Topološki Markovljevi lanci

Slavica, Grgo

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Grgo Slavica

TOPOLOŠKI MARKOVLJEVI LANCI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Pavle Goldstein

Zagreb, rujan, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Topološki Markovljevi lanci su važni u modeliranju dinamičkih sustava. Oni opisuju nizove sa konačnim brojem stanja i moguće tranzicije, odnosno prelaske iz jednog stanja u drugo.
U ovom radu ćemo prvo reći nešto općenito o topološkim Markovljevim lancima i načinu kako od neke zadane matrice doći do pripadnog Markovljevog lanca. Nakon toga ćemo promatrati Markovljeve particije koje su važan alat u dokazivanju raznih teorema vezanih za topološke Markovljeve lance. Na dva primjera ćemo provjeriti kako se provjerava je li zadana particija Markovljeva.
Nakon toga prelazimo na ekvivalentnost toka topoloških Markovljevih lanaca. Iznosimo niz teorema i propozicija povezanih sa ekvivalencijom toka. Na kraju iznosimo Parry-Sullivanovu definiciju kada su dva topološka Markovljeva lanca tok ekvivalentna i važan Franksov rezultat za kraj ovoga rada.

Poglavlje 1

Topološki prostori

1.1 Topološki prostori

Definicija 1.1.1. *X je topološki prostor ako postoji familija $\mathcal{U}$ podskupova od X takva da su ispunjeni sljedeći uvjeti:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{U}$.
2. $U_i, i \in I \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow \cup U_i \in \mathcal{U}$.
3. $U_i, i \in I, I$ *konačan* $\Rightarrow \cap U_i \in \mathcal{U}$.

Familija $\mathcal{U}$ se naziva topološka struktura ili topologija na X, a njezini članovi se nazivaju otvoreni skupovi. $(X, \mathcal{U})$ *zovemo topološki prostor.*

Definicija 1.1.2. *Metrički prostor je neprazan skup X zajedno s funkcijom $d : X \times X \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. $d(P, Q) \geqslant 0$; $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q, \qquad P, Q \in X$
2. $d(P, Q) = d(Q, P), \qquad P, Q \in X$
3. $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q), \qquad P, Q, R \in X$

Kažemo da se radi o metričkom prostoru (X, d), ili samo o metričkom prostoru X, ako je iz konteksta jasno o kojoj metrici se radi.

Definicija 1.1.3. *Neka je x točka metričkog prostora (X, d) i $r > 0$ pozitivan realan broj. Otvorena kugla oko točke x s radijusom r je skup*

$$K(x; r) = K_d(x; r) := \{x' \in X : d(x, x') < r\}$$

Definicija 1.1.4. *Za podskup U metričkog prostora (X, d) kažemo da je otvoren ako za svaku točku $x \in U$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x; r) \subseteq U$.*

U metričkom prostoru svaki otvoreni skup je unija otvorenih kugala. U takvom prostoru familija svih otvorenih skupova $\mathcal{U}$ zadovoljava definiciju topologije, pa vidimo da iz metričkih prostora dobivamo topološke prostore. Kaže se da metrika d definira topološku strukturu na X odnosno da je takva topologija inducirana metrikom d. Sada ćemo definirati bazu topologije.

Definicija 1.1.5. *Neka je $(X, \mathcal{F})$ topološki prostor. Za familiju $\beta \subseteq \mathcal{F}$ kažemo da je baza topologije $\mathcal{F}$, ako je svaki skup u $\mathcal{F}$ unija nekih članova familije β.*

Sljedeći korak je uvođenje prostora kojeg ćemo označavati sa X i koji će biti prostor na kojem zadajemo topološki Markovljev lanac.

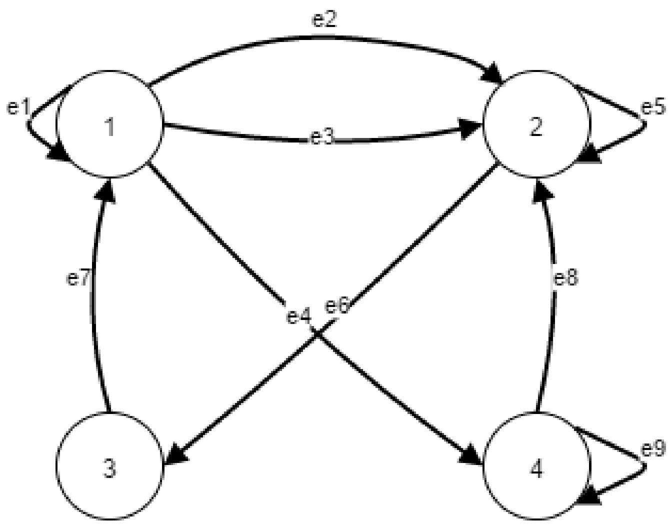
1.2 Topološki Markovljevi lanci

Da bismo došli do pojma topološkog Markovljeva lanca prvo ćemo promatrati kvadratne nenegativne cjelobrojne matrice reda n ($A \in M_n(\mathbb{Z}^+), n \in \mathbb{N}$). Znamo iz diskretne matematike da takvoj matrici A možemo pridružiti usmjereni graf $\Gamma_A = (V, E)$. Skup svih vrhova u grafu ćemo označavati sa V, dok skup svih bridova označavamo sa E. Broj svih vrhova u grafu je jednak redu matrice A. $A(i, j)$ nam govori na koliko načina možemo doći iz vrha i u vrh j. Pojmove ćemo jednostavnije shvatiti u sljedećem primjeru.

Primjer 1.2.1. *Imamo sljedeću matricu:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Iz matrice A slijedi da imamo 4 vrha i 9 bridova ($V = (v_1, v_2, v_3, v_4), E = (e_1, e_2, \cdots, e_9)$).



Zanimljiv pojam je pojam puta kroz graf.

Definicija 1.2.2. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{Z}^+)$ i $\Gamma_A = (V, E)$ pripadni usmjereni graf. Definirajmo preslikavanja $s : E \to V$ i $r : E \to V$ (eng. source i range) gdje za $e \in E$ $s(e)$ označava vrh iz kojeg e počinje, dok $r(e)$ označava vrh u kojem e završava. Niz bridova $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazivamo put kroz graf Γ_A, ako vrijedi:*

$$r(e_i) = s(e_{i+1}), \forall i$$

Putevi mogu biti konačni ili beskonačni. Konačni putevi imaju početni i završni vrh, odnosno početak i završetak puta.

