Matematičke formulacije principa neodređenosti

Radulović, Marko

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marko Radulović

MATEMATIČKE FORMULACIJE PRINCIPA NEODREĐENOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
Doc.dr.sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **2**

1 Povijesni razvoj principa neodređenosti **3**
1.1 Matrična i valna formulacija kvantne mehanike 3
1.2 Heisenbergov princip neodređenosti 4
1.3 Generalizirani princip neodređenosti 5

2 Fourierova analiza i kvantna mehanika **7**
2.1 Osnovni pojmovi 7
2.2 Fourierova transformacija na $\mathbb{R}$ 11
2.3 Hamiltonova i kvantna mehanika 20

3 Principi neodređenosti za jednu funkciju **26**
3.1 Kvalitativni princip neodređenosti 26
3.2 Heisenbergov princip neodređenosti 28
3.3 Operatorska formulacija principa neodređenosti 31
3.4 Entropijski (Hirschmanov) princip neodređenosti 32

4 Principi neodređenosti za sisteme funkcija **39**
4.1 Gaborovi sistemi i Balian-Low teorem 39
4.2 Valićni sistemi 42

5 Principi neodređenosti za grupe **47**
5.1 Princip neodređenosti za konačne abelove grupe 47
5.2 Princip neodređenosti za cikličke grupe prostog reda 51

Bibliografija **54**

Uvod

Princip neodređenosti prvi puta je formulirao W. Heisenberg 1927. godine čime je pokazano da se određene fizikalne vrijednosti poput položaja čestice i njenog momenta ili pak vremena i energije ne mogu proizvoljno precizno odrediti, što je značajno odudaralo od dotadašnjeg iskustva u fizici.

Kasnije iste godine Kennard je pokazao princip u punom matematičkom formalizmu. Za sve normalizirane vektore stanja $|\psi\rangle$ vrijedi sljedeća nejednakost:

$$\Delta_\psi p \Delta_\psi q \geq \frac{h}{4\pi},$$

gdje $\Delta_\psi p$ i $\Delta_\psi q$ reprezentiraju stadardne devijacije položaja i momenta u vektoru stanja $|\psi\rangle$. Robertson 1929. godine generaliza princip neodređenosti te pokazuje da za sve kvantne observable, tj. hermitske operatore A i B vrijedi nejednakost:

$$\Delta_\psi A \Delta_\psi B \geq \frac{1}{2}|\langle AB - BA\rangle_\psi| = \frac{1}{2}|\langle [A, B]\rangle_\psi|.$$

Više detalja o povijesnom razvoju formulacije principa neodređenosti se može naći u Poglavlju 1.

U Poglavlju 2 navodimo fundamentalne rezultate Fourierove analize te osnove matematičkog formalizma kvantne mehanike.

Matematička istraživanja principa neodređenosti urodila su zanimljivim rezultatima. Za početak, u Poglavlju 3 proučavamo razne formulacije principa neodređenosti za jednu funkciju. Temeljni rezultati uključuju kvalitativni princip koji govori o nemogućnosti istovremene lokalizacije ne–nul funkcije f i njene Fourierove transformacije $\hat{f}$ te kvantitativni princip neodređenosti, koji daje donju ocjenu za produkt standarnih devijacija s gustoćama $|f|^2$ i $|\hat{f}|^2$, a koji je direktna posljedica Heisenbergovog principa neodređenosti prema kojemu vrijedi nejednakost:

$$\frac{\|Xf\|_2}{\|f\|_2}\frac{\|Df\|_2}{\|f\|_2} \geq \frac{1}{4\pi},$$

pri čemu su X i D operatori položaja čestice i njenog momenta.
Pored njih, promatramo i operatorsku formulaciju principa neodređenosti za proizvoljne

dvije kvantne observable, tj. hermitske operatore A i B koja generalizira kvantitativni rezultat za operatore položaja čestice i momenta X i D. Također, pokazujemo i entropijski princip neodređenosti, koji daje donju ogradu na zbroj Shannonovih entropija s vjerojatnosnim funkcijama gustoće $|f|^2$ i $|\hat{f}|^2$, pri čemu je Shannonova entropija za vjerojatnosnu distribuciju g dana sa:

$$H(g) = -\int_{\mathbb{R}} g(x) \log g(x) dx,$$

dok je sama ocjena dana nejednakošću:

$$H(|f|^2) + H(|\hat{f}|^2) \geq \ln \frac{e}{2},$$

te vrijedi za sve funkcije f i $\hat{f}$ takve da $H(|f|^2)$ i $H(|\hat{f}|^2)$ imaju smisla.

Zatim u Poglavlju 4 promatramo principe neodređenosti za sisteme funkcija, tj. preciznije za Gaborove i valićne sisteme. Princip neodređenosti za Gaborove sisteme je dan kao poznati Balian–Low teorem koji za ortonormiranu Gaborovu bazu prostora $L^2(\mathbb{R})$ daje nemogućnost istovremene ispunjenosti uvjeta:

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |g(x)|^2 dx < \infty \ i \ \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Princip neodređenosti za valićne sisteme pokazuje da ortonormirani valić s kompaktnim nosačem može biti najviše klase $C^n(\mathbb{R})$, gdje je n nenegativni cijeli broj, tj. ne može pripadati prostoru $C^\infty(\mathbb{R})$.

Na kraju, u Poglavlju 5 promatramo principe neodređenosti za konačne abelove grupe te specifičnije, za cikličke grupe prostog reda p. Prinicip neodređenosti za konačne abelove grupe govori o donjoj ocjeni na produkt kardinaliteta nosača funkcije i njene Fourierove transformacije, tj. preciznije

$$|supp(f)||supp(\hat{f})| \geq |\mathbb{G}|,$$

pri čemu je $\mathbb{G}$ neka konačna abelova grupa, a f ne–nul funkcija definirana na njoj.

Nadalje, princip neodređenosti za cikličke grupe prostog reda p nam govori kako se ocjena za konačne abelove grupe može poboljšati, tj. da vrijedi sljedeća nejednakost:

$$|supp(f)| + |supp(\hat{f})| \geq p + 1.$$

Zahvaljujem roditeljima i rođacima koji su mi pružali veliku potporu tijekom fakultetskog obrazovanja. Također zahvaljujem svim prijateljima i kolegama s fakulteta s kojima sam provodio studentske dane, te djevojci na velikoj potpori pri samom kraju studija. Na kraju, veliku zahvalu dugujem svojem mentoru doc.dr.sc. Vjekoslavu Kovaču čije su strpljenje i pomoć bili od nezamjenjive važnosti za pisanje ovog rada.

Poglavlje 1

Povijesni pregled razvoja formulacije principa neodređenosti

1.1 Matrična i valna formulacija kvantne mehanike

Razmatramo li povijesni kontekst u kojemu se otkriva jedan od temeljnih principa današnje fizike – princip neodređenosti, neizbježno dolazimo do početka dvadesetog stoljeća, kada je grupa znanstvenika otkrivala novo i neistraženo područje tadašnje fizike – kvantnu mehaniku. Promotrimo stoga na koji način se prvi puta povijesno formulirao princip neodređenosti, od strane Wernera Heisenberga, kako su kasnija matematička istraživanja produbljivala samo načelo te koje su se varijante samog principa otkrivale kako je teklo vrijeme.

Heisenberg 1927. godine prvi puta objavljuje svoje poznate *relacije neodređenosti* u radu naslovljenom *"Ueber den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik"*, što bi u slobodnom prijevodu značilo: *"O uočljivom sadržaju teoretske kvantne kinematike i mehanike"*. Postavlja se zanimljivo pitanje: *"Što je dovelo do razmatranja relacija neodređenosti i kako je Heisenberg došao do njih?"*.

Smatrao je da samo vrijednosti koje se mogu promatrati i uočiti mogu i moraju imati mjesto u teoriji, te da je formiranje jasnog i slikovitog razumijevanja što se događa u atomu besmisleno u kontekstu razvijanja teorije. Proučanjem metoda i rezultata istraživanja atomske fizike, uvidio je da bi takozvane *"prijelazne vrijednosti"* morale zauzimati ključno mjesto u teoriji. Daljnja istraživanja u tom smjeru rezultirala su poznatim radovima Heisenberga, Borna i Jordana koji su 1925. godine razvili *matričnu formulaciju kvantne mehanike*.

Ideja ove formulacije je da se sve fizikalne vrijednosti moraju reprezentirati beskonačno-dimenzionalnim hermitskim matricama, koje danas promatramo kao operatore na Hilbertovom prostoru. U ovom pristupu, postulira se da matrice q i p koje reprezentiraju kanonske varijable položaja i momenta promatrane čestice, moraju zadovoljavati *pravilo kanonske* *komutativnosti*:

$$[q, p] = qp - pq = \frac{ih}{2\pi},$$

pri čemu $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ označava Planckovu konstantu.

Ova teorija se pokazala jako dobrom, u smislu da su je potvrđivala skoro sva empirijska istraživanja u polju atomske fizike koja su se radila u to vrijeme.

Nedugo nakon začetka matrične teorije kvantne mehanike, 1926. godine se pojavljuje austrijski fizičar Erwin Schrödinger sa svojom *valnom teorijom kvantne mehanike*. Temeljne razlike valne teorije u odnosu na matričnu formulaciju su da se pretpostavlja da se atom ponaša poput oscilirajućeg nabijenog oblaka, koji evoluira u vremenu i prostoru prema danas vrlo poznatoj *Schrödingerovoj jednadžbi*, te da diskretne frekvencije koje se javljaju u atomskom spektru nisu posljedica kvantnih skokova, već efekta rezonancije.

Iako je pokazano da su te dvije teorije ekvivalentne, Schrödingerova je bila popularnija među znanstvenom zajednicom jer je bila slikovitija te je, za razliku od apstraktne i pomalo nejasne Heisenbergove matrične formulacije, opisivala fenomene determinističkim procesima koji su evoluirali u vremenu i prostoru. Upravo zbog apstraktne prirode Heisenbergove teorije, on sam ju je odlučio poboljšati na način da daje bolju i jasniju sliku strukture materije, kako bi stajala uz rame valnoj mehanici Schrödingera.

1.2 Heisenbergov princip neodređenosti

Heisenbergova ključna ideja prilikom postavljanja relacija neodređenosti je bila ta da sva radna terminologija poput položaja čestice, njenog momenta i slično, ima smisleno značenje jedino u slučaju kada možemo odrediti prikladni eksperiment gdje se položaj čestice ili njen moment može odrediti, tj. izmjeriti. Drugim riječima, jedini pojmovi koji imaju značenje su oni koji se mogu precizno i točno izmjeriti. Lucidnost samog načina razmišljanja nije u tome što nema dovoljno eksperimenata, već u fundamentalnoj nepreciznosti mjerenja koja se vrše, te činjenice da se svako mjerenje može vršiti do na određenu preciznost.

Prva elementarna formulacija relacija neodređenosti proizašla je iz razmatranja eksperimenta mjerenja položaja elektrona mikroskopom. Ključno je bilo primjetiti da je preciznost mjerenja ograničena valnom duljinom svjetla, tj. fotona koju pogađaju elektron. Naime, iako je moguće s proizvoljnom preciznošću odrediti položaj čestice, zbog Comptonovog efekta mijenja se moment. Dakle, bolje poznavanje položaja čestice rezultira većom nepreciznošću u poznavanju momenta. Heisenberg je grubo matematički ovu fundamentalnu nepreciznost zapisao u obliku

$$\delta p \, \delta q \sim h, \tag{1.1}$$

gdje δp i δq reprezentiraju nepreciznosti u poznavanju momenta i položaja čestice , dok je h Planckova konstanta.

Pored momenta i položaja, Heisenberg je proučavao i druge parove "dualnih" fizikalnih vrijednosti te dobio sljedeće relacije – za vrijeme i energiju

$$\delta t\,\delta E \sim h, \tag{1.2}$$

te za akciju J i kut w:

$$\delta w\,\delta J \sim h. \tag{1.3}$$

1.3 Generalizirani princip neodređenosti

Prilikom formuliranja principa neodređenosti, Heisenberg je odabrao kvalitativni pristup, gdje nije detaljno i potpuno matematički formalno obrazložio svoje formulacije. Nešto kasnije 1927. godine, Kennard pokazuje da za sve normalizirane vektore stanja $|\psi\rangle$ vrijedi sljedeća nejednakost:

$$\Delta_\psi p \Delta_\psi q \geq \frac{h}{4\pi}, \tag{1.4}$$

gdje $\Delta_\psi p$ i $\Delta_\psi q$ reprezentiraju stadardne devijacije položaja i momenta u vektoru stanja $|\psi\rangle$. Preciznije, vrijedi

$$(\Delta_\psi p)^2 = \langle p^2\rangle_\psi - \langle p\rangle_\psi^2, \quad (\Delta_\psi q)^2 = \langle q^2\rangle_\psi - \langle q\rangle_\psi^2, \tag{1.5}$$

gdje $\langle\cdot\rangle_\psi = \langle\psi| \cdot |\psi\rangle$ označava evaluaciju u stanju $|\psi\rangle$.

1929. godine Robertson generalizira nejednakost (1.4), te dokazuje da za sve kvantne observable, tj. hermitske operatore A i B, vrijedi nejednakost

$$\Delta_\psi A \Delta_\psi B \geq \frac{1}{2}|\langle AB - BA\rangle_\psi| = \frac{1}{2}|\langle [A, B]\rangle_\psi|. \tag{1.6}$$

Schrödinger je 1930. godine izveo jaču verziju nejednakosti (1.6) sljedećeg oblika:

$$(\Delta_\psi A)^2(\Delta_\psi B)^2 \geq \frac{1}{4}|\langle [A, B]\rangle_\psi|^2 + \frac{1}{4}|\langle\{A - \langle A\rangle_\psi, B - \langle B\rangle_\psi\}\rangle_\psi|^2, \tag{1.7}$$

gdje $\{A, B\} = (AB + BA)$ označava anti–komutator.

Promotrimo li relacije (1.1) i (1.4), nameće se pitanje njihove očigledne povezanosti. Sam Heisenberg je smatrao da jedina razlika među njima leži u tome što je Kennard proveo izvod svoje kvantitativne relacije (1.4) matematički potpuno egzaktno. Međutim, moramo uvidjeti da Kennardova relacija, zajedno sa relacijama (1.6) i (1.7), nisu tvrdnje empirijske činjenice, već su one teoremi kvantno-mehaničkog formalizma. Dakle, nejednakosti (1.4), (1.6) i (1.7) pokazuju da je matematički formalizam kvantne mehanike u skladu sa Heisenbergovim empirijskim principom neodređenosti (1.1).

Uočimo još jednu zanimljivu razliku između relacije (1.1) i relacija (1.4), (1.6) i (1.7) – korištenje standardne devijacije kao ”mjere neodređenosti”, tj. nepreciznosti. Kao što vidimo u Heisenbergovoj formulaciji (1.1), ne daje se nikakva precizna definicija vrijednosti δp i δq, osim neke vrste “srednje greške”, dok se u relacijama (1.4), (1.6) i (1.7) uvijek koristi standardna devijacija kao mjera greške. Naime, uopće nije očigledno zašto bi se standardna devijacija koristila kao mjera greške prilikom formulacije generaliziranog principa neodređenosti. Dapače, Heisenberg i Bohr nikada nisu koristili standardnu devijaciju u svojim misaonim eksperimentima.

U daljnjim poglavljima, pored iskazivanja i dokazivanja glavnih rezultata vezanih uz Fourierovu transformaciju te matematičko formaliziranje kvantne mehanike, bavimo se isključivo raznim formulacijama principa neodređenosti, od kvalitativnog koji nam govori o nemogućnosti istovremene lokalizacije funkcije $f \neq 0$ i njene Fourierove transformacije $\hat{f}$, kvantitativnog principa koji daje donju ocjenu za produkt standardnih devijacija s gustoćama $|f|^2$ i $|\hat{f}|^2$, sve do entropijskog principa neodređenosti, principa neodređenosti za konačne abelove grupe te onog za valićne i Gaborove sisteme, koji su se formulirali i dokazali naknadno. Svi su oni originalno motivirani Heisenbergovom prvotnom formulacijom.

Poglavlje 2

Osnove Fourierove analize i formalizacija kvantne mehanike

2.1 Osnovni pojmovi

U ovome poglavlju iskazujemo neke od glavnih rezultata teorije mjere i integrala, osnovna svojstva i rezultate vezane uz Fourierovu transformaciju na $\mathbb{R}$, te dajemo kratak uvod u matematičku formalizaciju kvantne mehanike. Alat koji predstavljamo i razvijamo u ovome poglavlju koristimo u sljedećim poglavljima prilikom proučavanja principa neodređenosti za jednu funkciju, sisteme funkcija te funkcije definirane na konačnim abelovim grupama.

