

# Otkriće ubrzanog širenja svemira

---

Rudež, Andrea

Master's thesis / Diplomski rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:617053>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-27**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Andrea Rudež

**OTKRIĆE UBRZANOG ŠIRENJA**  
**SVEMIRA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc. dr. sc. Davor Horvatić

Zagreb, travanj, 2016

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Posebno zahvaljujem svom mentoru doc. dr. sc. Davoru Horvatiću na strpljenju, vodstvu i izuzetnoj suradnji tijekom izrade rada.*

*Hvala svim kolegama i prijateljima koji su bili uz mene za vrijeme mog studiranja, a posebno hvala velikoj prijateljici i kolegici Marini Suton čija pomoć i nesebičnost je učinila izazov studiranja na PMF-u mnogo lakšim.*

*Zahvaljujem roditeljima, sestri i braći koji su me bodrili kroz svaki ispit i bili podrška u svemu. Također, hvala mojim mališanima, nećaku i nećakinjama, koji su uspjeli izmamiti osmijeh na mom licu svaki dan.*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Fundamentalna opažanja</b>	<b>3</b>
1.1 Povijesna pozadina . . . . .	3
1.2 Sastav svemira . . . . .	4
1.3 Kozmičko mikrovalno pozadinsko zračenje . . . . .	6
1.4 Svemir je homogen i izotropan . . . . .	7
1.5 Hubbleov zakon . . . . .	9
<b>2 Dinamički modeli svemira</b>	<b>11</b>
2.1 Robertson-Walker metrika . . . . .	11
2.2 Friedmanova jednačba . . . . .	13
2.3 Jednačba fluida . . . . .	17
2.4 Jednačba stanja . . . . .	19
2.5 Modeli svemira . . . . .	21
<b>3 Određivanje kozmoloških parametara</b>	<b>35</b>
3.1 Metoda najmanjih kvadrata . . . . .	35
3.2 Određivanje Hubbleove konstante . . . . .	38
3.3 Određivanje ubrzanja ekspanzije svemira . . . . .	43
3.4 Određivanje gustoće materije i tamne energije . . . . .	45
<b>4 Hubbleov zakon u nastavi fizike i astronomije</b>	<b>47</b>
4.1 Problemi u nastavi astronomije . . . . .	49
<b>Bibliografija</b>	<b>53</b>
<b>A Kod u programskom jeziku Python</b>	<b>59</b>

# Uvod

Koja je sudbina svemira? Pitanje je koje je tisućljećima okupiralo ljudski um, a na koje su odgovor dali znanstvenici S. Perlmutter, B.P. Schmid te time zaslužili Nobelovu nagradu za fiziku 2011. godine. Već gotovo jedno stoljeće se zna da se svemir širi, ali otkriće ubrzanog širenja svemira je potpuno protreslo suvremenu astronomiju.

U ovom radu ćemo pokušati prikazati osnove suvremene astronomije i način na koji se došlo do otkrića ubrzanog širenja svemira. Prvo poglavlje nam daje uvid u fundamentalna opažanja u svemiru te na neki način postavlja bazu za teoriju nastanka svemira. U drugom poglavlju ukratko ćemo opisati metriku svemira te primjeniti Einsteinovu opću teoriju relativnosti da bi došli do ključne jednačbe koja opisuje ponašanje protor-vremena - Fridmanove jednačbe. Na temelju nje ćemo izgraditi razne modele svemira, od praznog svemira do svemira koji sadrži materiju, radijaciju, i kozmološku konstantu. U svim tim modelima geometrija prostora može varirati od ravnog do pozitivno ili negativno zakrivljenog svemira. U trećem poglavlju pomoću programskog jezika Python, uzimajući podatke o udaljenosti i crvenom pomake za supernove tipa Ia, odrediti ćemo Hubbleovu konstantu i parametar deceleracije-parametar koji nam govori da se svemir ubrzano širi.

Ubrzano širenje svemira za sobom povlači pitanje postojanje tamne materije i tamne energije - komponenti svemira o kojima i danas postoji velika polemika u znanstvenoj zajednici. Također, rješenje zagonetke ubrzane ekspanzije važno je jer otkriva budućnost našeg svemira. Za sada možemo samo spekulirati o nekoliko mogućih scenarija. Na primjer, ako gustoća tamne energije raste dovoljno brzo može se dogoditi raspad svih vezanih sustava: galaksija, planetarnih sustava, planeta, atoma te atomskih jezgara. Jedno je sigurno, fizika 21. st. je obilježena otkrićem ubrzanog širenja svemira, te je otvoren novi put za daljnja istraživanja misterioznog prostora u kojem se nalazimo.



# Poglavlje 1

## Fundamentalna opažanja

### 1.1 Povijesna pozadina

Prva razmišljanja o kozmološkim pitanjima nalazimo kod Talesa iz Mileta (6 st. pr. Kr.), koji je smatrao da je svemir konačan i ograničen nebeskim svodom. Za njega je Zemlja disk koji pluta na oceanu, a ishodište svega je voda. Filolaj (pitagorejac, 5. st. pr. Kr.) navodi da se svemir sastoji od središnjeg ognja (vatre), oko kojeg se gibaju nebeska tijela: Zemlja, Mjesec, Sunce, pet planeta i zvijezde stajaćice. To je ujedno povijesno prvi model svemira. Aristotel (4.st. pr. Kr.) smjestio je Zemlju u centar svemira, okruženu sferama na kojima se nalaze nebeska tijela. Takav model svemira ostao je gotovo nepromijenjen sljedećih 1500 godina. Tek krajem srednjeg vijeka javlja se ponovo ideja o heliocentričnom sustavu u djelima Nikole Kopernika. Talijanski znanstvenik Giordano Bruno je otišao korak dalje tvrdeći da Sunčev sustav nije posebno mjesto u svemiru već samo jedan od mnogih zvjezdanih sustava. Početkom 17. st. izumljen je teleskop - jedan od najvažnijih instrumenata koji nam pruža uvid u svemir.

1687. godine Isaac Newton u svom djelu *Principia* opisuje statičan, stalan i beskonačan svemir. Uvodi opću gravitacijsku silu kao privlačnu silu između masa, na temelju čega su se mogla obrazložiti gibanja svih tijela u Sunčevu sustavu. Gravitacija je bila ključ za nebeska gibanja, a njegova je fizika bila teorija reda u svemiru.

U 20. st., Albert Einstein s *Općom teorijom relativnosti*, predstavlja potpuni novi pristup prirodi svemira. U svojoj knjizi *Kosmologische Betrachtung zur allgemeinen Relativitaets-theorie* opisuje svemir kao prostorno-vremenski kontinuum s četiri dimenzije, od kojih jedna pripada vremenskoj koordinati; tako je onda svemir prostorno ograničen i statičan te sadrži konačnu količinu tvari; zatim navodi: „Zakrivljenost prostora je promjenjiva s vremenom i položajem, ovisno o raspodjeli tvari, ali svemir možemo pojednostavljeno prikazati kao sferičan prostor.“ Sve to Einstein pretvara u matematičku formu, te u jednadžbu gravitacijskog polja uvodi kozmološku konstantu  $\Lambda$  da bi svemiru osigurao nepromjenji-



vost u vremenu. Međutim, nedugo zatim, Albert Friedman objavljuje matematičko rješenje Einsteinove opće teorije relativnosti koje opisuje svemir koji se širi ili kontrahira. Konačno, 1929. godine Edwin Hubble, formulira *zakon crvenog pomaka*; empirički zakon po kojem je brzina udaljavanja galaktike proporcionalna njezinoj udaljenosti.

## 1.2 Sastav svemira

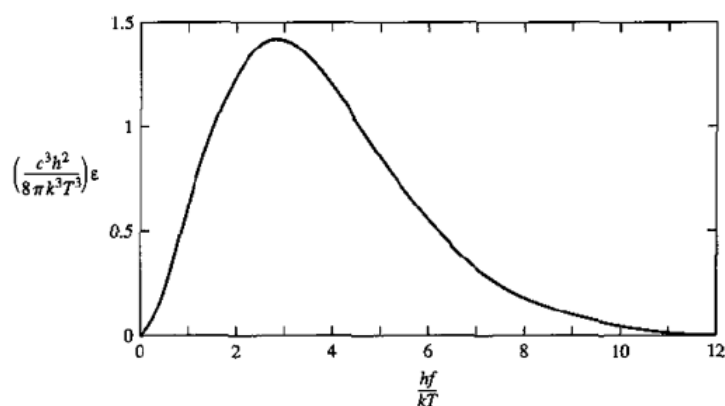
Svemir se sastoji od različitih elementarnih čestica. Materijalni objekti koji nas svakodnevno okružuju građeni su od atoma. Atomi su građeni od protona, neutrona i elektrona. Protoni i neutroni spadaju u barione, čestice sastavljene od tri kvarka. Proton je građen od dva *gornja* i jednog *donjeg* kvarka. Gornji kvarkovi imaju naboj po  $+2/3e$ , a donji  $+1/3e$ , te je time ukupni naboj protona jednak  $+1e$ . Neutron se sastoji od jednog gornjeg i jednog donjeg kvarka, stoga je električki neutralan. Slobodni neutroni su nestabilni, raspadaju se u protone, s vremenom poluraspada  $\tau = 890s$ . Prema do sada poznatoj fizici, protoni su stabilne čestice.

Elektroni su primjer leptona, skupine elementarnih čestica koja se ne sastoji od kvarkova. Elektroni imaju isti električni naboj kao i protoni, ali suprotnog predznaka. Na velikim skalama, svemir je električki neutralan. Broj protona, jednak je broju elektrona. Budući da su protoni 1836 puta masivniji od elektrona, kada se govori o komponenti svemira koja se sastoji od iona, atoma i molekula, obično se misli na *barionsku masu* (protone i neutrone).

Foton je čestica bez mase, a može se opisati kao elektromagnetski val određene frekvencije. Elektromagnetsko zračenje ima tzv. dualnu prirodu, tj. možemo ga zamisliti kao val ili kao roj fotona. Svjetlost, promatrana kao val, je karakterizirana valnom duljinom, tj. frekvencijom. Za elektromagnetske valove vrijedi relacija  $\lambda = c/f$ , gdje je  $c$  brzina svjetlosti. Kada svjetlost promatramo kao roj čestica, svaki foton ima energiju  $E_\gamma = hf$ , gdje je  $h = 2\pi\hbar$  Planckova konstanta. Elektromagnetsko zračenje širokog spektra energija, od radio do gama zraka, prožima svemir. Kada je sustav u termodinamičkoj ravnoteži, gustoća fotona u sustavu, kao funkcija u ovisnosti o energiji fotona, ovisi samo o temperaturi  $T$ . Gustoća fotona u intervalu frekvencija  $f \rightarrow f + df$  je dana funkcijom zračenja crnog tijela

$$\epsilon(f)df = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3 df}{\exp(hf/kT) - 1}, \quad (1.1)$$

Prikazano na Slici 1.1.



Slika 1.1: Zračenje crnog tijela. Slika preuzeta iz [1].

Maksimum funkcije zračenja crnog tijela se događa u točki kada  $hf \approx 2.82kT$ . Integrirajući jednadžbu (1.1) preko svih frekvencija dobivamo ukupnu gustoću energije zračenja crnog tijela

$$\epsilon_\gamma = \alpha T^4, \quad (1.2)$$

gdje je

$$\alpha = \frac{\pi^2}{15} \frac{k^4}{\hbar^3 c^3} = 7.56 \times 10^{-16} \text{Jm}^{-3} \text{K}^{-4}. \quad (1.3)$$

Gustoća broja fotona zračenja crnog tijela može biti izračunata iz formule (1.1) i iznosi

$$n_\gamma = \beta T^3, \quad (1.4)$$

gdje je

$$\beta = \frac{2.404}{\pi^2} \frac{k^3}{\hbar^3 c^3} = 2.03 \times 10^7 \text{Jm}^{-3} \text{K}^{-4}. \quad (1.5)$$

Dijeljenje jednadžbe (1.2) s jednadžbom (1.4) daje srednju energiju fotona

$$E_{srednja} = hf_{srednja} = 2.70kT, \quad (1.6)$$

blizu maksimuma spektra.

Komponenta svemira koja nam je trenutno uglavnom nepoznata, a ima potpis materije zove se tamna materija. Kada astronomi govore o tamnoj materiji obično podrazumijevaju

sve materijalne sastavnice svemira koje su premračne da bi se detektirale. U to ubrajaju zvjezdane ostatke kao što su bijeli patuljci, smeđi patuljci, neutronske zvijezde i crne rupe. Teoretičari koriste užu definiciju te pod tamnom tvari podrazumijevaju sve masivne komponente svemira koje ne emitiraju, apsorbiraju ili raspršuju svjetlost. U ovom radu, koristit ćemo širu definiciju. Važno je za napomenuti da je tamnu materiju teško detektirati. Za otkrivanje se obično se koristi gravitacijski učinak tamne materije na vidljive objekte.

Međutim, s tamnom materijom ne završava popis nepoznatih komponenti svemira. Da bi objasnili danas vodeću teoriju o nastanku svemira (teoriju velikog praksa), znanstvenici su uveli komponentu svemira zvanu *tamna energija*. Smatra se da je tlak tamne materije negativan, te da se zbog toga svemir širi.

Prema istraživanjima, smatra se da je komponenta radijacije zanemariva u ukupnom sastavu današnjeg svemira te da je sastav svemir približno

- 73% tamna energija
- 23% tamna materija
- 4% barionska masa

### 1.3 Kozmičko mikrovalno pozadinsko zračenje

Arno A. Penzias i Robert W. Wilson su u laboratorijima firme Bell u Holmdelu, SAD, radili pokuse s antenom i vrlo osjetljivim prijemnikom. Opazili su šum koji im je ometao prijem te su ga odlučili ispitati. Prvo su pomislili kako šum potječe iz smjera Mliječnog puta. Kada bi to bio slučaj, šum bi trebao biti najjači kada je antena okrenuta prema Mliječnom putu, a najslabiji kad je postavljena okomito na taj smjer. Međutim, ustanovili su da signal nije ovisio o smjeru. Pažljivo su otklonili sve mogućnosti nastajanja šuma u atmosferi ili u prijemniku. Signal nije mogao nastati u atmosferi jer bi u i tom slučaju morao ovisiti o smjeru antene. Naime, u smjeru okomito gore morao bi biti slabiji nego pod kutom prema okomici, jer je u prvom slučaju prividna debljina atmosfere manja nego u drugome. Zaključili su da valovi (pozadinsko zračenje) stižu iz svih smjerova jednakomjerno, te da izviru iz svemira, a ne iz naše galaksije. Budući da funkcija zračenja crnog tijela ima jedinstven izgled u ovisnosti o temperaturi, dobiveni podaci savršeno su odgovarali spektru zračenja crnog tijela temperature

$$T_0 = 2.725 \pm 0.001\text{K}. \quad (1.7)$$

Prema formuli (1.4.), to znači da se u svakom kubičnom centimetru prostora nalazi prosječno 411 pozadinskih fotona,

$$n_\gamma = 4.11 \times 10^8 \text{m}^{-3}. \quad (1.8)$$

Za usporedbu, gustoća protona i neutrona je milijardu puta manja. Srednja energija fotona pozadinskog zračenja je poprilično mala, i iznosi

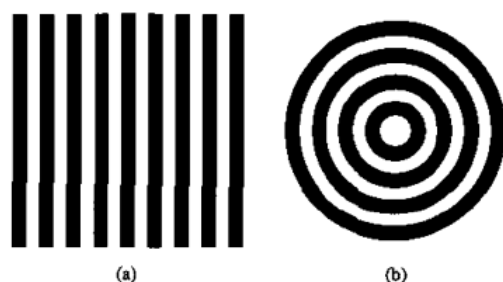
$$E_{srednja} = 6.34 \times 10^{-4} \text{ eV.} \quad (1.9)$$

Srednja energija pozadinskog zračenja odgovara valnoj duljini od 2 milimetra, nalazi se u mikrovalnom spektru elektromagnetskog zračenja i otuda naziv *kozmičko mikrovalno pozadinsko zračenje*.

Pozadinsko zračenje je jedan od najvažnijih dokaza teorije velikog praska. Prema toj teoriji, rani svemir je bio gust i vruć ( $T \gg 10^4 \text{ K}$ ). Nakon formiranja jezgara lakih elemenata u prvotnoj nukleosintezi, svemir je slijedećih 300 000 godina proveo u širenju i hlađenju. Jezgre, fotoni i elektroni neprestano su se sudarali i sačinjavali su homogenu, gustu i neprozirnu plazmu. Iako su se suprotno nabijeni elektroni i jezgre u toj plazmi privlačili, ako bi se neki od njih i uspjeli nakratko spojiti u čitave atome, fotoni visokih energija brzo bi ih ponovo ionizirali na sastavne dijelove. Takav svemir proizvodio je zračenje istog potpisa kao crno tijelo. Tek s padom temperature na otprilike 3000 K, fotoni više nisu imali dovoljno energije za ionizaciju te se elektroni i jezgre povezuju u neutralne atome. To je trenutak u kojem svemir postaje električno neutralan, a time i proziran. Fotoni se od tog trenutka nastavljaju više-manje neometano gibati sve do danas i u njima je zabilježena prva fotografija svemira. Ti fotoni sačinjavaju ono što nazivamo kozmičko mikrovalno pozadinsko zračenje. Sa širenjem svemira i ta fotonska kupka se razrjeđuje i gubi energiju. To je razlog zašto je danas pozadinsko zračenje temperature 2.725 K.