Definicija 1.2.3. *Matricu $A \in M_n(\mathbb{Z}^+)$ zovemo ireducibilnom ako za svaki par (i, j), gdje su $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, postoji $N \geqslant 0$ takav da vrijedi $A^N(i, j) \neq 0$.*

Definicija 1.2.4. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{Z}^+)$, Γ_A usmjereni graf pridružen matrici A. Označimo sa m sumu svih bridova određenih s matricom A ($m = \sum_{i,j=1}^{n} A(i, j)$). Dualna matrica u oznaci $\tilde{A}$ je {0,1}-matrica reda m definirana sa:*

$$\tilde{A}(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } r(e_i) = s(e_j) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Primjer 1.2.5. *Dualna matrica našoj matrici A iz primjera je jednaka:*

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Napomena 1.2.6. *Dualna matrica iz definicije nije jedinstvena jer ovisi o imenovanju bridova grafa originalne matrice A.*

Znamo da ako je matrica A ireducibilna onda je njezin pridruženi usmjereni graf Γ_A povezan. To znači da za svaki par (i, j) postoji put od vrha v_i do vrha v_j. Od interesa će nam biti upravo takve matrice.
Promatrajmo ireducibilnu matricu $A \in M_n(\mathbb{Z}^+)$ te $\Gamma_A = (V, E)$ njezin pripadni usmjereni graf. Označimo sa $m = \sum_{i,j=1}^{n} A(i, j))$, te sa $\Sigma = \{1, 2, \cdots, m\}$ skup stanja. Uvodimo sljedeći skup:

$$X = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \Sigma = \{(x_n), n \in \mathbb{Z} : x_i \in \Sigma, \forall i \in \mathbb{Z}\}$$

Definicija 1.2.7. *Preslikavanje $\sigma : X \to X$ definirano pomoću $\sigma(k) = l$ gdje su $k = (\dots, k_{-1}, k_0, k_1, \dots)$ i $l = (\dots, l_{-1}, l_0, l_1, \dots)$ i gdje vrijedi $l_i = k_{i-1}, \forall i \in \mathbb{Z}$, nazivamo **šift preslikavanje**.*

Označimo sa $\Sigma_A \subset X$. Taj podskup definiramo sa:

$$X_A = \Sigma_A = \{(x_n), n \in \mathbb{Z} : x_i \in \Sigma,\ \tilde{A}(x_i, x_{i+1}) = 1, \forall i \in \mathbb{Z}\}$$

Ovo je zapravo skup svih obostrano beskonačnih puteva, ali s obzirom na matricu A, odnosno njen graf Γ_A pridružen matrici A.

Definicija 1.2.8. *Preslikavanje $\sigma_A : X_A \to X_A$ definirano sa $\sigma_A = \sigma\ |_{X_A}$ nazivamo **subšift konačnog tipa**, a uređeni par (X_A, σ_A) **topološki Markovljev lanac pridružen matrici** A.*

Sada na našem skupu $\sum$ definiramo diskretnu metriku na sljedeći način:

$$d_{\sum}(x_i, y_i) = \begin{cases} 1, & x_i \neq y_j, \\ 0, & x_i = y_j. \end{cases}$$

Sada ćemo pokazati da je $d_{\sum}$ metrika. Provjeravamo svojstva metrike koja su iznesena u ranijoj definiciji:

1. $d_{\sum}(x_i, y_i) \geqslant 0, \forall i \in I$ i $d_{\sum}(x_i, y_i) = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i$
2. $d_{\sum}(x_i, y_i) = d_{\sum}(y_i, x_i)$
3. $d_{\sum}(x_i, y_i) \leqslant d_{\sum}(x_i, z_i) + d_{\sum}(z_i, y_i)$

Prva dva svojstva slijede trivijalno iz same definicije $d_{\sum}$. Za ovo treće svojstvo ćemo provjeriti sve moguće kombinacije. Imamo osam mogućih kombinacija. Sve su kombinacije trivijalne osim jedne koju moramo provjeriti. Riječ je o kombinaciji kad je $d_{\sum}(x, y) = 1$, dok su $d_{\sum}(x, z)$ i $d_{\sum}(z, y)$ jednaki 0. Kako su $d_{\sum}(x, z)$ i $d_{\sum}(z, y)$ jednaki 0, a pokazali smo da svojstvo 1) trivijalno vrijedi, slijedi da je $x = z$ i $z = y$. Dalje imamo $x = y \Leftrightarrow d_{\sum}(x, y) = 0$ što je kontradikcija s $d_{\sum}(x, y) = 1$. Dakle,pokazali smo da je $d_{\sum}$ metrika.
Sada ćemo definirati novu metriku d pomoću diskretne metrike. Stavimo da je: $d(x, y) = \sum_i \frac{1}{2^{|i|}} d_{\sum}(x_i, y_i)$. Pokazujemo da je i ovo preslikavanje metrika:

1. $d(x, y) \geqslant 0$ jer sumiramo nule i jedinice po definiciji preslikavanja $d_{\sum}$.

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \sum_i \frac{1}{2^{|i|}} d_{\sum}(x_i, y_i)$$

   Ova suma će biti jednaka 0 samo u slučaju kad vrijedi da je svaki sumand $d_{\sum}(x_i, y_i)$ jednak 0 jer je $\frac{1}{2^{|i|}}$ uvijek pozitivno. Iz $d_{\sum}(x_i, y_i) = 0$ slijedi da je $x_i = y_i, \ \forall i \in I$, a iz toga slijedi da je $x = y$ što smo i trebali pokazati.

2. $d(x, y) = d(y, x)$
   Treba pokazati da vrijedi

$$\sum_i \frac{1}{2^{|i|}} d_{\sum}(x_i, y_i) = \sum_i \frac{1}{2^{|i|}} d_{\sum}(y_i, x_i)$$

   Znamo da vrijedi:

$$d_{\sum}(x_i, y_i) = d_{\sum}(y_i, x_i), \forall i \in I$$

   jer smo pokazali da je $d_{\sum}$ metrika, pa slijedi ova jednakost.

3. $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$
Da bismo ovo pokazali prvo primijetimo sljedeće:
$\forall m \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\sum_{i=-m}^{m} \frac{1}{2^{|i|}} d_{\sum}(x_i, y_i) \leqslant \sum_{i=-m}^{m} \frac{1}{2^{|i|}} (d_{\sum}(x_i, z_i) + d_{\sum}(z_i, y_i))$$

Ovo vrijedi za konačne sume. Naime, znamo da vrijedi sljedeće:

$$d_{\sum}(x_i, y_i) \leqslant d_{\sum}(x_i, z_i) + d_{\sum}(z_i, y_i)$$

Sumirajući po indeksima i ovo svojstvo vrijedi u svakom koraku pa će vrijediti i kad sumiramo sve indekse i. Moramo pokazati da to svojstvo vrijedi i za beskonačne sume. Imamo sljedeće:

$$d(x,y) - \sum_{i=-m}^{m} \frac{1}{2^{|i|}} d_{\sum}(x_i, y_i) \leqslant \sum_{i=-\infty}^{-m-1} \frac{1}{2^{|i|}} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}}$$

Ova nejednakost slijedi iz činjenice da metrika $d_{\sum}$ poprima vrijednosti 0 ili 1 jer je tako definirana. Nadalje vrijedi:

$$\sum_{i=-\infty}^{-m-1} \frac{1}{2^{|i|}} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} = 2 \cdot \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{2^{i}} = \sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{2^{i}} = \frac{1}{2^m}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots) = \frac{1}{2^{m-1}}$$

Slijedi da je

$$d(x,y) - \sum_{i=-m}^{m} \frac{1}{2^{|i|}} d_{\sum}(x_i, y_i) \leqslant \frac{1}{2^{m+1}}, \forall m \in N$$

$$d(x,y) \leqslant \sum_{i=-m}^{m} \frac{1}{2^{|i|}} d_{\sum}(x_i, y_i) + \frac{1}{2^{m+1}} \leqslant \sum_{i=-m}^{m} \frac{1}{2^{|i|}} d_{\sum}(x_i, z_i) + \sum_{i=-m}^{m} \frac{1}{2^{|i|}} d_{\sum}(z_i, y_i) + \frac{1}{2^{m+1}}$$

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(y,z) + \frac{1}{2^{m+1}}$$

U zadnjem koraku smo koristili da je $d(x,z)$ sigurno veće od reducirane sume $\sum_{i=-m}^{m} \frac{1}{2^{|i|}} d_{\sum}(x_i, z_i)$ (analogno za $d(z,y)$ i $\sum_{i=-m}^{m} \frac{1}{2^{|i|}} d_{\sum}(z_i, y_i)$). Iz ovoga slijedi da možemo naći dovoljno veliki $m \in \mathbb{N}$ takav da $\forall \epsilon > 0$ vrijedi:

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) + \epsilon$$

Zbog proizvoljnosti od ϵ slijedi $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$ i za beskonačne sume pa smo pokazali i ovo svojstvo.

