Zakoni arkus sinusa

Prša, Marija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marija Prša

ZAKONI ARKUS SINUSA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Bojan Basrak

Zagreb, rujan, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Slučajne šetnje i Brownovo gibanje dva su osnovna pojma kojima ćemo se baviti u ovom radu, preciznije, bavit ćemo se posebnim zakonima koji su im zajednički. Ti zakoni nazivaju se zakoni arkus sinusa. Da bismo ilustrirali osnovnu ideju dati ćemo dva primjera.

Pretpostavimo da Luka i Borna naizmjence bacaju novčić $2n$ puta. Svaki put kada padne glava Luka daje Borni 1 kunu i obrnuto, kada padne pismo Borna daje Luki 1 kunu. Promatrajući igru iz Lukine perspektive, kad padne glava Luka gubi 1 kunu, a kad padne pismo dobiva 1 kunu. Ako pretpostavimo da je novčić simetričan, to jest da su vjerojatnosti da padnu pismo i glava jednake, tada parcijalne sume njihovih isplata tijekom igre čine jednostavnu simetričnu slučajnu šetnju. Naizgled radi se o vrlo jednostavnoj igri no postoje mnoga pitanja koja si možemo postaviti. Tijekom igre može se dogoditi da je suma svih prijašnjih isplata jednaka nula. Tada možemo reći da su Luka i Borna izjednačeni. Pitanje koje nas može zanimati je kolika je vjerojatnost da se zadnje izjednačenje dogodilo u određenom trenutku. Nadalje, ako je parcijalna suma isplata u nekom trenutku pozitivna to znači da je Luka tada u vodstvu. Kolika je vjerojatnost da je Luka u vodstvu točno k od $2n$ bacanja? Zanimljivo je i pitanje kada će se tijekom igre prvi put dogoditi situacija da je suma prijašnjih isplata jednaka onoj na kraju igre. Također, u nekom trenutku postigne se maksimalan iznos koji Luka dobije od isplata tijekom igre. Očito se maksimum može postići više puta pa promatramo kada se prvi put postigao. Kolika je vjerojatnost da se postigao u određenom trenutku k? Odgovor na sva postavljena pitanja je jednak. Sve navedene slučajne varijable imaju diskretnu arkus sinus distribuciju reda n. Naziv proizlazi iz činjenice da inverzna funkcija sinusa pruža odličnu numeričku aproksimaciju za spomenute vjerojatnosti. Veoma su zanimljiva i svojstva te distribucije. Naime, distribucija je simetrična te ima svojstvo da vjerojatnosti padaju do polovice promatranog vremenskog intervala, a zatim simetrično rastu. Iz toga, suprotno intuiciji, slijedi da će u igri s velikim brojem bacanja novčića Luka ili Borna s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$ biti u vodstvu od polovice promatranog vremenskog intervala sve do kraja igre.

Krenimo sada na drugi primjer. Poznato je da Brownovo gibanje dobro opisuje fluktuacije na financijskom tržištu, kao na primjer na tržištu dionica. Pretpostavimo da ulažemo u dionice godinu dana, te su naši dobici/gubici od ulaganja u određenom vremenskom periodu normalno distribuirani i međusobno nezavisni. Tada kumulativna dobit tijekom promatrane godine čini standardno Brownovo gibanje. Kao ulagača može nas zanimati distribucija vremena kada je dobit posljednji put bila jednaka nuli kao i distribucija vremena postizanja maksimalne dobiti. Nadalje, možemo se pitati kakva je distribucija duljine perioda u kojem smo na dobitku (u "plusu"). Zbog činjenice da su Brownovo gibanje i slučajna šetnja veoma usko povezani nije iznenađujuće da je tražena distribucija ponovo arkus sinus distribucija. Intuitivno, možemo reći da je najmanje vjerojatno da ćemo podjednako vremena tijekom godine provesti u "plusu" i "minusu".

Cilj ovog rada je dokazati zakone arkus sinusa za slučajne šetnje i Brownovo gibanje. U prvom poglavlju bavit ćemo se slučajnim šetnjama i svojstvima koja će nam biti potrebna u daljnjem radu. U sklopu drugog poglavlja dokazat ćemo zakone arkus sinusa za jednostavne simetrične slučajne šetnje, a zatim poopćiti te tvrdnje i za općenite slučajne šetnje. Nakon toga bavit ćemo se Brownovim gibanjem i dokazati teorem kojim ćemo dovesti u vezu Brownovo gibanje i slučajne šetnje. Tada ćemo vrlo jednostavno pomoću prethodno dokazanih zakona arkus sinusa za slučajne šetnje dokazati da slični zakoni vrijede i za Brownovo gibanje.

Poglavlje 1

Slučajna šetnja

1.1 Definicije i svojstva slučajnih šetnji

Definicija 1.1.1. *Neka je $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli, te neka su dane sljedeće varijable*

$$S_0 = 0,\ S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

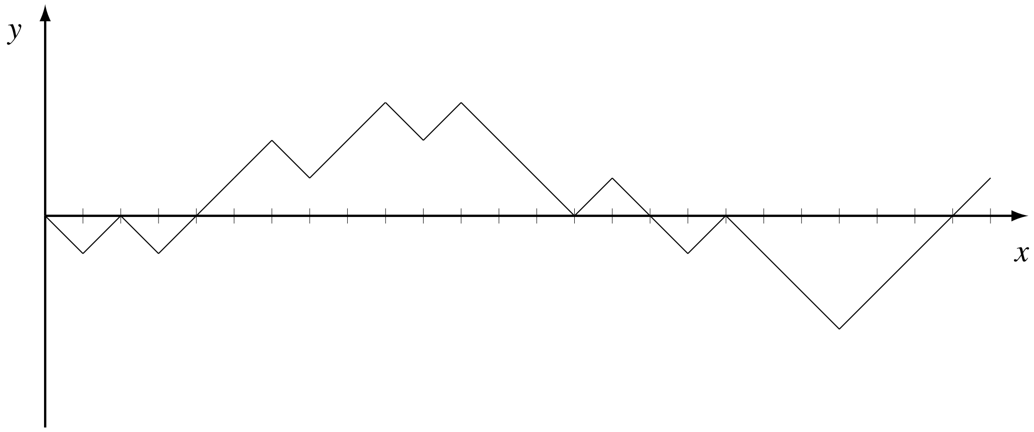
Niz $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ nazivamo slučajna šetnja.

Ako je $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli s vrijednostima ± 1, tada $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ nazivamo jednostavna slučajna šetnja.

Posebno, ako vrijedi da je $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ kažemo da je jednostavna slučajna šetnja simetrična.

Od sada na dalje, osim ako nije posebno naglašeno, podrazumjevat ćemo da se radi o jednostavnoj simetričnoj slučajnoj šetnji.

Niz $S_0, S_1, ..., S_n$ često reprezentiramo kao put u ravnini gdje horizontalna os predstavlja vrijeme, a vertikalna vrijednosti od S_n. Za dani niz povezujemo točke (k, S_k) i $(k+1, S_{k+1})$, za $k < n$. Duljina puta je razlika između vrijednosti početne i završne točke puta.



Slika 1.1: Put slučajne šetnje

U ovom poglavlju cilj nam je pokazati svojstva slučajnih šetnji koja će nam koristiti u daljnjem radu, a pritom ćemo slijedit poglavlje 4 knjige "Probability: Theory and Examples" Ricka Durretta[2].

Sada promatramo putove od ishodišta $(0, 0)$ do točke (n, x). Definiramo a i b kao broj pozitivnih, odnosno negativnih koraka na putu:

$$a = \frac{(n + x)}{2}, \tag{1.1}$$

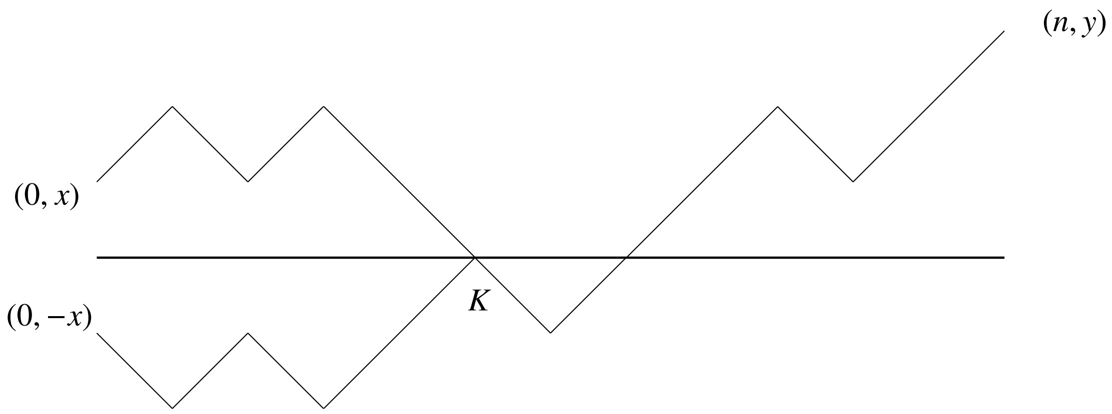
$$b = \frac{(n - x)}{2}.$$

Uz ove oznake slijedi da je $n = a + b$ i $x = a - b$. Ako je $-n \leqslant x \leqslant n$ i $n - x$ paran, što je ekvivalentno da je $n + x$ paran, tada je broj putova od $(0, 0)$ do (n, x)

$$N_{n,x} = \binom{n}{a}. \tag{1.2}$$

Inače, broj putova je 0.

Lema 1.1.2 (Princip refleksije)**.** *Neka su* $x, y > 0$*, tada je broj putova od* $(0, x)$ *do* (n, y) *koji posjećuju* 0 *u nekom trenutku jednak broju putova od* $(0, -x)$ *do* (n, y)*.*



Slika 1.2: Princip refleksije

Dokaz. Dokaz leme svodi se na dokaz da postoji jedan-jedan veza između navedene dvije klase putova. Ako to pokažemo njihovi brojevi moraju biti jednaki.

Neka je $(0, s_0), (1, s_1), ..., (n, s_n)$ put od $(0, x)$ do (n, y) i $K = \inf\{k : s_k = 0\}$. Označimo $s'_k = -s_k$ za $k \leqslant K$, $s'_k = s_k$ za $K \leqslant k \leqslant n$. Tada je (k, s'_k), $0 \leqslant k \leqslant n$ put od $(0, -x)$ do (n, y).

Ako je $(0, t_0), (1, t_1), ..., (n, t_n)$ put od $(0, -x)$ do (n, y) tada on mora prijeći 0. Neka je $K = \inf\{k : t_k = 0\}$. Označimo $t'_k = -t_k$ za $k \leqslant K$, $t'_k = t_k$ za $K \leqslant k \leqslant n$. Tada je (k, t'_k), $0 \leqslant k \leqslant n$ put od $(0, x)$ do (n, y) koji je 0 u trenutku K. $\square$

Teorem 1.1.3. *Neka su n i x pozitivni, cijeli brojevi. Postoji točno* $\frac{x}{n} N_{n,x}$ *putova iz ishodišta* $(0, 0)$ *do točke* (n, x) *takvih da je* $s_1 > 0, ..., s_n > 0$.

Dokaz. Neka su a i b definirani kao u (1.1). Prisjetimo se da $a = \frac{(n+x)}{2}$ predstavlja broj pozitivnih koraka na putu od $(0, 0)$ do (n, x), a $b = \frac{(n-x)}{2}$ broj negativnih koraka na putu. Kako je $s_0 = 0$, broj putova od ishodišta do (n, x) koji nikad ne posjećuju 0 jednak je broju putova od $(1, 1)$ do (n, x) koji nikad ne posjećuju 0. Iz principa refleksije slijedi da je broj putova od $(1, 1)$ do (n, x) koji posjećuju 0 u nekom trenutku jednak broju putova od $(-1, 1)$ do (n, x). Dakle broj putova od $(1, 1)$ do (n, x) koji nikad ne posjećuju 0 je jednak

$$
\begin{aligned}
N_{n-1,x-1} - N_{n-1,x+1} &= \binom{n-1}{a-1} - \binom{n-1}{a} \\
&= \frac{(n-1)!}{(a-1)!(n-a)!} - \frac{(n-1)!}{a!(n-a-1)!} \\
&= \frac{a-(n-a)}{n} \frac{n!}{a!(n-a)!} \\
&= \frac{a-(n-a)}{n} \frac{n!}{a!(n-a)!} \\
&= \frac{a-b}{n} N_{n,x} \\
&= \frac{x}{n} N_{n,x} \,.
\end{aligned}
$$

□

Prethodni teorem često u literaturi možemo naći pod nazivom Teorem glasačkog listića (The Ballot Theorem). Da bismo shvatili naziv teorema možemo ga iskazati na drugi način.

Teorem 1.1.4 (Teorem glasačkog listića)**.** *Pretpostavimo da na izborima kandidat A dobije α glasova, a kandidat B β glasova, gdje je $\beta < \alpha$. Vjerojatnost da tijekom brojanja glasova A uvijek vodi ispred kandidata B jednaka je $(\alpha - \beta)/(\alpha + \beta)$.*

Dokaz. Neka je $x = \alpha - \beta, n = \alpha + \beta$. Broj traženih ishoda jednak je broju putova od $(1, 1)$ do (n, x) koji nikad ne posjećuju 0, pa tvrdnja slijedi iz Teorema 1.1.3. □

Označimo sa

$$p_{n,x} = \mathbb{P}(S_n = x)\,.$$

Znamo da je broj putova od ishodišta do (n, x), $N_{n,x}$ dan sa formulom (1.2) te da postoji 2^n putova duljine n. Dakle

$$p_{n,x} = \binom{n}{a} 2^{-n} = \binom{n}{\frac{n+x}{2}} 2^{-n}. \tag{1.3}$$

1.2 Povratci

Ako pretpostavimo da je $S_0 = 0$, povratak u ishodište dešava se u trenutku k takvom da je $S_k = 0$. Očito je da k mora nužno biti paran broj. Za $k = 2\nu$ vjerojatnost povratka u početno stanje u trenutku k jednaka je $p_{2v,0}$. Zbog jednostavnosti uvodimo novu oznaku za tu vjerojatnost

$$u_{2v} = \binom{2v}{v} 2^{-2v} . \tag{1.4}$$

Također, poseban slučaj povratka u ishodište je prvi povratak. Prvi povratak dogodi se u trenutku $2v$ ako

$$S_1 \neq 0, ..., S_{2v-1} \neq 0, \text{ te } S_{2v} = 0 .$$

Vjerojatnost tog događaja označavamo s f_{2v}. Po definiciji $f_0 = 0$.

U nastavku ćemo uz poglavlje 4 knjige ”Probability: Theory and Examples” Ricka Durretta[2] slijedit i poglavlje 3 knjige ”An Introduction to Probability Theory and Its Application” Wiliama Fellera[3].

Sljedeći teorem daje vezu između vjerojatnosti u_{2n} i f_{2n}.