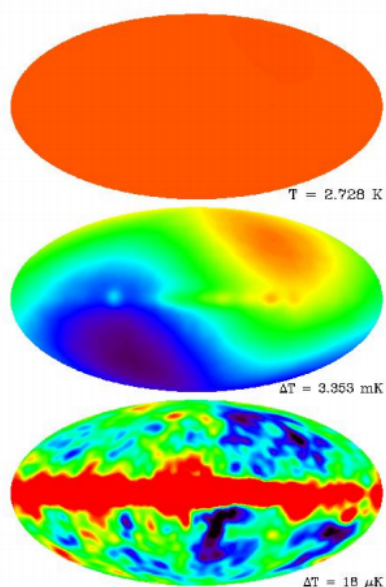
## 1.4 Svemir je homogen i izotropan

Prema kozmološkom načelu svemir je na velikim skalama izotropan i homogen. Izotropnost znači da ne postoji poseban smjer u svemiru, tj. svemir izgleda isto bez obzira u kojem smjeru ga promatramo. Homogenost znači da ne postoji posebna lokacija u svemiru, tj. svemir izgleda isto bez obzira s koje lokacije ga promatrao. Homogenost ne implicira izotropnost i obratno. Papir s prugama na Slici 1.2.a je homogen na skali većoj od širine pruge, ali nije izotropan. Smjer pruga je poseban smjer po kojem se možete orijentirati. Nadalje, papir s krugovima na Slici 1.2.b je izotropan oko ishodišta, ali nije homogen. Krugovi imaju sve veće radijuse kako se udaljavaju od centra, te se stoga može odrediti položaj u odnosu na centar.



Slika 1.2: a) homogen uzorak na skali većoj od širine pruge; b) izotropan uzorak. Slika preuzeta iz [1].

Najbolji dokaz izotropnosti svemira je jednolikost temperature kozmičkog mikrovalnog pozadinskog zračenja. Naime, razlika temperature pozadinskog zračenja snimljenog s dvije antene, međusobno udaljene od deset lučnih sekundi do  $180^\circ$ , je manja od  $1/10000$  K. Nadalje, jednolikost gustoće pozadinskog zračenja upućuje na homogenost svemira u vrijeme nastanka mikrovalnog pozadinskog zračenja. Također, snimke pozadinskog x-zračenja mnogih udaljenih kvazara i galaksija dokazuju izotropnost svemira.



Slika 1.3: Snimke pozadinskog zračenja pomoću COBE satelita. Traka po sredini treće fotografije su smetnje od naše galaktike. Slika preuzeta iz [3].

## 1.5 Hubbleov zakon

Godine 1912., američki astronom Vesto Melin Slipher je promatrajući spiralne maglice, došao do otkrića da su linije u njihovim spektrima, u pravilu, pomaknute prema crvenom dijelu spektra. Budući da brzina galaktičkih klastera nije veća od  $1000\text{km s}^{-1}$ , za što je Dopplerov pomak 0.003, to bi značilo je glavni uzrok crvenog pomaka širenje svemira. Crveni pomak  $z$  definiran je kao omjer promjene valne duljine spektralne linije  $\Delta\lambda$  prema valnoj duljini u mirovanju  $\lambda_0$ .

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}. \quad (1.10)$$

Dopplerov efekt, u slučaju da se izvor elektromagnetskog vala udaljuje od promatrača brzinom  $v$  gdje je  $v \ll c$  glasi

$$v = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = cz. \quad (1.11)$$

U protivnom, potrebno je rabiti relativistički izraz

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}. \quad (1.12)$$

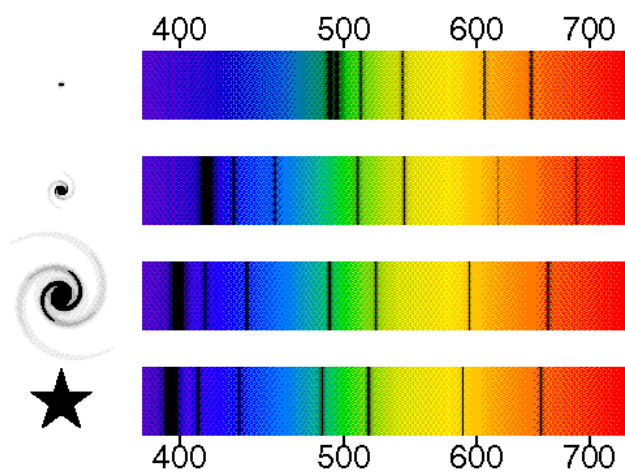
Edwin Hubble, godine 1929., je otkrio da postoji veza između udaljenosti galaksija i njihove brzine udaljavanja. Zapisano matematički,

$$v = H_0 d, \quad (1.13)$$

gdje je  $H_0$  konstanta proporcionalnosti između brzine i udaljenosti galaksije. Zapisano preko crvenog pomaka  $z$  Hubbleov zakon glasi

$$cz = H_0 d. \quad (1.14)$$

Slika 1.4. pokazuje spektare različitih zvijezda koje su na različitoj udaljenosti od nas. Spektar se može koristiti da bi se otkrili elementi u sastavu zvijezda, ali i za određivanje crvenog pomaka.



Slika 1.4: Spektri različitih zvijezda. Slika preuzeta iz [4].

Napomenimo da galaksije mogu imati i plavi pomak u spektru. Danas je poznato više od 1000 galaksija koje pokazuju plavi pomak. No većina njih pripada Mjesnoj skupini što ukazuje da je gravitacijski utjecaji prevladavaju nad širenjem svemira.

# Poglavlje 2

## Dinamički modeli svemira

### 2.1 Robertson-Walker metrika

Naše današnje razumijevanje svemira zasniva se na Friedman-Robertson-Walker kozmološkom modelu. Svemir možemo opisati prostor-vremenom topologije  $\mathbb{R} \times \Sigma$ , gdje  $\mathbb{R}$  predstavlja vremenski smjer, a  $\Sigma$  maksimalno simetričan trodimenzionalan prostor. Ovo je tzv. Robertson-walker metrika<sup>1</sup> dana oblikom

$$ds^2 = -(cdt)^2 + a(t)^2 \left[ dr^2 + S_\kappa(r)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (2.1)$$

gdje je

$$S_\kappa(r) = \begin{cases} R_0 \sin(r/R_0) & \kappa = +1 \\ r & \kappa = 0 \\ R_0 \sinh(r/R_0) & \kappa = -1, \end{cases}$$

$\kappa$  zakrivljenost svemira,  $R_0$  radijus zakrivljenosti,  $a(t)$  vektor skale, a  $(r, \theta, \phi)$  *sugibajuće* koordinate (engleski, *comoving coordinates*) bilo koje točke u prostoru. Za opažača koji se giba na putanji s konstantnim sugibajućim koordinatama kažemo da je sugibajući promatrač. Samo sugibajući promatrači vide svemir izotropnim.

Zakrivljenost  $\kappa$ , može imati vrijednosti 0, 1, -1, ovisno je li svemir ravan, pozitivno ili negativno zakrivljen. Svemir koji je pozitivno zakrivljen je nužno i zatvoren i konačan, negativno zakrivljen svemir je nužno otvoren i beskonačan. Ravni svemir može biti i konačan (npr. torus u 4D prostoru) i beskonačan.

Vektoru skale  $a(t)$  opisuje kako se udaljenost povećava ili smanjuje s vremenom. Pridružena mu je vrijednost 1 u sadašnjosti, tj.  $a(t_0) = 1$ .

---

<sup>1</sup> Pod metrikom se podrazumeva određeni, unaprijed zadani zakon po kome se točkama  $(x^1, \dots, x^n)$  i  $(x^1 + dx^1, \dots, x^n + dx^n)$  pridružuje skalar  $ds$  koji definira udaljenost između njih.



U zakrivljenom, promjenjivom svemiru, pojam udaljenosti postaje kompleksan. Ako mjerimo udaljenost po radijalnoj zruci ( $(\theta, \phi) = konst.$ ) do točke sa sugibajućom koordinatom  $r$ , RW metrika nam daje vrijednost

$$d_p = \int_0^r a(t) dr = a(t)r. \quad (2.2)$$

Gore navedeni izraz zovemo vlastita udaljenost. Sugibajuća koordinata  $r$  se ne mijenja s vremenom, a  $a(t_0) = 1$ , pa je sugibajuća udaljenost jednaka vlastitoj udaljenosti u sadašnjosti.

Vlastita udaljenost se mijenja s vremenom

$$\dot{d}_p = \dot{a}r = \frac{\dot{a}}{a}d_p. \quad (2.3)$$

Ako usporedimo s Hubbleovim zakonom, imamo

$$H = \frac{\dot{d}_p}{d_p} = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.4)$$

U trenutku  $t = t_0$ , imamo linearnu ovisnost vlastite udaljenosti i brzine

$$v_0 = H_0 d_p(0), \quad (2.5)$$

gdje je

$$H_0 = \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)_{t=t_0}. \quad (2.6)$$

Ukoliko je udaljenost veća od  $d(t_0) = c/H_0$  dobivamo da je brzina udaljavanja galaksije veća od brzine svjetlosti. Napomenimo, to ne krši zakone specijalne teorije relativnosti. U općoj teoriji relativnosti nema ograničenja na to da se dva objekta relativno udaljavaju brzinom većom od brzine svjetlosti ukoliko se prostor širi.

Pri traženju vektora skale  $a(t)$  potrebna nam je udaljenost do zvijezda. Nije lako naći pravu udaljenost do zvijezda, ali ono što možemo mjeriti je crveni pomak.

Promatrimo dva uzastopna valna brijega emitirane svjetlosti s neke zvijezde. Prvi valni brijeg je emitiran u vrijeme  $t_e$  i opažen u vrijeme  $t_0$ . Sljedeći valni brijeg je emitiran u vrijeme  $t_e + \lambda_e/c$ , a opažen u vrijeme  $t_0 + \lambda_0/c$ . Općenito  $\lambda_e \neq \lambda_0$ . Budući da se faktor skale  $a(t)$  nije značajno promijenio, možemo pisati

$$c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = c \int_{t_e + \lambda_e/c}^{t_0 + \lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)} = r. \quad (2.7)$$

Ako s obje strane oduzmemo integral  $\int_{t_e+\lambda_e/c}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$  dobivamo

$$\int_{t_e}^{t_e+\lambda_e/c} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0+\lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.8)$$

Kako je  $a(t)$  gotovo konstanta u integralima s lijeve i desne strane prethodne jednakosti, možemo pisati

$$\frac{1}{a(t_e)} \int_{t_e}^{t_e+\lambda_e/c} dt = \frac{1}{a(t_0)} \int_{t_0}^{t_0+\lambda_0/c} dt, \quad (2.9)$$

ili

$$\frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0}{a(t_0)}. \quad (2.10)$$

Koristeći definiciju crvenog pomaka  $z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}$  te da je  $a(t_0) = 1$  imamo

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{1}{a(t_e)}. \quad (2.11)$$

## 2.2 Friedmanova jednađba

Pri dinamičkoj analizi svemira koristit ćemo se svojstvom gravitacijske sile, prema kojem je gravitacijska sila u unutrašnjosti šuplje kugle jednaka nuli. Naime, kuglina (homogena) površina, djeluje izvjesnom silom na svaku točku u njenoj unutrašnjosti, ali je rezultatna sila na svaku unutarnju točku jednaka nuli. Kod razmatranja dinamike širenja svemira možemo odabrati zamišljenu kuglu, čiji je polumjer  $R_k$  dovoljno velik da gustoću unutar kugle možemo smatrati jednolikom, a površina kugle može predstavljati ostatak svemira.

Ukoliko se kugla širi ili kontrahira izotropno, njen radijus  $R_k(t)$  se povećava ili smanjuje s vremenom. Smjestimo li probnu masu  $m$  na površinu kugle gravitacijska sila koju osjeća probni naboj bit će po Newtonovom općem zakonu gravitacije

$$F = -\frac{GM_k m}{R_k(t)^2}. \quad (2.12)$$

Akceleracija na površini kugle je, po Drugom Newtonovom zakonu,

$$\frac{d^2 R_k}{dt^2} = -\frac{GM_k}{R_k(t)^2}. \quad (2.13)$$

Ako pomnožimo svaku stranu jednadžbe s  $dR_k/dt$  i integriramo iz „jednadžbe akceleracije“ dobit ćemo „energetsku jednadžbu“,

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dR_k}{dt} \right)^2 = \frac{GM_k}{R_k(t)} + U. \quad (2.14)$$

Matematički,  $U$  je konstanta integracije, ali fizikalno odgovara ukupnoj energiji po jedinici mase na površini kugle, tj. sumi gravitacijske i kinetičke energije po jedinici mase. Budući da je širenje kugle izotropno oko njenog centra, možemo radijus kugle pisati

$$R_k(t) = a(t)r_k, \quad (2.15)$$

gdje je  $a(t)$  faktor skale, a  $r_k$  sugibajući (eng. *comoving*) radijus kugle.

Dakle, jednadžbu (2.3) možemo napisati

$$\frac{1}{2} r_k^2 \dot{a}^2 = \frac{4\pi}{3} G r_k^2 \rho(t) a(t)^2 + U. \quad (2.16)$$

Dijeleći svaku stranu jednadžbe s  $r_k a^2/2$  dobit ćemo *Friedmanovu jednadžbu* u *Newtonovom obliku*.

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} G r_k^2 \rho(t) a(t)^2 + U. \quad (2.17)$$

Ako je  $U > 0$  desna strana jednadžbe je uvijek pozitivna i kugla će se zauvijek širiti.

Ako promatramo slučaj  $U < 0$  desna strana jednadžbe (2.17) će na početku biti pozitivna i kugla će se širiti. No budući da je  $\rho \propto 1/a(t)^3$ , u trenutku kada je

$$a = \frac{GM_k}{Ur_k}, \quad (2.18)$$

desna strana jednadžbe (2.17) će biti jednaka 0, i širenje prestaje. Nakon toga trenutka, kugla se kontrahira.

Naposljetku, promatrimo što se događa kada je  $U = 0$ . To je granični slučaj u kojem  $\dot{a} \rightarrow 0$  kako  $t \rightarrow \infty$  i  $\rho \rightarrow 0$ .

Važno je napomeniti da je da je Friedmanova jednadžba u Newtonovom obliku tek slika kako se objekt koji se izotropno širi ponaša pod utjecajem svoje gravitacije, te ne predstavlja homogen i izotropan svemir. Naime, u konačnom sferičnom volumenu postoji posebna lokacija, centar kugle, što krši princip homogenosti. Također, postoji poseban smjer, prema centru, što krši princip homogenosti.

Ukoliko želimo matematički opisati opći slučaj, izotropnog i homogenom svemira, moramo na Einsteinovu jednadžbu polja primijeniti Robertson-Walkers metriku. Prema Einsteinovoj teoriji polja prisustvo materije (mase i energije) stvara zakrivljenost prostora. Einsteinova jednadžba polja glasi

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T^{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

gdje je  $G^{\mu\nu}$  Einsteinov tenzor,  $T^{\mu\nu}$  tenzor energije-impulsa,  $g^{\mu\nu}$  tenzor metrike,  $\Lambda$  kozmološka konstanta, a  $G$  gravitacijska konstanta.

Einsteinov tenzor<sup>2</sup> je tenzor drugog reda koji opisuje mjeru zakrivljenost prostora.  $T^{\mu\nu}$  je tenzor drugog reda sastavljen od niza komponenata koje sadrže cjelokupnu informaciju o fizikalnom stanju prostora. Pojedine komponente govore o ukupnoj gustoći mase i energije prostora, gustoći momenta, toku energije i toku momenta, te transferu momenta u vremenu što je jednako sili koja je proizvedena poljem i materijom u jednoj točki prostora i djeluje na materiju u drugoj točki. Tenzor  $T^{\mu\nu}$  je konzervativnog karaktera, odnosno energija i masa ne mogu nastati iz ničega niti nestati. Matematički, divergencija  $\text{div} T^{\mu\nu} = 0$ .

Iz Einsteinove teorije pomoću Robertson-Walkers metriki možemo dobiti Friedmanovu jednadžbu u općoj relativnosti

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2}, \quad (2.20)$$

ili zapisano pomoću Hubbleovog parametra,

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2}. \quad (2.21)$$

Budući da opća relativnost u limesu vodi do Newtonove fizike, za očekivati je da će na malim skalama jednadžba (2.21) biti slična Friedmanovoj jednadžbi u Newtonovom obliku. To se i događa uz dvije važne korekcije.

Prvo, gustoća mase  $\rho(t)$  je zamijenjena s ukupnom gustoćom energije  $\epsilon(t)/c^2$ , što uključuje energiju mase mirovanja i druge oblike energije (npr. fotona, termalne energije atoma, tamne materije).

Drugo, „potencijalna energija“ povezana je sa zakrivljenošću prostora.

Ako je svemir ravan, tj.  $\kappa = 0$  Friedmanova jednadžba (2.21) poprima oblik

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon(t). \quad (2.22)$$

---

<sup>2</sup>Tenzor je matematička ili fizikalna veličina invarijantna na translacije, a ima  $N^n$  komponenti gdje je  $N$  dimenzija prostora te  $n$  stupanj tenzora. Tenzor može biti linearni operator ili skup objekata (najčešće diferencijalnih jednadžbi).

Iz jednadžbe (2.17) možemo izraziti tzv. *kritičnu gustoću*

$$\epsilon_k(t) \equiv \frac{3c^2}{8\pi G} H(t)^2. \quad (2.23)$$

Ako je gustoća energije  $\epsilon(t)$  veća od kritične, svemir je pozitivno zakrivljen, a ako je manja, svemir je negativno zakrivljen.

Astronomi često pišu gustoću energije u obliku *parametra gustoće*

$$\Omega \equiv \frac{\epsilon(t)}{\epsilon_k(t)} = \frac{\epsilon(t)}{c^2} \times \frac{8\pi G}{3H(t)^2}. \quad (2.24)$$

Dakle, Friedmanova jednadžba izražena pomoću parametra gustoće glasi

$$H^2 = \Omega H(t)^2 - \frac{kc^2}{R_0^2 a(t)^2} \Rightarrow 1 - \Omega(t) = -\frac{kc^2}{H(t)^2 a(t)^2 R_0^2}. \quad (2.25)$$

Budući da desna strana jednadžbe (2.25) ne može promijeniti predznak ( $\kappa$  je konstanta u RW metrici), ako je  $\Omega(t) < 0$  ostat će takva zauvijek, ako je  $\Omega(t) > 1$  uvijek će niti takva, te ako je  $\Omega(t) = 1$  neće se promijeniti.

