SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Dina Durmić

FIZIKALNI POGLED NA SIMETRIJE U EKONOMSKIM MODELIMA

Diplomski rad

Zagreb, MMXVIII.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

SMJER ISTRAŽIVAČKI

Dina Durmić

Diplomski rad

Fizikalni pogled na simetrije u ekonomskim modelima

Voditelj diplomskog rada: prof.dr.sc., Hrvoje Štefančić

Ocjena diplomskog rada: ______________________

Povjerenstvo: 1. ________________________

2. ________________________

3. ________________________

Datum polaganja: ________________

Zagreb, MMXVIII.

Zahvaljujem se prof.dr.sc. Hrvoju Štefančiću na mentorstvu.

Sažetak

Koncept simetrije je bitan za promatranje različitih pojava u fizici i oblikovanje fizikalnih teorija. Svrha teme je iz fizikalne perspektive promotriti ulogu simetrije u ekonomskim modelima. Prvo se promatra važnost koncepta baždarne simetrije u razumijevanju Arrow-Debrew modela opće ekonomske ravnoteže, zatim se promatraju Modeli temeljeni na agentima. Na kraju se istražuje osjetljivost modela vrednovanja financijskih izvedenica (eng.financial derivatives) o reprezentaciji cijene imovine u podlozi, odnosno imovine na kojoj se izvedenice temelje.

Physical perspective on symmetries in economic models

Abstract

The concept of symmetry is essential for observing different phenomena in physics and the formation of physical theories. The theme involves observing the role of symmetry in economic models from physical perspective. First, the importance of the concept of gauge symmetry in the understanding of the Arrow-Debrew model of general economic equilibrium is observed, then the agent-based models are considered. Finally, while observing models for valution the financial derivatives, the relation between the price of the derivative and the representation of the price of the underlying asset is investigated.

Sadržaj

1 Uvod

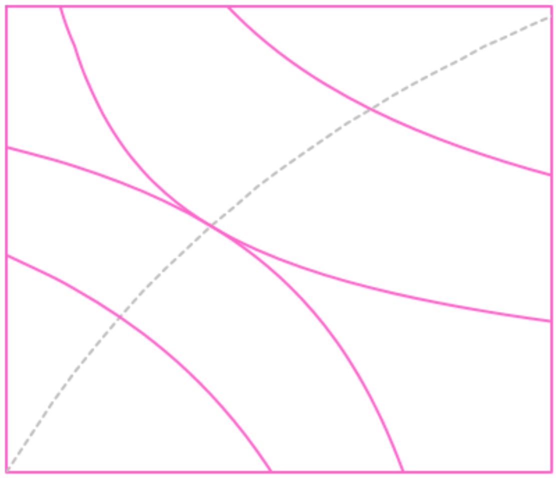
S obzirom na kvantitativnu prirodu mnogih pojava u ekonomiji, često se u njihovom opisu koriste koncepti koji su poznati i u fizici. Svrha teme ovog diplomskog rada je iz fizikalne perspektive istražiti ulogu simetrije u ekonomskim modelima. Drugo poglavlje sadrži opis Neoklasične ekonomske teorije opće ravnoteže koja je slična fizici po tome što se zasniva na nekoliko jednostavnih principa iz kojih proizlazi kompleksna matematička formulacija. Da bi fizikalni pogled na ekonomske modele bio moguć, prvo će se ukratko predstaviti Arrow-Debreu model opće ravnoteže [2]. Diskutirat će se lom simetrije i postojanje više od jednog stanja ravnoteže. Nakon toga će se evaluirati prednosti i slabosti neoklasične ekonomske teorije. Slabosti su nedostatak dinamike u navedenom modelu i tretman nepredvidljivosti koja karakterizira velika ekonomska tržišta. U trećem poglavlju se diskutira klasa tzv. Modela temeljenih na agentima [3] koji omogućuju promotriti problem fundamentalnog značenja cijene i diskutirati koje veličine bi trebale biti opservable neravnotežne dinamičke teorije ekonomskih tržišta. Da bi se odgovorilo na ova pitanja, Malaney i Weinstein [4] predlažu formulaciju ekonomije u jeziku baždarne teorije. Ovdje će se pokazati analogija s fizikom. Kao što postoji makro i mikro ekonomija, postoji makro i mikro fizika. Mikroekonomija bi bila atomska fizika, a makroekonomija termodinamika koja opisuje materiju u različitim fazma. Most među njima je statistička fizika koja proučava velik broj atoma izvan i u ravnoteži. U ekonomiji, taj most bi bi bio Model temeljen na agentima. U četvrtom poglavlju se uvode stohastički procesi u kontekstu kvantitativnih financija kako bi se simuliralo procjenjivanje cijena. Radi utvrđivanja osjetljivosti modela vrednovanja financijskih izvedenica na reprezentaciju cijene, peto poglavlje predstavlja poznati Black-Scholes model vrednovanja financijskih izvedenica koji se temelji na nasumičnim procesima kao što je npr. dobro poznato Geometrijsko Brown-ovo gibanje u fizici. Sama osjetljivost modela na reprezentaciju cijene se provjerava u šestom poglavlju.

2 Neoklasična ekonomska teorija opće ravnoteže

Neoklasična ekonomija proučava način na koji društva koriste ograničene resurse kako bi proizvela dobra i usluge s ciljem da što bolje zadovolje svoje potrebe. Prema tome, promatra se što se proizvodi, tko i kako to proizvodi te tko dobije ono što se u konačnici proizvede. Osnovna ideja je da većinu odluka donose pojedinačne tvrtke i kućanstva koji neovisno pokušavaju maksimizirati mjeru svoje sreće (eng. happiness). Za tvrtke, mjera sreće je profit, a za kućanstva iskorištenost kapaciteta. Problem se onda zasniva na tome je li moguće za različite tvrtke i kućanstva istovremeno maksimizirati sreću unatoč tome što su tvrtke ograničene resursima i dostupnim tehnologijama, a kućanstva novčanim sredstvima. Raspodjela roba i resursa koja zadovoljava ovaj uvjet je *efikasna*. Tržište je u *ravnoteži* kada je svaka proizvedena roba prodana i kada su sve ponuđene usluge iskorištene.
Neoklasična ekonomija rješava problem efikasnosti i ravnoteže tako da pretpostavi da postoji valuta kojom se može sve prodati i kupiti. Svaka roba i usluga u tome slučaju ima cijenu koja nije fiksna nego varira ovisno o jednostavnom mehanizmu koji se zove zakon ponude i potražnje. Kada je potražnja veća od ponude, cijene rastu, a u obrnutom slučaju padaju. Slijede glavni rezultati ovakve pretpostavke:

- Uvijek postoje cijene takve da tržište bude u ravnoteži;
- Kada je tržište u stanju ravnoteže, ono je i efikasno u smislu da nitko neće postići veću mjeru sreće, bez da naruši sreću nekog drugog.

Navedeni principi se lako mogu ilustrirati na jednostavnom modelu dvoje ljudi koji trguju s dvije vrste roba. Ovaj model se naziva Edgeworth-ova kutija [5]. Ilustracija je dana na Slici 2.1. Ukupna količina obje vrste roba je konačna, pitanje je kako ih raspodijeliti, a da obje osobe istovremeno maksimiziraju svoju sreću. Svakome je pridružena funkcija koja određuje mjeru njihove pojedinačne sreće u ovisnosti o tome koliko od svake dvije robe imaju. Svaka raspodjela koja zadovoljava navedena ograničenja je točka u kutiji. Netrivijalna posljedica ovog jednostavnog principa jest da slične rezultate daju tržišta s velikim brojem sudionika, dobara i nelinearnih ograničenja. Ova generalizacija je najveći uspjeh neoklasične ekonomije. Prije formalnog matematičkog predstavljanja ove teorije, bitno je spomenuti da ljudska psihologija diktira pravila ponašanja tržišta. To znači da postoje fenomeni kao



Slika 2.1: Dvije osi predstavljaju dvije vrste roba raspodijeljenih između dvije osobe. Krivulje konveksne donjem lijevom kutu pripradaju jednoj osobi, a krivulje konveksne nasuprotnom kutu drugoj osobi i odgovaraju raspodjeli dobara druge osobe predstavljenom gornjom i desnom osi. Točka gdje se dodiruju je točka ravnoteže gdje je nemoguće povećati 'sreću' jedne osobe bez da se naruši 'sreća' druge. Konveksnost je potrebna za postojanje ravnoteže, a proizlazi iz zakona opadajućih prinosa [5].

što su mjehuri (eng. bubbles) što je nagli porast cijena nekoga dobra ili skupine dobara, gdje početni porast cijena stvara očekivanja o njihovom daljnjem rastu te privlači nove kupce, uglavnom špekulante zainteresirane za ostvarivanje profita od trgovine tim dobrom, a ne za njegovu uporabu u svrhu krajnje potrošnje ili eksploatacije. Osim mjehura, postoje i fenomen kao što je panika, a to je iznenadan i raširen strah od pada burzovnih vrijednosti ili sloma financijskog tržišta. Često prethodi financijskim krizama, a potaknut je vijestima o potencijalnim negativnim kretanjima. Posljedica panike je masovno povlačenje bankovnih depozita, prodaja dionica ili valuta, što pridonosi padu pogođenog sektora. Ovakvi fenomeni se teško mogu opisati matematičkim formulacijama. Unatoč tome, argument neoklasične ekonomije je da čak i ako je stanje ravnoteže poremećeno panikama, ovi fenomeni su tranzijentni, a ono što dugoročno ima efektivni utjecaj jest težnja svake osobe da maksimizira svoju sreću koliko okolnosti dopuštaju.

Pri detaljnijem opisu modela, pokazat će se formalno kako se definira ravnoteža bez da se ulazi u dinamiku koja bi objašnjavala koliko brzo se ravnoteža postiže što je i jedna od kritika modela. U fizici, grana koja se bavi makroskopskim pojavama se zove termodinamika. Kada se svi makroskopski procesi prestanu mijenjati u vremenu, smatra se da su tijela u termodinamičkoj ravnoteži [10].

2.1 *Osnove Arrow-Debreu modela neoklasične ekonomije opće ravnoteže*

Slijedi matematička formulacija neoklasične ekonomske teorije opće ravnoteže [2,3].

Prostor dobara

N dimenzionalni prostor $\mathcal{P}$ je prostor dobara R^N. Svaki element pripada određenom dobru što je zajednički naziv za proizvode i usluge koji imaju svojstvo da se mogu prodati i kupiti. Dakle, koordinate vektora $X^a \in \mathcal{P}$ odgovara količini dobra tipa a. Ovakav vektor se može smatrati inventarom jer daje listu dobara koja se mogu posjedovati.

Vrijeme

Ista roba u različitim vremenskim trenutcima se smatra različitom vrstom dobra. Na primjer, prodajemo li neku vrstu soka u datom trenutku po jednoj cijeni, a u budućnosti po drugoj cijeni, tada se sok u datom trenutku smatra jednom vrstom dobra, a sok u budućnosti drugom vrstom dobra. Prostor dobara je onda $\mathcal{P}^T$ gdje je T broj različitih trenutaka. To znači da je svaki indeks zapravo uređeni par (a, t) gdje a označava određeno dobro, a t vrijeme.

Kovektor cijena

Pretpostavlja se postojanje jedne valute. Prema tome, postoji kovektor cijena $\vec{p} = p_a = \{p_1, p_2, ...\} \in \mathcal{P}^*$ koji odgovara cijenama N dobara. Npr. p_2 je cijena proizvoda dva. Za svaku cijenu se pretpostavlja da je pozitivna $p_a \geq 0$. Glavni predmet diskusije su uvjeti u kojima je skup cijena određen. S obzirom na inventar X^a i kovektor cijena p_a, vrijednost inventara je dana s: $V = p_a X^a$. Pokazat će se da je dinamika cijena ovog modela karakterizirana homogenošću prvog stupnja. To znači da ako se sve cijene povećaju za isti faktor, pripadajući inventar će se povećati za taj isti faktor. Fizikalno, postoji simetrija u kojoj su sve cijene jednako skalirane što odgovara neovisnosti dinamike cijena o mjernoj jedinici (valuti). Ovo je prva naznaka uloge baždarne invarijatnosti u ekonomiji [1]. Ova ideja je skrivena u Arrow-Debreu modelu jer je simetrija odmah eliminirana normalizacijom cijena tako da vrijedi:

$$\sum_a p_a = 1. \tag{2.1}$$

Ovo definira $S \subset \mathcal{P}$ koji je prostor cijena.

Tvrtke

Ekonomija pretpostavlja da postoji F tvrtki ili poduzeća. Doprinos svake tvrtke ekonomiji je opisan procesom proizvodnje što je vektor Y_A^a. $A = 1, ..., F$ označava različite tvrtke, dok a označava različita dobra. Elementi vektora mogu biti negativni što definira dobra koja se ulože u produkcijski proces (eng. input) i pozitivni ono što se u konačnici proizvede i spremno je za trgovanje (eng. output). Npr. $Y_1^{17} = -4$ znači da su 4 jednice dobra 17 uložene u proces proizvodnje tvrtke $A = 1$. Za svaku tvrtku postoji skup mogućih dostupnih procesa proizvodnje dan kompaktnim konveksnim skupom $\mathcal{Y}_A \in P$. Značenje zahtjeva konveksnosti je da ako $\lambda Y_A^a \in \mathcal{Y}_A$ za $0 < \lambda \leq 1$, tvrtka može odabrati proizvesti 3 auta iako ima kapacitet proizvesti 10. Za svaki skup cijena p_a i procesa $y_A^a \in \mathcal{Y}_A$, profit procesa po tim cijenama je dan s $p(y)_A = p_a y_A^a$ što je funkcija na $\mathcal{Y}_A$. Ovo odgovara mapiranju iz prostora cijena S u P. Ovu funkciju ćemo zvati funkcija opskrbe $S_A^a(p)$ tvrtke A.