Teorem 1.2.1. $u_{2n} = f_2 u_{2n-2} + f_4 u_{2n-4} + ... + f_{2n} u_0$, $n \geqslant 1$

Dokaz. Postoji $u_{2n} 2^{2n}$ različitih putova duljine $2n$ od točke $(0, 0)$ do točke $(2n, 0)$.Sve te putove možemo podijeliti u n skupina, ovisno o trenutku prvog povratka u početnu točku. Posjet ishodištu u trenutku $2n$ može biti prvi povratak ili se prvi povratak dogodio u trenutku $2k < 2n$ i nakon toga je slijedio ponovni povratak u početnu točku $2n - 2k$ vremenskih jedinica poslije. Postoji $f_{2k} 2^{2k}$ puteva duljine $2k$ koji završavaju prvim povratkom i $u_{2n-2k} 2^{2n-2k}$ putova od točke $(2k, 0)$ do $(2n, 0)$. Dakle, broj putova koji se prvi put vraćaju u početnu točku u trenutku $2k$ je

$$f_{2k} 2^{2k} u_{2n-2k} 2^{2n-2k} = f_{2k} u_{2n-2k} 2^{2n} .$$

Sumacijom po svim mogućim k dobivamo broj putova od $(0, 0)$ do $(2n, 0)$

$$u_{2n} 2^{2n} = f_2 u_{2n-2n} 2^{2n} + f_4 u_{2n-4} 2^{2n} + ... + f_{2n} u_0 2^{2n} .$$

Dijeljenjem jednadžbe s 2^{2n} slijedi tvrdnja. □

Lema 1.2.2. *Vjerojatnost da nije bilo povratka u početnu točku do trenutka* $2n$*, uključivo i* $2n$*, jednaka je vjerojatnosti da se povratak dogodio u trenutku* $2n$*, to jest*

$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, ..., S_{2n} \neq 0) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = u_{2n} . \tag{1.5}$$

Dokaz. Kad se dogodi događaj $\{S_1 \neq 0, ..., S_{2n} \neq 0\}$ ili su svi S_j pozitivni ili su svi negativni. Oba događaja su jednako vjerojatna pa je (1.5) ekvivalentno sa

$$\mathbb{P}(S_1 > 0, ..., S_{2n} > 0) = \frac{1}{2} u_{2n} . \tag{1.6}$$

Razmatranjem svih mogućih vrijednosti koje S_{2n} može poprimiti dobivamo

$$\mathbb{P}(S_1 > 0, ..., S_{2n} > 0) = \sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_1 > 0, ..., S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2r),$$

gdje događaji u kojima je $r > n$ imaju vjerojatnost 0. Po Teoremu 1.1.3 broj putova od $(0,0)$ do $(2n, 2r)$ koji nikad ne posjećuju 0, odnosno, broj putova koji zadovoljavaju uvjet $\{S_1 > 0, ..., S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2r\}$ jednak je $N_{2n-1,2r-1} - N_{2n-1,2r+1}$, pa je r-ti izraz sume jednak

$$\frac{1}{2}(p_{2n-1,2r-1} - p_{2n-1,2r+1}).$$

Negativni član r-tog izraza pokrati se sa pozitivnim članom $(r+1)$-og izraza, pa se suma svodi na $\frac{1}{2}p_{2n-1,1}$.

$$\begin{aligned}
p_{2n-1,1} &= \binom{2n-1}{\frac{(2n-1+1)}{2}} 2^{-(2n-1)} \\
&= \binom{2n-1}{n} 2^{-2n+1} \\
&= \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} 2^{-2n+1} \\
&= \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!)} \frac{2n}{n} 2^{-2n} \\
&= \frac{(2n)!}{n!n!)} 2^{-2n} \\
&= \binom{2n}{n} 2^{-2n} \\
&= u_{2n}
\end{aligned}$$

Dakle, $p_{2n-1,1} = u_{2n}$ pa slijedi (1.6) a zbog toga i tvrdnja leme. □

Prethodnu lemu možemo iskazati na još jedan način,

$$\mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, ..., S_{2n} \geqslant 0) = u_{2n}. \tag{1.7}$$

Put duljine $2n$ sa svim vrijednostima strogo iznad x-osi prolazi nužno točkom $(1,1)$. Ako uzmemo tu točku kao početnu dobivamo novi put duljine $2n-1$ sa svim vrijednostima iznad ili na novoj x-osi. Slijedi da je

$$\mathbb{P}(S_1 > 0, ..., S_{2n} > 0) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, ..., S_{2n-1} \geqslant 0). \tag{1.8}$$

Ali kako je S_{2n-1} neparan broj, ako je $S_{2n-1} \geqslant 0$ slijedi da je i $S_{2n} \geqslant 0$. Dakle

$$\mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, ..., S_{2n-1} \geqslant 0) = \mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, ..., S_{2n} \geqslant 0)$$

Vjerojatnost na lijevoj strani (1.8) je prema (1.6) jednaka $\frac{1}{2}u_{2n}$, pa zbog toga vrijedi (1.7).

Direktna posljedica Leme 1.2.2 je formula koja direktno povezuje u_{2n} i f_{2n}.

Lema 1.2.3. *Vjerojatnost da se prvi povratak u početnu točku dogodio u trenutku* $2n$ *dana je sa*

$$f_{2n} = \frac{1}{2n-1} u_{2n} \,. \tag{1.9}$$

Dokaz. Događaj prvog povratka u početnu točku u trenutku $2n$ ekvivalentan je događu

$$S_1 \neq 0, ..., S_{2k} \neq 0 \,,$$

za $k = n - 1$, ali ne za $k = n$. Iz Leme 1.2.2 slijedi da je

$$f_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n} \,. \tag{1.10}$$

Jednostavnim računom i koristeći (1.4) dobivamo željenu jednakost.

$$\begin{aligned} u_{2n-2} - u_{2n} &= \binom{2n-2}{n-1} 2^{-(2n-2)} - \binom{2n}{n} 2^{-2n} \\ &= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} 2^{-2n+2} - \frac{(2n)!}{n!n!} 2^{-2n} \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} \frac{n^2}{2n(2n-1)} 2^{-2n+2} - \frac{(2n)!}{n!n!} 2^{-2n} \\ &= \binom{2n}{n} 2^{-2n} \left(\frac{2n}{2n-1} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2n-1} u_{2n} \end{aligned}$$

□

Iz (1.10) slijedi da je $f_2 + f_4 + ... = 1$. U terminima igre bacanja novčića to znači da će se izjednačenje sigurno dogoditi ako igra traje dovoljno dugo, što je i u skladu s našom intuicijom. Vjerojatnost da se nije dogodilo niti jedno izjednačenje u 100 bacanja novčića iznosi otprilike 0.08. Dakle, potreban je iznenađujuće velik broj bacanja da bismo mogli reči ga će se izjednačenje gotovo sigurno dogoditi.

1.3 Dualnost

Svakom putu odgovara konačan niz plus i minus jedinica, te okretanjem njihovog redoslijeda dobivamo novi put. Geometrijski, novi put možemo dobiti rotacijom početnog puta za 180 stupnjeva oko završne točke i uzimanjem te točke kao ishodišta novog koordinatnog sustava.

Ako su koraci početne šetnje dani sa $X_1, X_2, ..., X_n$, tada definiramo korake nove šetnje sa

$$X_1^* = X_n, ..., X_n^* = X_1 \,. \tag{1.11}$$

Vrhovi nove slučajne šetnje definirani su parcijalnim sumama

$$S_k^* = X_1^* + ... + X_k^* = S_n - S_{n-k} \,. \tag{1.12}$$

Iz definicije slijedi da je $S_0^* = 0$ i $S_n^* = S_n$. Dobivenu šetnju nazivamo dualnom slučajnom šetnjom. Svakom događaju definiranom na početnoj šetnji odgovara njemu dualan događaj jednake vjerojatnosti definiran na dualnoj šetnji. Principom dualnosti mnogo je jednostavnije dokazati brojne tvrdnje.

Za dani n točku (n, S_n) nazivat ćemo završnom točkom.

Primjer 1.3.1. *Definiramo dva događaja.*

$$S_j^* > 0, \quad j = 1, 2, ..., n \tag{1.13}$$

$$S_n > S_j, \quad j = 0, 1, , ..., n-1 \tag{1.14}$$

Iz (1.12) *očito je da su ta dva događaja međusobno dualna. Drugi događaj znači da završna točka nije bila posječena do trenutka n. Iz* (1.6) *znamo da je vjerojatnost događaja* (1.13) *jednaka* $\frac{1}{2}u_{2\nu}$*, ako je* $n = 2\nu > 0$ *paran. Za* $n = 2\nu + 1$ *vjerojatnost je jednaka jer* $S_{2\nu}^* > 0$ *povlači da je i* $S_{2\nu+1}^* > 0$ *(ako put krene iz* 0 *može se vratiti u* 0 *samo u parnom broju koraka). Dakle, vjerojatnost da se prvi dolazak u pozitivnu točku* S_n *dogodi u trenutku n je jednak* $\frac{1}{2}u_{2\nu}$*, bilo da je* $\nu = \frac{1}{2}n$ *ili* $\nu = \frac{1}{2}(n-1)$*. Bez upotrebe dualnost bilo bi jako teško dokazati ovaj rezultat.*

Također ako u (1.13) *i* (1.14) *stroge nejednakosti* $>$ *zamijenimo sa* $\geqslant$ *ponovo dobivamo dualne događaje. Događaj* $\{S_n \geqslant S_j, j = 0, 1, , ..., n-1\}$ *znači da je* S_n *maksimum i da se mogao postići i prije trenutka n. Vjerojatnost tog događaja je jednaka* $u_{2\nu}$*, gdje je* $\nu = \frac{1}{2}n$ *ili* $\nu = \frac{1}{2}(n+1)$*, a to slijedi iz* (1.7).

Poglavlje 2

Zakoni arkus sinusa za slučajne šetnje

U ovom poglavlju dokazat ćemo zakone arkus sinusa za slučajne šetnje. Pritom ćemo se prvo baviti jednostavnim slučajnim šetnjama, a zatim dobivene rezultate proširiti i na slučaj općenitih slučajnih šetnji.

2.1 Zakoni arkus sinusa za jednostavne simetrične slučajne šetnje

Kao i u prethodnom poglavlju slijedit ćemo poglavlje 4 knjige "Probability: Theory and Examples" Ricka Durretta[2].

Označimo sa L_{2n} zadnji posjet 0 u slučajnoj šetnji duljine $2n$,

$$L_{2n} = \sup\{m \leqslant 2n : S_m = 0\}. \tag{2.1}$$

Lema 2.1.1. *$\mathbb{P}(L_{2n} = 2k) = \mathbb{P}(S_{2k} = 0)\mathbb{P}(S_{2n-2k} = 0) = u_{2k}u_{2n-2k}$, $0 \leqslant k \leqslant n$.*

Dokaz. Uočimo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(L_{2n} = 2k) &= \mathbb{P}(S_{2k} = 0, S_{2k+1} \neq 0, ..., S_{2n} \neq 0) \\
&= \mathbb{P}(S_{2k} = 0, S_{2k} + X_{2k+1} \neq 0, ..., S_{2k} + X_{2k+1} + ... + X_{2n} \neq 0) \\
&= \mathbb{P}(S_{2k} = 0, X_{2k+1} \neq 0, ..., X_{2k+1} + ... + X_{2n} \neq 0) \\
&= \mathbb{P}(S_{2k} = 0)\mathbb{P}(X_{2k+1} \neq 0, ..., X_{2k+1} + ... + X_{2n} \neq 0) \\
&= \mathbb{P}(S_{2k} = 0)\mathbb{P}(Z_1 \neq 0, ..., Z_{2n-2k} \neq 0) \\
&= \mathbb{P}(S_{2k} = 0)\mathbb{P}(Z_{2n-2k} = 0) \\
&= u_{2k}u_{2n-2k},
\end{aligned}$$

četvrta jednakost slijedi zbog nezavisnosti X_i, $(1 \leqslant i \leqslant 2k)$ i X_j, $(2k + 1 \leqslant j \leqslant 2n)$.

Ako definiramo da je nova slučajna šetnja

$$Z_i = X_{2k+1} + ... + X_{2k+i}, i \geqslant 0\,,$$

tada iz Leme 1.2.2 slijedi predzadnja jednakost.

□

Teorem 2.1.2 (Zakon arkus sinusa za zadnji posjet 0)**.** *Za* $0 < a < b < 1$*,*

$$\mathbb{P}\left(a \leqslant \frac{L_{2n}}{2n} \leqslant b\right) \longrightarrow \int_a^b \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x\,,\ \textit{kad}\ n \longrightarrow \infty.$$

Dokaz. Stirlingova formula kaže da je

$$n! \sim n^n e^{-n}(2\pi n)^{\frac{1}{2}},\ \text{kad}\ n \longrightarrow \infty. \tag{2.2}$$

Koristeći (2.2) dobivamo sljedeću asimptotsku formulu za u_{2n},

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \binom{2n}{n} \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!}2^{-2n} \\ &\sim \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}(2\pi 2n)^{\frac{1}{2}}}{n^{2n}e^{-2n}(2\pi n)}2^{-2n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi n}}. \end{aligned}$$

Iz prethodne leme i dobivenog rezultata za u_{2n} slijedi

$$n\mathbb{P}(L_{2n} = 2k) = nu_{2k}u_{2n-2k} \sim n\frac{1}{\sqrt{\pi k}}\frac{1}{\sqrt{\pi(n-k)}} = \frac{1}{\pi\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}}\,.$$

Ako $\frac{k}{n} \longrightarrow x$, tada

$$n\mathbb{P}(L_{2n} = 2k) \longrightarrow \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\,. \tag{2.3}$$

Da bismo iz toga dobili željenu tvrdnju, označimo:

$$\begin{gathered} 2na_n = \text{najmanji konačan cijeli broj} \geqslant 2na\,, \\ 2nb_n = \text{najveći konačan cijeli broj} \leqslant 2nb\,, \\ f_n(x) = n\mathbb{P}(L_{2n} = 2k)\ \text{za}\ \tfrac{2k}{2n} \leqslant x < \tfrac{2(k+1)}{2n}\,. \end{gathered}$$

Sada možemo pisati

$$\mathbb{P}\left(a \leqslant \frac{L_{2n}}{2n} \leqslant b\right) = \sum_{k=na_n}^{nb_n} \mathbb{P}(L_{2n} = 2k) = \int_{a_n}^{b_n+1/n} f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Iz (2.3) slijedi da uniformno na kompaktnom skupu vrijedi

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\,,$$

pa zbog uniformne konvergencije

$$\sup_{a_n \leqslant x \leqslant b_n+1/n} f_n(x) \longrightarrow \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)\,.$$

Za $0 < a \leqslant b < 1$, po teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\int_{a_n}^{b_n+1/n} f_n(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

□

Napomena 2.1.3. *Supstitucijom $y = x^{\frac{1}{2}}$, $dy = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$ gornji integral postaje*

$$\int_a^b \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{\pi}(\arcsin(\sqrt{b}) - \arcsin(\sqrt{a}))\,.$$

Dakle, od tuda potječe naziv teorema.

Ako definiramo da je

$$\alpha_{2k,2n} = u_{2k}u_{2n-2k} = \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{2^{2n}}\,,$$

tada za slučajnu varijablu X_{2n} kažemo da ima diskretnu arkus sinus distribuciju reda n ako vrijedi

$$\mathbb{P}(X_{2n} = 2k) = \alpha_{2k,2n}, \quad za \ \ 0 \leqslant k \leqslant n\,. \tag{2.4}$$

Naime, inverz funkcije sinus nudi odličnu numeričku aproksimaciju. Distribucija je simetrična u smislu da je $\alpha_{2k,2n} = \alpha_{2n-2k,2n}$. Za $2n = 2$ vrijednosti diskretne arkus sinus distribucije iznose $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$, a za distribuciju reda 10 dane su u Tablici 2.1. Uočimo da se najmanja vjerojatnost postiže za središnji izraz. Dakle, najmanja je vjerojatnost da se posljednje izjednačenje dogodi na polovici promatranog vremenskog intervala.

k	0,10	1,9	2,8	3,7	4,6	5
$\alpha_{2k,20}$	0.1762	0.0927	0.0736	0.0655	0.0617	0.0606

Tablica 2.1: Vrijednosti diskretne arkus sinus distribucije reda 10

Simetrija granične distribucije povlači

$$\mathbb{P}\left(\frac{L_{2n}}{2n} \leqslant \frac{1}{2}\right) \longrightarrow \frac{1}{2}\,.$$

U terminima kockarstva, ako se dvoje ljudi kladi u 1 kn na bacanje novčića svaki dan tokom godine, tada s vjerojatnošću 1/2, jedan od igrača će biti u vodstvu od 1. srpnja sve do kraja godine.