Teorija mjere i integrala

Definicija 2.1.1. *Neka je X neprazan skup. Algebra skupova na X je neprazna familija $\mathcal{A}$ podskupova od X koja je zatvorena na konačne unije i komplemente, tj. ako su $E_1, ..., E_n \in \mathcal{A}$, tada je $\cup_{j=1}^{N} E_j \in \mathcal{A}$, te ako je $E \in \mathcal{A}$, tada je $E^c \in \mathcal{A}$. σ-algebra je algebra koja je zatvorena na prebrojive unije.*

Definicija 2.1.2. *Neka je X skup te $\mathcal{M}$ σ-algebra na X. Mjera na $(X, \mathcal{M})$ je funkcija $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ takva da vrijedi:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. *Ako je $(E_j)_{j=1}^{\infty}$ niz disjunktnih skupova iz $\mathcal{M}$, tada je $\mu(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$.*

Definicija 2.1.3. *Neka je X skup i $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ σ-algebra. Tada $(X, \mathcal{M})$ nazivamo izmjeriv prostor, a skupove iz $\mathcal{M}$ izmjerivi skupovi. Ako je μ mjera na $(X, \mathcal{M})$, tada $(X, \mathcal{M}, \mu)$ nazivamo prostor mjere.*

Definicija 2.1.4. *Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere. Ako je $\mu(X) < \infty$, μ nazivamo konačnom mjerom. Ako je $X = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$, pri čemu je $E_j \in \mathcal{M}$ te $\mu(E_j) < \infty$ za svaki j, tada μ nazivamo σ-konačnom mjerom. Općenitije, ako je $E = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$, pri čemu je $E_j \in \mathcal{M}$ te $\mu(E_j) < \infty$ za svaki j, skup E nazivamo σ-konačnim za mjeru μ.*

Definicija 2.1.5. *Neka su $(X, \mathcal{M}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ dva prostora mjere te neka je $E \subset X \times Y$. Za $x \in X$, $y \in Y$ definiramo x-prerez E_x i y-prerez E^y od E sa*

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}, \quad E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}.$$

Ako je f funkcija na $X \times Y$, definiramo x-prerez f_x i y-prerez f^y od f sa

$$f_x(y) = f^y(x) = f(x, y).$$

Teorem 2.1.6. *(Fubinijev teorem) Neka su $(X, \mathcal{M}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ σ-konačni prostori mjere. Ako je $f \in L^1(\mu \times \nu)$, tada je $f_x \in L^1(\nu)$ za skoro svaki $x \in X$, $f^y \in L^1(\mu)$ za skoro svaki $y \in Y$, skoro svuda definirane funkcije $g(x) = \int f_x d\mu$ i $h(x) = \int f^y d\nu$ su u $L^1(\mu)$ te $L^1(\nu)$ respektivno, te vrijedi*

$$\int f d(\mu \times \nu) = \int \Big[\int f(x, y) d\nu(y) \Big] d\mu(x) = \int \Big[\int f(x, y) d\mu(x) \Big] d\nu(y).$$

Dokaz. Dokaz se nalazi u [3]. □

Teorem 2.1.7. *(Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji)*
Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor mjere, $g \colon X \to [0, +\infty]$ $L^1(\mathbb{R})$ funkcija, te za gotovo svaki $x \in X$ vrijedi

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x), \quad i \quad |f_n(x)| \leq g(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tada je $f \in L^1(\mathbb{R})$ te vrijedi

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dokaz. Dokaz se nalazi u [3]. □

Banachovi i Hilbertovi prostori

Definicija 2.1.8. *Norma na vektorskom prostoru X nad poljem $\mathbb{F}$ je preslikavanje $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ takvo da vrijedi:*

1. $\|x\| \geq 0 \forall x \in X$;

2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \ \forall x \in X$;

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \forall x, y \in X$.

Uređen par $(X, \|\cdot\|)$ naziva se normiran prostor.

Definicija 2.1.9. *Skalarni produkt na vektorskom prostoru X nad poljem $\mathbb{F}$ je preslikavanje $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{F}$ sa sljedećim svojstvima:*

1. $\langle x, x\rangle \geq 0, \ \forall x \in X$;

2. $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

3. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle, \ \forall \alpha \in \mathbb{F}, \ \forall x, y \in \mathbb{F}$;

4. $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle, \ x_1, x_2 \in X$;

5. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}, \ \forall x, y \in X$.

Uređen par $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se naziva unitaran prostor.

Definicija 2.1.10. *Neka je (x_n) niz u normiranom prostoru $(X, \|\cdot\|)$. Kažemo da niz (x_n) konvergira prema $x \in X$ i pišemo $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ ako*

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \textit{tako da } n_0 \leq n \Rightarrow \|x_n - x\| < \epsilon.$$

Kažemo da je niz (x_n) Cauchyjev ako

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \textit{tako da } n_0 \leq n, m \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \epsilon.$$

Definicija 2.1.11. *Za normirani prostor kažemo da je potpun ako svaki Cauchyjev niz u njemu konvergira. Potpun normiran prostor nazivamo još i Banachov prostor. Potpun unitaran prostor nazivamo Hilbertov prostor.*

L^p prostori

Definicija 2.1.12. *Neka je $E \subset \mathbb{R}$ izmjeriv skup. Za dani realan broj $1 \leq p < \infty$ definiramo $L^p(E)$ kao prostor svih izmjerivih funkcija na E koje su p-integrabilne, tj.*

$$L^p(E) = \left\{ f : E \to \mathbb{R} : \int_E |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Pritom identificiramo funkcije koje se razlikuju na skupu mjere nula.

Na $L^p(E)$ definiramo $\|\cdot\|_{L^p} : L^p(E) \to [0, +\infty\rangle$,

$$\|f\|_p := \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

U slučaju $p = +\infty$, za izmjerivu funkciju f definiramo sljedeću normu:

$$\|f\|_\infty = inf\left\{ \alpha \geq 0 \colon \mu(\{x \colon |f(x)| > \alpha\}) = 0 \right\}.$$

Tada definiramo prostor izmjerivih funkcija $L^\infty(E)$ na sljedeći način:

$$L^\infty(E) = \{f \colon E \to \mathbb{R} \colon \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Definicija 2.1.13. *Neka je $1 \leq p \leq \infty$. Tada njegov konjugirani eksponent definiramo kao broj q takav da je $1 \leq q \leq \infty$, te da vrijedi*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

gdje koristimo konvenciju da je $1/0 = \infty$ te $1/\infty = 0$.

Teorem 2.1.14. *(Hölderova nejednakost) Neka je $E \subset \mathbb{R}$ izmjeriv skup. Ako je $f \in L^p(E)$ te $g \in L^q(E)$, tada je $fg \in L^1(E)$, te vrijedi*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

U slučaju $1 < p < \infty$ ovo je ekvivalentno tvrdnji

$$\int_E |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_E |g(x)|^q dx \right)^{1/q}.$$

Dokaz. Dokaz se nalazi u [3].

□

Primijetimo da u slučaju $p = 2$ vrijedi $q = 2$ te da se teorem 2.1.14 svodi na Cauchy-Schwarz-Bunyakovski nejednakost:

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

Sljedeći teorem nam pokazuje da je $\|\cdot\|_{L^p}$ norma na L^p.

Teorem 2.1.15. *(Nejednakost Minkowskog) Neka je $E \subset \mathbb{R}$ izmjeriv skup. Ako je $f \in L^p(E)$ te $g \in L^p(E)$, tada je $f + g \in L^p(E)$ te vrijedi nejednakost*

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}. \tag{2.1}$$

Dokaz. Dokaz se nalazi u [3].

□

Sljedeća propozicija nam govori o jednoj korisnoj ocjeni koja se dobiva iz Hölderove nejednakosti (2.1).

Propozicija 2.1.16. *Ako je $0 < p < q < r \leq \infty$, tada je $L^p(\mathbb{R}) \cap L^r(\mathbb{R}) \subset L^q(\mathbb{R})$ te vrijedi $\|f\|_q \leq \|f\|_p^{\lambda}\|f\|_r^{1-\lambda}$, gdje je $\lambda \in (0,1)$ definiran sa*

$$q^{-1} = \lambda p^{-1} + (1-\lambda)r^{-1}, \ t j.\ \lambda = \frac{q^{-1} - r^{-1}}{p^{-1} - r^{-1}}.$$

Dokaz. Dokaz se nalazi u [3].

□

Teorem 2.1.17. *Neka je $E \subset \mathbb{R}$ izmjeriv skup. Ako je $1 \leq p \leq \infty$, tada je $L^p(E)$ Banachov prostor u odnosu na normu $\|\cdot\|_{L^p}$.*

Dokaz. Dokaz se nalazi u [3]. □

Neka je $E \subset \mathbb{R}$ izmjeriv skup. Pokazuje se da je $L^2(E)$ štoviše Hilbertov prostor sa skalarnim produktom

$$\langle f, g\rangle = \int_E f(x)\overline{g(x)}dx, \quad f, g \in L^2(E).$$

2.2 Fourierova transformacija na $\mathbb{R}$

Definicija 2.2.1. *Neka je dana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Ako je $f \in L^1(\mathbb{R})$, tada Fourierovu transformaciju od f definiramo kao funkciju $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ danu sa*

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\xi}d\xi, \ \xi \in \mathbb{R}.$$

Definicija 2.2.2. *Neka su $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Tada je konvolucija tih funkcija definirana sa*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy, \ x \in \mathbb{R}.$$

Lako se pokazuje da je za gotovo svaki $x \in \mathbb{R}$ funkcija $y \mapsto f(x-y)g(y)$ integrabilna, te da za konvoluciju vrijedi da je $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ i

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}\,\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Stoga definicija konvolucije 2.2.2 ima smisla.

U nastavku uvodimo operator translacije, uzimajući u obzir da se na skupu $\mathbb{R}$ uvijek podrazumijevaju σ-algebra Lebesgue-izmjerivih skupova i Lebesgueova mjera.

Definicija 2.2.3. *Neka je f funkcija na $\mathbb{R}$ te $y \in \mathbb{R}$. Tada je operator translacije τ dan sa*

$$\tau_y f(x) = f(x - y).$$

Primijetimo da vrijedi $||\tau_y f||_p = ||f||_p$, za $1 \leq p \leq \infty$. Tu ćemo jednakost eksplicitno koristiti u dokazu sljedećih korisnih rezultata.

Može se pokazati i neprekidnost operatora translacije, međutim za takav rezultat su nam potrebne dvije pomoćne tvrdnje.

Lema 2.2.4. *$C_c(\mathbb{R})$ je gust u $L^p(\mathbb{R})$, za $1 \leq p < \infty$.*

Dokaz. Dokaz se nalazi u [3]. □

Lema 2.2.5. *Ako je $f \in C_c(\mathbb{R})$, tada je f uniformno neprekidna.*

Dokaz. Neka je dan $\epsilon > 0$. Za svaki $x \in supp(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$ postoji $\delta_x > 0$ takav da vrijedi $|f(x - y) - f(x)| < \frac{1}{2}\epsilon$, ako je $|y| < \delta_x$. Kako je $supp(f)$ kompaktan skup, postoje $x_1, ..., x_n$ takvi da kugle radijusa $\frac{1}{2}\delta_{x_j}$ s centrom u x_j pokrivaju $supp(f)$. Ako je $\delta = \frac{1}{2}min\{\delta_{x_j}\}$, tada lako vidimo da $||\tau_y f - f||_\infty < \epsilon$ kada god je $|y| < \delta$.

□

Propozicija 2.2.6. *Neka je $1 \leq p < \infty$. Translacija je neprekidna u L^p normi, tj. ako je $f \in L^p(\mathbb{R})$ te $z \in \mathbb{R}$, tada je $\lim_{y \to 0} ||\tau_{y+z} f - \tau_z f||_p = 0$.*

Dokaz. Kako je $\tau_{y+z} = \tau_y \tau_z$, zamijenimo li f sa $\tau_z f$, dovoljno je pretpostaviti da je $z = 0$. Neka je g proizvoljna neprekidna funkcija s kompaktnim nosačem na $\mathbb{R}$, tj. $g \in C_c(\mathbb{R})$. Za $|y| \leq 1$, funkcije $\tau_y g$ su sve sadržane u istom kompaktnom skupu K, pa po lemi 2.2.5, vrijedi:

$$\int |\tau_y g - g|^p \leq ||\tau_y g - g||_\infty^p \, \mu(K) \to 0, \ y \to 0. \tag{2.2}$$

Neka je sada $f \in L^p$. Uzmemo li $\epsilon > 0$, po lemi 2.2.4 postoji $g \in C_c$ koji proizvoljno dobro aproksimira funkciju f, tj. vrijedi $||f - g||_p < \frac{\epsilon}{3}$. Također, znamo da za $f \in L^p$ vrijedi $||\tau_y f||_p = ||f||_p$, pa imamo:

$$||\tau_y f - f||_p \leq ||\tau_y (f - g)||_p + ||\tau_y g - g||_p + ||g - f||_p \leq \frac{2}{3}\epsilon + ||\tau_y g - g||_p.$$

Sada, po (2.2), za dovoljno mali y, vrijedi da je $||\tau_y g - g||_p < \frac{\epsilon}{3}$, te je time pokazana tvrdnja propozicije.

□

U nastavku uvodimo *operator modulacije* koji će biti koristan pri dokazivanju nekih svojstava Fourierove transformacije.

Definicija 2.2.7. *Neka je f funkcija na $\mathbb{R}$ te $\eta \in \mathbb{R}$. Tada je operator modulacije dan sa*

$$m_\eta f(x) = e^{2\pi i \eta x} f(x).$$

Lema 2.2.8. *(Youngova nejednakost) Ako je $f \in L^1(\mathbb{R})$ te $g \in L^p(\mathbb{R})$, za $1 \leq p \leq \infty$, tada $(f * g)(x)$ postoji za skoro svaki x. Osim toga je $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ te vrijedi:*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p. \tag{2.3}$$

Dokaz. Koristeći nejednakost Minkowskog (2.1) u nešto općenitijoj integralnoj formulaciji, dobivamo:

$$\|f * g\|_p = \left\| \int_{\mathbb{R}} f(y) g(\cdot - y) dy \right\|_p \leq \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \, \|\tau_y g\|_p dy = \|f\|_1 \|g\|_p.$$

□

U sljedećoj propoziciji navedena su neka svojstva Fourierove transformacije:

Propozicija 2.2.9. *Vrijede sljedeće jednakosti:*

1. *Neka su $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Fourierova transformacija je linearni operator, tj. za svaki $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ te $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ vrijedi*

$$(\widehat{\alpha f + \beta g})(\xi) = \alpha \hat{f}(\xi) + \beta \hat{g}(\xi), \ \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

2. *Neka je $f \in L^1(\mathbb{R})$. Tada vrijedi*

$$\widehat{\tau_y f}(\xi) = e^{-2\pi i \xi \cdot y} \hat{f}(\xi), \quad \widehat{m_\eta f}(\xi) = \tau_\eta(\hat{f})(\xi) = \hat{f}(\xi - \eta).$$

3. *Fourierova transformacija konvolucije funkcija $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ jednaka je umnošku Fourierovih transformacija odgovarajućih funkcija*

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}.$$

4. *Ako funkcija $f \in C^1(\mathbb{R})$ ima kompaktan nosač, tada vrijedi*

$$\hat{f'}(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi) \quad i \quad (\hat{f})'(\xi) = ((-2\pi i x) f(x))\hat{}(\xi). \tag{2.4}$$

Dokaz. 1. Tvrdnja slijedi direktno iz činjenice da je integral linearni operator.

2. Vrijedi sljedeći niz jednakosti

$$\widehat{(\tau_y f)}(\xi) = \int f(x-y)e^{-2\pi i\xi\cdot x}dx = \int f(x)e^{-2\pi i\xi\cdot(x+y)}dx = e^{-2\pi i\xi\cdot y}\hat{f}(\xi).$$

$$\widehat{(m_\eta f)}(\xi) = \int e^{2\pi i\eta\cdot x}f(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x}dx = \int f(x)e^{-2\pi i(\xi-\eta)\cdot x}dx = \hat{f}(\xi-\eta) = \tau_\eta(\hat{f})(\xi).$$

3. Po Fubinijevom teoremu 2.1.6 imamo

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \iint f(x-y)g(y)e^{-2\pi i\xi\cdot x}dydx =$$

$$= \iint f(x-y)e^{-2\pi i\xi\cdot(x-y)}g(y)e^{-2\pi i\xi\cdot y}dxdy = \hat{f}(\xi)\int g(y)e^{-2\pi i\xi\cdot y}dy = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

   Možemo koristiti Fubinijev teorem zbog

$$\iint |f(x-y)||g(y)|dydx = \|f\|_1\|g\|_1 < \infty.$$

4. Primijetimo da je f' neprekidna i također ima kompaktan nosač pa se i f i f' nalaze u prostoru $L^1(\mathbb{R})$. Klasičnom formulom parcijalne integracije (za funkcije klase C^1) dobivamo

$$\hat{f'}(\xi) = \int f'(x)e^{-2\pi ix\xi}dx = -\int f(x)e^{-2\pi ix\xi}(-2\pi i\xi)dx = 2\pi i\xi\hat{f}(\xi).$$

   Osim toga, deriviranjem integrala dobivamo

$$(\hat{f})'(\xi) = \frac{d}{d\xi}\int f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx = \int f(x)e^{-2\pi ix\xi}(-2\pi ix)dx = ((-2\pi ix)f(x))\hat{\ }(\xi).$$

□

Možemo definirati inverz Fourierove transformacije. Za dani $f \in L^1(\mathbb{R})$, definiramo

$$\check{f}(x) = \hat{f}(-x) = \int f(x)e^{2\pi i\xi\cdot x}dx.$$

Sljedeći teorem nam pokazuje da ako su $f \in L^1(\mathbb{R})$ te $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, tada je $(\hat{f}\,)\check{} = f$. Prije samog teorema navodimo nekoliko korisnih rezultata.

