Konstruktivni problemi s visinama i ortocentrom

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Mia Radović

KONSTRUKTIVNI PROBLEMI S VISINAMA I ORTOCENTROM

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Mea Bombardelli

Zagreb, rujan 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svojoj mentorici Mei Bombardelli te brojnim susretljivim kolegama, asistentima i profesorima koji su mi omogućili da danas budem tu gdje jesam. Matei zahvaljujem najprije za smijeh, a onda i veliku podršku svih ovih godina. Ivi zahvaljujem jer mi je omogućio da ga poznajem i zovem prijateljem. Antei želim reći hvala jer je uvijek bila tu i jer je zaslužna za sve sjećanja vrijedne trenutke. Zahvaljujem se potom cijeloj svojoj obitelji, a posebno baki koja je palila svijeću za svaki kolokvij i didu na genima i beskrajnom interesu za moje studiranje. Zahvaljujem se i Luki jer me tjerao da učim kad je bilo najteže i jer me uvjeravao da ja to mogu. Najveće hvala pripada Ani, tati i mami jer su upravo onakvi kakvi jesu i jer bez njih sve ovo ne bi bilo moguće. Od srca vam hvala.

Sadržaj

Uvod

Visina trokuta, a samim time i ortocentar koji je jedna od četiriju karakterističnih točaka trokuta, važni su pojmovi u geometriji. Svrha ovog diplomskog rada je detaljno proučavanje metričkih i položajnih konstruktivnih zadataka gdje je bar jedan od zadanih elemenata visina, odnosno ortocentar trokuta.

U prvom dijelu rada dokazat će se teorem o ortocentru, kao i teorem o udaljenosti ortocentra od jednog vrha trokuta, te navesti definicije i iskazi teorema potrebni za daljnji tekst. Potom će biti riječi o geometrijskim konstrukcijama ravnalom i šestarom, temeljnim operacijama i konstrukcijama koristeći spomenuta pomagala. Opisat će se metodika rješavanja konstruktivne zadaće i nekoliko metoda rješavanja popraćenih primjerima i crtežima. Također, navest će se i detaljno opisati pomoćne konstrukcije korištene pri rješavanju zadataka iz trećeg i četvrtog dijela ovog rada.

U trećem dijelu riješit će se niz metričkih primjera s duljinama visina koristeći razne poučke i metode. U četvrtom dijelu rješavat će se položajni primjeri u kojima je zadan položaj ortocentra i nožišta visina iz vrhova trokuta. Naglasak je u oba poglavlja stavljen na sve etape rješavanja konstruktivnog zadatka, posebice dokaz i raspravu, budući da njihov detaljan opis najčešće izostaje, te na raznolikost u samim zadatcima, kao i u njihovom rješavanju.

Poglavlje 1

Osnovne definicije i teoremi

U ovom poglavlju navest ćemo pojmove i svojstva korištena u nastavku rada. Prije svega definirat ćemo pojmove visine i ortocentra te dokazati teorem o ortocentru.

Definicija 1.1. ***Visina trokuta*** *je dužina kojoj je jedan kraj vrh trokuta, a drugi nožište okomice spuštene iz tog vrha na pravac na kojemu leži suprotna stranica.*

Teorem 1.2. ***(Teorem o ortocentru).*** *Pravci na kojima leže visine trokuta sijeku se u jednoj točki.*

Za dokaz ovog teorema potrebni su nam sljedeći teoremi i definicija:

Teorem 1.3. *Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne: (i) četverokut $ABCD$ je paralelogram, (ii) postoje dvije nasuprotne stranice četverokuta $ABCD$ koje su nasuprotne i paralelne, (iii) svake dvije nasuprotne stranice četverokuta $ABCD$ su sukladne, (iv) dijagonale četverokuta $ABCD$ se međusobno raspolavljaju, (v) oba para nasuprotnih kutova četverokuta $ABCD$ su sukladna.*

Definicija 1.4. ***Simetrala dužine*** *je pravac koji prolazi polovištem te dužine i okomit je na nju.*

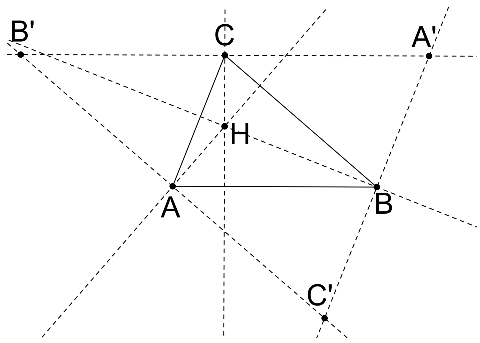
Teorem 1.5. ***(Teorem o simetralama stranica trokuta).*** *Simetrale stranica trokuta sijeku se u jednoj točki.*

Sad možemo dokazati teorem o ortocentru.

Dokaz. Svakim vrhom trokuta povucimo paralelu sa suprotnom stranicom. Tako se dobije trokut $A'B'C'$ (slika 1.1).

Četverokut $ABA'C$ je paralelogram. Teorem 1.3 povlači da je $|AB| = |CA'|$. Također, četverokut $ABCB'$ je paralelogram, pa teorem 1.3 povlači i $|AB| = |B'C|$. Slijedi da je $|B'C| = |CA'|$, pa je C polovište stranice $\overline{A'B'}$. Analogno pokazujemo da je A polovište stranice $\overline{B'C'}$ i da je B polovište stranice $\overline{A'C'}$.

Visina na stranicu $\overline{AB}$ okomita je na tu stranicu, pa onda i na dužinu $\overline{A'B'}$. Prema tome, pravci na kojima leže visine trokuta ABC ujedno su simetrale stranica trokuta $A'B'C'$. Prema teoremu 1.5, simetrale stranica trokuta $A'B'C'$ sijeku se u jednoj točki. Stoga se i tri pravca na kojima leže visine trokuta ABC sijeku u jednoj točki.



Slika 1.1

□

Definicija 1.6. *Točka u kojoj se sijeku pravci na kojima leže visine trokuta naziva se* ***ortocentar*** *trokuta.*

Navest ćemo još nekoliko važnih definicija i svojstava trokuta.

Definirajmo prvo težište trokuta. Kako bismo ga definirali, potrebno je najprije objasniti pojam težišnice i navesti jedan teorem.

Definicija 1.7. ***Težišnica trokuta*** *je dužina koja spaja vrh trokuta s polovištem nasuprotne stranice trokuta.*

Teorem 1.8. ***(Teorem o težištu trokuta).*** *Sve tri težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki. Udaljenost te točke od pojedinog vrha trokuta iznosi dvije trećine duljine odgovarajuće težišnice.*

Definicija 1.9. *Točka u kojoj se sijeku sve tri težišnice naziva se* ***težište*** *trokuta.*

Objasnimo sad pojam kružnice opisane trokutu i njenog središta.

Teorem 1.10. *Za svaki trokut postoji jedna i samo jedna kružnica koja prolazi vrhovima trokuta. Ta se kružnica zove kružnica **opisana** tom trokutu, a središte joj je sjecište simetrala stranica trokuta.*

Teorem 1.11. *Pravac okomit na tetivu kružnice prolazi središtem te kružnice ako i samo ako prolazi polovištem tetive.*

Kako bismo objasnili pojam trokutu upisane kružnice, potrebno je definirati sljedeći pojam:

Definicija 1.12. ***Simetrala kuta** je pravac koji taj kut dijeli na dva jednaka dijela.*

Teorem 1.13. *Simetrale unutarnjih kutova trokuta sijeku se u jednoj točki. Ta točka je središte trokutu upisane kružnice.*

Navedimo i sljedeće definicije i teoreme:

Teorem 1.14. *Točka leži na simetrali kuta ako i samo ako je jednako udaljena od njegovih krakova.*

Definicija 1.15. *Sukut unutarnjeg kuta trokuta naziva se **vanjski kut trokuta**.*

Teorem 1.16. *Simetrale bilo koja dva vanjska kuta trokuta i simetrala preostalog trećeg unutarnjeg kuta trokuta sijeku se u jednoj točki.*

Visine trokuta vežu se i za pojam površine trokuta. Formula pomoću koje se računa **površina trokuta** kojemu je jedna stranica duljine a, a pripadna visina duljine v_a je:

$$P = \frac{1}{2} \cdot av_a.$$

Definicija 1.17. *Za dva trokuta kažemo da su **sukladni** ako su im odgovarajuće stranice jednake duljine i odgovarajući kutovi jednake veličine.*

Teorem 1.18. ***(SKS teorem o sukladnosti).*** *Dva su trokuta sukladna ako su im sukladne dvije stranice i kut među njima.*

Teorem 1.19. ***(KSK teorem o sukladnosti).*** *Dva su trokuta sukladna ako im je sukladna jedna stranica i dva kuta uz tu stranicu.*

Teorem 1.20. ***(SSS teorem o sukladnosti).*** *Dva trokuta su sukladna ako su im sukladne sve tri stranice.*

Definicija 1.21. *Za dva trokuta kažemo da su **slični** ako su im odgovarajući kutovi sukladni i odgovarajuće stranice proporcionalne.*

Kao i kod sukladnosti trokuta, postoje četiri teorema o minimalnim dovoljnim uvjetima za sličnost trokuta, no ovdje ćemo navesti samo onaj koji ćemo koristiti kasnije.

Teorem 1.22. ***(SSS poučak o sličnosti).*** *Dva trokuta su slična ako su im odgovarajuće stranice proporcionalne.*

Nadalje, prilikom rješavanja nekolicine konstruktivnih problema, trebat će konstruirati geometrijsko mjesto točaka iz kojih se dana dužina vidi pod danim kutom. Za to su nam potrebni sljedeći teoremi i definicija:

Teorem 1.23. ***(Talesov teorem o kutu nad promjerom kružnice).*** *Ako je dužina $\overline{AB}$ promjer kružnice k, a C bilo koja točka kružnice k različita od A i B, tada je kut $\measuredangle ACB$ pravi.*

Teorem 1.24. ***(Obrat Talesovog teorema).*** *Ako je kut $\measuredangle ACB$ pravi, onda točka C leži na kružnici čiji je promjer dužina $\overline{AB}$.*

Definicija 1.25. *Konveksni kut kojemu vrh T leži na kružnici k i čiji krakovi sijeku kružnicu k u dvjema točkama A i B zovemo* ***obodni kut*** *kružnice k nad lukom $\widehat{AB}$.*

Definicija 1.26. *Neka je k kružnica sa središtem u točki O i $\widehat{AB}$ kružni luk koji leži na kružnici k. Kut $\measuredangle AOB$ zovemo* ***središnji kut*** *kružnice k nad lukom $\widehat{AB}$.*

Teorem 1.27. *Središnji kut nad nekim lukom jednak je dvostrukom obodnom kutu nad tim istim lukom.*

Slijedi nekoliko definicija o preslikavanjima ravnine.

Definicija 1.28. *Kažemo da je preslikavanje $f : \pi \to \pi$* ***izometrija ravnine*** *π ako za sve točke A i B ravnine π vrijedi $|A'B'| = |AB|$, gdje je $f(A) = A'$ i $f(B) = B'$.*

Definicija 1.29. *Neka je p pravac koji leži u ravnini π.* ***Osna simetrija*** *ravnine π obzirom na pravac p je preslikavanje $s_p : \pi \to \pi$ definirano na sljedeći način: Ako točka T leži na pravcu p definira se $s_p(T) = T$. Ako točka T ne leži na pravcu p, tada okomica kroz točku T na pravac p siječe p u nekoj točki T_0. Neka je T' točka na pravcu TT_0, različita od T, takva da je $|TT_0| = |T_0T'|$. Takva točka T' je jedinstvena. Definira se $s_p(T) = T'$.*

Definicija 1.30. *Neka je O čvrsta točka ravnine π.* ***Centralna simetrija*** *ravnine π obzirom na točku O je preslikavanje $s_o : \pi \to \pi$ definirano na sljedeći način: Najprije je $s_o(O) = O$. Ako je T točka različita od O, neka je T' točka na pravcu TO, različita od T, takva da je $|TO| = |OT'|$. Takva točka T' je jedinstvena. Definira se $s_o(T) = T'$.*

Uočimo: Osna i centralna simetrija su izometrije ravnine.

Navest ćemo i teorem koji povezuje središte kružnice opisane trokutu s njegovim ortocentrom.

Teorem 1.31. ***(Teorem o udaljenosti ortocentra od vrha trokuta).*** *Udaljenost ortocentra od jednog vrha trokuta jednaka je dvostrukoj udaljenosti središta trokutu opisane kružnice od nasuprotne stranice trokuta.*

Drugim riječima, neka je ABC trokut kojemu je točka H ortocentar, točka O središte opisane kružnice, a točka P polovište stranice $\overline{BC}$. Vrijedi: $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OP}$.

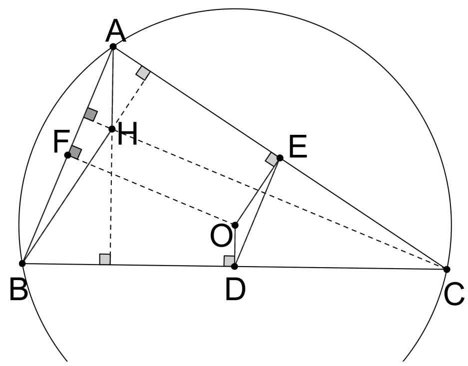
Kako bismo dokazali ovaj teorem, koristit ćemo sljedeću definiciju i teorem:

Definicija 1.32. *Spojnica polovišta dviju stranica trokuta zove se* ***srednjica trokuta****. Trokut ima tri srednjice.*

Teorem 1.33. *Srednjica povučena polovištima dviju stranica trokuta je usporedna s trećom stranicom. Duljina srednjice jednaka je polovici duljine stranice s kojom je usporedna.*

Dokažimo sad teorem 1.31 o udaljenosti ortocentra od jednog vrha trokuta.

Dokaz. Trokutu ABC opisana je kružnica k sa središtem u točki O. Točka H je ortocentar trokuta. Uz ostale oznake kao na slici 1.2, treba dokazati da je $|AH| = 2|OD|$. Pravac OD je simetrala stranice $\overline{BC}$, pa je $OD \perp BC$, a kako je $AH \perp BC$ slijedi da je $OD \parallel AH$. Analogno imamo da je $OE \parallel BH$. Dužina $\overline{DE}$ je srednjica trokuta ABC, zbog čega je $DE \parallel AB$. Vidimo da su stranice trokuta ODE i HAB (u parovima) usporedne, zbog čega ti trokuti imaju sukladne kutove. Iz ovoga slijedi da su trokuti ODE i HAB slični. Kako je $|DE| = \frac{1}{2}|BA|$, slijedi da je $|OD| = \frac{1}{2}|AH|$ i $|OE| = \frac{1}{2}|BH|$. Analogno se dokaže da je $|OF| = \frac{1}{2}|CH|$, čime je dokazana tvrdnja poučka.



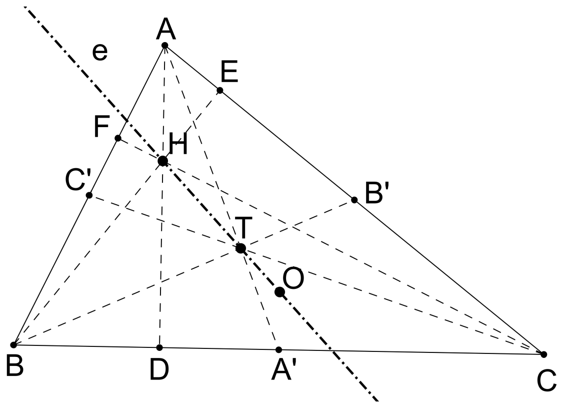
Slika 1.2

□

Pri rješavanju nekih primjera iz trećeg i četvrtog dijela ovog rada koristit će se sljedeći teoremi i definicije:

Teorem 1.34. *Središte O opisane kružnice, težište T i ortocentar H nekog trokuta ABC leže na jednom pravcu e koji nazivamo* ***Eulerovim pravcem*** *tog trokuta. Udaljenost $|HT|$ ortocentra H i težišta T dvostruko je veća nego udaljenost $|TO|$ težišta T i središta O opisane kružnice, tj.*

$$|HT| = 2 \cdot |TO|.$$



Slika 1.3

Definicija 1.35. *Tetivni četverokut je četverokut kome se može opisati kružnica.*

Teorem 1.36. *Zbroj dvaju nasuprotnih kutova tetivnog četverokuta je* 180°.

Poglavlje 2

O geometrijskim konstrukcijama

Geometrijske konstrukcije su onaj dio planimetrije koji određene planimetrijske probleme rješava konstruktivnom metodom. U ovom poglavlju bit će riječi o osnovnim pojmovima vezanim za konstruktivnu zadaću te o temeljnim konstrukcijama trokuta. Prije svega definirajmo:

Definicija 2.1. *Bilo koji podskup točaka promatrane ravnine π zvat ćemo* ***geometrijskom figurom ravnine*** π.

Konstruirati neku figuru znači, najopćenitije rečeno, nacrtati tu figuru. Za konstrukciju geometrijskih figura potrebno je upotrijebiti određene sprave. U ovom radu prilikom konstrukcije figura bavit ćemo se euklidskim konstrukcijama. Euklidske konstrukcije su konstrukcije kod kojih su dopuštene sprave:

1. jednobridno ravnalo (ravnalo kojemu možemo upotrebljavati samo jedan od dva paralelna brida) na kojem nije istaknuta jedinica mjere;

2. šestar s promjenjivim po volji velikim rasponom.

Dopuštenom uporabom ravnala i šestara moguće je izvesti sljedeće temeljne operacije:

1. konstruirati pravac kroz dvije zadane različite točke;
2. konstruirati sjecište dvaju danih neparalelnih pravaca zadanih dvjema različim točkama;
3. konstruirati kružnicu sa središtem u danoj točki koja prolazi kroz drugu danu točku;
4. konstruirati dva sjecišta dane kružnice i jednog pravca, ukoliko postoje;
5. konstruirati sjecišta dviju danih kružnica, ako postoje.

U ovom trenutku možemo precizno definirati euklidske konstrukcije i konstruktivni zadatak.

Definicija 2.2. ***Euklidska konstrukcija*** *je svaki slijed od konačno mnogo izvedenih temeljnih operacija.*

Definicija 2.3. ***Konstruktivni zadatak*** *je konstrukcija figure danim spravama ako je zadana neka druga figura te ako su opisani odnosi između zadane i tražene figure. Bilo koju figuru koja zadovoljava uvjete zadatka zovemo* ***rješenjem konstruktivnog zadatka****.*

Zadatak se smatra riješenim ako je konstruirano konačno mnogo figura $F_1, F_2, ..., F_n$ koje zadovoljavaju uvjete zadatka i ako je svaka figura koja zadovoljava uvjete zadatka jednaka jednoj od $F_1, F_2, ..., F_n$. Tad kažemo da zadatak ima n rješenja.

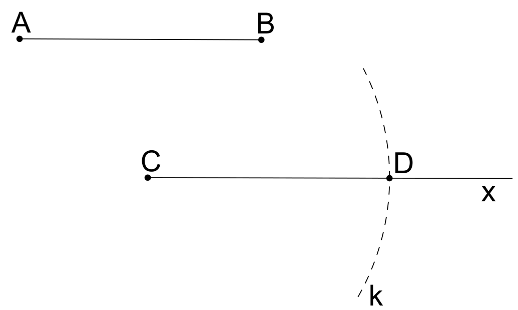
2.1 Temeljne konstrukcije

U ovom podpoglavlju navest ćemo i detaljno opisati temeljne konstrukcije izvedene ravnalom i šestarom pomoću temeljnih operacija koje se koriste u nastavku rada.

TK1 **Prijenos dužina**

Zadana je dužina $\overline{AB}$ i polupravac Cx. Na danom polupravcu potrebno je konstruirati točku D tako da vrijedi: $|CD| = |AB|$.

Neka je k kružnica sa središtem u točki C i polumjerom $|AB|$. Točku D dobit ćemo kao sjecište polupravca Cx s kružnicom k (slika 2.1).



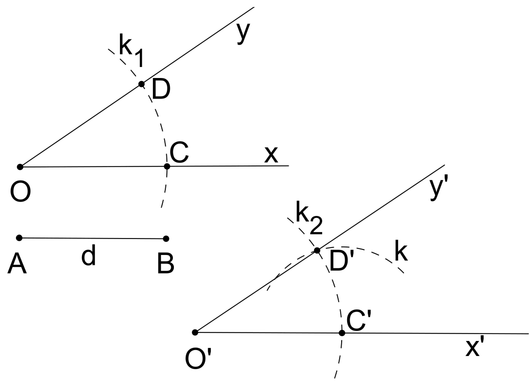
Slika 2.1

TK2 **Prijenos kutova**

Dan je konveksni kut $\measuredangle xOy$ i polupravac $O'x'$. Treba konstruirati polupravac y' tako da mu je početak u točki O' i da je $\measuredangle x'O'y' = \measuredangle xOy$.

Neka je d bilo koja duljina. Neka je k_1 kružnica sa središtem u O i polumjerom d. Kružnica k_1 siječe polupravac x u točki C, a polupravac y u točki D.

Neka je k_2 kružnica sa središtem u točki O' i polumjerom d. Kružnica k_2 siječe kružni luk x' u točki C'. Oko točke C' opišimo kružnicu k polumjera $|CD|$. Kružnica k siječe kružnicu k_2 u točki D'. Vrijedi: $\measuredangle xOy = \measuredangle x'Oy' = \measuredangle C'OD'$, gdje je y' polupravac s početkom u točki O' koji prolazi točkom D' (slika 2.2).

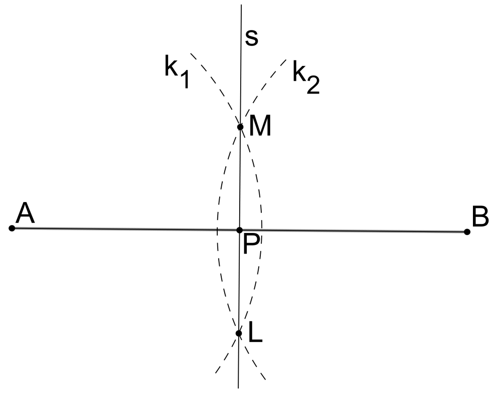


Slika 2.2

TK3 **Konstrukcija simetrale i polovišta dužine**

Dana je dužina $\overline{AB}$. Potrebno je konstruirati točku P na dužini $\overline{AB}$ tako da je $|AP| = |PB|$ i pravac s tako da je $P \in s$ i $s \perp AB$.

Neka je k_1 kružnica sa središtem u točki A i polumjerom r takvim da je $r > \frac{1}{2}|AB|$ te neka je k_2 kružnica sa središtem u točki B i polumjerom r. Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u točkama M i L. Pravac ML je tražena simetrala, a sjecište P pravaca ML i AB je polovište dužine $\overline{AB}$ (slika 2.3).

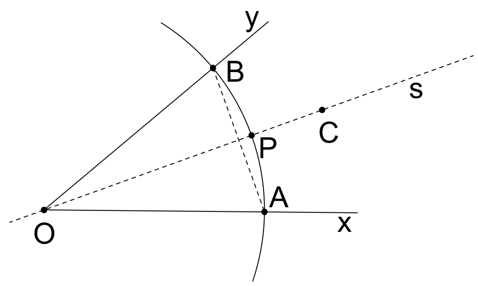


Slika 2.3

TK4 **Konstrukcija simetrale kuta i polovišta luka**

Dan je kut $\angle xOy$ i kružni luk l sa središtem u točki O i polumjerom r koji siječe krakove danog kuta. Neka su točke A i B sjecišta krakova kuta s kružnim lukom l. Potrebno je konstruirati pravac koji prolazi točkom O i jednako je udaljen od oba kraka danog kuta, te polovište luka l.