Dakle, pokazali smo da je preslikavanje d metrika. Ova metrika inducira topologiju na topološkim Markovljevim lancima.

1.3 Markovljeva particija

Definicija 1.3.1. *Neka je $(\sum_A, \sigma_A)$ topološki Markovljev lanac pridružen nekoj matrici A. Particija α skupa $\sum_A$ se zove Markovljeva particija ili Markovljev generator ako zadovoljava sljedeće uvjete:*

1. *α je konačna particija skupa $\sum_A$ koja se sastoji od otvoreno-zatvorenih skupova*
2. *α je topološki generator u smislu da za bilo koji niz skupova $A_{k_i} \in \alpha$, $i \in \mathbb{Z}$, presjek $\bigcap_{i=-\infty}^{+\infty} \sigma^{-i} A_{k_i}$ sadrži najviše jednu točku.*
3. *Ako $A_{k_i} \in \alpha$ zadovoljava $A_{k_i} \bigcap \sigma^{-1} A_{k_{i+1}} \neq \emptyset$ za sve $i \in \mathbb{Z}$, tada vrijedi $\bigcap_{i=-\infty}^{+\infty} \sigma^{-i} A_{k_i} \neq \emptyset$*

U sljedeća dva primjera ćemo pokazati kako se provjerava da li je neka particija Markovljeva.

Primjer 1.3.2. *Uzmimo matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Definirajmo da je $\sum = \{0, 1\}$ i $\sum_A = \{(x_n), n \in \mathbb{Z}; x_n \in 0, 1\}$. Topološki Markovljev lanac pridružen matrici A je $(\sum_A, \sigma_A)$. Sljedeći korak je napraviti particiju ovoga skupa. Npr., uzmimo particiju $\{\{(x_n); x_0 = 0\}, \{(x_n); x_0 = 1\}\}$. Vidimo da ova particija pokriva sve moguće puteve kroz usmjereni graf matrice A. To je općeniti slučaj kada smo fiksirali samo jedan trenutak i to onaj s indeksom 0 (znamo da indeksi idu po skupu $\mathbb{Z}$ pa to ne možemo nazvati početnim trenutkom već trenutkom s indeksom 0). Dokazat ćemo da u općenitom slučaju kada fiksiramo jedan trenutak, uzimajući u obzir da možemo imati konačno mnogo stanja u kojima se možemo nalaziti i da se radi o našoj početnoj matrici A, dobivamo Markovljevu particiju.*
Općenit slučaj kada fiksiramo neki trenutak označit ćemo sa:

$$C_a = \{s \in \Sigma_A : s_0 = a\} \text{ } i \text{ } \{C = C_a : a \in \mathcal{A}\}$$

Sa C_a smo označili slučaj kada je fiksirani trenutak jednak 0, a stanje u kojem se nalazimo u tom trenutku je a, dok smo sa C označili svih takvih stanja.
Označimo pomak udesno za n sa $\sigma^n s \in C_{S_n}$, gdje skup C_{S_n} označavamo sa:

$$C_{S_n} = \{s \in \Sigma_A : s_0 = s_n\}$$

Sada moramo provjeriti Markovljevo svojstvo, odnosno da vrijedi sljedeće:

$$C_{S_k} \bigcap \sigma^{-1} C_{S_{k+1}} \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcap_{-n}^{n} \sigma^{-k} C_{S_k} \neq \emptyset$$

Pretpostavimo da vrijedi: $C_{S_k} \cap \sigma^{-1} C_{S_{k+1}} \neq \emptyset$. *Uzmimo* $s \in C_a \cap \sigma^{-1} C_b \neq \emptyset$. *Iz definicije presjeka lagano slijedi da vrijedi* $s \in C_a$ *i* $s \in \sigma^{-1} C_b$. *Iz* $s \in \sigma^{-1} C_b$ *slijedi da je* $\sigma s \in C_b$, *odnosno* $s_1 = b$. *Iz* $s \in C_a$ *slijedi da je* $s_0 = a$. *To znači da postoji put između a i b.*
Sada ćemo pokušati dokazati tranzitivnost ovoga svojstva, konkretno za ovaj primjer (matricu A). Treba pokazati da ako vrijedi $C_a \cap \sigma^{-1} C_b \neq \emptyset$ *i* $C_b \cap \sigma^{-1} C_c \neq \emptyset$ *da onda postoji put od a do c preko b.*

$$C_b \cap \sigma^{-1} C_c \neq \emptyset / \sigma^{-1}$$
$$\Rightarrow \sigma^{-1} C_b \cap \sigma^{-2} C_c \neq \emptyset$$
$$\Rightarrow C_a \cap \sigma^{-1} C_b \cap \sigma^{-2} C_c \neq \emptyset$$

Slijedi da postoji $s \in C_a \cap \sigma^{-1} C_b \cap \sigma^{-2} C_c \neq \emptyset$. *Opet po definiciji presjeka imamo da je* $s \in C_a$ *i* $s \in \sigma^{-1} C_b$ *i* $s \in \sigma^{-2} C_c$, *odnosno* $s_0 = a, s_1 = b, s_2 = c$. *Iz ovoga slijedi da postoji put od a do c preko b pa vrijedi tranzitivnost. Ako ovo svojstvo proširimo na n koraka imamo* $\bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcap_{-n}^{n} \sigma^{-k} C_{S_k} \neq \emptyset$, *a to znači da vrijedi Markovljevo svojstvo odnosno svojstvo pod 3) iz definicije Markovljeve particije. Prvo svojstvo je trivijalno jer se skup X sastoji od cilindarskih skupova i unija istih takvih. Ostaje nam pokazati svojstvo 2) iz definicije. Treba pokazati da* $\bigcap_{i=-\infty}^{+\infty} \sigma^{-i} A_{k_i}$ *sadrži najviše jednu točku, odnosno jedan niz. Pretpostavimo da imamo dva niza x i y koja se nalaze u zadanome presjeku i promatrajmo sljedeće* $\ldots \sigma^{-2} A_{k_{-2}} \bigcap \sigma^{-1} A_{k_{-1}} \bigcap A_{k_0} \bigcap \sigma A_{k_1} \bigcap \sigma^2 A_{k_2} \ldots$. *Ako uzmemo prvo dva susjedna elementa i njih presječemo vidimo da točno fiksiramo jedno stanje u našim nizovima x i y. Svakim sljedećim presjekom fiksiramo još jedno stanje. Međutim, kako se u svakom koraku fiksira točno određeno stanje slijedi da su nizovi x i y jednaki. Dakle, dobivamo kontradikciju sa pretpostavkom.*

