Simetrale kutova trokuta i konstruktivni problemi

Soldo, Martina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Martina Soldo

SIMETRALE KUTOVA TROKUTA I KONSTRUKTIVNI PROBLEMI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Sanja Varošanec

Zagreb, srpanj 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svome mentoru prof. dr . sc. Sanji Varošanec na strpljenju i razumijevanju, te pomoći i stručnim savjetima prilikom izrade ovog rada. Zahvaljujem svojoj obitelji i prijateljima na podršci i ljubavi, a dragom Bogu na darovima koje mi je dao da moje učenje bude nagrađeno uspjehom, za svoje dobro i dobro drugih.

Sadržaj

Uvod

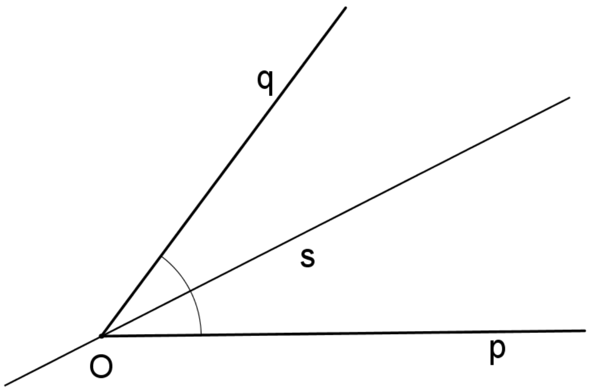
Svrha ovog diplomskog rada je detaljnije proučavanje simetrale kutova trokuta i izvodljivosti konstrukcija trokuta od kojih je barem jedan od zadanih elemenata simetrala kuta trokuta. Simetrala kuta, kao pravac koji dijeli kut na dva jednaka dijela, ima veliko značenje u geometriji trokuta. Cilj ovog rada je iskazati važnija svojstva simetrala kutova trokuta kako unutarnjih tako i vanjskih te iste dokazati. Teorem o simetrali unutarnjeg kuta trokuta, kao najpoznatiji teorem vezan uz simetralu kuta trokuta, potrebno je dokazati na više načina, kao što bi se trebao dokazati i obrat tog teorema. Kao što je poznato, uz pojam simetrala kutova trokuta veže se i pojam upisane kružnice trokuta, pa će biti govora i o svojstvima upisane kružnice trokuta i njegovom središtu. Izraelski matematičar V. Oxman je istraživao nužne i dovoljne uvjete za postojanje i jedinstvenost trokuta kojem je jedan od zadanih elemenata duljina simetrale unutarnjeg kuta trokuta, pa će jedan dio rada biti posvećen rezultatima tih istraživanja. Također, zadatak ovog rada je istražiti izvodljivost konstrukcija trokuta od kojih je barem jedan od zadanih elemenata simetrala unutarnjeg kuta trokuta. Prvo će se proučiti riječ konstruirati, zatim će se neke od rješivih konstrukcija opisati, tj. provest će se analiza sa skicom i plan konstrukcije, a bit će dokazana i nerješivost nekih konstrukcija. Na temu ovog rada postoji mnogo literature, a postoji i mogućnost nadogradnje posebno na području konstruktivnih problema i dokazivanju izvodljivosti konstrukcija.

Poglavlje 1

Simetrale kutova trokuta

1.1 Simetrala kuta

Definicija 1.1.1. *Simetrala kuta je pravac koji taj kut dijeli na dva jednaka dijela.*

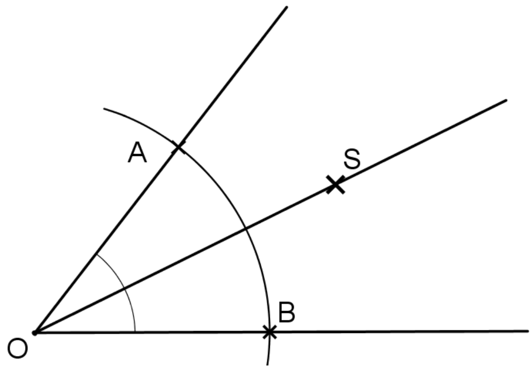


Slika 1.1

Na slici 1.1 je prikazana simetrala kuta kojem je vrh u točki O, a krakovi kuta su polupravci p i q.

Konstrukcija simetrale kuta

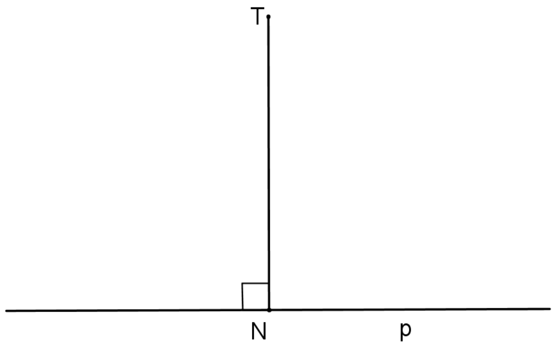
Kako za dani kut $\sphericalangle pOq$ konstruirati njegovu simetralu? Neka je točka O vrh danog kuta. Oko točke O opišimo bilo koju kružnicu te neka ona siječe krakove danog kuta u točkama



Slika 1.2

A i B. Oko točaka A i B opišimo kružnice istog polumjera, većeg od $\frac{1}{2}|AB|$ i neka je S jedno od sjecišta. Prema Teoremu o sukladnosti trokuta $S-S-S$ vrijedi $\triangle OAS \cong \triangle OBS$, pa je $\sphericalangle AOS = \sphericalangle BOS$. Dakle, OS je tražena simetrala kuta $\sphericalangle pOq$ (slika 1.2).

Definicija 1.1.2. *Udaljenost točke T od pravca p je broj $|TN|$, gdje je N nožište okomice spuštene iz T na p, tj. točka N je presjek pravca p i pravca okomitog na p koji prolazi točkom T.*

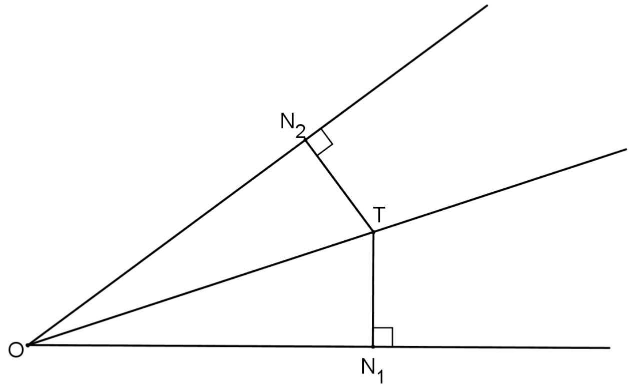


Slika 1.3

Na slici 1.3 su prikazani točka T, pravac p i nožište N okomice iz T na p. U nastavku ćemo udaljenost točke T od pravca p označavati s $d(T, p)$, odnosno $d(T, AB)$, ako su $A, B \in p$.

Teorem 1.1.3. ***(Teorem o simetrali kuta)*** *Neka je T točka unutar kuta. Točka T leži na simetrali kuta ako i samo ako je jednako udaljena od njegovih krakova.*

Dokaz. Neka T leži na simetrali kuta s vrhom O. Iz T spustimo okomice na krakove kuta, neka su N_1 i N_2 nožišta okomica spuštenih iz T na krakove kuta s vrhom O. Trokuti TON_1 i TON_2 su sukladni prema Teoremu o sukladnosti trokuta $K-S-K$ jer im je $\overline{OT}$ zajednička stranica, $\sphericalangle TON_1 = \sphericalangle TON_2$ i $\sphericalangle TN_1O = 90° = \sphericalangle TN_2O$. Slijedi, $|TN_1| = |TN_2|$.



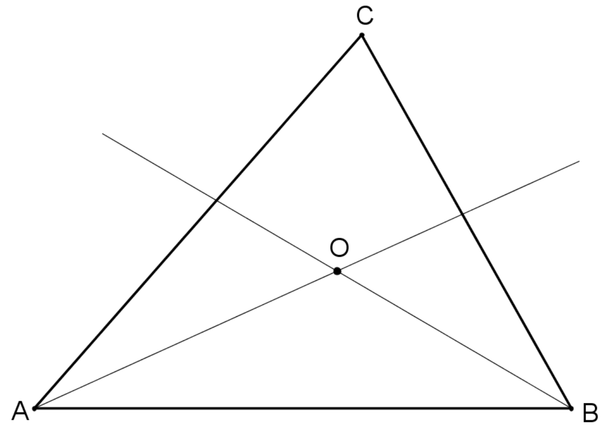
Slika 1.4

Dokažimo i drugi smjer. Neka je T točka sa svojstvom $|TN_1| = |TN_2|$, gdje su N_1 i N_2 nožišta okomica spuštenih iz T na krakove kuta s vrhom O. Trokuti TON_1 i TON_2 su sukladni prema Teoremu o sukladnosti trokuta $S-S-K$ jer im je $\overline{OT}$ zajednička stranica, $|TN_1| = |TN_2|$ i $\sphericalangle TN_1O = 90° = \sphericalangle TN_2O$. Stoga je $\sphericalangle TON_1 = \sphericalangle TON_2$, pa T leži na simetrali kuta $\sphericalangle N_1ON_2$. □

1.2 Simetrale unutarnjih kutova trokuta

Teorem 1.2.1. ***(Teorem o simetralama unutarnjih kutova trokuta)*** *Simetrale unutarnjih kutova trokuta sijeku se u jednoj točki.*

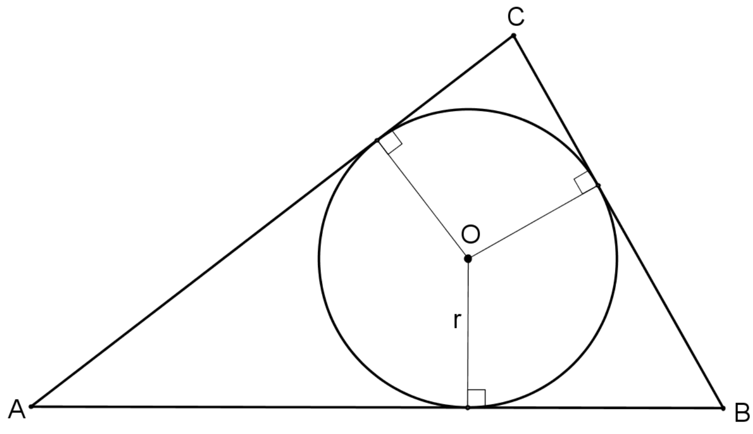
Dokaz. Neka je O sjecište simetrala $\sphericalangle CAB$ i $\sphericalangle ABC$. Kako točka O leži na simetrali $\sphericalangle CAB$, Teorem 1.1.3 povlači da je $d(O, AB) = d(O, AC)$, a kako O leži na simetrali kuta $\sphericalangle ABC$, Teorem 1.1.3 povlači da je $d(O, AC) = d(O, BC)$.
Dakle, $d(O, AB) = d(O, AC)$ pa prema Teoremu 1.1.3, točka O leži na simetrali $\sphericalangle ACB$. Prema tome, simetrale unutarnjih kutova trokuta ABC sijeku se u točki O. □



Slika 1.5

Iz prethodnog dokaza slijedi da je točka O, u kojoj se sijeku simetrale kutova trokuta ABC, jednako udaljena od stranica tog trokuta, pa nožišta okomica iz O na stranice trokuta ABC leže na istoj kružnici i ta kružnica dira sve tri stranice tog trokuta.

Definicija 1.2.2. *Kružnica koja dira sve tri stranice trokuta zove se kružnica upisana trokutu ABC.*



Slika 1.6

Prema Teoremu 1.2.1, kružnica upisana trokutu ABC ima središte u točki O koja je središte simetrala kutova tog trokuta, a polumjer joj je jednak $r = d(O, AB) = D(O, BC) = D(O, AC)$.

Površina trokuta ABC dana je s:

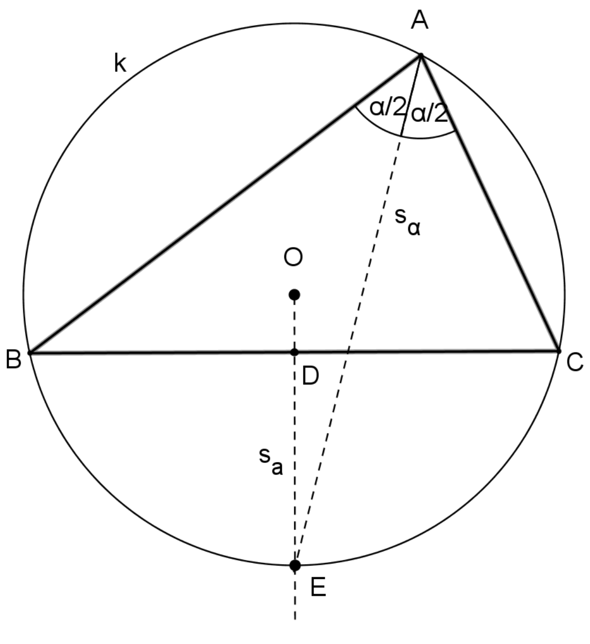
$$\begin{aligned} P &= P(BOC) + P(AOC) + P(AOB) \\ &= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)r \\ &= sr, \end{aligned}$$

gdje je s poluopseg, pa slijedi da je polumjer trokutu upisane kružnice jednak:

$$r = \frac{P}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

Teorem 1.2.3. *Simetrala unutarnjeg kuta iz jednog vrha trokuta i simetrala stranice nasuprot tom vrhu sijeku se na kružnici opisanoj tom trokutu.*

Dokaz. Neka je trokutu ABC opisana kružnica k. Simetrala stranice $\overline{BC}$, s_a siječe kružnicu k u točki E. Budući da ta simetrala raspolavlja stranicu $\overline{BC}$ ($\overline{BD} = \overline{CD}$) i $s_a \perp BC$, ona raspolavlja i pripadni luk $\widehat{BC}$, tj. $|\widehat{BE}| = |\widehat{CE}|$.