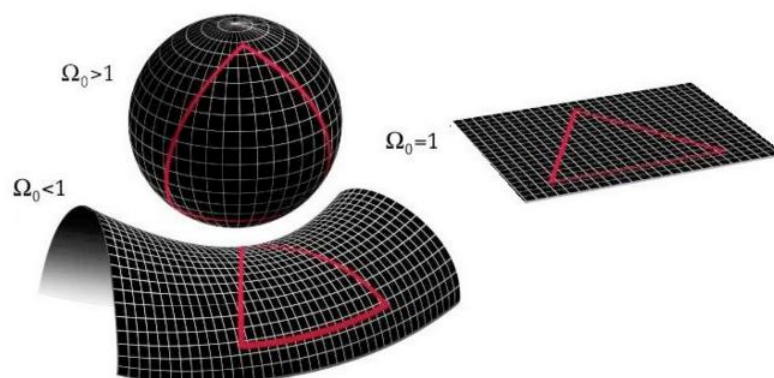
U sadašnjosti, veza između zakrivljenosti, parametra gustoće i brzine širenja može biti napisana

$$1 - \Omega_0 = -\frac{kc^2}{H(0)^2 R_0^2}, \quad (2.26)$$

ili

$$\frac{\kappa}{R_0^2} = \frac{H_0^2}{c^2} (\Omega_0 - 1). \quad (2.27)$$

Iz prethodne jednadžbe se jasno vidi da ako znamo  $\Omega_0$  da znamo i radijus zakrivljenosti. Dodatno, možemo izračunati i radijus zakrivljenosti  $R_0$ . Ovisnost zakrivljenosti i  $\Omega$  prikazana je na slici 2.1.

Slika 2.1: Ovisnost zakrivljenosti o  $\Omega$ . Slika preuzeta iz [5].

## 2.3 Jednadžba fluida

Prema prvom zakonu termodinamike,

$$dE = -PdV + dQ, \quad (2.28)$$

promjena unutrašnje energije nekog tijela jednaka je zbroju rada  $PdV$  i dovedene topline  $dQ$ .

Zamislimo da izotropan, homogen svemir, na velikim skalama, sadrži sugibajuće ćelije istog sadržaja. Te ćelije možemo smatrati zatvorenim sustavima koje nemaju okruženje kojem će predati gubitak energije  $-pdV$  budući da sve ćelije imaju isti gubitak energije. Za sugibajući volumen  $V$  proporcionalan  $a(t)^3$  prvi zakon termodinamike, ima adijabatsku formu (entropija je konstantna)

$$dE + PdV = 0 \Rightarrow \dot{E} + P\dot{V} = 0. \quad (2.29)$$

Promotrimo prostor sugibajućeg volumena  $V$ . Promjena volumena je

$$\dot{V}(t) = 3Va^2\dot{a} = V\left(3\frac{\dot{a}}{a}\right). \quad (2.30)$$

Unutrašnja energija je

$$E(t) = V(t)\epsilon(t), \quad (2.31)$$

pa je promjena unutrašnje energije jednaka

$$\dot{E} = V\dot{\epsilon} + \dot{V}\epsilon. \quad (2.32)$$

Kombiniranjem jednadžbi (2.29), (2.30) i (2.32) prvi zakon termodinamike u svemiru koji se širi ili kontrahira ima oblik

$$V(\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}\epsilon + 3\frac{\dot{a}}{a}P) = 0, \quad (2.33)$$

ili

$$\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P) = 0, \quad (2.34)$$

Jednadžba (2.29) se zove *jednadžba fluida* i jedna je od ključnih jednadžbi u opisivanju svemira.

Kombiniranjem Friedmanove jednadžbe s jednadžbom fluida možemo dobiti informaciju o tome kako se brzina širenja ili kontrahiranja svemira mijenja kroz vrijeme. Friedmanova jednadžba (2.21) pomnožena s  $a^2$  ima oblik

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon a^2 - \frac{kc^2}{R_0^2}. \quad (2.35)$$

Derivirajući po vremenu dobivamo

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3c^2}(\dot{\epsilon}a^2 + 2\epsilon a\dot{a}). \quad (2.36)$$

Dijeleći s  $2a\dot{a}$ ,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{3c^2}\left(\dot{\epsilon}\frac{a}{\dot{a}} + 2\epsilon\right) \quad (2.37)$$

Jednadžbu fluida možemo napisati u obliku

$$\dot{\epsilon}\frac{a}{\dot{a}} = -3(\epsilon + P). \quad (2.38)$$

Kombinirajući prethodne dvije jednadžbe dobivamo *jednadžbu akceleracije*

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon + P). \quad (2.39)$$

Budući da je tlak barionske materije i zračenja pozitivan, ukoliko samo on pridonosi komponenti tlaka u jednadžbi (2.39) akceleracija će biti negativna, tj. relativna brzina bilo koje dvije točke u svemiru će se smanjivati. Međutim, ako svemir ima komponentu tlaka

$$P < -\epsilon/3, \quad (2.40)$$

takva komponenta će uzrokovati pozitivnu akceleraciju, tj. relativna brzina između bilo koje dvije točke će se povećavati. Kozmološka konstanta je komponenta svemira koja ima tlak  $P = -\epsilon$  i mogla bi uzrokovati pozitivnu akceleraciju. Više o tome u poglavlju (2.4).

## 2.4 Jednadžba stanja

Budući da želimo naći faktor skale, gustoću energije i tlak u ovisnosti o vremenu, osim Friedmanove i fluidne, potreban nam je još jedna jednadžba. Kada bismo imali jednadžbu oblika

$$P = P(\epsilon), \quad (2.41)$$

sustav jednadžbi bi bio potpun.

Svemir možemo prikazati kao idealan fluid. Model svemira kao idealnog fluida, nasuprot modelu idealnog plina, opisuje i mladi svemir. U tom modelu, jednadžba stanja svemira ima jednostavan linearan oblik

$$P = w\epsilon, \quad (2.42)$$

gdje je  $w$  bezdimenzionalan. Promatrajmo prvo rijedak plin nerelativističkih ( $v_{\text{termalno}} \ll c$ ), masivnih čestica. Tlak takvog plina je

$$P = \frac{N}{V}kT. \quad (2.43)$$

Zapisano u drugom obliku,

$$P = \frac{\rho}{\mu}kT, \quad (2.44)$$

gdje je  $\mu$  srednja masa čestica plina. Gustoća energije nerelativističkog plina je gotovo u potpunosti određena masom čestica, tj.  $\epsilon \approx \rho c^2$ . Dakle, zakon idealnog plina, izražen preko gustoće energije, glasi

$$P \approx \frac{kT}{\mu c^2} \epsilon. \quad (2.45)$$

Budući da su temperatura  $T$  i srednja termalna kvadratna brzina  $\langle v^2 \rangle$  povezane relacijom

$$3kT = \mu \langle v^2 \rangle, \quad (2.46)$$

te da jednadžbu stanja nerelativističkog plina možemo pisati

$$P_{\text{nerel}} = w\epsilon_{\text{nerel}}, \quad (2.47)$$

dobivamo

$$w \approx \frac{\langle v^2 \rangle}{3c^2} \ll 1. \quad (2.48)$$



Aproksimirajući, nerelativistička komponenta svemira ima  $w = 0$ , a relativistička  $w = 1$ . Međutim, od posebnog interesa za kozmologe je komponenta svemira za koju je  $w < 1/3$ , budući da bi ona uzrokovala ubrzano širenje svemira. Tu komponentu često zovemo *tamnom energijom*. Poseban oblik tamne energije je kozmološka konstanta koja, ukoliko postoji, ima  $\epsilon = -1$ .

Budući da je ukupna gustoća energije jednaka sumi gustoća energije različitih komponentata

$$\epsilon = \sum_w \epsilon_w, \quad (2.49)$$

a ukupni tlak je suma tlakova različitih komponenti,

$$P = \sum_w P_w = \sum_w w \epsilon_w, \quad (2.50)$$

jednadžba fluida mora vrijediti za svaku komponentu posebno. Stoga možemo pisati

$$\dot{\epsilon}_w + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\epsilon_w + P_w) = 0, \quad (2.51)$$

ili

$$\dot{\epsilon}_w + 3 \frac{\dot{a}}{a} (1 + w) \epsilon_w = 0. \quad (2.52)$$

Prethodnu jednadžbu možemo pisati kao

$$\frac{d\epsilon_w}{\epsilon_w} = -3(1 + w) \frac{da}{a} \quad (2.53)$$

Ako pretpostavimo da je  $w$  konstanta, imamo

$$\epsilon_w(a) = \epsilon_{w,0} a^{-3(1+w)}, \quad (2.54)$$

gdje smo koristili normalizaciju da je  $a_0 = 1$ , te da je gustoća energije komponente  $w$  jednaka  $\epsilon_{w,0}$  u sadašnjosti. Zaključujemo da se gustoća energije materije (u koju ubrajamo tamnu materiju i barionsku masu)  $\epsilon_m \propto 1/a^3$ , tj.

$$\epsilon_m(a) = \epsilon_{m,0}/a^3, \quad (2.55)$$

a gustoća energije radijacije (u što ubrajamo fotone i sve relativističke čestice)  $\epsilon_r \propto 1/a^4$ , tj.

$$\epsilon_r(a) = \epsilon_{r,0}/a^4. \quad (2.56)$$

## 2.5 Modeli svemira

Friedmanova jednadžba može biti napisana u obliku

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2}, \quad (2.57)$$

gdje je  $H \equiv \dot{a}/a$ , a  $\epsilon(t)$  ukupna gustoća energije od svih komponenata svemira, uključujući kozmološku konstantu. Jednadžba (2.27) nam govori vezu između  $\kappa$ ,  $R_0$ ,  $H_0$  i  $\Omega_0$ ,

$$\frac{\kappa}{R_0} = \frac{H_0^2}{c^2} (\Omega_0 - 1). \quad (2.58)$$

Stoga, Friedmanovu jednadžbu možemo zapisati bez da izravno koristimo zakrivljenost  $\kappa$

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon(t) - \frac{H_0^2}{a(t)^2} (\Omega_0 - 1). \quad (2.59)$$

Dijeleći s  $H_0^2$  dobivamo

$$\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \frac{\epsilon(t)}{\epsilon_{k,0}} + \frac{1 - \Omega_0}{a(t)^2}, \quad (2.60)$$

gdje je kritična gustoća danas

$$\epsilon_{k,0} \equiv \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G}. \quad (2.61)$$

Znamo da se naš svemir sastoji od materije (nerelativističke tvari) za koju vrijedi ovisnost  $\epsilon_m = \epsilon_{m,0}/a^3$ , i radijacije (relativističke komponente) za koju je ovisnost  $\epsilon_r = \epsilon_{r,0}/a^4$ . Također, pretpostavlja se da se svemir sastoji od kozmološke konstante za koju je  $\epsilon_\Lambda = \epsilon_{\Lambda,0} = \text{konstanta}$ . Neki znanstveni sumnjaju da se svemir sastoji i od komponente za koju je  $w$  u rasponu od  $-1 < w < -\frac{1}{3}$ . Kako nema snažnih dokaza koji idu u prilog tome, mi ćemo razmatrati samo svemir koji se sastoji od nerelativističke ( $w = 0$ ) i relativističke ( $w = 1/3$ ) komponente, te kozmološke konstante ( $w = -1$ ).

Dakle, Friedmanovu jednadžbu možemo napisati u obliku

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{1 - \Omega_0}{a^2}, \quad (2.62)$$

gdje je  $\Omega_r = \epsilon_{r,0}/\epsilon_{k,0}$ ,  $\Omega_m = \epsilon_{m,0}/\epsilon_{k,0}$ ,  $\Omega_\Lambda = \epsilon_{\Lambda,0}/\epsilon_{k,0}$  i  $\Omega_0 = \Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0}$ . Kako je  $H = \dot{a}/a$ , množeći prethodnu jednadžbu s  $a^2$  i vađenjem drugog korijena, imamo

$$H_0^{-1} \dot{a} = \left[ \frac{\Omega_{r,0}}{a^2} + \frac{\Omega_{m,0}}{a} + \Omega_{\Lambda,0} a^2 + (1 - \Omega_0) \right]^{(1/2)}. \quad (2.63)$$

Rješenje diferencijalne jednačbe prvog reda je

$$\int_1^a \frac{da}{[\Omega_{r,0}/a^2 + \Omega_{m,0}/a + \Omega_{\Lambda,0}a^2 + (1 - \Omega)]^{1/2}} = H_0 \int_{t_0}^{t_e} dt. \quad (2.64)$$

gdje integriramo od  $a(t_0) = 1$  do vremena u prošlosti  $a(t_e)$ . Ako stavimo da je  $t_0 = 0$  onda  $t_e$  zovemo look-back vremenom i to je vrijeme mjereno retrospektivno. U limesu kada  $a \rightarrow 0$ ,  $t_e$  označava starost svemira. Ili obratno, možemo  $t_e$  pridružiti vrijednost 0, u tom slučaju  $t_0$  označava starost svemira.

Ako pretpostavimo da je zakrivljenost svemira  $\kappa = 0$ , tada iz jednačbe (2.53) slijedi da je  $\Omega_0 = 1$ . Kako vrijedi da je

$$\Omega_0 = \Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0}, \quad (2.65)$$

to znači da je u slučaju da se svemir sastoji samo od jedne komponente,  $\Omega_{\Lambda} = 1$  ili  $\Omega_r = 1$  ili  $\Omega_m = 1$

Integral (2.64) nema jednostavno analitičko rješenje, no za danu vrijednost  $\Omega$  može biti integriran numerički.

## Svemir materije

Za slučaj ravnog svemira koji sadrži samo nerelativističku masu, jednačba (2.5) izgleda

$$H_0 t = \int_0^a \frac{\sqrt{a} da}{\Omega_{m,0}} = \frac{2}{3} a^{2/3}. \quad (2.66)$$

Zapisano kao ovisnost faktora o vremenu,

$$a(t) = \left( \frac{t}{t_0} \right)^{2/3}, \quad (2.67)$$

gdje je  $t_0$  starost svemira u ovom modelu

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}. \quad (2.68)$$

Iz prethodne jednačbe je očito da će se takav svemir širiti zauvijek. Sudbina takvog svemira poznata je kao *Big Chill* budući da se temperatura svemira smanjuje kako se širi.

Ako gledamo neku galaksiju s crvenim pomakom  $z$ , njena vlastita udaljenost, za ovaj model svemira, u vrijeme mjerenja je

$$d_p(t_0) = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{(t/t_0)^{2/3}} = 3ct_0 \left[ 1 - \left( \frac{t_e}{t_0} \right)^{1/3} \right] = \frac{2c}{H_0} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right], \quad (2.69)$$

a vlastita udaljenost u vrijeme kada je svjetlost emitirana je

$$d_p(t_e) = \frac{2c}{H_0} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right]. \quad (2.70)$$

Zanimljivo je da  $d_p(t_e)$  doseže maksimum i onda se smanjuje za velike crvene pomake  $z$ , što znači da objekte s vrlo velikom crvenim pomakom vidimo kakvi su oni bili u mladom svemiru.

Ako postavimo da je  $\dot{d}_p(t_e) = 0$ , vrlo jednostavno pronalazimo da se maksimum postiže u  $d_p(t_e) = (8/27)(c/H_0)$  za  $z = 5/4$ .

Sudbina zakrivljenog svemira koji sadrži samo nerelativističku masu ovisi o parametru gustoće  $\Omega_0$ . Friedmanova jednadžba za zakrivljeni svemir koji sadrži samo nerelativističku masu glasi

$$\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_0}{a^3} + \frac{1 - \Omega_0}{a^2} \quad (2.71)$$

budući da je  $\Omega_m = \Omega_0$  u ovom modelu. Jednadžba (2.64) za zakrivljeni svemir ispunjen nerelativističkom masom ima oblik

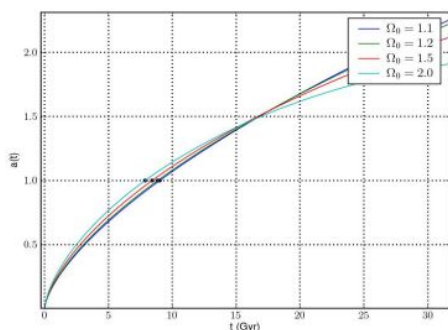
$$\int_0^a \frac{da}{[\Omega_0/a + (1 - \Omega)]^{1/2}} = H_0 t. \quad (2.72)$$

Ovisno o parametru gustoće, integral ima dva rješenja

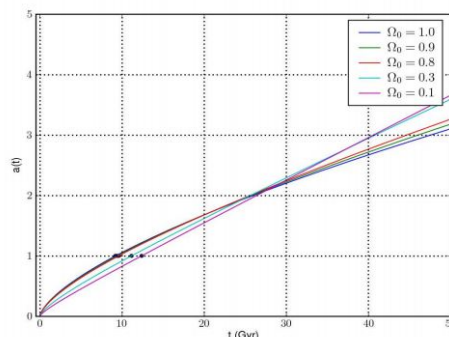
$$a(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} (1 - \cos\theta) & \kappa = +1; 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \frac{1}{2} \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} (1 - \cosh\theta) & \kappa = -1; \theta \geq 0 \end{cases}$$

Iz slike (2.2) je vidljivo da se pozitivno zakrivljen svemir koji sadrži samo materiju neće širiti zauvijek. U trenutku kada je  $a = \Omega_0/(\Omega_0 - 1)$ ,  $H(t)$  ima vrijednost 0 i svemir se prestaje širiti. U tom trenutku svemir se počinje kontrahirati do trenutka kada je  $a = 0$ . Sudbina takvog svemira često se naziva *Big Crunch*. Kada je svemir u stanju kontrahiranja, mi ćemo mjeriti plavi pomak. Ukoliko je svemir negativno zakrivljen, doživjet će istu sudbinu kao i ravni svemir-*Big Chill*.