Neka je s simetrala dužine $\overline{AB}$. Pravac s je simetrala kuta xOy. Pravac s očito prolazi točkom O, pa je dovoljno konstruirati prema konstrukciji TK3 jednu točku C te simetrale. Simetrala $s = OC$ siječe kružni luk l u točki P. Točka P je polovište kružnog luka l (slika 2.4).

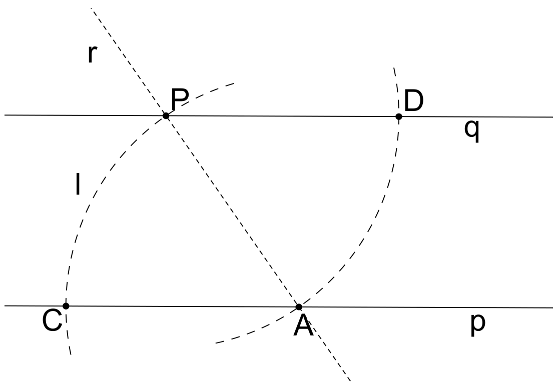


Slika 2.4

TK5 **Konstrukcija pravca koji prolazi danom točkom i paralelan je s danim pravcem**

Dan je pravac p i točka P izvan njega. Potrebno je konstruirati pravac q koji prolazi točkom P i paralelan je s pravcem p.

Neka je r bilo koji pravac kroz točku P koji siječe dani pravac p u nekoj točki A. Neka je l kružnica sa središtem u točki A kroz točku P. Kružnica l siječe pravac p u točki C. Neka je točka D takva da je $\measuredangle PAC = \measuredangle APD$ i da su točke C i D s različitih strana pravca r. Kako bismo konstruirali točku D koristit ćemo konstrukciju TK2. Tada je $PD = q$ (slika 2.5).



Slika 2.5

TK6 **Konstrukcija okomice iz dane točke na dani pravac**

Dana je točka P i pravac p. Potrebno je konstruirati pravac q koji prolazi točkom P i okomit je na pravac p.

Razlikujemo dva slučaja:

a) Točka P leži na pravcu p.

Neka je k kružnica sa središtem u točki P i proizvoljnim polumjerom. Kružnica k siječe pravac p u točkama A i B. Točka P je polovište dužine $\overline{AB}$, pa je tražena okomica q tada simetrala dužine $\overline{AB}$.

b) Točka P ne leži na pravcu p.

Neka je k kružnica sa središtem u točki P i polumjerom r tako da kružnica k siječe pravac p u dvjema točkama A i B. Tražena okomica q tada je simetrala dužine $\overline{AB}$ koja očito prolazi točkom P. Oba slučaja prikazana su na slici 2.6.

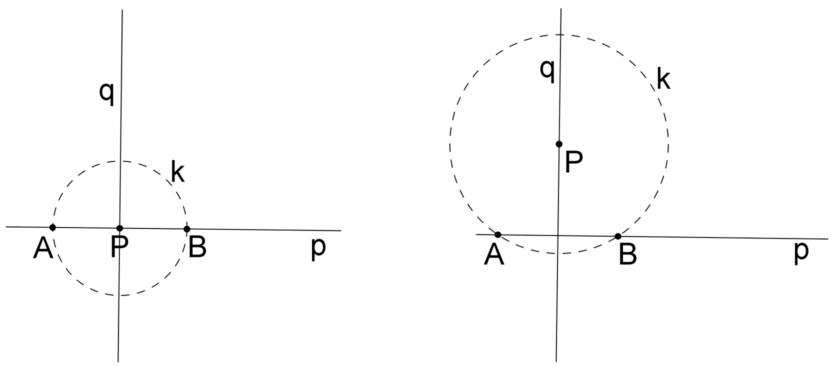
TK7 **Konstrukcija trokuta ako su mu poznate duljine svih triju stranica (SSS konstrukcija)**

Dane su tri dužine duljina a, b i c. Potrebno je konstruirati trokut ABC tako da je $|AB| = c$, $|AC| = b$ i $|BC| = a$.

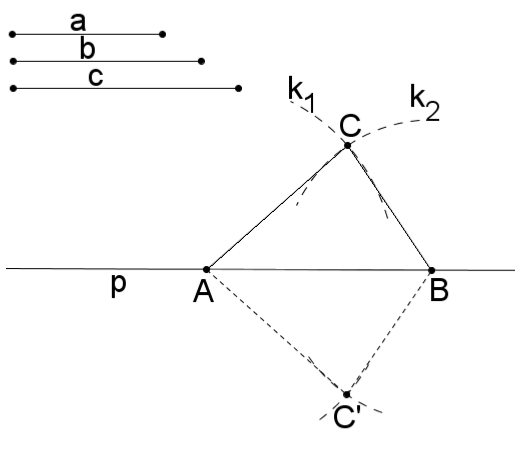
Tri dužine duljina a, b i c mogu biti stranice nekog trokuta ako i samo ako vrijedi:

$$a < b + c; \quad b < a + c; \quad c < a + b.$$

Pretpostavimo da ove nejednakosti vrijede. Neka je p proizvoljan pravac. Odaberimo na njemu točku A i konstruirajmo točku B tako da je $B \in p$ i $|AB| = c$. Neka je k_1 kružnica sa središtem u točki A i polumjerom b i neka je k_2 kružnica sa središtem u točki B i polumjerom a. Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u točkama C i C'. Ove su dvije točke osnosimetrične obzirom na pravac p, a trokuti ABC i ABC' sukladni, pa zadatak ima jedinstveno rješenje (slika 2.7).



Slika 2.6

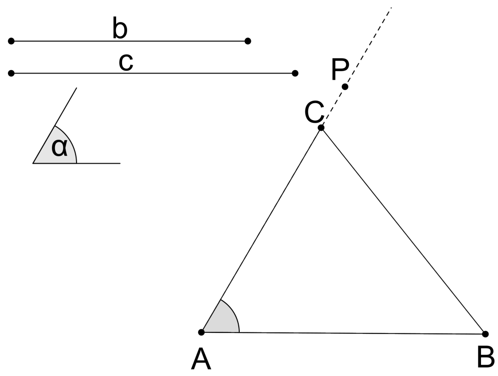


Slika 2.7

TK8 **Konstrukcija trokuta ako su mu poznate duljine dviju stranica i mjera kuta među njima (SKS konstrukcija)**

Dane su dvije dužine duljina b i c, te mjera kuta α. Potrebno je konstruirati trokut ABC tako da je $|AB| = c, |AC| = b$ i $\measuredangle CAB = \alpha$.

Neka je dužina $\overline{AB}$ takva da vrijedi $|AB| = c$. Neka je točka P takva da vrijedi $\alpha = \measuredangle BAP$. Na polupravcu AP nanesimo dužinu $\overline{AC}$ tako da je $|AC| = b$. Konstruirali smo jednoznačno određeni trokut ABC (slika 2.8).

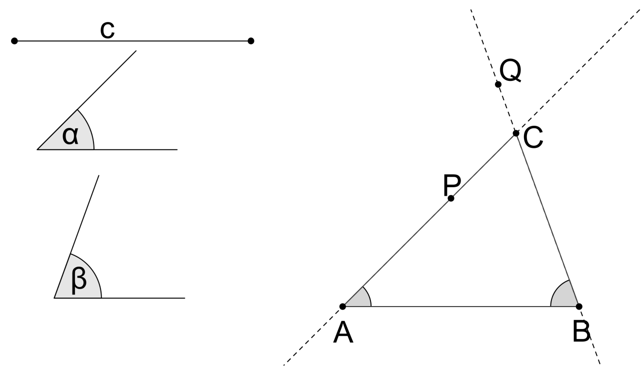


Slika 2.8

TK9 **Konstrukcija trokuta ako mu je poznata duljina jedne stranice i mjere uz nju priležećih kutova (KSK konstrukcija)**

Dana je dužina duljine c i mjere kutova α i β. Potrebno je konstruirati trokut ABC tako da je $|AB| = c$, $\measuredangle CAB = \alpha$ i $\measuredangle ABC = \beta$.

Neka je dužina $\overline{AB}$ takva da vrijedi $|AB| = c$. Neka je točka P takva da je $\measuredangle PAB = \alpha$. Neka je točka Q takva da je $\measuredangle ABQ = \beta$. Pravci AP i BQ sijeku se u točki C. Konstruirali smo jedinstveni trokut ABC (slika 2.9).

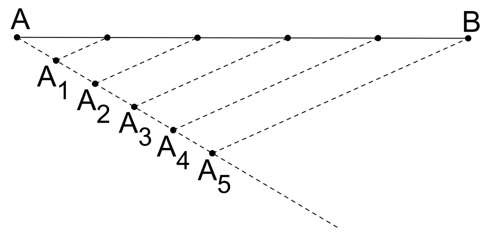


Slika 2.9

TK10 **Dijeljenje dužine na jednake dijelove**

Dužinu $\overline{AB}$ potrebno je podijeliti na n jednakih dužina. Uzmimo da je $n = 5$.

Položimo polupravac s točkom A kao početnom točkom u nekom pogodno odabranom smjeru (slika 2.10). Nanesimo na taj pravac počevši od točke A pet puta neku odabranu dužinu $|AA_1| = |A_1A_2| = |A_2A_3| = |A_3A_4| = |A_4A_5|$. Povucimo zatim paralele s $\overline{A_5B}$ točkama $A_1, A_2, ..., A_5$ koje dijele dužinu $\overline{AB}$ na pet jednakih dijelova, što se lako dokaže pomoću sličnosti trokuta (Talesov teorem1.23).



Slika 2.10

2.2 Rješavanje konstruktivnih zadataka

Konstruktivni zadatak je u potpunosti riješen ako smo konstruirali sva rješenja, tj. ako smo konstruirali sve moguće figure koje zadovoljavaju uvjete u zadatku. Rješavanje konstruktivnog zadatka sastoji se od četiri etape;

1. analiza

2. konstrukcija
3. dokaz
4. rasprava

U **analizi** zadatka pretpostavljamo da je zadatak riješen. Crtamo skicu i na njoj ističemo dane i tražene figure ili dijelove figura. Uočavamo njihov međusobni odnos, nadopunjujemo crtež i nastojimo uočiti figure koje znamo konstruirati i čija konstrukcija rješava naš konstruktivni zadatak. Pronalaženje načina konstruiranja često je razlaganje zadatka na niz već poznatih i elementarnih zadataka.

Konstrukcija, odnosno opis konstrukcije, dio je zadatka gdje se na temelju analize odredi izvođenje konačnog broja temeljnih konstrukcija ili nekih od prije poznatih konstruktivnih zadataka, kojima se dobiva tražena figura.

Dokaz je etapa u kojoj je potrebno dokazati da svaka konstrukcijom dobivena figura odgovara uvjetima zadatka.

U **raspravi** potrebno je odrediti broj rješenja zadatka i raspraviti je li u svim slučajevima konstrukcija provediva, a ako u nekima nije, pronaći konstrukciju za takve slučajeve. Potrebno je, dakle, odgovoriti na pitanja: 1. je li moguće figuri naći rješenje, uz kakve uvjete rješenja postoje i koliko ih je; 2. kako ovisi broj rješenja o odabranim elementima u danoj figuri.

Postoji nekoliko metoda kojima se služimo pri geometrijskom konstruiranju. Istaknut ćemo i opisati ovdje one metode koje će se koristiti u ovom radu:

1. Metoda presjeka
2. Algebarska metoda

Metoda presjeka. Kao što je već rečeno, riješiti neki konstruktivni zadatak znači na temelju neke dane figure konstruirati traženu figuru koja zadovoljava stanovite uvjete. Pretpostavimo da su dana dva uvjeta. Ako su ti uvjeti nezavisni, najprije možemo zanemariti drugi uvjet i potražiti figuru Φ_1, odnosno skup svih točaka ravnine koje zadovoljavaju samo prvi uvjet.

Nakon što smo pronašli geometrijsko mjesto točaka za koje vrijedi prvi uvjet, odnosno figuru Φ_1, potražit ćemo drugu figuru, Φ_2, geometrijsko mjesto točaka koje zadovoljavaju drugi uvjet. Sada je očito da traženu figuru Φ koja zadovoljava oba uvjeta dobijemo kao presjek figura Φ_1 i Φ_2.

Navest ćemo sad nekoliko geometrijskih mjesta točaka koje ćemo koristiti prilikom rješavanja konstruktivnih problema u ovom radu i njihovu konstrukciju.

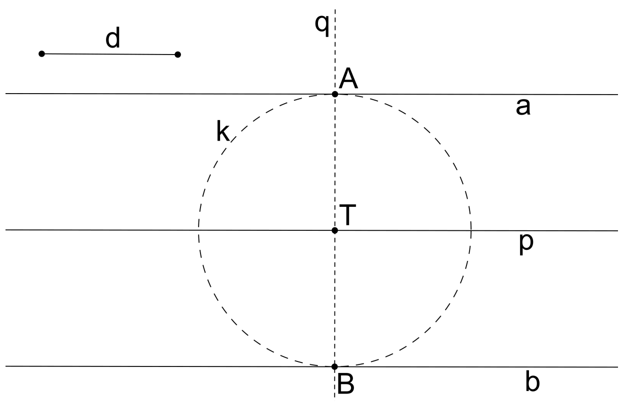
GMT1 **Geometrijsko mjesto točaka koje su udaljene od nekog pravca** p **za duljinu** d su dva pravca a i b paralelna s pravcem p i od njega udaljena za d s različitih strana.

Konstrukcija pravaca a i b provodi se na sljedeći način:

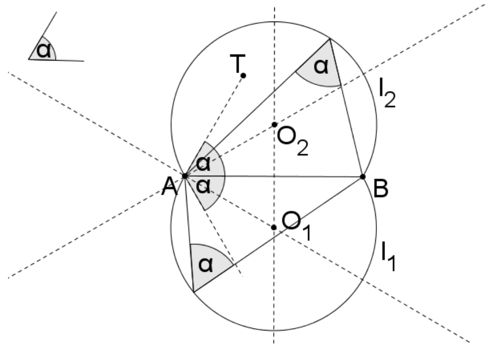
Odaberimo točku T na pravcu p te konstruirajmo okomicu q kroz točku T na pravac p. Neka je k kružnica sa središtem u točki T i polumjerom d. Kružnica k siječe pravac q u dvjema točkama, A i B. Kroz točke A i B konstruiramo pravce a i b paralelne s pravcem p. Očito je udaljenost pravaca a i b od pravca p jednaka d (slika 2.11).

GMT2 **Geometrijsko mjesto točaka iz kojih se dana dužina vidi pod danim kutom** dva su kružna luka nad danom dužinom takva da je obodni kut nad danom dužinom jednak danom kutu.

Neka je dana dužina $\overline{AB}$ i mjera kuta α. Neka je točka T takva da je $\measuredangle TAB = \alpha$. Središte O_1 kružnog luka l_1 nalazi se na simetrali dužine $\overline{AB}$ i na okomici kroz točku A na pravac AT. Kružni luk l_2 osno je simetričan na kružni luk l_1 obzirom na pravac AB (slika 2.12). Uočimo: ako je dani kut α pravi, iz teorema 1.23 slijedi da je geometrijsko mjesto točaka iz kojih se dana dužina vidi pod pravim kutom kružnica čiji je promjer dana dužina.



Slika 2.11



Slika 2.12

Algebarska metoda

Neka su dane dužine duljina $a, b, c, ..., k$. Potrebno je konstruirati dužinu duljine x, koja je dana algebarskim izrazom

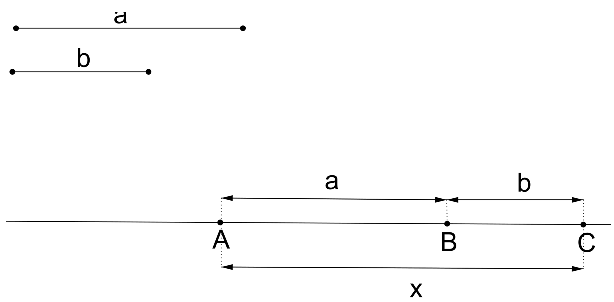
$$x = f(a, b, c, ..., k).$$

U ovom slučaju kažemo da smo konstruirali dani izraz. Varijable u ovom izrazu su duljine dužina, no razmatraju se samo one pozitivne vrijednosti za koje je gornji izraz pozitivan i ima smisla.

Promotrimo nekoliko jednostavnih konstrukcija algebarskih izraza.

AM1 Neka su a i b duljine dviju danih dužina. Potrebno je konstruirati dužinu duljine $x = a + b$.

Neka je p pravac na kojemu leži dužina $\overline{AB}$ duljine a. Konstruirajmo na pravcu p točku C tako da je $|BC| = b$ i da te dvije dužine imaju samo jednu zajedničku točku, točku B. Vrijedi: $|AC| = x$ (slika 2.13).



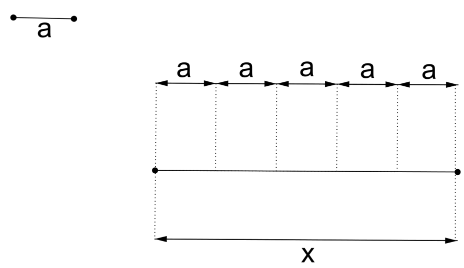
Slika 2.13

AM2 Neka je a dana duljina i neka je n proizvoljan prirodni broj. Potrebno je konstruirati dužinu duljine $x = na$.

Na temelju konstrukcije AM1 odmah je jasno da n puta pribrojimo istu dužinu duljine a, što je za $n = 5$ prikazano na slici 2.14.

AM3 Neka je a dana duljina i neka je n prirodni broj. Potrebno je konstruirati dužinu duljine $x = \frac{a}{n}$.

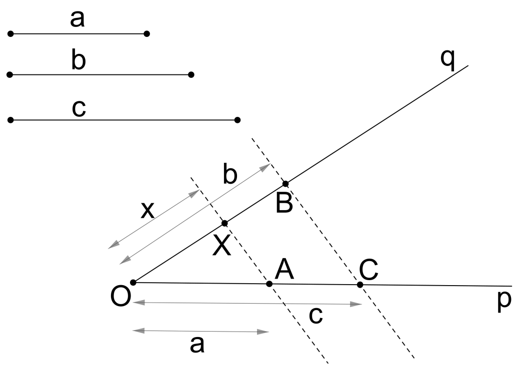
Ova konstrukcija je ekvivalentna konstrukciji dijeljenja dužine na jednake dijelove (TK10).



Slika 2.14

AM4 *Konstrukcija četvrte proporcionale*. Dane su dužine duljina a, b i c. Potrebno je konstruirati dužinu duljine $x = \frac{a \cdot b}{c}$.

Neka je p polupravac s početkom u točki O. Neka su A i C točke na polupravcu p tako da je $|OA| = a$ i $|OC| = c$. Neka je q polupravac s početkom u točki O različit od polupravca p i neka je B točka na polupravcu q takva da je $|OB| = b$. Točkom A povučemo paralelu pravcem BC koja siječe polupravac q u točki X. Duljina dužine $\overline{OX}$ jednaka je $x = \frac{a \cdot b}{c}$ (slika 2.15).



Slika 2.15

2.3 Pomoćne konstrukcije

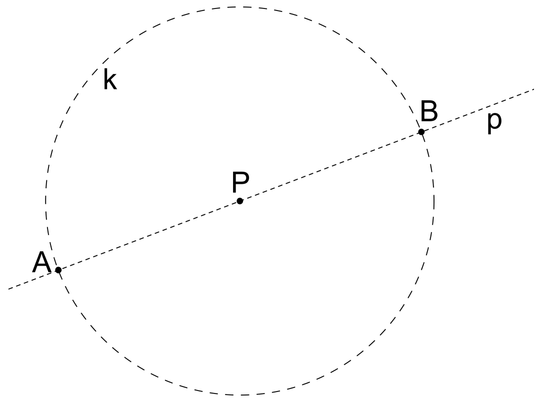
Pokazat ćemo sad, radi jednostavnosti i praktičnosti, nekoliko konstrukcija koje se pojavljuju u zadatcima trećeg i četvrtog poglavlja ovog rada.

PK1 U ravnini su dane dvije točke, A i P. Potrebno je konstruirati točku B tako da je točka B centralnosimetrična točki A obzirom na točku P.

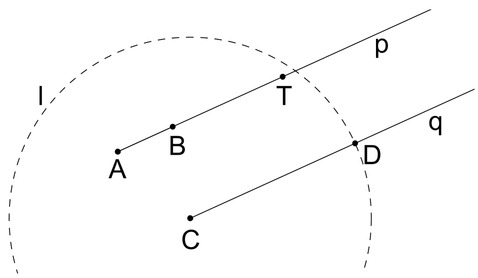
Neka je p pravac kroz točke A i P i neka je k kružnica sa središtem u P koja prolazi točkom A. Kružnica k siječe pravac p u točki B ($B \neq A$) (slika 2.16).

PK2 U ravnini su dane tri točke, A, B i C te $k \in \mathbf{N}$. Potrebno je konstruirati točku D tako da je $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$.

Neka je p polupravac s početkom u točki A kroz točku B. Algebarskom metodom AM2 na polupravcu p konstruiramo točku T tako da se točke B i T nalaze s iste strane točke A i tako da je $|AT| = k \cdot |AB|$. Neka je q polupravac s početkom u točki C iste orijentacije kao polupravac p. Konstruiramo kružnicu l sa središtem u točki C polumjera $|AT|$. Kružnica l siječe polupravac q u točki D (slika 2.17).



Slika 2.16



Slika 2.17

Poglavlje 3

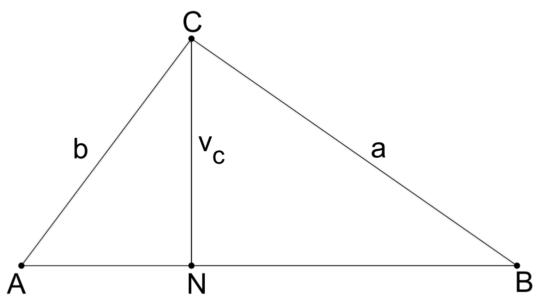
Konstruktivni problemi s visinama

U ovom poglavlju riješit ćemo nekoliko metričkih zadataka. Fokus problema u ovakvim zadatcima vezan je uz metrička svojstva figure kao što su duljina dužine, veličina kuta i slično. Rješavanje ovakvih zadataka svodi se na nalaženje figura čija metrička svojstva odgovaraju uvjetima zadatka. Riješimo li primjer konstruiravši u ravnini figuru Φ, uočavamo da postoji još beskonačno mnogo figura dane ravnine koje su do na izometriju sukladne figuri Φ. Međutim, nećemo reći da zadatak ima beskonačno mnogo rješenja, već ćemo promatrati koliko različitih figura zadovoljava uvjete zadatka, te na taj način odrediti broj rješenja.