Teorem 2.1.4 (Zakon arkus sinusa za vrijeme iznad 0)**.** *Neka π_{2n} označava broj segmenata $(k-1, S_{k-1}) \longrightarrow (k, S_k)$ koji leže iznad x-osi u šetnji duljine $2n$ (tj. u poluravnini $\{(x,y) : y \geqslant 0\}$). Tada vrijedi*

$$\mathbb{P}(\pi_{2n} = 2k) = u_{2k}u_{2n-2k}\,,$$

te za $0 < a < b < 1$

$$\mathbb{P}\left(a \leqslant \frac{\pi_{2n}}{2n} \leqslant b\right) \longrightarrow \int_a^b \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x,\ kad\ n \longrightarrow \infty.$$

Napomena 2.1.5. *Budući da je $\pi_{2n} =^d L_{2n}$, druga tvrdnja slijedi iz dokaza Teorema 2.1.2. Bitno je uočiti da granična gustoća $\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$ ima minimum u $x = \frac{1}{2}$, i teži u $+\infty$ kad $x \longrightarrow 0$ ili 1. Dakle, jednaka raspodjela koraka između pozitivne i negativne strane je najmanje vjerojatna, dok potpuno jednostrana raspodjela ima najveću vjerojatnost.*

Dokaz. Neka je $\beta_{2k,2n}$ tražena vjerojatnost. Treba pokazati da je

$$\beta_{2k,2\nu} = u_{2k}u_{2\nu-2k}. \tag{2.5}$$

Iz (1.7) slijedi da je

$$\mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, ..., S_{2n} \geqslant 0) = u_{2n}$$

što povlači da je $\beta_{2\nu,2\nu} = u_{2\nu}$, te zbog simetrije i $\beta_{0,2\nu} = u_{2\nu}$. Preostaje tvrdnju (2.5) dokazati za $1 \leqslant k \leqslant \nu - 1$.

Pretpostavimo da je točno $2k$ od $2n$ vremenskih trenutaka šetnja iznad x-osi, za $1 \leqslant k \leqslant \nu - 1$. U tom slučaju prvi povratak u ishodište mora se dogoditi u nekom trenutku $2r < 2n$, te su moguća dva slučaja. Prvo, $2r$ vremenskih jedinica do prvog povratka u ishodište može provesti na pozitivnoj strani. U tom slučaju $r \leqslant k \leqslant n-1$ i dio puta poslije točke $(2r, 0)$ ima točno $2k-2r$ dijelova iznad x-osi. Očito je broj takvih putova jednak

$$\frac{1}{2}2^{2r}f_{2r}2^{2n-2r}\beta_{2k-2r,2n-2r}.$$

Druga mogućnost da $2r$ vremenskih trenutaka do povratka u ishodište provede na negativnoj strani. U tom slučaju, nakon točke $(2r, 0)$ postoji točno $2k$ dijelova iznad x-osi, kad je $n-r \geqslant k$. Broj takvih putova jednak je

$$\frac{1}{2}2^{2r}f_{2r}2^{2n-2r}\beta_{2k,2n-2r}.$$

Dakle, za $1 \leqslant k \leqslant n-1$

$$\beta_{2k,2n} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k} f_{2r}\beta_{2k-2r,2n-2r} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-k} f_{2r}\beta_{2k,2n-2r}.$$

Dalje nastavljamo indukcijom. Gornja tvrdnja je trivijalno ispunjena za $v = 1$. Pretpostavimo da je istinita za $v \leqslant n-1$. Tada je

$$\beta_{2k,2n} = \frac{1}{2}u_{2n-2k}\sum_{r=1}^{k} f_{2r}u_{2k-2r} + \frac{1}{2}u_{2k}\sum_{r=1}^{n-k} f_{2r}u_{2n-2k-2r}.$$

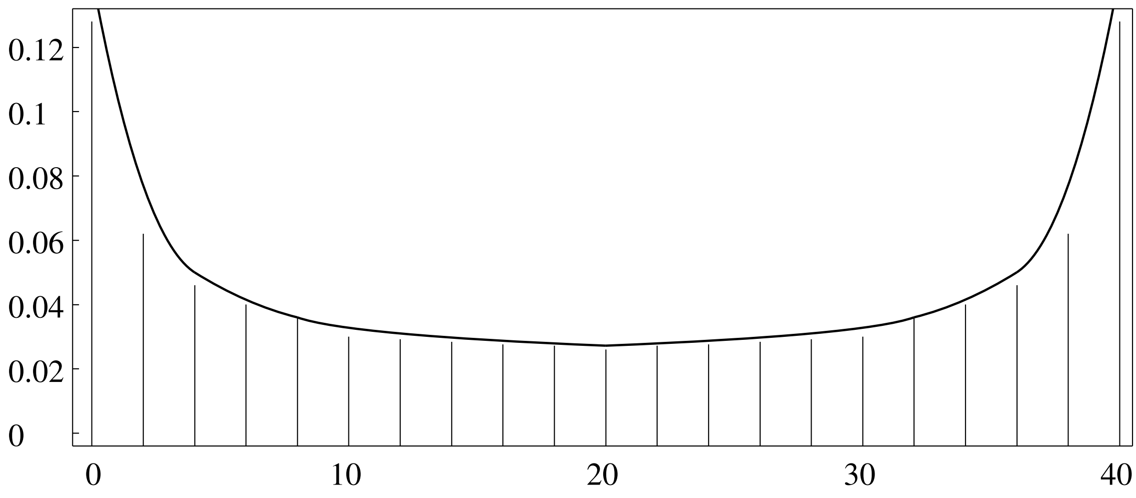
Iz Teorema 1.2.1 slijedi da je prva suma jednaka u_{2k},a druga u_{2n-2k}, čime je dokazana tvrdnja (2.5). Dakle, tvrdnja posebno vrijedi i za $v = n$.

□

Vjerojatnosti $\beta_{2k,2n}$ možemo interpretirati u terminima igre s dva igrača. Igrač A je u vodstvu u trenutku n ukoliko je slučajna šetnja iznad x-osi u tom trenutku, ili ako je slučajna šetnja na x-osi u trenutku n, ali i iznad x-osi u trenutku $n-1$. U trenutku 0 niti jedan igrač nije u vodstvu. Pitamo se koji je najvjerojatniji broj trenutaka u kojima je igrač A u vodstvu, u igri duljine $2n$.

Korolar 2.1.6. *Ako Luka i Borna igraju igru Pismo ili glava $2n$ puta, vjerojatnost da će Luka biti u vodstvu točno $2k$ puta jednaka je $u_{2k}u_{2n-2k}$.*

Pretpostavimo da se svaka igra sastoji od 40 bacanja novčića. Distribucija broja trenutaka u kojima je Luka u vodstvu, zajedno s funkcijom gustoće arkus sinusa prikazana je na Slici 2.1



Slika 2.1: Vjerojatnosti vremena vodstva

Teorem 2.1.7 (Zakon arkus sinusa za prvi posjet završnoj točki)**.** *Neka je J slučajna varijabla koja za danu slučajnu šetnju duljine $2n$ daje najmanji indeks j takav da je $S_j = S_{2n}$. Neka je $\gamma_{2k,2n}$ vjerojatnost da je $J = 2k$. Tada imamo*

$$\mathbb{P}(J = 2k) = \gamma_{2k,2n} = u_{2k}u_{2n-2k},$$

te za $0 < a < b < 1$

$$\mathbb{P}\left(a \leqslant \frac{J}{2n} \leqslant b\right) \longrightarrow \int_a^b \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x, \textit{ kad } n \longrightarrow \infty.$$

Dokaz. Kao i u Teoremu 2.1.4 dovoljno je pokazati da vrijedi prva tvrdnja teorema. Neka je odabran proizvoljan put duljine $2n$. Pomoću dualne šetnje u Primjeru 1.3.1 vidjeli smo da je vjerojatnost događaja da je S_{2n} pozitivan i da niti jedan u nizu od $S_0, S_1, ..., S_{2n-1}$ nije jednak S_{2n} (to jest svi su manji od S_{2n}) jednaka $\frac{1}{2}u_{2n}$. Također, zbog simetrije isto vrijedi i kada je S_{2n} negativan. Dakle, vjerojatnost da vrijednost S_{2n} nije postignuta do trenutka $2n$ jednaka je u_{2n}. S druge strane, po definiciji $u_{2n} = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$, to jest vjerojatnost da je završna točka posjećena već u trenutku 0 jer je $S_0 = 0$.

Razmotrimo sad općenitiji slučaj. Promatramo događaj da se prvi posjet završnoj točki dogodio u trenutku $2k$, to jest $J = 2k$. Tada je

$$S_{2k} = S_{2n},\ S_j \neq S_{2n},\ \text{ za } j < 2k.$$

Po definiciji dualne šetnje iz (1.12)

$$S^*_{2n-2k} = S_{2n} - S_{2n-(2n-2k)} = S_{2n} - S_{2k} = 0.$$

Za $j < 2k$ vrijedi da je $S_{2n} - S_j \neq 0$. Uz supstituciju $l = 2n - j$ slijedi da je $S_{2n} - S_{2n-l} \neq 0$, za $l > 2n - 2k$, to jest

$$S_l^* = S_{2n} - S_{2n-l} \neq 0, \quad \text{za} \quad l > 2n - 2k.$$

Događaj da je $S_{2n-2k}^* = 0$ i $S_l^* \neq 0$, za $l > 2n - 2k$ znači da se zadnji posjet ishodištu dogodio u trenutku $2n - 2k$. To smo označavali kao $L_{2n} = 2n - 2k$. Događaj da se prvi posjet završnoj točki dogodi u trenutku $2k$ i događaj da se posljednji posjet ishodištu dogodi u trenutku $2n - 2k$ su dualni pa imaju jednake vjerojatnosti,

$$\mathbb{P}(J = 2k) = \mathbb{P}(L_{2n} = 2n - 2k) = u_{2n-2k}u_{2k} = \gamma_{2k,2n}.$$

□

Još jedna posljedica principa dualnosti je vezana uz vjerojatnosnu distribuciju trenutka kada niz $S_0, S_1, ..., S_n$ postiže maksimalnu vrijednost. Maksimalna vrijednost može se postići više puta, pa gledamo kada je postignuta prvi put.

Indeks prvog maksimuma je indeks k takav da je

$$S_k > S_0, ..., S_k > S_{k-1}, \tag{2.6}$$

$$S_k \geqslant S_{k+1}, ..., S_k \geqslant S_n. \tag{2.7}$$

Događaj (2.6) i (2.7) će se sigurno dogoditi za $0 \leqslant k \leqslant n$ pa definiramo slučajnu varijablu K_n kao indeks prvog maksimuma. Događaj prvog maksimuma zahtijeva istovremenu realizaciju dva događaja

$$\{S_k > S_0, ..., S_k > S_{k-1}\} \text{ i } \{S_{k+1} - S_k \leqslant 0, ..., S_n - S_k \leqslant 0\}.$$

Te događaje možemo zapisati i kao

$$\{S_k > S_0, ..., S_k > S_{k-1}\} = \{X_1 + ... + X_k > 0, ..., X_k > 0\},$$

$$\{S_{k+1} - S_k \leqslant 0, ..., S_n - S_k \leqslant 0\} = \{-X_{k+1} \geqslant 0, ..., -X_{k+1} - ... - Xn \geqslant 0\}.$$

Prvi uključuje samo $X_1, ..., X_k$, a drugi $X_{k+1}, ..., X_n$, te su zbog toga ta dva događaja nezavisna.

Označimo

$$p_n = \mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, ..., S_n > 0),$$

$$q_n = \mathbb{P}(S_1 \leqslant 0, S_2 \leqslant 0, ..., S_n \leqslant 0).$$

Lema 2.1.8. *Za svaki* $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\mathbb{P}(K_n = k) = p_k q_{n-k}.$$

Dokaz. Primjenom dualnosti slijedi da je

$$\{S_k > S_0, \ldots, S_k > S_{k-1}\} = \{S_1^* > 0, \ldots, S_k^* > 0\}.$$

Nadalje, događaj

$$\{S_{k+1} \leqslant S_k, \ldots, S_n \leqslant S_k\} = \{X_{k+1} \leqslant 0, \ldots, X_{k+1} + \ldots + X_n \leqslant 0\} = \{S'_1 \leqslant 0, \ldots, S'_{n-k} \leqslant 0\}.$$

Zbog nezavisnosti slijedi da je

$$\mathbb{P}(K_n = k) = \mathbb{P}(S_k > S_0, \ldots, S_k > S_{k-1})\mathbb{P}(S_{k+1} \leqslant S_k, \ldots, S_n \leqslant S_k) = p_k q_{n-k}.$$

□

Pretpostavimo radi jednostavnosti da je duljina šetnje parna, to jest $2n$. Neka je k indeks prvog maksimuma, tada je $k = 2r$ ili $k = 2r + 1$. Iz Primjera 1.3.1 slijedi da je vjerojatnost događaja (2.6) jednaka $\frac{1}{2}u_{2r}$, to jest $p_k = \frac{1}{2}u_{2r}$, za $r \neq 0$. Događaj (2.7) ekvivalentan je događaju da su na putu duljine $2n-k$ svi vrhovi iznad x-osi. Kao posljedicu Leme 1.2.2 pokazali smo da je vjerojatnost tog događaja jednaka u_{2n-2r}. Dakle, za $0 < k < 2n$ vjerojatnost da se u nizu $S_0, S_1, ..., S_{2n}$ prvi maksimum dogodio u trenutku $k = 2r$ ili $k = 2r + 1$ je $\frac{1}{2}u_{2r}u_{2n-2r}$. Za $k = 0$ ili $k = 2n$ vjerojatnosti su redom u_{2n} i $\frac{1}{2}u_{2n}$. Dakle, pogodnim sparivanjem parnih i neparnih indeksa pozicije prvog maksimuma dobivamo diskretnu arkus sinus distribuciju.

Korolar 2.1.9 (Zakon arkus sinusa za indeks prvog maksimuma)**.** *Za* $0 < a < b < 1$,

$$\mathbb{P}\left(a \leqslant \frac{K_n}{n} \leqslant b\right) \longrightarrow \int_a^b \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x, \text{ kad } n \longrightarrow \infty.$$

2.2 Zakoni arkus sinusa za općenite slučajne šetnje

Prijašnji teoremi oslanjali su se na posebna svojstva jednostavnih simetričnih šetnji. Postoji veoma usko povezan rezultat (E. Sparre-Andersen) koji vrijedi za općenitije slučajne šetnje.

U nastavku ćemo uz poglavlje 4 knjige "Probability: Theory and Examples" Ricka Durretta[2] slijedit i poglavlje 12 knjige "An Introduction to Probability Theory and Its Application" Wiliama Fellera[4].