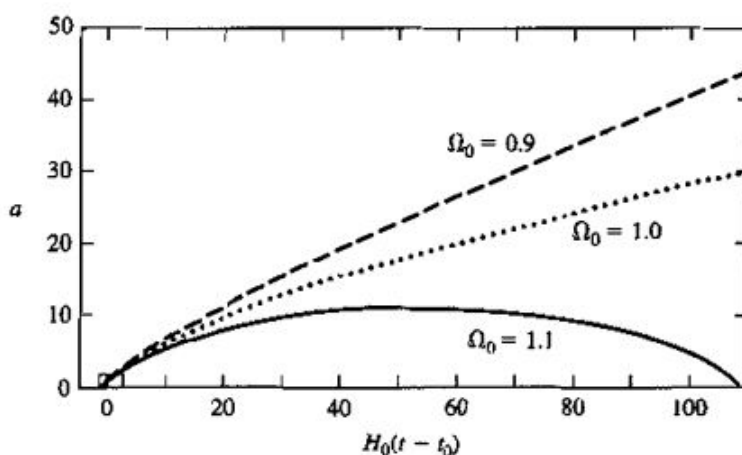
Iz slike (2.4) se vidi, ukoliko živimo u pozitivno zakrivljenom svemiru kojim dominira materija, da je teško odrediti vrijednost zakrivljenost u sadašnjosti. Grafovi se tek počinju razlikovati značajnije nakon Hubbleovog vremena.



Slika 2.2: Svemir koji sadrži samo materiju i za koji je  $\kappa = +1$ . Slika preuzeta iz [22].



Slika 2.3: Svemir koji sadrži materiju i za koji je  $\kappa = -1$ . Slika preuzeta iz [22].



Slika 2.4: Ovisnost faktora skale o kozmološkom vremenu za svemir koji sadrži samo nerelativističku masu. Slika preuzeta iz [1].

## Sitterov svemir

De Sitterov svemir opisuje ravni svemir ( $\kappa = 0$ ), bez materije  $\epsilon_m = 0$ , te bez radijacije  $\epsilon_r = 0$ . Jedina komponenta svemira je tamna energija, tj. kozmološka konstanta. Friedmannova jednačba za ravni svemir koji sadrži samo kozmološku konstantu glasi

$$\ln(a) = H_0 dt \Rightarrow a(t) = e^{H_0(t-t_0)}. \quad (2.73)$$

Na prvi pogled, rješenje Sitterovog svemira se čini strogo matematičko budući da je očito da svemir, uz kozmološku konstantu, sadrži barionsku masu i radijaciju. Međutim, ako se svemir nastavi širiti, gustoća materije i radijacije će se toliko smanjiti da će prevladavati utjecaj kozmološke konstante. Vlastita udaljenost svjetlosnog izvora, koji ima crveni pomak  $z$  u vrijeme kada ga mi mjerimo je

$$d_p(t_0) = c \int_{t_e}^{t_0} e^{H_0(t_0-t)} dt = \frac{c}{H_0} [e^{H_0(t_0-t)} - 1] = \frac{c}{H_0} z, \quad (2.74)$$

dok je vlastita udaljenost u vrijeme emitiranja svjetlosti

$$d_p(t_e) = \frac{c}{H_0} \frac{z}{1+z}. \quad (2.75)$$

Sitterov model svemira je ujedno i jedini model u kojem vlastita udaljenost linearno ovisi o crvenom pomaku. U drugim modelima,  $d_p \propto z$  vrijedi samo u limesu  $z \ll 1$ . Također, možemo primijetiti da u limesu  $z \rightarrow \infty$ ,  $d_p(t_0) \rightarrow \infty$ , ali  $d_p(t_e) \rightarrow c/H_0$ . U ovom modelu svemira, svjetlosni objekti u trenutku kada ih promatramo su na vrlo velikoj udaljenosti ( $d_p \gg c/H_0$ ), ali mi ih vidimo onakvima kakvi su bili netom prije nego su dosegli udaljenost  $c/H_0$ .

Štoviše, u Sitterovom svemiru postoje područja koja ne mogu međusobno komunicirati, tj. postoji horizont događaja (kozмолоški horizont).

Ako želimo odrediti područje koje je kauzalno povezano s opažačem u ishodištu, promatraju se fotoni koji se gibaju radialno iz ishodišta prema van. Rješenje Friedmanove jednačbe za Sitterov svemir je  $a(t) = a_0 e^{H_0 t}$  te je stoga element duljine dan s

$$ds^2 = 0 = dt^2 - a_0^2 e^{2H_0 t} dr^2. \quad (2.76)$$

Iz gornje jednačbe slijedi

$$dr = \frac{1}{a_0} e^{-H_0 t} dt. \quad (2.77)$$

Integriranjem dobivamo

$$r = \frac{1}{a_0 H_0} (1 - e^{-H_0 t}). \quad (2.78)$$

U limesu  $t \rightarrow \infty$  imamo

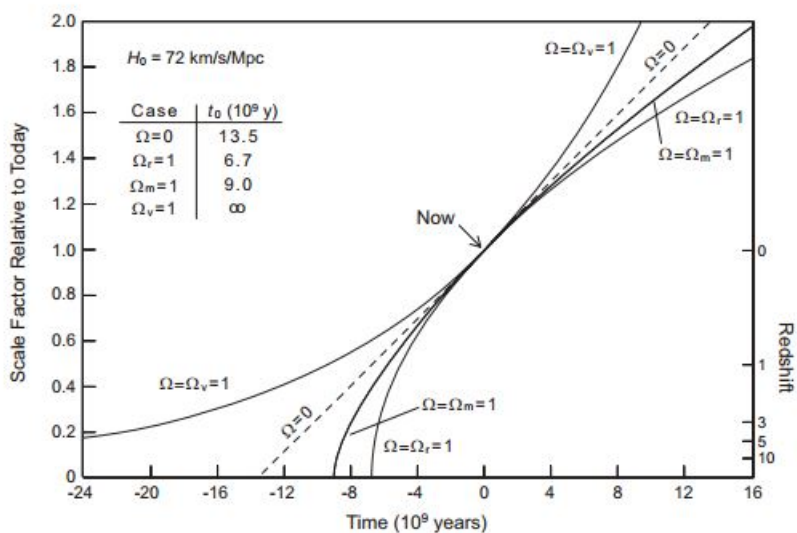
$$r = \frac{1}{a_0 H_0}. \quad (2.79)$$

Dakle, postoji maksimalna koordinatna udaljenost koju fotoni mogu preći, čak i kada za to imaju beskonačno vremena. Opće rješenje Friedmanove jednačbe za svemir koji sadrži samo kozmološku konstantu je

$$a(t) = \begin{cases} \sinh Ht & \kappa = -1 \\ e^{Ht} & \kappa = 0 \\ \cosh Ht & \kappa = +1, \end{cases}$$

Možemo zaključiti da sva rješenja evoluiraju prema slučaju  $\kappa = 0$  kako se svemir širi. Općenito,  $H$  nije Hubbleov parametar u proizvoljnom trenutku  $t$ , osim u slučaju  $\kappa = 0$ , ali teži  $H_0$  kako hiperbolna funkcija postaje sve bliža eksponencijalnoj u ekspanirajućem svemiru.

Na slici (2.5) prikazani su grafovi ovisnosti faktora skale  $a$  o vremenu  $t$  ravni svemir koji sadrži samo jednu komponentu.



Slika 2.5: Ovisnost faktora skale o kozmološkom vremenu za ravni svemir s jednom komponentom. Slika preuzeta iz [1].

### Svemir koji sadrži samo radijaciju

Promotrimo slučaj ravnog svemira koji sadrži samo komponentu radijacije. U ovom slučaju, jednačba (2.64) izgleda

$$H_0 t = \int_0^a \frac{ada}{\Omega_{rel,0}} = \frac{1}{2\sqrt{\Omega_{rel,0}}} a^2 = \frac{1}{2} a^2 \quad (2.80)$$

ili

$$a(t) \approx (2H_0 t)^{1/2}. \quad (2.81)$$

Vlastita udaljenost u vrijeme mjerenja za ovaj model svemira je

$$d_p(t_0) = \frac{c}{H_0} \frac{z}{1+z}, \quad (2.82)$$

a u vrijeme emitiranja svjetlosti

$$d_p(t_0) = \frac{c}{H_0} \frac{z}{(1+z)^2}. \quad (2.83)$$

Kao i svemir ispunjen samo nerelativističkom komponentom, ovaj model svemira se također širi usporeno. Prema teoriji velikog praska rani svemir je bio dominiran radijacijom.

### Svemir materije i kozmološke konstante

Friedmanova jednačba za ravni svemira koji sadrži samo materiju i kozmološku konstantu ima oblik

$$\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + (1 - \Omega_{m,0}), \quad (2.84)$$

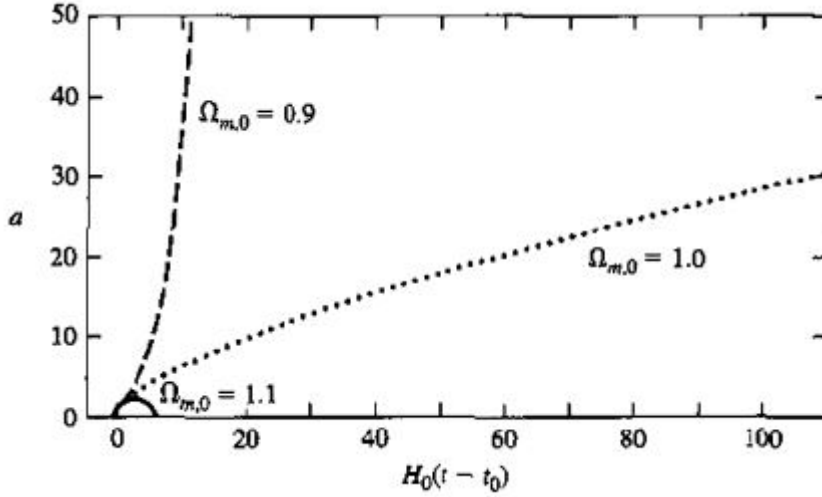
gdje je  $\Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{m,0}$  budući da je  $\kappa = 0$ . Prvi član na desnoj strani jednačbe (2.84) je uvijek pozitivan jer predstavlja nerelativističku masu. Drugi član predstavlja kozmološku konstantu i za  $\Omega_{m,0} < 1$  je pozitivan, a za  $\Omega_{m,0} > 1$  je negativan. U prvom slučaju sudbina svemira je Big Chill, a u drugom Big Crunch budući da negativna kozmološka konstanta predstavlja privlačnu silu. Ravni svemir negativne kozmološke konstante će se prestati širiti u trenutku kada je

$$a_{\max} = \left( \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_m - 1} \right), \quad (2.85)$$



a kolaps doživljava u trenutku

$$t_{\text{kolaps}} = \frac{2\pi}{3H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m,0} - 1}}. \quad (2.86)$$



Slika 2.6: Ovisnost faktora skale o kozmološkom vremenu za ravni svemir koji sadži materiju i kozmološku konstantu. Slika preuzeta iz [1].

Primjetimo, ravan svemir koji sadži negativnu kozmološku konstantu, ima kratak vijek trajanja. Tako, za slučaj  $\Omega_{m,0} = 1.1$  prikazan na slici (2.6) vrijeme kolapsa  $t_{\text{kolaps}} = 7H_0^{-1}$  Friedmannova jednadžba za ovaj model svemira ali kojem je kozmološka konstanta pozitivna je

$$H_0 t = \frac{2}{3\sqrt{1 - \Omega_{m,0}}} \ln \left[ \left( \frac{a}{a_{m,\Lambda}} \right)^{3/2} + \sqrt{1 + \left( \frac{a}{a_{m,\Lambda}} \right)^3} \right], \quad (2.87)$$

gdje je

$$a_{m,\Lambda} = \left( \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right). \quad (2.88)$$

U ranom svemiru, kada je  $a \ll a_{m,\Lambda}$  faktor skale je imao ovisnost

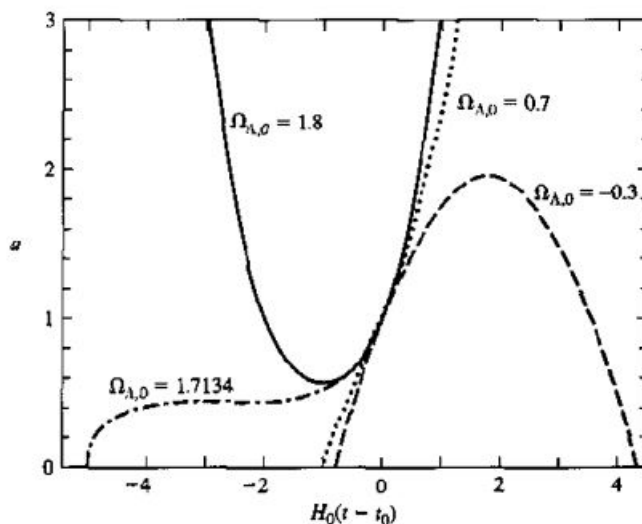
$$a(t) \approx \left( \frac{3}{2} \sqrt{\Omega_{m,0}} H_0 t \right)^{2/3}, \quad (2.89)$$

a kasnije, kada je  $a \gg a_{m,\Lambda}$

$$a(t) \approx a_{m,\Lambda} e^{\sqrt{1-\Omega_{m,0}} H_0 t}. \quad (2.90)$$

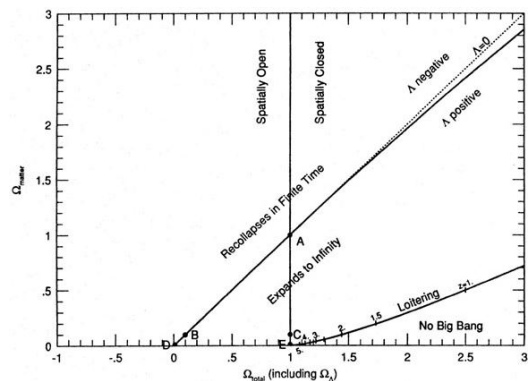
Ukoliko svemir koji sadrži kozmološku konstantu i nerelativističku masu nije ravan, susrećemo se sa širokom lepezom mogućnosti kao što je prikazano na slici (2.7). Zakrivljen svemir s komponentom nerelativističke mase i kozmološkom konstantom ima Friedmannovu jednadžbu

$$\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda,0}. \quad (2.91)$$

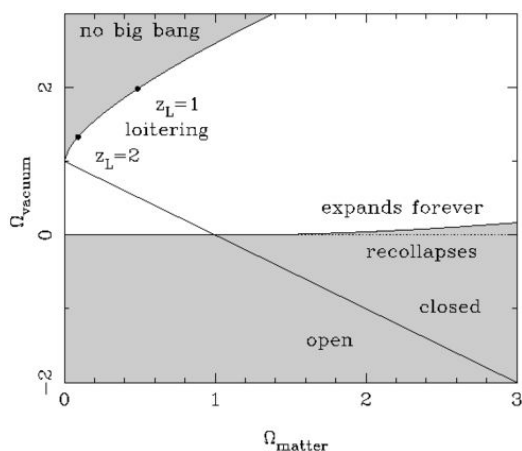


Slika 2.7: Svemir u kojem je  $\Omega_{m,0} = 0.3$ , a  $\kappa$  i  $\Omega_{\Lambda,0}$  mijenjaju vrijednost. Slika preuzeta iz [1].

Uz već spomenute sudbine svemira kao što su Big Chill i Big Crunch, u ovom modelu svemira može doći i do *Big Bounce* ili do faze koju zovemo *loitering*. Ako su i  $\Omega_{m,0}$  i  $\Omega_{\Lambda,0}$  pozitivni, onda su prvi i zadnji član desne strane jednadžbe (2.90) pozitivni, te ukoliko je svemir pozitivno zakrivljen, srednji član može biti i pozitivan i negativan. Dakle,  $H^2$  će biti pozitivan za male vrijednosti  $a$  (kada dominira nerelativistička masa i za velike vrijednosti  $a$ , kada dominira kozmološka konstanta, a negativan za vrijednosti između. Budući da je negativna vrijednost  $H^2$  nefizikalna, to bi značilo da postoje zabranjene vrijednosti faktora skale. Međutim, pretpostavimo da je na početku svemira  $a \gg 1$  i  $H < 0$ . U tom slučaju



Slika 2.8: Mogući ishodi za svemir koji sadrži  $\Lambda$  i materiju. Slika preuzeta iz [17].



Slika 2.9: Mogući ishodi za svemir koji sadrži  $\Lambda$  i materiju. Slika preuzeta iz [18].

svemir bi se kontrahirao iz faze u kojoj dominira kozmološka konstanta do trenutka kada srednji član u jednadžbi (2.91) postane dominantan, tj. do trenutka kada je  $a = a_{\min}$ . Nakon tog bi svemir počeo ekspanirati. Dakle, moguće je da svemir ekspanira bez početnog velikog praska. Također, pri pažljivo odabranim vrijednosti  $\Omega_{m,0}$  i  $\Omega_{\Lambda,0}$  moguće je da se dogodi tzv. loitering faza. Naime, ukoliko bi ranim svemirom dominirala nerelativistička masa svemir bi se širio  $a \propto t^{2/3}$  i za određene vrijednosti kozmoloških komponenti bi mogao ući u tzv. loitering fazu, gdje je  $a$  gotovo konstantano kroz dugi period.

Interes za loitering fazu svemira se naglo povećao 60-ih godina prošlog stoljeća kada su mjerenja pokazala povećan broj kvazara sa  $z \approx 2$ . Naime, loitering crvenog pomaka se događa ako je kozmološka konstanta uravnotežena s gustoćom materije tako da je  $(1+z)^3 = \Omega_{\Lambda,0}/\Omega_{m,0}$ , gdje je  $\Omega_{\Lambda,0} = \lambda/3H$ . Također, Loitering svemir ima neka zanimljiva svojstva koja se ne pojavljuju u drugim modelima. Tako, duga loitering faza rezultira starijim svemirom, što donekle ublažava problem starosti svemira kod modela svemira kojima dominira materija. Također perturbacije gustoće su eksponencijalne  $\delta \propto \exp(\sqrt{4\pi G}t)$ , a ne slabe  $\delta \propto t^{2/3}$  kao u Einstein-Sitter svemiru.