Kućanstvo ili potrošač

Postoji H kućanstava označenih s $\alpha = 1, ..., H$. Karakterizira ih plan potrošnje X_α^a što je za svako kućanstvo α vektor u pozitivnom definitnom kvadrantu P označen kao P_+. Njegove komponente koje su pozitivni brojevi predstavljaju plan konzumacije svakog dobra. Dakle ako je X_{13}^5=12, to znači da kućanstvo 13 namjerava konzumirati 12 jedinica dobra 5. Funkcija cijena koja nam kaže koliko to košta je onda $p_a X_\alpha^a$. Kućanstvo je karakterizirano još jednom funkcijom koja opisuje dobra i usluge koje kućanstvo može prodati što uključuje i rad njegovih članova $r_\beta^a \in P_+$. Pretpostavlja se da će kućanstvo prodati sve što može i zaraditi, pa je prihod:

$$i_\beta = p_a r_\beta^a. \tag{2.2}$$

Kućanstvo može posjedovati i udio u nekoj tvrtci što se označava s α_A^α. To znači da je ukupni prihod kućanstva povećan za:

$$i_{dionice}^\beta = \alpha_A^\beta p_a y_A^a. \tag{2.3}$$

Prema tome, ukupni prihod kućanstva je:

$$I_{ukupno}^\beta = p_a r_\beta^a + \alpha_A^\beta p_a y_A^a. \tag{2.4}$$

Svako kućanstvo ima funkciju korisnosti U_β na P_+ takvu da vrijedi $U_\beta(X^1_\beta) \geq U_\beta(X^2_\beta)$ ako $X^1_\beta \geq X^2_\beta$. S obzirom na danu cijenu p_a, postoji domena planova potrošnje $\tilde{P}(p)^\beta_+$ koje si kućanstvo β može priuštiti:

$$p_a X^a_\beta \leq I^\beta_{ukupno}. \tag{2.5}$$

S obzirom da se pretpostavlja da svako kućanstvo maksimizira svoj plan potrošnje što maksimizira njihovu funkciju korisnosti, dobiva se još jednom mapiranje iz S u $\tilde{P}_+$ što se naziva funkcija potražnje $D(p)^a_\beta$ koja je jednaka planu potrošnje X^a_β koji maskmizira funkciju korisnosti po danim cijenama.

Zakon ponude i potražnje

Sada se može matematički formulirati zakon ponude i potražnje:

$$Z^a(p) = \sum_\beta D(p)^a_\beta - \sum_A S(p)^a_A - \sum_\beta r^a_\beta. \tag{2.6}$$

Ideja ravnoteže u ovom kontekstu je da postoje cijene pri kojima svaka tvrtka maksimizira svoj profit i svako kućanstvo svoju preferencu plana potrošnje, tako da ponuda balansira potražnju za svako dobro. To znači da funkcija viška potražnje $Z^a(p)$ iščezava. Kaže se da je p^*_a ravnotežni vektor cijena kada vrijedi:

$$Z^a(p^*) = 0. \tag{2.7}$$

Treba imati na umu da vrijedi pretpostavka savršene konkurencije. To znači da individualne odluke pojedinaca infinitezimalno utječu na cijene tj. beznačajne su. Preciznije, nema monopola ili unija koje bi mogle dati koaliciji sudionika moć da mijenjaju ili utječu na cijene. Kada $Z^a(p)$ ne iščezava, postoji slabije svojstvo koje vrijedi u tom slučaju, a zove se Walras-ov zakon:

$$p_a Z^a(p) = 0. \tag{2.8}$$

To znači da za dane cijene vrijedi da je ukupan višak potražnje jednak ukupnoj količini dobara koja se nisu prodala [5].

Ekonomsko ravnotežno stanje

U ekonomskom ravnotežnom stanju Arrow-Debreu-Mackenzie teorem pokazuje da postoji barem jedan skup cijena za koje ravnotežno stanje postoji. Definiramo li mapiranje iz simplekse cijena u samu sebe, slijedi da za danu cijenu $p_a \in S$:

$$T(p)_a = \frac{p_a + max[0, Z_a(p)]}{1 + \sum_a max[0, Z_a(p)]}. \tag{2.9}$$

Kada je potražnja veća od potrošnje, cijene se povećavaju, a u obrnutom slučaju smanjuju. Simpleksa cijena je kompaktna i može se dokazati da je glatka. Prema Brown-ovom teoremu fiksne točke, mapiranje ima barem jednu točku p_a^* za koju vrijedi $T(p*) = p*$ što implicira da vrijedi $Z^a(p*) = 0$. Da bi pokazali kontekst u kojem je ovakva ravnoteža optimalna uvodi se pojam Pareto učinkovitog stanja. Plan potrošnje za svako kućanstvo je Pareto učinkovit ako za dani fiksni skup cijena i odgovarajuću raspodjelu dobara koja maksimizira funkciju korisnosti po tim cijenama, svaka preraspodjela dobara bi snizila korisnost barem jednog kućanstva. Malo se zna o stabilnosti ovakve ravnoteže. Na primjer, pretpostavimo da točke ravnoteže nisu stabilne, tj. da odgovaraju točkama na granici režima reda i kaosa. U režimu reda, fluktuacije su male i gaussijanske, a u režimu kaosa dinamika je kaotična i nema fluktuacija oko stabilne točke. Kada ekonomska ravnoteža nije stabilna odnosno kada dolazi do efekta mjehura ili loma tržišta, mjera volatilnosti je irelevantna. U tome slučaju, možda bi preferirali ekonomiju takvu da je u stabilnoj točki što znači da bi žrtvovali dio učikovitosti za stabilnost. Ovo nije dokazano, nego su hipoteze koje je prvi primjetio Roumen Borissov. Ono za što postoji velik broj dokaza je da skup cijena za koji postoji stanje ravnoteže nije jedinstven. Sonnenschein-Mantel-Debreu teorem [6] kaže da za svaki konačan skup točaka od S, postoji ekonomija takva da postoji ravnotežni vektor cijena te ekonomije. Postoje dvije invarijantnosti u Arrow-Debreu modelu. Ovo su baždarne invarijantnosti u smislu da različite matematičke reprezentacije odgovaraju istom ekonomskom modelu. Model je invarijantan na sljedeće matematičke operacije.

- Reskaliranje cijena:

  $$p_a \to \Lambda p_p, \tag{2.10}$$

  gdje je $\Lambda > 0$. Ovo je globalna baždarna invarijantnost gdje su cijene baždarno fiksirane jednadžbom (2.1). Treba napomenuti da je dobro u različitim vremenskim trenutcima različito dobro, tako da ono što je fiksirano jednadžbom

(2.1) je suma po svim cijenama u svim vremenima.

- Reskaliranje funkcije korisnosti:

$$U_\alpha \to \lambda_\alpha U_\alpha, \tag{2.11}$$

za $\lambda_\alpha > 0$. Ovo se može smatrati lokalnom baždardnom invarijantnošću jer se svaka funkcija korisnosti svakog kućanstva može skalirati odvojeno. Tako odražava ideju da relativne količine koristi različitih kućanstava nisu usporedive.

Baždarna grupa Arrow-Debreu modela je R_+^{H+1}. U narednim razmatranjima se tvrdi da je ovo podgrupa veće grupe baždarnih invarijatnosti neravnotežnih modela.

2.2 Simetrije

Simetrija se može koristiti kao argument za to da ravnoteža nije jedinstvena. Može se ilustrirati jednostavnim primjerom [1]. Pretpostavi se da postoji n kvalitetnih studenata likovne umjetnosti koji žele mjesto u nekoj od poznatih galerija i pretpostavimo da je otvoreno $p \ll n$ mjesta. Tržišni mehanizam raspodjele će odabrati p od n umjetnika i smjestiti ih u neku od galerija nakon čega će imati uspješne karijere s velikom količinom prihoda. Međutim, većina studenata će imati karijere kao učitelji ili profesori i zarađivati znatno skromnije prihode. Radi jednostavnosti ćemo pretpostaviti da je svih n studenata dovoljno talentirano da ih galerija uzme koliko god je u njenom kapacitetu, ali ima samo p broj mjesta. Postoji inicijalna simetrija $\binom{n}{p}$. Simetrija će biti slomljena dinamikom funkcije raspodjele koja traži Pareto učinkovita stanja. Svako stanje u kojem je p od n umjetnika odabrano je Pareto učinkovito. U konačnici, galerije će maksimizirati svoj profit u svakom slučaju, a umjetnici će bilo da postanu zvijezde ili učitelji također maksimizirati svoje funkcije koristi s obzirom na ograničenja. Dakle, ako je bilo koje od mogućih stanja u ravnoteži, sva su stanja u ravnoteži.

2.3 Kritika Arrow-Debreu modela ekonomije

Prednost Arrow-Debre modela ekonomije je njegova općenitost. U malenom modelu dva dobra i dvije osobe, lako se može pokazati postojanje Pareto učinkovitih izbora

i odgovarajućih cijena. Ono što je netrivijalno pokazati je da Pareto učinkoviti izbori postoje za velike i kompleksne ekonomije. Također, nije trivijalno pokazati da za nekoliko općenitih pretpostavki postoji skup cijena koji dopušta svima da maksimiziraju svoju sreću. Jedna od prednosti je također kanoničnost modela u smislu da se poput klasične ili kvantne mehanike ne može lako modificirati. Pokušaji da se modificira se vrate na jednaku formulaciju. Dakle, nije jedan u nizu sličnih modela s malo drugačijim pretpostavkama. Konačno, posljednja prednost je da je pokazano da ne može biti osnova ideoloških pogleda na ekonomiju kao što su kolike trebaju biti razlike između bogatstva i prihoda pojedinih članova ili uloga vlade u pružanju usluga kao što je obrazovanje ili zdravstvo jer se može pokazati da za bilo koju distribuciju resursa, postoji ravnoteža koja je Pareto učinkovita [1].
Postoji nekoliko očitih slabosti modela.

- Pokazano je da ravnoteža postoji i da je Pareto učinkovita, međutim nije jedinstvena. To znači da tržište samo po sebi ne može prirodno doći u jedinstveno stanje maksimalne učinkovitosti, nego ih ima mnogo. Društvo onda mora odrediti dodatne kriterije o tome koje je stanje najpoželjnije.
- Ne postoji mehanizam koji nam govori o tome što vodi stanje u ravnotežu.
- Postoje pitanja na koje ne daje odgovore kao što su kako brzina konvergencije u stanje ravnoteže ovisi o generičnim pretpostavkama modela kao što su broj dobara, tvrtki ili kućanstava. Može se reći da pretpostavke modela vrijedne samo za kratka vremena prije nego što interveniraju nepredvidljivi događaji ili promjene u tehnologiji.
- Nedostaje neravnotežna teorija s dinamikom koja objašnjava koliko brzo se ravnoteža postiže.
- Nema općenitih rezultata o stabilnosti ravnoteže s obzirom da nisu jedinstvene, onda po definiciji nisu nužno ni stabilne.
- Ne može se dobro testirati na stvarnim podacima.

Osim toga, snažne kritike dolaze i s obzirom na primjenjivost ovog modela. Ideja da postoji fiksiran skup dobara poznat svim sudionicima i fiksiran u svim vremenima je pogrešna. U modernoj ekonomiji, često su predstavljena dobra koja brzo dominiraju tržištem, a za koje se prije nije znalo. Ideja da su neodređenosti poznate unaprijed je nerealistična. Malo koje kućanstvo planira svoj budžet više od par godina unaprijed. Preference potrošnje se mijenjaju ovisno o okolnostima. Kao i kućanstva, malen broj tvrtki planira više od par godina unaprijed i fokusira se najčešće na malen dio tržišta. Postoji kombinatorička eksplozija broja različitih dobara s obzirom da se dobro u različitim vremenima ili mjestima tretira kao različito dobro.

3 Modeli temeljeni na agentima i usporedba s fizikom

Unatoč prednostima Arrow-Debreu modela, jasno je da postoji potreba za neravnotežnom teorijom tržišta. Ovdje se uvodi analogija s fizikom. Kao što postoji makro i mikro ekonomija, postoji makro i mikro fizika. Mikro bi bila atomska fizika, a makro termodinamika koja opisuje materiju u različitim fazama. 'Makrofizika' se uglavnom bavi materijom u ravnoteži. Most među njima je statistička fizika koja proučava velik broj atoma izvan i u ravnoteži. Iako se ravnoteža u ekonomiji ne može u potpunosti usporediti sa značenjem ravnoteže u fizici, jasno je da postoji potreba za nečim što bi se zvalo 'statistička' ekonomija. Bila bi osnovana na mikroskopskom modelu agenata i operacija od kojih se ekonomija sastoji i proučavala bi kako oni međusobno interagiraju. Sustav agenata bi se mogao usporediti u fizici s ansamblom koji je poznata matematička konstrukcija u statističkoj fizici čiji su članovi pojedine konfiguracije tj. zamišljeni sistemi među kojima se uzima nasumični uzorak. Svaku konfiguraciju N čestica u statističkoj fizici možemo opisati kao točku u višedimenzionalnom prostoru impulsa i koordinata [10].

Postoji nekoliko zahtjeva da bi se ostvarila formulacija modela temeljenih na agentima.

- Odrediti stacionarno stanje za tržišta i aproksimativno pokazati da odgovara ideji ravnotežnog stanja u neoklasičnoj ekonomiji.
- Proučiti faznu strukturu ekonomskih modela i odrediti bitne makroskopske opservable.
- Proučiti prijelaz iz neravnotežnog u ravnotežno stanje i odrediti kako relaksacijsko vrijeme ovisi o makroskopskim parametrima.
- Pručiti fluktuacije oko ravnoteže i njihovu narav.

Poput fizikalnog sustava, kako bi produbili razumijevanje o stanju u ravnoteži postoji potreba za neravnotežnom teorijom. Prilikom formulacije takve teorije se nameže nekoliko početnih principa.