Teorem 2.2.1 (Zakon arkus sinusa za vrijeme iznad 0)**.** *Neka je* $\nu_n = |\{k : 1 \leqslant k \leqslant n, S_k > 0\}|$ *broj točaka iznad x-osi. Tada vrijedi:*

i) $\mathbb{P}(\nu_n = k) = \mathbb{P}(\nu_k = k)\mathbb{P}(\nu_{n-k} = 0)$

ii) Ako je distribucija od X_1 *simetrična i* $\mathbb{P}(S_m = 0) = 0$*, za svaki* $m \geqslant 1$*, tada*

$$\mathbb{P}(\nu_n = k) = u_{2k}u_{2n-2k}.$$

iii) Ako vrijedi ii), tada za $0 < a < b < 1$*,*

$$\mathbb{P}\left(a \leqslant \frac{\nu_n}{n} \leqslant b\right) \longrightarrow \int_a^b \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x, \text{ kad } n \longrightarrow \infty.$$

Napomena 2.2.2. *Uočimo da uvjet u ii) isključuje jednostavne slučajne šetnje*

Dokaz. Uočimo, iii) je direktna posljedica od ii) analogno kao u Teoremu 2.1.2.

Dokazujemo da ii) slijedi iz i) indukcijom. Za $n = 1$, koristeći pretpostavku da je $\mathbb{P}(S_m = 0) = 0$, za svaki $m \geqslant 0$ i simetričnost distribucije slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\nu_1 = 0) &= \mathbb{P}(S_1 \leqslant 0) \\
&= \mathbb{P}(S_1 < 0) + \mathbb{P}(S_1 = 0) \\
&= \mathbb{P}(S_1 < 0) \\
&= \mathbb{P}(X_1 < 0) \\
&= \frac{1}{2} \\
&= u_0 u_2.
\end{aligned}$$

Neka je $n > 1$, $1 \leqslant k < n$. Pretpostavka indukcije glasi

$$\mathbb{P}(\nu_m = k) = u_{2k}u_{2m-2k}, \text{ za } m < n.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\nu_n = k) &= \mathbb{P}(\nu_k = k)\mathbb{P}(\nu_{n-k} = 0) \\
&= (u_{2k}u_0)(u_0u_{2n-2k}) \\
&= u_{2k}u_{2n-2k}.
\end{aligned}$$

U prvoj jednakosti iskoristili smo pretpostavku i), dok smo u drugoj primijenili pretpostavku indukcije na k i $n-k$. Preostaje nam dokazati tvrdnju u slučaju kada je $k = 0$ i $k = n$. Iz Leme 2.1.1 slijedi da je $\mathbb{P}(L_{2n} = 2k) = u_{2k}u_{2n-2k}$, pa je

$$\sum_{k=0}^{n} u_{2k}u_{2n-2k} = 1.$$

Također znamo da je

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\nu_n = k) = 1,$$

te da je $\mathbb{P}(\nu_n = 0) = \mathbb{P}(\nu_n = n)$.

Dakle, slijedi

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\nu_n = k) &= \sum_{k=0}^{n} u_{2k}u_{2n-2k}, \\ \mathbb{P}(\nu_n = 0) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(\nu_n = k) + \mathbb{P}(\nu_n = n) &= u_0 u_{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} u_{2k}u_{2n-2k} + u_{2n}u_0. \end{aligned}$$

Pokazali smo da su $\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(\nu_n = k)$ i $\sum_{k=1}^{n-1} u_{2k}u_{2n-2k}$ jednake, pa slijedi

$$\mathbb{P}(\nu_n = 0) = \mathbb{P}(\nu_n = n) = u_0 u_{2n}.$$

Sada dokazujemo da vrijedi i). Za dokaz su nam potrebne dodatne definicije i tvrdnje. Uvedimo oznake

$$\begin{aligned} \nu'_n &= |\{k : 1 \leqslant k \leqslant n, S_k \leqslant 0\}| = n - \nu_n, \\ M_n &= \max_{0 \leqslant j \leqslant n} S_j, \\ l_n &= \min\{j : 0 \leqslant j \leqslant n, S_j = M_n\}, \\ M'_n &= \min_{0 \leqslant j \leqslant n} S_j, \\ l'_n &= \max\{j : 0 \leqslant j \leqslant n, S_j = M'_n\}. \end{aligned}$$

Lema 2.2.3. *Distribucije od (l_n, S_n) i $(n - l'_n, S_n)$ su jednake.*

Dokaz. Neka je $S^*_k = S_k - S_{n-k}$ dualna šetnja. Tada znamo da $(S_k, 0 \leqslant k \leqslant n)$ i $(S^*_k, 0 \leqslant k \leq n)$ imaju istu distribuciju kao sume k nezavisnih, jednako distribuiranih X_i-eva. Očito je

$$\max_{0 \leqslant k \leqslant n} S^*_k = S_n - \min_{0 \leqslant k \leqslant n} S_{n-k},$$

pa su i skupovi indeksa za koje se postižu ekstremi jednaki. □

Lema 2.2.4. *Slučajni vektori (l_n, S_n) i (ν_n, S_n) imaju jednaku distribuciju i (l'_n, S_n) i (ν'_n, S_n) imaju jednaku distribuciju.*

Dokaz. Kada je $n = 1$

$$\{l_1 = 0\} = \{S_1 \leqslant 0\} = \{\nu_1 = 0\}$$

jer je $S_0 = 0$ prvi maksimum, te

$$\{l'_1 = 0\} = \{S_1 > 0\} = \{\nu'_1 = 0\}$$

jer je $S_0 = 0$ zadnji minimum.

Sada pokazujemo općeniti slučaj indukcijom. Pretpostavimo da obje tvrdnje vrijede za $n - 1$. Neka su

$$G(y) = \mathbb{P}(l_{n-1} = k, S_{n-1} \leqslant y),$$
$$H(y) = \mathbb{P}(\nu_{n-1} = k, S_{n-1} \leqslant y).$$

Na događaju $\{S_n \leqslant 0\}$ vrijedi da je $l_{n-1} = l_n$ i $\nu_{n-1} = \nu_n$. Ako je $F(y) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant y)$ tada za $x \leqslant 0$

$$\mathbb{P}(l_n = k, S_n \leqslant x) = \int F(x-y)dG(y) = \int F(x-y)dH(y) = \mathbb{P}(\nu_n = k, S_n \leqslant x). \quad (2.8)$$

Na događaju $\{S_n > 0\}$ vrijedi da je $l'_{n-1} = l'_n$ i $\nu'_{n-1} = \nu'_n$, pa na isti način, za $x \geqslant 0$

$$\mathbb{P}(l'_n = n-k, S_n > x) = \mathbb{P}(\nu'_n = n-k, S_n > x).$$

Kako (l_n, S_n) i $(n - l'_n, S_n)$ imaju istu distribuciji i $\nu'_n = n - \nu_n$ slijedi da za $x \geqslant 0$

$$\mathbb{P}(l_n = k, S_n > x) = \mathbb{P}(\nu_n = k, S_n > x). \quad (2.9)$$

Za $x = 0$, zbrajanjem jednadžbi (2.8) i (2.9) dobivamo da je

$$\mathbb{P}(l_n = k) = \mathbb{P}(\nu_n = k). \quad (2.10)$$

Ako od jednadžbe (2.10) oduzmemo (2.9) dobivamo da je za $x \geqslant 0$

$$\mathbb{P}(l_n = k, S_n \leqslant x) = \mathbb{P}(\nu_n = k, S_n \leqslant x),$$

što zajedno sa (2.8) daje

$$\mathbb{P}(l_n = k, S_n \leqslant x) = \mathbb{P}(\nu_n = k, S_n \leqslant x), \text{ za } \forall x.$$

Budući da (l_n, S_n) i $(n - l'_n, S_n)$ imaju jednaku distribuciju i $\nu'_n = n - \nu_n$ slijedi da je

$$\mathbb{P}(l'_n = n-k, S_n > x) = \mathbb{P}(\nu'_n = n-k, S_n > x), \text{ za } \forall x.$$

$\square$

Tvrdnja i) sada slijedi iz Leme 2.2.4 i jednostavne činjenice da je

$$\mathbb{P}(l_n = k) = \mathbb{P}(l_k = k)\mathbb{P}(l_{n-k} = 0).$$

Dakle, imamo da je

$$\mathbb{P}(\nu_n = k) = \mathbb{P}(l_n = k) = \mathbb{P}(l_k = k)\mathbb{P}(l_{n-k} = 0) = \mathbb{P}(\nu_k = k)\mathbb{P}(\nu_{n-k} = 0),$$

čime je gotov dokaz teorema. □

Korolar 2.2.5 (Zakon arkus sinusa za indeks prvog maksimuma)**.** *Neka je distribucija od* X_1 *simetrična i* $\mathbb{P}(S_m = 0) = 0$*, za svaki* $m \geqslant 1$*, tada*

$$\mathbb{P}(l_n = k) = u_{2k}u_{2n-2k},$$

te za $0 < a < b < 1$

$$\mathbb{P}\left(a \leqslant \frac{l_n}{n} \leqslant b\right) \longrightarrow \int_a^b \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x, \text{ kad } n \longrightarrow \infty.$$

Dokaz. Dokaz direktno slijedi primjenom prethodnog teorema. Pokazali smo da je

$$\mathbb{P}(\nu_n = k) = u_{2k}u_{2n-2k}.$$

Iz Leme 2.2.4 slijedi da je

$$\mathbb{P}(l_n = k) = \mathbb{P}(\nu_n = k),$$

čime je dokazana prva tvrdnja, a samim time i druga tvrdnja korolara. □

Korolar 2.2.6 (Zakon arkus sinusa za indeks zadnjeg minimuma)**.** *Neka je distribucija od* X_1 *simetrična i* $\mathbb{P}(S_m = 0) = 0$*, za svaki* $m \geqslant 1$*, tada*

$$\mathbb{P}(l'_n = k) = u_{2k}u_{2n-2k},$$

te za $0 < a < b < 1$

$$\mathbb{P}\left(a \leqslant \frac{l'_n}{n} \leqslant b\right) \longrightarrow \int_a^b \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x, \text{ kad } n \longrightarrow \infty.$$

Dokaz. Pokazali smo da je

$$\mathbb{P}(l_n = k) = u_{2k}u_{2n-2k}.$$

Iz Leme 2.2.3 slijedi da je

$$\mathbb{P}(l'_n = k) = \mathbb{P}(n - l'_n = n - k) = \mathbb{P}(l_n = n - k) = u_{2n-2k}u_{2k},$$

čime je dokaz gotov. □

Korolar 2.2.7. *Neka je F funkcija distribucije od X_1. Ako je F simetrična i neprekidna, tada za* $0 < a < b < 1$ *vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(a \leqslant \frac{\nu_n}{n} \leqslant b\right) \longrightarrow \int_a^b \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x, \textit{ kad } n \longrightarrow \infty.$$

Dokaz. Ako je F neprekidna, tada je i funkcija distribucije od S_n neprekidna pa posebno vrijedi da je

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = 0, \text{ za svaki } n \geqslant 1.$$

Primjenom Teorema 2.2.1 slijedi tvrdnja. □

Korolar 2.2.8. *Neka je F funkcija distribucije od X_1. Ako je F simetrična i neprekidna, tada za* $0 < a < b < 1$ *vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(a \leqslant \frac{l_n}{n} \leqslant b\right) \longrightarrow \int_a^b \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x, \textit{ kad } n \longrightarrow \infty$$

te takođjer

$$\mathbb{P}\left(a \leqslant \frac{l'_n}{n} \leqslant b\right) \longrightarrow \int_a^b \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x, \textit{ kad } n \longrightarrow \infty.$$

Dokaz. Analogno kao i u prethodnom teoremu koristimo činjenicu da je $\mathbb{P}(S_n = 0) = 0$, za svaki $n \geqslant 1$, zatim tvrdnje slijede primjenom Korolara 2.2.5 i Korolara 2.2.6. □

Poglavlje 3

Brownovo gibanje

U ovom poglavlju bavimo se Brownovim gibanjem, a pritom ćemo slijedit poglavlja 2 i 5 knjige "Brownian Motion" Petera Mörtersa i Yuvala Peresa[5] te poglavlje 8 knjige "Probability: Theory and Examples" Ricka Durretta[2].

3.1 Definicije i svojstva Brownovog gibanja

Definicija 3.1.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor. Slučajni proces* $B = (B(t), t \geqslant 0)$ *je Brownovo gibanje koje počinje u* $x \in \mathbb{R}$ *ako vrijedi:*

(i) Putovi $t \to B(t)(\omega)$ *su neprekidne funkcije sa* $\mathbb{R}_+$ *u* $\mathbb{R}$ *(za g.s.* $\omega \in \Omega$*).*

(ii) $B(0) = x$.

(iii) Za sve $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ *su prirasti*

$$B(t_1) - B(t_0), B(t_2) - B(t_1), \ldots, B(t_m) - B(t_{m-1})$$

nezavisni.

(iv) Za sve $0 \leqslant s < t$ *je prirast* $B(t) - B(s)$ *normalno distribuiran s očekivanjem nula i varijancom* $t - s$.

Kažemo da je B standardno Brownovo gibanje ako je $x = 0$.

Uočimo, ako promatramo standardno Brownovo gibanje i stavimo da je $s = 0$ u (*iv*), tada slijedi da $B(t) \sim N(0, t)$. Uvodimo oznaku za funkciju gustoće

$$p_t(0, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, \ x \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Postoji i alternativna karakterizacija standardnog Brownovog gibanja. Slučajni proces $B = (B(t), t \geqslant 0)$ je standardno Brownovo gibanje ako vrijedi:

(i') Putovi $t \to B(t)(\omega)$ su neprekidne funkcije sa $\mathbb{R}_+$ u $\mathbb{R}$ (za g.s. $\omega \in \Omega$).

(ii') $B(0) = 0$.

(iii') $B(t)$ je gaussovski proces (to jest, sve konačnodimenzionalne distribucije su normalne).

(iv') $\mathbb{E}[B(s)] = 0$ i $\mathbb{E}[B(s)B(t)] = s \wedge t$.

Pokažimo prvo da je slučajni proces koji zadovoljava svojstva $(i') - (iv')$ standardno Brownovo gibanje, to jest da tada zadovoljava svojstva (iii) i (iv). Neka je $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$. Tada po svojstvima (iii') i (iv') slijedi da je slučajni vektor $(B(t_1), B(t_2), \cdots, B(t_m))$ normalno distribuiran s očekivanjem 0 i kovarijacijskom matricom

$$\Sigma = \begin{bmatrix} t_1 & t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 & \cdots & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_m \end{bmatrix}.$$

Sada priraste $B(t_1) - B(t_0), B(t_2) - B(t_1), \ldots, B(t_m) - B(t_{m-1})$ možemo zapisati na sljedeći način

$$\begin{bmatrix} B(t_1) \\ B(t_2) - B(t_1) \\ B(t_3) - B(t_2) \\ \vdots \\ B(t_m) - B(t_{m-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B(t_1) \\ B(t_2) \\ B(t_3) \\ \vdots \\ B(t_m) \end{bmatrix}.$$

Slijedi da je $(B(t_1)-B(t_0), B(t_2)-B(t_1), \ldots, B(t_m)-B(t_{m-1}))$ normalno distribuiran s očekivanjem 0 i kovarijacijskom matricom $\Sigma' = A\Sigma A^\tau$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Dakle,

$$\Sigma' = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 - t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & t_3 - t_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_m - t_{m-1} \end{bmatrix}.$$

Vidimo da je korelacija između komponenti normalnog slučajnog vektora $(B(t_1)-B(t_0), B(t_2)-B(t_1), \ldots, B(t_m)-B(t_{m-1}))$ jednaka 0 pa slijedi da su prirasti nezavisni te da $B(t_{i+1})-B(t_i) \sim N(0, t_{i+1}-t_i)$, za $i = 0, 1, \ldots, m-1$.