Slika 1.7

Budući da su obodni kutovi nad jednakim lukovima jednaki, slijedi da je

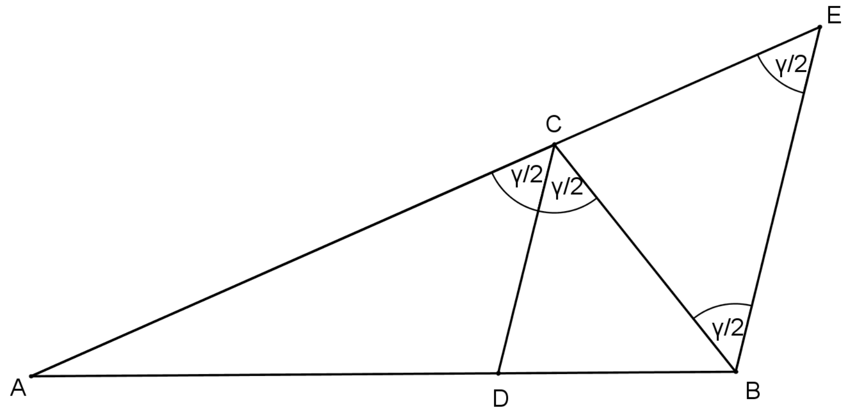
$$\sphericalangle EAB = \sphericalangle CAE = \frac{\alpha}{2}.$$

To znači da simetrala kuta CAB prolazi točkom E. Time je dokazana tvrdnja teorema. □

1.3 Teorem o simetrali unutarnjeg kuta trokuta

Teorem 1.3.1. ***(Teorem o simetrali unutarnjeg kuta trokuta)*** *Simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli tom kutu nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih stranica.*

Dokaz. Prvi način. Neka je CD simetrala kuta γ. Kroz točku B povucimo paralelu s CD. Neka je E sjecište te paralele s produžetkom $\overline{AC}$ preko C.



Slika 1.8

Vrijedi $\sphericalangle DCA = \sphericalangle DCB = \frac{\gamma}{2}$. Tada je $\sphericalangle BEC = \sphericalangle DCA = \frac{\gamma}{2}$ i $\sphericalangle EBC = \sphericalangle DCB = \frac{\gamma}{2}$, jer su to kutovi uz transverzalu paralelnih pravaca. Zaključujemo $\sphericalangle BEC = \sphericalangle EBC$, pa je trokut BEC jednakokračan s osnovicom $\overline{BE}$. Slijedi $|BC| = |CE|$. Primijenimo Talesov teorem o proporcionalnosti na $\sphericalangle EAB$ i paralelne pravce CD i BE:

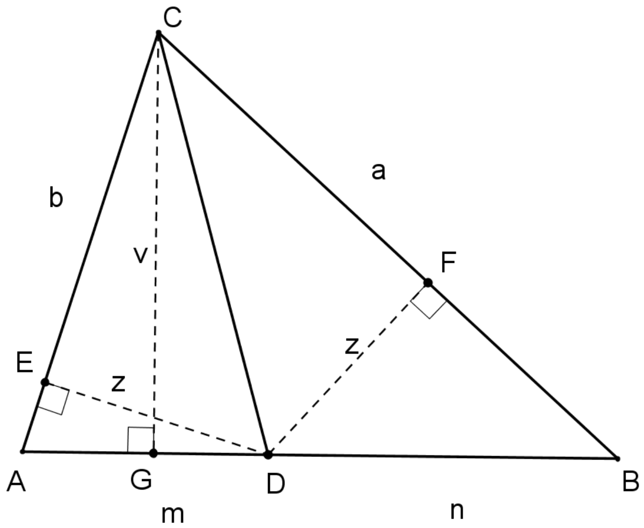
$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CE|},$$

pa je

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

□

Dokaz. Drugi način. Neka je D sjecište simetrale kuta u vrhu C sa stranicom $\overline{AB}$. Označimo $m = |DA|, n = |DB|$. Treba dokazati da je $m : n = b : a$, gdje je $a = |BC|$ i $b = |CA|$. Označimo li nožišta okomica povučenih iz točke D na stranice $\overline{CA}$ i $\overline{BC}$ s E odnosno F, tada po Teoremu 1.1.3 vrijedi $|DE| = |DF|$. Označimo sa z duljinu dužina $\overline{DE}$ i $\overline{DF}$.



Slika 1.9

Ako je v duljina visine trokuta ABC povučene iz vrha C, vrijedi:

$$P(ADC) = \frac{1}{2}mv = \frac{1}{2}bz,$$

$$P(DBC) = \frac{1}{2}nv = \frac{1}{2}az,$$

a odatle

$$m = \frac{bz}{v}, \quad n = \frac{az}{v},$$

odnosno $m : n = b : a$. □

Dokaz. Treći način. Neka je D sjecište simetrala kuta u vrhu C sa stranicom $\overline{AB}$, kao na Slici 1.9, te neka je $m = |DA|$, $n = |DB|$. Primijenimo li na trokute ADC i BDC teorem o sinusima, dobijemo

$$b : m = \sin \sphericalangle ADC : \sin \frac{\gamma}{2}, \quad a : n = \sin \sphericalangle BDC : \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Kako je $\sin \sphericalangle BDC = \sin(180^\circ - \sphericalangle ADC) = \sin \sphericalangle ADC$, to je $b : m = a : n$, odnosno $m : n = b : a$. □

Dokaz. Četvrti način: koordinatnom metodom. Neka je ABC trokut. Uvedimo pravokutni koordinatni sustav xOy tako da je sjecište simetrale kuta $\sphericalangle ACB$ i stranice $\overline{AB}$ ishodište koordinatnog sustava, a stranica $\overline{AB}$ leži na x−osi.
Stavimo $A(-m,0), B(n,0), C(p,q)$, gdje je $m>0, n>0, q\neq 0$. Tada je

$$a = |BC| = \sqrt{(p-n)^2+q^2},$$

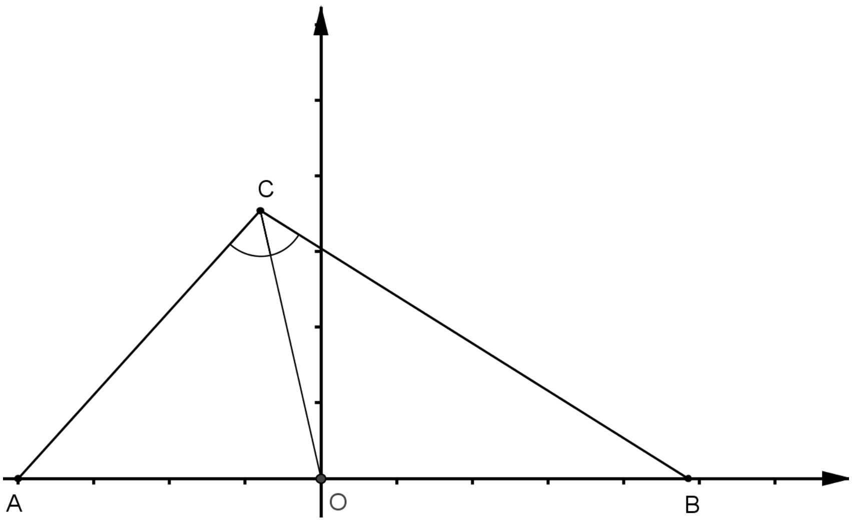
$$b = |AC| = \sqrt{(p+m)^2+q^2}.$$

Jednadžba pravca AC je

$$qx-(m+p)y+mq=0,$$

a pravca BC:

$$qx-(p-n)y-nq=0.$$



Slika 1.10

Jednadžbe simetrala kutova između pravaca AC i BC su

$$\frac{q}{\sqrt{q^2+(m+p)^2}}x-\frac{m+p}{\sqrt{q^2+(m+p)^2}}y+\frac{mq}{\sqrt{q^2+(m+p)^2}}$$

$$\pm\left(\frac{q}{\sqrt{q^2+(p-n)^2}}x-\frac{p-n}{\sqrt{q^2+(p-n)^2}}y-\frac{np}{\sqrt{q^2+(p-n)^2}}\right)=0$$

odnosno

$$\left(\frac{q}{b}x - \frac{m+p}{b}y + \frac{mq}{b}\right) \pm \left(\frac{q}{a}x - \frac{p-n}{a}y - \frac{nq}{a}\right) = 0.$$

Nas zanima ona simetrala koja prolazi ishodištem. Za $x = y = 0$ gornja jednadžba postaje

$$\frac{mq}{b} = \pm\frac{nq}{a}$$

odnosno (zbog $q \neq 0$)

$$\frac{m}{b} = \pm\frac{n}{a}.$$

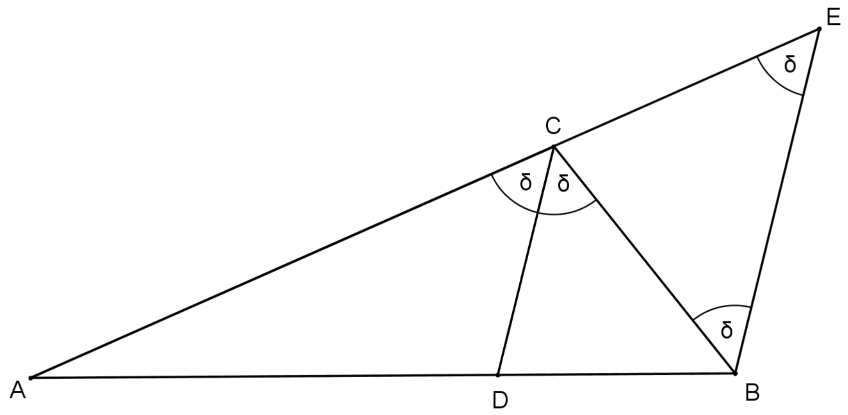
Kako su $a, b, m, n > 0$, uzimamo pozitivan predznak i zaključujemo

$$m : n = b : a,$$

što je i trebalo dokazati. □

Teorem 1.3.2. ***(Obrat teorema o simetrali unutarnjeg kuta trokuta)*** *Točka koja stranicu trokuta dijeli u omjeru preostalih dviju stranica leži na simetrali kuta nasuprot te stranice.*

Dokaz. Neka je $D \in \overline{AB}$ točka sa svojstvom $\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$. Kroz točku B povucimo paralelu s CD. Neka je E sjecište te paralele s produžetkom $\overline{AC}$ preko C (Slika 1.11).



Slika 1.11

Primijenimo li Talesov teorem o proporcionalnosti na $\sphericalangle EAB$ i paralelne pravce CD i BE, imamo

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CE|}.$$

Dakle, $|BC| = |CE|$, pa je trokut BEC jednakokračan s osnovicom $\overline{BE}$. Stoga je $\sphericalangle BEC = \sphericalangle CBE$. Taj kut označimo s δ.

Obzirom da je $\sphericalangle DCB = \sphericalangle CBE = \delta$ i $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BEC = \delta$, jer su to kutovi uz transverzalu paralelnih pravaca, slijedi $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB$, pa je CD simetrala kuta $\sphericalangle ACB$. □

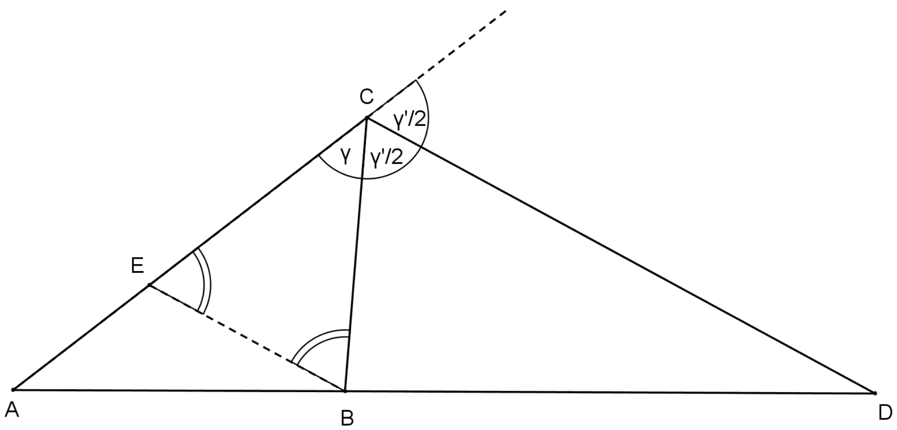
1.4 Simetrale vanjskih kutova trokuta

Zanimljivo je da simetrala vanjskog kuta i simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijele nasuprotnu stranicu u jednakom omjeru i to jedna u vanjskom, a druga u unutarnjem omjeru. Zato se poučak o simetrali vanjskog kuta trokuta može iskazati ovako:

Teorem 1.4.1. *(Teorem o simetrali vanjskog kuta trokuta) Simetrala vanjskog kuta trokuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih stranica, tj.*

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Dokaz. Dokaz je analogan kao prvi način dokaza Teorema o simetrali unutarnjeg kuta trokuta. Neka je CD simetrala kuta γ'. Kroz točku B povucimo paralelu s CD.



Slika 1.12

Neka je E sjecište te paralele s $\overline{AC}$. Vrijedi $\sphericalangle DCB = \frac{\gamma}{2}$. Tada je $\sphericalangle EBC = \frac{\gamma'}{2}$. Isto, zbog Teorema o transverzali paralelnih pravaca, vrijedi $\sphericalangle CDA = \sphericalangle EBA$, pa su $\triangle ABE \sim \triangle ADC$.

Zato vrijedi razmjer

$$\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|AD|}{|AB|} \Rightarrow \frac{|AC|}{|AC| - |CE|} = \frac{|AD|}{|AD| - |BD|}.$$

Dakle,

$$|AC| \cdot |AD| - |AC| \cdot |BD| = |AD| \cdot |AC| - |CE| \cdot |AD|, \tag{1.1}$$

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|CE|}. \tag{1.2}$$

Promotrimo trokut EBC. Budući da je zbroj veličina svih kutova u trokutu jednak $180°$, vrijedi

$$\begin{aligned} \sphericalangle CEB &= 180° - \gamma - \frac{\gamma'}{2} = \frac{360° - 2\gamma - \gamma'}{2} \\ &= \frac{360° - 2\gamma - (180° - \gamma)}{2} \\ &= \frac{180° - \gamma}{2} = \frac{\gamma'}{2} \\ &= \sphericalangle EBC, \end{aligned}$$

tj. trokut CEB je jednakokračan s krakovima $\overline{CE}$ i $\overline{CB}$. Kad to uvrstimo u (1.2), dobijemo traženi razmjer. □

Teorem 1.4.2. *Simetrale bilo koja dva vanjska kuta trokuta i simetrala preostalog trećeg unutrašnjeg kuta trokuta sijeku se u jednoj točki.*

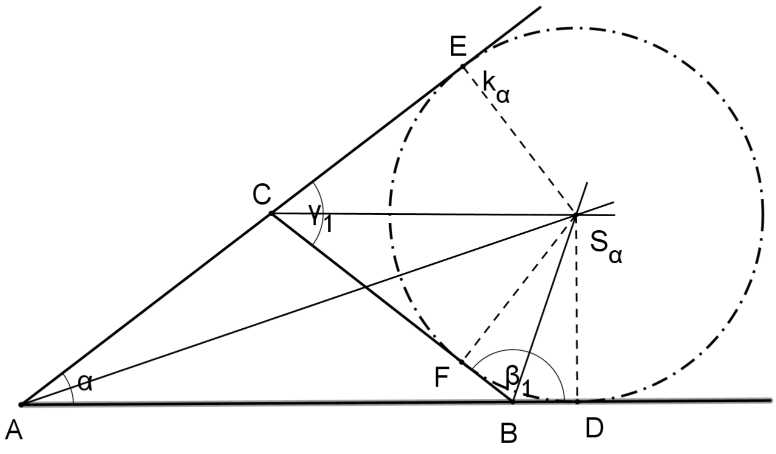
Dokaz. Na slici 1.13 nacrtane su simetrale vanjskih kutova pri vrhovima B i C trokuta ABC. Te se simetrale sigurno sijeku i njihovo sjecište označimo sa S_α.
Budući da ta točka pripada simetrali kuta β_1, slijedi da je

$$|S_a D| = |S_a F|.$$

Isto tako, točka S_α pripada simetrali kuta γ_1, zbog čega je

$$|S_\alpha F| = |S_\alpha E|.$$

Sada je $|S_\alpha D| = |S_\alpha E|$, što znači da točka S_α pripada simetrali kuta EAD, odnosno kuta CAB. To znači da se simetrale vanjskih kutova trokuta pri vrhovima B i C i simetrala unutarnjeg kuta pri vrhu A sijeku u točki S_α. □



Slika 1.13

Označimo li $|S_\alpha D| = |S_\alpha E| = |S_\alpha F| = r_\alpha$, zaključujemo da su pravci AB, AC i BC tangente kružnice $k_\alpha(S_\alpha, r_\alpha)$. Ta se kružnica zove pripisana kružnica trokutu ABC uz stranicu $\overline{BC}$. Svaki trokut ima tri pripisane kružnice, a svaka od njih dira jednu stranicu trokuta i produženja ostalih dviju.