- Vrijeme se mora definirati tako da prepoznaje ireverzibilnost većine provedenih djelovanja kao i asimetriju prošlosti, sadašnjosti i budućnosti. Ekonomija se mora bazirati na odlukama individualnih agenata u danom vremenu s obzirom na informacije koje imaju o prošlosti.

- Budućnost je neodređena. Koliko god matematički alati bili precizni, ne mogu dati jedinstvene predikcije za evoluciju kompleksnih ekonomskih sustava zato što postoji kombinatorička eksplozija u broju mogućnosti tako da je korisna reprezentacija nemoguća. Isto tako, nemoguće je predvidjeti sve buduće događaje [11].

- Ekonomske opservable su vezane za računovodstvo i državne podatke. Restrikcija su predmeti mjerenja od strane tvrtki, individualaca i države. Također uklanja uzimanje u obzir fikcionalnih elemenata koji nemaju veze s time kako realno tržište funkcionira kao što su određen prostor dobara, produkcijskih planova, funkcije korisnosti i slično.

- Agenti u ekonomiju donose odluke u svakom trenutku na temelju informacija koje imaju u svojim povijesnim podatcima te javno dostupnih informacija.

- Termodinamička ravnoteža nije analogna ekonomskoj ravnoteži jer ekonomski sustav nije izoliran. Ekonomija je otvoren sustav koji dobiva 'inpute' u obliku ljudskog rada, energije, sirovina i otkrivanja novih tehnologija i proizvoda. Ekonomska ravnoteža može biti analogna neravnotežnom stacionarnom stanju koje se pojavlje kod otvorenih sustava u fizici. U ovom slučaju relevatne opservable bi bile brzina protoka kritičnih materijala kroz sustav.

- Ekonomija ima pristup velikom broju mogućih kvazi-stabilnih stanja.

- Tržišta s velikim brojem agenata imaju velike aproksimativne simetrije koje se naziru u činjenici da mnogi individualci imaju slično obrazovanje i interese, a mnoge tvrtke se natječu u ponudi sličnih proizvoda ili usluga. U stacionarnom stanju su ovakve simetrije obično slomljene.

- Postoje baždarne simetrije povezane s reskaliranjem jedinica kojima se vrednuju pojedinačna dobra. Dinamika tržišta bi trebala biti invarijantna na ove baždarne transformacije.

3.1 Osnovne ideje Modela agenata

S obzirom na napredak tehnologije, moguće je napraviti modele u kojima veliki broj agenata interagira i proučavati ih. Ključna ideja ovih modela je reprezentacija tvrtki s podatcima strukturiranim po principima računovodstva. Agenti trguju bilateralno i sve informacije koje posjeduju su one od trgovanja u prošlosti. Prema tome, ne postoji globalna cijena, nego agent prikuplja podatke o uspješnim i neuspješnim ponudama i potražnjama. Nadalje, nema nužno jedne valute, dva agenta mogu trgovati bilo kojim elementima koji su u njihovom inventaru. Slijedi generalizacija ovakvih modela [1, 12, 13].

- **Dobra** su materijalna dobra ili usluge koje se mogu posjedovati, transformirati i kojima se može trgovati.
- **Agent** je osoba, tvrtka ili korporacija koja ima mogućnost: posjedovati stvari koje pripadaju njegovom inventaru, transformirati ih, trgovati stvarima, raditi ugovore koji se provode u budućnosti. Nadalje, imaju potrebe i ciljeve koje moraju zadovoljiti da bi opstali. Donose odluke i drže bilješke o provedenim odlukama. U tome kontekstu ih vode strogo određena pravila i zakoni.
- **Ekonomska operacija** je promjena stanja jednog ili više agenata na sljedeće načine: proces ili transformacija jednog agenta je promjena koja se očituje u njegovom inventaru, proces trgovanja dobrima između dva agenta, proces u kojem se agenti rode ili umru, proces u kojem su uvedeni novi proizvodi u sustav ili neaktivni proizvodi uklonjeni.

Tvrdi se da je sva dinamika ekonomije sačinjena od navedenih procesa [1]. Ekonomske opservable su onda zapisi inventara agenata u ovim procesima. Ekonomski model je specificiran listom N agenata ili algoritama kojima se oni proizvode uključujući i mogućnost njihove smrti ili rođenja, P vrsta dobara koji se mogu posjedovati, transformirati ili se njima može trgovati, strategijama koje donose različiti agenti, vanjskim uvjetima koji utječu na sustav kao što su input energije, materijala, inovacija i slično, i outputima otpada. S obzirom na navedeno, **statistička se ekonomija definira kao proučavanje kolektivnog ponašanje velikog broja ekonomskih agenata**.

3.2 Baždarna invarijantnost u ekonomiji

Baždarnu invarijatnost kao esecijalni koncept u razvoju ekonomske teorije su uveli Malaney i Weinstein [4]. Potreba za baždarnom invarijatnošću dolazi iz fundamentalne činjenice da su cijene proizvoljne do neke mjere. U stanju ravnoteže Arrow-Debreu modela, baždarna simetrija korespondira skaliranju svih cijena (2.10). Međutim, kada je sustav izvan ravnoteže, cijene nisu fiksirane. Svaki agent je slobodan da vrednuje dobra u kojim god jedinicama želi, a to ne bi trebalo promijeniti dinamiku tržišta. Posljedica je mogućnost ostvarivanja dobitka ili gubitka u ciklusu trgovanja dobrima, valutama ili instrumentima bez da se išta proizvede. Ovo se naziva arbitraža. U ravnoteži, arbitraže nema. Pitanje koje tržišne sile dovode sustav u stanje ravnoteže je slično onome u primjeni baždarne teorije u fizici elementarnih čestica i gravitaciji. Prema tome, zanimljivo je koje veličine su opservable kada uzmemo u obzir slobodu svakog agenta da reskalira i redefinira jedinicu mjere koja se uzima u obzir. Da bi definirali značajne opservable u ekonomiji, moraju se uspoređivati omjeri cijena nekoliko dobara jednog agenta. Ovo može biti ciklus trgovanja koji počne u jednoj valuti, promjeni nekoliko valuta ili dobara i završi u početnoj valuti. S obzirom da su početna i završna valuta jednake, njihov omjer je invarijantan pri reskaliranju vrijednosti valute. Ovo je istina bilo da jedan ili više agenata sudjeluju u ciklusu trgovanja. Kaže se da su ovakve veličine baždarno invarijantne. Veličine koje su definirane ciklusima trgovanja tako se na kraju definiraju kao omjer dvije cijene koje drži isti agent u istoj valuti se zovu zakrivljenosti. Zanimljivo je da veličine koje su invarijantne na baždarne transformacije uključuju arbitraže koje bi trebale nestati u ravnoteži. Ovo su veličine na koje zakon ponude i potražnje djeluje kako bi ih smanjio. Postoji analogija u fizici. U baždarnoj teoriji u fizici opservable su definirane tako da nose neki objekt po zatvorenoj krivulji i uspoređuju se s kopijom svoje vlastite konfiguracije u početnoj točki. Ove opservable se zovu zakrivljenosti. Rezultat nošenja nečeg po segmentu krivulje se zove konekcija i ovisi o lokalnim jedinicama mjere. No kada se krivulja zatvori, uspoređuje se s početnom točkom kako bi se dobila opservabla. U općoj teoriji relativnosti zakrivljenost odgovara nekonzistentnostima u mjerenju, npr. ako netko nosi ravnalo po zatvorenom putu i vrati se u početnu točku, ali ravnalo pokazuje drugi smjer od onoga koji je imao u početku. Dinamika je opisana Einsteinovim jednadžbama. Osnovno stanje je donekle analogno ravnoteži u ekonomskom modelu gdje zakrivljenosti iščezavaju. Iako zakrivljenosti iščezavaju u osnovnom stanju, fizika je najbolje otkrivena u tim terminima. Slično, stabilnost ekonomske ravnoteže se može proučavati modelirajući dinamiku u malim odmacima od ravnoteže. Ako ekonomski model slijedi primjer fizike, nakon što se utvrde varijable, sljedeći je korak proučiti njegovu dinamiku. S obzirom da je formulacija matematički kompleksna, pobliže se prati izlaganje iz [1].

Formalnijim jezikom, zamislimo ekonomsku povijest kao krivulju $\alpha(t)$ u $\mathcal{P} \times \mathcal{P}^*$ što daje sekvencu inventara i cijena. Radi jednostavnosti pretpostavimo da vrijeme teče od $t = 0$ do $t = 1$. Pretpostavimo da ukupna vrijednost dobra $p_a q^a$ ne iščezava. Neka je $\mathcal{C}$ potprostor od $\mathcal{P} \times \mathcal{P}^*$ takav da vrijedi $p_a q^a = 0$ i neka je krivulja $\alpha(t)$ u $R = \mathcal{P} \times \mathcal{P}^* - \mathcal{C}$. Tada je $\alpha(t) = (q^a(t), p_b(t))$ vremenski promjenjiva košara dobara $q^a(t)$ i promjenjivih cijena $p_b(t)$. Da bi se izračunala realna promjena u troškovima života, konstruira se Abelova konekcija na R [4]:

$$A = \frac{q^a dp_a}{q^c p_c}. \tag{3.12}$$

Kada globalno reskaliramo cijene (**??**), vremenski ovisno, $p_a \to \Lambda p_a$:

$$A \to A + dln(\Lambda), \tag{3.13}$$

gdje je A Malaney-Weinstein konekcija za globalnu baždarnu simetriju cijena. Tada su troškovi života dani s:

$$P = e^{\int_\alpha A} \tag{3.14}$$

po krivulji $\alpha(t)$. Ako je tangenta krivulje $\alpha(t)$ u smjeru koji zadaje trgovac, tj. nema promjene u vrijednosti p_a i q^a, tada P iščezava. Pokazano je da vrijedi [4]:

$$P \to \frac{\Lambda(1)}{\Lambda(0)} P. \tag{3.15}$$

Ako želimo kompletno baždarno invarijatnu veličinu, mora se uzeti ekonomska povijest u obzir koja je zatvorena krivulja, tj. počinje i završava s istim inventarom i istim skupom cijena. Promotrimo li ekonomsku povijest koja je mala krivulja koja je zatvorena oko (q^a, p_a) specificirana malim promjenama (dq_0^a, dp_b^0), tada je:

$$P \approx e^F \tag{3.16}$$

gjde je F zakrivljenost dana s [4]:

$$F = \frac{1}{q^c p_c} \left[\delta_b^a - \frac{q^a p_b}{q^d p_d} \right] dq_0^b \wedge dp_a^0. \tag{3.17}$$

U notaciji diferencijalne geometrije [14] $\wedge$ je vanjski product definiran kao $\wedge : \Omega^p \times \Omega^q \to \Omega^{p+q}$.

3.3 Baždarna invarijantnost u modelima agenata

Matematička struktura koja karakterizira jednog agenta se sastoji od sljedećih koncepata:

Vrijeme

Sve veličine su funkcije koje evoluiraju u vremenu, n.

Inventar

Postoji P agenata označenih s $i, j = 1, , , P$ i N dobara označenih s $a, b, c, ... = 1, ..., N$. Stanje inventara je dano vektorom V_i^a opisanim količinom dobra a agenta i.

Baždarenje

Ništa u dinamici ekonomije ne smije ovisiti o jedinicama u kojima se vrednuju različiti inventari. Različiti agenti mogu koristiti različite valute ili mjerne jedinice kako bi vrednovali svoje inventare. Dakle, ekonomske opservable trebaju biti invarijantne na sljedeće transformacije:

$$V_i^a \to V_i^{a'} = \phi_i^a V_i^a, \tag{3.18}$$

gdje je $\phi_i^a \in R^+$ pozitivan realan broj. Dakle baždarna grupa je Abelova i $(R^+)^{NP}$

Adjungirani element

$$V_i^a \to (V_i^a)^* = \frac{1}{V_i^a}, \tag{3.19}$$

Invarijantna norma

$$|V|^2 \equiv \sum_{i,a} (V_i^a)^* V_i^a = n = NP, \tag{3.20}$$

koja je baždarno invarijantna (3.21).

Za svakog agenta matrica W_{ia}^b je vrijednost koju i-ti agent ima u razmjeni a i b tj. $W_{ia}^b = a/b$. Na primjer $W_{ia}^b = 3$ znači da je agent i spreman razmijeniti 3 a za 1 b. W_{ia}^b su formalno konekcije koje pri reskaliranju jedinica se transformiraju kao:

$$W_{ia}^b \to W_{ia}^{b'} = (\phi_i^a)^{-1} W_{ia}^b \phi_i^b \tag{3.21}$$

Sada se može konstruirati vrijednost inventara kao vektor:

$$\mathcal{I}^b = W_{ia}^b V^a. \tag{3.22}$$

Svojstva W_{ia}^b matrica:

- Ako agent i ne zna omjer vrijednosti dobra a i b, onda se piše $W_{ia}^b = ?$.

- Matrica W_{ia}^b je potpuna ako nema zapisa $?$, tako da agent ima informaciju o svim mogućim razmjenama dobara.

- Matrica W_{ia}^b je konzistentna ako $W_{ia}^b = 1/W_{ib}^a$ i $W_{ia}^b = W_{ia}^c W_{ic}^b$ za sve a, b, c.