Lema 2.2.10. *Neka su $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Tada vrijedi*

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(x)f(x)dx.$$

Dokaz. Primjenom Fubinijevog teorema dobivamo

$$\iint f(x)g(y)e^{-2\pi ixy}dxdy = \int \Big(\int f(x)e^{-2\pi ixy}dx\Big)g(y)dy = \int \hat{f}(y)g(y)dy,$$

$$\iint f(x)g(y)e^{-2\pi ixy}dxdy = \int \Big(\int g(y)e^{-2\pi ixy}dy\Big)f(x)dx = \int \hat{g}(x)f(x)dx.$$

Fubinijev teorem možemo koristiti jer su $f, g \in L^1$, pa vrijedi:

$$\iint |f(x)||g(y)|dxdy = \|f\|_1\|g\|_1 < \infty.$$

□

Lema 2.2.11. *Neka je dana funkcija* $f(x) = e^{-\pi a|x|^2}$, *gdje je* $a > 0$. *Tada je* $\hat{f}(\xi) = a^{-1/2}e^{-\pi|\xi|^2/a}$.

Dokaz. Znamo da je derivacija funkcije $f(x) = e^{-\pi ax^2}$ jednaka $f'(x) = -2\pi ae^{-a\pi x^2}$, pa po četvrtoj tvrdnji propozicije 2.2.9, dobivamo

$$(\hat{f})'(\xi) = (\widehat{-2\pi ixe^{-\pi ax^2}})(\xi) = \frac{i}{a}(\hat{f'})(\xi) = \frac{i}{a}(2\pi i\xi)\hat{f}(\xi) = -\frac{2\pi}{a}\xi\hat{f}(\xi). \tag{2.5}$$

Po formuli za derivaciju produkta te formuli (2.5), dobivamo:

$$(d/d\xi)(e^{\pi\xi^2/a}\hat{f}(\xi)) = e^{\pi\xi^2/a}(2\pi\xi/a\hat{f}(\xi) + \hat{f}'(\xi)) = 0,$$

pa slijedi da je $e^{\pi\xi^2/a}\hat{f}(\xi)$ konstanta. Može se pokazati da za $a > 0$ vrijedi jednakost

$$\int e^{-a|x|^2}dx = \Big(\frac{\pi}{a}\Big)^{1/2}.$$

Dokaz se može naći u [3] . Iz gornje jednakosti dobivamo traženu konstantu

$$\hat{f}(0) = \int e^{-\pi ax^2}dx = a^{-1/2}.$$

□

U narednom teoremu koristimo sljedeću notaciju. Neka je ϕ proizvoljna funkcija na $\mathbb{R}$, te $t > 0$ realan broj. Uvodimo oznaku

$$\phi_t(x) = t^{-1}\phi(t^{-1}x) \tag{2.6}$$

Primijetimo da ako je $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, supstitucijom $y = t^{-1}x$ u drugom integralu dobivamo:

$$\int \phi_t = \int \phi(t^{-1}x)t^{-1}dx = \int \phi(y)dy = \int \phi.$$

U nastavku navodimo još jedan rezultat koristan pri dokazivanju teorema 2.2.13.

Propozicija 2.2.12. *Neka je $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ te $\int \phi(x)dx = a$. Ako je $f \in L^p(\mathbb{R}), 1 \leq p < \infty$, tada $f * \phi_t \to af$ u L^p normi kako $t \to 0$.*

Dokaz. Uz $y = tz$, imamo

$$f * \phi_t(x) - af(x) = \int [f(x-y) - f(x)]\phi_t(y)dy =$$

$$= \int [f(x-tz) - f(x)]\phi(z)dz = \int [\tau_{tz}f(x) - f(x)]\phi(z)dz.$$

Koristeći nejednakost Minkowskog (2.1), dobivamo

$$\|f * \phi_t - af\|_p \leq \int \|\tau_{tz}f - f\|_p |\phi(z)|dz.$$

$\|\tau_{tz}f - f\|_p$ je ograničeno s $2\|f\|_p$ te teži 0 kada $t \to 0$ za svaki z, po propoziciji 2.2.6. Tvrdnja u iskazu slijedi po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji 2.1.7.

□

Teorem 2.2.13. *(Teorem inverzije) Neka je $f \in L^1(\mathbb{R})$ te $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Tada je f jednaka neprekidnoj funkciji f_0 gotovo svuda, te vrijedi*

$$(\hat{f}\,)\check{}(x) = (\check{f}\,)\hat{}(x) = f(x) \text{ za skoro svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Neka je dan $t > 0$ te $x \in \mathbb{R}$. Definiramo

$$\phi(\xi) = exp(2\pi i\xi x - \pi t^2|\xi|^2).$$

Po drugoj tvrdnji propozicije 2.2.9 te propoziciji 2.2.11 vrijedi

$$\hat{\phi}(y) = t^{-1}exp(-\pi|x-y|^2/t^2) = g_t(x-y),$$

gdje je $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$, dok nam indeks t označava funkciju kao u (2.6). Po lemi 2.2.10 dobivamo

$$\int e^{-\pi t^2|\xi|^2} e^{2\pi i\xi\cdot x}\hat{f}(\xi) = \int \hat{f}\phi = \int f\hat{\phi} = f * g_t.$$

Znamo da je $\int e^{-\pi|x|^2}dx = 1$, pa po teoremu 2.2.12 znamo da $f * g_t \to f$ u L^1 normi kako $t \to 0$. S druge strane, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ pa po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji 2.1.7 dobivamo

$$\lim_{t\to 0} \int e^{-\pi t^2|\xi|^2} e^{2\pi i\xi\cdot x}\hat{f}(\xi)d\xi = \int e^{2\pi i\xi\cdot x}\hat{f}(\xi)d\xi = (\hat{f}\,)\check{}(x).$$

Slijedi da je $f = (\hat{f}\,)\check{}$ gotovo svuda, te je na sličan način $f = (\check{f}\,)\hat{}$ gotovo svuda. Uvažavajući činjenicu da su $(\check{f}\,)\hat{}$ i $(\hat{f}\,)\check{}$ neprekidne kao Fourierove transformacije L^1 funkcija, dokaz teorema je gotov. □

Kao posljedicu teorema, dobivamo da je Fourierova transformacija $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \mapsto C_0(\mathbb{R})$ injektivna.

Korolar 2.2.14. *Ako je $f \in L^1(\mathbb{R})$ te je $\hat{f} = 0$, tada je $f = 0$ gotovo svuda.*

Dokaz. Uzmimo f iz L^1 takvu da je $\hat{f} = 0$. Njena Fourierova transformacija je nul–funkcija pa je trivijalno u L^1. Zato možemo primijeniti teorem inverzije 2.2.13:

$$f = (\hat{f})^{\vee} = \check{0} = 0 \text{ gotovo svuda.}$$

□

Sljedeći teorem nam govori da je moguće operator Fourierove transformacije $\mathcal{F}$ koji je definiran na prostoru $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ proširiti do unitarnog izomorfizma definiranog na prostoru $L^2(\mathbb{R})$.

Prije dokaza teorema uvodimo jedan novi funkcijski prostor - *Schwartzov prostor*, te iskazujemo neke rezultate o gustoći. Uvodimo notaciju – za n-torku nenegativnih cijelih brojeva zvanu *multi-indeks* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, definiramo

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

Definicija 2.2.15. *Schwartzov prostor je definiran sa*

$$\mathcal{S} = \{f \in C^\infty : \|f\|_{(N,\alpha)} < \infty, \forall N, \alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

gdje su polunorme na tom prostoru dane sa

$$\|f\|_{(N,\alpha)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N |\partial^\alpha f(x)|.$$

Primijetimo da je skup svih funkcija klase C^∞ s kompaktnim nosačem podskup Schwartzovog prostora, tj. $C_c^\infty \subset S$.

U kontekstu Schwartzovog prostora, prirodno se nadovezuje prostor *temperiranih distribucija* te osnovna operacija na njemu – derivacija distribucije. Ove pojmove definiramo u nastavku.

Definicija 2.2.16. *Prostor temperiranih distribucija je prostor neprekidnih linearnih funkcionala definiranih na Schwartzovom prostoru $\mathcal{S}$, u oznaci $\mathcal{S}'$.*

Definicija 2.2.17. *Derivacija distribucije $f \in \mathcal{S}'$ je nova distribucija $f' \in \mathcal{S}'$ takva da vrijedi*

$$f'(\psi) = -f(\psi') \text{ za svaki } \psi \in \mathcal{S},$$

što ilustrativno zapisujemo kao

$$\int f'\psi = -\int f\psi' \text{ za svaki } \psi \in \mathcal{S}.$$

Prije nego iskažemo sljedeću propoziciju koja nam govori o gustoći funkcija klase C^∞ s kompaktnim nosačem u L^p prostorima, $1 \leq p < \infty$, promotrimo sljedeće dvije leme koje će biti važne pri dokazivanju same propozicije.

Lema 2.2.18. *Neka su f i g izmjerive funkcije na $\mathbb{R}^n$. Vrijedi sljedeća relacija:*

$$supp(f * g) \subset \overline{\{x + y \colon x \in supp(f),\ y \in supp(g)\}}.$$

Dokaz. Radi jednostavnosti, uvedimo oznaku $B := \overline{\{x + y \colon x \in supp(f),\ y \in supp(g)\}}$. Primijetimo da ako $x \notin B$, za bilo koji $y \in supp(g)$ vrijedi $x - y \notin supp(f)$. Zaključno, imamo da $f(x - y)g(y) = 0$, za svaki y, pa je $f * g(x) = 0$. □

Lema 2.2.19. *Neka su $f \in L^1$, $g \in C^k$, te $\partial^\alpha g$ ograničena za $|\alpha| \leq k$, pri čemu je $k \in \mathbb{N}_0$. Tada vrijedi $f * g \in C^k$ te $\partial^\alpha(f * g) = f * (\partial^\alpha g)$, za sve $|\alpha| \leq k$.*

Dokaz. Dokaz se nalazi u [3]. □

Propozicija 2.2.20. *Skup C_c^∞, pa stoga i $\mathcal{S}$ je gust u L^p, $1 \leq p < \infty$.*

Dokaz. Po lemi 2.2.4, za funkciju $f \in L^p(\mathbb{R})$, te uz dani $\epsilon > 0$, postoji funkcija $g \in C_c$ takva da je vrijedi $\|f - g\|_p < \frac{\epsilon}{2}$. Neka je $h \in C_c^\infty$ funkcija takva da vrijedi $\|h\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} h = 1$. Jedna takva funkcija je primjerice $h = \frac{\psi}{\int_{\mathbb{R}} \psi}$, gdje je funkcija ψ definirana na sljedeći način:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2 - 1}} & \text{ako je } |x| < 1, \\ 0 & \text{ako je } x \geq 1. \end{cases}$$

Sada po lemi 2.2.18 i 2.2.19 vrijedi da je $g * h_t \in C_c^\infty$, gdje je oznaka h_t kao u (2.6). Konačno, prema propoziciji 2.2.12, vrijedi da je $\|g * h_t - g\|_p < \frac{\epsilon}{2}$, pa imamo da za danu funkciju $f \in L^p(\mathbb{R})$ postoji funkcija $g * h_t \in C_c^\infty$ takva da je

$$\|f - g * h_t\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g * h_t\|_p \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

čime smo pokazali tvrdnju propozicije. □

Teorem 2.2.21. *(Plancherelov teorem) Neka je $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Tada je $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ te se operator $\mathcal{F}|_{L^1 \cap L^2}$ jedinstveno proširuje do unitarnog izomorfizma na L^2. Vrijedi Plancherelova formula*

$$\|\mathcal{F} f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Dokaz. Neka je $\mathcal{X} = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})\}$.

Iz $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ slijedi da je $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, pa po propoziciji 2.1.16 imamo da je $\mathcal{X} \subset L^2(\mathbb{R})$. $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ je gust u $L^2(\mathbb{R})$ po propoziciji 2.2.20, pa vrijedi da je $\mathcal{X}$ gust u $L^2(\mathbb{R})$. Neka su $f, g \in \mathcal{X}$, te neka je $h = \overline{\hat{g}}$. Po teoremu inverzije 2.2.13, vrijedi

$$\hat{h}(\xi) = \int e^{-2\pi i\xi\cdot x}\overline{\hat{g}(x)}dx = \int \overline{e^{2\pi i\xi\cdot x}\hat{g}(x)}dx = \overline{g(\xi)}.$$

Stoga, po lemi 2.2.10 vrijedi

$$\int f\overline{g} = \int f\hat{h} = \int \hat{f}h = \int \hat{f}\overline{\hat{g}}.$$

Dakle, operator $\mathcal{F}|_{\mathcal{X}}$ čuva $L^2(\mathbb{R})$ skalarni produkt, pa uzimajući $g = f$, dobivamo da je $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$. Po teoremu inverzije 2.2.13 je $\mathcal{F}(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$, pa se operator $\mathcal{F}|_{\mathcal{X}}$ proširuje po neprekidnosti do unitarnog izomorfizma na L^2.

Preostaje pokazati da se ovo proširenje slaže sa $\mathcal{F}$ na svim $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. No kako imamo da je $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ te $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$ kao u dokazu teorema inverzije 2.2.13, dobivamo da je $f * g_t \in L^1(\mathbb{R})$ po Youngovoj nejednakosti (2.3) te $(\widehat{f * g_t}) \in L^1(\mathbb{R})$ jer vrijedi $(\widehat{f * g})(\xi) = e^{-\pi t^2|\xi|^2}\hat{f}(\xi)$ i ograničenosti $\hat{f}$.

Zaključno, vrijedi da je $f * g_t \in \mathcal{X}$, te po teoremu 2.2.12 $f * g_t \to f$ u normi od $L^1(\mathbb{R})$ i $L^2(\mathbb{R})$. Dakle, $(\widehat{f * g_t}) \to \hat{f}$ uniformno te u $L^2(\mathbb{R})$ normi, pa je time dokaz gotov.

□

Plancherelov teorem 2.2.21 nam pokazuje da je operator $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ izometrija. Izometrija čuva skalarni produkt, pa za $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ vrijedi *Parsevalova formula*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi. \tag{2.7}$$

Kao posljedicu Plancherelovog teorema, dobivamo i sljedeće korisne jednakosti.

Lema 2.2.22. *Ako je funkcija $f \in L^2(\mathbb{R})$ takva da je $f' \in L^2(\mathbb{R})$, tada vrijedi*

$$\hat{f'}(\xi) = 2\pi i\xi\hat{f}(\xi).$$

Pritom se derivaciju može shvatiti ili u klasičnom smislu, ili u smislu temperiranih distribucija.

Dokaz. Koristit ćemo definiciju Fourierove transformacije i derivacije za temperirane dristribucije. Uzmimo proizvoljnu Schwartzovu funkciju $\psi \in \mathcal{S}$. Višestrukom primjenom propozicije 2.2.9. možemo pisati

$$\int \hat{f'}(\xi)\psi(\xi)d\xi = -\int f(x)(\hat{\psi})'(x)dx = -\int f(x)(-2\pi i\xi\psi(\xi))\hat{\ }(x)dx = \int \hat{f}(\xi)2\pi i\xi\psi(\xi)d\xi.$$

Time smo dokazali da tražena tvrdnja vrijedi u smislu distribucija. Još možemo iskoristiti poznatu činjenicu da se distribucijska derivacija podudara s klasičnom derivacijom kad ona postoji kao lokalno integrabilna funkcija. □

Lema 2.2.23. *Neka su $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ takve da je $f', g' \in L^2(\mathbb{R})$. Tada vrijedi*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x)dx. \tag{2.8}$$

Dokaz. Koristeći Parsevalovu formulu (2.7) i prethodnu lemu 2.2.22, dobivamo

$$\langle f', \bar{g}\rangle = \langle \widehat{f'}, \widehat{\bar{g}}\rangle = \int 2\pi i\xi \hat{f}(\xi)\widehat{\bar{g}}(\xi)d\xi = \langle \hat{f}, \widehat{\bar{g}'}\rangle = \langle f, \bar{g}'\rangle.$$

□

Lema 2.2.23 je svojevrsna generalizacija klasične formule parcijalne integracije.

2.3 Hamiltonova i kvantna mehanika

Hamiltonova mehanika

U klasičnoj mehanici, prema drugom Newtonovom zakonu kretanje čestice je determinirano običnom diferencijalnom jednadžbom drugog reda, koja uključuje sile koje djeluju na česticu – što znači da kada su nam poznate sve sile, kretanje čestice je u potpunosti predodređeno položajem i brzinom u danom trenutku.

Drugim riječima, položaj i brzina čestice potpuno opisuju "stanje" čestice. U Hamiltonovoj se mehanici, s druge strane, preferira zamjena brzine momentom, koji je jednak umnošku mase i brzine čestice. Stoga, za takozvani **fazni prostor** uzimamo $\mathbb{R}^{2n}$ sa koordinatama

$$(p, q) = (p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n)$$

gdje je p vektor momenta čestice, dok je q vektor položaja.
Fizikalne observable su funkcije realne vrijednosti na faznom prostoru. Dakle, svaka je observabla funkcija pozicije i momenta.

Za više detalja o Hamiltonovoj mehanici i strogom matematičkom formalizmu, pogledati [2].

Kvantna mehanika

U klasičnoj mehanici, kada se jednom odredi stanje sistema, vrijednost svake observable je potpuno određena. U svijetu kvantne mehanike ovo više ne vrijedi. Naime, za dano stanje sistema observable imaju vjerojatnosnu distribuciju vrijednosti, koja najčešće nije koncentrirana u jednoj točki.

Stoga su matematičke postavke sljedeće. Prostor stanja kvantnog sistema je projektivni Hilbertov prostor $P\mathcal{H}$, tj. skup svih kompleksnih pravaca kroz ishodište u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Standardno, smatramo da su stanja dana jediničnim vektorima u $\mathcal{H}$, pri čemu dva vektora definiraju isto stanje kada su skalarni višekratnik jedan drugog.