Napomena 1.3.3. *Ovakav način dokazivanja tranzitivnosti će vrijediti samo u ovakvom slučaju kada imamo trivijalnu matricu sa svim jedinicama. Već u sljedećem primjeru ćemo vidjeti kako dokazati Markovljevo svojstvo kada imamo zadanu drugačiju matricu.*

Primjer 1.3.4. *Sada uzmimo malo drugačiju matricu nego u prethodnom primjeru. Neka je naša matrica* $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. *Opet definirajmo da je* $\sum_B = \{(x_n), n \in \mathbb{Z}; B(x_k, x_{k+1}) = 1, \forall k \in \mathbb{Z}\}$ *i* $\sum = \{0, 1\}$. *Vidimo da nam matrica B govori da ako smo u stanju 1, možemo prijeći samo u stanje 0 u sljedećem koraku, dok ako smo u stanju 0 možemo se u njemu zadržati ili prijeći u stanje 1. Označit ćemo particiju sa* $C = \{C_0, C_1, C_2\}$ *gdje su:*

$$C_0 = \{(x_n), n \in \mathbb{N} : x_0 = 0, x_1 = 0\}$$

$$C_1 = \{(x_n), n \in \mathbb{N} : x_0 = 0, x_1 = 1\}$$
$$C_2 = \{(x_n), n \in \mathbb{N} : x_0 = 1, x_1 = 0\}$$

Trebamo provjeriti da li je ova particija Markovljeva. Gledamo sve moguće presjeke elemenata particije. Ako je neki presjek neprazan kraj njega stavljamo +, a ako nije stavljamo -.

$$\begin{array}{llll}
C_0 & C_1 \to C_0 \cap \sigma^{-1}C_1 \to x \in C_0, \sigma x \in C_1 \to x_0 = 0, x_1 = 0, x_1 = 0, x_2 = 1 & & + \\
C_0 & C_2 \to C_0 \cap \sigma^{-1}C_2 \to x \in C_0, \sigma x \in C_2 \to x_0 = 0, x_1 = 0, x_1 = 1, x_2 = 0 & & - \\
C_1 & C_2 \to C_1 \cap \sigma^{-1}C_2 \to x \in C_1, \sigma x \in C_2 \to x_0 = 0, x_1 = 1, x_1 = 1, x_2 = 0 & & + \\
C_1 & C_0 \to C_1 \cap \sigma^{-1}C_0 \to x \in C_1, \sigma x \in C_0 \to x_0 = 0, x_1 = 1, x_1 = 0, x_2 = 0 & & - \\
C_2 & C_0 \to C_2 \cap \sigma^{-1}C_0 \to x \in C_2, \sigma x \in C_0 \to x_0 = 1, x_1 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0 & & + \\
C_2 & C_1 \to C_2 \cap \sigma^{-1}C_1 \to x \in C_2, \sigma x \in C_1 \to x_0 = 1, x_1 = 0, x_1 = 0, x_2 = 1 & & + \\
C_0 & C_0 \to C_0 \cap \sigma^{-1}C_0 \to x \in C_0, \sigma x \in C_0 \to x_0 = 0, x_1 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0 & & + \\
C_1 & C_1 \to C_1 \cap \sigma^{-1}C_1 \to x \in C_1, \sigma x \in C_1 \to x_0 = 0, x_1 = 1, x_1 = 0, x_2 = 1 & & - \\
C_2 & C_2 \to C_2 \cap \sigma^{-1}C_2 \to x \in C_2, \sigma x \in C_2 \to x_0 = 1, x_1 = 0, x_1 = 1, x_2 = 0 & & -
\end{array}$$

Ako uzmemo niz nekih elemenata particije, vidimo da ne smijemo imati C_2 iza C_0,C_0 iza C_1, C_1 iza C_1 i C_2 iza C_2 da bismo ispunili pretpostavku za dokazivanje Markovljevog svojstva. Sada ćemo uzeti neki proizvoljan niz elemenata particije, ali moramo paziti na ove uvjete. Uzmimo niz:$\ldots A_{k_{-2}} = C_0, A_{k_{-1}} = C_0, A_{k_0} = C_1, A_{k_1} = C_2, A_{k_2} = C_0 \ldots$. Provjeravamo je li zadovoljena pretpostavka:

$$A_{k_{-2}} \cap \phi^{-1}A_{k_{-1}} \neq \emptyset \Rightarrow C_0 \cap \phi^{-1}C_0 \neq 0$$
$$A_{k_{-1}} \cap \phi^{-1}A_{k_0} \neq \emptyset \Rightarrow C_0 \cap \phi^{-1}C_1 \neq 0$$
$$A_{k_0} \cap \phi^{-1}A_{k_1} \neq \emptyset \Rightarrow C_1 \cap \phi^{-1}C_2 \neq 0$$
$$A_{k_1} \cap \phi^{-1}A_{k_2} \neq \emptyset \Rightarrow C_2 \cap \phi^{-1}C_0 \neq 0$$

Treba pokazati da je $\bigcap_{-\infty}^{+\infty} \phi^{-i}A_{k_i} \neq \emptyset$. Imamo sljedeći slučaj. Promatramo presjek:

$$\ldots \cap \phi^2 C_0 \cap \phi C_0 \cap C_1 \cap \phi^{-1}C_2 \cap \phi^{-2}C_0 \cap \ldots$$

Ako pokažemo da u tom presjeku postoji bar jedan element onda smo gotovi. Sada ćemo konstruirati niz x koji će se nalaziti u zadanom presjeku.

$$x \in \phi^2 C_0 \Rightarrow \phi^{-2}x \in C_0, \quad x_{-2} = 0, x_{-1} = 0$$

$$x \in \phi C_0 \Rightarrow \phi^{-1}x \in C_0, \quad x_{-1} = 0, x_0 = 0$$
$$x \in C_1 \Rightarrow \quad x_0 = 0, x_1 = 1$$
$$x \in \phi^{-1}C_2 \Rightarrow \phi x \in C_2, \quad x_1 = 1, x_2 = 0$$
$$x \in \phi^{-2}C_0 \Rightarrow \phi^2 x \in C_0, \quad x_2 = 0, x_3 = 0$$

Ovakvom konstrukcijom vidimo da vrijedi Markovljevo svojstvo na ovom našem proizvoljnom primjeru.