Ako je matrica konzistentna i potpuna, onda je proporcionalna operatoru projekcije. Ova svojstva impliciraju da postoji jedna valuta takva da sva dobra imaju konzistentne cijene u toj valuti:

$$P_i^a = W_{i0}^b \tag{3.23}$$

$$W_{ia}^b = \frac{P_i^b}{P_i^a} = (P_i^a)^* P_i^b \tag{3.24}$$

$$W_{ia}^b W_{ib}^c = \frac{P_i^b}{P_i^a}\frac{P_i^c}{P_i^b} = N\frac{P_i^c}{P_i^a} = NW_{ia}^c \tag{3.25}$$

Ekonomske operacije

Osnovna ideja modela je da sistem evoluira kroz seriju razmjena dobara što možemo zvati ekonomska operacija. Ovo uključuje par agenata. U osnovi ekonomska operacija n_j^b u jedinicama dobra b, vrednovana u jedinicama agenta j je razmijenjena agentu j od strane agenta i, nasuprot tome n_i^a je jedinica dobra a, vrednovana u jedinicama agenta i je razmijenjena s agentom i od strane agenta j. Nas zanima njihov omjer definiran kao:

$$O_{ia}^{jb} = \frac{n_j^b}{n_i^a} \tag{3.26}$$

Ovo se transformira kao:

$$O_{ia}^{jb} \to (O_{ia}^{jb})' = (\phi_i^a)^{-1} O_{ia}^{jb} \phi_j^b. \tag{3.27}$$

Bitna veličina je:

$$Q_{ia}^{jb} = \frac{n_i^b}{n_i^a} \tag{3.28}$$

Ovo je omjer količine dobra b razmijenjenog od i do j prema količini dobra a razmijenjenog natrag od j do i, ali u ovom slučaju oba je vrednovao agent i.

$$Q_{ia}^{jb} \to (Q_{ia}^{jb})' = (\phi_i^a)^{-1} Q_{ia}^{jb} \phi_i^b. \tag{3.29}$$

Zakrivljenosti i opservable

Zakrivljenosti mjere dobitke i gubitke u ciklusima trgovanja. Na primjer, pretpostavima da imamo ciklus razmjena dobara koji uključuje tri agenta i, j i k. Slijedi:

$$R_{ijka}^d \equiv O_{ia}^{jb} O_{jb}^{kc} O_{kc}^{id}. \tag{3.30}$$

Ovo se transformira lokalno za agenta i:

$$R_{ijka}^d \to (R_{ijka}^d)' = \phi_i^{a-1} R_{ijka}^d \phi_i^d. \tag{3.31}$$

Dijagonalni element R_{ijka}^a je baždarno invarijantna opservabla. To je omjer dobra a koji je vraćen agentu i od k i razmijenjen od agenta i agentu j. Dakle, određuje profit ili gubitak ukupnog ciklusa što se tiče dobra a. Drugačija zakrivljenost se može konstruirati iz O_{ia}^{jb} dana s:

$$S_{ijka}^d \equiv Q_{ia}^{jb} Q_{jb}^{kc} Q_{kc}^{id}, \tag{3.32}$$

koja se transformira kao:

$$S_{ijka}^d \to (S_{ijka}^d)' = \phi_i^{a-1} S_{ijka}^d \phi_i^d. \tag{3.33}$$

tako da su njeni dijagnoalni elementi baždarno invarnijantne opservable.

Efektivna dinamika

Dinamika je dana evolucijom po pravilima trgovanja agenata. Efektivna dinamika se odnosi na veličine koje su minimazirane ili maksimizirane u sustavu agenata kada dođu u neravnotežno stanje. Da opišemo stacionarno stanje, želimo konstruirati akciju S koja se treba onda minimazirati.

Bilateralna dinamika

U ovom slučaju efektivna dinamika je dana sumom parova agenata i mjeri ekonomske operacije između para. Jednostavna akcija je:

$$S^{razmjena} = \sum_{i \neq j} Tr(W_i O_i^j W_j O_j^i) \tag{3.34}$$

4 Slučajni procesi

Uzima se stohastički pristup koji je u kontekstu kvantitativnih financija kolekcija nasumičnih varijabli koja opisuje evoluciju sistema u vremenu. Ovo bi bio fenomenološki pristup problemu kada tržišta nisu u ravnoteži, promatraju se fluktuacije oko stanja ravnoteže. Simulira se procjenjivanje cijena u vremenu. Na temelju slučajnih procesa dobro poznatih u fizici je izveden poznati Black-Scholes model za određivanje cijena financijskih izvedenica što će biti detaljino opisano u petom poglavlju [8, 15].

4.1 Geometrijsko Brown-ovo gibanje

Neoklasična ekonomija tvrdi da se cijene imovine kreću nasumično zbog hipoteze efikasnog tržišta što je navedeno u drugom poglavlju. Ukratko, glavni princip se svodi na dvije tvrdnje:

- Čitava povijest je reflektirana u trenutnoj cijeni i ne sadrži informacije o daljnjem kretanju cijene;
- Tržište se trenutno prilagodi na bilo koju novu informaciju o imovini;

Modeliranje cijene imovine se može svesti na modeliranje dolaska nove informacije koja utječe na cijenu te imovine. S obzirom na dvije gornje pretpostavke, neočekivane promjene cijene su Markovljevi procesi. Relevantna veličina je relativna promjena cijene dS/S. Pretpostavimo da je u vremenu t cijena imovine S. Promotrimo malu promjenu vremenskog intervala dt pri kojem se S mijenja u $S + dS$:

$$\frac{dS}{S} = \sigma dX + \mu dt. \tag{4.35}$$

Stohastička diferencijalna jednadžba se sastoji od dva doprinosa. Prvi doprinos je deterministički i predvidljiv μdt gdje je μ mjera prosječnog rasta cijene tzv. 'drift'. U jednostavnim modelima μ je konstanta, ali može biti i funkcija od S i t. Drugi doprinos σdX modelira nasumičnu promjenu cijene koja je odgovor na vanjske faktore kao što su neočekivane nove informacije o tržištu. Veličina σ se naziva volatilnost i odgovara standardnoj devijaciji relativne promjene cijene dS/S. Veličina dX predstavlja Wienerov proces sa sljedećim svojstvima:

- dX je nasumična varijabla izvedena iz normalne distribucije;
- srednja vrijednost dX je nula;
- varijanca dX je dt.

S obzirom na navedena svojstva dX možemo praktično zapisati kao:

$$dX = \phi\sqrt{dt}, \tag{4.36}$$

gdje je ϕ nasumična varijabla standardne normalne distribucije. Treba napomenuti da ovakav zapis nije matematički rigorozan, detaljnije obrazloženje se može naći u [8]. Funkcija gustoće vjerojatnosti za standardnu normalnu distribucije je dana s:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\phi^2} \tag{4.37}$$

za $-\infty < \phi < \infty$. Definira se funkcional očekivanja:

$$\epsilon\left[F\left(\cdot\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\phi)e^{-\frac{1}{2}\phi^2}d\phi, \tag{4.38}$$

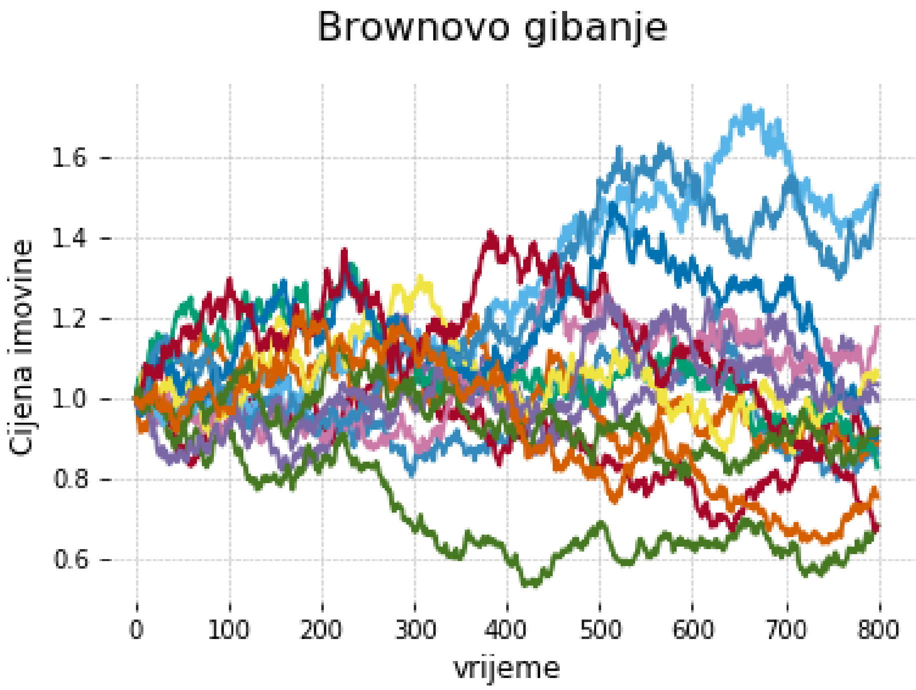
za neku funkciju F. Slijedi:

$$\epsilon\left[\phi\right] = 0, \tag{4.39}$$

$$\epsilon\left[\phi^2\right] = 1. \tag{4.40}$$

Ovakav model dobro opisuje povijesne podatke cijena imovine, ali ne predviđa dobro tzv. panike (nagli pad cijena na tržištu) i mjehure (nagli rast cijena na tržištu). Također, nije dobar model za valute. Međutim, pokazao se kao dobra polazišna točka za sofisticiranije modele. Koefcijenti od dX i dt mogu biti bilo koje funkcije S i/ili t. Jednadžba (4.35) je primjer nasumične šetnje (eng. random walk). Rješenje jednadžbe ne određuje deterministički cijenu, ali može dati zanimljive i bitne informacije o njenom ponašanju u probabilističkom smislu. Može se vidjeti na slici 4.3:

Stohastička jednadžba ne ovisi o vrijednosti cijene u prošlosti, cijena $(S+dS)$ ovisi samo o trenutnoj cijeni. Ova nezavisnost o prošlosti se naziva Markovljevo svojstvo.



Slika 4.2: Prikazano je Brown-ovo gibanje s komponentom drifta ($\mu = 0.06$)i volatilnosti ($\sigma = 0.2$). Za vremenski korak je uzeto $\Delta t = \frac{1}{252}$ jer se konvencionalno uzima da se u godini trguje 252 dana, dok je ukupno vrijeme $t = 800$. Početna cijena S_0 je 1. Nacrtano je 15 putanja.

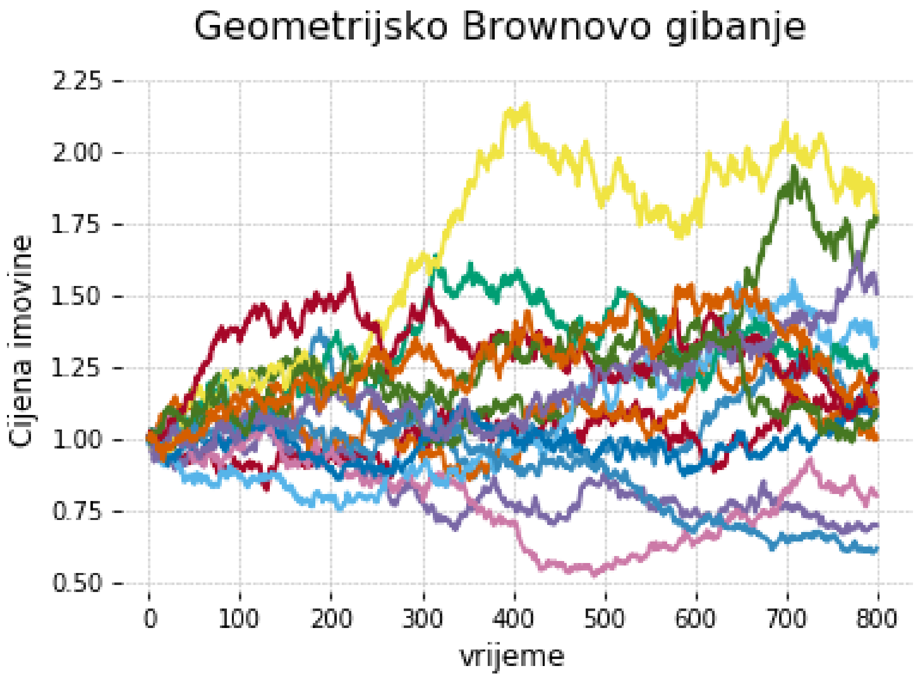
Srednja vrijednost dS je:

$$\epsilon\left[dS\right] = \epsilon\left[\sigma S dX + \mu S dt\right] = \mu S dt, \tag{4.41}$$

s obzirom da je $\epsilon\left[dX\right] = 0$. U prosjeku, sljedeća vrijednost S je veća od prethodne za $\mu S dt$. Varijanca dS je:

$$Var\left[dS\right] = \epsilon\left[dS^2\right] - \epsilon\left[dS\right]^2 = \epsilon\left[\sigma^2 S^2 dX^2\right] = \sigma^2 S^2 dt. \tag{4.42}$$

Korijen varijance je standardna devijacija što je proporcionalno volatilnosti σ. Vrijednost volatilnosti dionica je uobičajeno u rangu $[0.05, 0.4]$. Primjer imovine s malom volatilnosti su državne dionice, a s velikom su dionice tvrtki visoke tehnologije. Parametri se procjenjuju iz povijesnih podataka.



Slika 4.3: Prikazano je Geometrijsko Brown-ovo gibanje s komponentom drifta ($\mu = 0.06$)i volatilnosti ($\sigma = 0.2$). Za vremenski korak je uzeto $\Delta t = \frac{1}{252}$ jer se konvencionalno uzima da se u godini trguje 252 dana, dok je ukupno vrijeme $t = 800$. Početna cijena S_0 je 1. Nacrtano je 15 putanja.