Cjelovit popis konstrukcija trokuta s trima zadanim veličinama nalazi se u knjizi [4] na stranicama 356. - 357. Duljine stranica trokuta označene su s a, b i c, veličine unutarnjih kutova s α, β i γ. Oznake duljina visina trokuta su v_a, v_b i v_c, a duljina težišnica trokuta t_a, t_b i t_c. Odabrat ćemo i riješiti nekoliko primjera gdje je barem jedna od danih veličina duljina visine trokuta.

Primjer 3.1. *Konstruirajte trokut kojemu su zadane duljine stranica a i b, te duljina visine* v_c.

Analiza:



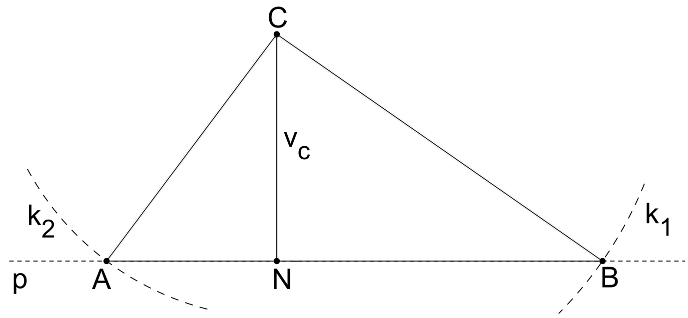
Slika 3.1

Neka je N nožište visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$ trokuta ABC. Vrijedi $|CN| = v_c$. Neka je p pravac koji prolazi točkom N i okomit je na dužinu $\overline{CN}$.

Točka B od točke C je udaljena za duljinu a. Drugim riječima, točka B leži na kružnici sa središtem u točki C i polumjerom a. Označit ćemo spomenutu kružnicu s k_1. Točka B leži i na pravcu p, pa je očito da je ona presjek pravca p i kružnice k_1. Na analogan način dobije se i točka A.

Konstrukcija:

1. konstrukcija dužine $\overline{CN}$ tako da vrijedi $|CN| = v_c$
2. konstrukcija pravca p tako da je $N \in p$ i $p \perp CN$
3. konstrukcija kružnice k_1 sa središtem u točki C i polumjerom a
4. kružnica k_1 siječe pravac p u točki B
5. konstrukcija kružnice k_2 sa središtem u točki C i polumjerom b
6. kružnica k_2 siječe pravac p u točki A



Slika 3.2

Iako je konstrukcija jednostavna, dokažimo njenu ispravnost.

Dokaz:

Potrebno je dokazati da je $|BC| = a$, $|AC| = b$ i da je duljina visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$ ovog trokuta jednaka v_c.

Duljina dužine $\overline{BC}$ jednaka je polumjeru kružnice k_1, što vidimo iz trećeg i četvrtog koraka konstrukcije. Iz trećeg koraka konstrukcije slijedi da je ta duljina jednaka a. Dokazali smo prvu tvrdnju. Analogno zaključujemo da vrijedi i $|AC| = b$.

Duljina visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$ jednaka je udaljenosti vrha C od pravca AB. Iz drugog koraka konstrukcije slijedi da je pravac p okomit na pravac CN i da prolazi točkom N. Iz četvrtog i šestog koraka konstrukcije vidimo da točke A i B leže na pravcu p, pa slijedi da točka N leži na pravcu AB. Točka N je, prema tome, nožište visine iz vrha C na nasuprotnu stranicu trokuta ABC. Iz prvog koraka konstrukcije vidimo da vrijedi $|CN| = v_c$, čime je dokazano da je duljina visine iz vrha C jednaka v_c.

Rasprava:

Analizirajmo pojedine korake konstrukcije te raspravimo one korake u kojima može doći do "problema".

U četvrtom koraku konstrukcije mogu se pojaviti tri različita slučaja:

1. Ako je $v_c > a$ kružnica k_1 ne siječe pravac p, pa u ovom slučaju rješenje ne postoji (slika 3.3).

2. Ako je $v_c = a$ kružnica k_1 dira pravac p u točki N, a vrh B podudara se s točkom N.

3. Ako je $v_c < a$ kružnica k_1 siječe pravac p u točkama B i B_1. Ove su dvije točke osnosimetrične obzirom na pravac CN pa možemo odabrati jednu od njih jer taj odabir neće utjecati na jedinstvenost rješenja.

Šesti korak konstrukcije također ćemo raspraviti podjelom na tri slučaja:

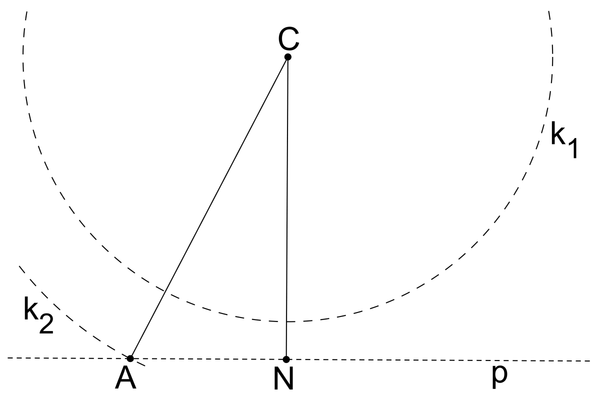
1. Ako je $v_c > b$ tada kružnica k_2 ne siječe pravac p, pa rješenje ne postoji.

2. Ako je $v_c = b$ tada kružnica k_2 dira pravac p u točki N, tj. vrh A podudara se s točkom N.

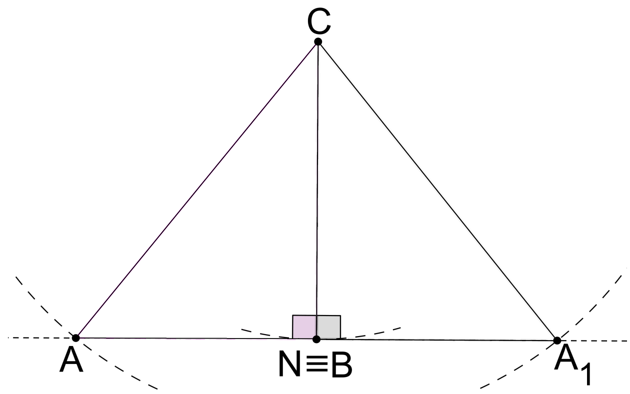
3. Ako je $v_c < b$ tada kružnica k_2 siječe pravac p u točkama A i A_1.

Povežimo sada ove zaključke. Ukoliko vrijedi da je $v_c > b$ ili $v_c > a$, očito je da trokut nije moguće konstruirati.

Neka je $v_c = a$ i $v_c < b$. Slijedeći korake konstrukcije dobit ćemo dva trokuta, ABC i A_1BC. Uočavamo da su oni pravokutni s pravim kutom pri vrhu B, te da su osnosimetrični obzirom na pravac CN, a samim time i sukladni (slika 3.4).



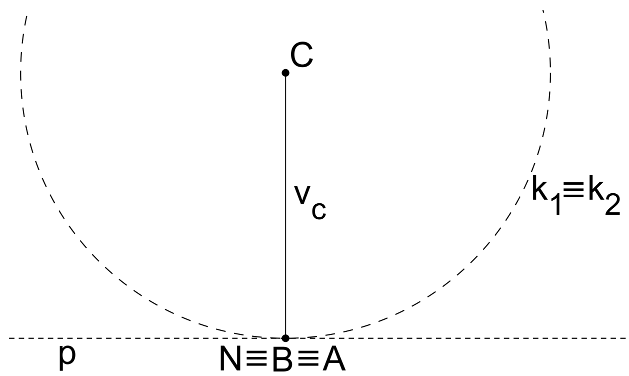
Slika 3.3



Slika 3.4

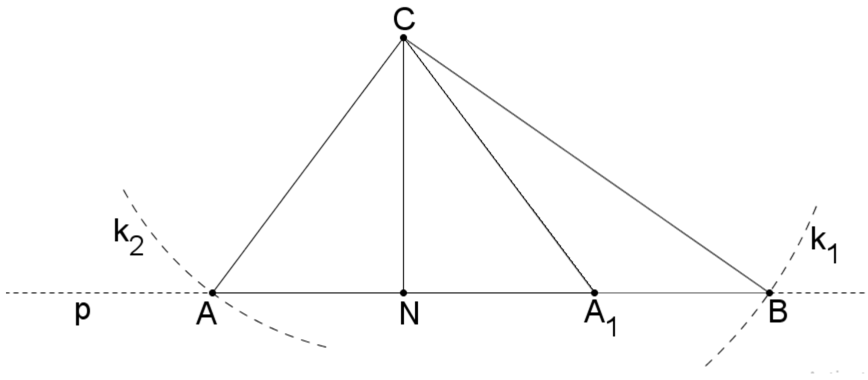
Ako je $v_c = b$ i $v_c < a$, analogno ćemo dobiti jedinstveno rješenje; dva sukladna pravokutna trokuta ABC i AB_1C s pravim kutom pri vrhu B.

Ako vrijedi $v_c = a = b$, rješenje ne postoji (slika 3.5).



Slika 3.5

U slučaju kad je $v_c < a$ i $v_c < b$, možemo u četvrtom koraku konstrukcije bez smanjenja općenitosti odabrati točku B. U šestom koraku konstrukcije dobit ćemo dvije točke A i A_1, a time i dva trokuta, ABC i A_1BC, koji nisu sukladni, a oba zadovoljavaju uvjete zadatka, što znači da u ovom slučaju zadatak ima dva različita rješenja (slika 3.6).

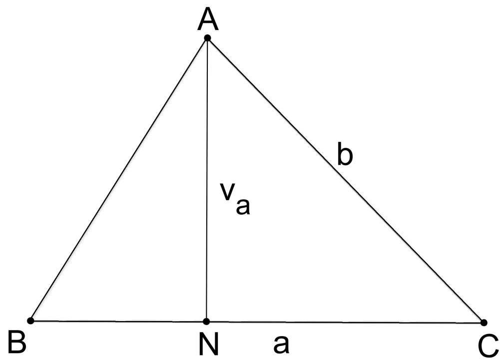


Slika 3.6

□

Primjer 3.2. *Konstruirajte trokut kojemu su zadane duljine stranica a i b, te duljina visine* v_a.

Analiza:



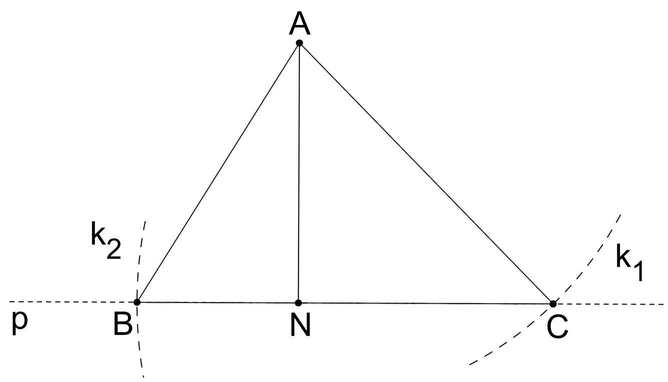
Slika 3.7

Neka je N nožište visine iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$ trokuta ABC. Vrijedi da je $|AN| = v_a$. Neka je p pravac koji prolazi točkom N i okomit je na dužinu $\overline{AN}$. Točka C leži na pravcu p. Udaljenost od točke C do točke A jednaka je b. Neka je k_1 kružnica sa središtem u točki A i polumjerom b. Točka C leži na kružnici k_1. One točke koje zadovoljavaju oba spomenuta uvjeta dobit ćemo presječemo li kružnicu k_1 pravcem p.

Neka je k_2 kružnica sa središtem u točki C i polumjerom a. Točka B leži na kružnici k_2 i na pravcu p. Presječemo li kružnicu k_2 pravcem p dobit ćemo točke koje zadovoljavaju navedene uvjete.

Konstrukcija:

1. konstrukcija dužine $\overline{AN}$ tako da vrijedi $|AN| = v_a$
2. konstrukcija pravca p tako da je $N \in p$ i $p \perp AN$
3. konstrukcija kružnice k_1 sa središtem u točki A i polumjerom b
4. kružnica k_1 siječe pravac p u točki C
5. konstrukcija kružnice k_2 sa središtem u točki C i polumjerom a
6. kružnica k_2 siječe pravac p u točki B



Slika 3.8

Dokaz:

Potrebno je dokazati da je $|BC| = a$, $|AC| = b$ te da je duljina visine iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$ ovog trokuta jednaka v_a.

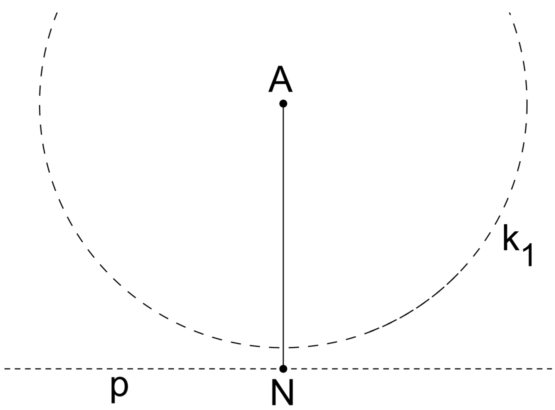
Iz petog i šestog koraka konstrukcije vidimo da je udaljenost točaka B i C jednaka polumjeru kružnice k_2, što je upravo a. Analogno, iz trećeg i četvrtog koraka konstrukcije vidimo da vrijedi $|AC| = b$.

Ostaje nam pokazati da je duljina visine iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$ jednaka v_a. Duljina visine trokuta iz vrha A na dužinu $\overline{BC}$ jednaka je udaljenosti točke A do pravca BC. Dokazat ćemo da je točka N nožište spomenute visine. Iz drugog koraka konstrukcije vidimo da pravac p prolazi točkom N i okomit je na dužinu $\overline{AN}$, a iz četvrtog i šestog koraka konstrukcije imamo da pravac p prolazi točkama B i C. Slijedi da točka N leži na pravcu BC. Točka N je, prema tome, nožište visine iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$. Iz prvog koraka konstrukcije vidimo da vrijedi $|AN| = v_a$. Ovime smo dokazali sve tri tvrdnje.

Rasprava:

U četvrtom koraku konstrukcije presjek kružnice k_1 i pravca p ovisi o sljedećem:

1. Ako je $b < v_a$ kružnica k_1 ne siječe pravac p pa u ovom slučaju rješenje ne postoji (slika 3.9).

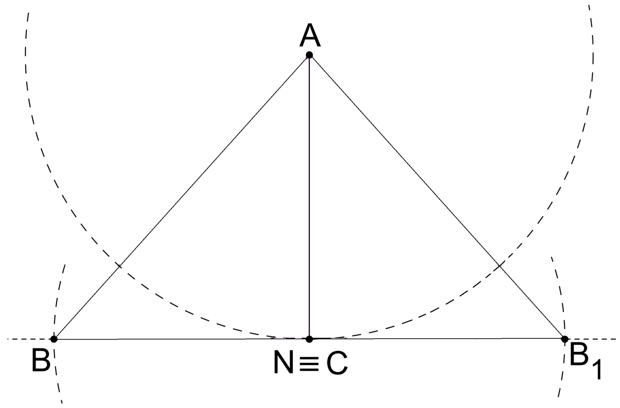


Slika 3.9

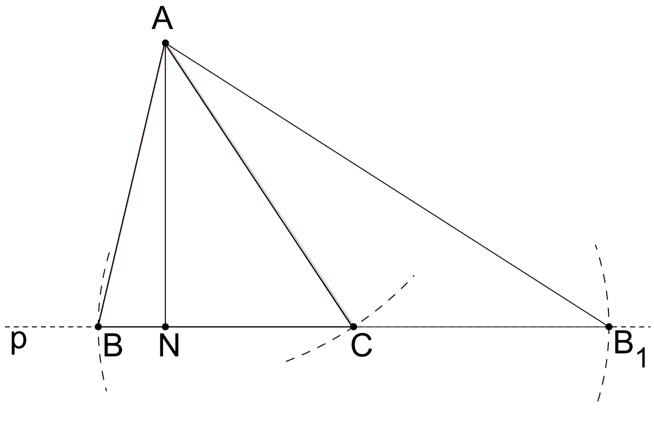
2. Ako je $b = v_a$ kružnica k_1 dira pravac p u točki N, pa se točka N i vrh C traženog trokuta podudaraju. U petom koraku konstrukcije odabrat ćemo točku $N \equiv C$ kao središte kružnice k_2. Kružnica k_2 u šestom koraku konstrukcije siječe pravac p u točkama B i B_1, budući da središte kružnice k_2 leži na pravcu p. Primjećujemo da su trokuti ABC i AB_1C pravokutni s pravim kutom pri vrhu A, te osnosimetrični obzirom na pravac p pa samim time i sukladni. U ovom slučaju rješenje je jedinstveno (slika 3.10).

3. Za $b > v_a$ kružnica k_1 siječe pravac p u točkama C i C_1. Ove su dvije točke osnosimetrične obzirom na pravac AN, pa odabir bilo koje od njih neće utjecati na jedinstvenost rješenja. Odaberimo točku C. Slijedeći korake konstrukcije dobit ćemo

trokute ABC i AB_1C. Trokut ABC očito nije sukladan trokutu AB_1C, a oba trokuta zadovoljavaju uvjete zadatka. Dobili smo, dakle, dva različita rješenja (slika 3.11).



Slika 3.10



Slika 3.11

□

Primjer 3.3. *Konstruirajte trokut kojemu je zadana duljina stranice a, te duljine visina* v_b *i* v_c.

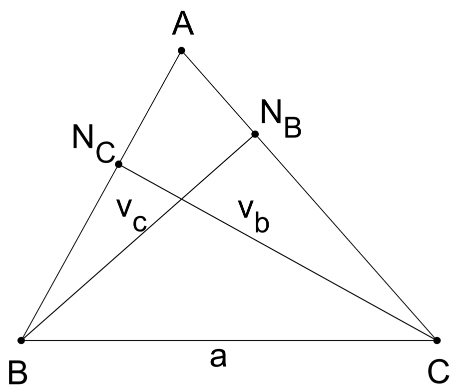
Analiza:

Neka je N_B nožište visine iz vrha B na stranicu $\overline{AC}$, a N_C nožište visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$ trokuta ABC. Uočimo da vrijedi:

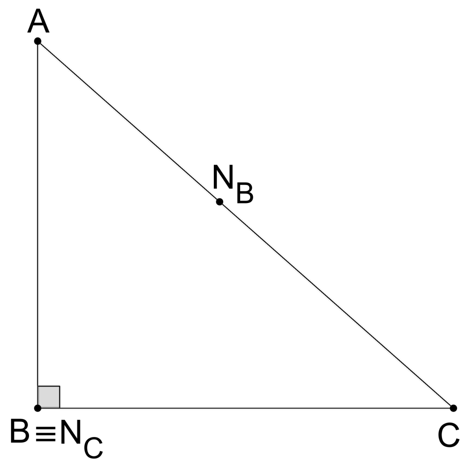
$$\measuredangle CN_CB = \measuredangle CN_BB = 90^\circ.$$

Prema Talesovom teoremu (1.23) slijedi da točke N_B i N_C leže na kružnici čiji je promjer dužina $\overline{BC}$. Označimo ovu kružnicu s k. Točka N_B udaljena je od točke B za duljinu v_b, a točka N_C od točke C za duljinu v_c. Neka je k_1 kružnica sa središtem u točki B i polumjerom v_b, te neka je k_2 kružnica sa središtem u točki C polumjera v_c. Točka N_B leži na kružnici k_1, a točka N_C na kružnici k_2. Točku A dobit ćemo kao presjek pravaca CN_B i BN_C (slika 3.12).

Ako je kut uz vrh B pravi, točka N_C podudara se s točkom B i vrijedi da je $v_c = a$. Neka je p pravac koji prolazi točkom B i okomit je na dužinu $\overline{BC}$. Točka A sjecište je pravaca p i CN_B (slika 3.13).



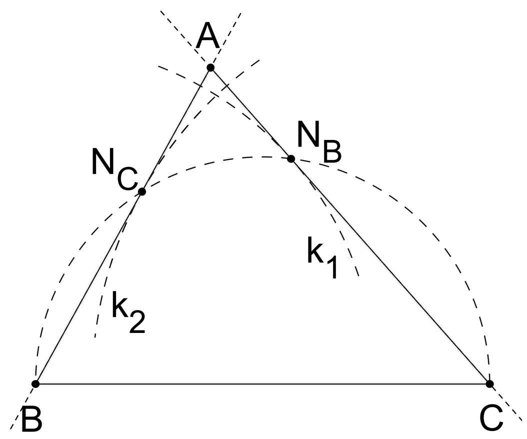
Slika 3.12



Slika 3.13

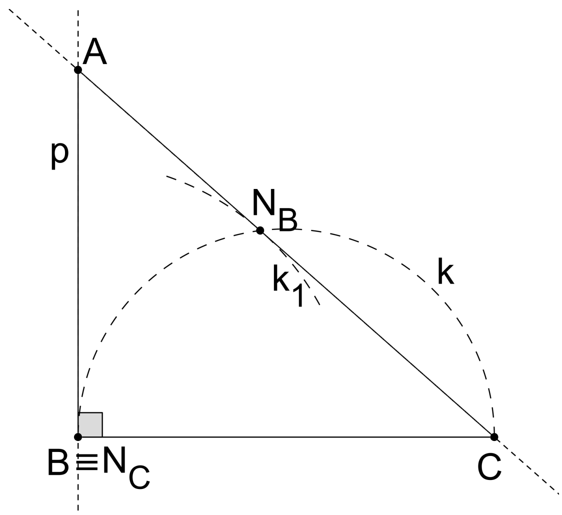
Konstrukcija:

1. konstrukcija dužine $\overline{BC}$ tako da je $|BC| = a$
2. konstrukcija kružnice k tako da joj je dužina $\overline{BC}$ promjer
3. konstrukcija kružnice k_1 sa središtem u točki B i polumjerom v_b
4. kružnica k_1 siječe kružnicu k u točki N_B
5. konstrukcija kružnice k_2 sa središtem u točki C i polumjerom v_c
6. kružnica k_2 siječe kružnicu k u točki N_C
7. pravci CN_B i BN_C sijeku se u točki A



Slika 3.14

Napomena: Ako je $v_c = a$, umjesto sedmog koraka konstrukcije potrebno je konstruirati pravac p koji prolazi točkom B i okomit je na dužinu $\overline{BC}$. Točka A je sjecište pravaca p i BN_C (slika 3.15). Analogno provodimo konstrukciju za $v_b = a$.



Slika 3.15

Dokaz:

Potrebno je dokazati da je duljina stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC jednaka a, te da su duljine visina iz vrha B na stranicu $\overline{AC}$ i iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$ ovog trokuta jednake v_b, odnosno v_c.

Iz prvog koraka konstrukcije slijedi da je $|BC| = a$, čime je prva tvrdnja dokazana.

Duljina visine iz vrha B na stranicu $\overline{AC}$ jednaka je udaljenosti točke B do pravca AC. Iz četvrtog koraka konstrukcije vidimo da točka N_B leži na kružnici k čiji je promjer dužina $\overline{BC}$. Slijedi da je $\measuredangle CN_BB$ pravi, odnosno da su pravci CN_B i N_BB međusobno okomiti. Točka A leži na pravcu CN_B (sedmi korak konstrukcije), tj. točke A, C i N_B su kolinearne. Iz svega navedenog slijedi da je točka N_B nožište visine iz vrha B trokuta ABC. Iz četvrtog koraka konstrukcije vidimo i da točka N_B leži na kružnici k_1 sa središtem u točki B polumjera v_b, pa slijedi da je udaljenost od točke B do točke N_B jednaka v_b, što smo i htjeli dokazati.