Općenito Markovljevo svojstvo možemo pokazati na jednostavniji način. Uzmimo da vrijedi $A_{k_i} \cap \phi^{-1} A_{k_{i+1}} \neq \emptyset$. Na ovaj izraz djelujemo sa σ^{-i} i dobivamo $\sigma^{-i} A_{k_i} \cap \sigma^{-(i+1)} A_{k_{i+1}} \neq \emptyset$. Primijetimo da će to vrijediti ako pokažemo da vrijedi funkcijsko svojstvo: $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Prvo što ćemo pokazati je da za sve funkcije vrijedi sljedeće: $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$, gdje su $A, B \subseteq Domf$. Uzmimo $y \in f(A \cap B)$ i $x \in A \cap B$ t.d. vrijedi $f(x) = y$. Pošto je $x \in A$, slijedi da je $y \in f(A)$. Analogno, pošto je $x \in B$, slijedi $y \in f(B)$. Iz ovoga slijedi da je $y \in f(A) \cap f(B)$, pa smo pokazali inkluziju.
Imamo i kontraprimjer da ne mora vrijediti $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Stavimo da je:

$$\mathbb{D}_f = \{a, b\}, a \neq b, f(a) = a = f(b), (\text{a i b se preslikaju u istu točku}), A = a, B = b$$

$$\Rightarrow A \cap B = \emptyset \quad i \quad f(A \cap B) = \emptyset$$
$$\Rightarrow f(A) = a = f(B)$$
$$\Rightarrow f(A) \cap f(B) = a \neq \emptyset$$
$$\Rightarrow f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$$

Sada moramo vidjeti za koje funkcije će uvijek vrijediti ova pretpostavka. Pokazat ćemo da svojstvo $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ vrijedi za injekcije.
Samo trebamo pokazati $f(A \cap B) \supseteq f(A) \cap f(B)$. Uzmimo proizvoljan $y \in f(A) \cap f(B)$. Također, uzmimo $x_1 \in A$ i $x_2 \in B$ takve da vrijedi $y = f(x_1)$ i $y = f(x_2)$. Kako tvrdnju dokazujemo za injekcije, pretpostavljamo da je f injekcija. Slijedi da je $x_1 = x_2$. To je pak zajednički element od $A \cap B$ pa slijedi da je $y \in f(A \cap B)$.

Napomena 1.3.5. *Kod topoloških Markovljevih lanaca šift preslikavanje po definiciji je homeomorfizam (neprekidna bijekcija) pa iz toga slijedi da je sigurno i injekcija. Slijedi da prethodno pokazano funkcijsko svojstvo vrijedi za takva preslikavanja.*

Poglavlje 2

Ekvivalencija toka

2.1 Osnovni pojmovi i definicije

Definicija 2.1.1. *Neka je* (X, σ) *topološki Markovljev lanac i uzmimo da je k strogo pozitivna neprekidna funkcija na X* ($k : X \to \mathbb{R}$). *Označimo sa* X^k *kompaktni metrički prostor dobiven iz skupa* $\{(x, y) : x \in X,\ 0 \leq y \leq k(x)\}$ *na sljedeći način. Prvo uzmimo proizvoljnu točku* $x_1 \in X$. *Ona ima koordinate* $(x_1, 0)$. *Tu točku pomičemo vertikalno po osi y do točke* $(x_1, k(x_1))$. *Sljedeću točku iz prostora X uzimamo tako da je* $x_2 = \sigma x_1$. *Tu točku opet pomičemo vertikalno po osi y do točke* $(x_2, k(x_2))$ *i postupak nastavljamo dalje. Upravo opisani postupak nazivamo tokom na* X^k *i označavamo sa* $\{{\sigma_t}^k : t \in \mathbb{R}\}$. $(X^k, {\sigma_t}^k)$ *zovemo k-suspenzija topološkog Markovljevog lanca* (X, σ). *Posebno je zanimljiv slučaj kad je* $k \equiv 1$. *Tada* $(X^1, {\sigma_t}^1)$ *zovemo standardna suspenzija ili samo suspenzija od* (X, σ).

Sada ćemo navesti neka svojstva koja će zadovoljavati proširenje funkcije k. Za pozitivne cijele brojeve definirajmo da vrijedi sljedeće:

1. $k(x, n) = k(x) + k(\sigma x) + \ldots + k(\sigma^{n-1} x)$ i $k(x, 0) = 0$
2. $k(x, m + n) = k(x, n) + k(\sigma^n, m)$
3. $k(x, -n) = -k(\sigma^{-n} x, n)$

Sada ćemo pokazati da pomoću ovih uvedenih svojstava lako dobivamo relaciju ekvivalencije na $X \times \mathbb{R}$. Uzmimo dva elementa iz prostora $X \times \mathbb{R}$. Neka su (x_1, y_1) i $(x_2, y_2) \in X \times \mathbb{R}$ i uvedimo sljedeću relaciju:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_2 = \sigma^n x_1 \quad i \quad y_1 - y_2 = k(x_1, n), \text{za neki } n \text{ cijeli broj}$$

Iz ranije opisanog postupka kako dolazimo do toka topološkog Markovljevog lanca jasno je zašto smo uzeli baš ovakvu relaciju. Znamo da razlika između y_1 i y_2 mora biti baš jednaka $k(x_1, n)$, a mora vrijediti i $x_2 = \sigma^n x_1$ jer upravo tako uzimamo sljedeći element iz prostora X nakon što odaberemo x_1. Trebamo pokazati da je relacija refleksivna, simetrična i tranzitivna.

1. refleksivnost
   Pokazujemo da je:
   $$(x_1, y_1) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow x_1 = \sigma^n x_1 \;\; i \;\; y_1 - y_1 = k(x_1, n), \text{ za neki } n$$
   Uzmimo da je $n = 0$. Slijedi da je $x_1 = x_1$ i $0 = 0$ pa slijedi refleksivnost.

2. simetričnost
   Treba pokazati:
   $$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Rightarrow (x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$$
   Ovdje ćemo koristiti da je $k(x, -n) = -k(\sigma^{-n}, n)$ (ranije definirano). Po pretpostavci vrijedi $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Rightarrow x_1 = \sigma^n x_2$ i $y_1 - y_2 = k(x_1, n)$ za neki n. Da bismo pokazali simetričnost treba pokazati da vrijedi sljedeće:
   $$x_2 = \sigma^n x_1 \;\; i \;\; y_2 - y_1 = k(x_2, n)$$
   za neki n.
   $$x_1 = \sigma^n x_1 \Rightarrow \sigma^{-n} x_1 = x_2$$
   $$y_1 - y_2 = k(x_1, n) \Rightarrow y_2 - y_1 = -k(x_1, n) \Rightarrow y_2 - y_1 = k(\sigma^{-n} x_1, n) \Rightarrow y_2 - y_1 = -k(x_2, n)$$
   Pokazali smo simetričnost.

3. tranzitivnost
   Za tranzitivnost treba pokazati sljedeće:
   $$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \;\; i \;\; (x_2, y_2) \sim (x_3, y_3) \Rightarrow (x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$$
   $$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Rightarrow x_2 = \sigma^{n_1} x_1 \;\; i \;\; y_1 - y_2 = -k(x_1, n_1)$$
   $$(x_2, y_2) \sim (x_3, y_3) \Rightarrow x_3 = \sigma^{n_2} x_2 \;\; i \;\; y_2 - y_3 = -k(x_2, n_2)$$
   Trebamo pokazati da vrijedi $x_3 = \sigma^{n_3} x_1$ i $y_1 - y_3 = -k(x_1, n_3)$.
   $$x_3 = \sigma^{n_2} x_2 = \sigma^{n_2} \cdot \sigma^{n_1} x_1 = \sigma^{n_1 + n_2} x_1$$
   Ako stavimo da je $n_3 = n_1 + n_2$, onda je $x_3 = \sigma^{n_3} x_1$ što je prvo što smo trebali pokazati.
   $$y_1 - y_2 + y_2 - y_3 = k(x_1, n_1) + k(x_2, n_2)$$
   $$y_1 - y_3 = k(x_1, n_1) + k(x_2, n_2)$$

$$y_1 - y_3 = k(x_1, n_1) + k(\sigma^{n_1} x_1, n_2)$$

$$y_1 - y_3 = k(x_1, n_3)$$

Upravo smo pokazali i drugu jednakost pa zaključujemo da vrijedi tranzitivnost.