Observable su projektorske Borelove mjere na $\mathbb{R}$, tj. preslikavanja Π sa Borelovih skupova u $\mathbb{R}$ na ortogonalne projekcije na $\mathcal{H}$ takve da vrijedi $\Pi(\mathbb{R}) = I$ te ako su $E_1, E_2, ...$ disjuktni Borelovi skupovi, tada vrijedi

$$\Pi(E_j)\Pi(E_k) = 0, \ za \ j \neq k, \quad \sum_j \Pi(E_j) = \Pi\Big(\bigcup_j E_j\Big). \tag{2.9}$$

Ako je $\mathcal{R}(E)$ slika of $\Pi(E)$, tada je (2.9) ekvivalentno sa

$$\mathcal{R}(E_j) \perp \mathcal{R}(E_k), \ za \ j \neq k, \quad \bigoplus_j \mathcal{R}(E_j) = \mathcal{R}\Big(\bigcup_j E_j\Big).$$

Ako je Π gore navedena mjera te $u \in \mathcal{H}$ jedinični vektor, tada je $E \to \langle \Pi(E)u, u\rangle$ vjerojatnosna mjera na $\mathbb{R}$, te označava vjerojatnosnu distribuciju observable Π u stanju u.

U nastavku navodimo spektralni teorem za hermitske operatore.

Teorem 2.3.1. *(Spektralni teorem) Neka je A hermitski operator na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada postoji prostor mjere (X, μ), izmjeriva funkcija $\phi : X \to \mathbb{R}$ te unitarno preslikavanje $U : \mathcal{H} \to L^2(X, \mu)$ takvo da vrijedi*

$$UAU^{-1}\psi(x) = \phi(x)\psi(x), \quad \psi \in L^2(X, \mu).$$

Dokaz. Dokaz se nalazi u [2]. □

Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija, tada je operator $f(A)$ definiran sa

$$Uf(A)U^{-1}\psi(x) = f(\phi(x))\psi(x),$$

pri čemu je domena od $f(A)$ skup svih $U^{-1}\psi$ takvih da su $\psi, (f \circ \phi)\psi \in L^2(X, \mu)$.

Uzmemo li karakterističnu funkciju skupa $E \subset \mathbb{R}$, $f = \chi_E$, dobivamo *spektralne projekcije* za A:

$$P(E) = \chi_E(A).$$

Ovo su ortogonalne projekcije takve da vrijedi $P(\mathbb{R}) = I$. Također, ako su $E_1, E_2, ...$ disjunktni skupovi, tada vrijedi

$$P(E_j)P(E_k) = 0, \ za \ j \neq k, \quad P\Big(\bigcup_j E_j\Big) = \sum_j P(E_j).$$

Observablu A dobivamo iz projekcija $P(E)$ sljedećom formulom

$$A = \int \lambda dP(\lambda).$$

Dakle, možemo općenito promatrati observable kao hermitske operatore. Primijetimo da ako je A hermitski operator, te u jedinični vektor u domeni od A, očekivanje observable A u stanju u dano je sa

$$\int \lambda \langle d\Pi(\lambda)u, u\rangle = \langle Au, u\rangle.$$

Vjerojatnosna distribucija od A u stanju u je koncentrirana u jednoj točki λ točno onda kada je u svojstveni vektor od A sa svojstvenom vrijednošču λ. Nadalje, ako je spektar od A diskretan, tako da A ima ortonormiranu svojstvenu bazu $\{e_j\}$ sa svojstvenim vrijednostima $\{\lambda_j\}$, vjerojatnosna distribucija od A u bilo kojemu stanju dana je sa

$$E \mapsto \sum_{\lambda_j \in E} |\langle u, e_j\rangle|^2.$$

Mi ćemo uzimati prostor $L^2(\mathbb{R}^n)$ za naš Hilbertov prostor $\mathcal{H}$. Proučavamo sistem čestice koja se kreće u n-dimenzionalnom prostoru, te za funkciju $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ takvu da vrijedi $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$, vrijednost $|f|^2$ reprezentira vjerojatnosnu gustoću položaja čestice u stanju f. Nadalje, za skup $F \subset \mathbb{R}^n$, vjerojatnost da će se čestica naći upravo u skupu F je dana vrijednošču $\int_F |f|^2$. Dakle, za skup $E \subset \mathbb{R}$, vjerojatnost da x_j leži u skupu E je dana s

$$\int_{\{x_j \in E\}} |f(x)|^2 dx, \tag{2.10}$$

pri čemu x_j reprezentira j–tu koordinatu vektora položaja promatrane čestice.

Sada vidimo da su projektorske mjere Π_j dane tako da $\Pi_j(E)$ djeluje kao množenje karakterističnom funkcijom skupa $\{x \colon x_j \in E\}$. Kako hermitske operatore $Q_1, ..., Q_n$ možemo identificirati s odgovarajućim klasičnim koordinatnim funkcijama $q_1, ..., q_n$, operator

$$Q_j = \int \lambda d\Pi_j(\lambda), \tag{2.11}$$

je zapravo množenje j–tom koordinatnom funkcijom. Dakle, kvantna observabla položaja Q_j je kao hermitski operator definirana za sve $f \in L^2$ takve da je $x_j f \in L^2$ na sljedeći način:

$$Q_j f(x) = x_j f(x). \tag{2.12}$$

Promotrimo sada što je s kvantnom opservablom momenta. Pokazuje se da su svojstvene funkcije momenta funkcije $e_\xi = e^{2\pi i x \xi}$, gdje je moment od e_ξ dan sa $h\xi$, pri čemu je h Planckova konstanta. Funkcije e_ξ nisu elementi prostora L^2, već tvore takozvanu *neprekidnu ortonormiranu bazu* tako da vrijedi:

$$\langle e_{\xi_1}, e_{\xi_2} \rangle = \int e^{2\pi i(\xi_1 - \xi_2)x} dx = \delta(\xi_1 - \xi_2).$$

Nadalje, vrijedi formula inverzije

$$f = \int \hat{f}(\xi) e_\xi d\xi = \int \langle f, e_\xi \rangle e_\xi d\xi,$$

u kojoj prepoznajemo teorem 2.2.13.

Kao i prije, analognim razmišljanjem kao u (2.10) i (2.11), zaključujemo da je u stanju f vjerojatnost da j–ta komponenta momenta leži u E jednaka

$$\int_{\{h\xi_j \in E\}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Dakle, hermitski operator P_j koji reprezentira kvantnu observablu momenta koja odgovara klasičnoj observabli p_j je dan sa

$$(\widehat{P_j f})(\xi) = h\xi_j \hat{f}(\xi),$$

tj. sa

$$P_j = h\mathcal{F}^{-1} Q_j \mathcal{F}.$$

Stoga, na kraju zbog relacije (2.4) imamo da je operator P_j dan sa

$$P_j = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{2.13}$$

Napomenimo još da za operatore P_j i Q_j vrijede takozvane *kanonske komutacijske relacije*:

$$[P_j, P_k] = P_j P_k - P_k P_j = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_j} =$$

$$= \frac{h^2}{(2\pi i)^2}\frac{\partial}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{h^2}{(2\pi i)^2}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} = 0,$$

$$[Q_j, Q_k] = Q_jQ_k - Q_kQ_j = \int \lambda d\Pi_j(\lambda) \int \lambda d\Pi_k(\lambda) - \int \lambda d\Pi_k(\lambda) \int \lambda d\Pi_j(\lambda) = 0,$$

$$[P_j, Q_k] = P_jQ_k - Q_kP_j = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_j}x_k - x_k\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{h}{2\pi i}\delta_{jk}I. \tag{2.14}$$

Kvantizacija

Prilikom promatranja problema kvantizacije, zanima nas uspostavljanje korespondencije između klasičnih i kvantnih observabli $f \mapsto A_f$, tj. između funkcija na $\mathbb{R}^{2n}$ i hermitskih operatora na $L^2(\mathbb{R}^n)$. Pritom se svojstva klasičnih observabli prenose na kvantne koliko je moguće u skladu s vjerojatnosnom interpretacijom kvantnih observabli.

Dakle, proces kvantizacije $f \mapsto A_f$ idealno bi morao imati sljedeća svojstva:

1. Prirodno je vektore položaja i momenta q i p identificiti s operatorima Q_j i P_j definirane sa (2.12) i (2.13). U slučaju da imamo konstantnu funkciju $f \equiv c$, prirodno je da ju u kvantnoj mehanici identificiramo s operatorom cI, pri čemu je $c \in \mathbb{R}$. Dakle, imamo osnovne identifikacije:

$$A_{q_j} = Q_j, \quad A_{p_j} = P_j, \quad A_c = cI. \tag{2.15}$$

2. Neka su sa f i g dane klasične observable. Tada je očekivanje od A_{f+g} u bilo kojem stanju u jednako zbroju očekivanja od A_f i A_g, tj. vrijedi jednakost

$$\langle A_{f+g}u, u\rangle = \langle A_f u, u\rangle + \langle A_g u, u\rangle. \tag{2.16}$$

U slučaju da je A hermitski operator, dijagonalni matrični elementi $\langle Au, u\rangle$ određuju sve matrične elemente $\langle Au, v\rangle$, te stoga i operator A, zbog identiteta polarizacije:

$$\langle Au, v\rangle = \frac{1}{4}\langle A(u+v), u+v\rangle - \frac{1}{4}\langle A(u-v), u-v\rangle + \frac{i}{4}\langle A(u+iv), u+iv\rangle - \frac{i}{4}\langle A(u-iv), u-iv\rangle.$$

Dakle, imamo identifikaciju operatora

$$A_{f+g} = A_f + A_g. \tag{2.17}$$

3. Neka je $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija, $E \subset \mathbb{R}$ skup te r vjerojatnosno određena vrijednost. Vjerojatnost da vrijedi $\psi(r) \in E$ je jednaka vjerojatnosti da je $r \in \psi^{-1}(E)$. Dakle, za klasičnu observablu f te $A_f = \int \lambda d\Pi_f(\lambda)$, spektralne projekcije za $A_{\psi\circ f}(E)$ bi trebale biti jednake $\Pi_{\psi\circ f}(E) = \Pi_f(\psi^{-1}(E))$. Međutim, ovo su upravo spektralne projekcije operatora $\psi(A_f)$. Dakle, imamo jednakost operatora

$$A_{\psi\circ f} = \psi(A_f). \tag{2.18}$$

4. Neka su sa f i g dane klasične observable. Zanima nas kvantna observabla pridružena umnošku klasičnih varijabli, tj. A_{fg}. Promotrimo li jednostavne slučajeve jednakosti (2.18), dobivamo relacije

$$A_{cf} = cA_f, \quad c \in \mathbb{R}, \quad A_{f^2} = (A_f)^2.$$

Uzimajući sada zajedno relacije (2.17) i (2.18) u obzir, dobivamo relaciju za kvantnu observablu pridruženu umnošku klasičnih observabli f i g:

$$(A_f)^2 + A_f A_g + A_g A_f + (A_g)^2 = (A_f + A_g)^2 = (A_{f+g})^2 = A_{(f+g)^2} = (A_f)^2 + 2A_{fg} + (A_g)^2$$

$$\Longrightarrow A_{fg} = \frac{1}{2}(A_f A_g + A_g A_f). \tag{2.19}$$

5. Uspostavljamo korespodenciju kvantnih i klasičnih observabli u skladu s (2.14) i (2.15), tako da je konstantna prirodno jednaka $\frac{h}{2\pi i}$. Dakle, vrijedi:

$$[A_f, A_g] = \frac{h}{2\pi i} A_{\{f,g\}}. \tag{2.20}$$

Sada kada smo uspostavili idealna svojstva procesa kvantizacije $f \to A_f$, prirodno se postavlja pitanje možemo li uopće efektivno provesti ovaj proces i za koliko svojstava možemo očekivati da će biti ispunjeno?

Zapravo, tražimo samo da preslikavanje $f \mapsto A_f$ bude linearno, tj. da vrijedi jednostavan slučaj trećeg kvantizacijskog svojstva (2.18) $A_{cf} = cA_f$, te da to preslikavanje zadovoljava relacije (2.15). Pokazuje se [2] da ne postoji preslikavanje koje zadovoljava svojstvo (2.18) jače od (2.19), ili koje bi zadovoljavalo svojstvo (2.20).

Međutim, treba imati na umu da se mogu konstruirati kvantizacijski procesi koji zadovoljavaju (2.18), (2.19) i (2.20) u smislu aproksimacije za slučaje velikog broja observabli. Za detalje pogledati u [2].

Poglavlje 3

Principi neodređenosti za jednu funkciju

U ovom poglavlju iskazat ćemo i dokazati nekoliko varijanti principa neodređenosti za jednu funkciju, gdje prvo iznosimo *kvalitativni princip neodređenosti*, rezultat vezan uz neprekidnu funkciju na $\mathbb{R}^n$ s kompaktnim nosačem i njenu Fourierovu transformaciju $\hat{f}$.

Nadalje, dokazujemo *Heisenbergov princip neodređenosti* te općenitiju, *operatorsku formulaciju principa neodređenost*i.

Na kraju, iskazujemo i dokazujemo *entropijski princip neodređenosti* te promatramo odnos entropije i varijance.

3.1 Kvalitativni princip neodređenosti

U nastavku navodimo potrebne definicije i teoreme - rezultate kompleksne analize, potrebne pri dokazivanju kvalitativnog principa neodređenosti.

Definicija 3.1.1. *Za funkciju $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kažemo da je holomorfna ako je derivabilna i derivacija f' je neprekidna na Ω. Za funkciju f kažemo da je holomorfna u točki z_0 ako postoji okolina točke z_0 na kojoj je f holomorfna. Za funkciju koja je holomorfna na čitavoj kompleksnoj ravnini kažemo da je cijela.*

Definicija 3.1.2. *Krivulja u $\mathbb{R}^n$ je uređen par $(\Sigma, \mathcal{G})$ koji se sastoji od parametrizabilnog skupa $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ i neke klase $\mathcal{G}$ usporedivih parametrizacija. Svaku parametrizaciju γ nazivamo parametrizacijom krivulje.*

Definicija 3.1.3. *Neka je $D \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ i $K_\epsilon(z_0)$ krug oko točke z_0 radijusa $\epsilon > 0$. Tada je z_0 točka gomilišta ako svaka okolina $K_\epsilon(z_0) \setminus z_0$ točke z_0 sadrži točku iz skupa D koja je različita od z_0, tj. vrijedi:*

$$(\forall \epsilon > 0)((K_\epsilon(z_0) \setminus z_0) \cap S) \neq \emptyset.$$

Definicija 3.1.4. *Neka je $D \subset \mathbb{C}$ povezana domena, tj. otvoreni skup koji se ne može se prikazati kao unija dva neprazna skupa. Neka su γ i δ dva puta, tj. neprekidna preslikavanja $\gamma\colon [a,b] \to D$, $\delta\colon [c,d] \to D$ takva da vrijedi $\gamma(a) = \gamma(c)$ i $\delta(b) = \delta(d)$. Domenu D nazivamo jednostavno povezanom ako postoji neprekidna funkcija $H\colon [0,1] \times [0,1] \to D$ takva da vrijedi*

1. $H(t,0) = \gamma(t)$, *za sve* $t \in [0,1]$,
2. $H(t,1) = \delta(t)$, *za sve* $t \in [0,1]$.

Definicija 3.1.5. *Neka su $C_1, ..., C_n$ usmjerene glatke krivulje. Neka su C_i parametrizirane glatkim putevima $\gamma_i \to [a_i, b_i] \to \mathbb{C}$, za sve $i \in \{1, ..., n\}$. Pretpostavimo da za sve $i \in \{1, ..., n-1\}$ vrijedi $\gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(a_{i+1})$. Tada konačni niz $C_1, ..., C_n$ nazivamo konturom. Konturu C nazivamo zatvorenom ako vrijedi $\gamma_1(a_1) = \gamma_n(b_n)$.*
Konturu C nazivamo jednostavnom ako vrijedi

1. *Za sve* $i, j \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$, $t_1 \in [a_i, b_i\rangle, t_2 \in [a_j, b_j\rangle$ *vrijedi* $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.
2. *Za sve* $k \in \{1, ..., n\}, t \in [a_k, b_k\rangle$ *gdje vrijedi* $k \neq 1$ *ili* $t \neq a_1$, *imamo* $\gamma_k(t) \neq \gamma_n(b_n)$.

Definicija 3.1.6. *Neka je funkcija f realna funkcija na $\mathbb{R}$. Kažemo da funkcija ima kompaktan nosač ako postoji kompaktan skup K takav da je $f(x) = 0$, za sve $x \notin K$.*

Teorem 3.1.7. *(Morerin teorem) Neka je D jednostavno povezana domena u $\mathbb{C}$ te neka je $f : D \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija. Ako za svaku jednostavnu zatvorenu konturu γ u D vrijedi*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0,$$

tada je f analitička na D.

Dokaz. Dokaz se nalazi u [11]. □

Teorem 3.1.8. *(Teorem o jedinstvenosti holomorfne funkcije) Neka je skup $\Omega \subset \mathbb{C}$ otvoren i povezan, a f i g holomorfne funkcije. Ako se f i g podudaraju na nekom skupu koji ima gomilište u Ω, onda je $f = g$ na Ω.*

Dokaz. Dokaz se nalazi u [11]. □

Napokon, u nastavku iskazujemo i dokazujemo kvalitativni princip neodređenosti.

Teorem 3.1.9. *(Kvalitativni princip neodređenosti)*
Neka je f neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$ te pretpostavimo da f ima kompaktni nosač. Ako vrijedi da $\hat{f}$ ima kompaktan nosač, tada je $f = 0$.