Analogno dokazujemo da je točka N_C nožište visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$ te da je $|CN_C| = v_c$.

Rasprava:

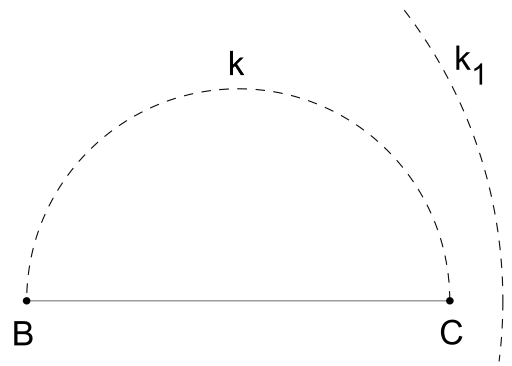
U četvrtom koraku konstrukcije kružnica k_1 neće sjeći kružnicu k za $v_b > a$, pa takav trokut ne postoji (slika 3.16). Analogno, u šestom koraku konstrukcije kružnica k_2 neće sjeći kružnicu k za $v_c > a$, pa ni takav trokut ne postoji.

Za $v_b = a$, kružnica k_1 dira kružnicu k u točki C. Za $v_b < a$, kružnica k_1 siječe kružnicu k u dvjema točkama, N_B i N'_B. Ove su dvije točke osnosimetrične obzirom na pravac BC, pa možemo bez smanjenja općenitosti odabrati točku N_B.

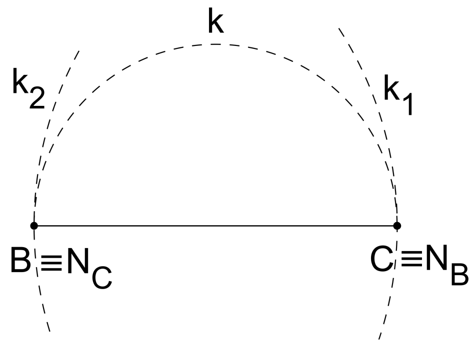
1. Neka je $v_b = a$.

1.a Za $v_c = v_b = a$ pravi kut se nalazi pri vrhovima B i C, pa takav trokut ne postoji (slika 3.17).

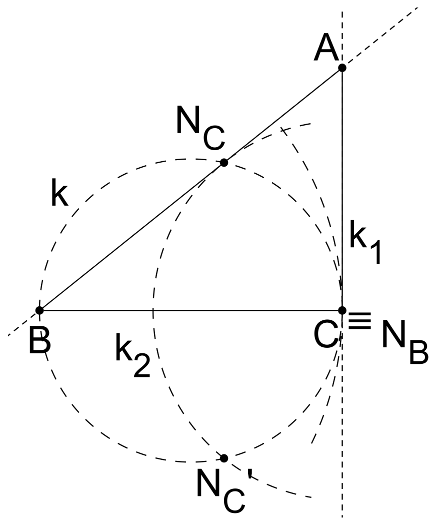
1.b Za $v_c < a$ kružnica k_2 siječe kružnicu k u točkama N_C i N'_C. Ove su dvije točke osnosimetrične obzirom na pravac BC pa je rješenje jedinstveno (slika 3.18).



Slika 3.16



Slika 3.17

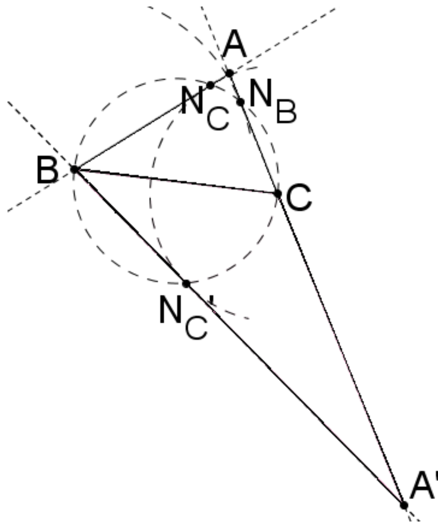


Slika 3.18

2. Neka je sad $v_b < a$.

2.a Za $v_c = a$ kružnica k_2 dira kružnicu k u točki B. Rješenje je jedinstveno.

2.b Za $v_c < a$, kružnica k_2 siječe kružnicu k u točkama N_C i N'_C. Pogledajmo sad sedmi korak konstrukcije. Pravci CN_B i BN_C sijeku se u točki A, a pravci CN_B i BN'_C u točki A'. Trokuti ABC i $A'BC$ očigledno nisu sukladni, a oba zadovoljavaju uvjete zadatka. Prema tome, u ovom slučaju postoje dva različita rješenja (slika 3.19).

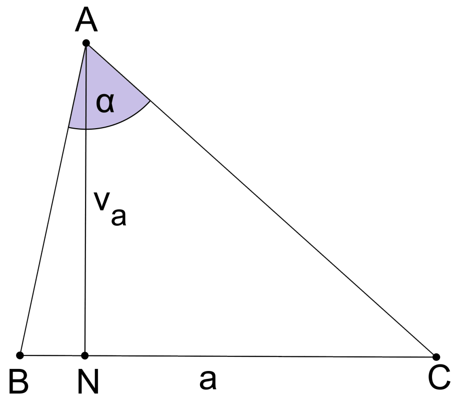


Slika 3.19

□

Primjer 3.4. *Konstruirajte trokut kojemu su zadane duljine stranice a i visine v_a, te mjera kuta α.*

Analiza:



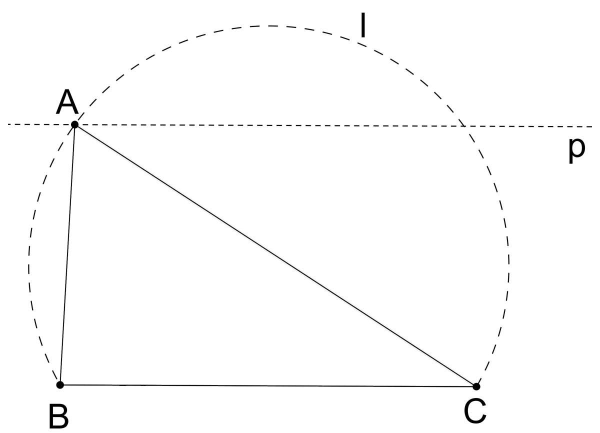
Slika 3.20

Neka je N nožište visine iz vrha A. Očito, $|AN| = v_a$. Vrijedi da je $\measuredangle CAB = \alpha$.

Neka je p pravac paralelan s dužinom $\overline{BC}$ i od nje udaljen za duljinu visine v_a. Točka A leži na pravcu p i na geometrijskom mjestu točaka iz kojih se dužina $\overline{BC}$ vidi pod kutom α. Spomenuto geometrijsko mjesto točaka je unija kružnih lukova čija je konstrukcija detaljno opisana u prethodnom poglavlju (konstrukcija GMT2). Budući da su ti lukovi osnosimetrični obzirom na pravac BC, bez smanjenja općenitosti možemo odabrati jedan od tih lukova. Označimo ga s l. Točke koje zadovoljavaju oba uvjeta dobit ćemo presiječemo li pravac p i kružni luk l.

Konstrukcija:

1. konstrukcija dužine $\overline{BC}$ tako da je $|BC| = a$
2. konstrukcija kružnog luka l tako da je l geometrijsko mjesto točaka iz kojih se dužina $\overline{BC}$ vidi pod kutom α (konstrukcija GMT2)
3. konstrukcija pravca p tako da udaljenost od pravca p do pravca BC iznosi v_a (konstrukcija GMT1)
4. pravac p siječe kružni luk l u točki A



Slika 3.21

Dokaz:

Potrebno je dokazati da je $|BC| = a$, da je duljina visine iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$ trokuta ABC jednaka v_a, te da je mjera kuta $\measuredangle BAC$ jednaka α.

Iz prvog koraka konstrukcije očigledno je da vrijedi $|BC| = a$, čime smo dokazali prvu tvrdnju.

Duljina visine iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$ jednaka je udaljenosti točke A od pravca BC, što je jednako udaljenosti među pravcima p i BC. Iz trećeg koraka konstrukcije vidimo da je ta udaljenost jednaka v_a.

Ostalo nam je još pokazati da je mjera kuta $\measuredangle BAC = \alpha$. Iz trećeg i četvrtog koraka konstrukcije imamo da točka A leži na kružnom luku l, a iz konstrukcije luka l (GMT1) slijedi treća tvrdnja.

Rasprava:

U četvrtom koraku konstrukcije presjek pravca p i kružnog luka l može biti prazan, jednočlan ili dvočlani skup. Udaljenost među pravcima p i BC je jednaka v_a, što slijedi iz trećeg koraka konstrukcije. Odaberimo na kružnom luku l točku čija je udaljenost od pravca BC najveća, te ju označimo s K. Ova se točka nalazi na pravcu paralelnom s pravcem BC. Očito presjek odabrane paralele s kružnim lukom l mora biti najviše jedna točka, jer u suprotnom udaljenost neće biti najveća. Spomenuta paralela je, prema tome, tangenta na kružni luk l. Točka K jednako je udaljena od krajeva dužine $\overline{BC}$ pa slijedi da se ona nalazi na simetrali dužine $\overline{BC}$.

Izračunat ćemo sad duljinu dužine $|KP|$, gdje je točka P polovište dužine $\overline{BC}$. Pogledajmo sliku 3.22. Pravac KP je simetrala dužine $\overline{BC}$ pa vrijedi $\measuredangle BPK = 90°$, odnosno trokut BPK je pravokutan.

Obzirom da se točka K nalazi na kružnom luku l, mjera kuta $\measuredangle CKB$ jednaka je α. Iz toga slijedi da je mjera kuta $\measuredangle PKB$ jednaka $\frac{\alpha}{2}$. Budući da je trokut BPK pravokutan, slijedi:

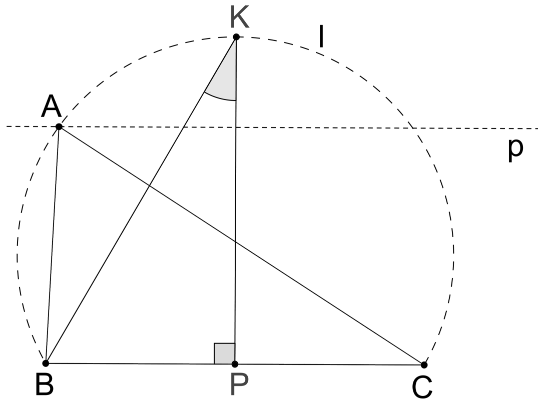
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{|BP|}{|KP|}$$

a znamo i da vrijedi

$$|BP| = \frac{a}{2}$$

pa jednostavnim računom dobijemo da je

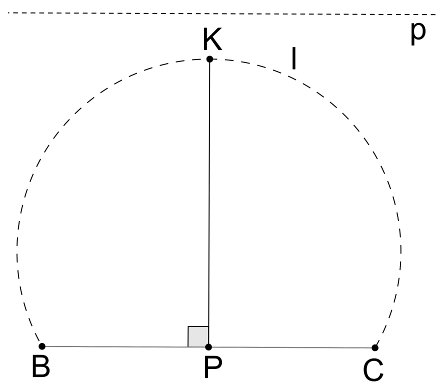
$$|KP| = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$



Slika 3.22

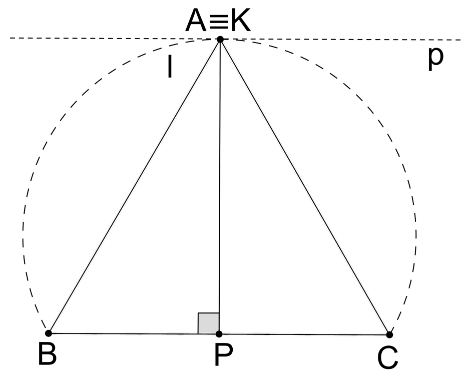
Vratimo se sad na četvrti korak konstrukcije traženog trokuta gdje se mogu pojaviti tri različita slučaja:

1. Ako je $\dfrac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}} < v_a$, pravac p ne presjeca kružni luk l, pa takav trokut ne postoji (slika 3.23).



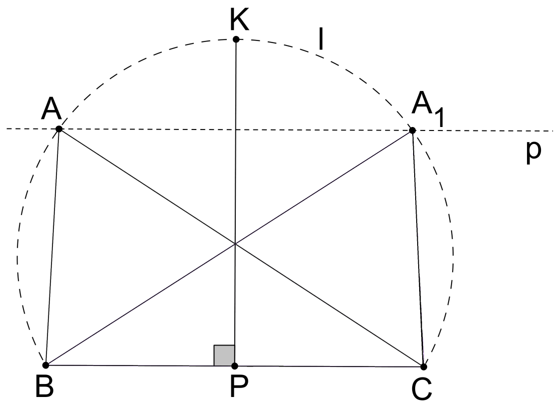
Slika 3.23

2. Ako vrijedi $\dfrac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}} = v_a$, pravac p dira kružni luk l u jednoj točki, i to upravo u točki K, pa je $A \equiv K$ i rješenje je jedinstveno (slika 3.24).



Slika 3.24

3. Za $\dfrac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}} > v_a$, pravac p siječe kružni luk l u dvijema točkama, koje ćemo označiti s A i A_1. Ove su dvije točke osnosimetrične obzirom na pravac KP, pa su i trokuti ABC i A_1BC osnosimetrični, odnosno sukladni. Rješenje je, prema tome, jedinstveno (slika 3.25).



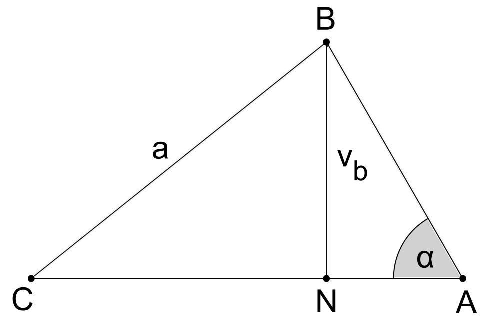
Slika 3.25

□

Primjer 3.5. *Konstruirajte trokut kojemu su zadane duljine stranice a i visine v_b te mjera kuta α.*

Analiza:

Neka je N nožište visine iz vrha B na stranicu $\overline{CA}$ trokuta ABC.



Slika 3.26

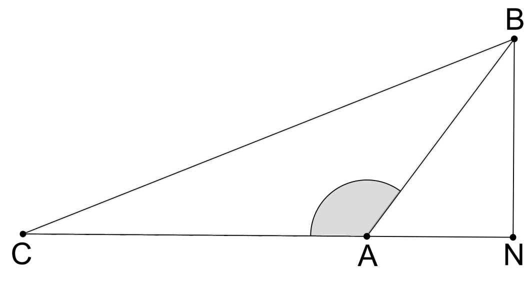
Uočimo da vrijedi:

$$\measuredangle ABN = 180° - (90° + \alpha) = 90° - \alpha.$$

Promotrimo trokut ABN (slika 3.26). Poznata nam je mjera kuta $\measuredangle ABN$ i duljina dužine $\overline{BN}$ koja iznosi v_b. Znamo i da je kut $\measuredangle BNA$ pravi. Ova tri elementa dovoljna su nam kako bismo konstruirali trokut ABN koristeći KSK konstrukciju trokuta (konstrukcija TK9).

Točka C leži na pravcu AN i od točke B je udaljena za a. Neka je k kružnica sa središtem u točki B i polumjerom a. Točka C leži na kružnici k.

Primijetimo, ukoliko je $\alpha > 90°$, nećemo na opisani način moći izračunati mjeru kuta $\measuredangle ABN$. Pogledajmo sliku 3.27.



Slika 3.27

Uz oznake kao na slici, vidimo da tada vrijedi:

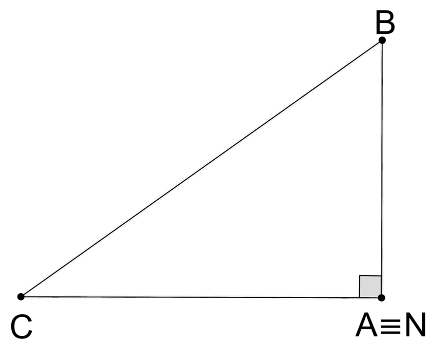
$$\measuredangle BAN = 180° - \alpha$$

te slijedi:

$$\measuredangle NBA = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) - 90^\circ = \alpha - 90^\circ.$$

Konstruirat ćemo trokut NBA koristeći KSK konstrukciju trokuta (TK9), gdje su nam poznate mjere kutova $\measuredangle NBA$ i $\measuredangle ANB$ te duljina dužine $\overline{NB}$ koja iznosi v_b. Točku C dobit ćemo na način opisan u prethodnom slučaju.

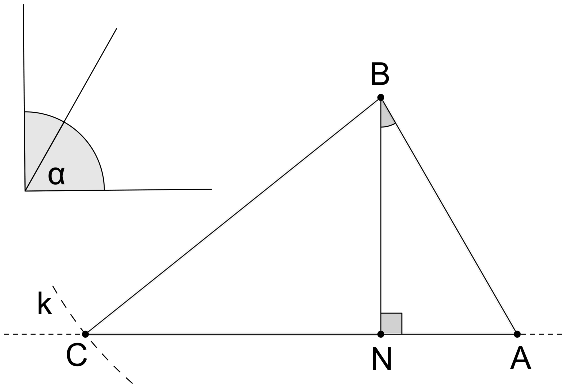
Ako je $\alpha = 90^\circ$, vrh A se podudara s točkom N pa trokut ABN koji smo konstruirali u gornjim slučajevima više ne postoji. U ovom slučaju je $|AB| = v_b$, a točka C leži na okomici p iz točke A na pravac AB i na kružnici k.



Slika 3.28

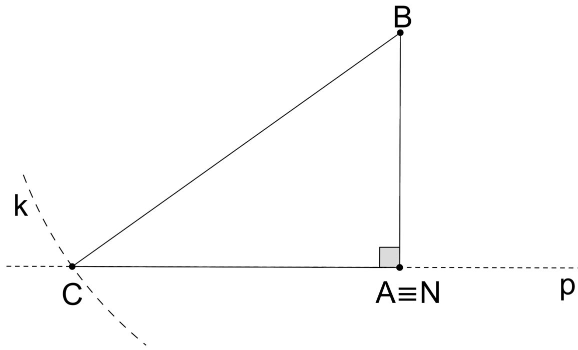
Konstrukcija:

1. konstrukcija kuta mjere $90^\circ - \alpha$ za $\alpha < 90^\circ$, odnosno kuta mjere $\alpha - 90^\circ$ za $\alpha > 90^\circ$
2. KSK konstrukcija trokuta ABN tako da je $\measuredangle BNA = 90^\circ$, $\measuredangle ABN = 90^\circ - \alpha$ $(\alpha - 90^\circ)$ i $|BN| = v_b$ (konstrukcija TK9)
3. konstrukcija kružnice k sa središtem u točki B i polumjerom a
4. kružnica k siječe pravac AN u točki C



Slika 3.29

Napomena: ako je $\alpha = 90°$, umjesto prvog i drugog koraka konstrukcije treba konstruirati dužinu $\overline{BA}$ tako da je $|BA| = v_b$, a u četvrtom koraku konstrukcije umjesto pravca AN konstruirati pravac p koji prolazi točkom A te je okomit na dužinu $\overline{BA}$. Kružnica k u ovom slučaju siječe pravac p u točki C.



Slika 3.30

Dokaz:

Potrebno je dokazati da vrijedi $|BC| = a$, da je duljina visine iz vrha B na stranicu $\overline{AC}$ jednaka v_b te da je mjera kuta $\measuredangle CAB$ jednaka α.

Iz četvrtog koraka konstrukcije jasno je da točka C leži na kružnici k, a iz trećeg koraka konstrukcije vidimo da je njena udaljenost od točke B jednaka upravo a, čime smo dokazali prvu tvrdnju.

Duljina visine iz vrha B na stranicu $\overline{AC}$ jednaka je udaljenosti od točke B do nožišta visine iz vrha B. Dokazat ćemo da je točka N to nožište. Naime, u drugom koraku konstrukcije vidimo da je $\measuredangle BNA$ pravi, odnosno da su pravci AN i BN međusobno okomiti. Iz četvrtog koraka konstrukcije vidimo da točka N leži na pravcu AC. Slijedi da je N nožište spomenute visine. Iz drugog koraka konstrukcije imamo da vrijedi $|BN| = v_b$, što dokazuje drugu tvrdnju.

Iz drugog koraka konstrukcije za $\alpha < 90°$ slijedi da je $\measuredangle NAB = 180° - 90° - (90° - \alpha)$, pa jednostavnim računom dobijemo da je $\measuredangle NAB = \alpha$. Iz četvrtog koraka konstrukcije slijedi da su točke A, N i C kolinearne pa vrijedi $\measuredangle NAB = \measuredangle CAB$.

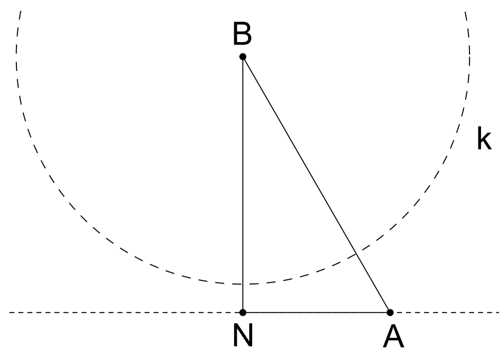
Za $\alpha > 90°$ iz drugog koraka konstrukcije dobijemo da je $\measuredangle NAB = 180° - \alpha$, a iz četvrtog koraka konstrukcije vidimo da su točke C, A i N kolinearne pa slijedi da je $\measuredangle CAB = 180° - \measuredangle NAB$ iz čega slijedi $\measuredangle CAB = \alpha$.

Za $\alpha = 90°$ sve tvrdnje očito vrijede.

