je bijektivna.

Dokažimo sada da je  $f^{-1} = g$ .

Imamo  $f^{-1} : T \rightarrow S$ ,  $g : T \rightarrow S$ .

Stoga je potrebno još dokazati da je  $f^{-1}(y) = g(y)$ ,  $\forall y \in T$ .

Neka je  $y \in T$ .

Tada je  $f^{-1}(y) = x$ , gdje je  $x \in S$  takav da je  $f(x) = y$ .

Imamo  $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = id_S(x) = x = f^{-1}(y)$ .

Dakle,  $g(y) = f^{-1}(y)$ .

Prema tome  $g = f^{-1}$ .

**Definicija 3.1.8.** Neka je  $S$  skup, te neka je  $f : S \rightarrow S$  funkcija. Za  $f$  kažemo da je **involucija** na skupu  $S$  ako je  $f \neq id_S$  i  $f \circ f = id_S$ .

**Primjer 3.1.9.** Funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -x$  je involucija. Naime, očito je  $f \neq id_{\mathbb{R}}$ , a vrijedi  $f \circ f = id_{\mathbb{R}}$  jer je

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x) = -(-x) = x = id_{\mathbb{R}}(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

.

**Napomena 3.1.10.** Ako je  $f$  involucija na skupu  $S$  onda je  $f$  bijektivna i  $f^{-1} = f$ . To slijedi direktno iz napomene 3.1.7

**Propozicija 3.1.11.** Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  metrička ravnina, te neka je  $p \in \mathcal{A}$ . Neka je  $f$  osna simetrija obzirom na pravac  $p$ . Tada  $f$  nema drugih fiksnih točaka osim onih na pravcu  $p$ .

*Dokaz.* Treba dokazati sljedeće:

Ako je  $T \in M$  i  $T \notin p$  onda  $T$  nije fiksna točka od  $f$ .

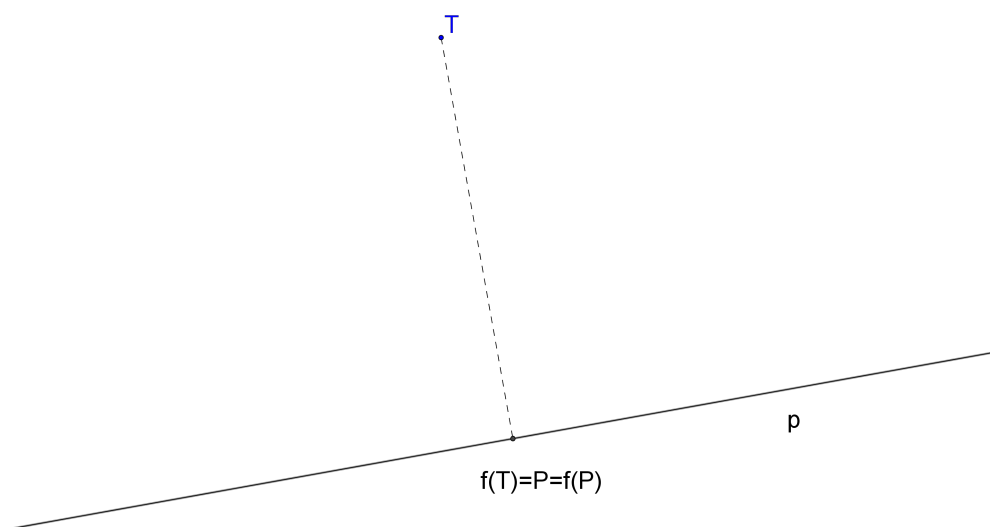
Neka je  $T \in M$ ,  $T \notin p$ .

Pretpostavimo da je  $T$  fiksna točka od  $f$ . Odaberemo 2 različite točke  $A$  i  $B$  na pravcu  $p$ .

Tada su točke  $A, B, T$  nekolinearne. Točke  $A$  i  $B$  su također fiksne za  $f$  jer su  $A, B \in p$ . Iz propozicije 2.2.15 slijedi da je  $f$  identiteta na  $M$ . Došli smo u kontradikciju s činjenicom da je  $f$  osna simetrija (jer osna simetrija nije identiteta).