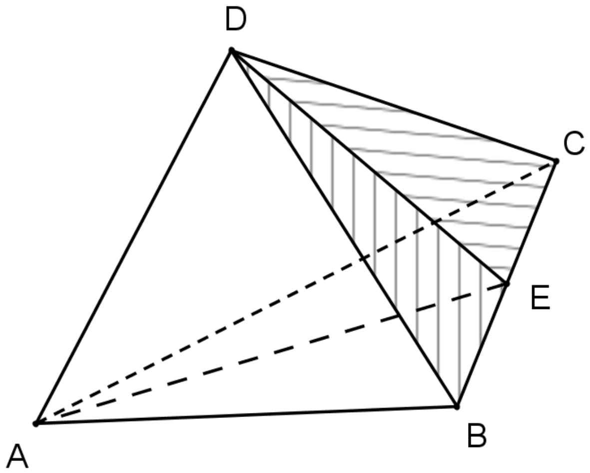
Teorem 1.4.1 je analogon Teoremu o simetrali unutarnjeg kuta trokuta po provođenju dokaza (prvi način). Možemo imati i analogon Teorema o simetrali unutarnjeg kuta trokuta u prostoru (drugi način dokaza). Taj teorem možemo izreći ovako:

Teorem 1.4.3. *Simetralna ravnina diedarskog kuta kojeg tvore poluravnine ABD i ACD tetraedra $ABCD$ dijeli nasuprotnu stranu BCD u dva trokuta čije se površine odnose kao površine odgovarajućih strana tetraedra.*

Dokaz. Neka je $ABCD$ tetraedar kojeg promatramo. Neka je ravnina ADE simetralna ravnina diedarskog kuta kojeg čine ravnine ADB i ADC. Budući da je ravnina ADE simetralna ravnina, ona ima svojstvo da su sve točke te ravnine jednako udaljene do ploha koje određuju tu ravninu.
Dakle,
$$d(E, ABD) = d(E, ADC) = v.$$

Promotrimo tetraedre $ABED$ i $AECD$ te napišimo njihove volumene na dva načina:

$$V(ABED) = \frac{P(BED) \cdot v_A}{3} = \frac{P(ABD) \cdot v}{3}$$
$$V(AECD) = \frac{P(DEC) \cdot v_A}{3} = \frac{P(ACD) \cdot v}{3}$$



Slika 1.14

Iz toga slijedi traženi omjer površina

$$\frac{P(BED)}{P(DEC)} = \frac{P(ABD)}{P(ACD)}.$$

□

1.5 Svojstva simetrale unutarnjeg kuta trokuta

Teorem 1.5.1. *Ako je D točka u kojoj simetrala unutarnjeg kuta pri vhu C trokuta ABC siječe stranicu $\overline{AB}$, tada vrijedi*

$$|AD| = \frac{bc}{a+b}, \quad |BD| = \frac{ac}{a+b},$$

gdje je $a = |BC|, b = |AC|, c = |AB|$.

Dokaz. Neka je $m = |AD|$ i $n = |BD|$, kao na Slici 1.15. Prema Teoremu o simetrali unutarnjeg kuta trokuta vrijedi

$$m : n = b : a,$$

$$m : (c - m) = b : a.$$

Iz toga slijedi

$$ma = bc - bm,$$

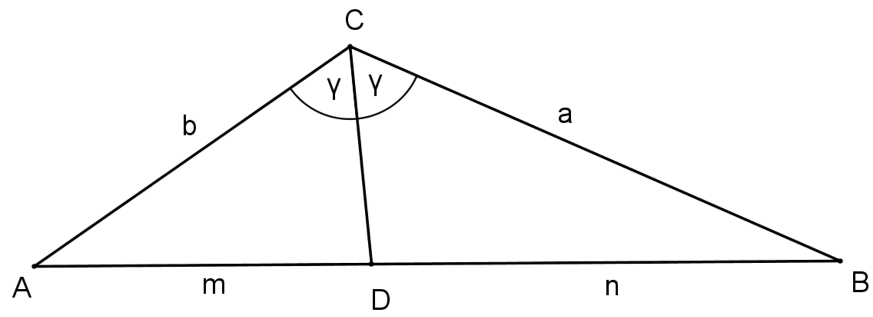
pa je

$$m(a + b) = bc.$$

Dobijemo

$$m = \frac{bc}{a+b}, \quad n = c - m = \frac{ac}{a+b}.$$

□



Slika 1.15

Teorem 1.5.2. *Ako su a, b, c duljine stranica trokuta, a s_α, s_β, s_γ duljine simetrala unutarnjih kutova, tada vrijedi*

$$s_\alpha = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)},$$

$$s_\beta = \frac{1}{a+c}\sqrt{ac(a+b+c)(a+c-b)},$$

$$s_\gamma = \frac{1}{a+b}\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}.$$

Pod duljinom simetrale unutarnjeg kuta trokuta podrazumijevamo duljinu odsječka te simetrale od vrha trokuta do sjecišta s nasuprotnom stranicom.

Dokaz. Prvi način. Dovoljno je dokazati prvu jednakost jer ostalo dokazujemo analogno. Simetrala s_α pri vrhu A dijeli nasuprotnu stranicu na dijelove m i n, pa prema Teoremu 1.5.1 vrijedi

$$m = \frac{bc}{a+b} \quad \text{i} \quad n = \frac{ac}{a+b}.$$

Primjenom Stewartovog teorema dobivamo

$${s_\alpha}^2 a = b^2 m + c^2 n - amn,$$

odakle slijedi

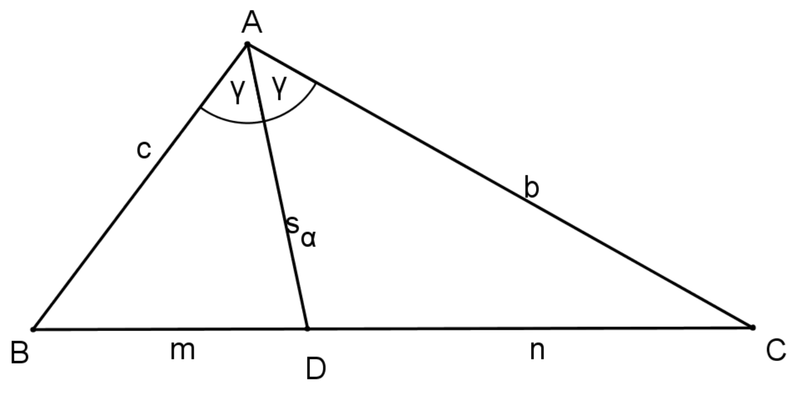
$$\begin{aligned}
{s_\alpha}^2 &= \frac{b^2c}{b+c} + \frac{bc^2}{b+c} - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} \\
&= \frac{bc}{(b+c)^2}(b(b+c) + c(b+c) - a^2) \\
&= \frac{bc}{(b+c)^2}((b+c)^2 - a^2) \\
&= \frac{bc}{(b+c)^2}(b+c-a)(b+c+a)
\end{aligned}$$

te konačno

$$s_\alpha = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}.$$

□

Dokaz. Drugi način. Neka je točka D sjecište simetrale kuta pri vrhu A sa stranicom $\overline{BC}$.



Slika 1.16

Kako je $P(ABC) = P(ABD) + P(ADC)$, to je

$$bc \sin \alpha = s_\alpha c \sin \frac{\alpha}{2} + s_\alpha b \sin \frac{\alpha}{2},$$

a odatle

$$2bc \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = s_\alpha (b + c) \sin \frac{\alpha}{2},$$

odnosno

$$s_\alpha = \frac{2bc}{b + c} \cos \frac{\alpha}{2}. \tag{1.3}$$

Primjenom trigonometrijskih formula i teorema o kosinusu dobivamo

$$\begin{aligned} 2\cos \frac{\alpha}{2}^2 &= \cos \alpha + 1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + 1 \\ &= \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc}{2bc} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{2bc}, \end{aligned}$$

odnosno

$$2 \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(b + c + a)(b + c - a)}{bc}}. \tag{1.4}$$

Uvrštavanje (1.4) u (1.3) konačno daje

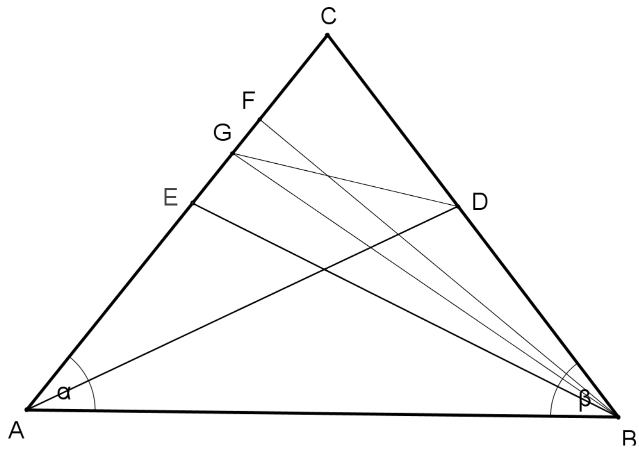
$$s_\alpha = \frac{1}{b + c} \sqrt{bc(a + b + c)(b + c - a)}.$$

□

Teorem 1.5.3. ***(Steinerov teorem)*** *Ako su duljine simetrala dvaju unutarnjih kutova u trokutu jednake, trokut je jednakokračan.*

Dokaz. Neka je D sjecište simetrale kuta α i stranice $\overline{BC}$, a E sjecište simetrale kuta β i stranice $\overline{CA}$ te neka je $|AD| = |BE|$. Pretpostavimo da kutovi α i β nisu jednaki.
Neka je $\alpha < \beta$. Tada na dužini $\overline{CE}$ postoji točka F takva da je $\sphericalangle FBE = \frac{1}{2}\alpha$. Kako je $\alpha < \beta$, to je $\alpha < \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\alpha$, pa je $|BF| < |AF|$. Stoga na dužini $\overline{AF}$ postoji točka G takva da je $|AG| = |BF|$. Trokuti AGD i BFE imaju jednake sljedeće elemente:

$$|AD| = |BE|, \quad |AG| = |BF| \quad \text{i} \quad \sphericalangle GAD = \sphericalangle FBE,$$



Slika 1.17

što znači da su oni sukladni, odakle slijedi $\sphericalangle AGD = \sphericalangle BFE$.
Međutim, to ne može biti zbog činjenice da je $\sphericalangle AGB$ vanjski kut trokuta BFG, pa imamo da je

$$\sphericalangle AGD > \sphericalangle AGB > \sphericalangle BFE.$$

Znači da pretpostavka $\alpha < \beta$ nije točna. Analogno bismo zaključili da ne može biti niti $\alpha > \beta$. Dakle, $\alpha = \beta$, što znači da je trokut ABC jednakokračan. □

Teorem 1.5.4. *Udaljenost vrha trokuta od dirališta upisane kružnice sa stranicama trokuta, kojima je taj vrh zajednički, jednaka je razlici poluopsega i duljine tom vrhu nasuprotne stranice.*

Dokaz. Koristimo oznake kao na Slici 1.18. Treba dokazati:

$$|AE| = |AF| = s - a, \quad |BF| = |BD| = s - b, \quad |CD| = |CE| = s - c.$$

Očito je $|AE| = |AF|$. Označimo $|AE| = |AF| = x$, $|BF| = |BD| = y$, $|CD| = |CE| = z$. Vrijedi:

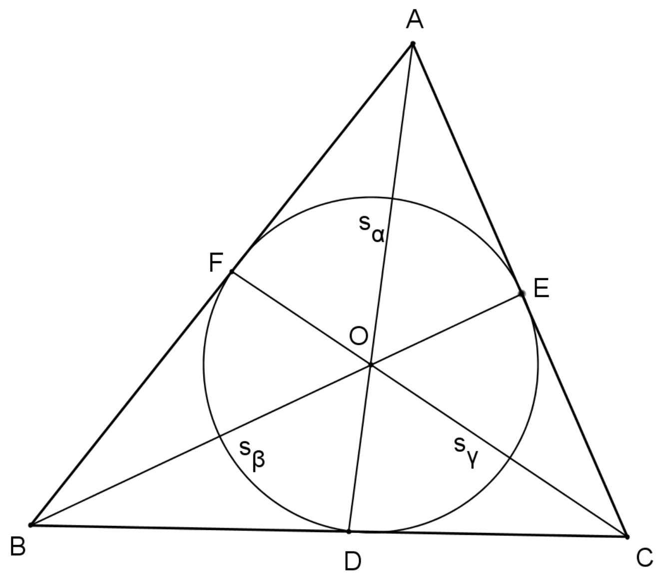
$$x + y = c, \quad y + z = a, \quad z + x = b.$$

Oduzmemo li prve dvije jednadžbe dobit ćemo $x - z = c - a$. Pribrojimo li ovo trećoj jednadžbi, imamo

$$2x = b + c - a = b + c + a - 2a.$$

Označimo opseg trokuta $a + b + c = 2s$ pa dobijemo

$$2x = 2s - 2a,$$



Slika 1.18

odnosno

$$x = s - a.$$

Sada se analogno izračuna $y = s - b, z = s - c$. □

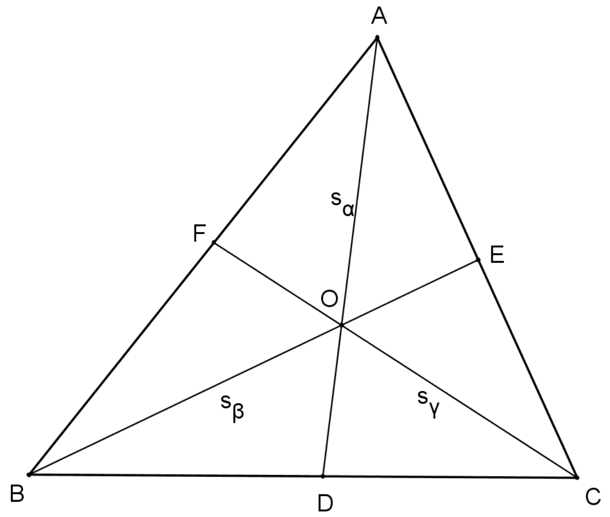
Teorem 1.5.5. *(**Teorem o središtu trokutu upisane kružnice**) Središte trokutu upisane kružnice dijeli odsječak simetrale unutarnjeg kuta povučene iz jednog vrha, a koji se nalazi unutar trokuta, u omjeru zbroja duljina stranica kojima je taj vrh zajednički i duljine treće stranice.*

Dokaz. Neka su $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ odsječci simetrala unutarnjih kutova trokuta ABC, a koji se nalaze unutar tog trokuta, kao na Slici 1.19.
Tvrdnja teorema se može iskazati jednakostima:

$$|AO| : |OD| = (b + c) : a,$$
$$|BO| : |OE| = (c + a) : b,$$
$$|CO| : |OF| = (a + b) : c.$$

Primijenimo li na trokut ABD Teorem o simetrali unutarnjeg kuta trokuta, dobivamo

$$|AO| : |OD| = |AB| : |BD| = c : m.$$



Slika 1.19

Kako je $m = \dfrac{ac}{b+c}$ prema Teoremu 1.5.1, prethodnu jednakost možemo pisati u obliku

$$|AO| : |OD| = c : \frac{ac}{b+c} = 1 : \frac{a}{b+c},$$

odnosno

$$|AO| : |OD| = (b+c) : a.$$

Ostale jednakosti dobivamo analogno. □

Poglavlje 2

Postojanje i jedinstvenost trokuta

Ovo je poglavlje posvećeno pitanjima postojanja i jedinstvenosti trokuta kojem su zadana tri elementa od kojih je barem jedan simetrala kuta.