Rasprava:

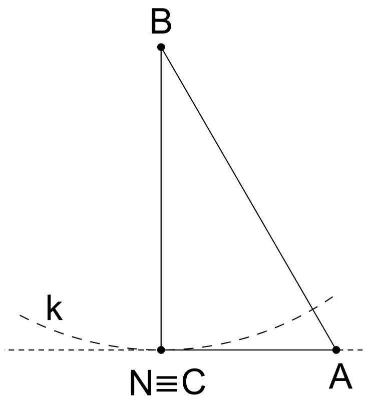
Provedba četvrtog koraka konstrukcije ovisi o sljedećem:

1. Ako je $a < v_b$, kružnica k ne siječe pravac AN pa rješenje ne postoji (slika 3.31).



Slika 3.31

2. Ako je $a = v_b$, kružnica k dira pravac AN u točki $N \equiv C$, pa je rješenje jedinstveno (slika 3.32)

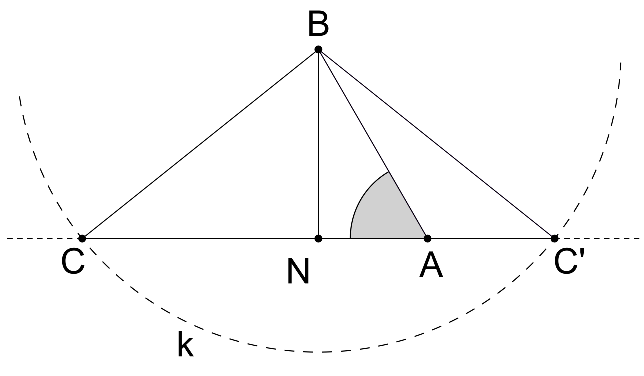


Slika 3.32

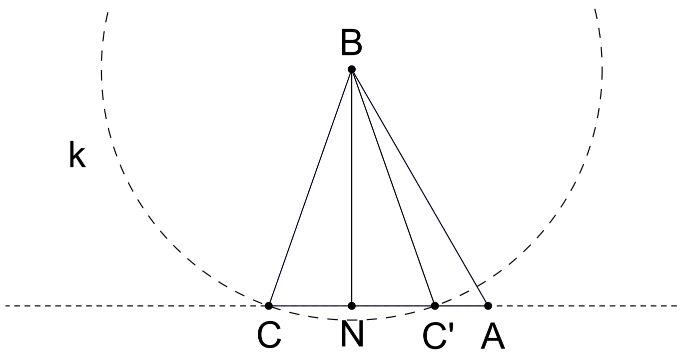
3. Za $a > v_b$, kružnica k siječe pravac AN u dvjema točkama. Označit ćemo ove točke s C i C'. Ako je $a > c$, odnosno $\frac{v_b}{\sin\alpha} < a$, uočavamo da je u dobivenom trokutu ABC' kut $\measuredangle C'AB$ veći od 90°, što povlači da je za $\frac{v_b}{\sin\alpha} < a$ i $\alpha < 90°$ traženo rješenje trokut ABC, a za $\frac{v_b}{\sin\alpha} < a$ i $\alpha > 90°$ rješenje je trokut ABC' (3.33).

3.1 Za $\frac{v_b}{\sin\alpha} > a$ i $\alpha < 90°$, oba dobivena trokuta zadovoljavaju uvjete konstruktivnog zadatka pa u ovom slučaju postoje dva rješenja (slika 3.34).

3.2 Ako je $\frac{v_b}{\sin\alpha} > a$ i $\alpha > 90°$, takav trokut nije moguće konstruirati.

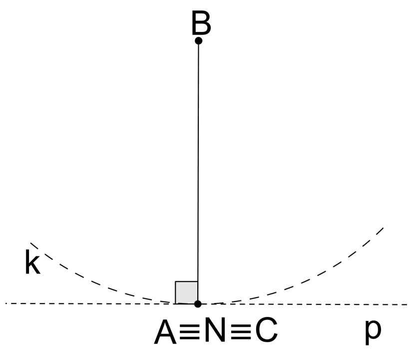


Slika 3.33



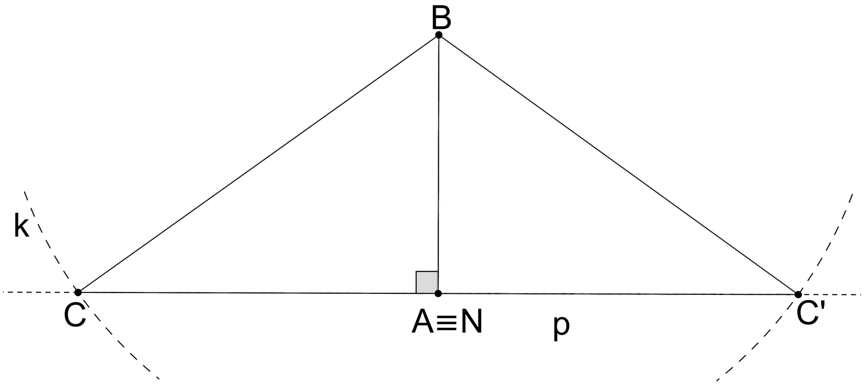
Slika 3.34

Ako je $\alpha = 90°$, provedba konstrukcije neće biti moguća za $a \leqslant v_b$ (slika 3.35).



Slika 3.35

Ako vrijedi $\alpha = 90°$ i $a > v_b$, pravac p i kružnica k sijeku se u dvjema točkama koje su osnosimetrične obzirom na pravac AB, pa su dobiveni trokuti sukladni. Rješenje je tad jedinstveno (slika 3.36).



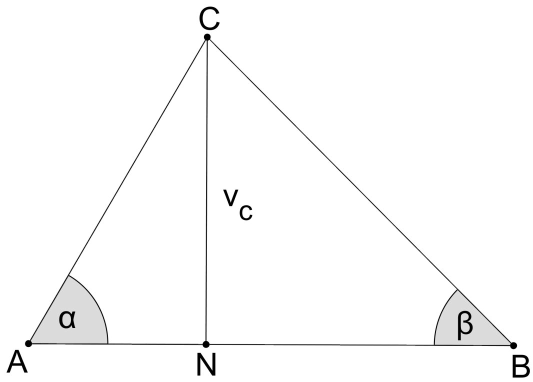
Slika 3.36

□

Primjer 3.6. *Konstruirajte trokut kojemu su zadane mjere kutova α i β te duljina visine v_c.*

Analiza:

Neka je N nožište visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$ trokuta ABC.



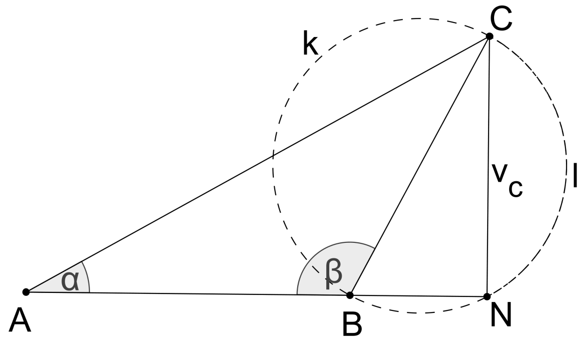
Slika 3.37

Uočavamo da su trokuti ANC i BNC pravokutni s pravim kutom pri vrhu N. Imamo da je $\angle CAN = \alpha$ za $\alpha < 90°$, odnosno $180° - \alpha$ za $\alpha > 90°$. Analogno zaključujemo za $\angle CBN$ koji iznosi β za $\beta < 90°$, odnosno $180° - \beta$ za $\beta > 90°$. Jasno je da bar jedan od kutova α, β mora biti manji od 90°. Pretpostavimo da je $\alpha < 90°$. Slijedi da je $\angle NCA = 90° - \alpha$.

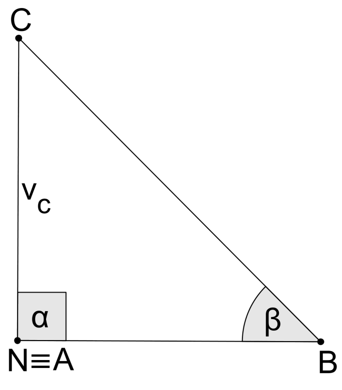
Budući da su nam poznate mjere kutova $\measuredangle ANC$ i $\measuredangle NCA$ te duljina dužine $\overline{CN}$, možemo konstruirati trokut ANC služeći se KSK konstrukcijom (konstrukcija TK9).

Neka je l jedan od dvaju kružnih lukova koji su geometrijsko mjesto točaka iz kojih se dužina $\overline{CN}$ vidi pod kutom β. Neka je k kružnica na kojoj leži kružni luk l. Ako je kut $\beta < 90°$, točka B leži na kružnom luku l i na pravcu AN. Ako vrijedi $\beta > 90°$, tada točka B leži na pravcu AN i na kružnici k s one strane dužine $\overline{CN}$ s koje leži i točka A (slika 3.38).

U slučaju kad je $\alpha = 90°$, nožište visine iz vrha C podudara se s vrhom A. Točka B nalazi se na kružnom luku l nad dužinom $\overline{CA}$ te na pravcu p koji prolazi točkom A te je okomit na dužinu $\overline{CA}$ (slika 3.39).



Slika 3.38

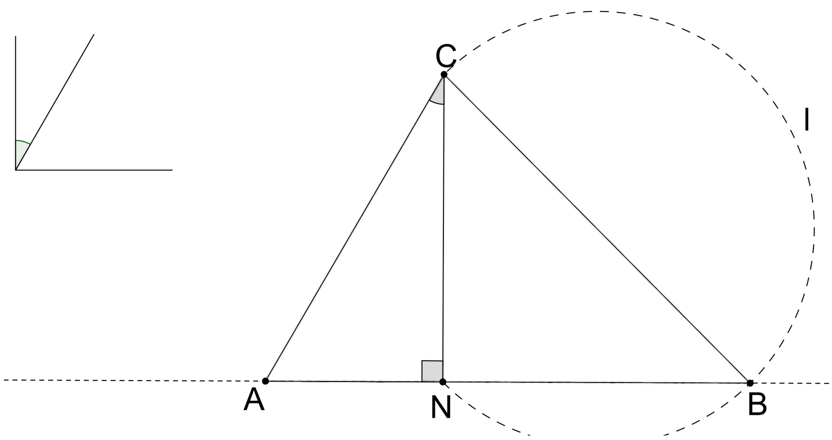


Slika 3.39

Konstrukcija:

Budući da najviše jedan od unutarnjih kutova trokuta može biti veći od 90°, provodit ćemo konstrukciju prema pretpostavci da je $\alpha < 90°$.

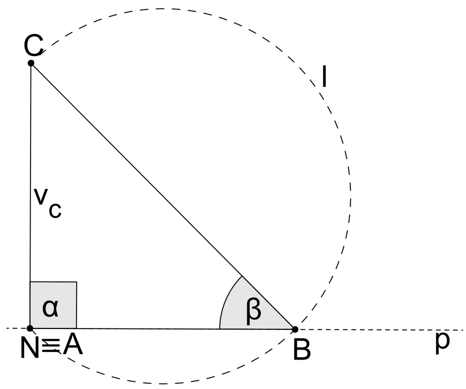
1. konstrukcija kuta mjere $90° - \alpha$
2. KSK konstrukcija trokuta ANC tako da je $\measuredangle ANC = 90°$, $\measuredangle NCA = 90° - \alpha$ i $|CN| = v_c$ (konstrukcija TK9)
3. konstrukcija kružnog luka l tako da je l geometrijsko mjesto točaka iz kojih se dužina $\overline{CN}$ vidi pod kutom β (konstrukcija GMT2)
4. pravac AN siječe kružni luk l u točki B



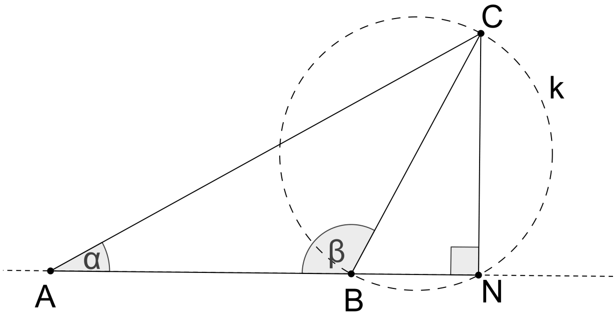
Slika 3.40

Napomena: Za $\alpha = 90°$, umjesto prvog i drugog koraka konstrukcije dovoljno je konstruirati dužinu $\overline{CA}$ tako da je $|CA| = v_c$. U trećem koraku konstrukcije kružni luk l konstruiramo nad dužinom $\overline{CA}$. U četvrtom koraku konstrukcije, umjesto pravca AN konstruirat ćemo pravac p takav da je $A \in p$ i $p \perp CA$. Pravac p siječe kružni luk l u točki B (slika 3.41).

Za $\beta > 90°$, potrebno je konstruirati kružnicu k tako da je $l \subseteq k$. U četvrtom koraku konstrukcije pravac AN siječe kružnicu k u točki B s one strane dužine $\overline{AN}$ s koje leži točka A (slika 3.42).



Slika 3.41



Slika 3.42

Dokaz:

Potrebno je dokazati da je $\measuredangle CAB = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$, te da je duljina visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$ trokuta ABC jednaka v_c.

Budući da su točke A, B i N kolinearne (četvrti korak konstrukcije), kut $\measuredangle CAB$ trokuta ABC podudara se s kutom $\measuredangle CAN$ trokuta ANC. Iz drugog koraka konstrukcije imamo da je $\measuredangle ANC = 90°$ i $\measuredangle NCA = 90° - \alpha$. Slijedi: $\measuredangle CAN = 180° - 90° - (90° - \alpha) = \alpha$, čime smo dokazali prvu tvrdnju.

Kut $\measuredangle ABC$ podudara se s kutom $\measuredangle NBC$, za $\beta < 90°$ a iz trećeg i četvrtog koraka konstrukcije vidimo da vrijedi $\measuredangle NBC = \beta$. Za $\beta > 90°$ kut $\measuredangle ABC$ jednak je $180° - \measuredangle NBC$, a prema napomeni i teoremu 1.36 slijedi da je $\measuredangle NBC = 180° - \beta$. Slijedi da je $\measuredangle ABC = \beta$.

Duljina visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$ jednaka je udaljenosti od točke C do nožišta visine iz vrha C. Dokazat ćemo da je spomenuto nožište točka N. U drugom koraku konstrukcije vidimo da je kut $\angle ANC$ pravi, odnosno da je pravac AN okomit na pravac CN. Iz četvrtog koraka konstrukcije vidimo da točka B leži na pravcu AN. Iz svega navedenog slijedi da je N nožište visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$. U drugom koraku konstrukcije konstruirali smo dužinu $\overline{CN}$ tako da je $|CN| = v_c$. Ovime smo dokazali treću tvrdnju.

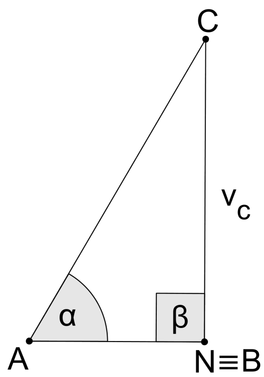
Za $\alpha = 90°$ sve tvrdnje očito vrijede.

Rasprava:

Prilikom provođenja konstrukcije vidimo da su svi koraci provedivi. U četvrtom koraku konstrukcije, za $\alpha < 90°$ i $\beta < 90°$, pravac AN siječe kružni luk l u dvjema točkama; N i B. Za odabir točke N kao jednog od vrhova trokuta nećemo dobiti valjano rješenje. Zato ćemo u obzir uzeti točku B takvu da je $B \neq N$. Rješenje je jedinstveno.

Za $\beta > 90°$ u četvrtom koraku konstrukcije promatramo presjek kružnice k i pravca AN. Ovdje također nećemo uzeti u obzir točku N. Rješenje je jedinstveno.

Za $\alpha < 90°$ i $\beta = 90°$, pravac AN dira kružni luk l u jednoj točki, i to u točki N. U ovom slučaju točka N podudara se s vrhom B traženog trokuta, a rješenje je jedinstveno (slika 3.43).



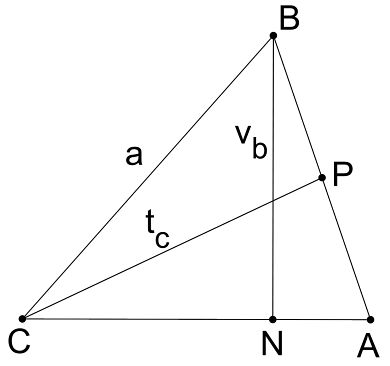
Slika 3.43

Za $\alpha + \beta > 180°$ traženi trokut nije moguće konstruirati.

□

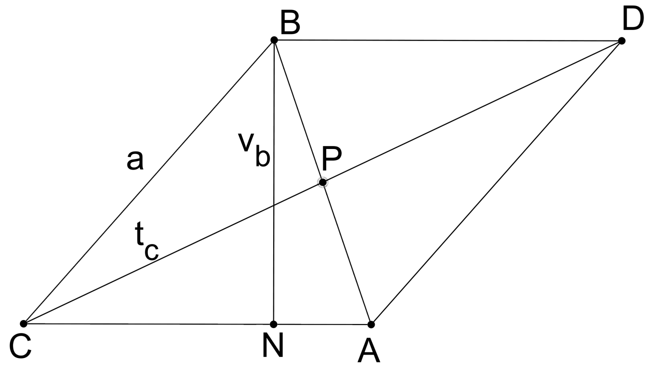
Primjer 3.7. *Konstruirajte trokut kojemu je zadana duljina stranice a, duljina visine v_b i duljina težišnice t_c.*

Analiza:



Slika 3.44

Neka je P polovište stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC. Neka je D točka centralno simetrična točki C obzirom na točku P. Uočimo da je $|CD| = 2t_c$. Promotrimo dobiveni četverokut $ADBC$.



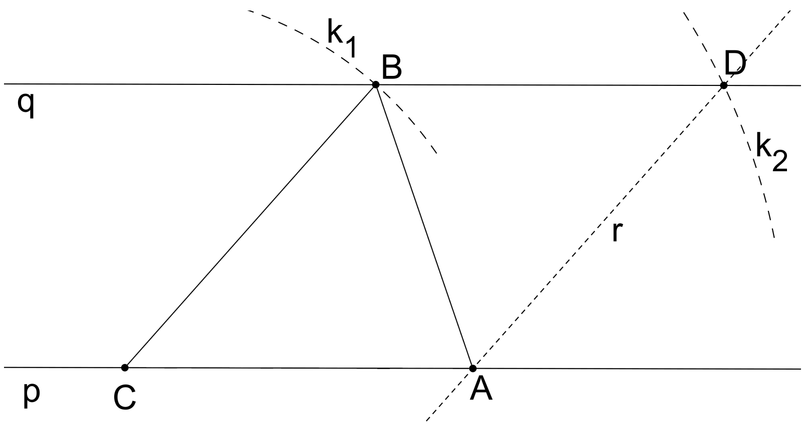
Slika 3.45

Njegove se dijagonale očito raspolavljaju, pa prema teoremu 1.3 zaključujemo da je taj četverokut paralelogram. Kod paralelograma $ADBC$ poznate su nam duljine stranica $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ koje iznose a, duljina visine iz vrha B koja iznosi v_b, te duljina dijagonale $\overline{CD}$ koja je jednaka $2t_c$.

Neka je p proizvoljan pravac te neka je q pravac koji je od pravca p udaljen za v_b. Odaberemo li na pravcu p točku C, znamo da se točka B nalazi na pravcu q te na kružnici k_1 sa središtem u točki C i polumjerom a. Točka D nalazi se na kružnici k_2 sa središtem u točki C i polumjerom $2t_c$ te na pravcu q. Neka je r pravac koji prolazi točkom D te je paralelan s pravcem BC. Točka A sjecište je pravaca p i r.

Konstrukcija:

1. konstrukcija pravca p
2. konstrukcija pravca q paralelnog s pravcem p tako da je udaljenost pravaca p i q jednaka v_b (konstrukcija GMT1)
3. odabir točke C tako da je $C \in p$
4. konstrukcija kružnice k_1 sa središtem u točki C i polumjerom a
5. kružnica k_1 siječe pravac q u točki B
6. konstrukcija kružnice k_2 sa središtem u točki C i polumjerom $2t_c$
7. kružnica k_2 siječe pravac q u točki D
8. konstrukcija pravca r tako da je $D \in r$ i $r \parallel BC$
9. pravac r siječe pravac p u točki A



Slika 3.46

Dokaz:

Potrebno je dokazati da je $|BC| = a$, da je duljina visine iz vrha B na stranicu $\overline{AC}$ trokuta ABC jednaka v_b, te da je duljina težišnice iz vrha C jednaka t_c.

Točka B leži na kružnici k_1 čije je središte točka C, a polumjer a, iz čega slijedi da je $|BC| = a$.

Duljina visine iz vrha B na stranicu $\overline{AC}$ jednaka je udaljenosti među pravcima p i q. Naime, na pravcu p leži dužina $\overline{AC}$, što znamo iz trećeg i devetog koraka konstrukcije, a pravac q je paralelan s pravcem p i prolazi točkom B, što znamo iz drugog i petog koraka konstrukcije. Iz drugog koraka konstrukcije slijedi da je udaljenost ovih dvaju pravaca jednaka upravo v_b.

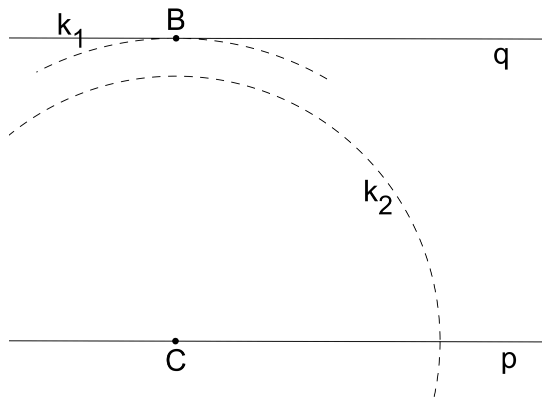
Promotrimo četverokut $ADBC$. Iz petog i sedmog koraka konstrukcije vidimo da je $\overline{DB} \subseteq q$, a iz trećeg i devetog koraka konstrukcije jasno je da je $\overline{CA} \subseteq p$. Iz drugog koraka konstrukcije slijedi da je $p \parallel q$. Iz osmog i devetog koraka konstrukcije imamo da je $BC \parallel r$ i da je $AD \equiv r$. Iz ovoga slijedi da je četverokut $ADBC$ paralelogram. Dužina $\overline{CD}$ jedna je od dijagonala ovog paralelograma. Neka je P polovište dužine $\overline{CD}$. Prema teoremu 1.3 dijagonale paralelograma se raspolavljaju, pa slijedi da je P polovište dužine $\overline{AB}$. Iz šestog i sedmog koraka konstrukcije znamo da vrijedi $|CD| = 2t_c$, pa imamo da je $|CP| = t_c$, čime smo dokazali i treću tvrdnju.

Rasprava:

Pogledajmo peti korak konstrukcije. Kružnica k_1 neće sjeći pravac q za $v_b > a$, pa u ovom slučaju traženi trokut ne postoji. Za $v_b = a$, kružnica k_1 dira pravac q u jednoj točki. Ako je $v_b < a$, kružnica k_1 siječe pravac q u dvjema točkama, B i B'. Budući da su ove dvije točke simetrične obzirom na os koja prolazi točkom C te je okomita na pravac q, možemo bez smanjenja općenitosti odabrati jednu od njih.

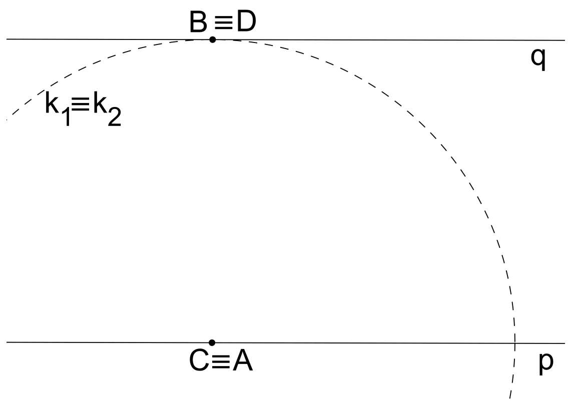
1. Neka je $v_b = a$. Promotrimo sad sedmi korak konstrukcije.

1.a Ako je $2t_c < v_b$, kružnica k_2 ne siječe pravac q, pa takav trokut ne postoji (slika 3.47).