Dakle,  $T$  nije fiksna točka od  $f$ . □

**Lema 3.1.12.** *Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  metrička ravnina te neka je  $p \in \mathcal{A}$ . Neka je  $f$  osna simetrija obzirom na pravac  $p$ . Neka je  $T \in M$  takav da  $T \notin p$ . Tada  $f(T) \notin p$ .*



Slika 3.2: Skica

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno, tj.  $f(T) \in p$ .

Označimo  $P = f(T)$ . Budući da je  $P \in p$  i  $T \notin p$  imamo da je  $T \neq P$ . Budući da je  $P \in p$  vrijedi  $f(P) = P$  (jer je  $P$  fiksna točka za  $f$ ). Imamo  $f(T) = P = f(P)$ , tj.  $f(T) = f(P)$ , a  $T \neq P$ . Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je  $f$  injekcija ( $f$  je injekcija jer je izometrija). Dakle,  $f(T) \notin p$ . □

**Propozicija 3.1.13.** *Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  apsolutna ravnina te neka je  $p \in \mathcal{A}$  pravac. Tada je  $s_p$  involucija.*

*Dokaz.* Iz definicije osne simetrije jasno je da je  $s_p \neq id_M$ .

Preostaje dokazati da je  $s_p \circ s_p = id_M$ .

Uočimo prije svega da je  $s_p \circ s_p : M \rightarrow M$  izometrija (prema propoziciji 2.2.3). Neka je  $P \in p$ . Tvrdimo da je  $P$  fiksna točka za  $s_p \circ s_p$ .

Imamo  $(s_p \circ s_p)(P) = s_p(s_p(P)) = s_p(P) = P$ .

Dakle,  $s_p \circ s_p$  je izometrija i svaka točka pravca  $p$  je fiksna za tu izometriju.

Pretpostavimo da  $s_p \circ s_p \neq id_M$ . Slijedi da je  $s_p \circ s_p$  osna simetrija obzirom na pravac  $p$ .

Stoga je  $s_p \circ s_p = s_p$ .

Odaberimo točku  $T \in M$  tako da  $T \notin p$ . Iz leme 3.1.12 slijedi da  $s_p(T) \notin p$ . Iz  $s_p \circ s_p = s_p$  slijedi  $(s_p \circ s_p)(T) = s_p(T)$  pa je  $s_p(s_p(T)) = s_p(T)$ . Ovo znači da je  $s_p(T)$  fiksna točka za  $s_p$ , dakle  $s_p$  ima fiksnu točku koja ne leži na pravcu  $p$ .

Ovo je nemoguće prema propoziciji 3.1.11.

Dakle,  $s_p \circ s_p = id_M$ . Prema tome  $s_p$  je involucija. □

**Korolar 3.1.14.** *Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  apsolutna ravnina te neka je  $p \in \mathcal{A}$  pravac. Tada je  $s_p$  bijekcija i  $s_p^{-1} = s_p$ .*

*Dokaz.* Ovo slijedi iz prethodnog teorema i napomene 3.1.10. □

**Propozicija 3.1.15.** *Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  apsolutna ravnina te neka je  $p \in \mathcal{A}$  pravac. Neka su  $K$  i  $L$  poluravnine određene pravcem  $p$ . Tada je  $s_p(K) \subseteq L$ .*

*Dokaz.* Imamo  $s_p(p) = \{s_p(T) \mid T \in p\} = \{T \mid T \in p\} = p$ .

Dakle,  $s_p(p) = p$ .

Prema propoziciji 2.2.10  $s_p(K)$  je podskup jedne od dviju poluravnina određene sa  $s_p(p)$ , tj. s  $p$ . Dakle,  $s_p(K) \subseteq L$  ili  $s_p(K) \subseteq K$ .

Pretpostavimo da je  $s_p(K) \subseteq K$ . Odaberimo točku  $A \in K$ . Tada je  $s_p(A) \in s_p(K)$  pa je  $s_p(A) \in K$ .