4.2 *Ito lema*

Ito lema je bitna za manipulaciju nasumičnih varijabli. Povezuje malu promjenu funkcije od nasumične varijable s malom promjenom same nasumične varijable. Koristi se sljedeća Ito multiplikacijska tablica [8]:

$$(dX)^2 = dt;$$
$$dtdX = 0;$$
$$(dt)^2 = 0.$$

Ako je $f(S)$ glatka funkcija od S i variramo S za mali iznos dS, tada će funkcija f također varirati za mali iznos df. Promjena se može zapisati tako da se funkcija razvije u Taylor-ov red:

$$df = \frac{df}{dS}dS + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dS^2}dS^2 + \dots \tag{4.43}$$

dS je dan jednadžbom (4.35) . Kvadrira li se izraz, dobije se:

$$dS^2 = (\mu S dt + \sigma S dX)^2, \tag{4.44}$$

$$dS^2 = \sigma^2 S^2 dX^2 + 2\sigma\mu S^2 dt dX + \mu^2 S^2 dt^2. \tag{4.45}$$

Za malen pomak u vremenu, prvi član dominira u odnosu na druga dva, tako da imamo:

$$dS^2 = \sigma^2 S^2 dX^2 + ... \tag{4.46}$$

Kako $dX^2 \to dt$,

$$dS^2 = \sigma^2 S^2 dt. \tag{4.47}$$

Supstituiramo li (4.43) s (4.47):

$$df = \frac{df}{dS}(\mu S dt + \sigma S dX) + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dS^2}\sigma^2 S^2 dt, \tag{4.48}$$

$$df = \frac{df}{dS}\mu S dt + \frac{df}{dS}\sigma S dX + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dS^2}\sigma^2 S^2 dt, \tag{4.49}$$

$$df = \left(\frac{df}{dS}\mu S + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dS^2}\sigma^2 S^2\right) dt + \sigma S \frac{df}{dS} dX. \tag{4.50}$$

Prethodi izraz se može proširiti kao funkcija dvije varijable. Razvijemo funkciju $f(S + dS, t + dt)$ u Taylorov red oko (S, t):

$$df = \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + ... \tag{4.51}$$

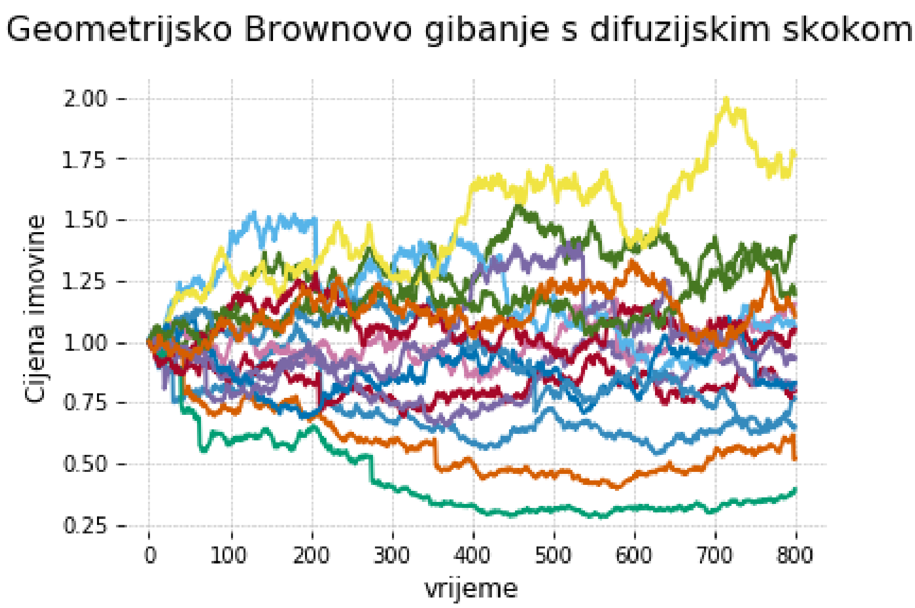
$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial f^2}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial f}{\partial t}\right) dt + \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dX. \tag{4.52}$$

4.3 Geometrijsko Brown-ovo gibanje s difuzijskim skokom

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX + dJ, \tag{4.53}$$

$$dJ = Sd(\sum_{i=0}^{N_t}(Y_i - 1)), \tag{4.54}$$

gdje je N_t Poissonov proces s intenzitetom λ, a Y_i nasumična varijabla koja prati normalnu distribuciju [16]. Na slici se mogu primjetiti diskontinuiteti dodani difuzijskim skokom koji mogu predstavljati lom tržišita za što mogu biti odgovorni efekti mjehura i panike gore diskutirani. Skok može biti i pozitivan, što se isto može desiti na tržištu u kratkom periodu vremena. Ovakvi skokovi su poznati ako pogledamo npr. $S\&P500$.



Slika 4.4: Prikazuje se Geometrijsko Brown-ovo gibanje s difuzijskim skokom gdje se mogu primjetiti diskontinuiteti dodani difuzijskim skokom koji mogu predstavljati lom tržišta zbog gore diskutiranih fenomena kao što su panike ili mjehuri. Parametri: $S_0 = 1$, $t = 800$, $\Delta t = \frac{1}{252}$, $\sigma = 0.2$, $\mu = 0.06$, $\lambda = 0.00125$, nacrtano je 15 putanja.

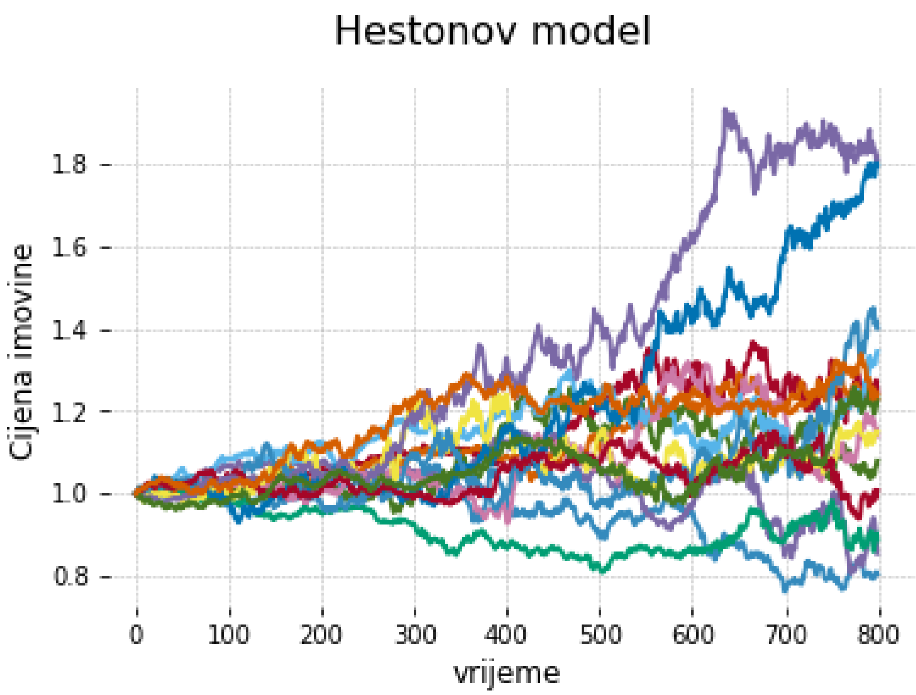
4.4 *Hestonov model*

Geometrijsko Brownovo gibanje pretpostavlja da je volatilnost konstanta u vremenu. Steven Heston je proširio model tako da je uključio volatilnost koja stohastički varira u vremenu u skladu s Cox Ingersoll Ross stohastičkim procesom. Cox Ingersoll Ross stohastički proces se koristi za opis evolucije kamatnih stopa tijekom vremena. Konkretno, u Hestonovom modelu se koristi za evoluciju volatilnosti u vremenu [9, 17].

$$dS = \mu S dt + \sqrt{v_t} S dX_t^S, \tag{4.55}$$

$$dv_t = a(b - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t} dX_t^v, \tag{4.56}$$

gdje v_t Cox Ingersoll Ross proces, μ drift, X^S i X^v su dva korelirana Wienerova procesa, a je stopa srednje vrijednosti reverzije Cox Ingersoll Ross procesa, b je srednja vrijednost volatilnosti u vremenu, a σ je volatilnost Cox Ingersoll Ross procesa. Izraz $a(b - v_t)$ se zove driftni faktor.



Slika 4.5: Hestonov model proširuje Geometrijsko Brown-ovo gibanje tako da pretpostavlja da volatilnost varira u vremenu. Parametri: $S_0 = 1$, $t = 800$, $\Delta t = \frac{1}{252}$, početna volatilnost $\sigma = 0.06126$, $a = 0.25$, $\mu = 0.35$, nacrtano je 15 putanja.

5 Financijske izvedenice

S obzirom da tržište s vremenom postaje sve sofisticiranije, uvode se sve kompleksniji ugovori o trgovanju. Primjeri takvih ugovora su derivativni financijski instrumenti ili financijske izvedenice čija je isplata povezana s nekim drugim, prethodno već izdanim instrumentom. Takav ugovor je obično između dvije stranke o razmjeni standardne količine aktive (financijske imovine) po unaprijed određenoj cijeni i datumu. Prema tome, vrijednost derivativnog instrumenta se mijenja s vrijednošću instrumenta u podlozi. Derivati se mogu izvoditi i iz 'fizičke' imovine u pozadini, a ne samo financijskih instrumenata. Osnovne vrste derivativnih instrumenata su [18]:

- promptni ugovori (eng. spot);
- terminski ugovori (eng. forwards);
- ročni ugovori (eng. futures);
- opcijski ugovori (eng. options);
- razmjenski ugovori (eng.swaps).

Promptni (**spot**) ugovor je sporazum između prodavatelja i kupca u trenutku $t = 0$ o promptnoj isporuci aktive od strane prodavatelja te promptnom plaćanju novca za tu aktivu od strane kupca. Transakcija je provedena u trenutku $t = 0$. Kupac isntrumenta u podlozi derivata špekulira da će se njegova cijena u bliskoj budućnosti povećati te da će daljnjom prodajom ostvariti profit. Ponuditelj promptnog derivata, nasuprot tome, špekulira da će se cijena podloge u bliskoj budućnosti smanjiti i da će prodajom izbjeći gubitak vrijednosti svoje imovine.
Terminski (**forwards**) ugovor je sporazum između prodavatelja i kupca o razmjeni nestandardizirane financijske ili neke druge imovine za gotovinu na neki budući određen datum. Cijena ugovora je fiksna, a određuje se prilikom sklapanja ugovora.
Ročni (**futures**) ugovor je sporazum između prodavatelja i kupca o razmjeni standardizirane financijske ili neke druge imovine na točno određeni datum u budućnosti. Svaki ugovor ima standardizirani rok dospijeća, a trgovina se vrši na centraliziranom tržištu odnosno burzi. Kako se mijenja vrijednost financijske imovine čija se razmjena ugovara, tako se mijenja i cijena ugovora. Futures ugovori su osmišljeni kako bi se smanjio inherentan rizik neispunjenja obveze prisutan kod forwards ugovora.

Razmjenski (**swap**) ugovor sadrži više periodičkih zamjena novčanih tokova. Mogu se temeljiti na nekom financijskom instrumentu ili cijeni neke imovine kao podlozi. Postoji pet temeljnih vrsta swap ugovora: swap roba, dionica, kamatnih stopa, valuta i kreditnog rizika.
Opcijski ugovor (**options**) ostvaruje svom vlasniku pravo, ali ne nameće obvezu kupnje ili prodaje imovine u podlozi ugovora po unaprijed određenoj cijeni na unaprijed određen datum u budućnosti. Opcijski derivati se dijele s obzirom na dospijeće. Neki od njih su:

- Američka opcija - vlasniku daje pravo realizacije u bilo kojem trenutku do uključivo dana isteka ugovora;
- Europska opcija - vlasniku daje pravo realizacije samo na dan isteka ugovora.

Predmet interesa u ovom poglavlju su opcijski ugovori. Za određivanje cijena opcijskih ugovora postoji Black-Scholes model koji će se detaljno obrazložiti.

5.1 Black-Scholes model

U ovom poglavlju će se izvesti poznata Black-Scholes diferencijala jednažba koja se koristi za procjenjivanje cijena najjednostavnijih opcija tzv. Europskih vanilla opcija [8]. Prvo se uvodi notacija:

- $V(S, t)$ je vrijednost opcije koja ovisi o trenutnoj tržišnoj (eng.spot) cijeni imovine ili instrumenta u podlozi S i vremenu t. kada je potrebna distinkcija između različitih vrsta opcija, za call opciju koristimo $C(S, t)$, a put opciju $P(S, t)$;
- σ, volatilnost imovine u pozadini;
- K, izvršna cijena opcije;
- T, vrijeme isteka opcije;
- r, kamatna stopa na nerizična ulaganja;
- Π vrijednost portfelja što je skup svih vrijednosnih papira koje ulagač posjeduje. Konkretno u ovome slučaju portfelj se sastoji od opcije i određene količine imovine u pozadini.

S obzirom na vrstu transakcije s imovinom u podlozi opcijskog derivata razlikuju se dvije vrste opcija:

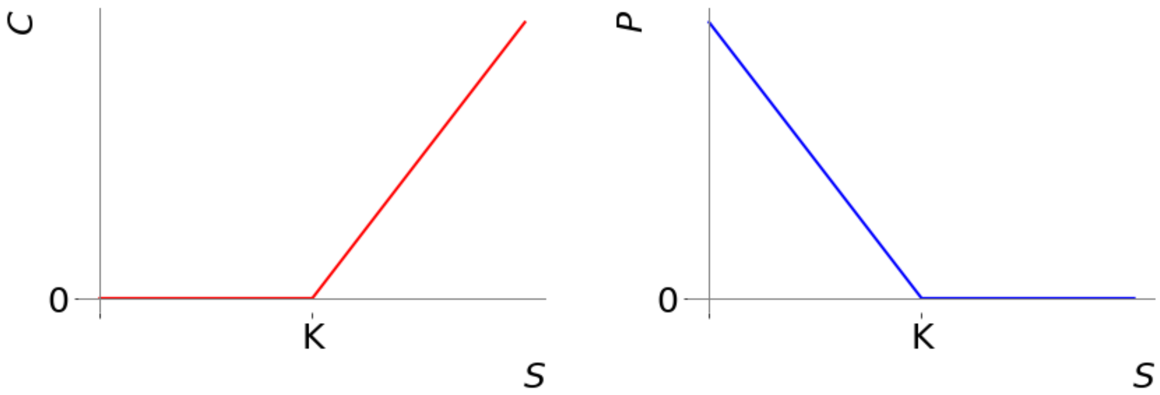
- call opcija - daje svome kupcu pravo, ali ne i obvezu kupnje imovine u podlozi od prodavatelja opcije;
- put opcija - daje svome kupcu pravo, ali ne i obvezu prodaje imovine u podlozi prodavatelju opcije.