Želimo vidjeti kako σ_t djeluje na uređeni par (x, y). Kako je t realan broj možemo ga zapisati u sljedećem obliku: $t = k + s$, pri čemu je k najveće cijelo od t ($k = \lfloor t \rfloor$), a s ostatak koji je manji od 1. Označimo $\lfloor t \rfloor = k$. Tok će na uređen par (x, y) djelovati na sljedeći način: $\sigma_t(x, y) = (\sigma^k x, y + s)$. Ako je $y + s > 1$, onda na prvu koordinatu stavljamo $\sigma^{k+1} x$, a druga koordinata je $y + s - 1$.
Ekvivalencija toka dvaju topoloških Markovljevih lanaca će biti definirana u terminima standardnih suspenzija ($k \equiv 1$).

Definicija 2.1.2. *Dva toka $\{\sigma_t\}$ i $\{\rho_t\}$ će biti topološki konjugirana ako postoji homomorfizam ϕ takav da vrijedi $\phi\sigma_t = \rho_t\phi$, za sve $t \in \mathbb{R}$.*

Propozicija 2.1.3. *Neka je (X, σ) topološki Markovljev lanac. Ako su $k, h : X \to \mathbb{R}$ pozitivne kohomologne funkcije (to znači da vrijedi $k = h + g \circ \sigma$ za neku neprekidnu funkciju g). Tada vrijedi da su $\{\sigma_t{}^k\}$ i $\{\sigma_t{}^h\}$ topološki konjugirani tokovi.*

Dokaz. Uzmimo k, h kao iz pretpostavke. Imamo $\sim_k, \sim_h$ relacije ekvivalencije (pokazano ranije) na $X \times \mathbb{R}$. Promotrimo homomorfizam ϕ na $X \times \mathbb{R}$ definiran sa: $(x, y) \mapsto (x, y + g(x))$. Po ranijoj definiciji relacije ekvivalencije znamo da mora vrijediti sljedeće:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_2 = \sigma^n x_1 \;\; i \;\; y_1 - y_2 = k(x_1, n)$$

$$y_1 + g(x_1) - y_2 - g(x_2) = k(x_1, n) + g(x_1) - g(x_2) = k(x_1, n) + g(x_1) - g(\sigma^n x_1) = h(x_1, n)$$

$\Rightarrow \phi$ inducira homomorfizam sa $X \times \mathbb{R}/_{\sim_k}$ u $X \times \mathbb{R}/_{\sim_h}$

□

Definicija 2.1.4. *Ako je (X, σ) topološki Markovljev lanac sa particijom α, možemo reći da funkcija $h : X \to \mathbb{R}$ ovisi samo o konačnom broju prošlih koordinata ako je h izmjeriva u odnosu na $\bigvee_{i=0}^{n} \sigma^{-i}\alpha$ za neki $n \in \mathbb{N}$ (ovo možemo označiti sa $\alpha^n = \bigvee_{i=0}^{n} \sigma^{-i}\alpha$).*
$(\alpha \vee \beta = A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta)$

Kako bi lakše shvatili ovu definiciju, pokušat ćemo je objasniti na sljedećem primjeru.

Primjer 2.1.5. *Uzmimo, kao u primjeru 1.3.2, matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i njezinu particiju $\alpha = \{C_0, C_1\}$, gdje su:*

$$C_0 = \{\ldots, x_0 = 0, \ldots\}$$

$$C_1 = \{\ldots, x_0 = 1, \ldots\}$$

Promatrat ćemo sljedeći presjek: $\sigma^0 A_k \cap \sigma^{-1} A_{k+1}$, *gdje su* A_k *i* A_{k+1} *elementi particije* α. *Gledat ćemo sve moguće kombinacije elemenata iz particije* α:

$$\sigma^0 C_0 \cap \sigma^{-1} C_0 = C_0 \cap \sigma^{-1} C_0$$

$$\sigma^0 C_0 \cap \sigma^{-1} C_1 = C_0 \cap \sigma^{-1} C_1$$

$$\sigma^0 C_1 \cap \sigma^{-1} C_0 = C_1 \cap \sigma^{-1} C_0$$

$$\sigma^0 C_1 \cap \sigma^{-1} C_1 = C_1 \cap \sigma^{-1} C_1$$

Nakon što promotrimo sve ove presjeke, vidimo da ćemo fiksirati još jedno stanje, točnije ono u trenutku -1. Nakon toga dobivamo sljedeću particiju: $\alpha^1 = (C_0^{'}, C_1^{'}, C_2^{'}, C_3^{'})$, *pri čemu su:*

$$C_0^{'} = \{\dots, x_{-1} = 0, x_0 = 0, \dots\}$$
$$C_1^{'} = \{\dots, x_{-1} = 0, x_0 = 1, \dots\}$$
$$C_2^{'} = \{\dots, x_{-1} = 1, x_0 = 0, \dots\}$$
$$C_3^{'} = \{\dots, x_{-1} = 1, x_0 = 1, \dots\}$$

Nastavljajući ovaj postupak, u sljedećem koraku ćemo fiksirati još jedno stanje (promatramo presjeke $\sigma^{-1} A_k \cap \sigma^{-2} A_{k+1}$*). Dobit ćemo particiju sa 8 elemenata. Zaključujemo da ćemo uvijek dobivati particije sa dvostruko više elemenata nego u prethodnom koraku i particije će uvijek ovisiti o konačnom broju prošlih koordinata.*

Teorem 2.1.6. *Neka je* (X, σ) *topološki Markovljev lanac i neka je k pozitivna neprekidna funkcija. Pretpostavimo da tok* $\{\sigma_t{}^k\}$ *ima neprekidnu svojstvenu funkciju sa svojstvenom vrijednosti* $a > 0$ *(to znači da vrijedi* $f \circ \sigma_t^k = e^{2\pi i a t} f \forall t \in \mathbb{R}$*). Tada je k kohomologna sa:*

- *neprekidnom pozitivnom funkcijom koja ovisi samo o konačnom broju prošlih koordinata i koja poprima samo cjelobrojne višekratnike od* a^{-1} *kao vrijednosti.*
- *neprekidnom pozitivnom funkcijom koja ovisi samo o konačnom broju prošlih koordinata i koja poprima samo cjelobrojne višekratnike od* $(na)^{-1}$ *za vrijednosti gdje je n fiksan pozitivan cijeli broj.*

Napomena 2.1.7. *Ovaj važni teorem nećemo dokazivati, ali ćemo ga iskoristiti u dokazu teorema 2.1.10.*

Definicija 2.1.8. *Ako su* $\{\sigma_t\}$ *i* $\{\rho_t\}$ *tokovi na kompaktnim prostorima X i Y onda su oni tok ekvivalentni ako postoji homeomorfizam* $\phi : X \to Y$ *koji poštuje orijentaciju toka.*
Dva topološka Markovljeva lanca su tok ekvivalentni ako su njihove standardne suspenzije tok ekvivalentne.