2.1 O postojanju trokuta sa zadanim duljinama jedne stranice i dvije susjedne simetrale kuta

U ovom poglavlju dajemo dovoljne i nužne uvjete za jedinstvenost trokuta sa zadanim duljinama jedne stranice i dvije susjedne simetrale kuta. Podsjetimo se (Teorem 1.5.2) da u trokutu ABC sa duljinama stranica a, b i c, simetrala kuta s vrhom A (s nasuprotnom stranicom duljine a) ima duljinu

$$s_\alpha = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{bc\left(1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)}. \tag{2.1}$$

Želimo dokazati sljedeći teorem.

Teorem 2.1.1. *Za zadane a, l_1 i $l_2 > 0$ postoji jedinstven trokut ABC s $|BC| = a$ i duljinama simetrala kutova $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BCA$ koje su redom jednake l_1 i l_2 ako i samo ako je*

$$\sqrt{l_1^2 + l_2^2} < 2a < l_1 + l_2 + \sqrt{l_1^2 - l_1 l_2 + l_2^2}.$$

Jedinstvenost

Prvo dokazujemo da ako takav trokut postoji, da je jedinstven. Označimo duljine stranica trokuta s a, x, y. Ako simetrale kutova nasuprot stranica duljina x i y imaju redom duljine l_1 i l_2, onda iz (2.1) imamo

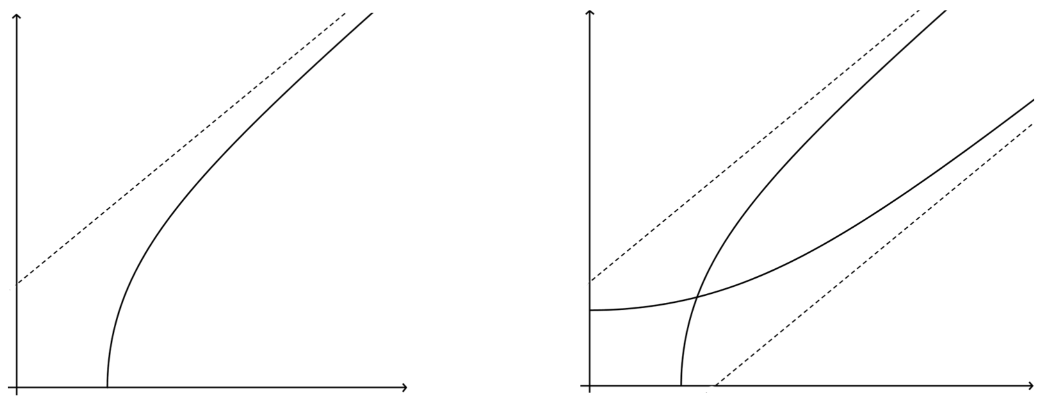
$$y = (a + x)\sqrt{1 - \frac{t_2}{x}}, \tag{2.2}$$

$$x = (a + y)\sqrt{1 - \frac{t_1}{y}}, \tag{2.3}$$

gdje je $t_1 = \dfrac{l_1^2}{a}, t_2 = \dfrac{l_2^2}{a}, (t_1 < y, t_2 < x)$.
Neka je $t > 0$. Promotrimo funkciju $y : \langle t, \infty\rangle \to \langle 0, \infty\rangle$ definiranu s

$$y(x) = (a + x)\sqrt{1 - \frac{t}{x}}.$$

Očito je y neprekidna funkcija na intervalu $\langle t, \infty\rangle$. Ona je rastuća i ima kosu asimptotu $y = x + a - \frac{t}{2}$. Lako se provjeri da je $y'' < 0$ na $\langle t, \infty\rangle$, pa je y konkavna funkcija i njen graf se nalazi ispod njene kose asimptote.



Slika 2.1

Sada promotrimo sustav jednadžbi

$$y = (a + x)\sqrt{1 - \frac{t}{x}}, \tag{2.4}$$

$$x = (a + y)\sqrt{1 - \frac{t}{y}}. \tag{2.5}$$

Očito je da ako uređeni par (x, y) zadovoljava jednadžbu (2.4), onda uređeni par (y, x) zadovoljava jednadžbu (2.5), i obratno. Stoga, ove jednadžbe definiraju inverzne funkcije, a (2.5) definira konveksnu funkciju $\langle 0, \infty\rangle \to \langle t, \infty\rangle$ s kosom asimptotom $y = x - a + \frac{t}{2}$. Primjenjujući na funkcije $y = y_2(x)$ i $x = x_1(y)$ redom definirane s (2.2) i (2.3), zaključujemo da sustav jednadžbi (2.2), (2.3) ne može imati više od jednog rješenja.

Postojanje

Sad razmatramo pitanje postojanja trokuta sa zadanim a, l_1 i l_2. Prije svega napomenimo da je, kako bi sustav jednadžbi (2.2), (2.3) imao rješenje, potrebno da vrijedi $x + a - \frac{t_2}{2} > x - a + \frac{t_1}{2}$. Geometrijski, to znači da je asimptota od (2.2) iznad one od (2.3). Prema tome, $2a > \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{l_1^2 + l_2^2}{2a}$, pa je

$$2a > \sqrt{l_1^2 + l_2^2}. \tag{2.6}$$

Budući da tri duljine a, x i y moraju zadovoljavati nejednakost trokuta, napomenimo da iz (2.2) i (2.3) imamo $y < a + x$ i $x < a + y$. Ako je $x > a$ ili $y > a$, onda je očito $x + y > a$. Stoga ćemo se ograničiti na $x < a$ i $y < a$.

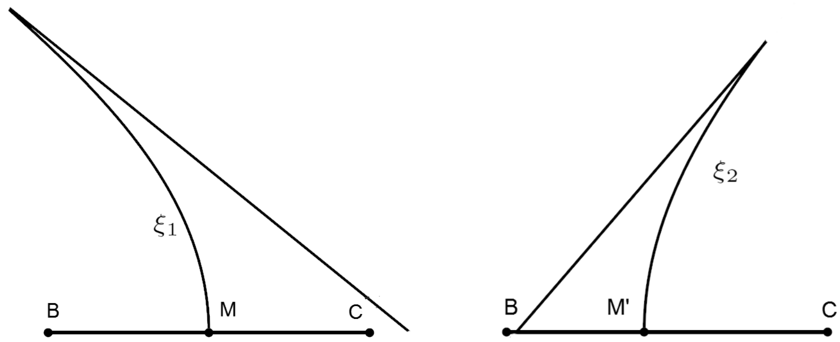
Neka je $\overline{BC}$ dana dužina duljine a. Uzmimo točku Y u ravnini tako da simetrala kuta s vrhom u B trokuta YBC ima zadanu duljinu l_1. Lako se vidi iz (2.1) da je duljina od $\overline{BY}$ dana s

$$y = \frac{al_1}{2a\cos\frac{\theta}{2}} - l_1 \quad \text{ako je} \quad \sphericalangle CBY = \theta. \tag{2.7}$$

Neka je $\alpha = 2\arccos\frac{l_1}{2a}$. Pravilo pridruživanja (2.7) definira rastuću funkciju $y = y(\theta)$: $\langle 0, \alpha\rangle \to \langle \frac{al_1}{2a - l_1}, \infty\rangle$. Lako se provjeri da je za $\theta \in \langle 0, \alpha\rangle$,

$$y > \frac{al_1}{2a - l_1} > y\cos\theta.$$

Graf funkcije y je neprekidna krivulja ε_1 koja počinje (ali nije uključena) u točki M na $\overline{BC}$ tako da je $|BM| = \frac{al_1}{2a - l_1}$. Ona ima kosu asimptotu koja s pravcem BC zatvara kut α. Budući da nas zanima samo slučaj $y < a$, možemo pretpostaviti da je $a > l_1$. Kut α prelazi $\frac{2\pi}{3}$.



Slika 2.2

Promotrimo sada lokus točke Z tako da simetrala kuta s vrhom u C trokuta ZBC ima duljinu $l_2 < a$. Analogno zaključivanje pokazuje da je to krivulja ε_2 koja počinje (ali nije uključena) u točki M' na $\overline{BC}$ tako da je $|M'C| = \dfrac{al_2}{2a - l_2}$. Ona ima kosu asimptotu koja s pravcem CB zatvara kut $2 \arccos \dfrac{l_2}{2a}$ (vidi Sliku 2.2). Opet, ovaj kut α prelazi $\dfrac{2\pi}{3}$.
Dvije se krivulje ε_1 i ε_2 sijeku ako i samo ako je $|BM| > |BM'|$, tj. $|BM| + |M'C| > a$. Iz toga slijedi

$$\frac{l_1}{2a - l_1} + \frac{l_2}{2a - l_2} > 1.$$

Pojednostavljeno, imamo $4a^2 - 4a(l_1 + l_2) + 3l_1 l_2 < 0$, ili

$$l_1 + l_2 - \sqrt{l_1^2 - l_1 l_2 + l_2^2} < 2a < l_1 + l_2 + \sqrt{l_1^2 - l_1 l_2 + l_2^2}.$$

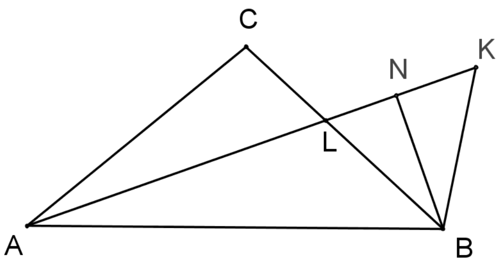
Kako je $a > l_1, l_2$, prva nejednakost vrijedi uvijek. Promatrajući drugu nejednakost i nejednakost (2.6) dobijemo upravo ono što smo htjeli dokazati.

Specijalno, za postojanje jednakokračnog trokuta s osnovicom duljine a i simetralama sukladnih kutova duljine l, nužan i dovoljan uvjet je $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \dfrac{a}{l} < \dfrac{3}{2}$.

Geometrijski dokaz

Lema 2.1.2. *Pretpostavimo da trokuti ABC i $A'B'C'$ imaju sukladne stranice $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ i sukladne simetrale kuta α, tj. $|AL| = |A'L'|$. Neka je $\sphericalangle CAB < \sphericalangle C'A'B'$. Tada je $|AC| < |A'C'|$.*

Dokaz. Neka je K točka na $\overline{AL}$ takva da je $|LB| = |KB|$ i neka je K' točka na $\overline{A'L'}$ takva da je $|L'B'| = |K'B'|$. Tada je $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ALC$ i $\triangle ACL \sim \triangle ABK$, pa je $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AL|}{|AK|}$. Slično $\frac{|A'C'|}{|A'B'|} = \frac{|A'L'|}{|A'K'|} = \frac{|AL|}{|A'K'|}$. Neka je $BN \perp AK$, $B'N' \perp A'K'$. $\sphericalangle CAB < \sphericalangle C'A'B'$, pa je



Slika 2.3

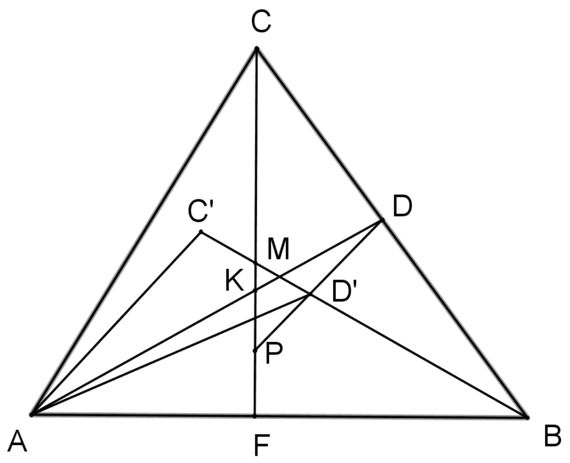
$\sphericalangle LAB < \sphericalangle L'A'B'$. Iz toga slijedi da je $|AN| > |A'N'|$. $|AK| = 2|AN| - |AL| > |A'K'| = 2|A'N'| - |AL|$. Tada je $\frac{|AC|}{|AB|} < \frac{|A'C'|}{|A'B'|}$ i $|AC| < |A'C'|$. □

Teorem 2.1.3. *Ako se trokuti ABC i $A'B'C'$ podudaraju u jednoj stranici i objema simetralama priležećih kutova, tada su ti trokuti sukladni.*

Dokaz. Označimo dvije simetrale kuta trokuta ABC s AD i BE i neka je $|AD| = |A'D'|$, $|BE| = |B'E'|$ i $|AB| = |A'B'|$. Ako je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$, onda je $\sphericalangle ABE = \sphericalangle A'B'E'$. Tada je $\triangle ABE \cong \triangle A'B'E'$ pa je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$, odakle slijedi $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Ako $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle A'B'C'$ nisu sukladni, tada promatramo dva slučaja:
Slučaj 1. $\sphericalangle ABC > \sphericalangle A'B'C'$ i $\sphericalangle BAC > \sphericalangle B'A'C'$. Pretpostavimo da C' pripada unutrašnjosti trokuta ACF ($\overline{CF}$ je visina trokuta ACB) ili da C' pripada dužini $\overline{CF}$, C' se ne podudara s točkom C. Označit ćemo $K = AD \cap CF$ i $M = C'B \cap CF$.