Dokaz. Promotrimo sljedeću funkciju kompleksne varijable danu sa

$$\Theta : z \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi i t\cdot z}dt.$$

Primijenimo li Morerin teorem 3.1.7, ili diferencirajući pod znakom integrala, vidimo da je Θ cijela funkcija, tj. holomorfna na cijeloj kompleksnoj ravnini. Pri ovom argumentu vrijedi napomenuti da koristimo činjenicu da f ima kompaktni nosač. Da nije tako, imali bi problema s konvergencijom integrala.

Uz $z = x + iy$, radimo restrikciju od Θ na skup gdje je $y = 0$. Tada vrijedi

$$\Theta(x + i0) = \hat{f}(x).$$

Zbog činjenice da $\hat{f}$ iščezava na cijeloj zraci, dobivamo da cijela holomorfna funkcija Θ iščezava na zraci, tj. na skupu s unutrašnjim gomilištem. Tada je $\Theta \equiv 0$ po teoremu jedinstvenosti za holomorfne funkcije 3.1.8. Konačno po korolaru 2.2.14 dobivamo da je $f = 0$.

□

3.2 Heisenbergov princip neodređenosti

Definiramo operatore položaja X i momenta D na sljedeći način:

$$Xf(t) := tf(t), \quad Df(t) := \frac{1}{2\pi i}f'(t).$$

Iz Propozicije 2.2.9 slijedi jednakost

$$\widehat{Df}(\tau) = \tau\hat{f}(\tau).$$

Vrijednošću

$$\frac{\|Xf\|_2}{\|f\|_2} = \left(\frac{\int t^2|f(t)|^2 d\tau}{\int |f(t)|^2 d\tau}\right)^{\frac{1}{2}}$$

mjerimo srednje odstupanje od $|t|$, tj. srednje odstupanje varijable t od ishodišta. Na isti način

$$\frac{\|Df\|_2}{\|f\|_2} = \left(\frac{\int \tau^2|\hat{f}(\tau)|^2 dt}{\int |f(\tau)|^2 dt}\right)^{\frac{1}{2}}$$

mjeri srednje odstupanje varijable frekvencije τ od ishodišta.

Važno je uočiti da su X i D hermitski operatori, tj. da vrijedi

$$\langle Xf, g\rangle = \langle f, Xg\rangle, \ \ \textit{za sve } f, g \textit{ tako da su } f, g, Xf, Xg \in L^2(\mathbb{R}),$$

$$\langle Df, g\rangle = \langle f, Dg\rangle, \ \ \textit{za sve } f, g \textit{ tako da su } f, g, Df, Dg \in L^2(\mathbb{R}).$$

Primjetimo da operatori X i D ne komutiraju, tj. da vrijedi

$$[D, X]f(t) = DXf(t) - XDf(t) = D\big(tf(t)\big) - X\big(\frac{1}{2\pi i}f'(t)\big) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}f(t) + \frac{1}{2\pi i}tf'(t) - \frac{1}{2\pi i}tf'(t) = \frac{1}{2\pi i}f(t).$$

Ovu relaciju zapisujemo kao

$$[D, X] = \frac{1}{2\pi i}I.$$

Promotrimo u ovom kontekstu sljedeći teorem.

Teorem 3.2.1. *(Heisenbergov princip neodređenosti) Za funkciju f takvu da je $f, Xf, Df \in L^2(\mathbb{R})$ vrijedi sljedeća nejednakost,*

$$\frac{\|Xf\|_2}{\|f\|_2}\frac{\|Df\|_2}{\|f\|_2} \geq \frac{1}{4\pi},$$

gdje jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$f(x) = ce^{2\pi ibx}e^{-\pi r(x-a)^2}, \ \ \textit{za neke } a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}, \ \ r > 0.$$

Dokaz. Promatramo broj $\|(\alpha X + i\beta D)f\|_2^2$, gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ realni brojevi koje ćemo naknadno odabrati. Imamo dakle, koristeći izvedene relacije za X i D,

$$0 \leq \|(\alpha X + i\beta D)f\|_2^2 = \langle(\alpha X + i\beta D)f, (\alpha X + i\beta D)f\rangle = \langle(\alpha X - i\beta D)(\alpha X + i\beta D)f, f\rangle$$

$$= \langle\alpha^2X^2 + \beta^2D^2 + \alpha\beta i(XD - DX)f, f\rangle = \alpha^2\langle Xf, Xf\rangle + \beta^2\langle Df, Df\rangle - \langle\frac{\alpha\beta}{2\pi}f, f\rangle =$$

$$= \alpha^2\|Xf\|_2^2 + \beta^2\|Df\|_2^2 - \frac{\alpha\beta}{2\pi}\|f\|_2^2.$$

Direktno slijedi

$$\alpha^2\|Xf\|_2^2 + \beta^2\|Df\|_2^2 \geq \frac{\alpha\beta}{2\pi}\|f\|_2^2.$$

Uz odabir $\alpha := \|Df\|_2$ i $\beta := \|Xf\|_2$, dobivamo

$$2\|Xf\|_2^2\|Df\|_2^2 \geq \frac{\|Df\|_2\ \|Xf\|_2}{2\pi}\|f\|_2^2,$$

iz čega tvrdnja direktno slijedi. Primjetimo da je jednakost ispunjena ako i samo ako vrijedi

$$0 = \|(\alpha X + i\beta D)f\|_2.$$

Rješavanjem gornje jednadžbe dobivamo diferencijalnu jednadžbu

$$\alpha t f(t) + i\beta f'(t) = 0,$$

čije je rješenje funkcija f dana sa

$$f(x) = ce^{2\pi ibx}e^{-\pi r(x-a)^2},\ \ \textit{za neke } a, b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{C},\ \ r > 0.$$

□

Moduliramo li funkciju f, možemo generalizirati teorem 3.2.1. Dobivamo nejednakost

$$\frac{\|Xf\|_2}{\|f\|_2}\frac{\|(D-\tau_0)f\|_2}{\|f\|_2} \geq \frac{1}{4\pi},$$

za neki $\tau_0 \in \mathbb{R}$. Translacijom funkcije f možemo dalje generalizirati kako bismo dobili relaciju

$$\frac{\|(X-t_0)f\|_2}{\|f\|_2}\frac{\|(D-\tau_0)f\|_2}{\|f\|_2} \geq \frac{1}{4\pi},$$

za neki $t_0 \in \mathbb{R}$.

Definicija 3.2.2. *Za vjerojatnosnu distribuciju s gustoćom g očekivanje je dano sa*

$$\mu := \int_{\mathbb{R}} xg(x)dx,$$

a potom varijancu definiramo formulom

$$V(g) := \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 g(x)dx.$$

Ako je f funkcija takva da je $\|f\|_2 = 1$, onda po Plancherelovom teoremu 2.2.21 imamo

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = 1,$$

tj. funkcije $|f|^2$ i $|\hat{f}|^2$ su doista vjerojatnosne distribucije.

Ako sada postavimo da su vrijednosti t_0, τ_0 jednake očekivanju pozicije i momenta

$$t_0 := \langle Xf, f\rangle = \int t|f(t)|^2 dt, \quad \tau_0 := \langle Df, f\rangle = \int \tau|\hat{f}(\tau)|^2 d\tau,$$

tada vrijednost $\|(X - t_0 f)\|_2$ možemo promatrati kao standardnu devijaciju varijable t (analogno vrijedi za varijablu τ).

Zato se onda Heisenbergov princip neodređenosti može zapisati:

$$\sqrt{V(|f|^2)}\sqrt{V(|\hat{f}|^2)} \geq \frac{1}{4\pi}$$

za svaku funkciju $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ normaliziranu tako da je $\|f\|_2 = 1$.

3.3 Operatorska formulacija principa neodređenosti

Poopćeni princip neodređenosti tvrdi da za dvije kvantne observable A i B, tj. hermitske operatore, vjerojatnosna distribucija A i B ne može biti koncentrirana blizu izolirane točke u bilo kojem stanju u takvom da je $\langle (AB - BA)u, u\rangle \neq 0$.

Preciznije, kada je μ vjerojatnosna mjera na $\mathbb{R}$, uzimamo kao i prije drugi moment od μ oko $a \in \mathbb{R}$,

$$\Big[\int (\lambda - a)^2 d\mu(\lambda)\Big]^{\frac{1}{2}},$$

kao mjeru nekoncetriranosti μ u a. Kada je μ distribucija observable $A = \int \lambda d\Pi(\lambda)$ u stanju u, tj. $\mu(E) = \langle \Pi(E)u, u\rangle$, tada vrijedi

$$\Big[\int (\lambda - a)^2 d\mu(\lambda)\Big]^{\frac{1}{2}} = \langle (A - aI)^2 u, u\rangle^{\frac{1}{2}} = \|(A - aI)u\|,$$

pri čemu je I jedinični operator.

Formuliramo poopćeni princip neodređenosti u sljedećem teoremu.

Teorem 3.3.1. *Ako su A i B hermitski operatori na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, tada vrijedi*

$$\|(A - aI)u\|\,\|(B - bI)u\| \geq \frac{1}{2}|\langle (AB - BA)u, u\rangle| \tag{3.1}$$

za sve $u \in Dom(AB) \cap Dom(BA)$ te za sve $a, b \in \mathbb{R}$. Jednakost vrijedi jedino u slučaju kada su $(A - a)u$ i $(B - b)u$ čisto imaginarni skalarni višekratnici jedan drugoga.

Dokaz. Vrijedi

$$\langle (AB - BA)u, u\rangle = \langle [(A - Ia)(B - bI) - (B - bI)(A - aI)]u, u\rangle =$$
$$= \langle (B - bI)u, (A - aI)u\rangle - \langle (A - aI)u, (B - bI)u\rangle = 2i\, Im\langle (B - bI)u, (A - aI)u\rangle,$$

te je stoga

$$|\langle (AB - BA)u, u\rangle| \leq 2|\langle (B - bI)u, (A - aI)u\rangle| \leq 2\|(A - aI)u\|\, \|(B - bI)u\|.$$

Prva nejednakost postaje jednakost jedino u slučaju kada je $\langle (B-bI)u, (A-aI)u\rangle$ imaginiran, dok druga nejednakost postaje jednakost točno onda kada su $(A - aI)u$ i $(B - bI)u$ linearno zavisni. □

Primijenimo li formulu (3.1) na operatore položaja X i momenta D na $L^2(\mathbb{R})$, dobivamo korolar 3.3.2.

Korolar 3.3.2. *Ako je $u \in L^2(\mathbb{R})$, te $a, b \in \mathbb{R}$, imamo*

$$\|(X - a)u\|_2\, \|(D - b)u\|_2 \geq \frac{1}{4\pi}\|u\|_2^2 \tag{3.2}$$

gdje jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$u(x) = ce^{2\pi ibx}e^{-\pi r(x-a)^2}, \quad za\ neke\ a, b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{C}, \quad r > 0.$$

3.4 Entropijski (Hirschmanov) princip neodređenosti

Definicija 3.4.1. *Za vjerojatnosnu distribuciju s gustoćom g Shannonova entropija je dana formulom*

$$H(g) := -\int_{\mathbb{R}} g(x)\log g(x) dx.$$

1957. godine Hirschman je promatrao funkciju f i njezinu Fourierovu transformaciju $\hat{f}$ u $L^2(\mathbb{R})$ te proučavao nejednakosti vezane uz odgovarajuće Shannonove entropije. Prisjetimo se da po Plancherelovom identitetu (2.7) vrijede jednakosti

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = 1.$$

Pokazao je da za sve takve funkcije, zbroj Shannonovih entropija nenegativan.

Teorem 3.4.2. *Za sve funkcije f, $\hat{f}$ takve da $H(|f|^2)$ i $H(|\hat{f}|^2)$ imaju smisla, vrijedi nejednakost*

$$H(|f|^2) + H(|\hat{f}|^2) = -\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \log |f(x)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 \log |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \geq 0. \tag{3.3}$$

Dokaz. Dokaz ne navodimo jer ćemo uskoro dokazati i nešto jaču tvrdnju u teoremu 3.4.7 □

Hirschman i Everett su pretpostavili, a W. Beckner je 1975. godine [1] dokazao bolju ocjenu:

$$H(|f|^2) + H(|\hat{f}|^2) \geq \ln(e/2). \tag{3.4}$$

U ostatku odjeljka ćemo i mi dokazati tu nejednakost, koja se često naziva *entropijski princip neodređenosti*.

Kako bismo dokazali gornju tvrdnju, uvodimo (q,p)-normu Fourierove transformacije

Definicija 3.4.3. *Neka je $p \in \mathbb{R}$ takav da je $1 < p \leq 2$ te $q \in \mathbb{R}$ njegov konjugirani eksponent, tj. $q = \frac{p}{p-1}$. (q,p)-norma Fourierove transformacije $\hat{f} \in L^q(\mathbb{R})$ funkcije $f \in L^p(\mathbb{R})$ definira se kao:*

$$\|\mathcal{F}\|_{q,p} = \sup_{f \in L^p(\mathbb{R})} \frac{\|\mathcal{F} f\|_q}{\|f\|_p}. \tag{3.5}$$

1975. godine Beckner [1] dokazuje da je vrijednost ove norme jednaka

$$\|\mathcal{F}\|_{q,p} = \sqrt{\frac{p^{1/p}}{q^{1/p}}}.$$

Time dobivamo poznatu nejednakost.

Propozicija 3.4.4. *(Babenko-Beckner nejednakost) Neka je $p \in \mathbb{R}$ takav da je $1 < p \leq 2$ te $q \in \mathbb{R}$ njegov konjugirani eksponent, tj. $q = \frac{p}{p-1}$. Za $f \in L^p(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in L^q(\mathbb{R})$, vrijedi nejednakost*

$$\|\mathcal{F} f\|_q \leq \sqrt{\frac{p^{1/p}}{q^{1/q}}} \|f\|_p. \tag{3.6}$$

Dokaz. Dokaz se nalazi u [1].

□

Prije nego iskažemo i dokažemo entropijski princip neodređenosti, uvodimo Rényjieve entropije, kao generalizirane Shannonove entropije, te pokazujemo kako su u graničnom slučaju Rényjieve entropije jednake Shannonovoj.

Definicija 3.4.5. *Za vjerojatnosnu distribiciju s gustoćom g te $\alpha \geq 0$ takav da je $\alpha \neq 1$, Rényijeva entropija je dana formulom*

$$H_\alpha(g) = \frac{1}{1-\alpha} \ln\Big(\int_{\mathbb{R}} g(x)^\alpha dx\Big). \tag{3.7}$$

Propozicija 3.4.6. *Neka su redom dane Shannonova i Rényijeva entropija H i H_α. Za vjerojatnosnu distribuciju s gustoćom g vrijedi:*

$$\lim_{\alpha \to 1} H_\alpha(g) = H(g).$$

Dokaz. Rényijeva entropija je dana sa 3.7. Za vrijednost $\alpha = 1$, ona je nedefinirana i daje izraz oblika $\frac{0}{0}$. Stoga primjenjujemo L'Hôpitalovo pravilo

$$\lim_{\alpha \to a} \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \lim_{\alpha \to a} \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)},$$

gdje je u našem slučaju $a = 1$. Uz oznake

$$f(\alpha) = \ln\Big(\int_{\mathbb{R}} g(x)^\alpha dx\Big), \quad g(\alpha) = 1 - \alpha,$$

dobivamo jednakosti

$$g'(\alpha) = -1,$$

$$f'(\alpha) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} g(x)^\alpha dx} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\alpha} g(x)^\alpha dx = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} g(x)^\alpha dx} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\alpha} e^{\alpha \ln(g(x))} dx =$$

$$= \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} g(x)^\alpha dx} \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha \ln(g(x))} \frac{d}{d\alpha} \alpha \ln(g(x)) dx = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} g(x)^\alpha dx} \int_{\mathbb{R}} g(x)^\alpha \ln(g(x)) dx.$$

Sada u graničnom slučaju dobivamo traženu relaciju

$$\lim_{\alpha \to 1} H_\alpha(g) = \frac{1}{1-\alpha} \ln\Big(\int_{\mathbb{R}} g(x)^\alpha dx\Big) = -\int_{\mathbb{R}} g(x) \ln(g(x)) = H(g),$$

čime smo pokazali tvrdnju propozicije.