Označimo s  $B = s_p(A)$ .

Imamo, koristeći propoziciju 3.1.13  $s_p(B) = s_p(s_p(A)) = (s_p \circ s_p)(A) = id_M(A) = A$ .

Dakle,  $s_p(B) = A$  i  $s_p(A) = B$ .

Iz propozicije 2.2.15 slijedi da je polovište dužine  $\overline{AB}$  fiksna točka od  $s_p$ . Iz leme 3.1.12 slijedi da se polovište dužine  $\overline{AB}$  nalazi na pravcu  $p$ .

To znači da je  $\overline{AB} \cap p \neq \emptyset$ .

S druge strane imamo  $A, B \in K$  pa je  $\overline{AB} \cap p = \emptyset$ . Kontradikcija.

Prema tome  $s_p(K) \subseteq L$ . □

**Propozicija 3.1.16.** *Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  apsolutna ravnina te neka je  $p \in \mathcal{A}$  pravac. Neka su  $K$  i  $L$  poluravnine određene pravcem  $p$ . Tada je  $s_p(K) = L$ .*

*Dokaz.* Prema prethodnoj propoziciji vrijedi  $s_p(K) \subseteq L$ . Preostaje stoga dokazati da je  $L \subseteq s_p(K)$ .

Neka je  $T \in L$ . Želimo dokazati da je  $T \in s_p(K)$ .

Neka je  $T' = s_p(T)$ .

Iz prethodne propozicije slijedi da je  $s_p(L) \subseteq K$ .

Iz  $T \in L$  slijedi  $s_p(T) \in s_p(L)$  pa je  $s_p(T) \in K$ . Dakle,  $T' \in K$ .

Imamo  $s_p(T') = s_p(s_p(T)) = (s_p \circ s_p)(T) = id_M(T) = T$ .

Dakle,  $T = s_p(T')$  i  $T' \in K$ .

Jasno je da je  $s_p(T') \in s_p(K)$ , dakle  $T \in s_p(K)$ .

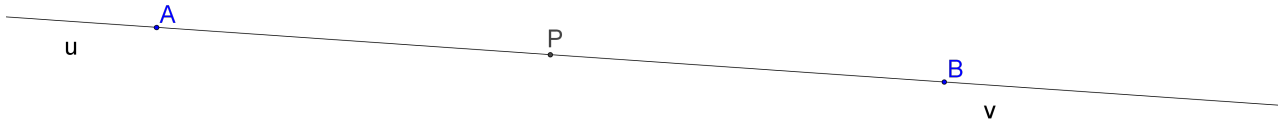
Ovime smo dokazali da je  $L \subseteq s_p(K)$ .

Zaključak:  $s_p(K) = L$ . □

**Teorem 3.1.17.** *Neka je  $(M, \mathcal{A}, \rho, d)$  apsolutna ravnina te neka su  $A, B \in M$ ,  $A \neq B$ . Tada postoji jedinstveni pravac  $p$  takav da je*

$$s_p(A) = B.$$

*Dokaz.* Neka je  $P$  polovište dužine  $\overline{AB}$ . Znamo da postoji polupravac  $u$  s vrhom  $P$  takav da je  $A \in u$  te polupravac  $v$  s vrhom  $P$  takav da je  $B \in v$ .



Slika 3.3: Skica

Iz definicije apsolutne ravnine (aksiom IV.2.) slijedi da postoji pravac  $p$  takav da je  $s_p(u) = v$ .

Imamo da je  $u$  polupravac s vrhom  $P$  pa iz propozicije 2.2.8 slijedi da je  $s_p(u)$  polupravac

s vrhom  $s_p(P)$ , dakle  $v$  je polupravac s vrhom  $s_p(P)$ .

Iz propozicije 2.1.2 slijedi da je  $s_p(P) = P$ .

Iz  $A \in u$  slijedi  $s_p(A) \in s_p(u)$ , tj.  $s_p(A) \in v$ .

Imamo  $d(A, P) = d(s_p(A), s_p(P)) = d(s_p(A), P)$ .