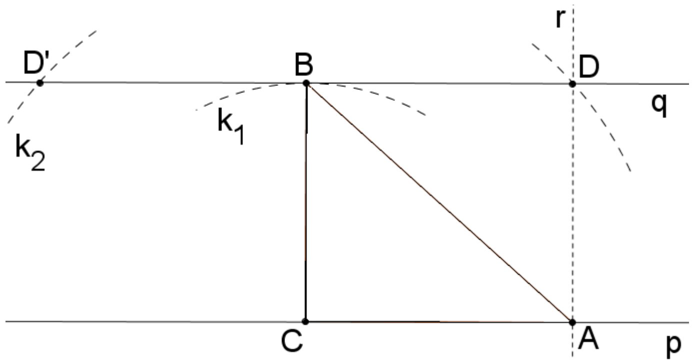
Slika 3.47

1.b Za $2t_c = v_b$, kružnica k_2 dira pravac q u točki B, odnosno, točke B i D se podudaraju. Prateći daljnje korake konstrukcije uočavamo da se točka A podudara s točkom C, te da takav trokut nije moguće konstruirati (slika 3.48).



Slika 3.48

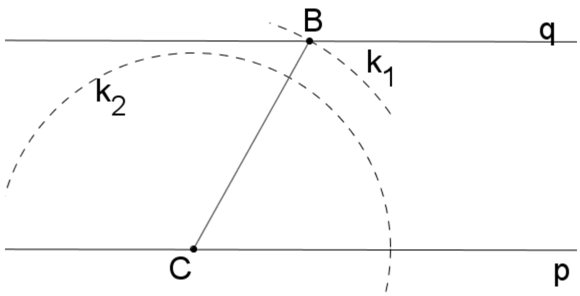
1.c Ako je $2t_c > v_b$, kružnica k_2 siječe pravac q u dvjema točkama, D i D'. Ove su dvije točke simetrične obzirom na pravac BC, pa možemo odabrati jednu od njih bez smanjenja općenitosti. Rješenje je u ovom slučaju jedinstveni trokut ABC (slika 3.49).



Slika 3.49

2. Neka je sad $v_b < a$.

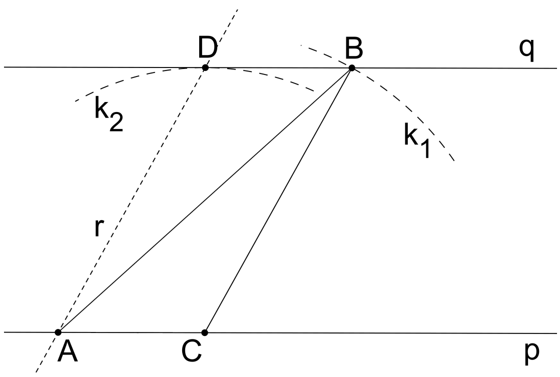
2.a Za $2t_c < v_b$, kružnica k_2 ne siječe pravac q, pa takav trokut ne postoji (slika 3.50).



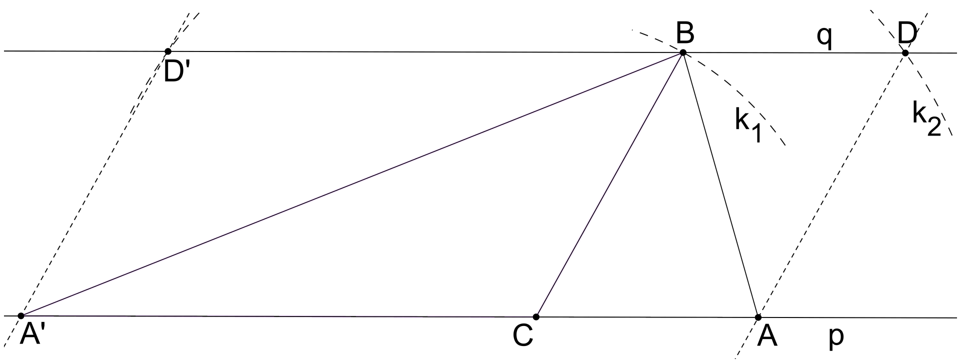
Slika 3.50

2.b Za $2t_c = v_b$, kružnica k_2 dira pravac q u jednoj točki. Rješenje je u ovom slučaju jedinstveno (slika 3.51).

2.c Ako je $2t_c > v_b$, kružnica k_2 siječe pravac q u dvjema točkama, D i D'. Prateći konstrukciju uočavamo da u devetom koraku konstrukcije dobijemo dvije točke, A i A'. Trokuti ABC i $A'BC$ nisu sukladni, a oba zadovoljavaju uvjete zadatka, pa u ovom slučaju postoje dva različita rješenja (slika 3.52).



Slika 3.51



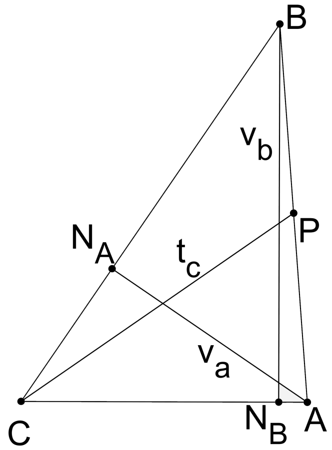
Slika 3.52

□

Primjer 3.8. *Konstruirajte trokut kojemu su zadane duljine visina v_a i v_b te duljina težišnice t_c.*

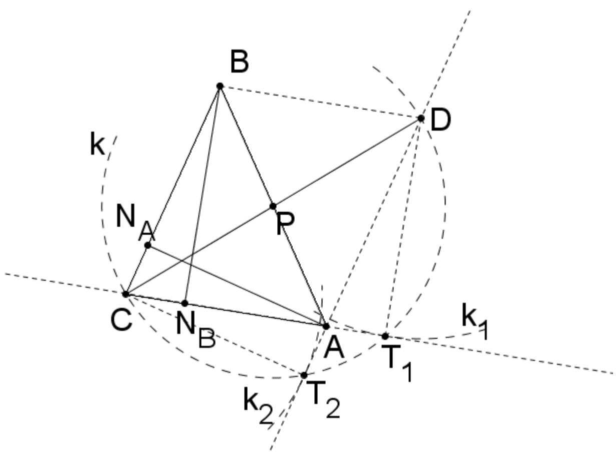
Analiza:

Neka je N_A nožište visine iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$ i neka je N_B nožište visine iz vrha B na stranicu $\overline{AC}$ trokuta ABC. Neka je točka P polovište stranice $\overline{AB}$ i neka je D točka centralno simetrična točki C obzirom na polovište P. Tada vrijedi da je $|CT| = 2t_c$.



Slika 3.53

Promotrimo četverokut $CADB$ (slika 3.54). Njegove se dijagonale $\overline{CD}$ i $\overline{AB}$ raspolavljaju, pa slijedi da je ovaj četverokut paralelogram. Visina paralelograma iz vrha B na stranicu $\overline{AC}$ podudara se s visinom trokuta ABC iz vrha B na stranicu $\overline{AC}$ i njena duljina je v_b. Neka je T_1 nožište visine iz vrha D paralelograma na stranicu $\overline{AC}$. Vrijedi $|DT_1| = v_b$ i $\measuredangle CT_1D = 90°$. Neka je k kružnica čiji je promjer dužina $\overline{CD}$ i neka je k_1 kružnica sa središtem u točki D i polumjerom v_b. Točka T_1 leži na kružnicama k i k_1.



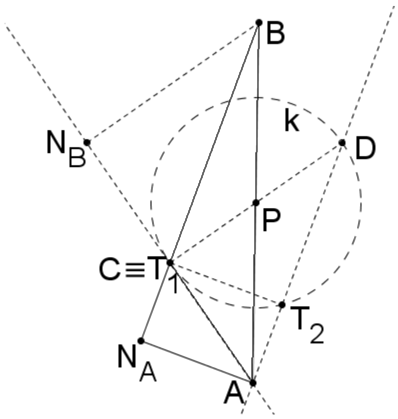
Slika 3.54

Promotrimo sad trokut CAD. Neka je T_2 nožište visine iz vrha C na stranicu $\overline{AD}$ ovog trokuta. Kut $\measuredangle CT_2D$ je pravi. Slijedi da točka T_2 leži na kružnici k.

Budući da su točke T_2, A i D kolinearne, slijedi da je $\measuredangle CT_2A = 90°$. Znamo da vrijedi $DA \parallel BC$, pa budući da je točka N_A na pravcu BC, a točka T_2 na pravcu AD, slijedi da je $N_AC \parallel AT_2$. Slijedi da je četverokut N_ACT_2A paralelogram. Iz ovoga slijedi da je $|CT_2| = |AN_A| = v_a$. Neka je k_2 kružnica sa središtem u točki C i polumjerom v_a. Točka T_2 leži na kružnici k_2.

Točka A leži na pravcima CT_1 i DT_2. Točka B centralno je simetrična točki A obzirom na točku P.

Ukoliko je kut $\measuredangle ACD$ pravi, točka T_1 podudara se s točkom C. Pogledajmo sliku 3.55.



Slika 3.55

Vrijedi: $\measuredangle ACD = \measuredangle CN_BB = 90°$. Točke N_B, C i A su kolinearne, pa slijedi da je $N_BB \parallel CD$. Četverokut $CADB$ je paralelogram i vrijedi $AC \parallel BD$, iz čega slijedi $N_BC \parallel BD$. Četverokut N_BCDB je, prema tome, paralelogram. Iz ovoga slijedi da je $|CD| = |N_BB|$, odnosno, $2t_c = v_b$.

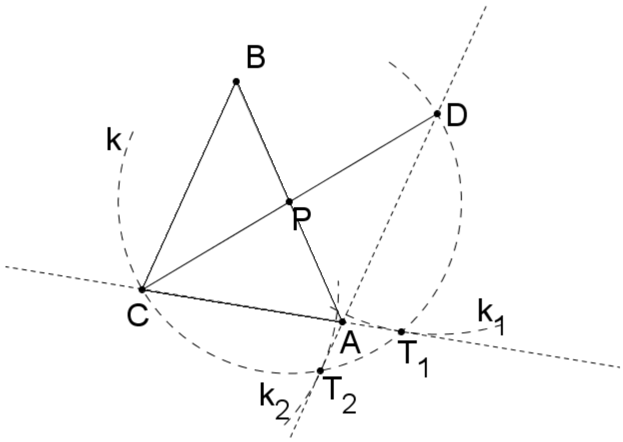
Pravac AC okomit je na promjer kružnice k. Drugim riječima, pravac AC je tangenta koja prolazi točkom C na kružnicu k. Točka A sad leži na pravcu DT_2 i na tangenti t koja prolazi točkom C na kružnicu k.

Analogno, ako je kut $\measuredangle ADC$ pravi, vrijedi $2t_c = v_a$. Točka T_2 podudara se s točkom D, a točka A leži na tangenti t koja prolazi točkom D na kružnicu k i na pravcu CT_1.

Konstrukcija:

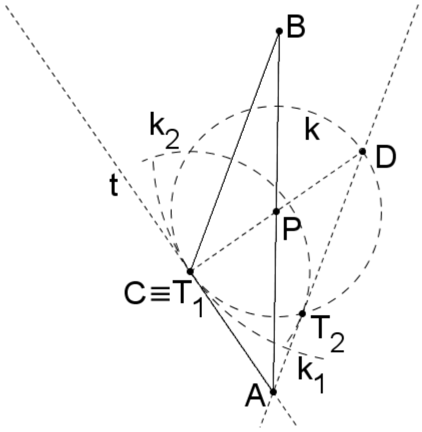
1. konstrukcija dužine $\overline{CD}$ tako da je $|CD| = 2t_c$ (konstrukcija AM2)

2. konstrukcija polovišta P dužine $\overline{CD}$
3. konstrukcija kružnice k čiji je promjer dužina $\overline{CD}$
4. konstrukcija kružnice k_1 sa središtem u točki D i polumjerom v_b
5. kružnica k_1 siječe kružnicu k u točki T_1
6. konstrukcija kružnice k_2 sa središtem u točki C i polumjerom v_a
7. kružnica k_2 siječe kružnicu k u točki T_2
8. pravci CT_1 i DT_2 sijeku se u točki A
9. konstrukcija točke B tako da je točka B centralno simetrična točki A obzirom na točku P (konstrukcija PK1)



Slika 3.56

Napomena: Za $v_b = 2t_c$, točka T_1 iz petog koraka konstrukcije podudara se s točkom C. Potrebno je konstruirati tangentu t na kružnicu k koja prolazi točkom C. Tangenta t i pravac DT_2 sijeku se u točki A. Konstrukciju provodimo analogno za $v_a = 2t_c$.



Slika 3.57

Dokaz:

Potrebno je dokazati da je duljina visine iz vrha A trokuta ABC jednaka v_a, zatim da je duljina visine iz vrha B istog trokuta jednaka v_b te da je duljina težišnice iz vrha C jednaka t_c.

Duljina visine iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$ jednaka je udaljenosti od vrha A do nožišta spomenute visine na stranicu $\overline{BC}$. Neka je N_A točka na pravcu BC takva da je $AN_A \parallel CT_2$. Iz petog koraka konstrukcije imamo da je $T_2 \in k$, pa je $\measuredangle CT_2D = 90°$. Iz devetog koraka konstrukcije vidimo da su točke D, A i T_2 kolinearne, pa slijedi da je $\measuredangle CT_2D = \measuredangle CT_2A = 90°$.

Iz drugog koraka konstrukcije vidimo da je točka P polovište dužine $\overline{CD}$, a iz desetog koraka konstrukcije vidimo da je ista točka polovište dužine $\overline{AB}$. Uočimo da se dijagonale četverokuta $CADB$ raspolavljaju, pa slijedi da je taj četverokut paralelogram. Slijedi da je $BC \parallel AD$, a obzirom da dužina $\overline{N_AC}$ leži na pravcu BC, a dužina $\overline{T_2A}$ na pravcu AD, vrijedi $N_AC \parallel T_2A$. Slijedi da je četverokut N_ACT_2A paralelogram. Iz ovoga i iz $\measuredangle CT_2A = 90°$ slijedi da je N_ACT_2 pravokutnik. Slijedi: $\measuredangle AN_AC = 90°$, odnosno, točka N_A je nožište visine iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$ trokuta ABC. Iz šestog i sedmog koraka vidimo da vrijedi $|CT_2| = v_a$, čime smo dokazali prvu tvrdnju. Na analogan način dokazujemo da je duljina visine iz vrha B na dužinu $\overline{AC}$ jednaka v_b.

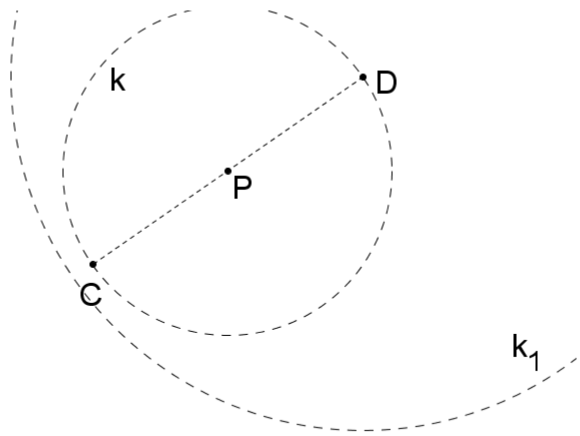
Ostalo nam je dokazati treću tvrdnju. Iz prvog koraka konstrukcije imamo da je $|CD| = 2t_c$. Iz drugog koraka konstrukcije vidimo da je točka P polovište dužine $\overline{CD}$ pa vrijedi $|CP| = t_c$. Iz desetog koraka konstrukcije vidimo da je točka P polovište dužine $\overline{AB}$. Ovime smo dokazali treću tvrdnju.

U napomeni konstruirali smo trokut uz uvjet da je $v_b = 2t_c$, a sad ćemo dokazati da je i u tom slučaju duljina visine iz vrha B na stranicu $\overline{AC}$ jednaka $2t_c$.

Neka je N_B točka na pravcu AC takva da je $BN_B \parallel CD$. Točke N_B, A i C su kolinearne. Budući da je t tangenta na kružnicu k, vrijedi $\measuredangle ACD = 90°$. Točka P je polovište dužine $\overline{CD}$, što vidimo iz drugog koraka konstrukcije. Iz konstrukcije točke B vidimo da je P polovište dužine $\overline{AB}$. Slijedi da je četverokut $CADB$ paralelogram. Iz ovoga slijedi da je $AC \parallel DB$. Budući da vrijedi i $BN_B \parallel CD$, slijedi da je i četverokut N_BCDB paralelogram. Iz ovoga slijedi $|CD| = |BN_B| = 2t_c$. Vrijedi $\measuredangle ACD = 90°$, pa je i $\measuredangle N_BCD = 90°$, iz čega sljedi da je četverokut N_BCDB pravokutnik. Imamo $N_BB \perp N_BC$, tj. točka N_B je nožište visine iz vrha B na stranicu $\overline{AC}$. Dokazali smo tvrdnju. Analogno dokazujemo za slučaj kad je $v_a = 2t_c$.

Rasprava:

U petom koraku konstrukcije kružnica k_1 ne siječe kružnicu k za $v_b > 2t_c$, pa takav trokut ne postoji (slika 3.58). Analogno, ako je $v_a > 2t_c$, takav trokut ne postoji.



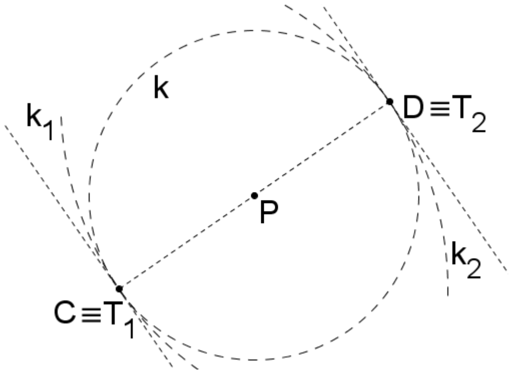
Slika 3.58

Za $v_b = 2t_c$, kružnica k_1 dira kružnicu k u točki C. Ako je $v_b < 2t_c$, kružnica k_1 siječe kružnicu k u dvjema točkama, T_1 i T_1'. Budući da su ove dvije točke simetrične obzirom na pravac CD, bez smanjenja općenitosti možemo odabrati jednu od njih.

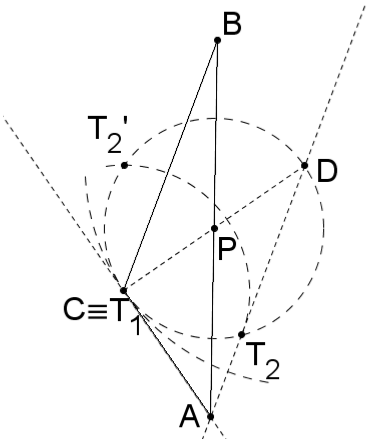
1. Neka je $v_b = 2t_c$.

1.a Ako je $v_a = 2t_c$, kružnica k_2 dira kružnicu k u točki D pa je točka A presjek dvaju paralelnih pravaca; tangenti na kružnicu k u točkama C i D. Takav trokut nije moguće konstruirati (slika 3.59).

1.b Ako je $v_a < 2t_c$, kružnica k_2 siječe kružnicu k u dvjema točkama, T_2 i T_2'. Budući da su ove dvije točke simetrične obzirom na pravac CD, bez smanjenja općenitosti možemo odabrati jednu od njih. Rješenje je jedinstveni trokut ABC (slika 3.60).



Slika 3.59

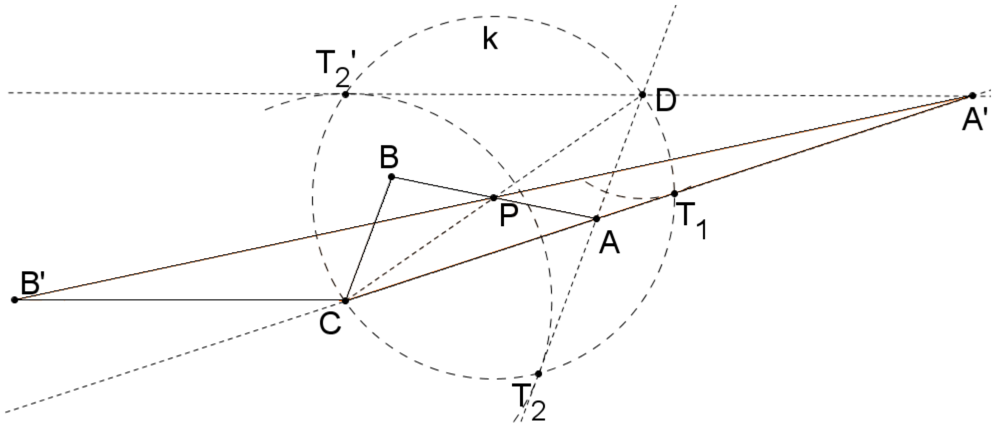


Slika 3.60

2. Neka je sad $v_b < 2t_c$.

2.a Za $v_a = 2t_c$, kružnica k_2 dira kružnicu k u točki D. Rješenje je jedinstveni trokut ABC.

2.b Ako je $v_a < 2t_c$, kružnica k_2 siječe kružnicu k u točkama T_2 i T_2'. Pravci CT_1 i DT_2 sijeku se u točki A. Pravci CT_1 i DT_2' sijeku se u točki A'. Centralnosimetrična slika točke A obzirom na točku P je točka B, a točke A' točka B'. Trokuti ABC i $A'B'C$ nisu sukladni, a oba zadovoljavaju uvjete zadatka. Prema tome, u ovom slučaju postoje dva različita rješenja (slika 3.61).



Slika 3.61

□

Primjer 3.9. *Konstruirajte trokut kojemu su zadane duljine visina v_a, v_b i v_c.*

Analiza:

Duljine visina javljaju se u formuli za površinu trokuta, odnosno vrijedi:

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2},$$

gdje su a, b i c duljine stranica trokuta. Slijedi:

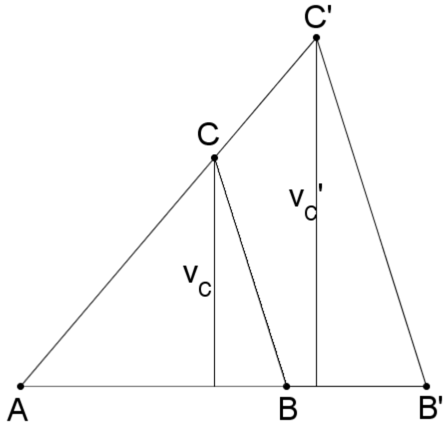
$$a = \frac{2P}{v_a}, \quad b = \frac{2P}{v_b}, \quad c = \frac{2P}{v_c}.$$

Neka je x proizvoljna duljina. Neka su duljine a', b' i c' takve da vrijedi:

$$a' = \frac{x^2}{v_a}, \quad b' = \frac{x^2}{v_b}, \quad c' = \frac{x^2}{v_c}.$$

Da bismo konstruirali trokut ABC sa stranicama duljina $|BC| = a$, $|AC| = b$ i $|AB| = c$, najprije ćemo konstruirati trokut $A'B'C'$ čije su duljine stranica jednake $|B'C'| = a'$, $|A'C'| = b'$ i $|A'B'| = c'$. Naime, prema SSS poučku o sličnosti trokuta (1.20) trokuti ABC i $A'B'C'$ su slični s koeficjentom sličnosti $k = \frac{a'}{a} = \frac{x^2}{2P}$.