□

Teorem 3.4.7. *(Entropijski princip neodređenosti) Za sve funkcije f, $\hat{f}$ takve da $H(|f|^2)$ i $H(|\hat{f}|^2)$ imaju smisla, vrijedi nejednakost*

$$H(|f|^2) + H(|\hat{f}|^2) \geq \ln \frac{e}{2}.$$

Dokaz. Neka je $2\alpha = p$ i $2\beta = q$ tako da je $1/\alpha + 1/\beta = 2$, te $1/2 < \alpha < 1 < \beta$. Sada iz propozicije 3.4.4 imamo

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^{2\beta} d\xi \right)^{1/2\beta} \leq \frac{(2\alpha)^{1/4\alpha}}{(2\beta)^{1/4\beta}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{2\alpha} dx \right)^{1/2\alpha}. \tag{3.8}$$

Kvadriramo i djelujemo logaritamskom funkcijom na obje strane nejednakosti (3.8), te dobivamo nejednakost

$$\frac{1}{\beta} \ln \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^{2\beta} d\xi \right) \leq \frac{1}{2} \ln \frac{(2\alpha)^{1/\alpha}}{(2\beta)^{1/\beta}} + \frac{1}{\alpha} \log \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{2\alpha} dx \right). \tag{3.9}$$

Primijetimo da vrijedi niz jednakosti

$$\frac{\beta}{1-\beta} = \frac{\frac{\alpha}{2\alpha-1}}{1 - \frac{\alpha}{2\alpha-1}} = \frac{\frac{\alpha}{2\alpha-1}}{\frac{\alpha-1}{2\alpha-1}} = -\frac{\alpha}{1-\alpha}. \tag{3.10}$$

Pomnožimo li sada obje strane nejednakosti (3.9) vrijednošću $\frac{\beta}{1-\beta} = -\frac{\alpha}{1-\alpha}$, dobivamo sljedeću nejednakost:

$$\frac{1}{1-\beta} \ln \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^{2\beta} d\xi \right) \geq \frac{\alpha}{2(\alpha-1)} \ln \left(\frac{(2\alpha)^{1/\alpha}}{(2\beta)^{1/\beta}} \right) - \frac{1}{1-\alpha} \ln \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{2\alpha} dx \right). \tag{3.11}$$

Iz posljednje nejednakosti (3.11) dobivamo nejednakost u terminima zbroja Rényijevih entropija H_α i H_β:

$$\frac{1}{1-\alpha} \ln \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{2\alpha} dx \right) + \frac{1}{1-\beta} \ln \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^{2\beta} d\xi \right) \geq \frac{\alpha}{2(\alpha-1)} \ln \frac{(2\alpha)^{1/\alpha}}{(2\beta)^{1/\beta}}$$

$$\Longleftrightarrow H_\alpha(|f|^2) + H_\beta(|\hat{f}|^2) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{\ln \alpha}{\alpha - 1} - \frac{\alpha}{\beta(\alpha-1)} \ln \beta \right) + \frac{\alpha}{2(\alpha-1)} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) \ln 2,$$

pri čemu je

$$H_\alpha(|f|^2) = \frac{1}{1-\alpha} \ln \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{2\alpha} dx \right), \quad H_\beta(|\hat{f}|^2) = \frac{1}{1-\beta} \ln \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{2\beta} dx \right).$$

Uvažavajući jednakosti (3.10) te relacije

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 2 \Longrightarrow \beta = \frac{\alpha}{2\alpha - 1},$$

$$\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}\Big(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\Big) = \frac{\alpha}{2(\alpha-1)}\Big(\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}\Big) = \frac{1}{2(\alpha-1)} \cdot \frac{\alpha - 2\alpha^2 + \alpha}{\beta(2\alpha-1)} = -\frac{2(\alpha^2-\alpha)}{2(\alpha^2-\alpha)} = -1,$$

dobivamo sljedeću nejednakost:

$$H_\alpha(|f|^2) + H_\beta(|\hat{f}|^2) \geq \frac{1}{2}\Big(\frac{\ln\alpha}{\alpha-1} + \frac{\ln\beta}{\beta-1}\Big) - \ln 2. \tag{3.12}$$

Uzmemo li limes $\alpha, \beta \to 1$ u nejednakosti (3.12), dobivamo *Shannonovu entropijsku nejednakost*:

$$H(|f|^2) + H(|\hat{f}|^2) \geq \ln\frac{e}{2},$$

čime smo dokazali tvrdnju teorema.

□

Vrlo važnu ulogu u odnosu varijance i entropije igraju Gaussove ili normalne vjerojatnosne distribucije. Varijacijski račun pokazuje da normalna distribucija maksimizira entropiju za danu varijancu te istovremeno minimizira varijancu za danu entropiju.

Propozicija 3.4.8. *Za vjerojatnosnu funkciju gustoće φ, tj. $\varphi \geq 0$ i $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$, vrijedi ocjena*

$$H(\varphi) \leq \ln\sqrt{2\pi e V(\varphi)}, \tag{3.13}$$

gdje je H Shannonova entropija, a V varijanca. Jednakost vrijedi samo u slučaju kada je φ normalna distribucija.

Dokaz. Dokaz se svodi na traženje uvjetnih ekstrema korištenjem Lagrangeovih multiplikatora. Maksimiziramo $H(\varphi)$ uz uvjete

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1 \quad \text{i} \quad V(\varphi) = \sigma^2.$$

Definiramo Lagrangeovu funkciju s dva Lagrangeova multiplikatora na sljedeći način

$$L = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\ln(\varphi(x))dx - \lambda_0(1 - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx) - \lambda(\sigma^2 - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)(x-\mu)^2 dx),$$

gdje je φ funkcija gustoće s očekivanjem μ. Kada je entropija od φ maksimalna te su zadovoljeni uvjeti normalizacije $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$ i fiksne varijance $V(\varphi) = \sigma^2$, tada će mala varijacija $\delta\varphi(x)$ oko $\varphi(x)$ uzrokovati varijaciju δL oko L koja je jednaka nuli,

$$0 = \delta L = \int_{\mathbb{R}} \delta\varphi(x)(\ln(\varphi(x)) + 1 + \lambda_0 + \lambda(x-\mu)^2)dx.$$

Kako ova jednakost mora vrijediti za svaku dovoljno malenu vrijednosti $\delta\varphi(x)$, izraz u zagradama mora biti jednak nuli. Time dobivamo izraz za φ

$$\ln(\varphi(x)) + 1 + \lambda_0 + \lambda(x-\mu)^2 = 0 \Longrightarrow \varphi(x) = e^{-\lambda_0 - 1 - \lambda(x-\mu)^2}.$$

Uvažavajući uvjete normalizacije, fiksne varijance te formulu za računanje integrala Gaussove funkcije, računamo λ_0 i λ:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-a(x+b)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \text{ za neke } a, b \in \mathbb{R}, \tag{3.14}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_0 - 1 - \lambda(x-\mu)^2} = e^{-\lambda_0 - 1} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda(x-\mu)^2} = 1 \Longrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = e^{\lambda_0 + 1}, \tag{3.15}$$

$$V(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 e^{-\lambda_0 - 1 - \lambda(x-\mu)^2} = \sigma^2,$$

$$\Longleftrightarrow \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 e^{-\lambda(x-\mu)^2} = \sigma^2 e^{\lambda_0 + 1}. \tag{3.16}$$

Koristeći formulu parcijalne integracije te supstituciju $y = x - \mu$, dobivamo:

$$\int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 e^{-\lambda(x-\mu)^2} = \int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-\lambda y^2} = -\frac{1}{2\lambda} y e^{-\lambda y^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda y^2}$$

Primijenimo li L'Hôpitalovo pravilo na član $-\frac{1}{2\lambda} y e^{-\lambda y^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}$, vidimo da je on jednak nuli. Sada iz jednakosti (3.14) i (3.16) imamo:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda\sqrt{\lambda}} = \sigma^2 e^{\lambda_0 + 1}.$$

Pomoću formule (3.15) računamo vrijednosti λ i λ_0:

$$\frac{1}{2\lambda} e^{\lambda_0 + 1} = \sigma^2 e^{\lambda_0 + 1} \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{2\sigma^2}, \tag{3.17}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = e^{\lambda_0 + 1} \Longleftrightarrow \sqrt{2\pi\sigma^2} = e^{\lambda_0 + 1} \Longleftrightarrow e^{-\lambda_0 - 1} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}. \tag{3.18}$$

Na kraju, uvažavajući jednakosti (3.17) i (3.18), dobivamo normalnu distribuciju:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Vidimo da se ekstrem postiže kada je φ gustoća normalne razdiobe s varijancom σ^2.

□

Djelujemo li sada eksponencijalnom funkcijom na Shannonovu nejednakost (3.4) i koristimo li identitet (3.13), dobivamo *Robertsonovu nejednakost neodređenosti* u odnosu na varijancu :

$$\frac{1}{4\pi} \leq \frac{\exp(H(|f|^2) + H(|\hat{f}|^2))}{2e\pi} \leq \sqrt{V(|f|^2)V(|\hat{f}|^2)}.$$

Dakle, ovim pristupom smo ponovno došli do *Heisebergovog principa neodredređenosti* iz teorema 3.2.1.

Poglavlje 4

Principi neodređenosti za sisteme funkcija

Ovo poglavlje posvećujemo proučavanju principa neodređenosti za sisteme funkcija, gdje iskazujemo i dokazujemo *Balian-Low teorem* za Gaborove sisteme te *princip neodređenosti za valićne sisteme*.

4.1 Gaborovi sistemi i Balian-Low teorem

Definicija 4.1.1. *(Ortonormirana baza Hilbertovog prostora) Familiju* $\{e_i : i \in I\}$ *elemenata Hilbertovog prostora* $\mathcal{H}$ *nazivamo ortonormiranom bazom ako su zadovoljena sljedeća tri uvjeta:*

1. *(Ortogonalnost)* $\langle e_k, e_j \rangle_H = 0,$ *za sve* $k, j \in I$ *takve da* $k \neq j$.

2. *(Normiranost)* $\|e_k\| = 1,$ *za sve* $k \in I$.

3. *(Potpunost) Linearna ljuska familije* $\{e_i\colon i \in I\}$ *je gusta u* $\mathcal{H}$, *tj.* $\overline{[\{e_i\colon i \in I\}]} = \mathcal{H}$.

Ortogonalnu bazu Hilbertovog prostora možemo generirati iz jedne funkcije pomoću translacija i modulacija, definiranih (2.2.3, 2.2.7) u Poglavlju 2.

Za prostor $L^2([0, 1])$, kao ortonormirana baza se standardno uzima familija elemenata $\{e^{2\pi inx}\colon n \in \mathbb{Z}\}$. Odgovarajućim transformacijama dobivamo baze za prostore $L^2([a, b])$, $-\infty < a < b < \infty$.

Želimo li dobiti ortonormiranu bazu prostora $L^2(\mathbb{R})$, promatramo familije funkcija oblika

$$g_{m,n}(x) = e^{2\pi imx} g(x - n), \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Ovakva familija funkcije se naziva *Gaborov sistem*, koja može i ne mora biti ortonormirana baza. Na primjer, jedna ortonormirana baza za $L^2(\mathbb{R})$ se dobije ako uzmemo da je $g = \chi_{[0,1]}$.

U nastavku iskazujemo i dokazujemo teorem koji govori o uvjetima koje funkcija $g \in L^2(\mathbb{R})$ mora zadovoljavati ukoliko je familija funkcija $\{g_{m,n} \colon m, n \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza za $L^2(\mathbb{R})$.

Teorem 4.1.2. *(Balian-Low Teorem) Neka je $g \in L^2(\mathbb{R})$ te neka su dane funkcije*

$$g_{m,n}(x) = e^{2\pi imx} g(x - n), \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Ako je familija funkcija $\{g_{m,n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza za $L^2(\mathbb{R})$, tada vrijedi:

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |g(x)|^2 dx = \infty \quad ili \quad \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = \infty.$$

Dokaz. Uvodimo operatore X i D kao i u odjeljku 3.2, koje definiramo na prostoru temperiranih distribucija na sljedeći način:

$$(Xf)(x) = xf(x), \quad (Df)(x) = \frac{1}{2\pi i} f'(x).$$

Primijetimo da za operatore X i D vrijede sljedeće dvije korisne jednakosti:

$$\int_{\mathbb{R}} |Xg(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 |g(x)|^2 dx, \tag{4.1}$$

te

$$\int_{\mathbb{R}} |Dg(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{Dg}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi, \tag{4.2}$$

gdje je jednakost (4.2) posljedica Plancherelovog teorema 2.2.21 i leme 2.2.22.

Dakle, moramo pokazati da Xg i Dg ne mogu oboje pripadati prostoru $L^2(\mathbb{R})$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da Xg i Dg oboje pripadaju prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Pokazujemo da ovo vodi na kontradikciju, što dokazuje teorem. Tvrdimo da vrijede sljedeće tri jednakosti:

$$\langle Xg, Dg \rangle = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle Xg, g_{m,n} \rangle \langle g_{m,n}, Dg \rangle, \tag{4.3}$$

$$\langle Xg, g_{m,n} \rangle = \langle g_{-m,-n}, Xg \rangle, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}, \tag{4.4}$$

$$\langle Dg, g_{m,n} \rangle = \langle g_{-m,-n}, Dg \rangle, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}. \tag{4.5}$$

Jednakosti (4.3), (4.4) i (4.5) impliciraju jednakost

$$\langle Xg, Dg\rangle = \langle Dg, Xg\rangle \tag{4.6}$$

Međutim, (4.6) ne može vrijediti ako su Xg i Dg oboje u $L^2(\mathbb{R})$. U tom slučaju, formulom parcijalne integracije (2.8) dobivamo

$$\langle Xg, Dg\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} xg(x)[\overline{-ig'(x)}]dx = -\frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}[g(x) + xg'(x)]\overline{g(x)}dx =$$
$$= -\frac{i}{2\pi}\langle g, g\rangle + \langle Dg, Xg\rangle.$$

Ovu smo formulu mogli iskoristiti i iz odjeljka 3.2.

Zbog normiranosti funkcije $g \in L^2(\mathbb{R})$, vrijedi $\langle g, g\rangle = ||g||_2^2 = ||g_{0,0}||_2^2 = 1$ pa dobivamo

$$\langle Xg, Dg\rangle = -\frac{i}{2\pi} + \langle Dg, Xg\rangle,$$

što je u kontradikciji s (4.6).

Dakle, teorem je dokazan ukoliko pokažemo da vrijedi (4.3), (4.4) i (4.5).

Kako su $Xg, Dg \in L^2(\mathbb{R})$ i $\{g_{m,n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza, vrijedi

$$\langle Xg, Dg\rangle = \langle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\langle Xg, g_{m,n}\rangle g_{m,n}, Dg\rangle = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle Xg, g_{m,n}\rangle\langle g_{m,n}, Dg\rangle,$$

što dokazuje (4.3).

Kako bi dokazali (4.4), primijetimo da je $n\langle g, g_{m,n}\rangle = 0, \forall m, n \in \mathbb{Z}$. Ova jednakost očito vrijedi za $n = 0$, dok u slučaju $n \neq 0$, vrijedi $\langle g, g_{m,n}\rangle = 0, \forall m, n \in \mathbb{Z}$ uz $g = g_{0,0}$, zbog ortogonalnosti baze $\{g_{m,n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$. Dakle, uz odgovarajuću supstituciju $x = y + n$ te uvažavajući relaciju $e^{-2\pi imn} = cos(2\pi imn) - isin(2\pi imn) = 1,\ \forall m, n \in \mathbb{Z}$, dobivamo

$$\langle Xg, g_{m,n}\rangle = \langle Xg, g_{m,n}\rangle - n\langle g, g_{m,n}\rangle = \int_{\mathbb{R}}[xg(x)\overline{g(x-n)e^{-2\pi imx}} - ng(x)\overline{g(x-n)e^{-2\pi imx}}]dx =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} g(x)(x-n)\overline{g(x-n)}e^{-2\pi imx}dx = \int_{\mathbb{R}} g(y+n)y\overline{g(y)}e^{-2\pi im(y+n)}dy = \langle g_{-m,-n}, Xg\rangle,$$

što nam daje (4.4). Kako bi pokazali (4.5), koristimo formulu (2.8), odgovarajuću supstituciju $x = y + n$ te uvažavajući relaciju $e^{-2\pi imn} = cos(2\pi imn) - isin(2\pi imn) = 1,\ \forall m, n \in \mathbb{Z}$, dobivamo

$$\langle Dg, g_{m,n}\rangle = \frac{-i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} g'(x)\overline{g(x-n)}e^{-2\pi imx}dx = \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} g(x)[\overline{g'(x-n)} - 2\pi im\,\overline{g(x-n)}]e^{-2\pi imx}dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} g(y+n)[\overline{-ig'(y)}]e^{-2\pi imy} + m\,\langle g_{m,0}g_{0,n}\rangle = \langle g_{-m,-n}, Dg\rangle,$$

gdje je $m\,\langle g_{m,0}, g_{0,n}\rangle = 0$, u slučaju $m = 0$, dok u slučaju $m \neq 0$ jednakost vrijedi zbog ortogonalnosti baze $\{g_{m,n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$.

Time je tvrdnja teorema pokazana. □

4.2 Valićni sistemi

Promotrimo još jedan način zadavanja ortonormirane baze Hilbertovog prostora $L^2(\mathbb{R})$. Neka je zadana funkcija $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Ako je familijom funkcija

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k), \quad j,k \in \mathbb{Z},$$

dana ortonormirana baza za $L^2(\mathbb{R})$, tada funkciju ψ nazivamo *ortonormirani valić*.
Mi želimo pokazati da ne možemo očekivati da ortonormirani valić pripada klasi $C^\infty(\mathbb{R})$. Pokažimo prvo sljedeći rezultat.