S druge strane  $d(A, P) = d(P, B)$ .

Stoga je  $d(P, B) = d(P, s_p(A))$ .

Imamo  $s_p(A), B \in v$ , pa iz propozicije 2.1.3 slijedi  $s_p(A) = B$ .

### JEDINSTVENOST

Pretpostavimo da je  $p$  pravac (ne nužno onaj konstruiran gore) takav da je  $s_p(A) = B$ .

Neka je  $q = AB$ .

Uočimo sljedeće:  $s_p(B) = s_p(s_p(A)) = (s_p \circ s_p)(A) = id_M(A) = A$ , dakle,  $s_p(B) = A$ .

Budući da je  $A \in q$ , vrijedi  $s_q(A) = A$ .

S druge strane imamo  $s_p(A) = B$  i  $A \neq B$ .

Dakle,  $s_q(A) \neq s_p(A)$ . Stoga je  $s_p \neq s_q$  pa je  $p \neq q$ .

Prema propoziciji 2.2.8  $s_p(q)$  je pravac. Iz  $A \in q$  slijedi  $s_p(A) \in s_p(q)$ , tj.  $B \in s_p(q)$ .

Nadalje iz  $B \in q$  slijedi  $s_p(B) \in s_p(q)$ , tj.  $A \in s_p(q)$ .

Imamo  $A, B \in s_p(q)$  pa slijedi  $s_p(q) = q$ .

Neka su  $K, L$  poluravnine određene pravcem  $q$ . Tvrdimo da je  $s_p(K) \subseteq K$  i  $s_p(L) \subseteq L$ .

Dokažimo to.

Budući da je  $p \neq q$ , postoji točka  $T \in p$  takva da  $T \notin q$ . Slijedi da je  $T \in K$  ili  $T \in L$ .

1. slučaj: Pretpostavimo da je  $T \in K$ . Budući da je  $T \in p$  vrijedi  $s_p(T) = T$ .

Prema propoziciji 2.2.11 slijedi da je  $s_p(K)$  podskup jedne od dviju poluravnina određenih sa  $s_p(q)$ . No,  $s_p(q) = q$ .

Dakle,  $s_p(K) \subseteq K$  ili  $s_p(K) \subseteq L$ .

Pretpostavimo da je  $s_p(K) \subseteq L$ .

Imamo  $T \in K$  pa je  $s_p(T) \in s_p(K)$ , tj.  $T \in s_p(K)$ . Dakle,  $T \in L$ . Ovo je u kontradikciji s činjenicom  $T \in K$ .

Dakle,  $s_p(K) \subseteq K$ .

Iz propozicije 2.2.11 slijedi također da je  $s_p(L) \subseteq K$  ili  $s_p(L) \subseteq L$ .

Pretpostavimo da je  $s_p(L) \subseteq K$ .

Odaberimo točku  $C \in L$ , tada je  $s_p(C) \in s_p(L)$ , tj.  $s_p(C) \in K$ . Iz ovog slijedi da je  $s_p(s_p(C)) \in s_p(K)$ , tj.  $C \in s_p(K)$ , pa je  $C \in K$ . Kontradikcija.

Prema tome  $s_p(L) \subseteq L$ .

2. slučaj: Pretpostavimo da je  $T \in L$ .

Posve analogno kao pod 1) dobivamo  $s_p(L) \subseteq L$  i  $s_p(K) \subseteq K$ .

Time smo dokazali da je  $s_p(K) \subseteq K$  i  $s_p(L) \subseteq L$ .