Obratno, neka je B standardno Brownovo gibanje. Pokazujemo da tada zadovoljava i svojstva (iii') i (iv'). Za dane $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ zanima nas distribucija slučajnog vektora $(B(t_1), \ldots, B(t_m))$. Za slučajni vektor $(B(t_1), B(t_2)-B(t_1), \ldots, B(t_m)-B(t_{m-1}))$ s nezavisnim i normalnim komponentama vrijedi

$$(B(t_1), B(t_2)-B(t_1), \ldots, B(t_m)-B(t_{m-1})) \sim N(0, \Sigma),$$

gdje je

$$\Sigma = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2-t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & t_3-t_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_m-t_{m-1} \end{bmatrix}.$$

Nadalje,

$$\begin{bmatrix} B(t_1) \\ B(t_2) \\ B(t_3) \\ \vdots \\ B(t_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B(t_1) \\ B(t_2)-B(t_1) \\ B(t_3)-B(t_2) \\ \vdots \\ B(t_m)-B(t_{m-1}) \end{bmatrix}$$

pa slijedi da je $(B(t_1), \ldots, B(t_m))$ normalno distribuiran s očekivanjem 0 i kovarijacijskom matricom Σ'. Neka je $0 \leqslant s < t$. Budući da je $\mathbb{E}[B(s)] = 0$,

$$\begin{aligned} Cov(B(s), B(t)) &= \mathbb{B}[B(s)B(t)] \\ &= \mathbb{E}[B(s)(B(s) + B(t) - B(s))] \\ &= \mathbb{E}[B(s)^2] + \mathbb{E}[B(s)(B(t) - B(s))] \\ &= \mathbb{E}[B(s)^2] + \mathbb{E}[B(s)]\mathbb{E}[B(t) - B(s)] \\ &= s = s \wedge t. \end{aligned}$$

Dakle, kovarijacijska matrica je

$$\Sigma' = \begin{bmatrix} t_1 & t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 & \cdots & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_m \end{bmatrix}.$$

Lema 3.1.2. *Neka je $B = (B(s), s \geqslant 0)$ Brownovo gibanje i $t > 0$. Tada su procesi $X = (X(s), s \geqslant 0)$ i $Y = (Y(s), 0 \leqslant s \leqslant t)$ definirani sa*

$$X(s) = B(t+s) - B(t), \tag{3.2}$$

$$Y(s) = B(t-s) - B(t) \tag{3.3}$$

standardna Brownova gibanja. Nadalje, ako je B standardno Brownovo gibanje i $c > 0$ tada je slučajni proces $Z = (Z(s), s \geqslant 0)$ definiran kao

$$Z(s) = \frac{B(cs)}{\sqrt{c}} \tag{3.4}$$

također standardno Brownovo gibanje.

Dokaz. Provjeravamo svojstva $(i) - (iv)$ za slučajni proces X. Očito vrijedi da su putovi $t \to X(t)(\omega)$ neprekidni g.s. te je $X(0) = B(t) - B(t) = 0$. Neka su $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ proizvoljni. Tada priraste

$$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_m) - X(t_{m-1})$$

možemo zapisati kao

$$B(t+t_1) - B(t+t_0), B(t+t_2) - B(t+t_1), \ldots, B(t+t_m) - B(t+t_{m-1}).$$

Stavimo da je $s_i = t + t_i$ za $i = 0, \ldots, m$. Tada je $t = s_0 < s_1 < \cdots < s_m$ i prirasti

$$B(s_1) - B(s_0), B(s_2) - B(s_1), \ldots, B(s_m) - B(s_{m-1})$$

su nezavisni. Neka je $0 \leqslant v < u$,

$$\begin{aligned} X(u) - X(v) &= B(t+u) - B(t) - B(t+v) + B(t) = B(t+u) - B(t+v) \\ &\sim N(0, t+u-t-v) = N(0, u-v). \end{aligned}$$

Dakle, X je standardno Brownovo gibanje.

Da pokažemo da je slučajni proces Y standardno Brownovo gibanje koristimo alternativnu karakterizaciju $(i') - (iv')$. Putovi $t \to Y(t)(\omega)$ su neprekidni g.s. te je $Y(0) = B(t) - B(t) = 0$. Radi jednostavnosti promatramo dva vremena $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant t$,

$$\begin{bmatrix} Y(t_1) \\ Y(t_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B(t-t_1) - B(t) \\ B(t-t_2) - B(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B(t-t_2) \\ B(t-t_1) \\ B(t) \end{bmatrix}.$$

Kako je slučajni vektor $(B(t-t_2), B(t-t_1), B(t))$ normalan slijedi da je i $(Y(t_1), Y(t_2))$ normalan slučajni vektor. Neka je $0 \leqslant s \leqslant t$,

$$\mathbb{E}[Y(s)] = \mathbb{E}[B(t-s) - B(t)] = \mathbb{E}[B(t-s)] - \mathbb{E}[B(t)] = 0 - 0 = 0.$$

Neka su $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y(t_1)Y(t_2)] &= \mathbb{E}[(B(t-t_1) - B(t))(B(t-t_2) - B(t))] \\
&= \mathbb{E}[B(t-t_1)B(t-t_2)] - \mathbb{E}[B(t)B(t-t_1)] - \mathbb{E}[B(t)B(t-t_2)] + \mathbb{E}[B(t)^2] \\
&= (t-t_1) \wedge (t-t_2) - t \wedge (t-t1) - t \wedge (t-t_2) + t \\
&= t - t_2 - (t-t_1) - (t-t_2) + t \\
&= t_1.
\end{aligned}$$

Dakle, i Y je standardno Brownovo gibanje.

Za slučajni proces Z također koristimo alternativnu karakterizaciju $(i') - (iv')$. Putovi $t \to Z(t)(\omega)$ su neprekidni g.s. Nadalje, $Z(0) = \frac{B(0)}{\sqrt{c}} = 0$. Neka je $0 \leqslant s < t$,

$$\begin{bmatrix} Z(s) \\ Z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{B(cs)}{\sqrt{c}} \\ \frac{B(ct)}{\sqrt{c}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{c}} \begin{bmatrix} B(cs) \\ B(ct) \end{bmatrix}.$$

Kako je slučajni vektor $(B(cs), B(ct))$ normalan slijedi da je i $(Z(s), Z(t))$ normalan slučajni vektor. Kako je očekivanje od $B(t)$ jednako 0 slijedi,

$$\mathbb{E}[Z(s)] = \mathbb{E}\left[\frac{B(cs)}{\sqrt{c}}\right] = \frac{1}{\sqrt{c}}\mathbb{E}[B(cs)] = 0.$$

Također,

$$\mathbb{E}[Z(s)Z(t)] = \mathbb{E}\left[\frac{B(cs)}{\sqrt{c}}\frac{B(ct)}{\sqrt{c}}\right] = \frac{1}{c}\mathbb{E}[B(cs)B(ct)] = \frac{1}{c}cs = s, \tag{3.5}$$

pa slijedi da je i Z standardno Brownovo gibanje. □

3.2 Markovljevo svojstvo i princip refleksije

Neka je $(X(t) : t \geqslant 0)$ stohastički proces. Intuitivno, Markovljevo svojstvo kaže da ako znamo proces $(X(t) : t \geqslant 0)$ na intervalu $[0, s]$, za predikciju budućnosti $(X(t) : t \geqslant s)$ to je jednako korisno kao i da znamo samo završnu točku $X(s)$.

Teorem 3.2.1 (Markovljevo svojstvo)**.** *Pretpostavimo da je $(B(t) : t \geqslant 0)$ Brownovo gibanje koje počinje u točki $x \in \mathbb{R}$. Neka je $s > 0$, tada je proces $(B(t+s) - B(s) : t \geqslant 0)$ ponovo Brownovo gibanje koje počinje u ishodištu i nezavisno je od procesa $(B(t) : 0 \leqslant t \leqslant s)$.*

Dokaz. U Lemi 3.1.2 pokazali smo da je slučajni proces definiran sa (3.2) standardno Brownovo gibanje, dok svojstvo nezavisnosti slijedi direktno iz nezavisnosti prirasta Brownovog gibanja. $\square$

Za Brownovo gibanje $(B(t) : t \geqslant 0)$ možemo definirati filtraciju $(\mathcal{F}^0(t) : t \geqslant 0)$ kao

$$\mathcal{F}^0(t) = \sigma(B(s) : 0 \leqslant s \leqslant t), \tag{3.6}$$

to jest, $\mathcal{F}^0(t)$ je σ-algebra generirana slučajnim varijablama $B(s)$, za $0 \leqslant s \leqslant t$. Uz ovakvu definiciju Brownovo gibanje je očito adaptirano u odnosu na tu filtraciju. Po Teoremu 3.2.1 proces $(B(t + s) - B(s) : t \geqslant 0)$ je nezavisan od $\mathcal{F}^0(s)$. Nadalje, definiramo i σ-algebru $\mathcal{F}^+(s)$ kao

$$\mathcal{F}^+(s) = \bigcap_{t>s} \mathcal{F}^0(t). \tag{3.7}$$

Očito je familija $(\mathcal{F}^+(t) : t \geqslant 0)$ ponovo filtracija i $\mathcal{F}^+(s) \supset \mathcal{F}^0(s)$.

Lema 3.2.2. *Za svaki $s > 0$ proces $(B(t + s) - B(s) : t \geqslant 0)$ je nezavisan od σ-algebre $\mathcal{F}^+(s)$.*

Dokaz. Zbog g.s neprekidnosti vrijedi

$$B(t + s) - B(s) = \lim_{n \longrightarrow \infty} B(s_n + t) - B(s_n)$$

za strogo padajući niz $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ koji konvergira prema s. Po Teoremu 3.2.1 za sve $t_1, t_2, \ldots, t_m \geqslant 0$ vektor

$$(B(t_1 + s) - B(s), \ldots, B(t_m + s) - B(s)) = \lim_{j \uparrow \infty} (B(t_1 + s_j) - B(s_j), \ldots, B(t_m + s_j) - B(s_j))$$

je nezavisan od $\mathcal{F}^+(s)$, pa tako i sam proces $(B(t + s) - B(s) : t \geqslant 0)$. $\square$

Definicija 3.2.3. *Slučajna varijabla $T : \Omega \to \mathbb{R}_+$ zove se vrijeme zaustavljanja, uz filtraciju $(\mathcal{F}(t) : t \geqslant 0)$, ako za sve $t \geqslant 0$ vrijedi*

$$\{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}(t).$$

Intuitivno, T je vrijeme zaustavljanja ako promatrajući slučajni proces do determinističkog vremena $t \geqslant 0$ možemo reći da li se slučajno vrijeme T dogodilo do trenutka t ili ne.

Za svako vrijeme zaustavljanja T definiramo σ-algebru

$$\mathcal{F}^+(T) = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}^+(t), \text{ za svaki } t \geqslant 0\}. \tag{3.8}$$

Očito slučajni put $(B(t) : t \leqslant T)$ je $\mathcal{F}^+(T)$ izmjeriv.

Teorem 3.2.4 (Jako Markovljevo svojstvo)**.** *Za svako gotovo sigurno konačno vrijeme zaustavljanja T, proces*

$$(B(T+t) - B(T) : t \geqslant 0)$$

je standardno Brownovo gibanje nezavisno od $\mathcal{F}^+(T)$.

Napomena 3.2.5. *Jako Markovljevo svojstvo može se iskazati i na alternativan način. Za svaku ograničenu izmjerivu funkciju $f : C([0,\infty\rangle, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ i $x \in \mathbb{R}$ gotovo sigurno vrijedi*

$$\mathbb{E}_x[f(\{B(T+t) : t \geqslant 0\})|\mathcal{F}^+(T)] = \mathbb{E}_{B(T)}[f(\{B'(t) : t \geqslant 0\})]$$

gdje se očekivanje desne strane računa u odnosu na Brownovo gibanje $(B'(t) : t \geqslant 0)$ koje počinje u fiksnoj točki $B(T)$.

Dokaz. Prvo dokazujemo tvrdnju za vrijeme zaustavljanja T_n koje diskretno aproksimira T odozgo, definirano sa

$$T_n = (m+1)2^{-n} \text{ ako } m2^{-n} \leqslant T < (m+1)2^{-n}.$$

Neka je $B_k = (B_k(t) : t \geqslant 0)$ Brownovo gibanje definirano sa

$$B_k(t) = B\left(t + \frac{k}{2^n}\right) - B\left(\frac{k}{2^n}\right),$$

te $(B_*(t) : t \geqslant 0)$ definirano sa

$$B_*(t) = B(t + T_n) - B(T_n).$$

Pretpostavimo da je $E \in \mathcal{F}^+(T_n)$. Tada za svaki događaj $\{B_* \in A\}$ imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{B_* \in A\} \cap E) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{B_k \in A\} \cap E \cap \{T_n = k2^{-n}\}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(B_k \in A)\mathbb{P}(E \cap \{T_n = k2^{-n}\})\end{aligned}$$

koristeći da je $\{B_k \in A\}$ nezavisno od $E \cap \{T_n = k2^{-n}\} \in \mathcal{F}^+(k2^{-n})$ po Lemi 3.2.2. Nadalje, po Markovljevom svojstvu slijedi da

$$\mathbb{P}(B_k \in A) = \mathbb{P}(B \in A),$$

to jest vjerojatnost gornjeg događaja ne ovisi o k. Dakle,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(B_k \in A)\mathbb{P}(E \cap \{T_n = k2^{-n}\}) &= \mathbb{P}(B \in A) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(E \cap \{T_n = k2^{-n}\}) \\ &= \mathbb{P}(B \in A)\mathbb{P}(E)\end{aligned}$$

To pokazuje da je B_* Brownovo gibanje i nezavisno je od E, to jest $\mathcal{F}^+(T_n)$.

Preostaje generalizirati tu tvrdnju za općenito vrijeme zaustavljanja T. Kako $T_n \downarrow T$ slijedi da je

$$(B(s+T_n) - B(T_n) : s \geqslant 0)$$

Brownovo gibanje nezavisno od $\mathcal{F}^+(T_n) \supset \mathcal{F}^+(T)$. Dakle, prirasti

$$B(s+t+T) - B(t+T) = \lim_{n\to\infty} B(s+t+T_n) - B(t+T_n)$$

procesa $(B(r+T) - B(T) : r \geqslant 0)$ su nezavisni i normalno distribuirani s očekivanjem 0 i varijancom s. Kako je proces očito gotovo sigurno neprekidan, to je Brownovo gibanje. Nadalje, svi prirasti

$$B(s+t+T) - B(t+T) = \lim_{n\to\infty} B(s+t+T_n) - B(t+T_n),$$

pa tako i sam proces, su nezavisni od $\mathcal{F}^+(T)$. □

Postoje mnoge primjene jakog Markovljevog svojstva, te jedna posebno zanimljiva posljedica tog svojstva je princip refleksije. Pojednostavljeno, princip refleksije kaže da je Brownovo gibanje reflektirano u vremenu zaustavljanja T ponovo Brownovo gibanje.