Teorem 4.2.1. *Neka je r nenegativni cijeli broj te neka je ψ funkcija klase $C^r(\mathbb{R})$ takva da vrijedi*

$$|\psi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{r+1+\epsilon}}, \;\; za \;\; neki \;\; \epsilon > 0, \tag{4.7}$$

te da je $\psi^{(m)} \in L^\infty(\mathbb{R})$, za $m = 1, ..., r$. Ako je $\{\psi_{j,k} : j,k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormiran skup u $L^2(\mathbb{R})$, tada su svi momenti od ψ sve do reda r jednaki nuli, tj. vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}} x^m \psi(x)dx = 0, \;\; \forall\, m = 0,1,2,...,r. \tag{4.8}$$

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po r. Pretpostavimo prvo da je $r = 0$. Neka je a dijadski broj oblika $a = 2^{-j_0}k_0$, za neke $j_0, k_0 \in \mathbb{Z}$, takav da je $\psi(a) \neq 0$. Kako je $\{\psi_{j,k} : j,k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormiran skup, vrijedi $||\psi||_2 = 1$, te uz činjenicu da je je ψ neprekidna, znamo da takav a postoji zbog gustoće dijadskih razlomaka u skupu $\mathbb{R}$.
Zbog ortonormiranosti familije $\{\psi_{j,k} : j,k \in \mathbb{Z}\}$ vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)}\psi(2^j x - k)dx = 0, \;\; za \;\; (j,k) \neq (0,0).$$

Uzimajući $k = 2^{j-j_0}k_0$, uz uvjet $j > max\{j_0, 0\}$, dobivamo jednakost

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)}\psi(2^j x - 2^{j-j_0}k_0)dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)}\psi(2^j x - 2^j a)dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)}\psi(2^j(x-a))dx = 0.$$

Sada uvodimo supstituciju $y = 2^j(x-a)$. Tada je $x = a + 2^{-j}y$ pa vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(a + 2^{-j}y)}\psi(y)dy = 0. \tag{4.9}$$

Funkcije $\alpha_j(y) = \overline{\psi(a + 2^{-j}y)}\psi(y)$ su ograničene funkcijom $g \in L^1(\mathbb{R})$ takvom da vrijedi $\alpha(y) \leq \frac{C_1}{(1+|a+2^{-j}y|)^{1+\epsilon}}\frac{C_2}{(1+|y|)^{1+\epsilon}} = g(y)$ po pretpostavci teorema (4.7). Također, vrijedi $\overline{\psi(a)}\psi(y) =$

$\lim_{j\to\infty} \alpha_j(y)$, pa po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji 2.1.7, lijeva strana u (4.9) teži u $\overline{\psi(a)} \int_{\mathbb{R}} \psi(y)dy$, kada $j \to \infty$. Prisjetimo li se sada da vrijedi nejednakost $\psi(a) \neq 0$, dobivamo jednakost

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(y)dy = 0.$$

Dakle, pokazali smo da tvrdnja vrijedi za slučaj $r = 0$. U nastavku pokazujemo tvrdnju za slučaj $r = 1$, te prelazimo na općeniti korak indukcije. Pokazali smo da je $\int_{\mathbb{R}} \psi(y)dy = 0$, pa funkcija

$$\vartheta(x) := \int_{-\infty}^{x} \psi(y)dy$$

teži nuli, za $x \to \infty$. Nadalje, znamo da je

$$\vartheta(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(y)dy = -\int_{x}^{\infty} \psi(y)dy.$$

Po pretpostavci teorema, za promatrani slučaj $r = 1$ vrijedi nejednakost

$$|\psi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{2+\epsilon}}, \quad \textit{za neki } \epsilon > 0. \tag{4.10}$$

Iz nejednakosti (4.10), integracijom dobivamo ocjenu

$$|\vartheta(x)| \leq \left| -\int_{x}^{\infty} \psi(y)dy \right| \leq \int_{x}^{\infty} |\psi(y)|dy \leq |C| \int_{x}^{\infty} \frac{1}{(1+|x|)^{2+\epsilon}} \leq \frac{C_1}{(1+|x|)^{1+\epsilon}}.$$

Parcijalnom integracijom, uvažavajući definiciju funkcije ϑ, te iskorištavanjem činjenice da ϑ iščezava u beskonačnosti, dobivamo jednakost

$$\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(x)dx = x\vartheta(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} x\vartheta'(x) == -\int_{\mathbb{R}} x\psi(x)dx.$$

Dakle, dovoljno je pokazati da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(x)dx = 0.$$

Primjenjujemo sličan argument kao za ψ na samom početku dokaza. Kako ψ nije konstantna, te je ψ' neprekidna kao funkcija klase $C^1(\mathbb{R})$, postoji $a = 2^{-j_0}k_0$, za neke $j_0, k_0 \in \mathbb{Z}$ takav da je $\psi'(a) \neq 0$. Promotrimo ponovno jednakost

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)}\, \psi(2^j(x-a))dx = 0.$$

Parcijalnom integracijom dobivamo

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)}\psi(2^j(x-a))dx = 2^{-j}\overline{\psi(x)}\vartheta(2^j(x-a))dx\Big|_{-\infty}^{\infty} - 2^{-j}\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi'(x)}\vartheta(2^j(x-a))dx = 0$$

$$\Longleftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi'(x)}\vartheta(2^j(x-a))dx = 0,$$

gdje smo koristili činjenicu da vrijedi jednakost $\vartheta'(2^j(x-a)) = 2^j\psi(2^j(x-a))$ te da funkcija ϑ iščezava u beskonačnosti.

Zamjenom varijabli $y = 2^j(x-a)$, dobivamo

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi'(a+2^{-j}y)}\vartheta(y)dy = 0. \tag{4.11}$$

Kao za slučaj $r = 0$, primjećujemo da su funkcije $\alpha_j^{(1)}(y) = \overline{\psi'(a+2^{-j}y)}\vartheta(y)$ ograničene integrabilnom funkcijom po pretpostavci teorema (4.7), te vrijedi jednakost $\overline{\psi'(a)}\vartheta(y) = \lim_{j\to\infty}\alpha_j^{(1)}(y)$, pa po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji 2.1.7, lijeva strana u (4.11) teži u $\overline{\psi'(a)}\int_{\mathbb{R}}\vartheta(y)dy$, kada $j \to \infty$. Prisjetimo li se sada da vrijedi nejednakost $\psi'(a) \neq 0$, dobivamo jednakost

$$\int_{\mathbb{R}} x\psi(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty}\vartheta(x)dx = 0,$$

čime smo tvrdnju pokazali za slučaj $r = 1$.

Sada nastavljamo indukcijom. Prepostavimo da tvrdnja vrijedi za sve momente do $(r-1)$-vog, uključujući $(r-1)$-vi. Želimo pokazati tvrdnju za red r. Prvo, primijetimo da su svi momenti sve do $(r-1)$-vog jednaki nuli, tj. vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} x\psi(x)dx = ... = \int_{\mathbb{R}} x^{r-1}\psi(x)dx = 0.$$

Sada možemo ψ integrirati r-puta te dobiti funkcije $\vartheta_1, ..., \vartheta_r$ takve da vrijedi $\vartheta_l' = \vartheta_{l-1}$ te da $\vartheta_1 = \vartheta, ..., \vartheta_r$ teže 0 u $\pm\infty$. Nadalje, zbog definicije ϑ_l te pretpostavke teorema, parcijalno integrirajući l puta, vidimo da postoje konstante C_l takve da vrijedi

$$|\vartheta_l(x)| \leq \frac{C_l}{(1+|x|)^{r-l+1+\epsilon}}, \quad l = 1, 2, ..., r.$$

Parcijalno integrirajući r-puta, vidimo da vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}} x^r\psi(x)dx = 0 \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \vartheta_r(x)dx = 0.$$

Na isti način kao prije, s obzirom da ψ nije polinom te je $\psi^{(r)}$ neprekidan po pretpostavci teorema, postoji $a = 2^{-j_0}k_0$ takav da je $\psi^{(r)}(a) \neq 0$. Iz jednakosti

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)}\psi(2^j(x-a))dx = 0$$

parcijalno integracijom r-puta, dobivamo

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi^{(r)}(x)}\vartheta_r(2^j(x-a))dx = 0. \tag{4.12}$$

Zamjenom varijabli $y = 2^j(x-a)$, uočavanjem činjenice da su funkcije $\alpha_j^{(r)} = \overline{\psi^{(r)}}(a + 2^{-j}y)\vartheta_r(y)$ ograničene integrabilnom funkcijom zbog pretpostavke teorema (4.7), te činjenice da vrijedi $\overline{\psi^{(r)}(a)}\vartheta_r(y) = \lim_{j\to\infty}\alpha_j^{(r)}(y)$, po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji 2.1.7, lijeva strana u (4.12) teži u $\overline{\psi^{(r)}(a)}\int_{\mathbb{R}}\vartheta_r(y)$, kada $j \to \infty$. Prisjetimo li se da vrijedi nejednakost $\psi^{(r)}(a) \neq 0$, dobivamo jednakost

$$\int_{\mathbb{R}} x^r\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} \vartheta_r(x)dx = 0,$$

čime je pokazan korak indukcije te tvrdnja teorema.

□

Prije nego iskažemo i dokažemo sljedeći korolar, posljedicu teorema 4.2.1, iskazujemo jedan poznati rezultat – Weierstrassov teorem aproksimacije, koji će nam koristiti pri dokazivanju samog korolara.

Teorem 4.2.2. *(Weierstrassov teorem aproksimacije) Neka je f neprekidna realna funkcija definirana na intervalu $[a,b]$, gdje su $a,b \in \mathbb{R}$. Tada za svaki $\epsilon > 0$ postoji polinom p takav da za sve $x \in [a,b]$ vrijedi*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - p(x)| < \epsilon.$$

Dokaz. Dokaz se nalazi u [12].

□

Korolar 4.2.3. *Neka je ψ funkcija s kompaktnim nosačem takva da je $\psi \in C^\infty$. Tada $\{\psi_{j,k} : j,k \in \mathbb{Z}\}$ ne može biti ortonormirani skup u $L^2(\mathbb{R})$, gdje je $\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jx - k)$.*

Dokaz. Ako je $\{\ \psi_{j,k} : j,k \in \mathbb{Z}\ \}$ ortonormirani skup u $L^2(\mathbb{R})$, možemo primijeniti teorem 4.2.1 jer funkcija ψ s kompaktnim nosačem zadovoljava nejednakost (4.7) te je klase C^∞. Time dobivamo da jednakost (4.8) vrijedi za svaki $m \in \mathbb{N}_0$, tj. da su svi momenti od ψ jednaki nula.

Stoga slijedi da za sve polinome p u varijabli x vrijedi $\int_{\mathbb{R}} p(x)\overline{\psi(x)} = 0$. Po Weierstrassovom teoremu aproksimacije 4.2.2, te zbog činjenice da funkcija ψ ima kompaktni nosač, za dani $\epsilon > 0$ možemo naći polinom $p(x)$ takav da vrijedi $\sup_{x\in K} |\psi(x) - p(x)| < \epsilon$, gdje je K nosač od ψ. Dakle, vrijedi nejednakost

$$||\psi||_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\overline{\psi(x)}dx = \int_K [\psi(x) - p(x)]\overline{\psi(x)}dx \le \epsilon \int_K |\psi(x)|dx = \epsilon||\psi||_1.$$

Funkcija ψ je neprekidna s kompaktnim nosačem, te se stoga nalazi u svim L^p prostorima, za $p \in [1, \infty]$, pa je posebno $\psi \in L^1(\mathbb{R})$. To znači da vrijedi $||\psi||_1 < \infty$, te zbog proizvoljnosti broja $\epsilon > 0$, mora vrijediti $||\psi||_2^2 = 0$, što je u kontradikciji s normiranošću familije $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$..

□

Ovim korolarom smo pokazali da možemo očekivati da ortonormirani valić s kompaktnim nosačem može biti najviše klase $C^n(\mathbb{R})$, za neki nenegativni cijeli broj n. Time smo pokazali još jedan oblik *principa neodređenosti za sisteme funkcija*, u ovom slučaju za valićne sisteme. Zanimljivo je primijetiti da je I. Daubechies konstruirala upravo valiće s kompaktnim nosačem klase C^n za po volji veliki n. Za više detalja vidjeti [5].

Poglavlje 5

Principi neodređenosti za grupe

Na kraju se bavimo proučavanjem *principa neodređenosti za grupe*. Promatramo konačne abelove grupe te dokazujemo kvantitativni princip vezan uz nosače funkcije f i njene Fourierove transformacije $\hat{f}$. Također, pokazujemo kako se ograda može poboljšati ukoliko promatramo cikličke grupe prostog reda.

5.1 Princip neodređenosti za konačne abelove grupe

Definicija 5.1.1. *Neprazan skup $\mathbb{G} = (\mathbb{G}, +)$, pri čemu je $+\colon \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ binarna operacija nazivamo abelovom (ili komutativnom) grupom ako vrijede sljedeća četiri svojstva – asocijativnost, postojanje neutralnog elemenata $0 \in \mathbb{G}$, postojanje suprotnog elementa $-x \in \mathbb{G}$ te komutativnost:*

1. $(x + y) + z = x + (y + z),\ \forall x, y, z \in \mathbb{G}$,
2. $(\exists 0 \in \mathbb{G})\colon 0 + x = x + 0 = x,\ \forall x \in \mathbb{G}$,
3. $(\forall x \in \mathbb{G})(\exists! - x \in \mathbb{G})\colon x + (-x) = (-x) + x = 0.$
4. $x + y = y + x,\ \forall x, y \in \mathbb{G}$.

Definicija 5.1.2. *Ako je $\mathbb{G}$ abelova grupa, definiramo njen red kao*

$$|\mathbb{G}| := card(G).$$

Za grupu $\mathbb{G}$ kažemo da je konačna ako je njen red konačan, tj. vrijedi $|\mathbb{G}| < \infty$. U suprotnom kažemo da je $\mathbb{G}$ beskonačna grupa.

Kako bismo definirali Fourierovu transformaciju na konačnoj abelovoj grupi, potrebna nam je definicija bi-karaktera grupe, koju navodimo u nastavku. Prilikom same definicije koristimo poznatu činjenicu da se svaka konačna abelova grupa $\mathbb{G}$ može do na izomorfizam prikazati u obliku

$$\mathbb{G} = \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_n},$$

za neki $n \in \mathbb{Z}$ i neke $m_1, ..., m_n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Pritom smo sa $\mathbb{Z}_d$ označili grupu ostataka modulo d, dok su nam elementi grupe $\mathbb{G}$ n–torke $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ uz koordinatno zbrajanje.

Definicija 5.1.3. *Neka je $\mathbb{G}$ konačna Abelova grupa. Bi-karakter grupe $\mathbb{G}$ je preslikavanje $e\colon \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to S^1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ dano sa:*

$$e(x, \xi) = e^{2\pi i x_1 \xi_1/m_1} \cdots e^{2\pi i x_n \xi_n/m_n}, \tag{5.1}$$

pri čemu su $x = (x_1, ..., x_n), \xi = (\xi_1, ..., x_n) \in \mathbb{G}$, dok su $m_1, ..., m_n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

U sljedećoj propoziciji navodimo nekoliko svojstava bi-karaktera koji će nam biti korisni prilikom dokazivanja Plancherelovog teorema za konačne abelove grupe 5.1.7.

Propozicija 5.1.4. *Neka je $\mathbb{G}$ konačna abelova grupa te neka je sa $e\colon \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to S^1$ dan bi-karakter grupe $\mathbb{G}$. Tada vrijede sljedeća svojstva:*

1. $e(x + y, \xi) = e(x, \xi)e(y, \xi), \ \forall x, y, \xi \in \mathbb{G}.$
2. $\overline{e(x, \xi)} = e(-x, \xi), \ \forall x, \xi \in \mathbb{G}.$
3. $\sum_{\xi \in \mathbb{G}} e(x, \xi) = \begin{cases} |\mathbb{G}| & \text{ako je } x = 0, \\ 0 & \text{ako je } x \neq 0. \end{cases}$

Dokaz. 1. Po definiciji bi-karaktera 5.1, vrijedi:

$$e(x, \xi)e(y, \xi) = e^{2\pi i x_1 \xi_1/m_1} \cdots e^{2\pi i x_n \xi_n/m_n} e^{2\pi i y_1 \xi_1/m_1} \cdots e^{2\pi i y_n \xi_n/m_n} =$$

$$= e^{2\pi i (x_1 + y_1)\xi_1/m_1} \cdots e^{2\pi i (x_n + y_n)\xi_n/m_n} = e(x + y, \xi).$$

2. Po definiciji bi-karaktera 5.1, vrijedi:

$$\overline{e(x, \xi)} = \overline{e^{2\pi i x_1 \xi_1/m_1}} \cdots \overline{e^{2\pi i x_n \xi_n/m_n}} = e^{-2\pi i x_1 \xi_1/m_1} \cdots e^{-2\pi i x_n \xi_n/m_n} = e(-x, \xi).$$

3. U slučaju $x_j = 0$, vrijedi:

$$\sum_{\xi_j=0}^{m_j-1} e^{2\pi i \cdot 0 \cdot \xi_j/m_j} = \sum_{\xi_j=0}^{m_j-1} 1 = m_j.$$

Sada imamo

$$\sum_{\xi\in\mathbb{G}} e(0,\xi) = \sum_{\xi_1=0}^{m_1-1} e^{2\pi i\cdot 0\cdot \xi_1/m_1} \cdots \sum_{\xi_n=0}^{m_n-1} e^{2\pi i\cdot 0\cdot \xi_n/m_n} = \sum_{\xi_1=0}^{m_1-1} 1 \cdots \sum_{\xi_n=0}^{m_n-1} 1 = m_1\cdots m_n = |\mathbb{G}|.$$

S druge strane, ukoliko je $x_j \neq 0$, koristimo formulu za parcijalnu sumu geometrijskog reda, te dobivamo niz jednakosti:

$$\sum_{\xi_j=0}^{m_j-1} (e^{2\pi i x_j/m_j})^{\xi_j} = \frac{1-e^{2\pi i x_j}}{1-e^{2\pi i x_j/m_j}} = 0,$$

gdje zadnja jednakost vrijedi zbog činjenice da je $e^{2\pi i x} = \cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x) = 1$. Napokon, vrijedi

$$\sum_{\xi\in\mathbb{G}} e(x,\xi) = \Big(\sum_{\xi_1=0}^{m_1-1} (e^{2\pi i x_1/m_1})^{\xi_1}\Big)\cdots\Big(\sum_{\xi_n=0}^{m_n-1} (e^{2\pi i x_n/m_n})^{\xi_n}\Big) = 0.$$

□

Definicija 5.1.5. *Neka je $\mathbb{G}$ konačna abelova grupa te neka je $f\colon \mathbb{G}\to\mathbb{C}$ kompleksna funkcija definirana na $\mathbb{G}$. Tada je nosač funkcije f definiran kao*

$$supp(f) := \{x\in\mathbb{G}\colon f(x)\neq 0\}.$$

Definicija 5.1.6. *Neka je $\mathbb{G}$ konačna abelova grupa te $f\colon \mathbb{G}\to\mathbb{C}$ kompleksna funkcija definirana na $\mathbb{G}$. Tada je njena Fourierova transformacija $\hat{f}\colon \mathbb{G}\to\mathbb{C}$ definirana na sljedeći način:*

$$\hat{f}(\xi) := \sum_{x\in\mathbb{G}} f(x)\overline{e(x,\xi)},\ \forall\xi\in\mathbb{G}. \tag{5.2}$$

U nastavku iskazujemo Plancherelov teorem za konačne abelove grupe, rezultat koji će nam koristiti prilikom dokazivanja principa neodređenosti u nastavku.