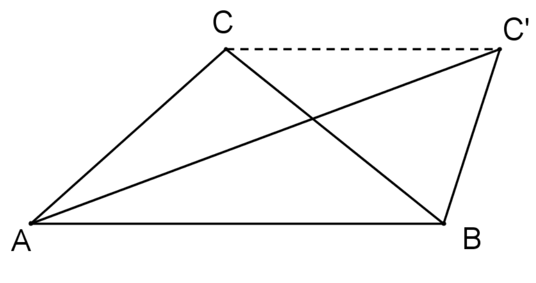
$$|AC'| < |AC| \Rightarrow \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|DB|} > \frac{|AC'|}{|AB|} = \frac{|C'D'|}{|D'B'|} >= \frac{|MD'|}{|C'B|},$$

pa točke $P = DD' \cap CF$ i M pripadaju dužini $\overline{CP}$. $\triangle DAD'$ je jednakokračan pa je prema tome $\sphericalangle KD'P > 90°$, ali $90° > \sphericalangle AKF > \sphericalangle KD'P$ što je kontradikcija s $\sphericalangle KD'P > 90°$. Dakle,



Slika 2.4

C' ne može pripadati unutrašnjosti trokuta ACF ili dužini $\overline{CF}$. Slično, dobijemo da C' ne može pripadati unutrašnjosti trokuta BCF. Dakle, prvi slučaj je nemoguć.
Slučaj 2. $\sphericalangle ABC < \sphericalangle A'B'C'$ i $\sphericalangle BAC > \sphericalangle B'A'C'$. Po Teoremu 2.1.2 imamo da je $|AC| >$



Slika 2.5

$|AC'|$ i $|BC'| > |BC|$. Iz toga slijedi da je $\sphericalangle CC'A > \sphericalangle ACC'$ i $\sphericalangle C'CB > \sphericalangle CC'B$. Ali, $\sphericalangle ACC' > \sphericalangle C'CB$ i $\sphericalangle CC'B > \sphericalangle CC'A$. Opet smo dobili kontradikciju te je ovaj slučaj također nemoguć. $\square$

2.2 O postojanju trokuta sa zadanim duljinama jedne stranice, jedne susjedne i jedne nasuprotne simetrale kuta

Razmatramo isti problem kao onaj u prethodnom poglavlju, samo što u ovom poglavlju dajemo dovoljne i nužne uvjete za jedinstvenost trokuta sa zadanim duljinama jedne stranice, jedne susjedne i jedne nasuprotne simetrale kuta, tj. dokazujemo sljedeći teorem.

Teorem 2.2.1. *Za zadane a, l_a i $l_b > 0$ postoji jedinstven trokut ABC s $|BC| = a$ i duljinama simetrala kutova α s vrhom u A i β s vrhom u B koje su redom jednake l_a i l_b ako i samo ako je $l_b \leq a$ ili*

$$a < l_b < 2a \quad ili \quad l_a > \frac{4al_b(l_b - a)}{(2a - l_b)(3l_b - 2a)}.$$

Dokaz. Neka je u trokutu ABC $y = |CA|$ i $z = |AB|$. Imamo $l_b = \dfrac{2az}{a+z}\cos\dfrac{\beta}{2}$ i

$$z = \frac{al_b}{2a\cos\frac{\beta}{2} - l_b}. \tag{2.8}$$

Iz toga slijedi da je $\cos\dfrac{\beta}{2} > \dfrac{l_b}{2a}$, $l_b < 2a$, i

$$\beta < 2\arccos\frac{l_b}{2a}. \tag{2.9}$$

Također,

$$y^2 = a^2 + z(z - 2a\cos\beta), \tag{2.10}$$

$$l_a^2 = yz\left(1 - \frac{a^2}{(y+z)^2}\right). \tag{2.11}$$

Slučaj 1: $l_b \leq a$. Očito, (2.8) definira z kao rastuću funkciju od β na otvorenom intervalu $\langle 0, 2\arccos\frac{l_b}{2a}\rangle$. Kako se vrijednosti od β povećavaju od 0 do $2\arccos\dfrac{l_b}{2a}$, vrijednosti funkcije z se povećavaju od $\dfrac{al_b}{2a - l_b}$ do ∞. Istodobno, iz (2.10), vrijednosti od y se povećavaju od $a - \dfrac{al_b}{2a - l_b} = \dfrac{2a(a - l_b)}{2a - l_b}$ do ∞. Na odgovarajući način, desna strana od (2.11) može biti bilo koji pozitivan broj. Po teoremu srednje vrijednosti, postoji jedinstveni β za koji je (2.11) zadovoljena. To dokazuje postojanost i jedinstvenost danog trokuta.

Slučaj 2: $a < l_b < 2a$. U ovom slučaju, (2.8) definira jednaku rastuću funkciju z kao i ranije, ali se vrijednosti od y povećavaju od $\frac{al_b}{2a - l_b} - a = \frac{2a(l_b - a)}{2a - l_b}$ do ∞. Na odgovarajući način, vrijednosti desne strane od (2.11) se povećavaju od

$$\frac{al_b}{2a - l_b} \cdot \frac{2a(l_b - a)}{2a - l_b} \left(1 - \frac{a^2}{\left(\frac{al_b}{2a - l_b} + \frac{2a(l_b - a)}{2a - l_b} \right)^2} \right) = \frac{16a^2 l_b^2 (l_b - a)^2}{(2a - l_b)^2 (3l_b - 2a)^2}$$

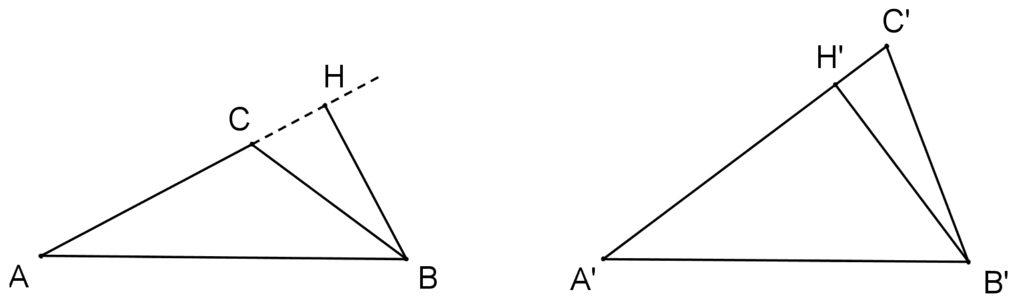
do ∞. Iz toga slijedi $l_a > \frac{4al_b(l_b - a)}{(2a - l_b)(3l_b - 2a)}$. Stoga, postoji jedinstveni β za koji je (2.11) zadovoljena. To dokazuje postojanost i jedinstvenost danog trokuta. □

Specijalno, za postojanje jednakokračnog trokuta s jednakim stranicama duljine a i nasuprotnom simetralom kuta duljine l_a, nužan i dovoljan uvjet je $l_a < \frac{4}{3}a$.

Geometrijski dokaz

Lema 2.2.2. *Pretpostavimo da trokuti ABC i $A'B'C'$ imaju sukladne stranice $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ i sukladne simetrale kuta α, tj. $|AL| = |A'L'|$. Neka je $\sphericalangle BAC < \sphericalangle B'A'C'$. Tada je $|BC| < |B'C'|$.*

Dokaz. Po Lemi 2.1.2 imamo da je $|AC| < |A'C'|$. Neka je $BH \perp AC$, $B'H' \perp A'C'$. Tada je $|AH| > |A'H'|$ i $|BH| < |B'H'|$.



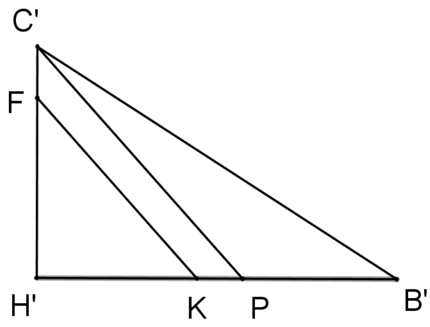
Slika 2.6

Nadalje,

$$|CH| = ||AH| - |AC|| < |C'H'| = ||A'H'| - |A'C'||$$

pa imamo dva pravokutna trokuta CHB i $C'H'B'$ za koje vrijedi da je $|CH| < |C'H'|$ i $|BH| < |B'H'|$.

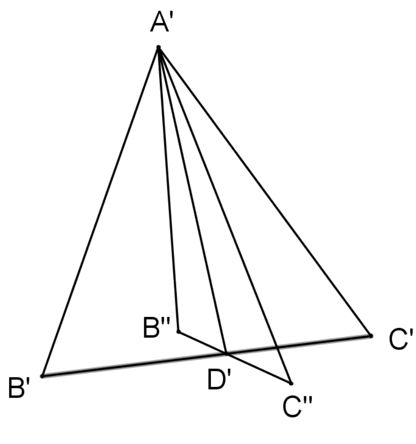
Neka je $|H'F| = |HC|$ i $|H'K| = |HB|$. Dakle, $|FK| = |CB|$. Ako je $FK \parallel C'B'$, onda je $|FK| < |C'B'|$.
Pretpostavimo da je $\sphericalangle FKH' > \sphericalangle C'B'H'$. Neka je $C'P \parallel FK$. Tada je $|C'P| > |FK|$. $\sphericalangle C'PB'$ je tupi kut pa imamo $|C'B'| > |C'P| > |FK| = |CB|$. □



Slika 2.7

Teorem 2.2.3. *Ako se trokuti podudaraju u jednoj stranici, simetrali jednog priležećeg kuta te u simetrali kuta nasuprot te stranice, tada su ti trokuti sukladni.*

Dokaz. Označimo dvije simetrale kuta trokuta ABC i $A'B'C'$ s $\overline{AD}$, $\overline{A'D'}$ i $\overline{CE}$, $\overline{C'E'}$ odgovarajućim redom i neka je $|AD| = |A'D'|$, $|CE| = |C'E'|$ i $|AB| = |A'B'|$. Slično kao u dokazu Teorema 2.1.3 zaključujemo da ako vrijedi $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$, onda su trokuti sukladni.

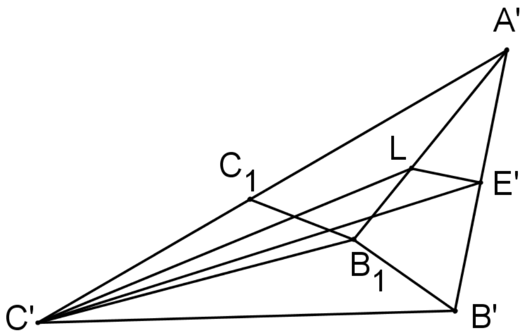


Slika 2.8

Neka je $\sphericalangle BAC < \sphericalangle B'A'C'$. Po Teoremu 2.1.2 i Teoremu 2.2.2 vrijedi $|A'C'| > |AC|$ i $|C'B'| > |CB|$. Želimo dokazati da je $|C'E'| > |CE|$. Neka je $\sphericalangle B''A'D' = \sphericalangle C''A'D' = \sphericalangle BAD$, $|A'B''| = |AB|$, $|A'C''| = |AC|$. Tada vrijedi $\triangle B''A'C' \cong \triangle BAC$ ($\overline{A'D'}$ je zajednička simetrala kuta trokuta $B'A'C'$ i $B''A'C''$). Moramo uzeti u obzir 3 slučaja.

Slučaj 1. Točka C'' pripada unutrašnjosti trokuta $C'A'D'$ (uključujući i dužinu $\overline{D'C'}$). U Teoremu 2.4.3 je dokazano da u tom slučaju vrijedi $|C''E''| = |CE| < |C'E'|$.

Slučaj 2. Točka C'' pripada vanjštini trokuta $C'A'D'$ i $\sphericalangle A'C''B'' = \sphericalangle ACB > \sphericalangle A'C'B'$. Neka je $|C_1A'| = |CA|$, $\sphericalangle A'C_1B_1 = \sphericalangle ACB$, $\sphericalangle C_1A'B_1 = \sphericalangle CA'B$. Tada je $\triangle C_1A'B_1 \cong \triangle CAB$. Po



Slika 2.9

Lemi 2.4.1, simetrala $\sphericalangle A'C_1B_1$ je manja od simetrale $\sphericalangle A'C'B_1$. Neka je $\overline{C'L}$ simetrala trokuta $A'C'B_1$. $\sphericalangle B_1A'C' < \sphericalangle B'A'C'$, pa je $|C'B_1| < |C'B'|$ (elementarni geometrijski dokaz ove tvrdnje je dan u Euklidovi elementi, Knjiga 1, Propozicija 24). Tada je

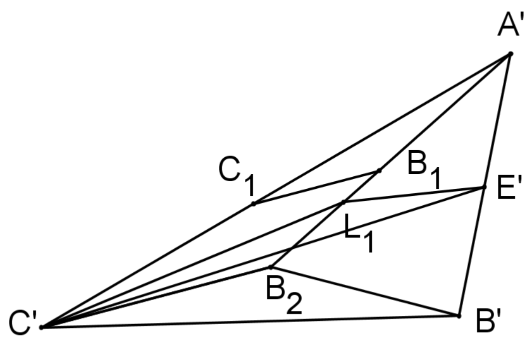
$$\frac{|B_1L|}{|LA'|} = \frac{|C'B_1|}{|C'A'|} < \frac{|C'B'|}{|C'A'|} = \frac{|B'E'|}{|E'A'|}.$$

$|A'B_1| = |A'B'|$ pa je $\sphericalangle B_1LE'$ tupi kut i $\sphericalangle C'LE' > \sphericalangle B_1LE' > 90°$. Dakle, $|C'E'| > |C'L| > |CE|$.

Slučaj 3. Točka C'' pripada vanjštini trokuta $C'A'D'$ i $\sphericalangle A'C''B'' = \sphericalangle ACB < \sphericalangle A'C'B'$. Neka je $C'B_2 \parallel C_1B_1$ i neka je $\overline{C'L_1}$ simetrala kuta trokuta $A'C'B_2$. Tada je $|C'L_1| > |CE|$. $|C'B_2| < |C'B'|$ i opet imamo

$$\frac{|B_2L_1|}{|L_1A'|} = \frac{|C'B_2|}{|C'A'|} < \frac{|C'B'|}{|C'A'|} = \frac{|B'E'|}{|E'A'|},$$

$\sphericalangle C'L_1E'$ je tupi kut i $|C'E'| > |C'L_1| > |CE|$. □



Slika 2.10

2.3 O postojanju trokuta sa zadanom opisanom i upisanom kružnicom i duljinom simetrale kuta

U ovom poglavlju dajemo nužne i dovoljne uvjete za postojanje trokuta kojem su zadani opisane i upisane kružnice te duljina simetrale kuta. Također, razmatramo pitanje konstrukcije takvih trokuta.