Lema 3.2.6 (Princip refleksije)**.** *Neka je T vrijeme zaustavljanja i $(B(t) : t \geqslant 0)$ standardno Brownovo gibanje. Tada je slučajni proces $(B^*(t) : t \geqslant 0)$ definiran sa*

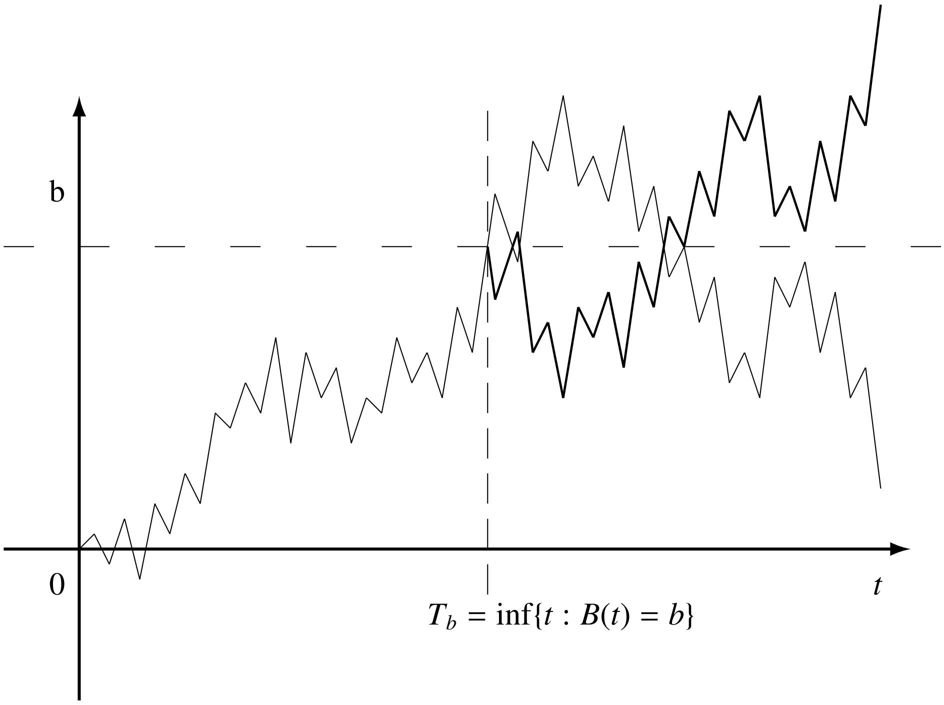
$$B^*(t) = B(t)\mathbb{1}_{\{t\leqslant T\}} + (2B(T) - B(t))\mathbb{1}_{\{t>T\}} \tag{3.9}$$

također standardno Brownovo gibanje.

Dokaz. Ako je T beskonačno tvrdnja očito vrijedi. Ako je T konačno, po jakom Markovljevom svojstvu oba procesa

$$(B(t+T) - B(T) : t \geqslant 0) \text{ i } (-(B(t+T) - B(T)) : t \geqslant 0) \tag{3.10}$$

su Brownova gibanja i nezavisna od početnog dijela puta $(B(t) : 0 \leqslant t \leqslant T)$. Proces koji nastaje lijepljenjem prvog puta u (3.10) na $(B(t) : 0 \leqslant t \leqslant T)$ i proces koji nastaje lijepljenjem drugog puta iz (3.10) na $(B(t) : 0 \leqslant t \leqslant T)$ imaju istu distribuciju. U prvom slučaju dobije se $(B(t) : t \geqslant 0)$, a u drugom $(B^*(t) : t \geqslant 0)$ čime je tvrdnja dokazana. □



Slika 3.1: Princip refleksije u slučaju prvog pogađanja razine b

Neka je $a > 0$, definiramo

$$T_a = \inf\{s > 0 : B_s = a\}$$

i to je vrijeme zaustavljanja. Nadalje, može se pokazati da je T_a konačno g.s. Koristeći princip refleksije izvodimo funkciju distribucije slučajne varijable T_a. Neka je $(B^*(t) : t \geqslant 0)$ definiran kao u (3.9) uz vrijeme zaustavljanja T_a. Također definiramo i slučajni proces $(M(t) : t \geqslant 0)$ kao

$$M(t) = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} B(s). \tag{3.11}$$

Neka je $t \geqslant 0$, tada je

$$\{T_a \leqslant t\} = \{M(t) \geqslant a\},$$

te

$$\begin{aligned} \{M(t) \geqslant a\} &= \{M(t) \geqslant a, B(t) > a\} \cup \{M(t) \geqslant a, B(t) \leqslant a\} \\ &= \{B(t) > a\} \cup \{M(t) \geqslant a, B(t) \leqslant a\}. \end{aligned}$$

Iz principa refleksije slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M(t) \geqslant a, B(t) \leqslant a) &= \mathbb{P}(T_a \leqslant t, B^*(t) \leqslant a) \\
&= \mathbb{P}(T_a \leqslant t, 2B(T_a) - B(t) \leqslant a) \\
&= \mathbb{P}(T_a \leqslant t, B(t) \geqslant a) \\
&= \mathbb{P}(M(t) \geqslant a, B(t) \geqslant a) \\
&= \mathbb{P}(B(t) \geqslant a) \\
&= \mathbb{P}(B(t) > a).
\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi

$$\mathbb{P}(M(t) \geqslant a) = 2\mathbb{P}(B(t) \geqslant a) = \mathbb{P}(|B(t)| \geqslant a), \tag{3.12}$$

te zbog činjenice da je $\{T_a \leqslant t\} = \{M(t) \geqslant a\}$ slijedi da je

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_a \leqslant t) &= 2\mathbb{P}(B_t \geqslant a) \\
&= 2\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Uz supstituciju

$$x = \frac{t^{\frac{1}{2}} a}{s^{\frac{1}{2}}} \Longrightarrow dx = -\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}} a}{s^{\frac{3}{2}}}$$

slijedi da je

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_a \leqslant t) &= 2\int_t^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{a^2}{2s}} \left(-\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}} a}{s^{\frac{3}{2}}}\right) \mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi s^3}} a e^{-\frac{a^2}{2s}} \,\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Dakle, dokazali smo sljedeći korolar.

Korolar 3.2.7. *Neka je $(M(t) : 0 \leqslant t \leqslant 1)$ slučajan proces definiran sa*

$$M(t) = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} B(s),$$

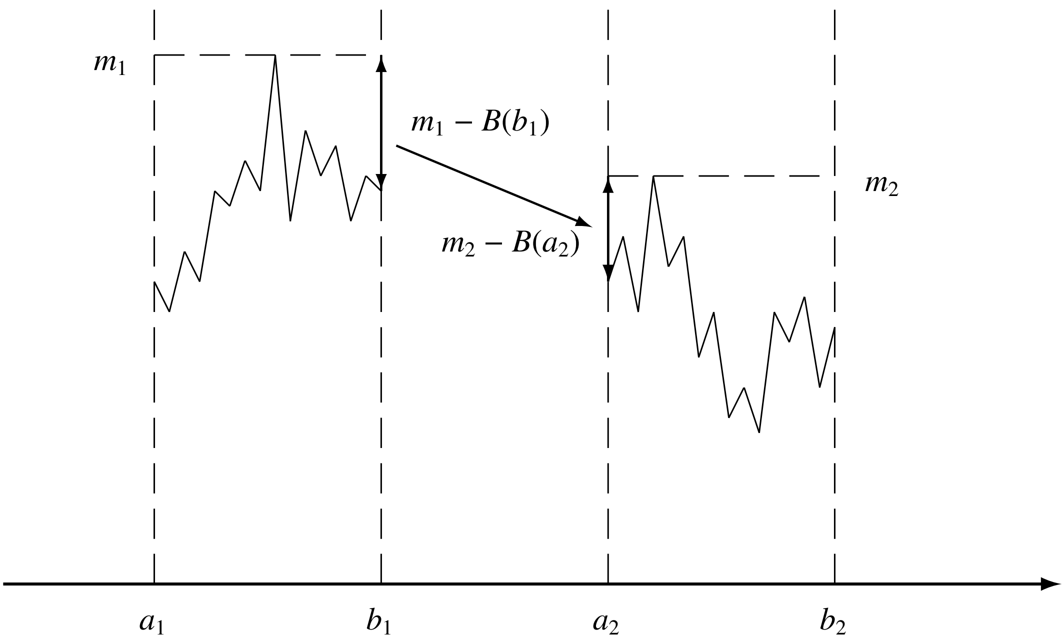
tada za fiksni $t \in [0, 1]$, $M(t)$ ima jednaku distribuciju kao i $|B(t)|$.

Neka slučajna varijabla $M^* \in [0, 1]$ zadovoljava

$$B(M^*) = \max_{s \in [0,1]} B(s).$$

U sljedećem teoremu pokazat ćemo da Brownovo gibanje ima jedinstven maksimum na intervalu $[0, 1]$ pa je slučajna varijabla M^*, koja označava trenutak postizanja maksimuma Brownovog gibanja na intervalu $[0, 1]$, dobro definirana.

Teorem 3.2.8. *Za Brownovo gibanje* $(B(t) : 0 \leqslant t \leqslant 1)$ *gotovo sigurno*
(a) Svaki lokalni maksimum je strogi lokalni maksimum.
(b) Skup vremena u kojima se postiže lokalni maksimum je prebrojiv i gust.
(c) Globalni maksimum se postiže u jedinstvenom trenutku.



Slika 3.2: Slučajne varijable $m_1 - B(b_1)$ i $m_2 - B(a_2)$ su nezavisne od $B(a_2) - B(b_1)$

Dokaz. Prvo pokazujemo da su za dana dva zatvorena nepreklapajuća vremenska intervala, to jest takva da su im interiori disjunktni, maksimumi Brownovog gibanja na njima različiti g.s. Neka su $[a_1, b_1]$ i $[a_2, b_2]$ dva fiksna intervala takva da je $b_1 \leqslant a_2$. Označimo s m_1 i m_2 maksimume Brownovog gibanja na ta dva intervala. Gotovo sigurno, standardno Brownovo gibanje prelazi x−os odmah nakon trenutka 0. Dakle, maksimum na intervalu $[0, a]$ se ne postiže u trenutku 0. Nadalje, zbog Markovljevog svojstva slijedi da se maksimum na intervalu $[a_2, b_2]$ ne postiže u točki a_2, to jest $B(a_2) < m_2$ g.s. Dakle, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je taj maksimum jednak maksimumu na intervalu $[a_2 - \frac{1}{n}, b_2]$. Zbog toga možemo pretpostaviti u daljnjem dokazu da je $b_1 < a_2$.

Primjenom Markovljevog svojstva na vrijeme b_1 vidimo da je slučajna varijabla $B(a_2) - B(b_1)$ nezavisna od $m_1 - B(b_1)$. Primjenom Markovljevog svojstva na vrijeme a_2 slijedi da je $m_2 - B(a_2)$ nezavisna od obje slučajne varijable $B(a_2) - B(b_1)$ i $m_1 - B(b_1)$. Događaj

$m_1 = m_2$ možemo zapisati kao

$$B(a_2) - B(b_1) = m_1 - B(b_1) - (m_2 - B(a_2)).$$

Uvjetovanjem na vrijednosti slučajnih varijabli $m_1 - B(b_1)$ i $m_2 - B(a_2)$, lijeva strana je neprekidna slučajna varijabla, a na desnoj strani imamo konstantu. dakle, taj događaj ima vjerojatnost 0.

(a) Po upravo dokazanom, g.s. svi nepreklapajući parovi kompaktnih intervala s racionalnim rubnim točkama imaju različite maksimume. Ako Brownovo gibanje ima lokalni maksimum koji nije strog tada postoje dva intervala takva da Brownovo gibanje na njima ima jednake maksimume, što nas dovodi do kontradikcije. Dakle, svaki lokalni maksimum je strogi lokalni maksimum.

(b) Maksimum na kompaktnom intervalu s racionalnim rubnim točkama g.s. se ne postiže u rubnim točkama. Dakle, svaki takav interval sadrži lokalni maksimum i skup vremena gdje se lokalni maksimum postiže je gust. Kako je svaki lokalni maksimum strogi, taj skup ima kardinalnost najviše kao i skup svih takvih intervala. Dakle, prebrojiv je.

(c) G.s., za svaki racionalan broj $q \in [0, 1]$ maksimumi na $[0, q]$ i $[q, 1]$ su različiti. Ako pretpostavimo da se globalni maksimum postiže u dvije točke $t_1 < t_2$ tada postoji racionalan broj $t_1 < q < t_2$ za koji su maksimumi na $[0, q]$ i $[q, 1]$ jednaki, što nas ponovo dovodi do kontradikcije. Dakle, trenutak postizanja globalnog maksimuma je jedinstven. □

Lema 3.2.9. *Neka je $(B(t) : t \geqslant 0)$ Brownovo gibanje, te definiramo*

$$\mathcal{Z}(\omega) = \{t \geqslant 0 : B(t)(\omega) = 0\}.$$

Tada je Lebesgueova mjera skupa $\mathcal{Z}(\omega)$ jednaka 0 gotovo sigurno.

Dokaz. Označimo sa $\mathcal{L}(A)$ Lebesgueovu mjeru skupa A. Dakle, treba pokazati da je

$$\mathcal{L}(\mathcal{Z}(\omega)) = 0 \text{ g.s.}$$

Neka je $t > 0$, ako je $B(0) = x$ tada $B(t) \sim N(x, t)$ uz $\mathbb{P}_x$, pa vrijedi

$$\mathbb{P}_x(t \in \mathcal{Z}) = \mathbb{P}_x(B(t) = 0) = 0,$$

to jest

$$\int \mathbb{1}_{\{t \in \mathcal{Z}(\omega)\}} \, d\mathbb{P}_x = 0.$$

Primjenom Fubinijevog teorema, dobivamo sljedeću relaciju

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathcal{L}(\mathcal{Z})) &= \int\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{t\in\mathcal{Z}(\omega)\}}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\mathbb{P}_x \\
&= \int_0^\infty\int \mathbb{1}_{\{t\in\mathcal{Z}(\omega)\}}\,\mathrm{d}\mathbb{P}_x\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}_x(B(t)=0)\mathrm{d}t \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Jer je $\mathcal{L}(\mathcal{Z}(\omega)) \geqslant 0$ i $\mathbb{E}(\mathcal{L}(\mathcal{Z})) = 0$, slijedi da je $\mathcal{L}(\mathcal{Z}) = 0$ g.s. □

3.3 Donskerov princip invarijantnosti

Ponovo promatramo slučajnu šetnju

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

te linearno interpoliramo točke između cijelih brojeva, to jest

$$S(t) = S_{\lfloor t\rfloor} + (t-\lfloor t\rfloor)(S_{\lfloor t\rfloor+1} - S_{\lfloor t\rfloor}).$$

Time smo definirali slučajnu funkciju $S \in C([0,\infty\rangle)$. Sada definiramo niz $(S_n^* : n \geqslant 1)$ slučajnih funkcija u $C([0,1])$ sa

$$S_n^*(t) = \frac{S(nt)}{\sqrt{n}}, \text{ za svaki } t\in[0,1] \tag{3.14}$$

i nazivamo je skaliranom slučajnom šetnjom.