Na slikama (2.8) i (2.9) su prikazane razne mogućnosti za svemir koji sadrži nerelativističku masu i kozmološku konstantu.

### Benchmark model

Benchmark model, danas najprihvaćeniji model svemira, je ravan, sadrži materiju, radijaciju i kozmološku konstantu.

Pri računanju energijske gustoće fotona uzimamo u obzir samo mikrovalno pozadinsko zračenje budući da je taj doprinos energiji veći od doprinosa svih fotona stvorenih u zvijezdama od početka svemira

$$\epsilon_{CMB} = \alpha T_0^4 = 0.260 \text{ MeV m}^{-3}. \quad (2.92)$$

Što povlači da je parametar gustoće CMB-a

$$\Omega_{CMB} = \frac{\epsilon_{CMB,0}}{\epsilon_{k,0}} = \frac{0.260 \text{ MeV m}^{-3}}{5200 \text{ MeV m}^{-3}} = 5.0 \times 10^{-5}. \quad (2.93)$$

Ako pretpostavimo da galaksije emitiraju svjetlost jednakom stopom zadnjih 14 giga godina onda je ukupna gustoća energije galaktičke svjetlosti

$$\epsilon_{\text{galaktičke svj.}} L t_0 \approx 0.007 \text{ MeV m}^{-3}, \quad (2.94)$$

gdje je  $L$  srednji luminozitet zvijezda, a  $n$  srednji broj zvijezda.

Dakle, prosječna energijska gustoća fotona zvijezda je tek 3% ukupne energijske gustoće CMB. U komponentu radijacije ulazi i kozmičko pozadinsko neutrino zračenje. Smatra se da energetska gustoća relativističkih neutrina

$$\epsilon_\nu = \frac{7}{8} \left( \frac{4}{11} \right)^{4/3} \epsilon_{CMB} \approx 0.277 \epsilon_{CMB} \rightarrow \Omega_\nu = 0.681 \Omega_{CMB}. \quad (2.95)$$

Dakle, parametar gustoće radijacije u Benchmark modelu iznosi

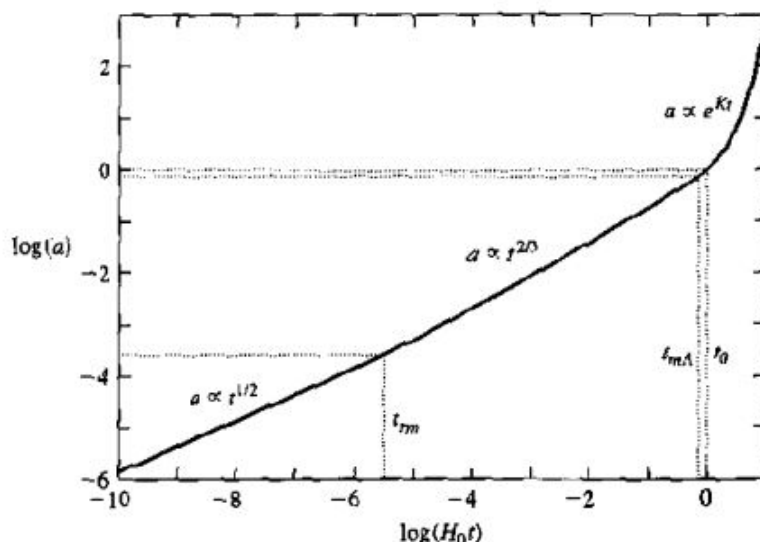
$$\Omega_{r,0} = \Omega_{CMB,0} + \Omega_{\nu,0} = 5 \times 10^{-5} + 3.5 \times 10^{-5} = 8.4 \times 10^{-5}. \quad (2.96)$$

Nerelativistička masa se sastoji on barionske mase ali i od tamne materije. Od toga 4% čini barionska masa, a 26% čini tamna materija. Kako je svemir ravan, vrijedi  $\Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{rel,0} - \Omega_{nerel,0} \approx 0.70$ . Benchmark model svemira je bio prvo dominiran radijacijom, zatim nerelativističkom masom, a sada ulazi u fazu u kojem dominira kozmološka konstanta. Vektor skale u vrijeme kada su materija i radijacija jednako pridonosile gustoći svemira je iznosio

$$\frac{\epsilon_m(a)}{\epsilon_r(a)} = \frac{\epsilon_{m,0}}{\epsilon_{r,0}} a \rightarrow a_{r,m} = \frac{\epsilon_{m,0}}{\epsilon_{r,0}} \approx 2.8 \times 10^{-4}, \quad (2.97)$$

dok se energijska jednakost  $\Lambda$  i materije dogodila

$$\frac{\epsilon_\Lambda(a)}{\epsilon_m(a)} = \frac{\epsilon_{\Lambda,0}}{\epsilon_{m,0}} a^3 \rightarrow a_{m,\Lambda} \approx \left( \frac{0.3}{0.7} \right)^{1/3} \approx 0.75. \quad (2.98)$$



Slika 2.10: Benchmark model svemira. Slika preuzeta iz [1].

Slika (2.10) pokazuje ovisnost faktora skale o vremenu za Benchmark model. Iz slike je očito da živimo u vremenu kada je gustoća energije nerelativističke mase jednaka gustoći energije kozmološke konstante. U limesu  $z \rightarrow \infty$ ,  $d_p(t_0) \rightarrow 3.24c/H_0$  što znači da Benchmark model svemira ima konačan horizont. Ako je ovaj model točan to nam ukazuje da ne možemo vidjeti objekte koji su dalje od 14 gigaparseka jer svjetlost nije imala vremena doći do nas.

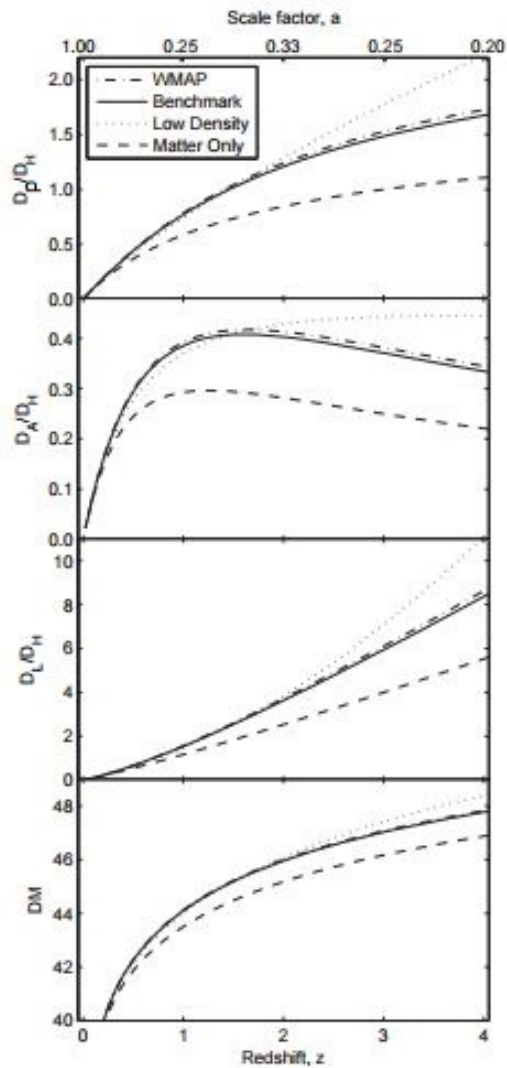
Jedno od najporeznijih istraživanja i najdetaljnijih mjerenja svemira provedeno je 2001. god. satelitom WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe). Kombinirajući s podacima dobivenim Sloanovim digitalnim pregledom neba (Sloan Digital Sky Survey), Hubbleovim svemirskim teleskopom (Hubble Space Telescope), COBE satelitom (Cosmic Background Explorer Satellite), uzimajući teorijsku pretpostavku gustoće neutrina te da je svemir ravan, dobiveni su podaci za svemir kao što su navedeni u tablici.

Model svemira	$H_0(km/sMpc)$	$\Omega_{m,0}$	$\Omega_r,0$	$\Omega_{\Lambda,0}$	$\Omega_0$	Starost(bil. god.)	Horizont (Mpc)
WMAP	70.4	0.2722	8.42E-5	0.728	1.000000	13.75	14.375
Benchmark	70	0.3	8.4E-5	0.7	1.000084	13.46	13.897
Low density	70	0.05	8.4E-5	0	0.050084	13.04	17.802
Materija samo	70	1.0	0	0	1.0	9.31	8.558

Iz tablice je vidljivo da je razlika starosti svemira i udaljenosti horizonta između WMAP i Benchmark modela 3%. Međutim, 3% je više od  $3\sigma$  što čini točnost Benchmark modela

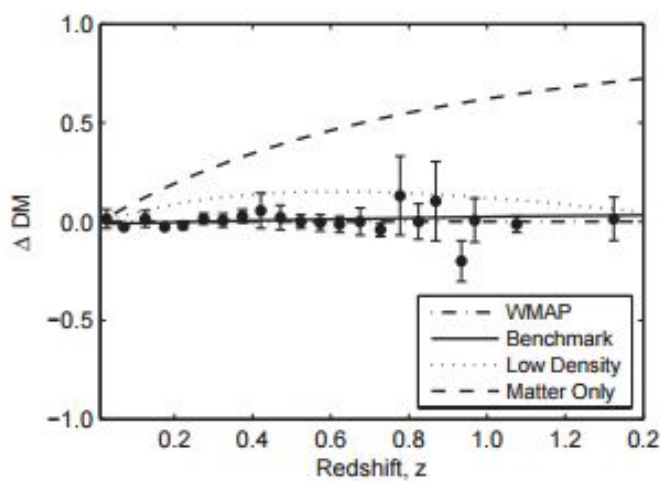
upitnom.

U tablici su također navedeni podaci za Low density model svemira. Taj model uključuje samo ono što je dosad izmjereno u svemiru, tj. radijaciju i materiju te prema teoriji generalne relativnosti, veliku negativnu zakrivljenosti. Iz slike (2.11) možemo vidjeti da je Low Density model konzistentan s mjerenjima do  $z \approx 2$ .



Slika 2.11: Udaljenost u ovisnosti o crvenom pomaku. Redom grafovi, od vrha prema dnu: vlastita udaljenost, kutna udaljenost, luminozna udaljenost, modularna udaljenost. Slika preuzeta iz [13].

Detaljnija mjerenja Union-2 SN satelitom, iz 2010. godine, prikazana na slici (2.12) ukazuju da danas, s velikom sigurnošću, možemo odbaciti Low density model i model svemira koji sadrži samo materiju.



Slika 2.12: Udaljenost u ovisnosti o crvenom pomaku. Slika preuzeta iz [13].

## Poglavlje 3

# Određivanje kozmoloških parametara

### 3.1 Metoda najmanjih kvadrata

Jedna od najvažnijih metoda za obradu eksperimentalnih podataka je metoda najmanjih kvadrata. Osnovni problem koji rješava ova metoda je kako iz dobivenih eksperimentalnih podataka dobiti funkcionalnu ovisnost.

Neka je funkcija  $f$  zadana na diskretnom skupu točaka  $x_0, \dots, x_n$ . Pretpostavljamo da je tih točaka mnogo više nego nepoznatih parametara aproksimacijske funkcije.

Aproksimacijska funkcija

$$\varphi(x, a_0, \dots, a_m) \quad (3.1)$$

određuje se iz uvjeta da je 2-norma vektora pogrešaka u čvorovima aproksimacije

$$S = \sum_{k=0}^n (f(x_k) - \varphi(x_k))^2 \rightarrow \min. \quad (3.2)$$

Kvadrat 2-norme vektora greške  $S$  je funkcija nepoznatih parametara

$$S = S(a_0, \dots, a_m). \quad (3.3)$$

Budući da  $S$  ima kvadratnu ovisnost očito je uvijek pozitivana, neovisno o parametrima. Dakle, postavlja se pitanje kako minimizirati funkciju  $S$  kao funkciju više varijabli  $a_0, \dots, a_m$ . Kako je  $S$  funkcija u ovisnosti o parametrima  $a_k$ , ona je dovoljno glatka funkcija te je nužni uvjet ekstrema

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 0 \quad k = 0, \dots, m. \quad (3.4)$$



Ukoliko želimo zadane točke  $(x_0, f_0), \dots, (x_n, f_n)$  aproksimirati pravcem

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x, \quad (3.5)$$

greška aproksimacije u čvorovima koje minimaliziramo će biti

$$S(a_0, a_1) = \sum_{k=0}^n (f_k - \varphi(x_k))^2 = \sum_{k=0}^n (f_k - a_0 - a_1 x_k)^2 \rightarrow \min. \quad (3.6)$$

Parcijalne derivacije za parametre  $a_0$  i  $a_1$  su

$$0 = \frac{\partial S}{\partial a_0} = -2 \sum_{k=0}^n (f_k - a_0 - a_1 x_k), \quad (3.7)$$

$$0 = \frac{\partial S}{\partial a_1} = -2 \sum_{k=0}^n (f_k - a_0 - a_1 x_k) x_k. \quad (3.8)$$

Ako podijelimo prethodne jednadžbe s 2 i sredimo po nepoznicama  $a_0$  i  $a_1$ , dobivamo linearni sustav

$$a_0(n+1) + a_1 \sum_{k=0}^n x_k = \sum_{k=0}^n f_k \quad (3.9)$$

$$a_0 \sum_{k=0}^n x_k + a_1 \sum_{k=0}^n x_k^2 = \sum_{k=0}^n f_k x_k. \quad (3.10)$$

Označimo li

$$s_l = \sum_{k=0}^n x_k^l, \quad t_l = \sum_{k=0}^n f_k x_k^l, \quad l \geq 0, \quad (3.11)$$

tada linearni sustav možemo pisati

$$s_0 a_0 + s_1 a_1 = t_0 \quad (3.12)$$

$$s_1 a_0 + s_2 a_1 = t_1. \quad (3.13)$$

Uz prirodan uvjet pravca da imamo barem dvije različite točke  $x_k$  i iz linearne nezavisnosti vektora

$$(1, 1, \dots, 1)^T \quad (x_0, x_1, \dots, x_n)^T, \quad (3.14)$$

očito je da je matrica sustava regularna te da imamo jedinstveno rješenje.

Da bi dokazali da je to minimum trebamo dokazati pozitivnu definiranost Hesseove matrice.<sup>1</sup> Međutim, budući da  $S$  predstavlja paraboloid s otvorom prema gore, u varijablama  $a_0, a_1$ , očito je da takvi paraboloidi imaju minimum.

Međutim  $\varphi$  ne mora linearno ovisiti o parametrima. U tom slučaju imamo nelinearan sustav jednažbi koji se relativno teško rješava. U tom slučaju imamo ozbiljan optimizacijski problem koji se rješava metodama pretraživanja ili posebno prilagođenim metodama upravo za rješavanje nelinearnog problema najmanjih kvadrata kao npr. Levenberg–Marquardt metoda. Ponekad se problem može transformirati u linearni problem najmanjih kvadrata. Međutim, rješenja lineariziranog problema najmanjih kvadrata i rješenja originalnog nelinearnog problema, u principu, nisu jednaka zbog različitih mjera za udaljenost, tj. grešku.

Neka su zadane točke  $(x_0, f_0), \dots, (x_n, f_n)$ , koje po diskretnoj metodi najmanjih kvadrata aproksimiramo funkcijom oblika

$$\varphi(x) = a_0 e^{a_1 x}. \quad (3.15)$$

Greška u čvorovima koje minimaliziramo je

$$S = S(a_0, a_1) = \sum_{k=0}^n (f_k - \varphi(x_k))^2 = \sum_{k=0}^n (f_k - a_0 e^{a_1 x_k})^2 \rightarrow \min. \quad (3.16)$$

Parcijalnim deriviranjem po varijablama  $a_0$  i  $a_1$  dobivamo nelinearan sustav jednažbi

$$0 = \frac{\partial S}{\partial a_0} = -2 \sum_{k=0}^n (f_k - a_0 e^{a_1 x_k}) e^{a_1 x_k}, \quad (3.17)$$

$$0 = \frac{\partial S}{\partial a_1} = -2 \sum_{k=0}^n (f_k - a_0 e^{a_1 x_k}) a_0 x_k e^{a_1 x_k}. \quad (3.18)$$

Logaritmiranjem funkcije

$$\varphi(x) = a_0 e^{a_1 x} \quad (3.19)$$

imamo

$$\ln \varphi(x) = \ln(a_0) + a_1 x. \quad (3.20)$$

---

<sup>1</sup>Hesseova matrica je kvadratna matrica derivacija drugoga reda funkcije  $\varphi$ . Često je se označava  $\nabla^2 \varphi$ . Matrica  $A$  je pozitivno definitna ako za svaki ne nul-vektor  $x \neq 0$  vrijedi da je  $x^* A x > 0$ , gdje je  $x^*$  kompleksno konjugiran vektor  $x$ .

Logaritmiranjem funkcije  $f$  u točkama  $x_k$  te supstituiranjem dobivamo

$$h(x) = \ln f(x) \quad h_k = h(x_k) = \ln f(x) \quad k = 0, \dots, n. \quad (3.21)$$

$$\Psi(x) = \ln \varphi(x) = b_0 + b_1 x, \quad (3.22)$$

gdje je

$$b_0 = \ln a_0 \quad b_1 = a_1. \quad (3.23)$$

Dakle, imamo linearni problem najmanjih kvadrata

$$\tilde{S} = \tilde{S}(b_0, b_1) = \sum_{k=0}^n (h_k - \Psi(x_k))^2 = \sum_{k=0}^n (h_k - b_0 - b_1 x_k)^2 \rightarrow \min. \quad (3.24)$$

Iz toga slijedi da je

$$a_0 = e^{b_0} \quad a_1 = b_1. \quad (3.25)$$

Ovako dobiveno rješenje uvijek daje pozitivan  $a_0$ , tj.  $\varphi(x)$ . Očito je da je to točno rješenje samo za  $(x_k, f_k)$  u slučaju kada je  $f_k$  pozitivno. Ipak, i kad su neki  $f_k \leq 0$ , korištenjem translacije svih podataka možemo dobiti sve pozitivne  $f'_k$  te se postupak ponavlja.