Propozicija 2.1.9. *Da bi dva topološka Markovljeva lanca (X, σ) i (Y, ρ) bili tok ekvivalentni nužno je i dovoljno da postoji strogo pozitivna neprekidna funkcija $h : X \to \mathbb{R}$ takva da su $\{\sigma_t{}^h\}$ i $\{\rho_t{}^1\}$ topološki konjugirani.*

Teorem 2.1.10. *Ako su (X, σ) i (X, ρ) tok ekvivalentni topološki Markovljevi lanci, tada su, za neku pozitivnu neprekidnu funkciju k koja ima racionalne vrijednosti i ovisi samo o konačnom broju prošlih koordinata, $\{\sigma_t{}^k\}$ i $\{\rho_t{}^1\}$ topološki konjugirani tokovi.*

Dokaz. Po prethodnoj propoziciji postoji pozitivna neprekidna funkcija h takva da su $\{\sigma_t{}^h\}$ i $\{\rho_t{}^1\}$ topološki konjugirani. Dok $\{\rho_t{}^1\}$ ima svojstvenu funkciju sa svojstvenom vrijednosti 1, isto vrijedi i za $\{\sigma_t{}^h\}$. Teorem (2.1.6) povlači da postoji pozitivna neprekidna funkcija k koja ima racionalne vrijednosti i ovisi samo o konačnom broju prošlih koordinata i kohomologna je sa h. Prethodna propozicija pokazuje da su $\{\sigma_t{}^h\}$ i $\{\sigma_t{}^k\}$ topološki konjugirani tokovi. Kako su $\{\sigma_t{}^h\}$ i $\{\rho_t{}^1\}$ topološki konjugirani, a isto vrijedi i za $\{\sigma_t{}^h\}$ i $\{\sigma_t{}^k\}$ slijedi da su $\{\sigma_t{}^k\}$ i $\{\rho_t{}^1\}$ topološki konjugirani . □

2.2 Parry Sullivanova definicija ekvivalencije toka

Napomena 2.2.1. *Zbog jednostavnije notacije, u ovom poglavlju topološki Markovljev lanac ćemo označavati istim slovom kojim je označena i matrica pridružena tom topološkom Markovljevom lancu (npr. (X_A, σ_A) ćemo označavati samo sa A)*

Definicija 2.2.2. *Dvije nenegativne matrice S i T su jako šift ekvivalentne (u oznaci $S \overset{sse}{\sim} T$) ako postoje nenegativne matrice U_i i V_i $i \in \{1, 2, ..., l\}$ takve da vrijedi sljedeće:*

$$S = U_i V_i, V_1 U_1 = U_2 V_2, \ldots, V_{l-1} U_{l-1} = U_l V_l, V_l U_l = T$$

Kažemo da su S i T jako šift ekvivalentne u l koraka.

Navodimo teorem koji nam daje vezu između topološke konjugiranosti dvaju Markovljevih lanaca i njihovih pripadnih matrica. Teorem nećemo dokazivati, ali ga navodimo zbog njegove važnosti i povezanosti sa jakom šift ekvivalencijom.

Teorem 2.2.3. *Dva topološka Markovljeva lanca S i T su topološki konjugirani ako i samo ako su njihove pripadne matrice jako šift ekvivalentne.*

Sada ćemo iznijeti Parry-Sullivanov teorem pomoću kojeg jednostavno možemo provjeriti da li su dvije matrice, odnosno dva topološka Markovljeva lanca tok ekvivalentna.

Teorem 2.2.4. *Dva topološka Markovljeva lanca S i T su tok ekvivalentna (u oznaci $S \overset{fe}{\sim} T$) ako je moguće iz matrice S dobiti matricu T u konačno koraka pomoću sljedećih operacija:*

1. *zamjena produktne matrice UV sa VU gdje su U i V pravokutne nenegativne matrice*

2. *zamjena matrice* $A = \begin{bmatrix} A(1,1) & \dots & A(1,n) \\ \vdots & & \vdots \\ A(n,1) & \dots & A(n,n) \end{bmatrix}$ *s matricom* $A = \begin{bmatrix} 0 & A(1,1) & \dots & A(1,n) \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A(2,1) & \dots & A(2,n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & A(n,1) & \dots & A(n,n) \end{bmatrix}$

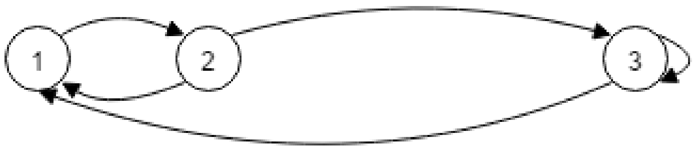
3. *inverzna operacija od* 2)

Pretpostavimo da su S i T tok ekvivalentni topološki Markovljevi lanci. Promjenom matrice S sa nekom njenom jako šift ekvivalentnom matricom S_n ($n \in \mathbb{N}$) dobivamo da funkcija k iz teorema (teorem 2.1.10.) ovisi samo o jednoj koordinati. Stavljamo da je $k(x) = k(x_0)$ za neki $x = (x_n)$. Uzmimo da je N zajednički nazivnik racionalnih vrijednosti funkcije k. Pretpostavimo da S ima l stanja ($i \in \{1, 2, \dots, l\}$). Tada je S $l \times l$ i za svaki $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ pišemo da je $k(i) = \frac{n(i)}{N}$ gdje je $n(i) \in \mathbb{Z}, n(i) > 0$. Pomoću $n(i)$ definiramo novu ireducibilnu $\{0, 1\}$-matricu $S^{'}$. $S^{'}$ će imati $\sum_{i=1}^{l} n(i)$ vrhova podijeljenih u l grupa. U grupi i će biti $n(i)$ vrhova. U i-toj grupi svaki vrh (osim prvog) vodi točno do vrha iznad njega. Prvi vrh u i-toj grupi vodi do zadnjeg vrha u j-toj grupi ako i samo ako vrijedi da je $S(i, j) = 1$. Iz drugog topološkog Markovljevog lanca T konstruiramo ireducibilnu $\{0 - 1\}$-matricu $T^{'}$. Ako je T bila $m \times m$ tada će $T^{'}$ imati Nm vrhova podijeljenih u m grupa po N vrhova. Kao u prethodnom slučaju, prvi vrh u grupi i vodi do zadnjeg vrha u grupi j ako i samo ako vrijedi $T(i, j) = 1$. Svi ostali vrhovi vode jedino do vrha iznad njih. Slijedi da su $S^{'}$ i $T^{'}$ topološki konjugirani Markovljevi lanci. Na sljedećem primjeru ćemo upravo to pokazati.