Teorem 3.3.1 (Skorokhodov teorem)**.** *Neka je $(B(t) : t \geqslant 0)$ standardno Brownovo gibanje i X slučajna varijabla s realnim vrijednostima takva da je $\mathbb{E}[X] = 0$ i $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Tada postoji vrijeme zaustavljanja T, uz filtraciju Brownovog gibanja $\mathcal{F}^0(t)$, takvo da $B(T)$ ima istu distribuciju kao i X te je $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X^2]$.*

Primjer 3.3.2. *Pretpostavimo da X može poprimiti samo dvije vrijednosti a i b, gdje je $a < b$. Da bi vrijedilo da je $\mathbb{E}[X] = 0$ mora biti $a < 0 < b$ te $\mathbb{P}(X = a) = \frac{b}{b-a}$ i $\mathbb{P}(X = b) = \frac{-a}{b-a}$. Može se pokazati da za vrijeme zaustavljanja definirano sa $T = \inf\{t \geqslant 0 : B(t) \notin \langle a, b\rangle\}$ slučajna varijabla $B(T)$ ima istu distribuciju kao i X te je $\mathbb{E}[T] = -ab$ konačno.*

Dokaz. Dokaz se zasniva na tzv. binarno razdvajajućem martingalu (binary splitting martingale). Kažemo da je martingal $(X_n : n \in \mathbb{N})$ binarno razdvajajuć ako vrijedi, kada za neke $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ događaj

$$A(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\}$$

ima pozitivnu vjerojatnost, slučajna varijabla X_{n+1} uvjetno na $A(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ može poprimiti najviše dvije vrijednosti.

Lema 3.3.3. *Neka je X slučajna varijabla s $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Tada postoji binarno razdvajajući martingal $(X_n : n \in \mathbb{N})$ takav da $X_n \to X$ gotovo sigurno u L^2.*

Dokaz. Definiramo martingal $(X_n : n \in \mathbb{N})$ i pripadnu filtraciju $(\mathcal{G}_n : n \in \mathbb{N})$ rekurzivno. Neka je $\mathcal{G}_0$ trivijalna σ-algebra (koja se sastoji od praznog skupa i početnog vjerojatnosnog prostora) i $X_0 = \mathbb{E}[X]$. Definiramo i slučajnu varijablu ξ_0 kao

$$\xi_0 = \begin{cases} 1, & \text{ako } X \geqslant X_0, \\ -1, & \text{ako } X < X_0. \end{cases}$$

Za svaki $n > 0$, neka je $\mathcal{G}_n = \sigma(\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ i $X_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_n]$. Također definiramo slučajnu varijablu ξ_n kao

$$\xi_n = \begin{cases} 1, & \text{ako } X \geqslant X_n, \\ -1, & \text{ako } X < X_n. \end{cases}$$

Primijetimo da je $\mathcal{G}_n$ generiran particijom $\mathcal{P}_n$ početnog vjerojatnosnog prostora na 2^n skupova, od kojih je svaki oblika $A(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Kako je svaki element od $\mathcal{P}_n$ unija dva elementa od $\mathcal{P}_{n+1}$ martingal $(X_n : n \in \mathbb{N})$ je binarno razdvajajuć. Također kako je $(X_n : n \in \mathbb{N})$ martingal imamo da je

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[(X - X_n)^2] + \mathbb{E}[X_n^2] \geqslant \mathbb{E}[X_n^2].$$

Dakle, $(X_n : n \in \mathbb{N})$ je ograničen u L^2 i slijedi da

$$X_n \to X_\infty := \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_\infty] \text{ gotovo sigurno u } L^2,$$

gdje je $\mathcal{G}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{G}_i\right)$. Još jedino preostaje dokazati da je $X = X_\infty$ gotovo sigurno. Tvrdimo da gotovo sigurno vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n(X - X_{n+1}) = |X - X_\infty|. \tag{3.15}$$

Zaista, ako je $X(\omega) = X_\infty(\omega)$ (3.15) jednostavno slijedi. Ako je $X(\omega) < X_\infty(\omega)$ tada za neki dovoljno velik N imamo $X(\omega) < X_n(\omega)$ za svaki $n > N$, dakle $\xi_n = -1$ i vrijedi (3.15).

Slično, ako je $X(\omega) > X_\infty(\omega)$ tada je za dovoljno velik N $X(\omega) > X_n(\omega)$ za svaki $n > N$ i $\xi_n = 1$ pa ponovo vrijedi (3.15). Kako je ξ_n $\mathcal{G}_{n+1}$ izmjeriva slijedi da

$$\mathbb{E}[\xi_n(X - X_{n+1})] = \mathbb{E}[\xi_n \mathbb{E}[X - X_{n+1}|\mathcal{G}_{n+1}]] = 0.$$

Prisjetimo se, ako $Y_n \to Y$ g.s. i $(Y_n : n \in \mathbb{N})$ je L^2 ograničen, tada $\mathbb{E}[Y_n] \to \mathbb{E}[Y]$. Dakle, lijeva strana u (3.15) je L^2 ograničena pa zaključujemo da je $\mathbb{E}[|X - X_\infty|] = 0$, čime je dokaz leme gotov. □

Neka je $(X_n : n \in \mathbb{N})$ binarno razdvajajući martingal takav da $X_n \to X$ gotovo sigurno u L^2. Prisjetimo se Primjera 3.3.2 u kojem X poprima vrijednosti na skupu od dva elementa $\{a, b\}$, za neke $a < 0 < b$. Tada je $T = \inf\{t \geqslant 0 : B(t) \notin \langle a, b\rangle\}$ traženo vrijeme zaustavljanja. Dakle, kako X_n uvjetno na $A(x_0, \ldots, x_{n-1})$ može poprimiti najviše dvije vrijednosti jasno je da možemo naći niz vremena zaustavljanja $T_0 \leqslant T_1 \leqslant T_2, \ldots$ takav da je $B(T_n)$ distribuiran kao X_n i $\mathbb{E}[T_n] = \mathbb{E}[X_n^2]$. Budući da je T_n rastući niz, imamo da $T_n \to T$ gotovo sigurno za neko vrijeme zaustavljanja T. Također po teoremu o monotonoj konvergenciji

$$\mathbb{E}[T] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[T_n] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n^2] = \mathbb{E}[X^2].$$

Kako $B(T_n)$ konvergira po distribuciji prema X po konstrukciji i konvergira g.s. prema $B(T)$ zbog g.s neprekidnosti Brownovog gibanja, slijedi da $B(T)$ i X imaju jednaku distribuciju. □

Lema 3.3.4. *Neka je $(B(t) : t \geqslant 0)$ Brownovo gibanje. Tada za svaku slučajnu varijablu X s očekivanjem 0 i varijancom 1 postoji niz vremena zaustavljanja, uz prirodnu filtraciju Brownovog gibanja,*

$$0 = T_0 \leqslant T_1 \leqslant T_2 \ldots,$$

takav da

(a) niz $(B(T_n) : n \geqslant 0)$ ima distribuciju slučajne šetnje s prirastima danim distribucijom od X.

(b) niz funkcija $(S_n^* : n \geqslant 0)$ konstruiran iz te slučajne šetnje zadovoljava

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\frac{B(nt)}{\sqrt{n}} - S_n^*(t)\right| > \epsilon\right) = 0.$$

Dokaz. Pomoću Teorema 3.3.1 definiramo T_1 da bude vrijeme zaustavljanja s $\mathbb{E}[T_1] = 1$ i takvo da je $B(T_1) = X$ po distribuciji. Po jakom Markovljevom svojstvu

$$(B_2(t) : t \geqslant 0) = (B(T_1 + t) - B(T_1) : t \geqslant 0)$$

je Brownovo gibanje i nezavisno je od $\mathcal{F}^+(T_1)$, pa time i od $(T_1, B(T_1))$. Dakle, možemo definirati vrijeme zaustavljanja T_2' za Brownovo gibanje $(B_2(t) : t \geqslant 0)$ takvo da je $\mathbb{E}[T_2'] =$

1 i $B(T_2') = X$ po distribuciji. Tada je i $T_2 = T_1 + T_2'$ vrijeme zaustavljanja za originalno Brownovo gibanje s $\mathbb{E}[T_2] = 2$ i $B(T_2)$ je druga vrijednost u slučajnoj šetnji s prirastima danim razdiobom od X. Induktivnim postupkom dobijemo niz $0 = T_0 \leqslant T_1 \leqslant T_2 \ldots$ takav da je $S_n = B(T_n)$ slučajna šetnja i $\mathbb{E}[T_n] = n$. Označimo sa

$$W_n(t) = \frac{B(nt)}{\sqrt{n}}$$

i neka je A_n događaj da postoji $t \in [0,1\rangle$ takav da je $|S_n^*(t) - W_n(t)| > \epsilon$. Trebamo pokazati da $\mathbb{P}(A_n) \to 0$. Neka je $k = k(t)$ jedinstveni cijeli broj takav da je

$$\frac{k-1}{n} \leqslant t < \frac{k}{n}.$$

kako je S_n^* linearna na takvom intervalu slijedi da

$$A_n \subset \left\{ \exists t \in [0,1\rangle \text{ t.d. } \left| \frac{S_k}{\sqrt{n}} - W_n(t) \right| > \epsilon \right\} \cup \left\{ \exists t \in [0,1\rangle \text{ t.d. } \left| \frac{S_{k-1}}{\sqrt{n}} - W_n(t) \right| > \epsilon \right\}.$$

Kako je $S_k = B(T_k) = \sqrt{n} W_n\left(\frac{T_k}{n}\right)$ imamo da je

$$A_n \subset A_n^* := \left\{ \exists t \in [0,1\rangle \text{ t.d. } \left| W_n\left(\frac{T_k}{n}\right) - W_n(t) \right| > \epsilon \right\} \cup \left\{ \exists t \in [0,1\rangle \text{ t.d. } \left| W_n\left(\frac{T_{k-1}}{n}\right) - W_n(t) \right| > \epsilon \right\}.$$

Za dani $0 < \delta < 1$ događaj An^* je sadržan u

$$\{\, \exists\, s, t \in [0,2] \text{ t.d. } |s-t| < \delta,\ |W_n(s) - W_n(t)| > \epsilon \,\} \tag{3.16}$$

$$\cup\ \{\, \exists\, t \in [0,1\rangle \text{ t.d. } |T_k/n - t| \vee |T_{k-1}/n - t| \geqslant \delta \,\} \tag{3.17}$$

Uočimo da vjerojatnost događaja (3.16) ne ovisi o n. Uzimanjem malog $\delta > 0$, možemo tu vjerojatnost napraviti malom koliko želimo, jer je Brownovo gibanje uniformno neprekidno na segmentu $[0,2]$. Preostaje pokazati da za fiksni $\delta > 0$ vjerojatnost događaja (3.17) konvergira prema nuli kad $n \to \infty$. Da to dokažemo koristimo tvrdnju da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (T_k - T_{k-1}) = 1 \text{ gotovo sigurno.}$$

To je Kolmogorovljev zakon velikih brojeva za niz $(T_k - T_{k-1})$ nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s očekivanjem 1. Za svaki niz (a_n) realnih brojeva vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{|a_k - k|}{n} = 0.$$

Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{|T_k - k|}{n} \geqslant \delta\right) = 0. \tag{3.18}$$

Prisjetimo se, $t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right\rangle$ i uzmimo $n > \frac{2}{\delta}$. Tada

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \quad (\,\exists\, t \in [0,1\rangle \text{ t.d. } |T_k/n - t| \vee |T_{k-1}/n - t| \geqslant \delta\,) \\ \leqslant & \quad \mathbb{P} \quad \left(\sup_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{(T_k - k) \vee ((k-1) - T_{k-1})}{n} \geqslant \delta\right) \\ \leqslant & \quad \mathbb{P} \quad \left(\sup_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{(T_k - k)}{n} \geqslant \frac{\delta}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\sup_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{((k-1) - T_{k-1})}{n} \geqslant \frac{\delta}{2}\right) \end{aligned}$$

i prema (3.18) oba sumanda konvergiraju prema 0. □

Teorem 3.3.5 (Portmanteau teorem)**.** *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*
(i) $X_n \longrightarrow^d X$.
(ii) Za sve zatvorene skupove $K \subset E$*,* $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in K) \leqslant \mathbb{P}(X \in K)$.
(iii) Za sve otvorene skupove $G \subset E$*,* $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in G) \geqslant \mathbb{P}(X \in G)$.
(iv) Za sve Borelove skupove $A \subset E$ *s* $\mathbb{P}(X \in \partial A) = 0$*, imamo*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in A) = \mathbb{P}(X \in A).$$

(v) Za sve ograničene izmjerive funkcije $g : E \to \mathbb{R}$ *sa svojstvom*

$$\mathbb{P}(X \in \{x : g \textit{ je neprekidna u } x\}) = 1$$

vrijedi $\mathbb{E}[g(X_n)] \to \mathbb{E}[g(X)]$.

Ovaj teorem nećemo dokazivati, a dokaz Portmanteau teorema može se naći u knjizi "Convergence of Probability Measures" Patricka Billingsleya[1].

Sada slijedi teorem koji će povezati slučajne šetnje i Brownovo gibanje, dva osnovna pojma kojima se bavimo u radu. Riječ je o Donskerovom principu invarijantnosti koji se još i naziva funkcionalni centralni granični teorem.

Teorem 3.3.6 (Donskerov princip invarijantnosti)**.** *Na prostoru* $C([0,1])$ *niz* $(S_n^* : n \geqslant 1)$ *konvergira po distribuciji prema standardnom Brownovom gibanju* $(B(t) : t \in [0,1])$.

Dokaz. Odaberemo niz vremena zaustavljanja kao u Lemi 3.3.4 i prisjetimo se da je slučajni proces $(W_n(t) : 0 \leqslant t \leqslant 1)$, gdje je $W_n(t) = \frac{B(nt)}{\sqrt{n}}$, prema Lemi 3.1.2 standardno Brownovo gibanje. Pretpostavimo da je $K \subset C([0,1])$ zatvoren i definiramo

$$K[\varepsilon] = \{f \in C([0,1]) : \|f - g\|_{\sup} \leqslant \varepsilon \text{ , za neku } g \in K\}.$$

Tada

$$\mathbb{P}(S_n^* \in K) \leqslant \mathbb{P}(W_n \in K[\varepsilon]) + \mathbb{P}(\|S_n^* - W_n\|_{\sup} > \varepsilon). \tag{3.19}$$

Kad $n \to \infty$, drugi izraz u (3.19) ide u 0, dok prvi ne ovisi o n i jednak je $\mathbb{P}(B \in K[\varepsilon])$ za Brownovo gibanje B. Kako je K zatvoren imamo

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{P}(B \in K[\varepsilon]) = \mathbb{P}\left(B \in \bigcap_{\varepsilon > 0} K[\varepsilon]\right) = \mathbb{P}(B \in K).$$

Dakle, dobivamo da vrijedi

$$\limsup_{n \to \infty} \mathbb{P}(S_n^* \in K) \leqslant \mathbb{P}(B \in K).$$

To je točno (*ii*) tvrdnja Portmanteau teorema pa slijedi da $S_n^* \xrightarrow{d} B$. $\square$

Poglavlje 4

Zakoni arkus sinusa za Brownovo gibanje

Nakon što smo pokazali vezu Brownovog gibanja sa slučajnom šetnjom mogli bismo se zapitati vrijede li i za Brownovo gibanje slična svojstva kao što smo pokazali za slučajne šetnje. U ovom poglavlju pokazat ćemo da je to zaista i tako te ćemo slijedit poglavlje 5 knjige "Brownian Motion" Petera Mörtersa i Yuvala Peresa[5] te poglavlje 8 knjige "Probability: Theory and Examples" Ricka Durretta[2].