Na kraju, postavlja se pitanje kako znamo jesmo li izabrali dobar oblik aproksimacijske funkcije? Ukoliko graf pogreške jednoliko oscilira oko nule onda je izabrana odgovarajuća funkcija.

## 3.2 Određivanje Hubbleove konstante

Suvremena astronomija, bazirana na Friedmanovoj jednadžbi, se bavi problematikom opisanja svemira uz pomoć faktora skale i mogućih komponenti svemira. Ukoliko bismo mjerenjima mogli odrediti komponente svemira, faktor skale bi jednostavno proizlazio iz Friedmanove jednadžbe. No, također, ako bismo znali faktor skale, mogli bismo odrediti energijsku gustoću svake komponente svemira.

Budući da je određivanje točne funkcionalne ovisnosti  $a(t)$  zahtjevno, korisno je razviti Taylorov red za  $a(t)$  u trenutaku  $t_0$

$$a(t) = a(t_0) + \left. \frac{da}{dt} \right|_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 a}{dt^2} \right|_{t=t_0} (t - t_0)^2 + \dots \quad (3.26)$$

Budući da  $a(t)$  ne varira značajno s vremenom, uzimajući u obzir samo prvih nekoliko članova Taylorovog reda dobit ćemo dovoljno dobru aproksimaciju faktora skale  $a(t)$ . Ukoliko uzmemo u obzir samo prva tri člana Taylorovog reda za  $a(t)$  u trenutku  $t_0$ , te podijelimo jednadžbu s faktorom skale u sadašnjosti  $a(t_0)$  dobivamo

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} \approx 1 + \left. \frac{\dot{a}}{a} \right|_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\ddot{a}}{a} \right|_{t=t_0} (t - t_0)^2. \quad (3.27)$$

Koristeći normalizaciju  $a(t_0) = 1$  imamo

$$a(t) \approx 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2, \quad (3.28)$$

gdje je  $q_0$  bezdimenzionalni deceleracijski parametar

$$q_0 = - \left( \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \right)_{t=t_0} = - \left( \frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2 H^2} \right)_{t=t_0}. \quad (3.29)$$

Pozitivna vrijednost  $q_0$  odgovara  $\ddot{a} < 0$  što bi značilo da se širenje svemira usporava. Naprotiv, negativna vrijednost  $q_0$  odgovara  $\ddot{a} > 0$  što bi značilo da se širenje svemira ubrzava.

U prethodnom poglavlju je pokazano da Hubbleov zakon  $r = \frac{c}{H_0} z$  vrijedi za male vrijednosti  $z$  bez obzira u kojem modelu svemira se nalazimo. Iz toga slijedi da bi prikazano na  $r$ - $z$  grafu, omjer  $c/H_0$  predstavljao nagib pravca. Dakle, da bismo odredili Hubbleovu konstantu, trebamo znati samo nagib pravca u  $r$ - $z$  grafu. Međutim, postavlja se pitanje kako odrediti udaljenost  $r$ ? Udaljenost  $r$  je vlastita udaljenost između dviju točaka kada je faktor skale fiksiran na nekoj vrijednosti. Ukoliko znamo komponente od kojih se sastoji svemir, lako možemo odrediti udaljenost  $r$  kao funkciju u ovisnosti o  $z$ . No ako želimo odrediti opći izraz za svojstvenu udaljenost bez obzira u kojem modelu svemira se nalazimo (budući da još ne znamo u kojem modelu svemira živimo) moramo koristiti razvoj faktora skale  $a(t)$  u Taylorov red budući da je on strogo matematički.

Kombinirajući izraz

$$d_p(t_0) = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (3.30)$$

i prva dva člana Taylorovg reda za  $a(t)$

$$\frac{1}{a(t)} \approx 1 - H_0(t - t_e) + \left( \frac{1 + q_0}{2} \right) H_0^2 (t - t_e)^2, \quad (3.31)$$

imamo

$$d_p(t_0) \approx c(t_0 - t_e) + \frac{cH_0}{2} (t_0 - t_e)^2. \quad (3.32)$$

Član  $c(t_0 - t_e)$  nam govori kolika bi bila udaljenost u statičnom svemiru, a  $cH_0(t_0 - t_e)/2$  je korekcija udaljenosti zbog širenja svemira. Kako je  $z = \frac{1}{a(t)} - 1$  jednadžbu (3.31) možemo izraziti preko  $z$  te iz toga izraziti lookback vrijeme,

$$z \approx H_0(t - t_e) + \left(\frac{1 + q_0}{2}\right) H_0^2(t - t_e)^2 \rightarrow t_0 - t_e \approx H_0^{-1} \left[ z - \frac{1 + q_0}{2} z^2 \right]. \quad (3.33)$$

Dakle, kombinirajući jednadžbe (3.32) i (3.33) imamo

$$d_p(t_0) \approx \frac{c}{H_0} \left[ z - \left(\frac{1 + q_0}{2}\right) z^2 \right] + \frac{cH_0}{2} \frac{z^2}{H_0^2} = \frac{c}{H_0} z \left[ 1 - \frac{1 - q_0}{2} z \right]. \quad (3.34)$$

Međutim, ono što najčešće mjerimo je luminozna udaljenost  $D_L$ . Koristeći metodu *standardnih svijetla* udaljenost  $D_L$  (u megaparsecima) računamo formulom

$$\mu = m - M = 5 \log_{10} D_L - 25, \quad (3.35)$$

gdje je  $\mu$  atenuacija sjaja zvijezde,  $M$  je apsolutni sjaj zvijezde,  $m$  prividan sjaj zvijezde. Prividnim sjajem zvijezda opisujemo koliko je zvijezda sjajna na našem nebu. Ovisi o njenom stvarnom sjaju, njenoj udaljenosti do nas i o količini zračenja koje apsorbira međuzvezdana materija na putu do nas.

Prividni sjaj zvijezde dan je formulom

$$m = -2.5 \log F + konst., \quad (3.36)$$

gdje je  $F$  tok zračenja. Kao primarni standard odabrana je zvijezda Vega,  $m_{\text{Vega}} = 0$  mag. Apsolutni sjaj  $M$  definiran je kao prividan sjaj koji bi zvijezda imala kada bi bila udaljena 10 Parseca.

Iz

$$F_{D_L} = \frac{L}{4\pi D_L^2}; F_{10} = \frac{L}{4\pi 10^2} \rightarrow \frac{F_{D_L}}{F_{10}} = \frac{100}{D_L^2} \rightarrow \mu = m - M = 5 \log_{10} D_L - 25. \quad (3.37)$$

Ali luminozna udaljenost nije vlastita udaljenost iz Hubbleovog zakona. Štoviše, u Rebertson-Walkers metrici, tok zračenja  $F$  je

$$F = \frac{L}{4\pi S_\kappa(r)^2}, \quad (3.38)$$

gdje je

$$S_\kappa(r) = \begin{cases} R_0 \sin(r/R_0) & \kappa = +1 \\ r & \kappa = 0 \\ R_0 \sinh(r/R_0) & \kappa = -1. \end{cases}$$

Dakle, ako je svemir pozitivno zakrivljen fotoni su raspršeni preko manje površine, a ako je negativno zakrivljen, fotoni su raspršeni preko veće površine te je tok manji nego što bi bio u ravnom svemiru. Dodatno, zbog širenja svemira tok zračenja je manji za faktor  $(1+z)^{-2}$ . Prvo, ukoliko je emitirana svjetlost valne duljine  $\lambda_e$ , u vrijeme kada je mi detektiramo svjetlost će imati valnu duljinu

$$\lambda_0 = \frac{1}{a(t_e)} \lambda_e = (1+z)\lambda_e. \quad (3.39)$$

Dakle, energija će pasti na vrijednost

$$E_0 = \frac{E_e}{1+z}. \quad (3.40)$$

Drugo, ako su dva fotona emitirana u intervalu  $\delta t_e$ , vremenski interval kada ih mi detektiramo će biti  $\delta t_0 = \delta t_e(1+z)$ .

Dakle, ukupan tok zračenja je

$$F = \frac{L}{4\pi S_k(r)^2(1+z)^2}. \quad (3.41)$$

Dosadašnja mjerenja upućuju na to da je svemir gotovo ravan, radijusa zakrivljenosti  $R_0$  većeg od trenutnog horizonta. Objekti s konačnim crvenim pomakom su na udaljenosti manjoj od horizonta, dakle, manjoj i od  $R_0$ . Stoga  $S_k \approx r$ . Nadalje, u slučaju ravnog svemira ovisnost između luminozne i vlastite udaljenosti je

$$D_L = r(1+z) = d_p(1+z) \quad (3.42)$$

Ako uvrstimo izraz (3.34) za vlastitu udaljenost u prethodnu jednadžbu dobivamo

$$D_L \approx \frac{c}{H_0} z \left( 1 - \frac{1+q_0}{2} z \right) (1+z) \approx \frac{c}{H_0} z \left( 1 + \frac{1-q_0}{2} z \right) \quad (3.43)$$

U limesu kada  $z \rightarrow 0$

$$d_p(t_0) \approx D_L \approx \frac{c}{H_0} z, \quad (3.44)$$

a tok zračenja

$$F \approx \frac{L}{4\pi D_L^2}. \quad (3.45)$$

Zaključujemo, za određivanje Hubbleove konstante možemo koristiti nagib pravca  $D_L - z$  grafa.

Trenutno najbolje standardne svijeće predstavljaju supernove tipa Ia. Budući da su supernove jako sjajne, moguće ih je vidjeti na velikim udaljenostima. Zahvaljujući toj činjenici, moguće je promatrati dijelove svemire udaljene od nas do  $1000Mpc$  što čini značajan dio procijenjenog horizonta svemira. Supernove tipa Ia nastaju u dvojnim zvjezdanim sustavima u kojima je bar jedan član bijeli patuljak, a drugi može biti bilo koja zvijezda, od crvenih divova do patuljaka. Bitno je da je bijeli patuljak mase  $M > 1.38M_0$ , ( $M_0$  je masa Sunca), jer su oni dovoljno nestabilni da se u njima može dogoditi kolosalna eksplozija. Budući da je ubrzanje sile teže na površini crvenog diva malo, bijeli patuljak svojom gravitacijom uspijeva polagano prisvajati materiju crvenog divu. Pritom dolazi do gubitka kutnog momenta i dvije zvijezde se polagano spiralno približavaju jedna drugoj što kao posljedicu dovodi do još bržeg povećanja mase bijelog patuljka. Kada masa bijelog patuljka naraste unutar 1% od Chandrasekharove granice od  $1.44M_0$ , počinje proces sabijanja bijelog patuljka. Ako se bijeli patuljak sastoji od ugljika i kisika zbog rasta temperature i tlaka uzrokovanih urušavanjem, u bijelom patuljku se počne odigravati fuzija ugljika i kisika. Budući da se patuljak sastoji od degenerirane materije koja se ne može polagano širiti, fuzijski procesi naglo podižu temperaturu u središtu patuljka na više od milijardu stupnjeva celzijevih te se ta energija naglo oslobađa u eksploziji koja uništava zvijezdu kada ona pređe kritičnu granicu od  $(1 - 2) \cdot 10^{44}J$ . Eksplozije bijelog patuljka su zbog Chandrasekharove granica i svojstva degenerirane tvari poprilično uniformne. Maksimalni apsolutni sjaj eksplozije je uvijek - 19.3 magnituda (oko 5 milijardi puta sjajnije od Sunca) s malo varijacija.

Na web stranici Supernova Cosmology Project <sup>2</sup> nalaze se podaci o nekoliko stotina supernova s podacima o imenu supernove, crvenom pomaku  $z$ , atenuaciji sjaja supernove  $\mu$  i eksperimentalnoj neododređenosti  $\Delta\mu$ .

Za male crvene pomake, ovisnost udaljenosti i crvenog pomaka dana je Hubbleovim zakonom

$$H_0 D_L = cz. \quad (3.46)$$

Za određivanje kozmoloških parametara koristit ćemo se programskim jezikom Python. To je interpreterski, interaktivni, objektu orjentiran, slobodan programski jezik sa vrlo dobrom popratnom dokumentacijom i literaturom. Budući da sadži brojne kvalitetne biblioteke za numeriku, simboliku, crtanje itd., Python se često koristi u istraživanjima i edukaciji iz fizike i srodnih područja znanosti i tehnike.

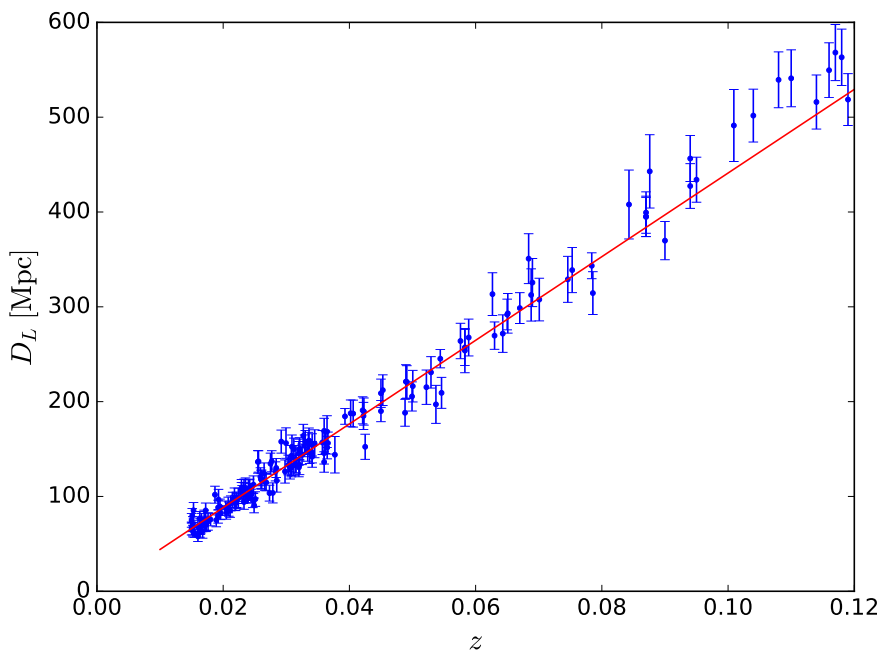
Hubbleovu konstantu (u km/s/Mpc) ćemo odrediti koristeći podskup mjerenja za koji je  $z < 0.12$ . U programskom jeziku Python smo napisali kod (prilog A), koji aproksimira pravac u  $D_L - z$  grafu metodom najmanjih kvadrata.

---

<sup>2</sup><http://supernova.lbl.gov/Union/>

Linearnom regresijom dobivamo da Hubblova konstanta iznosi:

$$H_0 = (68.0 \pm 0.4) \text{ km/s/Mpc.} \quad (3.47)$$



Slika 3.1:  $D_L - z$  graf

### 3.3 Određivanje ubrzanja ekspanzije svemira

Širenje svemira nema neku *brzinu* brzinu koja se povećava, već se sve kozmološke udaljenosti povećavaju za isti faktor. Ako bi živjeli u svemiru koji ima stalnu stopu širenja onda bi brzina udaljavanja bila jednostavno proporcionalna udaljenosti  $d$  prema Hubbleovom zakonu  $cz = H_0 d$ . Dakle, prema Hubbleovom zakonu, udaljeniji objekti bi imali veći crveni pomak bez da svemir ima promjenjivu stopu širenja. Prikazano na grafu, ovisnost crvenog pomaka i udaljenosti bi bio pravac.

No, što nam mogu pokazati mjerenja? Ukoliko znamo udaljenost do nekog objekta, tada možemo znati koliko vremena je svjetlosti trebalo da dođe do nas, i ukoliko je širenje svemira jednako kao što mjerimo danas, mogli bismo izračunati crveni pomak.

No što ako širenje svemira akcelerira ili decelerira? Ukoliko širenje decelerira, korištenje sadašnje stope širenja bi podcijenilo ukupno širenje dok je svjetlost putovala i pravi crveni

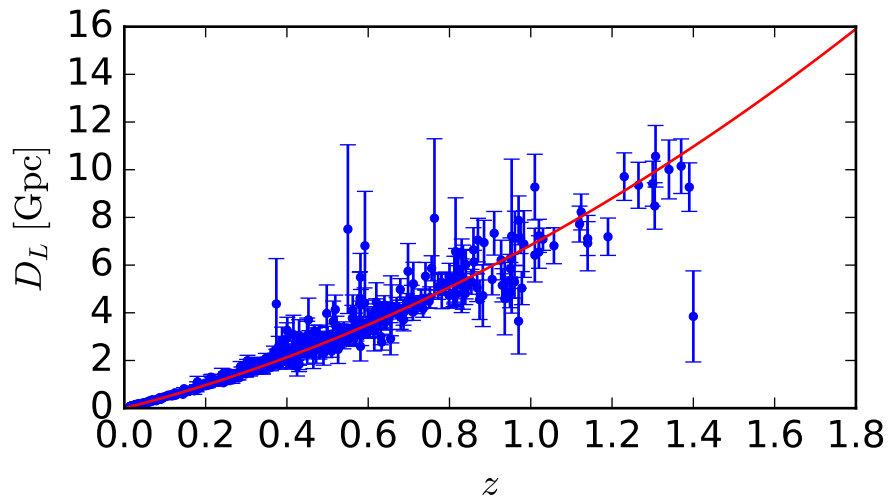


pomak bi bio veći od našeg predviđanja za danu udaljenost. Obratno, ukoliko je širenje akcelerirano, naš proračun bi precijenio ukupno širenje i pravi crveni pomak bi bio manji nego što smo izračunali.

Za veće crvene pomake Hubbleov zakon glasi

$$H_0 D_L = cz(1 + (1 - q_0)\frac{z}{2}), \quad (3.48)$$

gdje pozitivan parametar deceleracije  $q_0$  odgovara svemiru čije širenje usporava.