Poznato je da je udaljenost između središta opisane i upisane kružnice trokuta dana formulom

$$d^2 = R^2 - 2Rr, \tag{2.12}$$

gdje su R i r redom radijusi opisane i upisane kružnice trokuta. Stoga, ako u ravnini imamo zadane dvije kružnice, s radijusima R i r, nužan uvjet za postojanje trokuta kojem će te kružnice biti opisana i upisana kružnica je taj da udaljenost između njihovih središta zadovoljava (2.12). Iz Ponceletovog teorema zatvaranja slijedi da je taj uvjet također i dovoljan. Osim toga, svaka točka opisane kružnice može biti jedan od vrhova trokuta, tj. općenito ima beskonačno mnogo takvih trokuta. Zanima nas postojanje i jedinstvenost takvog trokuta ako dodamo još jedan element. U našem slučaju, dodat ćemo duljinu simetrale kuta. Želimo dokazati sljedeći teorem.

Teorem 2.3.1. *Ako je $l > 0$ duljina simetrale kuta, onda postoji jedinstveni trokut ako i samo ako je*

$$R + r - d \leq l \leq R + r + d. \tag{2.13}$$

Dokaz. Duljina simetrale kuta α (gdje je α kut u vrhu A zadanog trokuta ABC) dana je formulom

$$l = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}.$$

Kako je $R = \dfrac{abc}{4P(ABC)} = \dfrac{abc}{4rs}$, imamo

$$l = \frac{\frac{8Rrs}{a}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2s-a} = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{2Rr\sin\frac{\alpha}{2}}{r+2R\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Deriviranjem s obzirom na α, imamo

$$\begin{aligned}\frac{l'(\alpha)}{r} &= -\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{R\cos\frac{\alpha}{2}(r-2R\sin^2\frac{\alpha}{2})}{\left(r+2R\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2}\\ &= -\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\left(r^2+2Rr\sin^2\frac{\alpha}{2}+8R^2\sin^4\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(r+2R\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2}\\ &< 0.\end{aligned}$$

Stoga, $l(\alpha)$ monotono pada na $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ od $l_{max} = R + r + d$ do $l_{min} = R + r - d$. □

Napomena 2.3.2.

Općenito, konstrukcija trokuta ravnalom i šestarom, sa zadanim R, r i l nije moguća. Doista, ako je $t = \sin\dfrac{\alpha}{2}$, onda je

$$2Rlt^3 - 4Rrt^2 + rlt - r^2 = 0.$$

Za $R = 3, r = 1$ i $l = 5$ (takav trokut postoji po Teoremu 2.3.1), imamo

$$30t^3 - 12t^2 + 5t - 1 = 0.$$

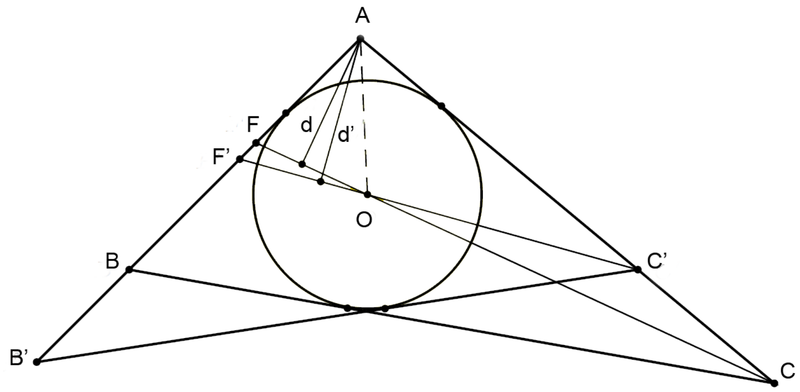
Racionalni brojevi koji mogu biti rješenja ove jednadžbe su $\pm1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{10}, \pm\frac{1}{15}, \pm\frac{1}{30}$. Direktnom provjerom vidimo da ova jednadžba nema racionalnih rješenja. To pokazuje da konstrukcija trokuta ravnalom i šestarom nije moguća.

2.4 O postojanju trokuta sa zadanim duljinama simetrala unutarnjih kutova

U ovom poglavlju dajemo elementarni geometrijski dokaz sukladnosti trokuta koji se podudaraju u svim trima simetralama kutova bez korištenja trigonometrije, matematičke analize i formula za duljinu simetrale kuta trokuta.

Lema 2.4.1. *Pretpostavimo da trokuti ABC i $AB'C'$ imaju zajednički kut u vrhu A (α) i da upisana kružnica od $AB'C'$ nije veća od upisane kružnice od ABC. Ako je $\gamma' > \gamma$, onda je simetrala od γ' manja od simetrale od γ.*

Dokaz. Neka su CF i $C'F'$ simetrale kutova γ i γ' trokuta ABC i $AB'C'$. Želimo dokazati da ako je $\gamma' > \gamma$, onda je $|C'F'| < |CF|$.



Slika 2.11

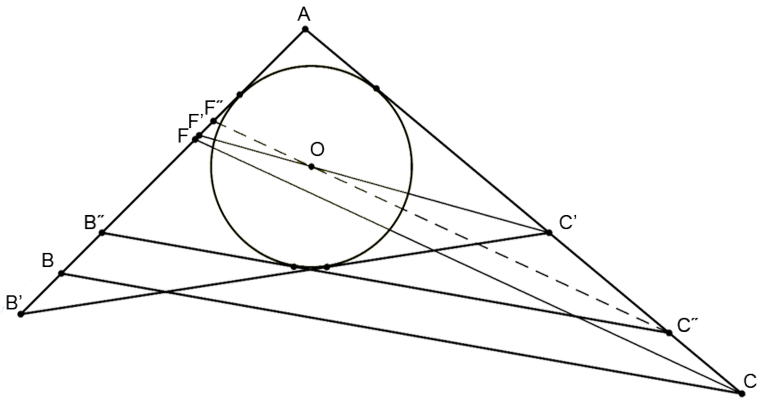
Slučaj 1. Trokuti imaju jednake upisane kružnice. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $\beta > \beta'$ i da je točka C' između A i C. Neka je O središte zajedničke upisane kružnica promatranih trokuta. Poznato je da je $|OF| < |OC|$ i $|OF'| < |OC'|$. Dakle, za površine vrijedi

$$P(OFF') = P(OCC'). \tag{2.14}$$

Neka su d, d' redom udaljenosti od A do simetrala $\overline{CF}, \overline{C'F'}$. Budući da je $\sphericalangle AOF' = \sphericalangle OAC' + \sphericalangle AC'O = \dfrac{\alpha + \gamma'}{2} < 90°$, imamo $\sphericalangle AOF < \sphericalangle AOF' < 90°$ i $d < d'$. Sada, iz 2.14 imamo

$$P(OFF') + P(OC'AF) < P(OCC') + P(OC'AF).$$

To nam daje $P(AF'C') < P(AFC)$, ili $\frac{1}{2}d' \cdot |C'F'| < \frac{1}{2}d \cdot |CF|$. Budući da je $d < d'$, imamo $|C'F'| < |CF|$.
Slučaj 2. Upisana kružnica trokuta $AB'C'$ je manja od upisane kružnice trokuta ABC.



Slika 2.12

Budući da je upisana kružnica trokuta $AB'C'$ unutar trokuta ABC, možemo konstruirati tangentu $B''C''$ paralelnu s BC koja je bliža točki A nego $\overline{BC}$. Neka je $C''F''$ simetrala trokuta $AB''C''$. Imamo $C''F'' \parallel CF$ i

$$|C''F''| < |CF|. \tag{2.15}$$

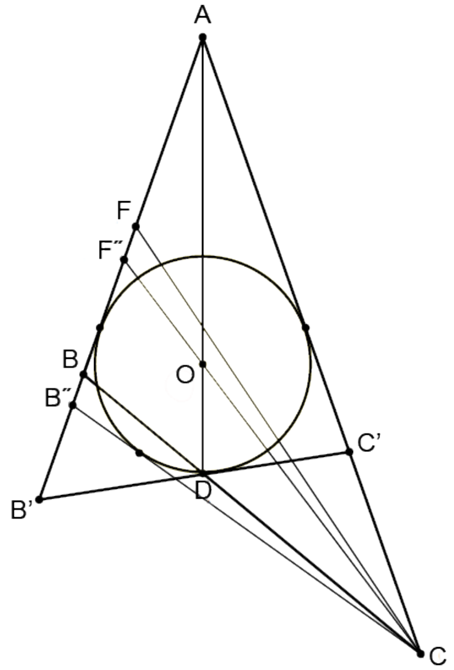
Budući da je $\sphericalangle AC''B'' = \sphericalangle ACB < \sphericalangle AC'B'$, iz Slučaja 1. imamo

$$|C'F'| < |C''F''|. \tag{2.16}$$

Iz 2.15 i 2.16 imamo $|C'F'| < |CF|$. $\square$

Lema 2.4.2. *Pretpostavimo da trokuti ABC i $AB'C'$ imaju zajednički kut u vrhu A (α) i zajedničku simetralu kuta AD, a zajednički kut nije veći od preostalih kutova trokuta $AB'C'$. Ako je $\gamma' > \gamma$, onda je simetrala od γ' manja od simetrale od γ.*

Dokaz. Ako upisana kružnica trokuta $AB'C'$ nije veća od upisane kružnice trokuta ABC, onda zaključak slijedi iz Leme 2.4.1.
Pretpostavimo da je upisana kružnica trokuta $AB'C'$ veća od upisane kružnice trokuta ABC. Pravac $\overline{BC}$ siječe upisanu kružnicu od $A'B'C'$. Stoga, tangenta iz vrha C na tu kružnicu siječe $\overline{AB'}$ u točki B'' između B i B'. Neka su $\overline{CF}$ i $\overline{C'F'}$ simetrale kutova redom γ i γ' u trokutima ABC i $AB'C'$. Želimo dokazati da je $|C'F'| < |CF|$.



Slika 2.13

Promotrimo također simetralu $\overline{CF''}$ u trokutu $AB''C$. Budući da se točka B nalazi između A i B'', točka F se nalazi između A i F''. Iz Leme 1.2.1 imamo

$$|C'F'| < |CF''|. \tag{2.17}$$

Iz $\sphericalangle CB''A > \sphericalangle C'B'A \leq \sphericalangle B'AC'$, imamo $\sphericalangle CF''A > 90°$ i iz trokuta CFF''

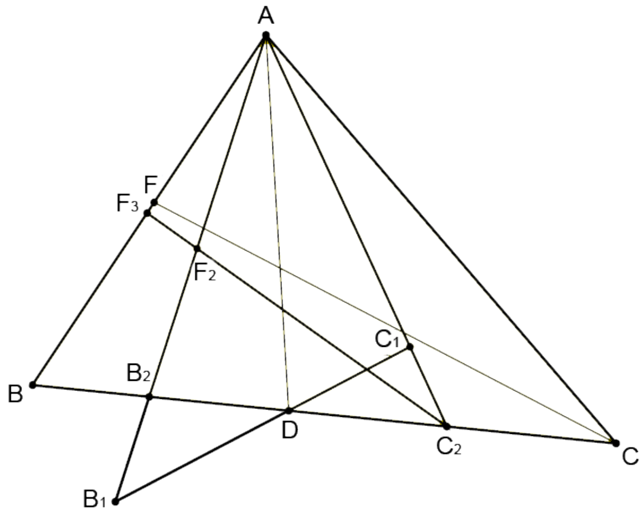
$$|CF''| < |CF|. \tag{2.18}$$

Iz 2.17 i 2.18 zaključujemo da je $|C'F'| < |CF|$. □

Teorem 2.4.3. *Ako se trokuti ABC i $A'B'C'$ podudaraju u tri simetrale kutova, tada su ti trokuti sukladni.*

Dokaz. Označimo simetrale kutova trokuta ABC s $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ i neka je $|AD| = |A'D'|$, $|BE| = |B'E'|$, $|CF| = |C'F'|$.
Ako za kutove danih trokuta imamo $\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$, onda iz sličnosti trokuta ABC i $A'B'C'$ i trokuta ABD i $A'B'D'$ zaključujemo da su trokuti ABC i $A'B'C'$ sukladni.
Neka je α' kut koji nije veći od bilo kojeg drugog kuta trokuta $A'B'C'$ i ABC. Konstruiramo

trokut AB_1C_1 sukladan trokutu $A'B'C'$ koji ima simetralu $\overline{AD}$ kuta $\sphericalangle B_1AC_1$.
Ako je $\alpha = \alpha'$ i $\gamma' > \gamma$, onda trokuti ABC i AB_1C_1 zadovoljavaju uvjete Leme 2.4.2. Slijedi da je $|C'F'| < |CF|$, što je kontradikcija.
Ako je $\alpha' < \alpha$ i AB_1, AC_1 sijeku BC redom u točkama B_2 i C_2, bez smanjenja općenitosti pretpostavljamo da se C_1 nalazi između A i C_2 (moguće i da se podudara s C_2). Pretpostavimo da simetrala kuta $\sphericalangle AC_2B_2$ siječe $\overline{AB_2}$ u F_2 i $\overline{AB}$ u F_3.



Slika 2.14

Budući da trokuti AB_1C_1 i AB_2C_2 zadovoljavaju uvjete Leme 2.4.2, imamo

$$|C'F'| \leq |C_2F_2| < |C_2F_3|. \tag{2.19}$$

Upisana kružnica trokuta ABC_2 je manja od upisane kružnice trokuta ABC. Kako je $\sphericalangle AC_2B > \sphericalangle ACB$, po Lemi 2.4.2 slijedi $|C_2F_3| < |CF|$ i iz 2.19 zaključujemo $|C'F'| < |CF|$. Opet smo dobili kontradikciju. Dakle, trokuti ABC i $A'B'C'$ su sukladni. □

Poglavlje 3

Konstruktivni problemi trokuta

Kada tražimo da se konstruira trokut kojem su zadani neki elementi, onda mislimo na to da se konstruira bilo koji takav trokut u ravnini. Također, kada se u geometriji govori o tome da je trokut jednoznačno određen, onda se obično misli da je on određen do na izometriju ravnine.

Što znači riječ konstruirati? Pri geometrijskim konstrukcijama služimo se samo s dva pomagala, a to su jednobridno ravnalo kojim možemo nacrtati pravac koji prolazi kroz dvije zadane točke i šestarom kojim možemo oko svake točke opisati kružnicu proizvoljno velikog radijusa. Pri tome smatramo da znamo konstruirati presjek dvaju pravaca, presjek pravca i kružnice i presjek dviju kružnica. Točku ćemo smatrati konstruiranom ako je ona dobivena jednom od navedenih konstrukcija. Trokut smatramo konstruiranim ako znamo konstruirati njegove vrhove. Četiri osnovne konstrukcije trokuta slijede iz ovih tvrdnji: trokut je jednoznačno određen sa svoje tri stranice, s dvije stranice i kutom između njih, s jednom stranicom i dva kuta uz nju, s dvije stranice i kutom nasuprot veće od njih. U svezi s trokutom i njegovim konstrukcijama uvode se još neki osnovni pojmovi kao: visina, težišnica, simetrala stranice, simetrala kuta itd.