Teorem 4.0.7 (Zakon arkus sinusa za zadnji posjet 0)**.** *Neka je $L = \sup\{t \leqslant 1 : B_t = 0\}$ trenutak zadnjeg posjeta 0 Brownovog gibanja prije trenutka $t = 1$. Tada L ima arkus sinus distribuciju, to jest za svaki $t \in [0,1]$*

$$\mathbb{P}_0(L \leqslant t) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{t}).$$

Dokaz. Neka je $t \in [0,1]$ fiksan. Kao u Lemi 3.1.2 definiramo

$$B(s)^{(t)} = B(t+s) - B(t), s \geqslant 0.$$

Korištenjem Markovljevog svojstva Brownovog gibanja u trenutku t slijedi da je

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0(L \leqslant t) &= \mathbb{P}_0(B(t+s) \neq 0, \forall s \in [0, 1-t]) \\
&= \mathbb{P}_0(B(s)^{(t)} + B(t) \neq 0, \forall s \in [0, 1-t]) \\
&= \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\{B(s)^{(t)}+B(t)\neq 0, \forall s\in[0,1-t]\}}\right] \\
&= \mathbb{E}_0[\mathbb{E}_{B(t)}[\omega_s > 0, \forall s \in [0, 1-t]]] \\
&= \mathbb{E}_0[\mathbb{P}_{B(t)}(T_0 \geqslant 1-t)] \\
&= \mathbb{E}_0[\mathbb{P}_0(T_{B(t)} \geqslant 1-t)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} p_t(0,x)\mathbb{P}_0(T_x \geqslant 1-t)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\infty} p_t(0,x)\mathbb{P}_0(T_x \geqslant 1-t)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Sada koristimo (3.1) i (3.13), pa slijedi da je

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0(L \leqslant t) &= 2\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \int_{1-t}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi r^3}} x e^{-\frac{x^2}{2r}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{1-t}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{tr^3}} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2(r+t)}{2rt}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{1-t}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{tr^3}} \frac{rt}{r+t}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{1-t}^{\infty} \left(\frac{t}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r+t}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{1-t}^{\infty} \left(\frac{(r+t)^2}{rt}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{t}{(r+t)^2}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{1-t}^{\infty} \left(\frac{rt}{(r+t)^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{t}{(r+t)^2}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{1-t}^{\infty} \left(\frac{t}{r+t}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{r+t}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{t}{(r+t)^2}\,\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

Uočimo, uz supstituciju

$$s = \frac{t}{r+t} \Longrightarrow ds = -\frac{t}{(r+t)^2},$$

granice integracije $r \in [1-t, \infty\rangle$ prelaze u $s \in [0, t]$ pa gornji integral možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0(L \leqslant t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^t (s(1-s))^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{t}).
\end{aligned}$$

□

Teorem 4.0.8 (Zakon arkus sinusa za maksimum)**.** *Slučajna varijabla* $M^* \in [0,1]$ *definirana sa*

$$B(M^*) = \max_{s\in[0,1]} B(s)$$

ima arkus sinus distribuciju, to jest za svaki $t \in [0,1]$

$$\mathbb{P}_0(M^* \leqslant t) = \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sqrt{t}\right).$$

Dokaz. Za $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0(M^* \leqslant t) &= \mathbb{P}_0\left(\max_{0\leqslant u\leqslant t} B(u) \geqslant \max_{t\leqslant v\leqslant 1} B(v)\right)\\
&= \mathbb{P}_0\left(\max_{0\leqslant u\leqslant t} B(u) - B(t) \geqslant \max_{t\leqslant v\leqslant 1} B(v) - B(t)\right)\\
&= \mathbb{P}_0(M_1(t) \geqslant M_2(1-t)),
\end{aligned}$$

gdje je $(M_1(s) : 0 \leqslant s \leqslant t)$ proces maksimuma Brownovog gibanja $(B_1(s) : 0 \leqslant s \leqslant t)$ koji je definiran sa $B_1(s) = B(t-s) - B(t)$, a $(M_2(s) : 0 \leqslant s \leqslant 1-t)$ proces maksimuma Brownovog gibanja $(B_2(s) : 0 \leqslant s \leqslant 1-t)$ definiranog sa $B_2(s) = B(t+s) - B(t)$. U Lemi 3.1.2 pokazali samo da su B_1 i B_2 zaista Brownova gibanja. Proces $(B_1(s) : 0 \leqslant s \leqslant t)$ je $\mathcal{F}_t$ izmjeriv, dok je $(B_2(s) : 0 \leqslant s \leqslant 1-t)$ nezavisan od $\mathcal{F}_t$.

Iz Korolara 3.2.7 slijedi da za dani s slučajna varijabla $M_1(s)$ ima jednaku distribuciju kao i $|B_1(s)|$, a $M_2(s)$ kao $|B_2(s)|$, te su one nezavisne. Dakle, imamo da je

$$\mathbb{P}_0(M_1(t) \geqslant M_2(1-t)) = \mathbb{P}_0(|B_1(t)| \geqslant |B_2(1-t)|).$$

Korištenjem invarijatnosti na skaliranje Brownovog gibanja gornju vjerojatnost možemo izraziti pomoću dvije nezavisne standardne normalne slučajne varijable Z_1 i Z_2 kao

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0(|B_1(t)| \geqslant |B_2(1-t)|) &= \mathbb{P}_0(\sqrt{t}|Z_1| \geqslant \sqrt{1-t}|Z_2|)\\
&= \mathbb{P}_0(tZ_1^2 \geqslant (1-t)Z_2^2)\\
&= \mathbb{P}_0(t(Z_1^2 + Z_2^2) \geqslant Z_2^2)\\
&= \mathbb{P}_0\left(\frac{Z_2^2}{Z_1^2 + Z_2^2} \leqslant t\right)\\
&= \mathbb{P}_0\left(\frac{|Z_2|}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}} \leqslant \sqrt{t}\right).
\end{aligned}$$

Prelaskom na polarne koordinate $(Z_1, Z_2) = (R\cos(\theta), Rsin(\theta))$, gdje je $R \geqslant 0$ te $\theta \in [0, 2\pi]$. Gustoća od (Z_1, Z_2) je $\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$ što prelazi u $\frac{1}{2\pi}re^{-\frac{r^2}{2}}drd\theta$ u polarnim koordinatama. Kako je θ uniformno distribuirana na segmentu $[0, 2\pi]$ slijedi da je

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0\left(\frac{|Z_2|}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}} \leqslant \sqrt{t}\right) &= \mathbb{P}_0(|\sin(\theta)| \leqslant \sqrt{t}) \\
&= 4\mathbb{P}_0(\theta \leqslant \arcsin(\sqrt{t})) \\
&= 4\frac{\arcsin(\sqrt{t})}{2\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{t}).
\end{aligned}$$

□

Teorem 4.0.9 (Zakon arkus sinusa za vrijeme iznad 0)**.** *Slučajna varijabla*

$$\int_0^1 \mathbb{1}_{B(t)>0}\,\mathrm{d}t$$

ima arkus sinus distribuciju.

Dokaz. Ideja dokaza zasniva se na činjenici da smo za jednostavne slučajne simetrične šetnje pokazali da je $\pi_n =^d K_n$ te da M^* ima arkus sinus distribuciju. Primjenom Donskerovog teorema 3.3.6 slijedit će tvrdnja. Prisjetimo se

$$\frac{K_n}{n} = \frac{\min\left\{k \in \{0, \ldots, n\} : S_k = \max_{0\leqslant j\leqslant n} S_j\right\}}{n}.$$

Nadalje, uočimo da $\frac{K_n}{n}$ možemo zapisati kao $g(S_n^*)$ za funkciju $g : C([0, 1]) \to [0, 1]$ definiranu sa

$$g(f) = \inf\left\{t \in [0, 1] : f(t) = \sup_{s\in[0,1]} f(s)\right\}$$

gdje je S_n^* definiran kao prije sa (3.14). Funkcija g je neprekidna u svakoj funkciji $f \in C([0, 1])$ koja ima jedinstveni maksimum. Kao što smo pokazali u Teoremu 3.2.8 Brownovo gibanje zadovoljava taj uvjet g.s. Dakle, funkcija g je neprekidna g.s. ako za funkciju f uzmemo put Brownovog gibanja. Sada po Donskerovom teoremu 3.3.6 i Portmanteau teoremu 3.3.5 slijedi da $S_n^* \longrightarrow^d B$ uniformno na $[0, 1]$ pa

$$\frac{K_n}{n} \longrightarrow^d g(B) = M^*.$$

S druge strane, iz Teorema 4.0.8 znamo da M^* ima arkus sinus distribuciju pa $\frac{K_n}{n}$ konvergira prema arkus sinus distribuciji.

Slično, π_n označava broj segmenata $(k-1, S_{k-1}) \longrightarrow (k, S_k)$ koji leže iznad x-osi, to jest

$$\frac{\pi_n}{n} = \frac{\#\{k \in \{1, \dots, n\} : S_k > 0\}}{n} + \frac{\#\{k \in \{1, \dots, n\} : S_{k-1} = 1, S_k = 0\}}{n}.$$

Sada $\frac{\pi_n}{n}$ možemo zapisati kao $h(S_n^*)$ za funkciju $h : C([0,1]) \to [0,1]$ definiranu sa

$$h(f) = \mathcal{L}(\{t \in [0,1] : f(t) > 0\}) = \int_0^1 \mathbb{1}_{f(t)>0}\, \mathrm{d}t.$$

Tada je h neprekidna za svaku funkciju $f \in C([0,1])$ sa svojstvom

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{L}(\{t \in [0,1] : -\varepsilon \leqslant f(t) \leqslant \varepsilon\}) = 0$$

što je ekvivalentno da je

$$\mathcal{L}(\{t \in [0,1] : f(t) = 0\}) = 0.$$

Iz Leme 3.2.9 znamo da Brownovo gibanje ima to svojstvo g.s. Ponovo primjenom Donskerovog i Portmanteau teorema slijedi da

$$\frac{\pi_n}{n} \longrightarrow^d h(B) = \int_0^1 \mathbb{1}_{B(t)>0}\, \mathrm{d}t.$$

$\square$

Bibliografija

[1] Patrick Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley & Sons, 2nd edition, 1999.

[2] Rick Durrett, *Probability: Theory and Examples*, Cambridge University Press, 4th edition, 2010.

[3] Wiliam Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Aplications*, John Wiley & Sons, Vol. 1, 3rd edition, 1968.

[4] Wiliam Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Aplications*, John Wiley & Sons, Vol. 2, 2nd edition, 1971.

[5] Peter Mörters, Yuval Peres, *Brownian Motion*, Cambridge University Press, 2010.

Sažetak

U prvom dijelu rada bavili smo se slučajnim šetnjama. Inicijalno smo promatrali jednostavnu simetričnu slučajnu šetnju duljine $2n$ koja kreće iz ishodišta i dokazali nekoliko poznatih zakona arkus sinusa. Posebno, slučajna varijabla koja označava trenutak zadnjeg posjeta nuli u slučajnoj šetnji, slučajna varijabla koja označava broj segmenata $(k-1, S_{k-1}) \to (k, S_k)$ koji leže iznad x-osi, slučajna varijabla koja za danu slučajnu šetnju duljine $2n$ daje najmanji j indeks takav da je $S_j = S_{2n}$ te slučajna varijabla koja označava indeks prvog postizanja maksimuma imaju diskretnu arkus sinus distribuciju reda n. Pomoću teorema Sparre-Andersena poopćili smo zakone arkus sinusa i na općenitije slučajne šetnje. Za slučajne šetnje za koje vrijedi da je distribucija koraka slučajne šetnje simetrična i $\mathbb{P}(S_m = 0) = 0$, za svaki $m \geqslant 1$ vrijedi da slučajna varijabla koja označava broj točaka iznad $x-$osi ima diskretnu arkus sinus distribuciju. Također, slučajne varijable koje označavaju trenutak prvog maksimuma te zadnjeg minimuma imaju diskretnu arkus sinus distribuciju. Poseban slučaj općenite slučajne šetnje koja zadovoljava navedena svojstva je slučajna šetnja sa simetričnom i neprekidnom funkcijom distribucije koraka.

U drugom dijelu rada promatrali smo Brownovo gibanje na intervalu $[0, 1]$. Pomoću Markovljevog svojstva Brownovog gibanja i principa refleksije dokazali smo da slučajna varijabla koja označava zadnji posjet nuli Brownovog gibanja prije trenutka 1 ima arkus sinus distribuciju. Nakon što smo vidjeli da Brownovo gibanje poprima jedinstveni maksimum na intervalu $[0, 1]$ gotovo sigurno, dokazali smo da i slučajna varijabla koja označava trenutak postizanja maksimuma ima arkus sinus distribuciju. Na kraju smo pokazali dokaz i poznatog zakona arkus sinusa poznatog pod nazivom Levyev zakon arkus sinusa. On se odnosi na slučajnu varijablu koja označava vrijeme koje Brownovo gibanje provede iznad $x-$osi. U dokazu je korišten Donskerov princip invarijantnosti, koji kaže da skalirana slučajna šetnja konvergira po distribuciji standardnom Brownovom gibanju, i prethodno dokazani zakoni za maksimum Brownovog gibanja te jednostavne slučajne šetnje.

Summary

In the first part of the thesis we considered random walks. We studied a simple symmetric random walk with $2n$ steps which starts from the origin and proved several well known arcsine laws. In particular, random variable denoting the time of the last zero before $2n$, random variable denoting the number of segments $(k-1, S_{k-1}) \to (k, S_k)$ that lie in the upper half plane, random variable denoting the minimal index j such that $S_j = S_{2n}$ and random variable denoting the index of the first maximum have discrete arcsine distribution of order n. Using Sparre-Andersen theorem we showed how one can extend the arcsine laws to very general random walks. For random walks with symmetric step distribution and with the property that for every $m \geqslant 1$ is $\mathbb{P}(S_m = 0) = 0$, a random variable that indicates the number of points in the upper half plane has discrete arcsine distribution. Also, the random variables denoting the moment of the first maximum and last minimum have a discrete arcsine distribution. A special case of general random walk satisfying the above properties is random walk with symmetric and continuous step distribution.

In the second part we studied the Brownian motion on the interval $[0, 1]$. Using Markov property of Brownian motion and the reflection principle, we proved that random variable that denotes the last zero of Brownian motion in $[0, 1]$ is arcsine distributed. Once we showed that for Brownian motion on $[0, 1]$ the global maximum is attained at a unique time we have proved that the random variable that denotes the time at which a Brownian motion achieves its maximum is also arcsine distributed. In the end we showed proof of famous arcsine law known as Levy's arcsine law. It refers to the random variable that indicates the time that Brownian motion spends in the upper half plane. In the proof we used Donsker's invariance principle, which says that scaled random walk converges in distribution to a standard Brownian motion, as well as the already established laws for the maximum of Brownian motion and simple random walks.

Životopis

Rođena sam 28. lipnja 1990. godine u Zagrebu. Nakon završene Osnovne škole Bistra upisala sam X. gimnaziju Ivana Supeka u Zagrebu. Preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, Sveučilišta u Zagrebu, upisala sam 2009. godine. Godine 2012. upisujem diplomski studij Financijske i poslovne matematike, također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Od 2013. godine članica sam studentske udruge eSTUDENT. Kao članica Tima za prakse i pripravništva radila sam na organizaciji Starter konferencije kao i na projektu Priručnik za apsolvente. Od srpnja 2014. radim u Zagrebačkoj banci kao pripravnica u u odjelu Upravljanja i kontrole tržišnih rizika.