Slika 3.2:  $D_L - z$  graf

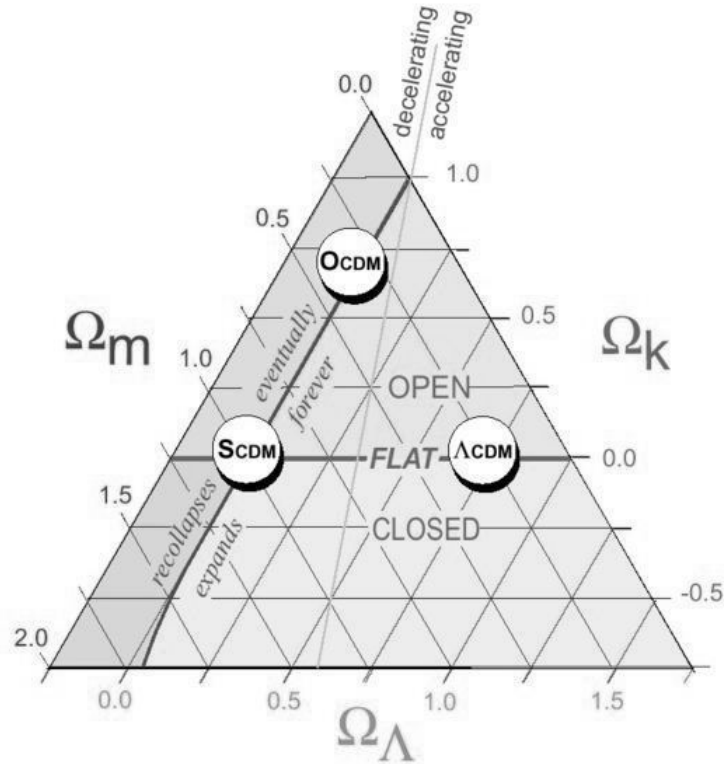
Iako iz mjernih podataka nije očito da postoji odstupanje Hubbleovog linearnog zakona, podataka ima dovoljno da statistička analiza nedvosmisleno pokaže kvadratnu ovisnost udaljenosti  $D_L$  i crvenog pomaka  $z$  gdje je bezdimenzionalni parametar deceleracije negativan i različit od nule

$$q_0 = -0.15 \pm 0.04, \quad (3.49)$$

a Hubbleov parametar,

$$H_0 = (69.18 \pm 0.37)\text{km/s/Mpc}. \quad (3.50)$$

Dakle, zaključujemo da živimo u svemiru koji se ubrzano širi. Postoje razni modeli u kojima se svemir širi ubrzano kako je prikazano na slici (3.3). Cilj znanstvenika 21. st. je otkriti koji se model najbolje slaže s opažanjima u svemiru.



Slika 3.3: Diagram svih modela svemira. Slika preuzeta iz [18].

### 3.4 Određivanje gustoće materije i tamne energije

Propagacija zrake svjetlosti od supernove do promatrača kroz svemir u širenju je određena sastavom svemira (obična i tamna materija različito djeluju od tzv. tamne energije koja uzrokuje ubrzanje širenja svemira).

Iz (3.30) i (3.42) imamo

$$D_L = (1+z)d_p = (1+z)c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.51)$$

$$D_L = (1+z)c \int_{1/(1+z)}^1 \frac{da}{a} \frac{1}{\frac{da}{dt}} \quad (3.52)$$

Koristeći jednadžbu (2.64) dobivamo

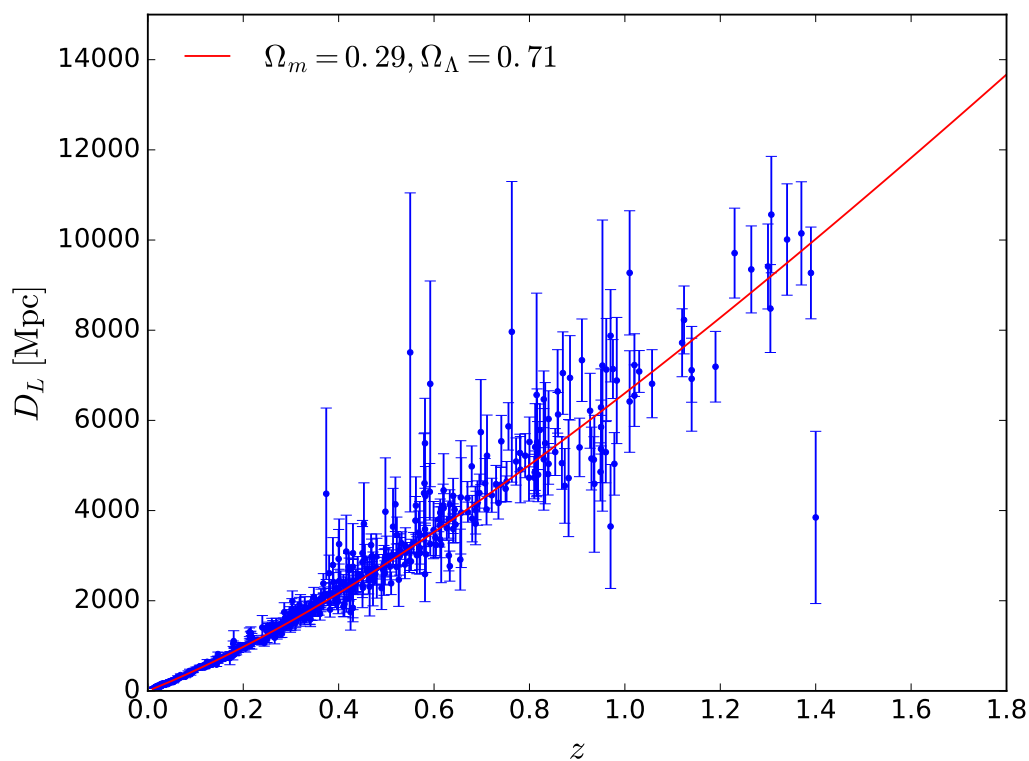
$$D_L H_0 = (1+z)c \int_{1/(1+z)}^1 \frac{da}{a \sqrt{\Omega_{r,0}/a^2 + \Omega_{m,0}/a + \Omega_{\Lambda,0}a^2 + (1 - \Omega_0)}} \quad (3.53)$$

Ukoliko fiksiramo ravnu geometriju prostora za koju je  $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$  dobivamo približno jednu trećinu materije i dvije trećine tamne energije.

$$\Omega_m = 0.29 \quad (3.54)$$

$$\Omega_\Lambda = 0.71 \quad (3.55)$$

Prikazujemo ovaj rezultat grafički na slici 3.4.



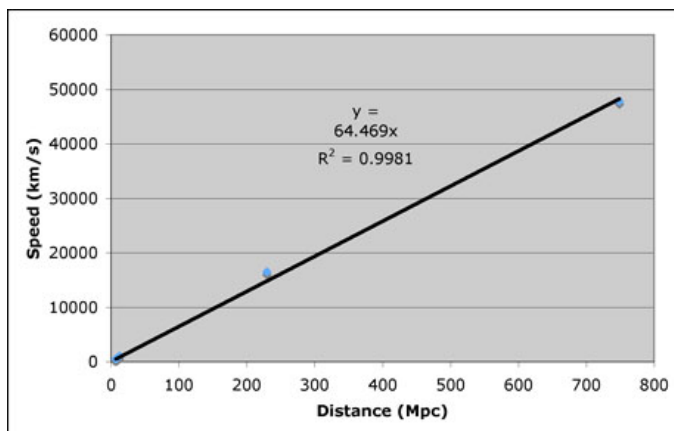
Slika 3.4: Ovisnost  $D_L - z$  za različite modele svemira

## Poglavlje 4

# Hubbleov zakon u nastavi fizike i astronomije

Otkriće ubrzanog širenja svemira se ne pojavljuje kao nastavna cjelina u kurikulumu predmeta fizike, već se može obrađivati u predmetu astronomija. U školama Republike Hrvatske, astronomija nije obvezni predmet već se može učiti kao izborni predmet, fakultativni predmet ili izvannastavna aktivnost (astronomska grupa-sekcija). Općenito, nema izvedbenog niti operativnog plana za predmet astronomije te stoga iziskuje dodatni napor profesora vezano uz izbor i obradu tema, kao i usklađivanje kurikuluma sa sadržajima predmeta matematike, fizike, geografija i sl. U ishodima predmetnog kurikuluma nastave fizike stoji da će učenik moći tumačiti širenje svemira pomoću Hubbleovog zakona, opisati glavne epohe nastanka svemira prema teoriji velikog praska, objasniti razvoj i strukturu raznih zvijezda, objasniti podrijetlo i nastanak različitih elemenata u svemiru. Također, u prijedlogu kurikuluma iz veljače 2016. godine, u obrazovne ishode petog ciklusa (3. i 4. razred srednje škole) za prirodoslovne predmete, u domeni *organiziranost prirodnih sustava* e stavljen naglasak na koncept širenja svemira. Dakle, može se očekivati da će s razvojem obrazovanja i ova tema postati obvezni dio kurikuluma za prirodoslovna područja.

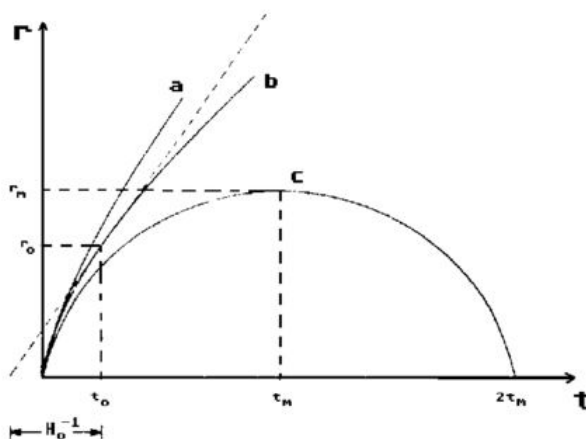
Hubbleov zakon ne predstavlja problem učenicima budući da se radi o običnoj linearnoj jednadžbi. Dopplerov efekt, potreban za razumijevanje Hubbleovog zakona, se uči u trećem razredu gimnazije. Štoviše, učenici mogu sami odrediti Hubbleovu konstantu. Koristeći se podacima o udaljenosti i crvenom pomaku mogu naći više pravaca kroz dvije točke u  $D_L - z$  grafu, usporediti njihove nagibe i izračunati srednji nagib, a iz toga Hubbleovu konstantu. Također, učenici mogu nacrtati graf uz pomoć nekog kompjuterskog programa, poput Excela te iz njega očitati podatke. Ovo je izvrstan primjer interdisciplinarnosti predmeta informatike, fizike i astronomije.



Slika 4.1: Hubbleov zakon u Excelu. Slika preuzeta iz [20].

Otkriće ubrzanog širenja svemira se može obrađivati u srednjim školama u dinamičkim modelima svemira u okvirima Newtonove mehanike. Iako se pri tome zanemariju predviđanja opće teorije relativnosti, većina rezultata će biti u skladu s onima koji slijede iz Einsteinove teorije gravitacije. Učenici imaju priliku razvijati umijeće znanstvene metode mijenjajući parametre Friemanove jednadžbe u Newtonovom obliku, analizirajući dobivene podatke i donoseći zaključke. Naravno, ovo gradivo je namijenjeno nadarenim učenicima koji žele saznati više o svemir u kojem živimo.

U skladu Newtonove mehanike učenici mogu doći do modela svemira prikazanih na slici (4.2).

Slika 4.2: Razmak galaktika  $r$  u ovisnosti o vremenu  $t$  u slučaju: (a) otvorenog svemira, (b) Einstein de Sitterova svemira, (c) zatvorenog svemira). Slika preuzeta iz [20]

Naposlijetku, navest ćemo par zadataka koji su se pojavljivali na natjecanjima iz astronomije, od školskog do olimpijskog.

1. Valnoj duljini kojoj u spektru odgovara položaj od točno 500 nm, za zvijezdu Sirius je, zbog Dopplerovog učinka, izmjerena vrijednost od 499,987 nm. Izračunajte, iz tog podatka, radialnu brzinu Siriusa. Udaljava li se Sirius od Zemlje ili joj se približava?

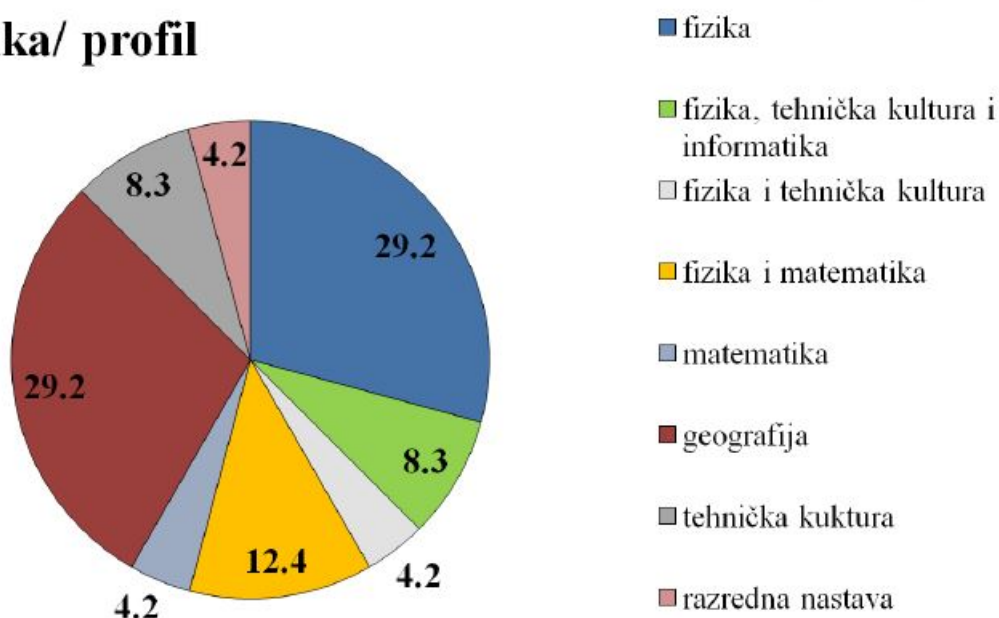
2. Galaktički protoklaster BoRG-58 ima kozmološki pomak prema crvenome od 8. Koja je brzina udaljavanja tog objekta od nas? Obavezno uzeti u obzir relativističke efekte!

3. Natrijeva D-linija, mjerena u laboratoriju, nalazi se na 589,3 nm. Ista ta linija, ali opažena u spektru galaksije, nalazi se na 600,0 nm. Odredite brzinu kojom se ta galaksija udaljava od nas te njenu trenutnu udaljenost u parsecima i svjetlosnim godinama, ako je Hubbleov parametar  $H_0 = 7 \cdot 10^4 s^{-1} Mpc^{-1}$ .

4. Na temelju spektra galaksije s crvenim pomakom  $z = 6.03$  određena starost zvijezda u galaksiji između 560 i 600 milijuna godina. Pri kojoj vrijednosti  $z$  je počelo formiranje zvijezda u ovoj galaksiji. Pretpostavite da je svemir star  $t_0 = 13.7 \times 10^9$  godina i da se nalazimo u ravnom modelu svemira s kozmološkom konstantom  $\Lambda = 0$ . (U takvom modelu  $a^{2/3}$ , a vrijeme se računa od velikog praska.)

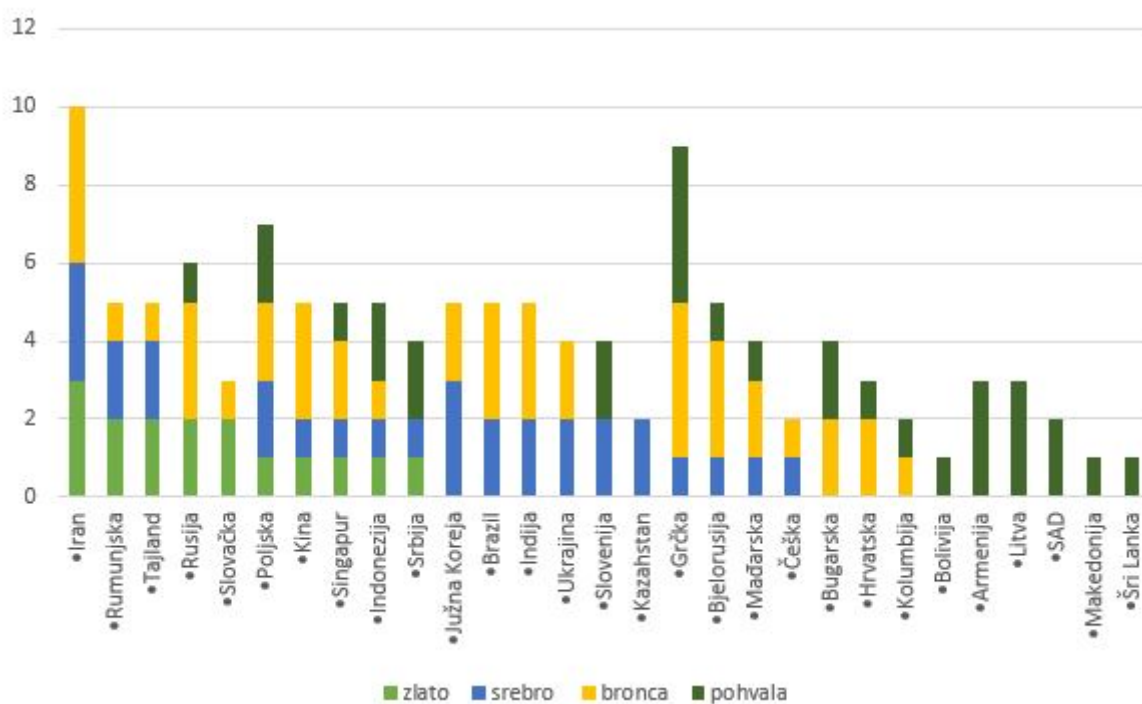
## 4.1 Problemi u nastavi astronomije

Danas predmet astronomije vodi širok spektar profila profesora kao što je navedeno na slici (4.1). Štoviše, na nastavničkim smjerovima prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, ne postoji obvezan predmet koji se bavi ovom tematikom već se samo neki elementi spominju u kolegiju astronomija i astrofizika. Dakle, u nedostatku dodatne edukacije, nije iznenađujuće da mnogi nastavnici nisu spremni preuzeti predmet poput astronomije u osnovnim i srednjim školama. No, zahvaljujući projektima koji uključuju popularizaciju znanosti, mnogi učenici će znati ponešto o ovoj temi. Iako zainteresirani za ovo područje znanosti, u mnogim školama neće dobiti adekvatno obrazovanje zbog nedostatka kvalificiranih profesora i sredstava škole. U sklopu cjeloživotnog učenja, profesori će sigurno imati priliku pohađati seminare i radionice na tu temu, te bi se u dogledno vrijeme situacija trebala promijeniti.