U ovom poglavlju opisat ćemo konstrukcije trokuta pri čemu je bar jedan od zadanih elemenata simetrala kuta. Cjeloviti popis konstrukcija trokuta nalazi se u knjizi [12] na stranicama 356 - 357. Izdvojit ćemo one konstrukcije trokuta ako su zadane tri od veličina $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, v_a, v_b, v_c, t_a, t_b, t_c, s_\alpha, s_\beta, s_\gamma$, pri čemu je barem jedna od zadanih veličina duljina simetrale kuta.

Redni broj	Zadani elementi	Rješivost	Redni broj	Zadani elementi	Rješivost
1.	a, b, s_α	ne	24.	α, v_b, s_α	da
2.	a, b, s_γ	da	25.	α, v_b, s_β	da
3.	a, α, s_α	da	26.	α, v_b, s_γ	ne
4.	a, α, s_β	ne	27.	α, t_a, s_α	da
5.	a, β, s_α	ne	28.	α, t_a, s_β	ne
6.	a, β, s_β	da	29.	α, t_b, s_α	ne
7.	a, β, s_γ	da	30.	α, t_b, s_β	ne
8.	a, v_a, s_α	da	31.	α, t_b, s_γ	ne
9.	a, v_a, s_β	ne	32.	$\alpha, s_\alpha, s_\beta$	ne
10.	a, v_b, s_α	ne	33.	$\alpha, s_\beta, s_\gamma$	ne
11.	a, v_b, s_β	da	34.	v_a, v_b, s_α	ne
12.	a, v_b, s_γ	da	35.	v_a, v_b, s_γ	da
13.	a, t_a, s_α	da	36.	v_a, t_a, s_α	da
14.	a, t_a, s_β	ne	37.	v_a, t_a, s_β	ne
15.	a, t_b, s_α	ne	38.	v_a, t_b, s_α	da
16.	a, t_b, s_β	ne	39.	v_a, t_b, s_β	ne
17.	a, t_b, s_γ	ne	40.	v_a, t_b, s_γ	ne
18.	a, s_α, s_β	ne	41.	v_a, s_α, s_β	ne
19.	a, s_β, s_γ	ne	42.	t_a, t_b, s_α	ne
20.	α, β, s_α	da	43.	t_a, t_b, s_γ	ne
21.	α, β, s_γ	da	44.	t_a, s_α, s_β	ne
22.	α, v_a, s_α	da	45.	t_a, s_β, s_γ	ne
23.	α, v_a, s_β	ne	46.	$s_\alpha, s_\beta, s_\gamma$	ne

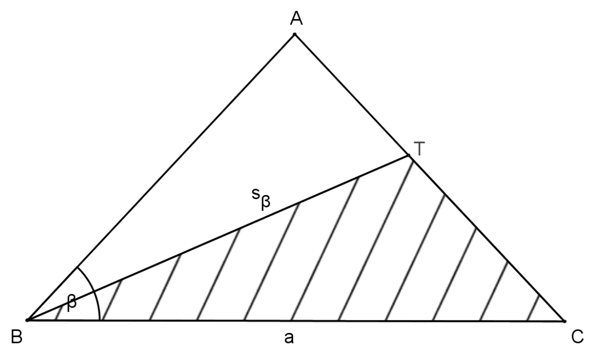
Konstruktivni problem ima četiri etape: analizu sa skicom, konstrukciju s planom konstrukcije, dokaz te diskusiju. Ukoliko je iz analize očito da dobiveni trokut zadovoljava dane uvjete, dokaz ćemo preskočiti.

3.1 Konstrukcije trokuta sa zadana tri elementa od kojih je jedan simetrala kuta

Primjer 1. Konstruirajmo trokut ako je zadano a, β, s_β.

Rješenje. Analiza.

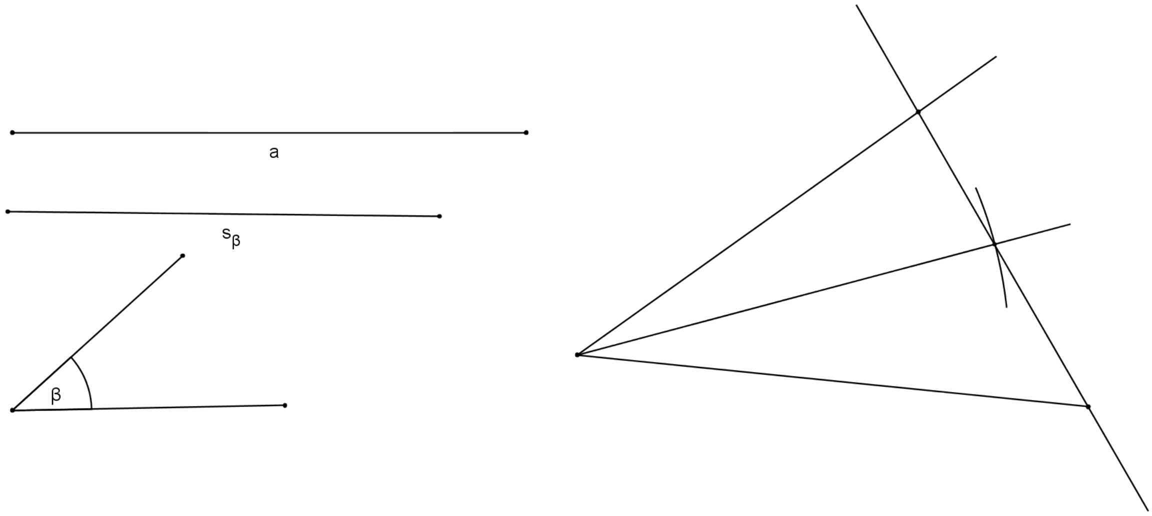
Iz danih podataka moguće je konstruirati trokut BTC. Potom se do točke A dolazi nanošenjem kuta $\frac{\beta}{2}$ na $\overline{BC}$.



Slika 3.1

Plan konstrukcije:

1. Dužina $\overline{BC}$.
2. Kut veličine $\frac{\beta}{2}$ s vrhom u B i krakom BC. Drugi krak kuta označimo s q.
3. $k = k(B, s_\beta)$.
4. $k \cap q = \{T\}$.
5. Kut veličine $\frac{\beta}{2}$ s vrhom u B i krakom BT. Drugi krak kuta označimo s p.
6. $CT \cap p = \{A\}$.



Slika 3.2

Konstrukcija.

Zadani elementi su:

Diskusija.

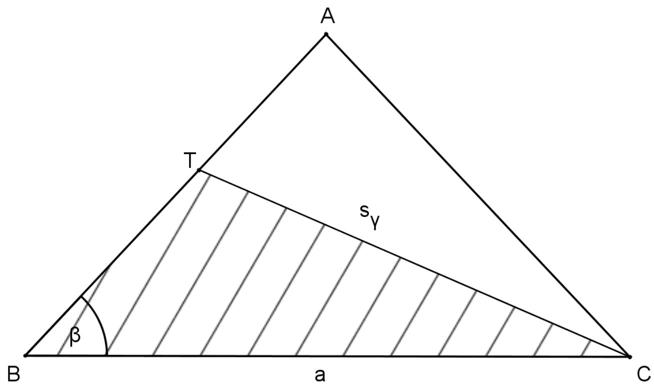
Postoji jedinstveni takav trokut.

U sljedećim ćemo primjerima opisati samo analizu, eventualno plan konstrukcije.

Primjer 2. Konstruirajmo trokut ako je zadano a, β, s_γ.

Rješenje. Analiza.

Iz danih podataka moguće je konstruirati trokut BCT. Potom se do točke A dolazi nanošenjem kuta $\frac{\gamma}{2}$ na $\overline{BC}$.



Slika 3.3

Plan konstrukcije:

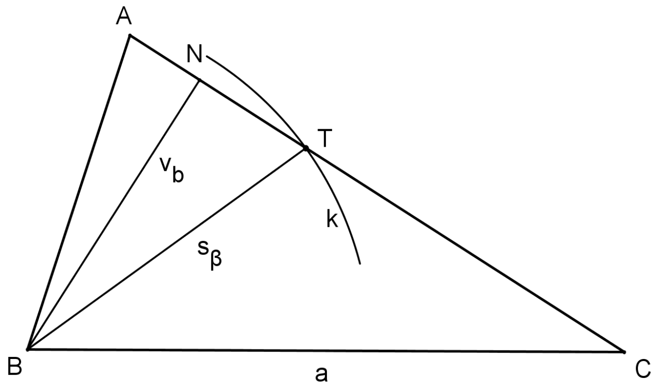
1. Dužina $\overline{BC}$.
2. Kut veličine β s vrhom u B i krakom BC. Drugi krak kuta označimo s q.
3. $k = k(C, s_\gamma)$.
4. $k \cap q = \{T\}$.
5. Kut veličine $\frac{\gamma}{2}$ s vrhom u C i krakom BT. Drugi krak kuta označimo s p.
6. $q \cap p = \{A\}$.

Primjer 3. Konstruirajmo trokut ako je zadano a, v_b, s_β.

Rješenje. Analiza.

Iz danih podataka moguće je konstruirati trokut BCN. Potom se do točke A dolazi osnom simetrijom pravca BC s obzirom na os simetrije BT.

Plan konstrukcije:



Slika 3.4

Razlikujemo dva slučaja: a) $v_b < a$, b) $v_b = a$.
a)

1. Trokut BCN, gdje je N nožište visine duljine v_b na stranicu $\overline{AC}$.
2. $k = k(B, s_\beta)$.
3. $k \cap CN = \{T\}$.
4. Pravac p osnosimetričan s BC s obzirom na os simetrije BT.
5. $p \cap CN = \{A\}$.

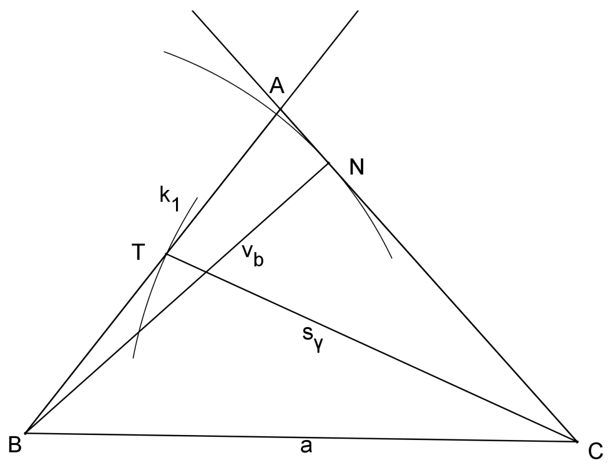
b)

1. Dužina $\overline{BC}$.
2. Okomica iz C na pravac BC, označimo ju s q.
3. $k = k(B, s_\beta)$.
4. $k \cap q = \{T\}$.
5. Pravac p osnosimetričan s BC s obzirom na os simetrije BT.
6. $p \cap q = \{A\}$.

Primjer 4. Konstruirajmo trokut ako je zadano a, v_b, s_γ.

Rješenje. Analiza.

Iz danih podataka moguće je konstruirati trokut BCN. Potom konstruiramo simetralu p kuta γ. Nanošenjem duljine s_γ na pravac p dobijemo točku T. Točku A dobijemo kao presjek pravaca BT i CN.



Slika 3.5

Plan konstrukcije:

Razlikujemo dva slučaja: a) $v_b < a$, b) $v_b = a$.
a)

1. Trokut BCN, gdje je N nožište visine na stranicu AC.
2. Simetrala kuta γ.
3. $k_1 = k(C, s_\gamma)$.
4. $k_1 \cap s_\gamma = \{T\}$.
5. $BT \cap CN = \{A\}$.

b)

1. Dužina $\overline{BC}$.
2. Okomica iz C na pravac BC, označimo ju s q.

3. Simetrala pravog kuta određenog krakovima CB i p.
4. $k_2 = k(C, s_\gamma)$.
5. $k_2 \cap s_\gamma = \{T\}$.
6. $BT \cap CN = \{A\}$.

Primjer 5. Konstruirajmo trokut ako je zadano a, b, s_γ.

Rješenje. Analiza.

Ovaj konstruktivni problem se rješava algebarskom metodom. Iz danih podataka moguće je konstruirati trokut ABC tako da izrazimo c preko tri zadane veličine. Tada imamo osnovnu konstrukciju trokuta (tri zadane stranice). Po Teoremu 1.5.2, znamo da vrijedi

$$s^2(a+b)^2 = ab\left((a+b)^2 - c^2\right).$$

Iz toga izrazimo c te dobijemo

$$c^2 = (a+b)^2 - \frac{s^2(a+b)^2}{ab},$$

odnosno

$$c^2 = (a+b)^2 - y^2,$$

gdje je $y = \sqrt{\frac{s^2(a+b)^2}{ab}} = \sqrt{\frac{s(a+b)}{a} \cdot \frac{s(a+b)}{b}}$.

Označimo

$$x_1 = \frac{s(a+b)}{a}, \quad x_2 = \frac{s(a+b)}{b}.$$

Sad te veličine znamo konstruirati algebarskom metodom, kao i $y = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$ (primjenom Euklidovog poučka). Budući da je $c^2 = (a+b)^2 - y^2$, sad znamo konstruirati c primjenom Pitagorinog poučka pa možemo konstruirati $\triangle ABC$ kojem su dane duljine stranica a, b i c.

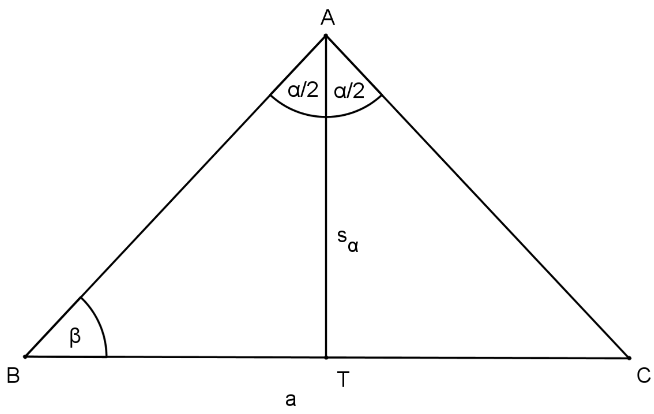
Primjer 6. Konstruirajmo trokut ako je zadano α, β, s_α.

Rješenje. Analiza.

Iz danih podataka moguće je konstruirati trokut ABT. Potom se do točke C dolazi nanošenjem kuta $\frac{\alpha}{2}$ na $\overline{AT}$.