Promotrimo sliku 3.62.



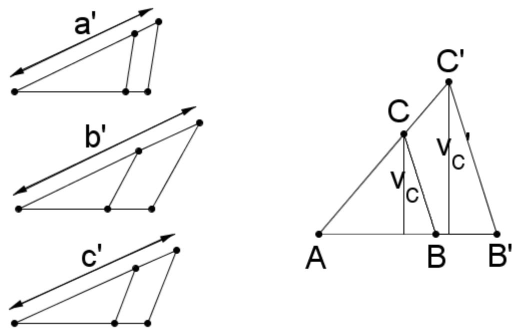
Slika 3.62

Uočimo: postavili smo trokute ABC i $A'B'C'$ tako da se točka A podudara s točkom A', a točke A, C i C' su kolinearne. Točka C od pravca AB' udaljena je za v_c. Neka je p pravac udaljen od pravca AB' za duljinu v_c. Točka C presjek je pravaca p i AC'.

Obzirom da smo trokute ABC i $A'B'C'$ postavili u položaj da su im po dvije odgovarajuće stranice kolinearne, pravci na kojima leže stranice BC i $B'C'$ su paralelni. Neka je q pravac kroz točku C paralelan s pravcem $B'C'$. Točka B presjek je pravaca q i AB'.

Konstrukcija:

1. biramo proizvoljnu duljinu x
2. pomoćna konstrukcija triju dužina čije su duljine jednake $a' = \frac{x^2}{v_a}, b' = \frac{x^2}{v_b}$ i $c' = \frac{x^2}{v_c}$ (konstrukcija AM4)
3. SSS konstrukcija trokuta $AB'C'$ t.d. je $|AB'| = c', |AC'| = b'$ i $|B'C' = a'$ (konstrukcija TK7)
4. konstrukcija pravca p tako da je udaljenost među pravcima p i AB' jednaka v_c (konstrukcija GMT1)
5. pravac AC' siječe pravac p u točki C
6. konstrukcija pravca q tako da je $C \in q$ i $q \parallel B'C'$
7. pravac q siječe pravac AB' u točki B



Slika 3.63

Dokaz:

Potrebno je dokazati da su duljine visina iz vrhova A, B i C na nasuprotne stranice trokuta ABC jednake redom v_a, v_b i v_c.

Iz petog i šestog koraka konstrukcije slijedi da je $BC \parallel B'C'$. Iz četvrtog koraka konstrukcije slijedi da se pravci AC i AC' podudaraju, a iz šestog koraka konstrukcije vidimo da se podudaraju i pravci AB i AB'. Slijedi da su trokuti ABC i $A'B'C'$ slični.

Visina iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$ trokuta ABC jednaka je udaljenosti od točke C do pravca AB. Pravac p paralelan je s pravcem AB i prolazi točkom C, što vidimo iz trećeg koraka konstrukcije. Udaljenost pravaca p i AB' jednaka je v_c, a budući da su točke A, B' i B kolinearne (šesti korak konstrukcije), imamo da je udaljenost među pravcima p i AB jednaka v_c, što smo i htjeli dokazati.

Neka su m i n redom duljine visina trokuta ABC iz vrhova A i B. Neka je a duljina stranice $\overline{BC}$, a c duljina stranice $\overline{AB}$.

Iz formule za površinu trokuta znamo da vrijedi:

$$c \cdot v_c = a \cdot m.$$

Budući da su trokuti ABC i $AB'C'$ slični, imamo da je

$$\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'},$$

gdje je $a' = \frac{x^2}{v_a}$, a $c' = \frac{x^2}{v_c}$, što vidimo iz prvog koraka konstrukcije. Sređivanjem izraza i uvrštavanjem poznatih podataka dobijemo:

$$m = \frac{c \cdot v_c}{a} = \frac{c' \cdot v_c}{a'} = \frac{\frac{x^2}{v_c}}{\frac{x^2}{v_a}} \cdot v_c = v_a,$$

što smo i htjeli dokazati.

Na analogan način dokazujemo da je $n = v_b$.

Rasprava:

U četvrtom koraku konstrukcije presjek pravaca p i AC' nije prazan. Inače, pravci p i AC' bili bi paralelni. Budući da je $p \parallel AB'$, slijedilo bi $AC' \parallel AB'$ što je u kontradikciji s činjenicom da točka A leži na oba pravca. Na analogan način zaključujemo da presjek pravaca q i AB' nije prazan. Rješenje, prema tome, uvijek postoji i jedinstveno je.

$\square$

Poglavlje 4

Konstruktivni problemi s ortocentrom

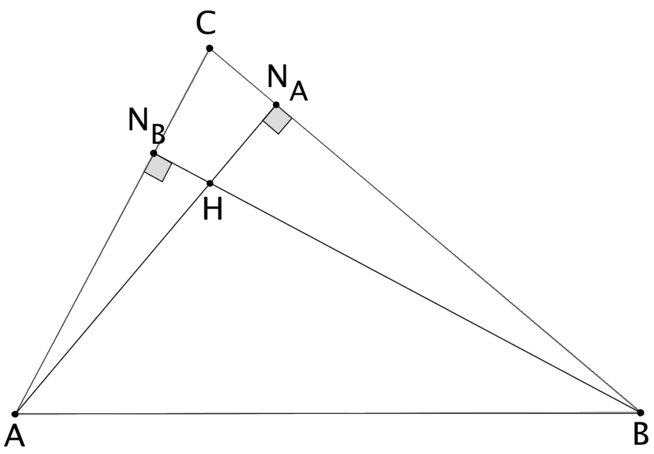
U ovom poglavlju bavit ćemo se položajnim zadatcima. Kod položajnih zadataka ispituje se međusobni položaj podskupova ravnine. Rješavanje ovakvih zadataka svodi se na konstruiranje figura čiji elementi su zadani u ravnini. Kod položajnih zadataka obično ne možemo konstruirati beskonačno mnogo sukladnih figura koje odgovaraju uvjetima zadatka. Naime, figure su određene položajem njihovih elemenata.

Cjelovit popis konstrukcija trokuta sa zadanim trima točkama zovemo još i *Wernickova lista*. Ona se nalazi na web stranici [1]. Vrhovi trokuta u primjerima označeni su s A, B i C, nožišta visina iz vrhova A, B i C redom oznakama N_A, N_B i N_C, a polovišta stranica oznakama T_A, T_B i T_C. Ortocentar trokuta označen je s H, težište trokuta s T, a središte opisane kružnice s O. Odabrat ćemo i riješiti nekoliko primjera u kojima je barem jedna od danih točaka ortocentar trokuta te posljednji primjer u kojemu su zadana sva tri nožišta visina trokuta.

Primjer 4.1. *U ravnini su dane tri nekolinearne točke; A, B i H. Konstruirajte trokut kojemu su točke A i B dva različita vrha, a točka H ortocentar.*

Analiza:

Neka je točka N_A nožište visine iz vrha A, a točka N_B nožište visine iz vrha B trokuta ABC.



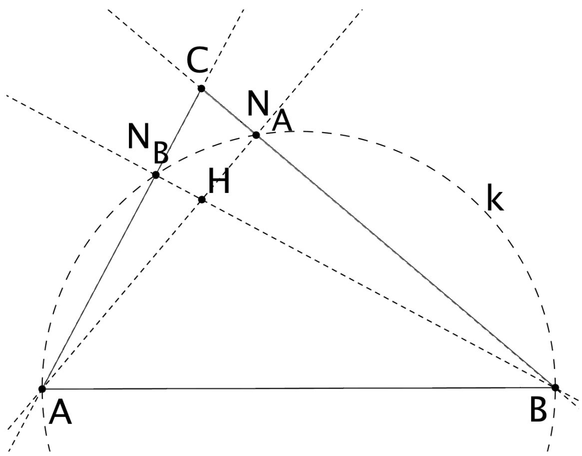
Slika 4.1

Točka H sjecište je pravaca AN_A i BN_B. Vrijedi: $\measuredangle BN_BA = \measuredangle BN_AA = 90°$. Neka je k kružnica čiji je promjer dužina $\overline{AB}$. Točke N_A i N_B leže na kružnici k. Budući da su točke A, N_A i H, odnosno B, N_B i H kolinearne, slijedi da točka N_A leži na pravcu AH, a točka N_B na pravcu BH.

Točka C leži na pravcima AN_B i BN_A.

Konstrukcija:

1. konstrukcija dužine $\overline{AB}$
2. konstrukcija kružnice k čiji je promjer dužina $\overline{AB}$
3. pravac AH siječe kružnicu k u točki N_A ($N_A \neq A$)
4. pravac BH siječe kružnicu k u točki N_B ($N_B \neq B$)
5. pravci AN_B i BN_A sijeku se u točki C



Slika 4.2

Dokaz:

Potrebno je dokazati da su točke A i B vrhovi, a točka H ortocentar traženog trokuta.

Iz prvog i zadnjeg koraka konstrukcije očito vrijedi da su točke A i B vrhovi trokuta.

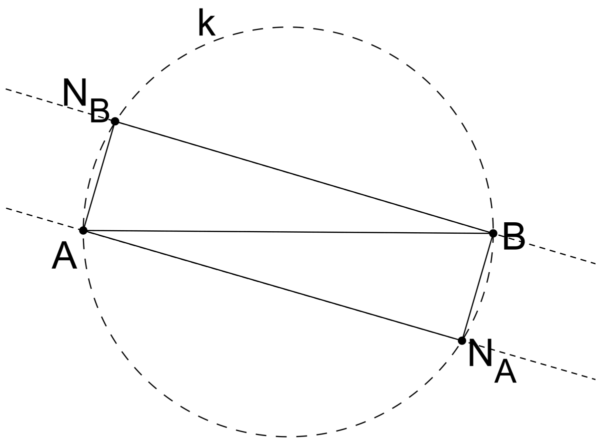
Točka H sjecište je pravaca AN_A i BN_B, što je jasno iz trećeg i četvrtog koraka konstrukcije. Kako bismo dokazali da je H ortocentar trokuta, potrebno je dokazati da su točke N_A i N_B nožišta visina iz vrhova A i B na nasuprotne stranice trokuta ABC. Iz trećeg i četvrtog koraka vidimo da točke N_A i N_B leže na kružnici k. Budući da je kružnica k konstruirana tako da joj dužina $\overline{AB}$ bude promjer (drugi korak konstrukcije), slijedi $\measuredangle BN_AA = \measuredangle BN_BA = 90°$. Vrijedi: $AN_A \perp BN_A$ i $BN_B \perp AN_B$. Iz petog koraka konstrukcije imamo da točka N_B leži na pravcu AC, a točka N_A na pravcu BC. Ovime smo dokazali da su točke N_A i N_B nožišta visina iz vrhova A i B, pa slijedi da je točka H ortocentar trokuta ABC.

Rasprava:

U trećem koraku konstrukcije pravac AH siječe kružnicu k u točkama A i N_A ako je $\measuredangle HAB \neq 90°$. Ako je $\measuredangle HAB = 90°$, pravac AH dira kružnicu k u točki A. Kako točka C leži na pravcu AH vrijedi da je $\measuredangle CAB = 90°$. Nožište visine iz vrha A je točka C, a nožište visine iz vrha B je točka A, osnosno, $N_A \equiv C$ i $N_B \equiv A$. Presjek pravaca AC i AB je točka A. Obzirom da su dužine $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ visine trokuta ABC, pravci na kojima leže sijeku se u ortocentru trokuta, točki H. $H \neq A$ pa zaključujemo da ovakav trokut nije moguće konstruirati. Analogno, u četvrtom koraku konstrukcije pravac BH dira kružnicu k u točki B za $\measuredangle ABH = 90°$ te takav trokut nije moguće konstruirati.

Promotrimo peti korak konstrukcije. Postoji li uvijek presjek pravaca AN_B i BN_A? Pretpostavimo da su ta dva pravca paralelna (slika 4.3). Budući da točke N_A i N_B leže na kružnici

k, kutovi $\measuredangle AN_AB$ i $\measuredangle BN_BA$ su pravi. Četverokut AN_ABN_B je pravokutnik te su pravci na kojima leže dužine $\overline{AN_A}$ i $\overline{BN_B}$ paralelni i ne sijeku se, što nije moguće budući da je zadan položaj točke H. Zaključujemo da pravci AN_B i BN_A nisu paralelni te da njihov presjek postoji.



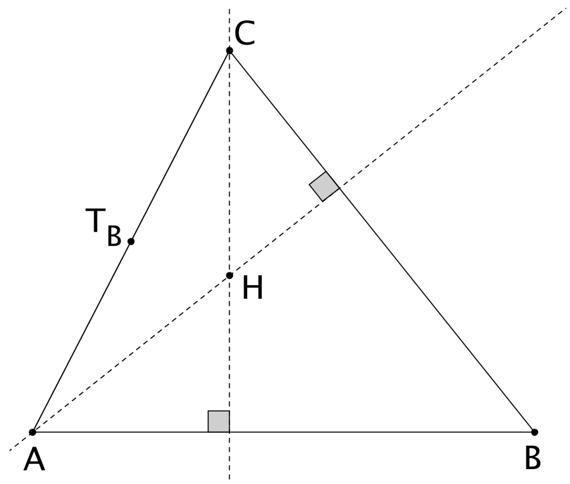
Slika 4.3

Za $\measuredangle HAB \neq 90°$ i $\measuredangle ABH \neq 90°$, rješenje postoji i jedinstveno je.

□

Primjer 4.2. *U ravnini su dane tri nekolinearne točke; A, T_B i H. Konstruirajte trokut ABC kojemu je točka A jedan od vrhova, točka T_B polovište stranice nasuprotne vrhu B, a točka H ortocentar.*

Analiza:



Slika 4.4

Budući da je točka T_B polovište dužine $\overline{AC}$, točka C leži na pravcu AT_B i vrijedi: $|AT_B| = |T_BC|$. Primijetimo da smo zadatak sveli na prethodni primjer 4.1. Primjer rješavamo na analogan način.

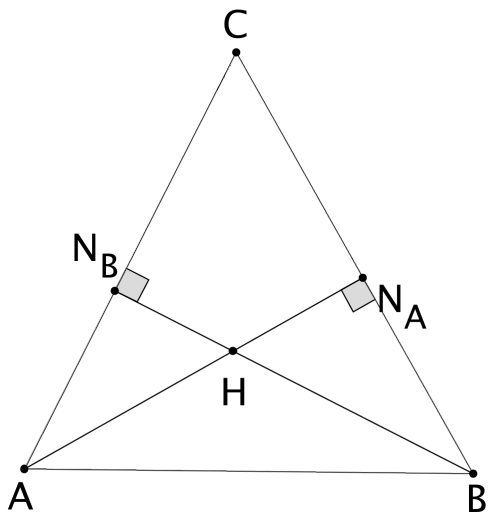
□

Primjer 4.3. *U ravnini su dane tri nekolinearne točke; N_A, N_B i H. Konstruirajte trokut kojemu su točke N_A i N_B nožišta visina iz dvaju vrhova, a točka H ortocentar.*

Analiza:

Neka je N_A nožište visine iz vrha A, a N_B nožište visine iz vrha B trokuta ABC.

Pravci AN_A i BN_B sijeku se u točki H, tj. točka A leži na pravcu HN_A, a točka B na pravcu HN_B.



Slika 4.5

Uočimo: $\measuredangle BN_BA = \measuredangle BN_AA = 90°$. Vrijedi: $BN_B \perp AC$ i $AN_A \perp BC$. Neka je p pravac kroz točku N_B okomit na pravac HN_B i neka je q pravac kroz točku N_A okomit na pravac HN_A. Točka A leži na pravcu p, a točka B leži na pravcu q. Točka C leži na pravcima p i q.

Konstrukcija:

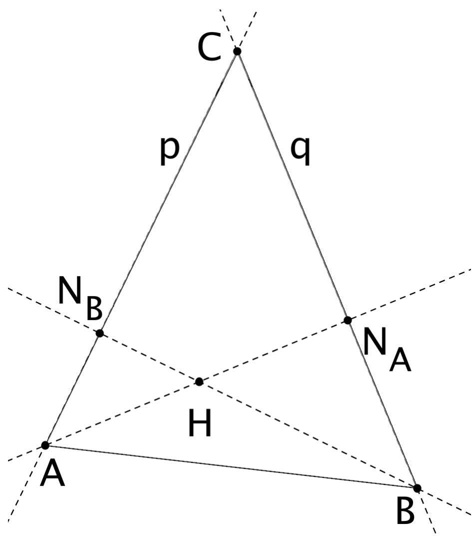
1. konstrukcija pravca p tako da je $N_B \in p$ i $p \perp HN_B$

2. pravac p siječe pravac HN_A u točki A

3. konstrukcija pravca q tako da je $N_A \in q$ i $q \perp HN_A$

4. pravac q siječe pravac HN_B u točki B

5. pravci p i q sijeku se u točki C



Slika 4.6

Dokaz:

Potrebno je dokazati da su točke N_A i N_B nožišta visina iz vrhova trokuta ABC, te da je točka H ortocentar trokuta.

Dužina $\overline{BC}$ leži na pravcu q što vidimo iz četvrtog i petog koraka konstrukcije. Iz trećeg koraka konstrukcije imamo da je $N_A \in q$ i da je pravac q okomit na pravac HN_A. Iz drugog koraka konstrukcije vidimo da točka A leži na pravcu HN_A, pa slijedi da je pravac AN_A okomit na pravac na kojem leži dužina $\overline{BC}$. Slijedi da je točka N_A nožište visine iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$ trokuta ABC. Analogno dokazujemo da je točka N_B nožište visine iz vrha B na stranicu AC trokuta ABC.

Točka A leži na pravcu HN_A (drugi korak konstrukcije), a točka B na pravcu HN_B (četvrti korak konstrukcije). $\overline{AN_A}$ i $\overline{BN_B}$ su visine trokuta, a očito je da se pravci na kojima one leže sijeku u točki H. Iz ovoga slijedi da je točka H ortocentar trokuta ABC. Dokazali smo sve tri tvrdnje.

Rasprava:

Ako je $\measuredangle N_B H N_A = 90°$, u drugom koraku konstrukcije pravac p ne siječe pravac HN_B, a u četvrtom koraku konstrukcije pravac q ne siječe pravac HN_A pa takav trokut ne postoji.

Pogledajmo peti korak konstrukcije. Na pravcu p leže točke A i N_B, a na pravcu q točke B i N_A. Primjećujemo da presjek ovih dvaju pravaca uvijek postoji, o čemu smo raspravili u primjeru 4.1.

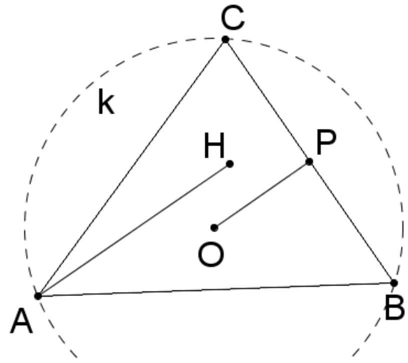
Za $\measuredangle N_B H N_A \neq 90°$ rješenje postoji i jedinstveno je.

□

Primjer 4.4. *U ravnini su dane tri različite točke; A, O i H. Konstruirajte trokut kojemu je točka A jedan od vrhova, točka O središte opisane kružnice, a točka H ortocentar.*

Analiza:

Neka je k kružnica opisana trokutu ABC.



Slika 4.7

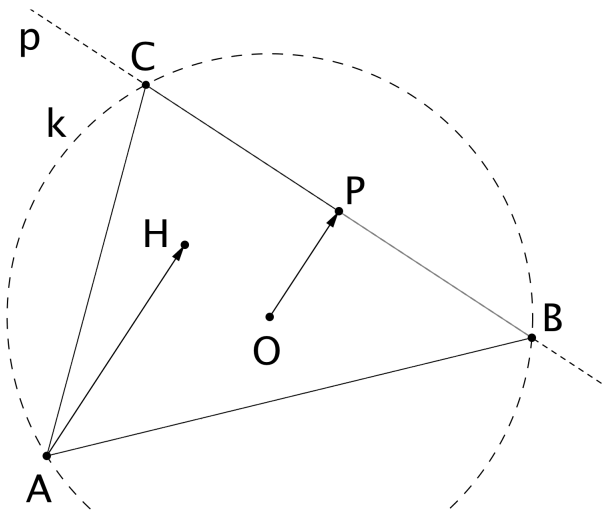
Polumjer kružnice k jednak je duljini dužine $\overline{AO}$.

Neka je točka P nožište okomice iz točke O na dužinu $\overline{BC}$. Točka P je polovište stranice $\overline{BC}$. Prema teoremu 1.31 imamo da je $|AH| = 2|OP|$. Budući da je $AH \perp BC$ i $OP \perp BC$, slijedi $AH \parallel OP$. Vrijedi: $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OP}$.

Neka je p pravac koji prolazi točkom P i okomit je na pravac OP. Točke B i C leže na pravcu p i na kružnici k.

Konstrukcija:

1. konstrukcija kružnice k sa središtem u točki O i polumjerom $|AO|$
2. konstrukcija točke P tako da je $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OP}$ (konstrukcija PK2)
3. konstrukcija pravca p tako da je $P \in p$ i $p \perp OP$
4. pravac p siječe kružnicu k u točkama B i C



Slika 4.8

Dokaz:

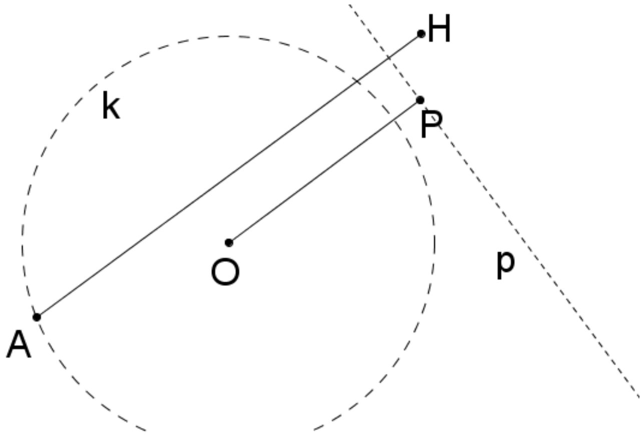
Potrebno je dokazati da je točka A jedan od vrhova, točka O središte opisane kružnice, a točka H ortocentar trokuta ABC.

Prva tvrdnja očito slijedi. Iz prvog i četvrtog koraka konstrukcije vidimo da točke A, B i C leže na kružnici k čije je središte točka O, što dokazuje i drugu tvrdnju.

Točka A jedan je od vrhova, a točka O središte opisane kružnice trokuta ABC. Iz trećeg i četvrtog koraka konstrukcije vidimo da točka P leži na pravcu BC i da je $OP \perp BC$. Točka O središte je opisane kružnice trokuta ABC pa je jednako udaljena od točaka B i C. Slijedi da je točka P polovište, a pravac OP simetrala dužine $\overline{BC}$. Neka je H_1 ortocentar trokuta ABC. Prema teoremu 1.31 slijedi da je $\overrightarrow{AH_1} = 2\overrightarrow{OP}$, a iz drugog koraka konstrukcije vidimo da vrijedi i $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OP}$. Slijedi da je $H_1 \equiv H$, čime smo dokazali da je točka H ortocentar trokuta ABC.