Unaprijed određena cijena opcije se naziva izvršnom cijenom K. Kada kupac kupuje call opciju tj. kada zauzima dugu poziciju u opciji, mora prodavaču platiti premiju. Kupac pristaje platiti premiju jer očekuje da će do dospijeća opcije cijena imovine u podlozi porasti dovoljno da ostvari profit. Na dan dospijeća opcije, kupac ima pravo kupiti imovinu u podlozi po izvršnoj cijeni. U tom slučaju, potencijalni ostvareni profit je neograničen i raste kao linearna funkcija cijene imovine, a potencijalni gubitak je u iznosu premije. Prema tome, vrijednost call opcije pri isteku se može zapisati kao:

$$C(S,T) = max(S-K,0). \tag{5.57}$$

Na slici 5.6 su opisane potencijalne ostvarene isplate s obzirom na kretanja imovine u pozadini. Premija se plaća prilikom sklapanja ugovora, a potencijalna ostvarena isplata se promatra u trenutku isteka opcije, tako da su na grafovima prikazane jednadžbe (5.57) i (5.58). U slučaju prodaje call opcije, prodavatelj nakon izdavanja opcije prima iznos premije, ali tijekom vremena t mora biti spreman prodati imovinu za dogovoreni iznos. U ovome slučaju je isplata ograničena, a gubitak raste linearno. Za razliku od call, kupnjom put opcije, vlasnik ima pravo, ali ne i obvezu prodaje imovine prodavatelju opcije za dogovoreni iznos. Ukoliko je na dan dospijeća tržišna vrijednost veća od izvršne cijene imovine u pozadini, kupac put opcije nije obvezan prodati imovinu jer je u slučaju realizacije opcije na gubitku. Ako je tržišna vrijednost manja od izvršne vrijednosti i kupac realizira put opciju te proda imovinu za dogovoreni iznos, ostvarit će profit. Mogući dobitak na dan isteka opcije iznosi:

$$P(S,T) = max(K-S,0). \tag{5.58}$$



(a) Ostvarena isplata na dan isteka call opcije.

(b) Ostvarena isplata na dan isteka put opcije.

Slika 5.6

5.2 *Put-call paritet*

Pretpostavimo da kupujemo jednu dionicu S i jednu opciju ponude P na tu dionicu s izvršnom cijenom K i vremenom dospijeća T. Također postoji kratkoročna pozicija na kupnju jedne opcije C s istom izvršnom cijenom i vremenom dospijeća. Vrijednost portfelja kada u $t = T$ iznosi:

$$\Pi = S + max(K - S, 0) - max(S - K, 0). \tag{5.59}$$

To se može zapisati na sljedeći način:

$$S + (K - S) - 0 = K, \quad S \leq K \tag{5.60}$$

ili

$$S + 0 - (S - K) = K, \quad S \geq K. \tag{5.61}$$

Neovisno o tome je li S veći ili manji od K, dobitak je uvijek isti i iznosi K. Uzmemo li u obzir postojanje bezrizične kamatne stope za vrijeme života opcije, vrijednost portfelja je $Ke^{-r(T-t)}$. Relacija između imovine u pozadini i njene opcije je nazvana put-call paritet i primjer je eliminacije rizika.

$$S + P - C = Ke^{-r(T-t)}. \tag{5.62}$$

5.3 *Analitičko rješenje*

Model ima sljedeće pretpostavke [8]:

- Cijena imovine u podlozi (S) prati geometrijsko Brown-ovo gibanje.
- Bezrizična kamatna stopa r i volatilnost σ su poznate funkcije vremena s obzirom na vrijeme života opcije.
- Nema trasakcijskih troškova vezanih uz upravljanje rizika (eng. hedging) portfelja.
- Imovina u pozadini ne plaća dividende na trajanje opcije. Ova pretpostavka se može zanemariti ukoliko su dividende unaprijed poznate.
- Nema mogućnosti arbitraže. To znači da bi svi bezrizični portfelji trebali ostvariti jednak prinos.
- Trgovina imovinom se može odvijati kontinuirano.
- Kratkoročna pozicija na kupnju (eng. short selling) je dopuštena i imovina se može dijeliti. Kratkoročna pozicija na kupnju je špekulativna operacija koja se provodi u očekivanju pada cijene vrijedosnih papira. Investitor posuđuje dionice ili druge vrijednosne papire od brokera i prodaje ih kako bi ih otkupio prema očekivanom padu njihovih cijena i nakon što ih vrati brokeru zaradio na padu cijena vrijednosnih papira. Pretpostavlja se da se može kupiti i prodati bilo koja količina imovine u pozadini.

Pretpostavimo da imamo opciju $V(S,t)$ čija vrijednost ovisi samo o cijeni imovine u pozadini S i vremenu t. V može biti bilo koja opcija ili vrijednost cijelog portfelja različitih opcija. Koristeći Ito lemmu (4.52), može se napisati:

$$dV = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dX + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial^2 S} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt. \tag{5.63}$$

Konstruiramo portfelj koji se sastoji od dugoročne pozicije na opcije i kratkoročne pozicije na Δ imovine u pozadini. Vrijednost portfelja je:

$$\Pi = V - \Delta S. \tag{5.64}$$

Mala promjena u vrijednosti portfelja je:

$$d\Pi = dV - \Delta dS, \tag{5.65}$$

gdje je Δ fiksan prilikom vremenskog koraka. Kombinirajući prethodne tri jednadžbe, slijedi:

$$d\Pi = \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dX + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial^2 S} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \Delta S \right) dt. \tag{5.66}$$

Nasumičnu komponentu možemo eliminirati tako da odaberemo:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}. \tag{5.67}$$

Δ je vrijednost $\frac{\partial V}{\partial S}$ na početku vremenskog koraka dt. Rezultat odabira je portfelj s determinističkim inkrementom:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt. \tag{5.68}$$

Relativni dobitak na količinu Π koja se uloži u bezrizičnu imovinu bi iznosio $r\Pi dt$ u vremenu dt. Kada bi desna strana jednadžbe (5.68) bila veća od $r\Pi dt$, **arbitražer** bi mogao ostvariti siguran bezrizičan profit tako da posudi količinu Π kako bi investirao u portfelj. Relativni dobitak za ovu bezrizičnu strategiju bi bio veći od troškova posudbe. Nasuprot tome, ukoliko je desna strana jednadžbe manja od $r\Pi dt$, tada bi arbitražer smanjio portfelj i uložio Π u banku. U svakom slučaju bi ostvario siguran profit, odnosno došlo bi do arbitraže što se kosi s pretpostavkom modela da arbitraže nema. Međutim ovakvi postupci investitora upravo dovode do toga da arbitraže nema.

$$r\Pi dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt. \tag{5.69}$$

Supstitucijama (5.64), (5.67) i (5.69), dobije se poznata Black-Scholes parcijalna diferencijalna jednažba:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{5.70}$$

Bilo koji financijski derivat čija cijena ovisi samo o S i t zadovoljava Black-Scholes jednadžbu. Cijena derivativnog instrumenta se dobije rješavajući prethodnu jednažbu. Ovisno o kojem se derivatu radi, pridruže se odgovarajući rubni uvjeti.

5.4 Black-Scholes Formula

Black-Scholes jednadžba i rubni uvjeti za Europsku call opciju $C(S,t)$ su:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial^2 S} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0, \tag{5.71}$$

$$C(0,t) = 0, \quad C(S,t) \propto S \text{ kada } S \to \infty,$$

$$C(S,T) = max(S-K,0).$$

Kako bi jednadžba bila bezdimenzionalna, uvode se sljedeće supstitucije:

$$S = Ke^x, \quad t = T - \tau/\left(\frac{1}{2}\sigma^2\right), \quad C = Kv(x,\tau). \tag{5.72}$$

Nakon što se uvrste gornje navedene supstitucije:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} - kv, \tag{5.73}$$

gdje je $k = r/\frac{1}{2}\sigma^2$. Početni uvjet je sada:

$$v(x,0) = max(e^x - 1, 0). \tag{5.74}$$

Sada imamo jednadžbu s jednim bezdimenzionalnim parametrom k. Možemo ju pretvoriti u difuzijsku jednadžbu uvodeći supstituciju:

$$v = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x,\tau), \tag{5.75}$$

za neke konstante α i β. Nakon što se derivira i uvrsti u jednadžbu, slijedi:

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + (k-1)\left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - ku. \tag{5.76}$$

Uvodeći:

$$\beta = \alpha^2 + (k-1)\alpha - k, \tag{5.77}$$

$$0 = 2\alpha + (k-1) \tag{5.78}$$

elimira se $\partial u/\partial x$. Ove jednadžbe za α i β daju:

$$\alpha = -\frac{1}{2}(k-1), \quad \beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2. \tag{5.79}$$

Slijedi:

$$v = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2} u(x,\tau), \tag{5.80}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{za} - \infty < x < \infty, \quad \tau > 0, \tag{5.81}$$

$$u(x,0) = u_0(x) = max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0). \tag{5.82}$$

Sada možemo uvrstiti rješenje za difuzijsku jednadžbu:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-(x-s)^2/4\tau} ds \tag{5.83}$$

gdje je $u_0(x)$ dan s (5.82). Preostaje evaluirati integral (5.83). Korisno je uvesti promjenu varijable $x' = (s-x)/\sqrt(2\tau)$ takvu da vrijedi:

$$\begin{aligned} u(x,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x'\sqrt{2\tau} + x) e^{-\frac{1}{2}x'} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+x'\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx' \\ &- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+x'\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx' \\ &= I_1 - I_2. \end{aligned} \tag{5.84}$$

Nadopunimo eksponent do kvadrata i evaluiramo integral I_1:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+x'^2\sqrt{2\tau}) - \frac{1}{2}x'^2} dx' \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}(x' - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau})^2} dx' \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau} - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho \\ &= e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1), \end{aligned} \tag{5.85}$$

gdje su:

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}, \tag{5.86}$$

$$N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds. \tag{5.87}$$

$N(d_1)$ je kumulativna distribucijska funkcija za normalnu distribuciju. Integral I_2 se evaluira analogno integralu I_1, samo što je član $(k+1)$ zamjenjen s $(k-1)$. Naposlijetku se vraća na početne oznake.

$$v(x,\tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x-\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}u(x,\tau). \tag{5.88}$$

Uvedu li se zamjene $x = ln(S/K)$, $\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$ i $C = Kv(x,\tau)$, dobije se konačni izraz za cijenu Europske call opcije:

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \tag{5.89}$$

gdje su:

$$d_1 = \frac{ln(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \tag{5.90}$$

$$d_2 = \frac{ln(S/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \tag{5.91}$$

Rješenje za Europsku put opciju se najednostavnij dobije iz put-call pariteta:

$$C - P = S - Ke^{-r(T-t)}. \tag{5.92}$$

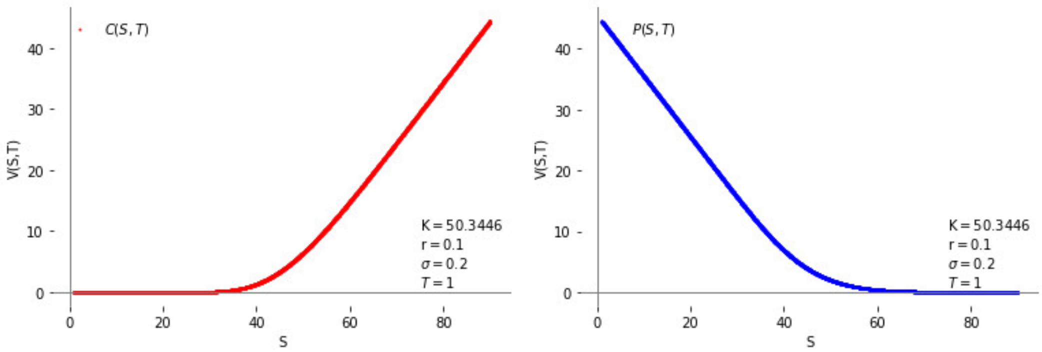
Slijedi:

$$P(S,t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1), \tag{5.93}$$

gdje se koristilo $N(d) + N(-d) = 1$.

6 Vrednovanje financijskih izvedenica i osjetljivost na reprezentaciju cijene imovine

Lagrangijan bilo koje teorije se može rastaviti na sljedeće elemente: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mu) + \Delta\mathcal{L}(\mu)$, gdje je μ renormalizacijska točka ili skala. Promjena skale mijenja parametre teorije. Po uzoru na koncept renormalizacije u fizici, nas zanima koliko je model za opis vrednovanja financijskih izvedenica osjetljiv na promjenu skale. Promatra se osjetljivost Black-Scholes modela na promjenu skale, u ovome slučaju broja decimala na koje se zaokružuju cijene imovine u pozadini. Koristi se Monte Carlo metoda, a svi su računi provedeni u programskom jeziku Python. Nasumično se generiraju cijene imovine u podlozi S i K, te se promatra kako promjena skale utječe na vrednovanje opcije. Na slici 6.7 se funkcije vrijednosti call i put opcije izvedene u prethodnom poglavlju. Mijenjala se skala od 0 do 7 decimala cijene imovine u pozadini S, za veći broj nije pokazan značaj utjecaj na rezultate. Također, provjerilo se kako mijenjanje skale za K utječe na vrednovanje opcije.



Slika 6.7: Analitička rješenja za vrednovanje call i put opcije.