Primjer 2.2.5. *Uzmimo da je* $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Trebamo dva niza stanja. Stavimo da je prvi niz stanja onaj u kojem je nulto stanje jednako* 0 ($x_0 = 0$) *i odredimo proizvoljno vrijednost funkcije k (npr.* $k(x_0 = \frac{1}{2})$*). Za drugi niz stanja uzmimo onaj za kojeg vrijedi da je nulto stanje jednako* 1 ($x_0 = 1$)*. Također, odredimo proizvoljnu vrijednost funkcije k* ($k(x_0) = \frac{1}{4}$)*. Po prethodnom znamo da je N najmanji zajednički nazivnik racionalnih vrijednosti funkcije k, a to su* ($\frac{1}{2}$ *i* $\frac{1}{4}$)*. Slijedi da je* $N = 4$*. Još nam preostaje izračunati* $n(1)$ *i* $n(2)$ *jer će njihova suma dati broj stanja matrice* $S^{'}$*. Prije ovoga primjera naveli smo formulu po kojoj računamo* ($k(i) = \frac{n(i)}{N}$)*. Imamo sljedeće jednakosti:*

$$\frac{1}{2} = \frac{n(1)}{4}, \frac{1}{4} = \frac{n(2)}{4} \Rightarrow n(1) = 2, n(2) = 1$$

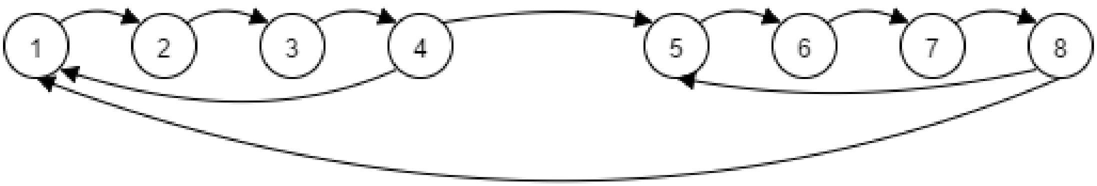
Dakle, $S^{'}$ *ima* $n(1) + n(2) = 3$ *vrha.* $S^{'}$ *izgleda ovako:*



Ako ovu skicu pretvorimo u matricu imamo:

$$S' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Za matricu T moramo uzeti neku tok ekvivalentnu matricu s matricom S. Zato nam je najlakše uzeti istu matricu kao i S. Ista matrica je, trivijalno, uvijek tok ekvivalentna sama sebi. Uzmimo $T = S$. Sada po opisanom postupku konstruiramo T'. T' će imati 8 vrhova jer je broj vrhova jednak Nm pri čemu je m broj vrhova od T. Skiciramo skup svih stanja poštujući pravila opisana ranije.



Naša matrica T' izgleda ovako:

$$T^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Koristeći Parry-Sullivanovu definiciju tok ekvivalencije, iz ove matrice $T^{'}$ lako dobivamo matricu S, odnosno T. Koristimo drugo i treće svojstvo iz Parry-Sullivanovog teorema i radimo sljedeće transformacije:

1. *izbacujemo 2. redak i 3. stupac*
2. *izbacujemo 3. redak i 4. stupac*
3. *izbacujemo 1. redak i 2. stupac*
4. *izbacujemo 5. redak i 6. stupac*
5. *izbacujemo 6. redak i 7. stupac*
6. *izbacujemo 7. redak i 8. stupac*

Nakon ovih transformacija dobijamo početnu matricu S, odnosno T. S i $S^{'}$ su tok ekvivalentne, a isto vrijedi i za T i $T^{'}$. Kako su S i T tok ekvivalentne po pretpostavci, slijedi da su i $S^{'}$ i $T^{'}$ tok ekvivalentne što smo i htjeli pokazati.

Glavni rezultat ili karakterizaciju ekvivalencije toka iznosimo u sljedećem rezultatu. Pomoću te karakterizacije nije teško provjeriti da li su dvije matrice (dva topološka Markovljeva lanca) tok ekvivalentne.

Teorem 2.2.6. *Neka su $A \in M_n(\mathbb{Z}^+), n \in \mathbb{N}$ i $B \in M_m(\mathbb{Z}^+), m \in \mathbb{N}$ nenegativne ireducibilne matrice koje nisu iz trivijalne klase ekvivalencije toka. Tada su matrice A i B tok ekvivalentne ako i samo ako vrijedi:*

$$det(I_n - A) = det(I_m - B) \quad i \quad \mathbb{Z}^n/(I_n - A)\mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Z}^m/(I_m - B)\mathbb{Z}^m$$

Sada ćemo rezultat ovog teorema prikazati na primjeru gdje ćemo za matricu A i B uzeti sljedeće matrice:

$$A = S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = S' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Odmah vidimo da su matrice A i B tok ekvivalentne. Sada provjeravamo da li iz toga slijedi:

$$\det(I_n - A) = \det(I_m - B)$$

$$\det(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}) = \det(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix})$$

$$\det(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}) = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-1 = -1$$

Još treba provjeriti:

$$\mathbb{Z}^n/(I_n - A)\mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Z}^m/(I_m - B)\mathbb{Z}^m$$

$$\mathbb{Z}^2/\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}^3/\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbb{Z}^3$$

Vrijedi sljedeće:

$$\mathbb{Z}^2/\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\mathbb{Z}^2 = \{0\} = \mathbb{Z}^3/\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbb{Z}^3$$

pa vidimo da su ove dvije kvocijetne grupe izomorfne.

Bibliografija

[1] W. Parry i S. Tuncel, *Classification problems in Ergodic theory*, Cambridge university press, 1982.

[2] J. Franks *Flow equivalence of subshifts of finite type*, Ergodic Theory and Dynamical Systems (1984), br.4, 53-66.

[3] R. Williams, *Classification of subshifts of finite type*, Ann. of Math. (1973), br. 98, 120-153.

[4] D. Benčić, *Klasifikacija topoloških Markovljevih lanaca*, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, 2011.

Sažetak

U ovom diplomskom radu se upoznajemo sa pojmom topoloških Markovljevih lanaca i prostorom na kojem su oni definirani. Diplomski rad je podijeljen u dva glavna poglavlja. U prvom poglavlju definiramo pojmove potrebne za definiciju topološkog Markovljevog lanca i navodimo metriku koja će inducirati topologiju na topološkim Markovljevim lancima. Također, upoznali smo se i sa pojmom Markovljeve particije. U drugom poglavlju bavimo se ekvivalencijom toka (eng. flow equivalence) i iznosimo važne teoreme i propozicije vezane za tu temu. Na kraju iznosimo postupak provjere da su dva topološka Markovljeva lanca tok ekvivalentna (Franksov rezultat)

Summary

In this thesis, we are concerned with topological Markov chains and various equivalence relations defined on them. In the first part, we give the background on metric and topological spaces, introduce topological Markov chains and Markov partitions. In the second part, we define flow equivalence and state several important results regarding flow equivalence characterization. Finally, we state and explain Franks result regarding algebraic invariants of flow equivalence.

Životopis

Rođen sam 28. listopada 1991. godine u Šibeniku. Pohađao sam osnovnu školu Jurja Dalmatinca u Bilicama i osnovnu školu Petra Krešimira IV. u Šibeniku. Opću gimnaziju sam pohađao u Šibeniku gdje sam i maturirao 2010. godine. Iste godine sam upisao Preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. 2013. godine sam stekao titulu univ. bacc. math. i iste sam upisao Diplomski studij Matematičke statistike.