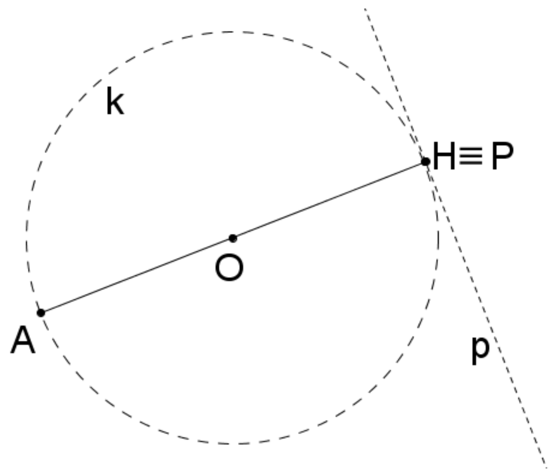
Rasprava:

U četvrtom koraku konstrukcije, za $|OP| > |OA|$, pravac p ne siječe kružnicu k, pa u tom slučaju trokut ne postoji (slika 4.9).



Slika 4.9

Za $|OP| = |OA|$, pravac p dira kružnicu k u točki P. Ni u ovom slučaju trokut ne postoji (slika 4.10).



Slika 4.10

Za $|OP| < |OA|$, pravac p siječe kružnicu k u dvjema točkama B i C. Rješenje je jedinstveno.

□

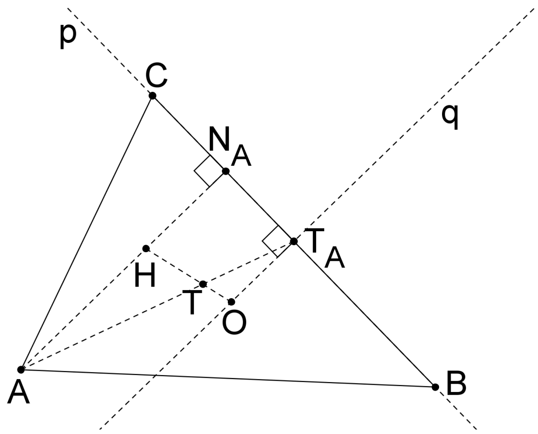
Primjer 4.5. *U ravnini su dane tri točke; O, H i N_A. Konstruirajte trokut kojemu je točka O središte opisane kružnice, točka H ortocentar, a točka N_A nožište visine iz jednog od vrhova.*

Analiza:

Na pravcu HN_A leži visina trokuta ABC povučena iz vrha A. Neka je p pravac kroz točku N_A okomit na pravac HN_A. Na njemu leže točke B i C te polovište T_A dužine $\overline{BC}$. Neka je q pravac kroz točku O takav da je $q \parallel HN_A$. Uočimo: pravac q je simetrala dužine $\overline{BC}$ i siječe pravac p u točki T_A. Slijedi da je točka T_A sjecište pravaca p i q.

Na Eulerovom pravcu OH leži težište T trokuta ABC te vrijedi $|OT| : |TH| = 1 : 2$ (teorem 1.34). Točka A sjecište je pravaca TT_A i HN_A.

Neka je k kružnica sa središtem u točki O koja prolazi točkom A. Točke B i C leže na pravcu p i na kružnici k.

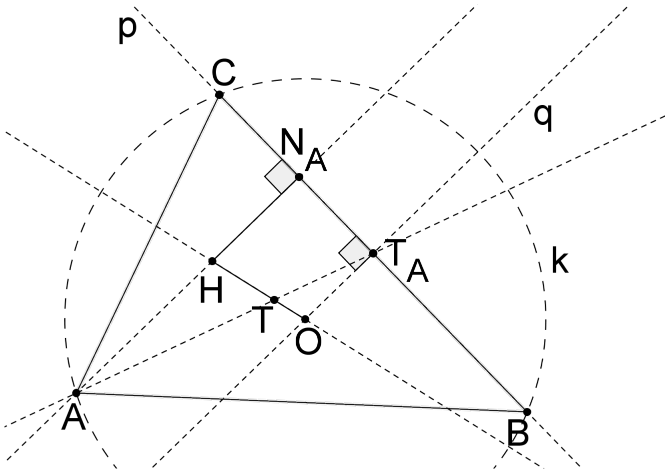


Slika 4.11

Konstrukcija:

1. konstrukcija točke T tako da je $\overrightarrow{TH} = 2\overrightarrow{OT}$ (konstrukcija PM2)
2. konstrukcija pravca p tako da je $N_A \in p$ i $p \perp HN_A$
3. konstrukcija pravca q tako da je $O \in q$ i $q \parallel HN_A$
4. pravci p i q sijeku se u točki T_A

5. pravci TT_A i HN_A sijeku se u točki A
6. konstrukcija kružnice k sa središtem u točki O i polumjerom $|AO|$
7. kružnica k siječe pravac p u točkama B i C



Slika 4.12

Dokaz:

Potrebno je dokazati da je točka O središte opisane kružnice, da je točka H ortocentar i točka N_A nožište visine iz vrha A trokuta ABC.

Iz šestog i sedmog koraka konstrukcije vidimo da vrhovi trokuta ABC leže na kružnici k čije je središte točka O. Ovime smo dokazali prvu tvrdnju.

Dokažimo sad treću tvrdnju. Iz sedmog koraka konstrukcije slijedi da je $p \equiv BC$. Iz drugog koraka konstrukcije vidimo da je $N_A \in BC$ i da je $HN_A \perp BC$. Iz petog koraka konstrukcije slijedi da je $A \in HN_A$. Ovime smo dokazali treću tvrdnju.

Pogledajmo sad drugu tvrdnju. Iz trećeg koraka konstrukcije vidimo da je $q \parallel HN_A$, a iz drugog i sedmog koraka konstrukcije vidimo da je $HN_A \perp BC$. Iz sedmog koraka konstrukcije jasno je da je dužina $\overline{BC}$ tetiva kružnice k. Iz četvrtog i sedmog koraka konstrukcije slijedi da je točka T_A sjecište pravaca BC i q. Iz trećeg koraka konstrukcije slijedi da je $O \in q$. Prema teoremu 1.11 slijedi da pravac q siječe dužinu $\overline{BC}$ u njenom polovištu, odnosno, točka T_A je polovište dužine $\overline{BC}$. Slijedi da je dužina $\overline{AT_A}$ težišnica trokuta ABC.

Znamo da vrijedi $OT_A \parallel AH$. Pravci OH i AT_A sijeku se u točki T (prvi i peti korak konstrukcije) pa slijedi da su trokuti OT_AT i HAT slični. Iz prvog koraka konstrukcije slijedi da je $|HT| : |TO| = 2$, pa je i $|AT| : |TT_A| = 2$. Prema teoremu o težištu 1.8 točka T je težište trokuta ABC. Slijedi da je pravac OT Eulerov pravac. Točka H je takva da je $\overrightarrow{TH} = 2\overrightarrow{OT}$ (prvi korak konstrukcije), pa prema teoremu 1.34 slijedi da je točka H ortocentar trokuta ABC čime smo dokazali i drugu tvrdnju.

Rasprava:

U četvrtom koraku konstrukcije presjek pravaca p i q uvijek postoji jer su pravci p i q okomiti.

U petom koraku konstrukcije pravci TT_A i HN_A neće se sjeći ako je $HN_A \parallel TT_A$. Kako točka T leži između pravaca q i HN_A te vrijedi $q \parallel HN_A$ i $T_A \in q$, pravac TT_A uvijek će sjeći pravac HN_A.

U sedmom koraku konstrukcije kružnica k neće sjeći pravac p u dvjema točkama ako je $|OA| \leqslant |OT_A|$, pa takav trokut ne postoji. Inače, rješenje je jedinstveni trokut ABC.

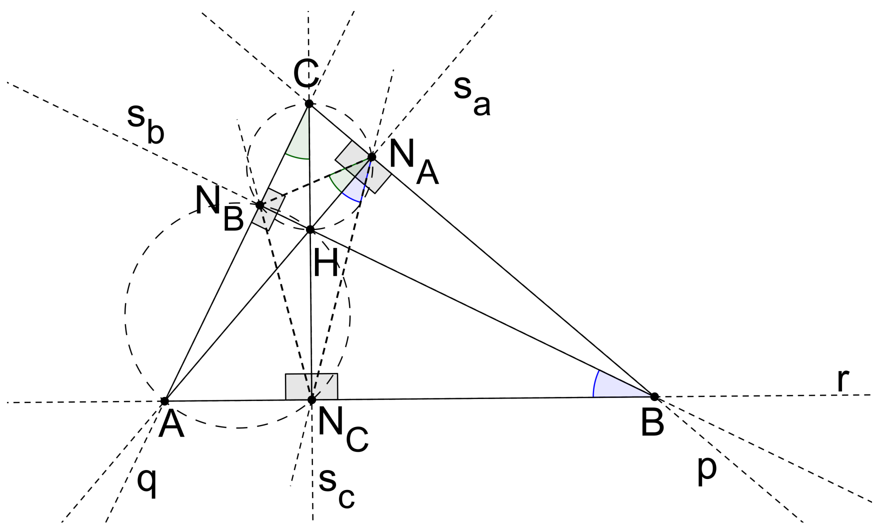
□

Primjer 4.6. *U ravnini su zadane tri nekolinearne točke N_A, N_B i N_C. Konstruirajte trokut tako da su zadane točke nožišta visina povučenih iz vrhova traženog trokuta.*

Analiza:

Neka su N_A, N_B i N_C nožišta visina trokuta ABC redom iz vrhova A, B i C. Neka je H ortocentar trokuta ABC.

Pogledajmo sliku 4.13.



Slika 4.13

Uočimo: u četverokutu AN_CHN_B vrijedi da je $\measuredangle HN_BA = \measuredangle AN_CH = 90°$, pa prema teoremu 1.36 slijedi da je četverokut AN_CHN_B tetivan. Analogno, BN_AHN_C i CN_BHN_A su tetivni četverokuti. Budući da su četverokuti BN_AHN_C i CN_BHN_A tetivni, možemo im opisati kružnice. Iz ovoga slijedi:

$$\measuredangle N_CN_AH = \measuredangle N_CBH;$$

$$\measuredangle HN_AN_B = \measuredangle HCN_B,$$

jer su navedeni kutovi obodni kutovi nad dužinama $\overline{N_CH}$ i $\overline{N_BH}$.

Jednostavnim uvrštavanjem i računanjem dobijemo:

$$\measuredangle N_CBH = \measuredangle ABN_B = 90° - \measuredangle CAB;$$

$$\measuredangle HCN_B = \measuredangle N_CCA = 90° - \measuredangle CAB.$$

Iz ovoga slijedi:

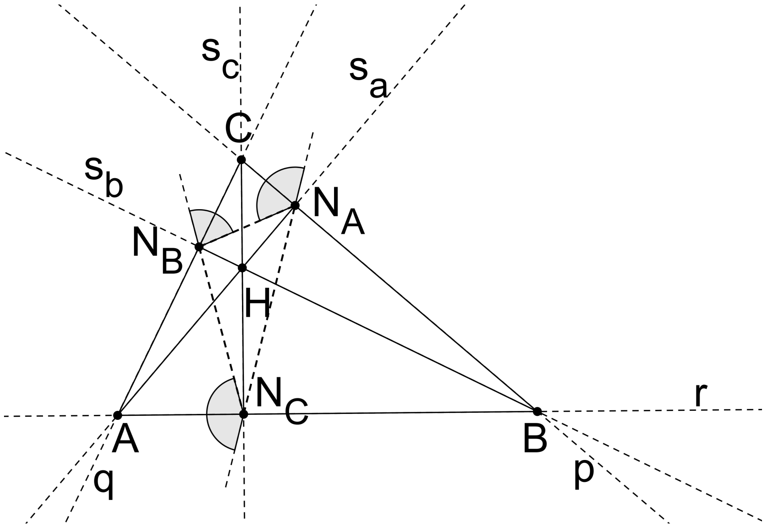
$$\measuredangle N_CBH = \measuredangle HCN_B,$$

a uvrštavanjem dobijemo da je

$$\measuredangle N_CN_AH = \measuredangle HN_AN_B.$$

Dokazali smo da je pravac na kojem leži visina iz vrha A trokuta ABC simetrala unutarnjeg kuta trokuta $N_AN_BN_C$ uz vrh N_A. Analogno se dokazuje da su pravci na kojima leže preostale dvije visine trokuta ABC ujedno simetrale unutarnjih kutova trokuta $N_AN_BN_C$ uz vrhove N_B i N_C.

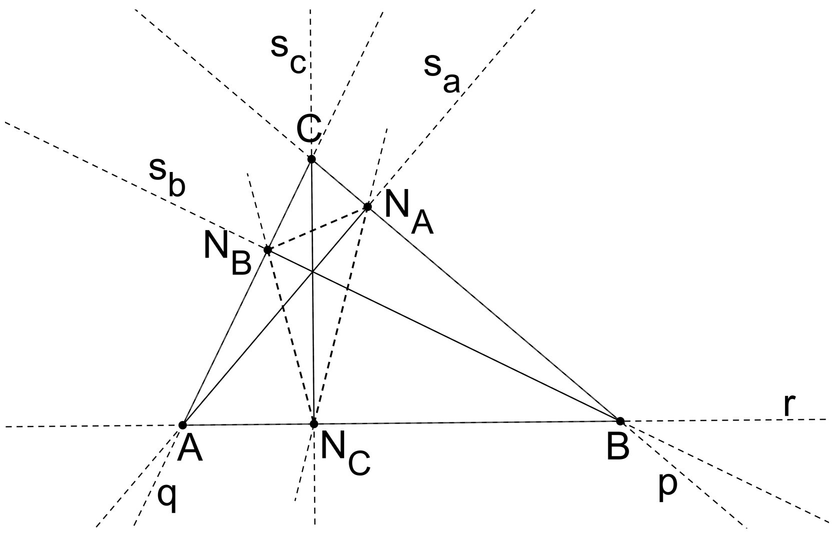
Pogledajmo sad sliku 4.14. Promotrimo vanjski kut trokuta $N_AN_BN_C$ uz vrh N_A. Neka je p simetrala spomenutog vanjskog kuta. Neka je α mjera unutarnjeg kuta uz vrh N_A. Prema definiciji 1.15 slijedi da je mjera vanjskog kuta uz vrh N_A jednaka $180° - \alpha$. Simetrala s_a dijeli unutarnji kut uz vrh N_A na dva kuta mjere $\frac{\alpha}{2}$, a simetrala p dijeli vanjski kut na dva kuta mjere $90° - \frac{\alpha}{2}$. Slijedi da je mjera kuta $\measuredangle s_aN_Ap$ jednaka $90°$, odnosno vrijedi da je $p \perp s_a$. Kako je i $N_A \in p$, slijedi da se simetrala p podudara s pravcem BC. Neka su q i r simetrale vanjskih kutova trokuta $N_AN_BN_C$ redom uz vrhove N_B i N_C. Analogno zaključujemo da vrijedi: $q \equiv AC$ i $r \equiv AB$. Točka A presjek je pravaca q i r, točka B presjek je pravaca p i r, a točka C presjek je pravaca p i q.



Slika 4.14

Konstrukcija:

1. konstrukcija simetrala s_a, s_b i s_c unutarnjih kutova trokuta $N_AN_BN_C$ redom uz vrhove N_A, N_B i N_C
2. konstrukcija simetrala p, q i r vanjskih kutova trokuta $N_AN_BN_C$ redom uz vrhove N_A, N_B i N_C
3. pravci q i r sijeku se u točki A
4. pravci p i r sijeku se u točki B
5. pravci p i q sijeku se u točki C



Slika 4.15

Dokaz:

Potrebno je dokazati da su točke N_A, N_B i N_C nožišta visina trokuta ABC redom iz vrhova A, B i C.

Dokažimo tvrdnju za točku N_A. Točka N_A leži na pravcu s_a što je vidljivo iz prvog koraka konstrukcije. Iz drugog koraka konstrukcije vidimo da je $N_A \in p$. U analizi zadatka dokazali smo da je $s_a \perp p$. Iz četvrtog i petog koraka konstrukcije slijedi da točke B i C leže na pravcu p. Želimo dokazati da je simetrala s_a pravac na kojem leži visina iz vrha A trokuta ABC. Kako bismo to dokazali potrebno je dokazati da je $A \in s_a$.

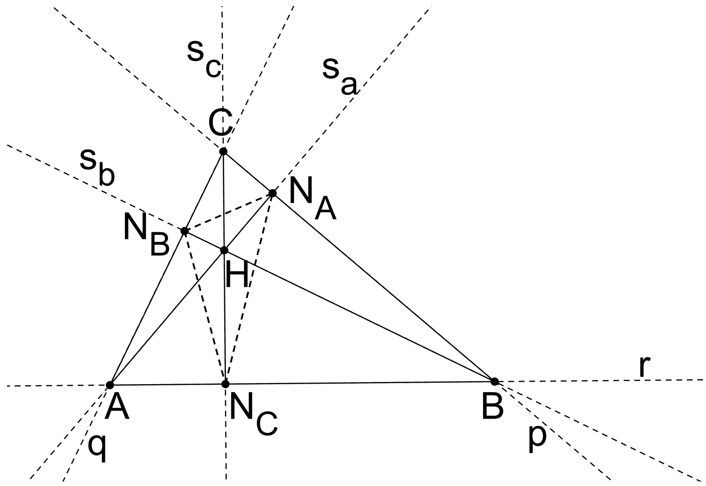
Iz trećeg koraka konstrukcije slijedi da je $A \in q$. Iz drugog koraka konstrukcije znamo da je q simetrala vanjskog kuta uz vrh N_B pa po teoremu 1.14 slijedi da je točka A jednako udaljena od pravaca N_AN_B i N_BN_C. Analogno, budući da je $A \in r$, slijedi da je A jednako udaljena od pravaca N_AN_C i N_BN_C. Iz ovoga slijedi da je točka A jednako udaljena od pravaca N_AN_B i N_AN_C, što povlači da točka A leži na jednoj od simetrala kuta uz vrh N_A. Prema teoremu 1.16 slijedi da točka A leži na simetrali s_a. Dokazali smo ovime da točke A i N_A leže na pravcu s_a. Budući da je $s_a \perp p$ i $p \equiv BC$, tvrdnja slijedi za točku N_A. Analogno provodimo dokaz za točke N_B i N_C.

Rasprava:

Trokut je moguće konstruirati ukoliko postoji presjek u trećem, četvrtom i petom koraku konstrukcije. Pogledajmo treći korak konstrukcije. Pravci q i r neće se sjeći ako je $q \parallel r$. Budući da je $q \perp s_b$, slijedi da je $r \perp s_b$. Analogno, iz $r \perp s_c$ slijedi da je $q \perp s_c$. Iz ovoga slijedi: $s_b \parallel s_c$, što nije moguće. Analogno zaključujemo za četvrti i peti korak konstrukcije. Rješenje, prema tome, uvijek postoji.

Pogledajmo sad sliku 4.16. Neka je H ortocentar trokuta ABC.

Promotrimo trokut ABH. Uočimo da je nožište visine iz vrha A točka N_A, nožište visine iz vrha B točka N_B, a nožište visine iz vrha H točka N_C. Slijedi da trokut ABH zadovoljava uvjete zadatka. Analogno vrijedi i za trokute BCH i CAH. Slijedi da ovaj konstruktivni zadatak ima četiri rješenja.



Slika 4.16

□

Bibliografija

[1] P. Schreck, P. Mathis, V. Marinković i P. Janičić, *Wernick's List: A Final Update*, dostupno na: `http://forumgeom.fau.edu/FG2016volume16/FG201610.pdf` (16. travnja 2016.)

[2] D. Ilišević i M. Bombardelli, *Elementarna geometrija*, 2007, dostupno na: `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf` (28. lipnja 2016.)

[3] D. Palman, *Geometrijske konstrukcije*, Element, Zagreb, 1996.

[4] B. Pavković i D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga - Zagreb, 1992.

[5] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

[6] A. Marić, *Trokut*, Element, Zagreb, 2007.

[7] A. Marić, *Matematika za maturu*, Element, Zagreb, 2010.

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavaju se i rješavaju konstruktivni problemi u kojim je barem jedan od zadanih elemenata duljina visine trokuta ili položaj ortocentra trokuta. Rad je podijeljen na četiri poglavlja. U prvom poglavlju naveden je niz definicija i poučaka korištenih u drugom i trećem dijelu rada. U drugom poglavlju govori se više o konstrukcijama općenito; što znači konstruirati figuru, kojim alatima se služimo i koje su temeljne operacije izvedive odabranim alatima. Navedene su tu i objašnjene temeljne konstrukcije figura izvedene nizom temeljnih operacija. Potom se proučava metodika rješavanja konstruktivne zadaće, etape rješavanja (analiza, konstrukcija, dokaz i rasprava) te metode rješavanja korištene u trećem dijelu rada (metoda presjeka i algebarska metoda). Detaljno je opisano nekoliko konstrukcija odabranih algebarskih izraza i geometrijskih mjesta točaka korištenih pri rješavanju metodom presjeka. Navedene su i opisane dvije pomoćne konstrukcije korištene kasnije u radu.

U trećem poglavlju rješavamo metričke konstruktivne zadatke. Zadatci su poredani prema složenosti. U svakom od njih etape rješavanja su detaljno opisane i potkrijepljene nizom slika konstruiranih u GeoGebri. Četvrto poglavlje obuhvaća položajne zadatke sa zadanim položajem ortocentra trokuta i zadatke s položajem nožišta visina trokuta. Kao i u prethodnom poglavlju etape zadataka iscrpno su pojašnjene i sadrže konstruirane slike. Prilikom rješavanja zadataka često su korištene definicije i svojstva trokuta iz prvog poglavlja, što je i naznačeno u tekstu.

Summary

In this thesis we studied and solved constructive problems where at least one of the given elements is the lenght of a triangle's height or a position of the orthocenter. The thesis consists of four chapters. The first chapter provides a list of definitions and theorems used in the second or third part of the thesis. In the second chapter it is spoken about constructions alltogether; what it means to construct a figure, which tools do we use and which of the basic operations are doable with the use of these tools. We study the methodics of solving a constructive problem, stages of solving one (analysis, construction, proof and discussion) and solving methods used in the third part of the thesis (the method of sectioning and the algebraic method). Several constructions of chosen algebraic expressions and geometrical places of points have been explicated in detail. Two auxiliary constructions that have been used later on in the thesis are also listed and explained.

The third chapter consists of solving metrical constructive problems. The problems are arranged by complexity. Each of them gives carefully explained stages of solving which are substantiated with a list of images constructed using GeoGebra. The fourth chapter includes positional problems with the default position of the orthocenter and problems given the position of the feet of the altitudes. This section also includes stages of solving and constructed images. Definitions and characteristics of a triangle from chapter one have been used to solve a large number of examples which is marked in the text.

Životopis

Rođena sam 31. listopada 1991. u Šibeniku. U Dubrovniku 1998. godine upisujem Osnovnu školu Marina Getaldića. Tijekom osnovnoškolskog obrazovanja redovito sudjelujem na matematičkim natjecanjima. Upisujem srednju školu Gimnazija Dubrovnik, smjer: opća gimnazija 2006. godine. Istu završavam 2010. godine, kad upisujem preddiplomski studij Matematika; smjer: nastavnički na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. Preddiplomski studij završavam 2013. godine te na istom fakultetu upisujem diplomski studij Matematika; smjer nastavnički.