Propozicija 5.1.7. *(Plancherelov teorem za konačne abelove grupe) Neka je $\mathbb{G}$ konačna Abelova grupa, $f,g\colon \mathbb{G}\to\mathbb{C}$ kompleksne funkcije definirane na $\mathbb{G}$ te $\hat{f},\hat{g}\colon \mathbb{G}\to\mathbb{C}$ njihove Fourierove transformacije, respektivno. Tada vrijedi Plancherelov identitet:*

$$\sum_{\xi\in\mathbb{G}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}}(\xi) = |\mathbb{G}|\sum_{x\in\mathbb{G}} f(x)\overline{g(x)}. \tag{5.3}$$

Posebno, vrijedi identitet

$$\sum_{\xi\in\mathbb{G}} |\hat{f}(\xi)|^2 = |\mathbb{G}|\sum_{x\in\mathbb{G}} |f(x)|^2. \tag{5.4}$$

Dokaz. Koristeći definiciju Fourierove transformacije (5.2) te svojstva bi-karaktera iz propozicije 5.1.4, dobivamo sljedeći niz jednakosti:

$$\sum_{\xi\in\mathbb{G}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)} = \sum_{\xi\in\mathbb{G}}\sum_{x,y\in\mathbb{G}} f(x)\overline{g(y)}e(y,\xi)\overline{e(x,\xi)} = \sum_{x,y\in\mathbb{G}} f(x)\overline{g(y)}\sum_{\xi\in\mathbb{G}} e(y-x,\xi) =$$
$$= |\mathbb{G}|\sum_{x\in\mathbb{G}} f(x)\overline{g(x)}.$$

□

Teorem 5.1.8. *(Princip neodređenosti za konačne abelove grupe) Neka je $\mathbb{G}$ konačna abelova grupa, $f\colon \mathbb{G}\to\mathbb{C}$ kompleksna funkcija definirana na $\mathbb{G}$ koja nije identički jednaka nuli te $\hat{f}\colon \mathbb{G}\to\mathbb{C}$ njena Fourierova transformacija. Tada vrijedi nejednakost*

$$|supp(f)||supp(\hat{f})| \geq |\mathbb{G}|. \tag{5.5}$$

Dokaz. Po definiciji Fourierove transformacije $\hat{f}$, nejednakosti trokuta, te zbog činjenica da je $|e(x,\xi)| = 1$ te da je f definirana na $\mathbb{G}$, dobivamo sljedeći niz nejednakosti:

$$\sup_{\xi\in\mathbb{G}}|\hat{f}(\xi)| = \sup_{\xi\in\mathbb{G}}\Big|\sum_{x\in\mathbb{G}} f(x)\overline{e(x,\xi)}\Big| \leq \sum_{x\in\mathbb{G}}|f(x)||e(x,\xi)| = \sum_{x\in supp(f)}|f(x)|. \tag{5.6}$$

Sada po Cauchy-Schwarzovoj nejednakosti vrijedi:

$$\sum_{x\in supp(f)}|f(x)| = \sum_{x\in supp(f)}|1\cdot f(x)| \leq \Big(\sum_{x\in supp(f)} 1^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{x\in supp(f)}|f(x)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.7}$$

Koristeći Plancherelov identitet (5.4), dobivamo:

$$\Big(\sum_{x\in supp(f)} 1^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{x\in supp(f)}|f(x)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \frac{supp(f)^{\frac{1}{2}}}{|\mathbb{G}|^{\frac{1}{2}}}\Big(\sum_{\xi\in supp(\hat{f})}|\hat{f}(\xi)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big). \tag{5.8}$$

Napokon, iz relacija (5.6), (5.7) te (5.8), te ocjenjujući svaki pribrojnik posljednje sume s najvećim, dobivamo:

$$\sup_{\xi\in\mathbb{G}}|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{|supp(f)|^{\frac{1}{2}}}{|\mathbb{G}|^{\frac{1}{2}}}\Big(\sup_{\xi\in\mathbb{G}}|\hat{f}(\xi)|\sum_{\xi\in supp(\hat{f})} 1^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{|supp(f)|^{\frac{1}{2}}|supp(\hat{f})|^{\frac{1}{2}}}{|\mathbb{G}|^{\frac{1}{2}}}\sup_{\xi\in\mathbb{G}}|\hat{f}(\xi)|. \tag{5.9}$$

Dijeleći nejednakost (5.9) vrijednošću $\sup_{\xi\in\mathbb{G}}|\hat{f}(\xi)|$, ukoliko je različita od 0, dobivamo traženu nejednakost (5.5), čime je pokazana tvrdnja teorema.

□

5.2 Princip neodređenosti za cikličke grupe prostog reda

Prije iskazivanja i dokazivanja principa neodređenosti za poseban slučaj konačnih abelovih grupa – cikličke grupe prostog reda $\mathbb{G} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, pri čemu je bi-karakter dan sa $e(x,\xi) := e^{2\pi i x\xi/p}$ – iskazujemo teorem Čebotareva o korijenima jedinice te jedan pomoćni rezultat funkcionalne analize.

Teorem 5.2.1. *(Čebotarev teorem o korijenima iz jedinice) Neka je p prost broj te n prirodan broj takav da je $1 \leq n \leq p$. Neka su $x_1, ..., x_n$ međusobno različiti elementi cikličke grupe $\mathbb{G} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ te neka su $\xi_1, ..., \xi_n$ također međusobno različiti elementi grupe $\mathbb{G}$. Tada su sve minore Fourierove matrice različite od nula, tj. vrijedi*

$$\det[e^{2\pi i x_j \xi_k/p}]_{k=1,...,n}^{j=1,...,n} \neq 0.$$

Dokaz. Dokaz se nalazi u [9]. □

Pri dokazivanju optimalnosti samog principa, tj. njegovog svojevrsnog obrata, bit će nam potreban ranije spomenuti pomoćni rezultat funkcionalne analize, kojega navodimo u nastavku.

Lema 5.2.2. *Neka je W konačno–dimenzionalni vektorski prostor nad poljima $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$, te neka su $\theta_1, \theta_2, ...$ netrivijalni linearni funkcionali na W. Tada postoji $v \in W$ takav da za svaki j vrijedi $\theta_j(v) \neq 0$, tj. postoji element prostora W na kojemu se ne poništava niti jedan funkcional θ_j.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo promatrati slučaj polja $\mathbb{R}$. Na prostoru W promatramo $(dimW)$-dimenzionalnu Lebesgueovu mjeru λ. Za svaki j je jezgra od θ_j neka ravnina u W dimenzije strogo manje od $dimW$, pa je $\lambda\ (Ker\theta_j) = 0$. Sada iz σ-subaditivnosti Lebesgueove mjere dobivamo:

$$\lambda\left(\bigcup_j Ker\theta_j\right) \leq \sum_j \lambda(Ker\theta_j) = 0.$$

Napokon, uzimamo $v \in W \setminus \left(\bigcup_j Ker\theta_j\right)$, jer za njega vrijedi $\theta_j(v) \neq 0$. Time smo pokazali tvrdnju leme. □

Teorem 5.2.3. *(Princip neodređenosti za cikličku grupu prostog reda) Neka je p prost broj te neka je $\mathbb{G} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ciklička grupa reda p. Ako je $f\colon \mathbb{G} \to \mathbb{C}$ ne–nul kompleksna funkcija na $\mathbb{G}$ te $\hat{f}\colon \mathbb{G} \to \mathbb{C}$ njena Fourierova transformacija, vrijedi sljedeća nejednakost:*

$$|supp(f)| + |supp(\hat{f})| \geq p + 1. \tag{5.10}$$

Obratno, ako su E i F dva neprazna podskupa cikličke grupe $\mathbb{G} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ prostog reda p takva da je $|E| + |F| \geq p + 1$, tada postoji funkcija f takva da vrijedi:

$$supp(f) = E, \quad supp(\hat{f}) = F. \tag{5.11}$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji ne-nul kompleksna funkcija $f\colon \mathbb{G} \to \mathbb{C}$ takva da vrijedi

$$|supp(f)| + |supp(\hat{f})| \leq p. \tag{5.12}$$

Neka je $supp(f) = \{x_1, ..., x_n\}$ nosač funkcije f, pri čemu je $n = |supp(f)|$. Zbog nejednakosti (5.12), možemo uzeti međusobno različite $\xi_1, ..., \xi_n \in \mathbb{Z}_p \setminus supp(\hat{f})$. Prema teoremu Čebotareva 5.2.1 linearni operator $V\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ čija je matrica u paru kanonskih baza transponirana matrica $[e^{2\pi i x_j \xi_k / p}]_{k=1,...n}^{j=1,...n}$ je regularan. Prisjetimo li se definicije Fourierove transformacije (5.2) na grupi, te uz dani bi-karakter $e(x, \xi) = e^{2\pi i x \xi / p}$, dobivamo

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_p} f(x) e^{2\pi i x \xi / p}, \forall \xi \in \mathbb{Z}_p.$$

Dakle, djelovanje operatora V je opisano sljedećom jednakošću:

$$T(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)) = (\hat{f}(\xi_1), \hat{f}(\xi_2), ..., \hat{f}(\xi_n)) = 0.$$

Kako smo uzimali $\xi_1, ..., \xi_n \in \mathbb{Z}_p \setminus supp(\hat{f})$, dobivamo da je

$$\hat{f}(\xi_1) = ... = \hat{f}(\xi_n) = 0.$$

Znamo da je operator V regularan, pa i injektivan, iz čega slijedi:

$$f(x_1) = f(x_2) = ... = f(x_n),$$

što je kontrakdicija jer je $supp(f) = \{x_1, ..., x_n\}$.

Pri pokazivanju obratne tvrdnje, promatramo dva slučaja:

1. Neka su E i F dva neprazna podskupa cikličke grupe $\mathbb{G} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ prostog reda p takva da vrijedi $|E| + |F| = p + 1$. Neka je $E = \{x_1, ..., x_n\}$ te uzmimo neki $y_1 \in F$. Korisno će nam biti promatramo još i skup $H = (\mathbb{Z}_p \setminus F) \cup \{\xi_1\}$, uz oznake $H = \{y_1, ..., y_n\}$.

   Po regularnosti linearnog operatora $V\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ iz prvog dijela dokaza znamo da postoji funkcija f definirana na skupu E takva da je $supp(f) \subset E$, te vrijedi sljedeća jednakost:

   $$(\hat{f}(y_1), \hat{f}(y_2), ..., \hat{f}(y_n)) = V(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)) = (1, 0, ..., 0).$$

   Iz gornje jednakosti vidimo da se $\hat{f}$ poništava na skupu $\{y_2, ..., y_n\}$, pa sigurno vrijedi $supp(\hat{f}) \subseteq (\mathbb{Z}_p \setminus H) \cup \{\xi_1\} = F$, te uz to f nije identički jednaka nul-funkciji. Po dokazanoj tvrdnji prvog dijela teorema te pretpostavci da je $|E| + |F| = p + 1$, dobivamo:

   $$p + 1 \leq |supp(f)| + |supp(\hat{f}) \leq |E| + |F| = p + 1.$$

   Iz gornje jednakosti je očito da mora vrijediti $supp(f) = E$ te $supp(\hat{f}) = F$, čime je pokazana tvrdnja za ovaj slučaj.

2. Prijeđimo sada na općenitiji slučaj, tj. neka vrijedi $|\mathbb{E}| + |\mathbb{F}| > p + 1$. Promotrimo vektorski prostor

$$W := \{f : \mathbb{G} \to \mathbb{C} \colon supp(f) \subseteq E,\ supp(\hat{f}) \subseteq F\},$$

te linearne funkcionale definirane na sljedeći način:

$$\theta_1 \colon V \to \mathbb{C},\ \theta_1(f) = f(x),\ za\ fiksirani\ x \in E,$$

$$\theta_2 \colon V \to \mathbb{C},\ \theta_2(f) = \hat{f}(\xi),\ za\ fiksirani\ \xi \in F.$$

Pokažemo li da su funkcionali θ_1 i θ_2 netrivijalni, koristeći lemu 5.2.2 dobivamo da postoji funkcija f takva da vrijedi

$$supp(f) = E,\ supp(\hat{f}) = F,$$

čime je pokazana tvrdnja. Pretpostavimo li da za neki $x \in E$ vrijedi da se svaki funkcional prostora W poništava na njemu, tj. da vrijedi $f(x) = 0,\ \forall f \in W$, uz odabir skupova $\hat{E}$ i $\hat{F}$ takvih da vrijedi $x \in \hat{E} \subseteq E$, $\hat{F} \subseteq F$ te $|E| + |F| = p + 1$, dobivamo kontradikciju s prvim slučajem. Dakle, funkcionali θ_1 i θ_2 su netrivijalni, čime smo pokazali traženu tvrdnju te teorem u cijelosti.

□

Bibliografija

[1] W. Beckner, *Inequalities in Fourier analysis.* Annals of Mathematics Vol. 102, No. 6 (1975), 159-182.

[2] G. B. Folland, *Harmonic Analysis in Phase Space*, Princeton University Press, Princeton, New Yersey, 1989.

[3] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley and Sons, New Yrok, 1999.

[4] C. Heil, *A Basis Theory Primer: Expanded Edition*, Springer, New York, 2011.

[5] E. Hernandez, G. Weiss, *A First Course on Wavelets*, CRC Press, Boca Raton, 1996.

[6] J. Hilgevoord, *The Uncertainty Principle*, dostupno na `http://plato.stanford.edu/entries/qt-uncertainty/`, (kolovoz 2014.)

[7] I.I., Hirschman, Jr., *A note on entropy,* American Journal of Mathematics 79 (1957), 152-156.

[8] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, Cambridge University Press, 2004.

[9] P. Stevenhagen, H.W. Lenstra Jr., *Chebotarëv and his density theorem*, Math. Intelligencer 18 (1996), 26–37.

[10] T. Tao, *An Uncertainty Principle for Cyclic Groups of Prime Order*, Mathematical Research Letters 12 (2005), 121–127.

[11] Š. Ungar, *Kompleksna analiza*, elektronička skripta dostupna na `http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kompa/`, (kolovoz 2014.)

[12] K. Weierstrass, *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veraänderlichen*, Verl. d. Kgl. Akad. d. Wiss. Berlin 2 (1885), 633–639.

Sažetak

Princip neodređnosti prvi puta je formulirao W. Heisenberg 1927. godine čime je pokazano da se određene fizikalne vrijednosti poput položaja čestice i momenta ili pak vremena i energije ne mogu proizvoljno precizno odrediti, što je značajno odudaralo od dotadašnjeg iskustva u fizici. Iste godine, Kennard pokazuje isti princip u punom matematičkom formalizmu, čime je motivirano proučavanje principa u raznim matematičkim kontekstima.

Koristeći fundamentalne rezultate Fourierove analize te poštujući matematički formalizam kvantne mehanike, iznosimo razne formulacije principa neodređenosti. Sam princip promatramo za jednu funkciju – njegove kvalitativne, kvantitavne, operatorske te entropijske formulacije, potom za Gaborove i valićne sisteme funkcija te, naposljetku, općenito za konačne abelove grupe, te specifično za cikličke grupe prostog reda.

Summary

The uncertainty principle was first formulated by W. Heisenberg in the year 1927., which showed that certain physical values such as the position and the momentum of a particle, and also the time and the energy, cannot be specified with an arbitrary precision, something that was far from experiences in physics before the principle was discovered. In the same year, Kennard showed the same principle using a rigorous mathematical formalism, which has motivated further research of the principle in many different mathematical contexts.

Using the fundamental results of Fourier analysis, and respecting the mathematical formalism of quantum mechanics, we present many different formulations of the uncertainty principle. We observe the principle for a single function – its qualitative, quantitative, operator and entropic formulations, for Gabor and wavelet systems of functions, and finally, generally for finite abelian groups, and more specifically for cyclic groups of prime order.

Životopis

Marko Radulović rođen je 14. srpnja 1990. godine u Zagrebu, gdje je pohađao i završio osnovnu školu Matka Laginje te II. gimnaziju. Tijekom srednjoškolskog obrazovanja sudjelovao je na općinskom i županijskom natjecanju iz matematike. 2009. godine upisuje preddiplomski studij Matematike na Prirodoslovno–matematičkom fakultetu u Zagrebu, kojega završava 2012. godine. Iste godine upisuje diplomski studij Primjenjene matematike. U slobodno vrijeme bavi se glazbom te borilačkim vještinama.