Pretpostavimo da su  $p$  i  $p'$  pravci takvi da je  $s_p(A) = B$  i  $s_{p'}(A) = B$ .  
 Promotrimo kompoziciju  $s_{p'} \circ s_p$ . Imamo  $(s_{p'} \circ s_p)(A) = s_{p'}(s_p(A)) = s_{p'}(B) = A$ ,  $(s_{p'} \circ s_p)(B) = s_{p'}(s_p(B)) = s_{p'}(A) = B$ .  
 Dakle,  $(s_{p'} \circ s_p)(A) = A$  i  $(s_{p'} \circ s_p)(B) = B$ . Znamo da je  $s_{p'} \circ s_p$  izometrija, a vidimo da su  $A$  i  $B$  njene fiksne točke. Iz propozicije 2.2.13 slijedi da je svaka točka pravca  $AB$ , tj. pravca  $q$  fiksna točka od  $s_{p'} \circ s_p$ .  
 Tvrdimo da je  $s_{p'} \circ s_p = id_M$ .  
 Pretpostavimo suprotno, tj.  $s_{p'} \circ s_p \neq id_M$ . Tada je kompozicija  $s_{p'} \circ s_p$  osna simetrija obzirom na pravac  $q$ , tj.  $s_{p'} \circ s_p = s_q$  (prema aksiomu IV.1. apsolutne ravnine  $s_q$  je jedina osna simetrija obzirom na pravac  $q$ ).  
 Neka je  $T \in K$ . Tada je  $s_p(T) \in s_p(K)$ .  
 No,  $s_p(K) \subseteq K$ . Stoga je  $s_p(T) \in K$ . Slijedi  $s_{p'}(s_p(T)) \in s_{p'}(K)$  pa iz  $s_{p'}(K) \subseteq K$  slijedi  $s_{p'}(s_p(T)) \in K$ , tj.  $(s_{p'} \circ s_p)(T) \in K$ .  
 Dakle,  $s_q(T) \in K$ .  
 Iz  $T \in K$  slijedi  $s_q(T) \in s_q(K)$ .  
 Prema propoziciji 3.1.12 vrijedi  $s_q(K) \subseteq L$ . Stoga je  $s_q(T) \in L$ . Ovo je u kontradikciji s  $s_q(T) \in K$ .  
 Zaključak:  $s_{p'} \circ s_p = id_M$ .  
 Iz ovog slijedi  $s_{p'} \circ (s_{p'} \circ s_p) = s_{p'} \circ id_M$  pa je  $(s_{p'} \circ s_{p'}) \circ s_p = s_{p'}$ , tj.  $id_M \circ s_p = s_{p'}$ .  
 Dakle,  $s_p = s_{p'}$  pa prema korolaru 3.1.5 imamo  $p = p'$ .  
 Time je teorem dokazan. □



# Bibliografija

[1] *B. Pavković, D. Veljan, Elementarna matematika 1, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.*

[2] *H. S. M. Coxeter, Introduction to Geometry, J. Wiley, New York, 1969.*





# Sažetak

*Ovaj diplomski rad podijelili smo na tri poglavlja. Na početku ovog diplomskog rada definiraju se osnovni pojmovi kao što su binarna relacija i linearni uređaj. U prvom poglavlju smo definirali ravninu te proučili pojam  $P$  – ravnine. U drugom poglavlju smo se bavili pojmom metričke ravnine te smo proučili razna svojstva metričke ravnine te izometrije. U trećem poglavlju smo definirali apsolutnu ravninu te dokazali neke tvrdnje koje vrijede u apsolutnoj ravnini.*



# Summary

*This diploma thesis is divided into three chapters. At the beginning of this diploma thesis we defined the basic concepts of binary relation and linear order. In the first chapter, we have defined a plane, and have studied the concept of  $P$ -planes. In the second chapter we have discussed the notion of metric plane, and we have studied various properties of metric planes and isometries. In the third chapter, we have defined the absolute plane and have proved some of the claims that are valid in the absolute plane.*



# Životopis

*Rođena sam 12.3.1989. godine u Zagrebu. Osnovnoškolsko obrazovanje započinem 1996. godine u Osnovnoj školi Jakovlje u Jakovlju. Godine 2004. upisujem Gimnaziju Tituša Brezovačkog gdje sam 2008. godine maturirala s odličnim uspjehom. Iste godine nastavljam daljnje školovanje na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2012., nakon završenog preddiplomskog studija matematike; smjer: nastavnički, upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematike; smjer: nastavnički. U slobodno vrijeme bavim se rukometom te sudjelujem na sveučilišnim prvenstvima i klubskim natjecanjima.*