6.1 *Vrednovanje call i put opcija*

Na slici 6.9 su prikazane relativne pogreške prilikom vrednovanja Europske call opcije s obzirom na razlitičit broj decimala. Može se vidjeti da recimo prilikom promjene valute npr. dollar u yen što se množi s faktorom $113,35$ [?], ukupna vrijednost portfelja se može razlikovati. Isto tako, iz slike se može vidjeti kako je relativna greška najveća u režimu kada opcija ne vrijedi mnogo. Kako bi se naša metoda provjerila, razvili smo rješenje call opcije u red po cijenama imovine u podlozi. Općenito, provjera se radi za svaku opciju:

$$V(S + \Delta S) = V(S) + \frac{\partial V(S)}{\partial S} \Delta S + ... \tag{6.94}$$

Daljni članovi se zanemaruju jer se pretpostavlja da ne utječu bitno na vrijednost opcije. Član $\Delta = \frac{\partial C(S,t)}{\partial S}$ pokazuje koliko je cijena opcije osjetljiva na reltivne promjene cijene imovine u podlozi S. Taj član se konvencionalno naziva delta i bitan je jer daje indikaciju kako se vrijednost opcije mijenja s obzirom na fluktuacije instrumenta u podlozi uz pretpostavku da se ostale varijable ne mijenjaju. Prema tome, Δ je jedan od glavnih mjera rizika koju trgovci opcijama uzimaju u obzir. Najčešće se prikazuje kao numerička vrijednost koja je za call opciju u intervalu $[0, 1]$, a za put opciju u intervalu$[-1, 0]$. Ovdje će se koristiti analitički izraz za relativnu promjenu cijene kako bi se provjerila numerika koja to isto radi. Analogan postupak je napravljen za sve vrednovane opcije. Nakon što se provjeri numerika, isto se može primjeniti na kompliciranije vrste Američkih i Azijskih opcija koje nemaju analitička rješenja. Analitički dobivena relativna promjena cijene opcije s obzirom na cijenu instrumenta u podlozi se u potpunosti slaže s numerički dobivenom relativnom promjenom cijene opcije. Eksplicitno će se pokazati kako se dobije tzv. Δ za europsku call opciju. Za ostale opcije Δ će se preuzeti iz [8].

$$\Delta = \frac{\partial C(S,t)}{\partial S}. \tag{6.95}$$

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \tag{6.96}$$

$$\Delta = N(d_1) + S\frac{\partial N(d_1)}{\partial S} - Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial N(d_2)}{\partial S}. \tag{6.97}$$

$$\frac{\partial N(d_1)}{\partial S} = \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\frac{\partial d_1}{\partial S}. \tag{6.98}$$

S obzirom da vrijedi:

$$N(d_1) = \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi} e^{-\frac{K^2}{2}}} dx, \tag{6.99}$$

slijedi:

$$\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} = N'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}. \tag{6.100}$$

Uvrste li se izrazi za d_1 i d_2, dobije se:

$$\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\partial d_2}{\partial S} = \frac{1}{\sigma S\sqrt{T-t}} \tag{6.101}$$

Koristeći prethodne tri jednadžbe:

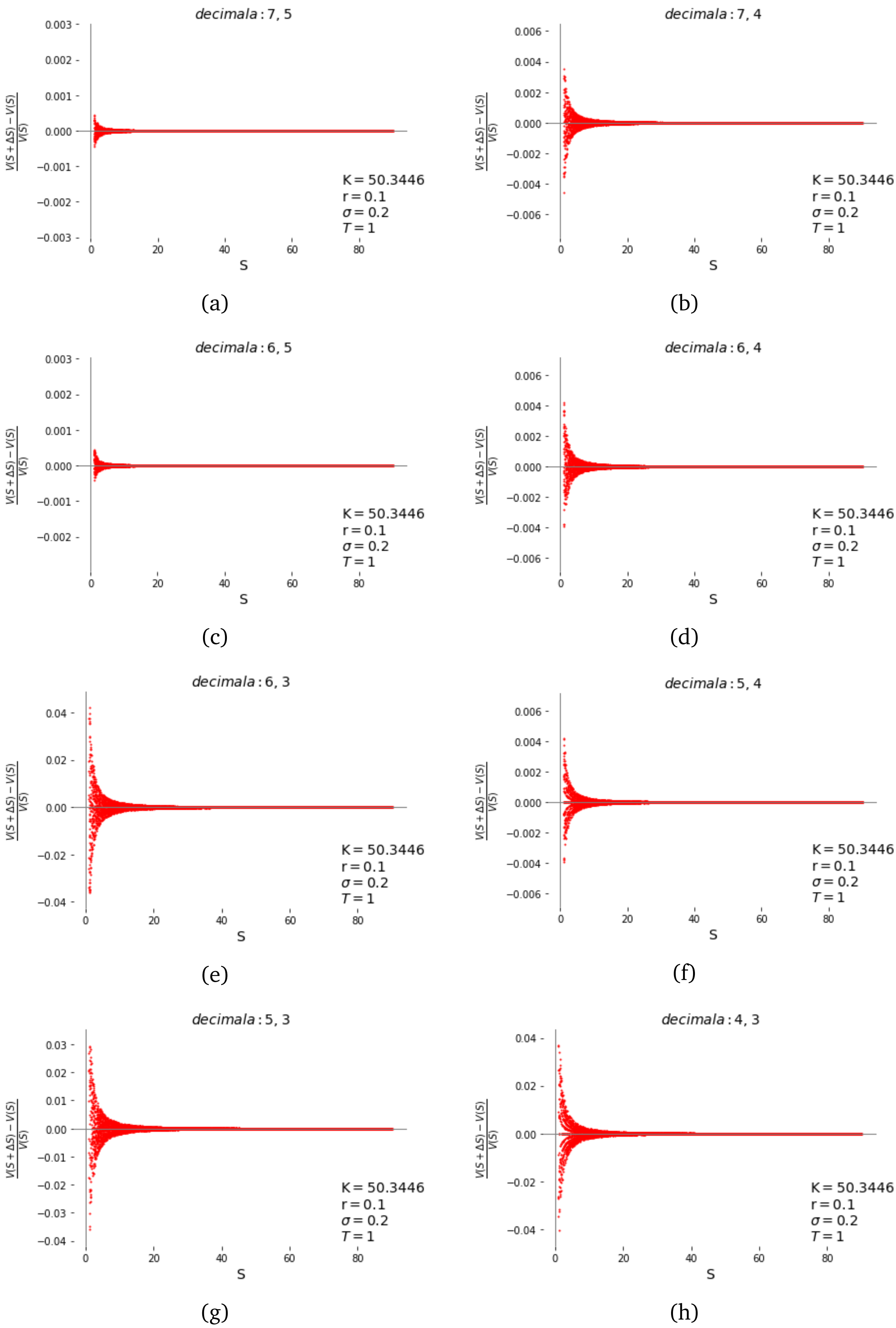
$$S\frac{\partial N(d_1)}{\partial S} = Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial N(d_2)}{\partial S}. \tag{6.102}$$

Jednadžba (6.97) se svede na:

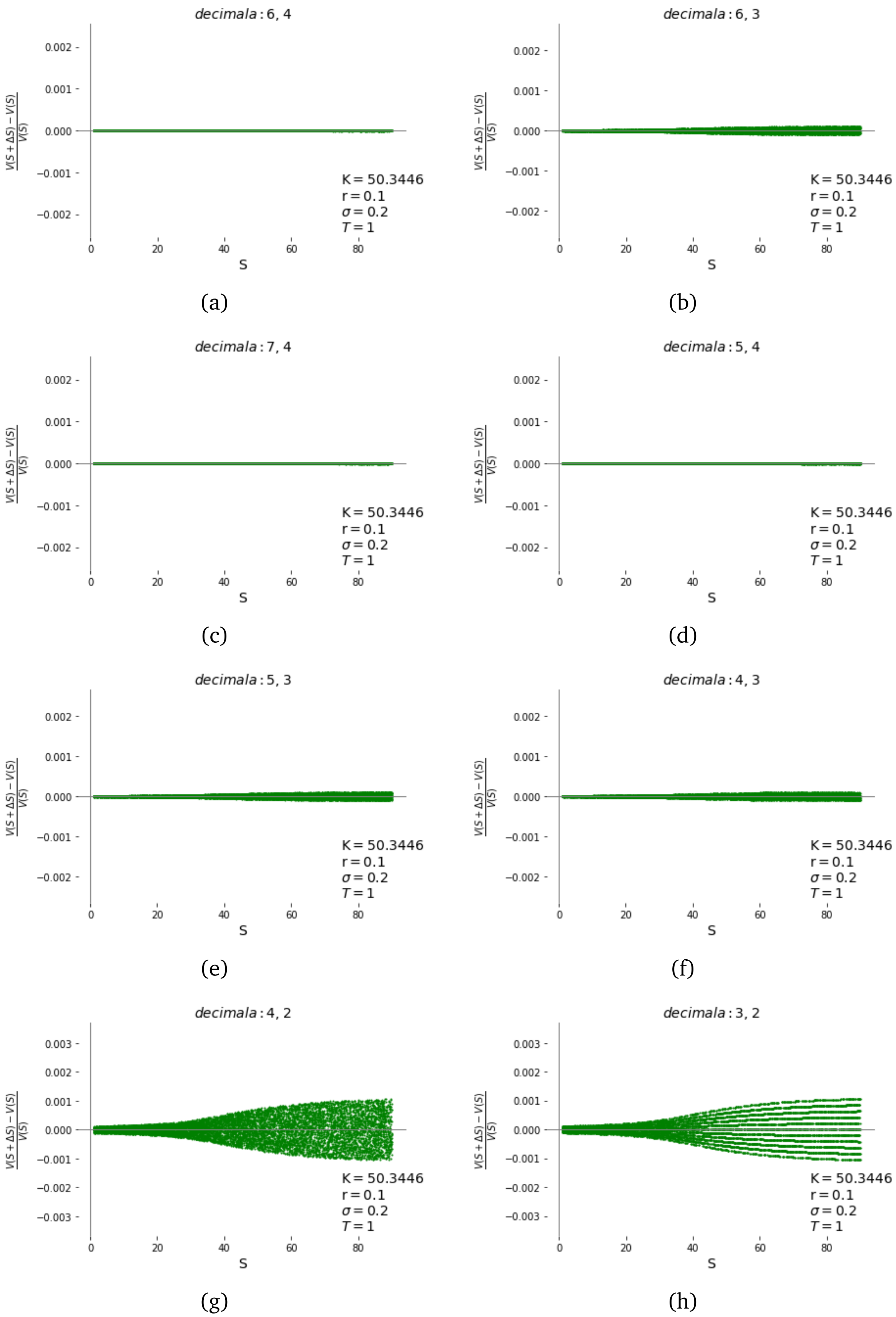
$$\Delta = \frac{\partial C(S,t)}{\partial S} = N(d_1). \tag{6.103}$$

Analogno se dobije delta za put opciju koja glasi:

$$\Delta = \frac{\partial P(S,t)}{\partial S} = N(d_1) - 1. \tag{6.104}$$



Slika 6.8: Relativna promjena vrijednosti call opcije pri promjeni broja decimala



Slika 6.9: Relativna promjena vrijednosti put opcije pri promjeni broja decimala

6.2 *Egzotične opcije*

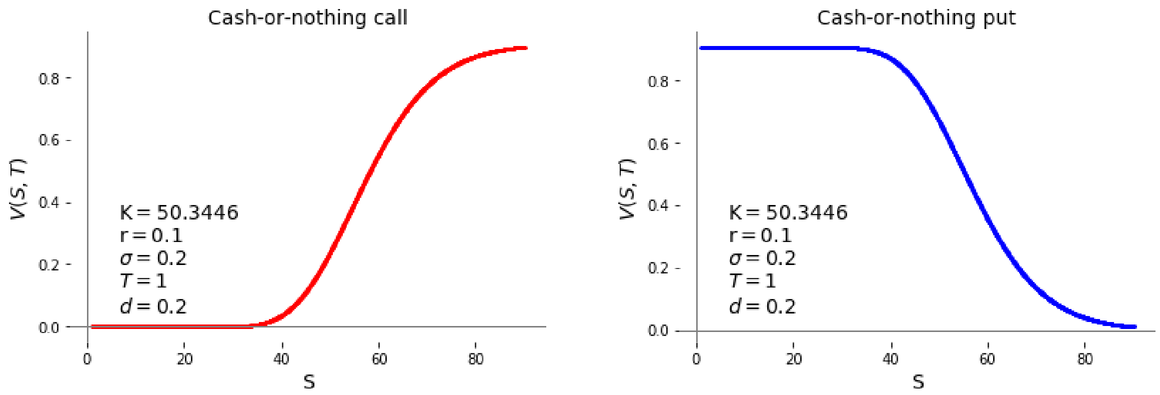
Vrednovat će se još jedna vrsta opcija koja ima analitička rješenja, a to su binarne opcije (eng. binary options). Binarna opcija je financijska egzotična opcija u kojoj je isplata ili neka fiksna novčana vrijednost ili ništa. Promotrit će se dvije vrste binarnih opcija 'cash-or-nothing' call i 'cash-or-nothing' put. Postoje još dvije vrste binarnih opcija, a to su 'asset-or-nothing' call i 'asset or nothing' put. Dva moguća ishoda kod 'asset-or-nothing' call opcije nije ništa ili neki fiksni novčani iznos, nego ništa ili određena količina imovine u podlozi. Dva moguća ishoda ovise o tome je li cijena imovine u podlozi veća od izvršne cijene K ili manja prilikom datuma dospijeća. U kontekstu Black-Scholes modela, analitički izrazi za binarne opcije su [8]:

- Cash-or-nothing call
$$C = e^{-rT}\phi(d_2), \tag{6.105}$$
- Cash-or-nothing put
$$P = e^{-rT}\phi(-d_2). \tag{6.106}$$
- Asset-or-nothing call
$$C = e^{-qT}\phi(d_1), \tag{6.107}$$
- Asset-or-nothing put
$$P = e^{-qT}\phi(-d_1). \tag{6.108}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}dz. \tag{6.109}$$