**Struka/ profil**

Slika 4.3: Profesori koji izvode nastavu astronomije. Slika preuzeta iz [21].

U Hrvatskoj se natjecanja iz astronomije vode na školskoj, županijskoj i državnoj razini. Na međunarodnoj razini se održavaju olimpijade International Olympiad Astronomy (IOA) i International Olympiad on Astronomy and Astrophysics (IOAA). Statistike ne idu u prilog Hrvatskoj jer smo na dnu ljestive po osvojenim medaljama. Na grafikonu ispod je prikazana distribucija medalja za 2013. godinu. Na natjecanjima u RH učenici pokazuju svoje teorijsko i praktično znanje. Teorijsko znanje se ispituje standardiziranim testovima koji sadrže pitanja otvorenog i zatvorenog tipa. Na testovima učenici pokazuju svoje znanje i razumijevanje te sposobnost primjene, analize, sinteze i evaluacije. Praktični rad je mali znanstveni rad i tekst koji ima osnovne elemente znanstvenog članka. U praktičnom dijelu rada učenici izabiru temu uz pomoć mentora. Rad može biti opažački, eksperimentalni, teorijski (ne esej) ili izrada astronomske pomagala. Budući da to zahtjeva testiranje znanstvene hipoteze i apstraktan način razmišljanja, bitna je intenzivna interakcija između mentora i učenika, tj. mentor mora imati vrlo aktivnu ulogu u svim koracima stvaranja rada. Na međunarodnom natjecanju IOA učenici moraju pokazati sposobnost rješavanja teorijskih, praktičnih i opažačkih problema, dok na natjecanju IOAA, uz sve prethodno navedeno, pokazuju i znanje obrade podataka.



Slika 4.4: Osvojene medalje na IOAA za 2013. godinu.





# Bibliografija

- [1] B. Rydmen, *Introduction to cosmology*, Addison-Wasley, 2002.
- [2] J. Planinić, *Kaos i kozmos*, Algoritam, Zagreb, 2001. 303.
- [3] K. Kumerički, *Kozmicko pozadinsko zračenje — prva fotografija svemira*, <http://www.phy.pmf.unizg.hr/~kkumer/articles/korcula02proc.pdf>, 20.2.2016.
- [4] N. Wright, <http://www.astro.ucla.edu/~wright/cosmolog.htm>, 20.02.2016.
- [5] S. Nerlich, *Astronomy without telescope-enough with the dark already*, <http://www.universetoday.com/86122/astronomy-without-a-telescope-enough-with-the-dark-already/>, 10.03.2016.
- [6] S. Grujić, *Standardni modeli fizike čestica i kozmologije*, Diplomski rad, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište Novi Sad, Novi Sad, 1991.
- [7] H. Kurki-Suonio *Lecture courses*, <http://www.helsinki.fi/~hkurkisu/>, 05.03.2016.
- [8] H. Štefančić, *Problem tamne energije-što uzrokuje dašnje ubrzano širenje svemira*, <http://ljskola.hfd.hr/arhiva/2004/stefancic.pdf>, 07.03.2016.
- [9] A. Pisani., *Cosmology with cosmic voids*, <https://www.archives-ouvertes.fr/tel-01086451/document>, 07.03.2016.
- [10] F. Steiner, *Soulution of the Friedmann equation determening the time evolution, acceleration and the age of universe*, [https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website\\_uni\\_ulm/nawi.inst.260/paper/08/tp08-7.pdf](https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/nawi.inst.260/paper/08/tp08-7.pdf), 10.03.2016.
- [11] D. Borković, *Jednadžbe stanja kozmičkih fluida i asimptotsko širenje svemira*, Diplomski rad, Prirodoslovno-matematički fakulte, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2013.

- [12] L. Babić, *Brzina svjetlosti i barionska komponenta svemira*, <http://plotnikov.chem.pmf.hr/~zbabic/plankon/barcomp.pdf>, 20.03.2016.
- [13] J. L., Christiansen i A. Siver, *Computing Accurate Age and Distance Factors in Cosmology*, American Journal of Physics, 80(5), 2012, str.1-11.
- [14] *Nacionalni kurikulum nastavnog predmeta fizike*, Ministarstvo znanosti obrazovanja i športa RH, 2016.
- [15] R. Fuchs, D. Vican i I. Milanović Litre, *Nacionalni okvirni kurikulum: za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obavezno i srednjoškolsko obrazovanje*, Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa RH, 2011.
- [16] Anonymous, <http://www.universeadventure.org/fundamentals/popups/model-sq-hubble2.htm>, 1.4.2016.
- [17] F.B. Abdalla, *Observational cosmology: The Friedmann equation*, [http://zuserver2.star.ucl.ac.uk/~hiranya/PHAS3136/PHAS3136/PHAS3136\\_files/Cosmo3\\_56\\_fried.pdf](http://zuserver2.star.ucl.ac.uk/~hiranya/PHAS3136/PHAS3136/PHAS3136_files/Cosmo3_56_fried.pdf), 20.03.2016.
- [18] NASA/IPAC Extragalactic Database (NED), <https://ned.ipac.caltech.edu/>, 13.03.2016.
- [19] Universe adventure, <http://www.universeadventure.org/>, 25.03.2016.
- [20] E-škola astronomije <http://eskola.zvezdarnica.hr/>, 26.03.2016.
- [21] Agencija za odgoj i obrazovanje <http://www.azoo.hr/>, 1.4.2016.
- [22] U. Yildiz, Solutions of Friedman equation, [http://particle.korea.ac.kr/research/yildiz\\_universemodels\\_friedmann.pdf](http://particle.korea.ac.kr/research/yildiz_universemodels_friedmann.pdf), 18.03.2016.

# Sažetak

U uvodnom dijelu ovog diplomskog rada iznešene su činjenice i pretpostavke o svemiru u kojem živimo na temelju različitih istraživanja. Opisan je sastav svemira, uvedena je pretpostavka da je svemir homogen i izotropan na velikim skalama, te Hubbleov zakon koji nam govori o proporcionalnosti između udaljenosti i brzine udaljavanja galaksija. Koristeći Dopplerov efekt i ovisnost između crvenog pomaka i brzine, Hubbleov zakon pokazuje proporcionalnu vezu između crvenog pomaka i udaljenosti.

U drugom poglavlju su opisani neki od modela svemira koji proizlaze Friedmanove jednačbe temeljene na Robertson-Walkers metrici i Einsteinovoj Općoj teoriji relativnosti. Na temelju mjerenja crvenog pomaka različitih galaksija tražili smo model koji se najbolje uklapa u mjerenja. U trećem poglavlju smo na preuzeli mjerenja o crvenom pomaku i udaljenosti supernova tipa Ia i odredili faktor akceleracije širenja svemira. Naposljetku, približili smo i prilagodili dijelove diplomskog rada za nastavu astronomije i fizike u srednjim školama.



# Summary

In this master thesis we will describe basic cosmological concepts and layout evidence for accelerated expansion of the universe. In introduction we will present facts and assumptions about universe in which we live based on different astronomical surveys. Composition of universe is described, and we introduced the assumption that universe is homogeneous and isotropic on big scales, and that Hubble's law shows that recessional velocity of galaxies is proportional to its distance. We have used Doppler's effect to express connections between redshift and distance and to write Hubble's law in different form, showing proportionality between redshift and distance.

In second chapter we have described models of the universe which originate from Friedmann equation based on Robertson-Walkers metrics and Einstein's gravitational equation. Based on redshifts of different galaxies we have search for the model that best fits the observations. In third chapter we have used the measurements of redshifts and distances for Supernova type Ia and determined the acceleration factor of expansion of the universe. At the end, we have discussed topic of the expansion of the universe in a way that it is comprehensive for the pupils in high school.



# Dodatak A

## Kod u programskom jeziku Python

Python je računalni jezik opće namjene. Izrazito je elegantan za upotrebu. Popularan je u znanstvenoj zajednici jer postoji velik broj korisnih Python biblioteka od općih pa do onih za specijalizirane znanstvene primjene.

Učitavanje potrebnih biblioteka.

```
1 from __future__ import division
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import numpy as np
4 import scipy
5 import scipy.stats
6 import urllib
7 from scipy import integrate
```

Učitavamo podatke s web adrese te koristeći NumPy funkciju loadtxt() pretvaramo iz datoteke u NumPy listu.

```
1 #sns = urllib.urlopen('http://supernova.lbl.gov/Union/figures/SCPUnion2
   .1_mu_vs_z.txt')
2 sns = urllib.urlopen('http://supernova.lbl.gov/Union/figures/
   SCPUnion2_mu_vs_z.txt')
3 dat = np.loadtxt(sns, usecols=(1,2,3)); dat.shape
```

Pretvaramo mjerene podatke  $\mu$  i  $\Delta\mu$  u  $D_L$  i  $\Delta D_L$ .

```
1 def DL(mu):
2     return 1./100000.*np.exp(1./5.*mu*np.log(10))
3
4 def diffDL(mu):
5     return 1./500000.*np.exp(1./5.*mu*np.log(10))*np.log(10)
6
7 DLdat = np.array([(z, DL(valmu), diffDL(valmu)*errmu) for z, valmu, errmu
   in dat]); DLdat.shape
```



Definiramo generički izraz aproksimacijsku funkciju i odgovarajuću funkciju udaljenosti tj. odstupanja (čije kvadrate će minimizirati funkcija `leastsq()`). Nakon minimizacije testiramo zastavicu `ier` ukoliko `leastsq()` nije uspješna dobijemo odgovarajuću poruku o grešci.

```

1 def dist(p, fun, data):
2     return np.array([(y - fun(p, x))/err for (x,y,err) in data])
3
4 def chisq(p, fun, data):
5     return sum( dist(p, fun, data)**2 )
6
7 def leastsqfit(fcn, init, data):
8     """Fit function fcn, starting from init initial values to data."""
9     p_final, cov_x, infodict, msg, ier = scipy.optimize.minpack.leastsq(
10    dist, init, (fcn, data), full_output=True)
11    parerrs = np.sqrt(scipy.diagonal(cov_x))
12    for k in range(len(init)):
13        print "p[%d] = %.3f +- %.3f" % (k, p_final[k], parerrs[k])
14        chi2 = chisq(p_final, fcn, data)
15        df = len(data)-len(init)
16        print "chi^2/d.o.f = %.1f/%i (p-value = %.4f)" % (chi2, df, scipy.
17        stats.chisqprob(chi2, df))
18    return list(p_final) lowz = np.array([pt for pt in DLdat if pt
19    [0]<0.12]); lowz.shape

```

Definiramo linearnu funkciju  $H_0 D_L = cz$  za aproksimacijsku funkciju te određujemo Hubbleovu konstantu prilagodbom mjerenja na podskup  $z < 0.12$ .

```

1 c=3.e5
2 def lfun(p, z):
3     return c*z/p[0]
4 H0, = leastsqfit(lfun, (60,), lowz)
5 print "\nHubbleova konstanta H0 = %.1f km/s/Mpc" % H0

```

Crtamo  $D_L - z$  graf za podskup  $z < 0.12$ .

```

1 fig, ax = plt.subplots(figsize=[8,6])
2 plt.rcParams.update({'font.size': 14})
3 ax.errorbar(lowz[:,0], lowz[:,1], yerr=lowz[:,2], marker='.', linestyle='
4 None')
5 zvals = np.linspace(0.01, 0.12)
6 ax.plot(zvals, [lfun([H0], z) for z in zvals], 'r-')
7 ax.set_xlabel('$z$', fontsize=18)
8 ax.set_ylabel('$D_L \ ; \ {\rm [Mpc]}$', fontsize=18)
9 fig.tight_layout()
10 fig.show()
11 fig.savefig('fig1.pdf')

```

Definiramo funkciju  $H_0 D_L = cz(1 + (1 - q_0)\frac{z}{2})$  za aproksimacijsku funkciju te određujemo deceleracijski parametar  $q$  i Hubbleovu konstantu.

```
1 def qfun(p, z):
2     return c*z/p[0] * (1 + 0.5*(1 - p[1])*z)
3 qpars = leastsqfit(qfun, (50, 0.1), DLdat)
```

Crtamo graf  $D_L - z$  bez restrikcije za  $z < 0.12$ .

```
1 fig, ax = plt.subplots(figsize=[8,6])
2 ax.errorbar(DLdat[:,0], DLdat[:,1]/1e3, yerr=DLdat[:,2]/1e3,
3             marker='.', linestyle='None')
4 zvals = np.linspace(0.01, 1.8)
5 ax.plot(zvals, qfun(qpars, zvals)/1e3, 'r')
6 ax.set_xlabel('$z$', fontsize=18)
7 ax.set_ylabel('$D_L \ ; \ \text{\rm [Gpc]}$', fontsize=18)
8 fig.tight_layout()
9 fig.savefig('fig2.pdf')
```

Hubbleov zakon za  $z > 1$  zahtjeva integraciju propagacije zrake svjetlosti od supernove do promatrača kroz svemir u širenju. Propagacija je određena sastavom svemira (obična i tamna materija različito djeluju od tzv. tamne energije koja uzrokuje ubrzanje širenja svemira). U tom slučaju Hubbleov zakon ima formu:

$$H_0 D_L = c(1 + z)Z(z, \Omega_m, \Omega_\Lambda).$$

Definiramo pomoćnu funkciju

```
1 def J(x):
2     if x<0:
3         return np.sin(np.sqrt(-x))/np.sqrt(-x)
4     elif x==0:
5         return 1
6     else:
7         return np.sinh(np.sqrt(x))/np.sqrt(x)
8
9 def Xfun(a, Om, Ov):
10    return Om/a + Ov*a**2 + (1-Om-Ov)
```

Definiramo funkciju  $Z$ .

```
1 def Zfun(z, Om, Ov):
2     return integrate.quad(lambda a: 1/(a*np.sqrt(Xfun(a, Om, Ov))), 1/(1+z), 1)[0]
```

```
1 def DLfun(p, z):
2     """DL(z) with pars p=[H0, Omega_m, Omega_Lambda]."""
3     H0 = p[0]
```

```

4 Om = p[1]
5 Ov = p[2]
6 Otot = Om + Ov
7 Zval = Zfun(z, Om, Ov)
8 return c/H0 * (1+z) * Zval * J((1-Otot)*Zval**2)

```

Fiksiramo ravnu geometriju.

```

1 def DLfunflat(p, z):
2     """DL(z) with pars p=[H0, Omega_Lambda]. Flat universe."""
3     H0 = p[0]
4     Ov = p[1]
5     Om = 1-Ov
6     Zval = Zfun(z, Om, Ov)
7     return c/H0*(1+z)*Zval

```

Prilagodboj parametara  $H_0$ ,  $\Omega_m$  i  $\Omega_\Lambda$  određujemo udjele pojedinih komponenti svemira.

```

1 fullpars = leastsqfit(DLfun, (70, 0.3, 0.), DLdat)

```

Aproksimiramo funkciju u slučaju ravne geometrije.

```

1 flatpars = leastsqfit(DLfunflat, (70, 0.3), DLdat)
2 print "Om = 1-Ov = %8.3f" % (1-flatpars[1],)

```

Crtamo  $D_L - z$  graf za slučaj ravnog svemira koji sadrži materiju i kozmološku konstantu.

```

1 fig, ax = plt.subplots(figsize=[8,6])
2 ax.errorbar(DLdat[:,0], DLdat[:,1], yerr=DLdat[:,2], marker='.',
3             linestyle='None')
4 zvals = np.linspace(0.01, 1.8)
5 ax.plot(zvals, [DLfunflat(flatpars, z) for z in zvals], 'r-',
6           label='$\Omega_m=0.29, \Omega_\Lambda=0.71$')
7 ax.set_ylim(0, 1.5e4)
8 ax.set_xlabel('$z$', fontsize=18)
9 ax.set_ylabel('$D_L \ ; \ \text{[Mpc]}$', fontsize=18)
10 ax.legend(loc='upper left').draw_frame(0)
11 fig.tight_layout()
12 fig.savefig('fig3.pdf')

```

# Životopis

Rođena sam 18.11.1991. u Imotskom. U svom rodnom kraju sam pohađala Osnovnu školu Stjepana Radića, a potom Gimnaziju dr. Mate Ujevića. Moje zanimanje za fiziku javilo se već u sedmom razredu osnovne škole s jednim od najboljih profesora, pok. Žarkom Divićom. Zahvaljujući njegovu strpljenju i volji za radom, u osmom razredu sam išla na državno natjecanje iz fizike i shvatila ljepotu i jednostavnost znanosti. Ta ljubav prema fizici očuvala se do kraja mog srednjoškolskog obrazovanja te 2010. god. upisujem Prirodoslovno - matematički fakultet u Zagrebu, integrirani preddiplomski i diplomski studij matematike i fizike, nastavnički smjer. Volonterskim radom i radionicama koje je organizirao fakultet, nastojala sam budućim generacijama prenijeti zanimanje za fiziku i matematiku. Na završetku svog školovanja sudjelovala sam u Erasmus programu za mobilnost, te sam provela pola godine na jednom od najstarijih sveučilišta u Europi - Jagiellonskom sveučilištu u Krakowu.