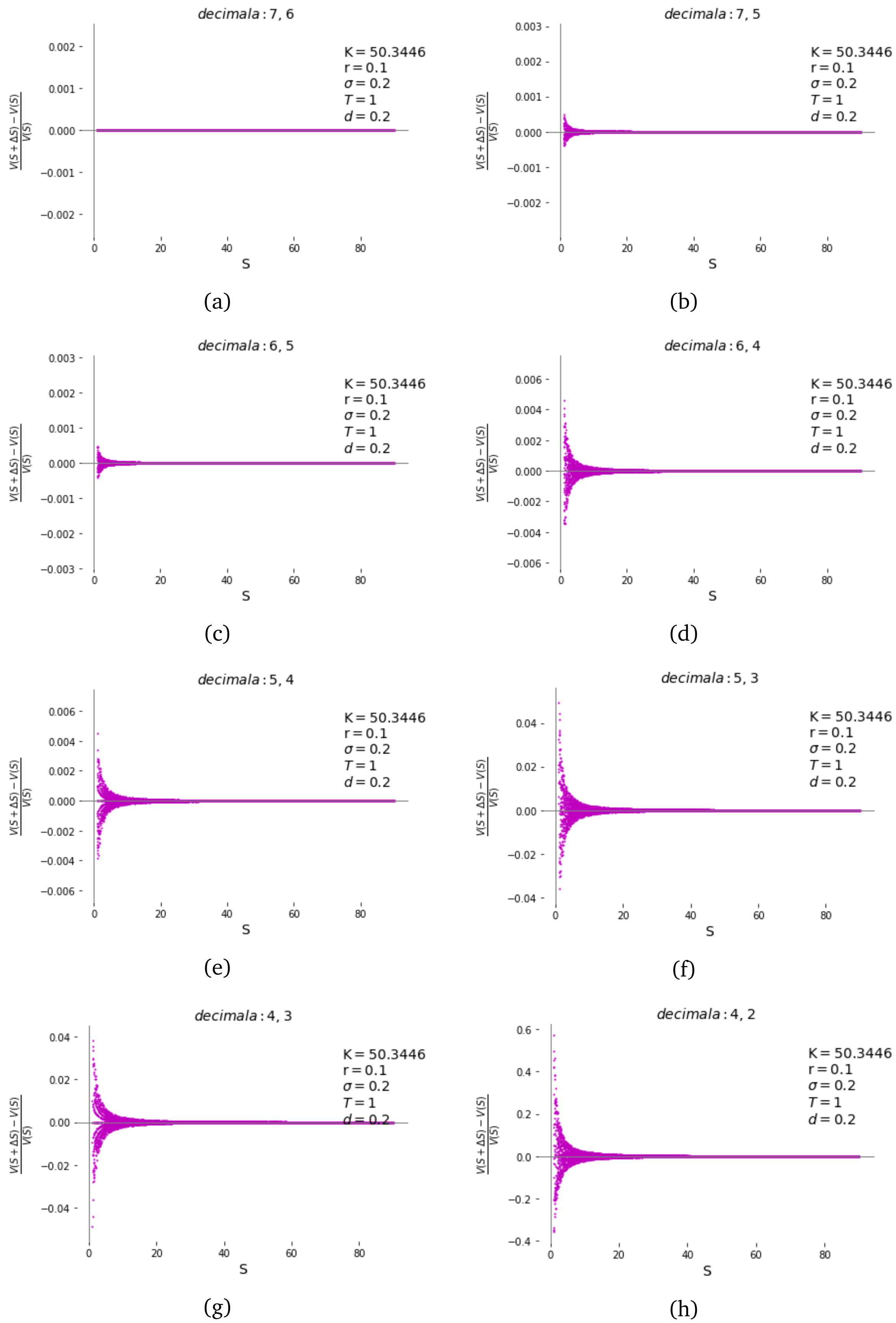
$$d_1 = \frac{ln\frac{S_0}{K} + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \tag{6.110}$$

Ovdje je uvedena dodatna oznaka za postotak dividende q. Općenito, dividenda je dio prinosa dioničkom društvu koji se isplaćuje vlasnicima dionica. O isplati dividende se odlučuje na godišnjoj skupštini izdavatelja. Odluka ovisi o glasovanju prisutnih dioničara.

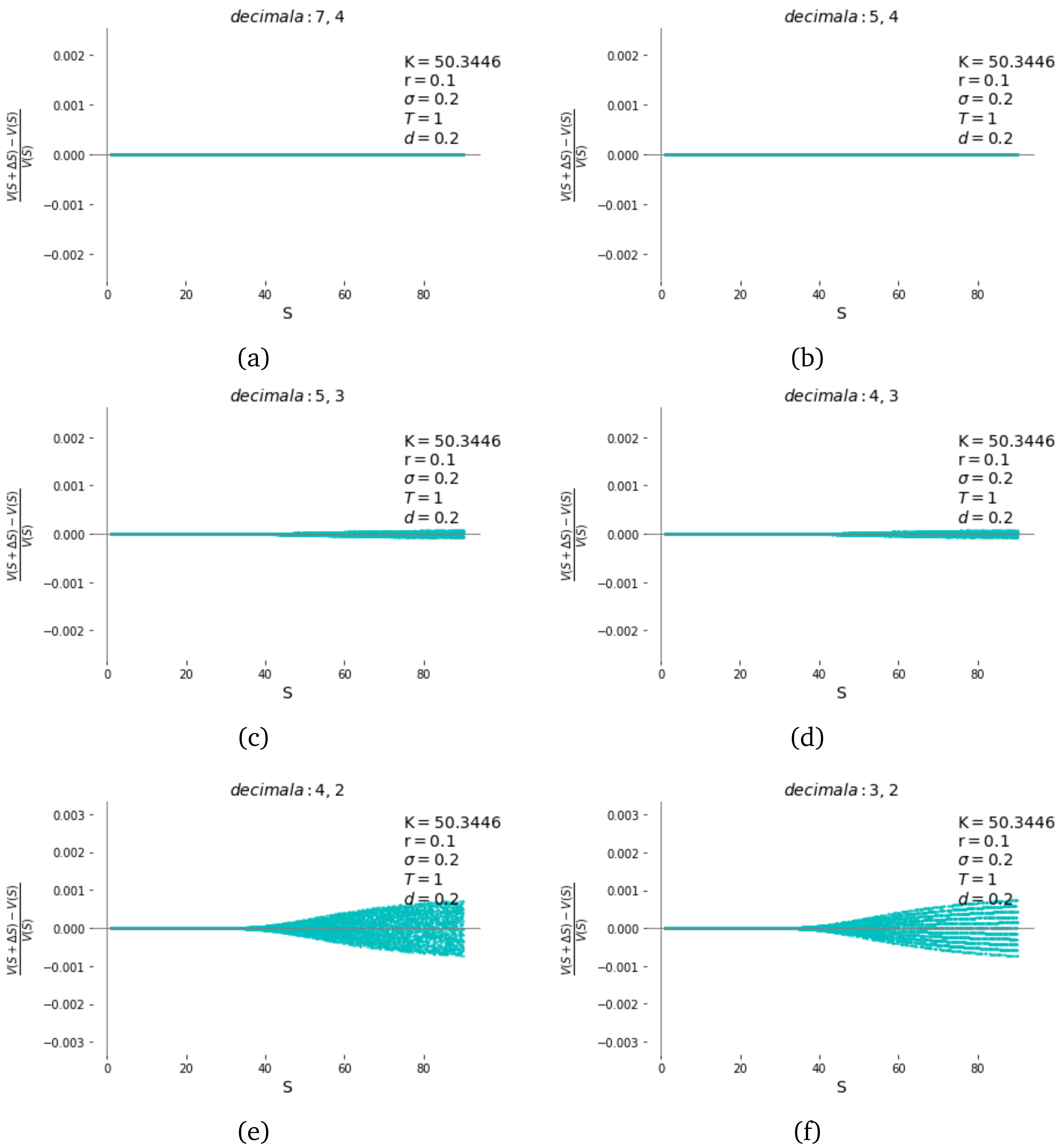

Cash-or-nothing call
V(S, T)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
0
20
40
60
80
S
K = 50.3446
r = 0.1
σ = 0.2
T = 1
d = 0.2
Cash-or-nothing put
V(S, T)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
0
20
40
60
80
S
K = 50.3446
r = 0.1
σ = 0.2
T = 1
d = 0.2

(a) (b)

Slika 6.10



Slika 6.11: Relativna promjena vrijednosti Cash-or-nothing call opcije pri promjeni broja decimala



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

Slika 6.12: Relativna promjena vrijednosti Cash-or-nothing put opcije pri promjeni broja decimala

7 Zaključak

Poznavanje fizikalnih pojava omogućuje bolje razumijevanje koncepta ravnoteže i simetrije u ekonomskim modelima. Fizikalni pogled na ekonomske modele je započet s predstavljanjem Arrow-Debrew modela ekonomske ravnoteže koji je precizno matematički formuliran zbog čega ga je lako razumijeti. Diskutirana je potreba za neravnotežnom dinamičkom teorijom ekonomskih tržišta koja bi produbila razumijevanje stanja ravnoteže. Sljedeći diskutiran je Model temeljen na agentima koji je početak formulacije takve neravnotežne teorije i bitna uloga baždarne teorije u ograničenjima koja bi se uvela u modelu. Svrha nije bila oformiti model koji bi realistično reproducirao detalje realnog tržišta, nego odrediti ključne parametre i opservable kako bismo bolje razumijeli ponašanje tržišta kada nije u ravnoteži. Kao što postoji makrofizika i mikrofizika, postoji makroekonomija i mikroekonomija. Mikrofizika bi odgovarala atomskoj fizici, a makrofizika termodinamici. Most među njima je statistička fizika koja proučava velik broj atoma izvan i u ravnoteži. Model temeljen na agentima je mikroskopski model na kojem bi se temeljila statistička ekonomija. Nakon toga se uzeo fenomenološki pristup koji proučava tržište kada je izvan stanja ravnoteže. Napravljeno je nekoliko simulacija procjenjivanja budućeg kretanja cijena stohastičkim pristupom čije su metode jednako dobro poznate u kvantitativnim financijama, ali i u fizici. Na poslijetku se promatralo koliko je model vrednovanja financijskih izvedenica osjetljiv na promjenu skale odnosno reprezentaciju cijene. Pokazalo se da se značajne promjene vide u režimu kada opcijski ugovori imaju malu vrijednost. U praktičnom smislu, to je zanimljivo kada se promatraju mjere rizika prilikom trgovanja financijskim izvedenicama. Korištena metoda se primjenila na Europske vanila opcije i binarne opcije koje imaju analitičke izraze za vrednovanje koje proizlaze iz opisanog Black-Scholes modela što nam je omogućilo provjeru numeričke metode. Isti postupak bi se mogao primjeniti na kompliciranije vrste opcija kao što su Američke ili Azijske opcije koje nemaju analitička rješenja.

Literatura

[1] Lee Smolin: Time and symmetry in models of economic markets, Perimeter Institute for Theoretical Physics, 31 Caroline Street North, Waterloo, Ontario N2J 2Y5, Canada, https://arxiv.org/abs/0902.4274

[2] K. J. Arrow, G. Debreu: Existence of equilibrium for a competitive economy, Econometrica 22 (1954) 265-290.

[3] M.Brown, J. Herriot, S. Kaufmann, Z-V Palmrose, B. Sawhill, L. Smolin: Partecon models, preprint u pripremi

[4] P. Malaney, The Index Number Problem: A Differential Geometric Approach., Ph.D thesis, Harvard Univesity, 1996; (Chapter 2: Welfare Implications of Divisia Indices cauthored with Eric Weinstein); Eric Weinstein, http://www.eric-weinstein.net/economictheory.html

[5] R.M. Starr: General Equilibrium Theory, Cambridge University Press, 1997.

[6] Sonnenschein, H. (1972). Market excess demand functions Econometrica 40: 549563. doi:10.2307/1913184.

[7] Simon Benninga: Financial Modeling, Massachusetts London, England, FOURTH EDITION, The MIT Press Cambridge 2014.

[8] Paul Willmot: Introduces Quantitative Finance, Second Edition, John Wiley & Sons Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex PO19 8SQ, England, 2007.

[9] Cox, J.C., J.E. Ingersoll and S.A. Ross (1985). ”A Theory of the Term Structure of Interest Rates”, Econometrica 53 385–467

[10] C. Kittel, Elementary Statistical Physics, Dover 2004, ISBN 0486435148.

[11] N. Taleb, The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable, Random House, 2007.

[12] S. Vazquez, Scale invariance, bounded rationality and non-equilibrium economics, https://arxiv.org/abs/0902.3840

[13] M. Brown, J. Herriot, S. Kauffman, Z-V Palmrose, B. Sawhill, L. Smolin, Partecon models, preprint u pripremi

[14] Ivica Smolić, Diferencijalna geometrija u fizici, bilješke, https://www.phy.pmf.unizg.hr/~ismolic/dgf.pdf

[15] Richard Serfozo, Basics of Applied Stohastic Processes, Springer, 2009.

[16] Merton, R.C., Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, Journal of Financial Economics, 3 (1976), 125-144.

[17] Ricardo Crisóstomo, An Analysis of the Heston Stochastic Volatility Model: Implementation and Calibration using Matlab, December 2014, https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1502/1502.02963.pdf

[18] Dubravko Sabolić, Financijska tržišta II. Organizacija financijskih tržišta, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Inženjerska ekonomika (41251), preuzeto s https://bib.irb.hr/datoteka/629663.Inzeko11b_Financijska_trzista_II_130514.pdf

[19] FXStreet - The Foreign Exchange Market, (16.12.2018), https://www.fxstreet.com/rates-charts/usdjpy