Plan konstrukcije:

1. Dužina $\overline{AT}$.



Slika 3.6

2. Kut veličine $\frac{\alpha}{2}$ s vrhom u A i krakom AT. Drugi krak kuta označimo s q.
3. Kut veličine $180^\circ - \beta - \frac{\alpha}{2}$ s vrhom u T i krakom TA. Drugi krak kuta označimo s p.
4. $p \cap q = \{B\}$.
5. Kut TAC veličine $\frac{\alpha}{2}$.
6. $p \cap AC = \{C\}$.

Primjer 7. Konstruirajmo trokut ako je zadano α, β, s_γ.

Rješenje. Analiza.

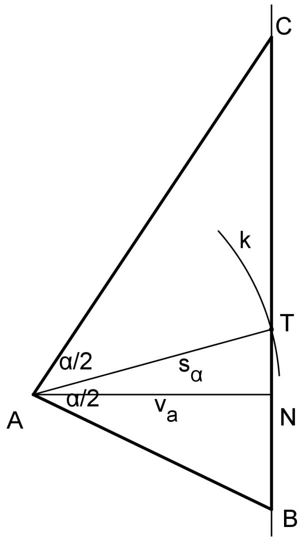
Znamo da je $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$. Sad ovaj primjer svodimo na prethodni za zadane α, γ, s_γ.

Primjer 8. Konstruirajmo trokut ako je zadano α, v_a, s_α.

Rješenje. Analiza.

Razlikujemo dva slučaja: a) $v_a < s_\alpha$, b) $v_a = s_\alpha$.

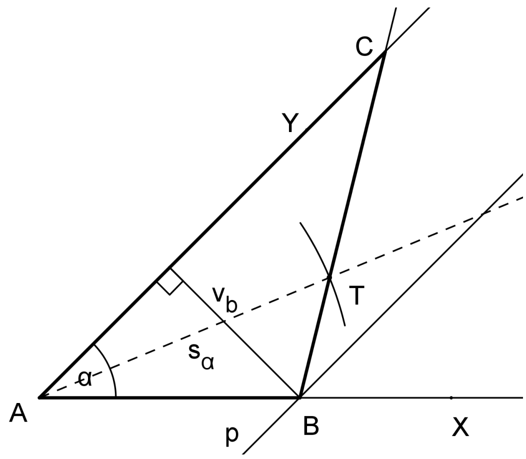
a) Iz danih podataka moguće je konstruirati trokut ANT. Potom se do točaka B i C dolazi nanošenjem kuta veličine $\frac{\alpha}{2}$ na $\overline{AT}$ s obje strane.
b) Dužine $\overline{AN}$ i $\overline{AT}$ se podudaraju. Prvo konstruiramo dužinu $\overline{AN}$ duljine v_a te okomicu na pravac AN kroz točku N, a zatim nanosimo kut veličine $\frac{\alpha}{2}$ na $\overline{AN}$ s obje strane.



Slika 3.7

Primjer 9. Konstruirajmo trokut ako je zadano α, v_b, s_α.

Rješenje. Analiza.



Slika 3.8

Iz podataka α i v_b možemo konstruirati pravokutni trokut ABN čiji vrh N je nožište visine v_b na stranicu $\overline{AC}$ traženog trokuta. Kad znamo položaj točke A, tada možemo odrediti i položaj točke T jer je $|AT| = s_\alpha$. Točku C sada dobijemo kao presjek pravaca AN i BT.

Konstrukcija.

Konstruiramo kut XAY veličine α (točka B pripada polupravcu AX, a točka C pripada polupravcu AY). Zatim konstruiramo pravac p paralelan s AY na udaljenosti v_b od pravca AY. Presjek pravca p i polupravca AX je točka B. Sada konstruiramo simetralu AT kuta α duljine s_α. Presjek pravaca BT i AY je točka C.

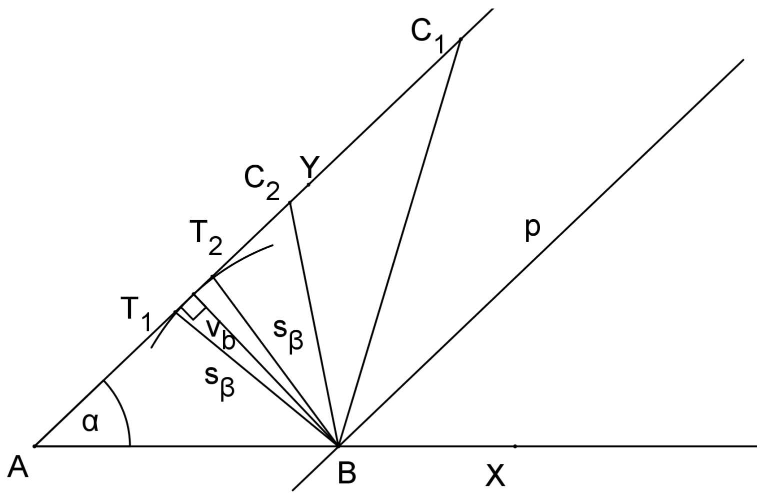
Primjer 10. Konstruirajmo trokut ako je zadano α, v_b, s_β.

Rješenje. Analiza.

Iz podataka α i v_b možemo konstruirati pravokutni trokut ABN čiji vrh N je nožište visine v_b na stranicu $\overline{AC}$ traženog trokuta. Kad znamo položaj točke B, tada možemo odrediti i položaj točke T jer je $|BT| = s_\beta$. Time je određena i polovina kuta β. Nanošenjem kuta $\sphericalangle ABT$ na krak BT dobivamo cijeli kut β, tj. dolazimo do točke C.

Konstrukcija.

Konstruiramo kut XAY veličine α (točka B pripada polupravcu AX, a točka C pripada polupravcu AY). Zatim konstruiramo pravac p paralelan s AY na udaljenosti v_b od pravca AY. Presjek pravca p i polupravca AX je točka B. Sada konstruiramo kružnicu iz točke B polumjera s_β. Presjek te kružnice i polupravca AY je točka T. Presjek polupravca AY i pravca osnosimetričnog pravcu AB s obzirom na os simetrije BT je točka C.



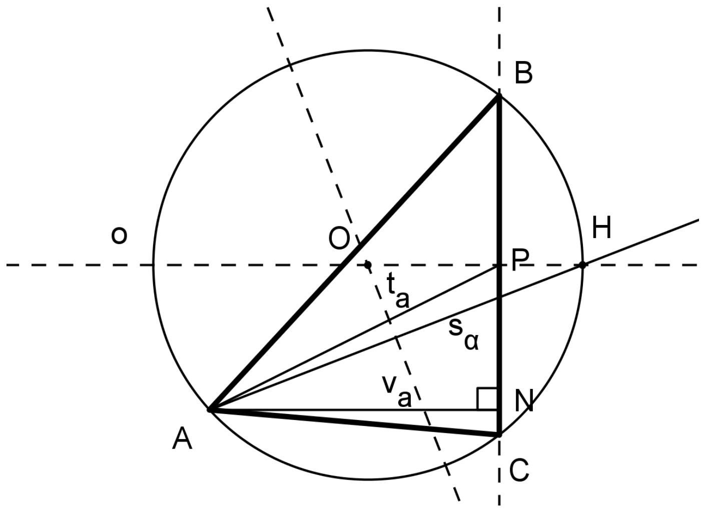
Slika 3.9

Primjer 11. Konstruirajmo trokut ako je zadano s_α, v_a, t_a.

Rješenje. Analiza.

Razlikujemo dva slučaja: a) $v_a < s_\alpha$, b) $v_a = s_\alpha$.

a) Visinu v_a i težišnicu t_a možemo smatrati kao katetu i hipotenuzu pravokutnog trokuta APN. Druga kateta tog trokuta određuje pravac PN na kojem leži stranica $\overline{BC}$. Krajnjom točkom težišnice P konstruiramo okomicu o na BC (simetralu stranice $\overline{BC}$). Po Teoremu 1.2.3, ta okomica siječe simetralu kuta s_α u točki na opisanoj kružnici traženog trokuta ABC. Označimo tu točku s H. Sjecište simetrale dužine AH i pravca o je središte opisane kružnice traženog trokuta. Točke B i C su presjek opisane kružnice (sa središtem u točki O, radijusa $|OA|$) i pravca PN.



Slika 3.10

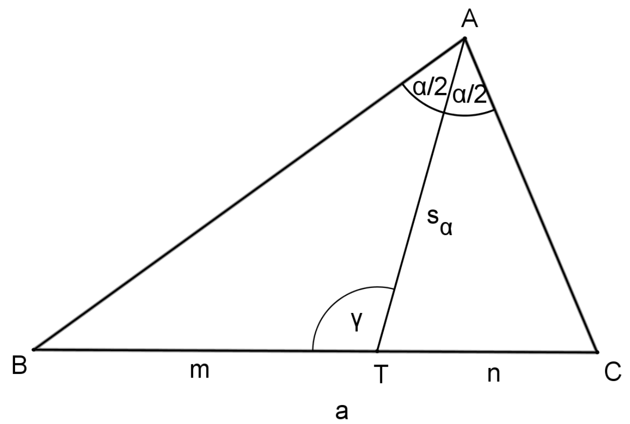
b) Očito vrijedi da je $v_a = t_a = s_\alpha$ i rješenja su svi jednakokračni trokuti čija je visina na osnovica duljine v_a.

Primjer 12. Konstruirajmo trokut ako je zadano a, α, s_α.

Rješenje. Analiza.

Ova konstrukcija je složenija u svojoj analizi i ona se ne može provesti bez korištenja algebre i trigonometrije. Koristit ćemo teorem o sinusima na trokute ABT i ATC (vidi Sliku 3.11):

$$\begin{aligned}
\frac{m}{s_\alpha} &= \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\pi - \frac{\alpha}{2} - \omega\right)} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\omega + \frac{\alpha}{2}\right)},\\
\frac{n}{s_\alpha} &= \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\pi - \frac{\alpha}{2} - (\pi - \omega)\right)} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\omega - \frac{\alpha}{2}\right)}.
\end{aligned}$$



Slika 3.11

Iz toga slijedi

$$\begin{aligned}
a = m + n = s_\alpha \sin\frac{\alpha}{2}&\left(\frac{1}{\sin\left(\omega + \frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\omega - \frac{\alpha}{2}\right)}\right)\\
&= s_\alpha \sin\frac{\alpha}{2}\frac{\sin\left(\omega + \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\omega - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\omega + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\omega - \frac{\alpha}{2}\right)} = s_\alpha \sin\frac{\alpha}{2}\frac{2\sin\omega\cos\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{2}(\cos\alpha - \cos 2\omega)}\\
&= \frac{4s_\alpha \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\omega}{\cos\alpha - 1 + 2\sin^2\omega} = \frac{4s_\alpha \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\omega}{2\sin^2\omega - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}.
\end{aligned}$$

Dobijamo kvadratnu jednadžbu varijable $\sin\omega$:

$$a\sin^2\omega - 2s_\alpha \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\omega - a\sin^2\frac{\alpha}{2} = 0.$$

Njeno rješenje je:

$$\sin\omega = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{a}\left[s_\alpha\cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(s_\alpha^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + a^2\right)}\right],$$
$$\frac{\sin\omega}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{a}\left[s_\alpha\cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(s_\alpha^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + a^2\right)}\right].$$

Drugo rješenje nema geometrijsko značenje jer je $0 < \omega < 2\pi$.
Označimo $z = x + y$, gdje je $x = s_\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$, a $y = \sqrt{x^2 + a^2}$. Duljina x je duljina katete pravokutnog trokuta s hipotenuzom s_α i kutom $\frac{\alpha}{2}$, dok je y hipotenuza pravokutnog trokuta s katetama x i a. Sada znamo konstruirati z. Budući da je

$$\frac{\sin\omega}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{z}{a},$$

znači da možemo konstruirati trokut sa stranicama z i a i kutom $\frac{\alpha}{2}$ nasuprot stranice a, gdje će ω biti kut nasuprot stranice z. Sad kad znamo ω, možemo dobiti kutove

$$\beta = \pi - \frac{\alpha}{2} - \omega, \quad \gamma = \pi - \frac{\alpha}{2} - (\pi - \omega) = \omega - \frac{\alpha}{2}$$

. Budući da imamo a, β i γ, sad je lako konstruirati trokut ABC.

Primjer 13. Nije moguće konstruirati trokut ako je zadano a, b, s_α.

Dokaz. Pokažimo prvo da postoji trokut ABC tako da je $a = 1, b = 1, s_\alpha = 1$. Pođimo od jednakokračnog trokuta s krakovima $a = b = 1$ s nekim kutom $\sphericalangle ACB$. Pustimo li da $\sphericalangle ACB$ raste od blizu $0°$ do blizu $180°$, onda se pripadni s_α mijenja od neke vrijednosti manje od 1 do neke vrijednosti veće od 1, pa mora postojati $\sphericalangle ACB$ takav da je $s_\alpha = 1$ (zbog neprekidnosti). Trokut je moguće konstruirati ako znamo konstruirati još stranicu c. Očito je da vrijedi $P(ADC) + P(ABD) = P(ABC)$, tj.

$$\frac{1}{2}s_\alpha b\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}s_\alpha c\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha,$$

odnosno

$$(b + c)s_\alpha = 2bc\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Iz adicijske formule za kosinus polovičnog kuta i kosinusovog poučka slijedi

$$s_\alpha^2(b + c)^2 = bc[(b + c)^2 - a^2].$$

Uvrstimo li ovamo $a = b = s_\alpha = 1$, dobivamo nakon sređivanja

$$c^3 + c^2 - 2c - 1 = 0.$$

Ova jednadžba nema racionalnih rješenja, pa se c ne može konstruirati ravnalom i šestarom, te stoga ni traženi trokut. □

Primjer 14. Nije moguće konstruirati trokut ako je zadano $s_\alpha, s_\beta, s_\gamma$.

Dokaz. Da dokažemo nerješivost ovog zadatka dovoljno je dokazati nerješivost za jednu posebnu trojku dužina $\overline{AT_1}, \overline{BT_2}, \overline{CT_3}$, za koju postoji trokut ABC takav da su mu to simetrale unutarnjih kutova duljina $s_\alpha, s_\beta, s_\gamma$. Lako je provjeriti da za

$$s_\alpha = \frac{1}{2}, \quad s_\beta = s_\gamma = 2$$

postoji jednakokračan trokut ABC s takvim simetralama unutarnjih kutova. Možemo zadati za simetralu kuta α dužinu $\overline{AT_1}$ za koju je duljina s_α i promatrati sve jednakokračne trokute s s_α kao simetralom kuta pri vrhu A. Lako se vidi da postoje trokuti s ostalim dvjema simetralama od duljine nula do bilo koje velike duljine. Iz razloga neprekinutosti mora, dakle, postojati trokut sa simetralama $s_\beta = s_\gamma = 2$.
Promotrimo jedan takav jednakokračan trokut ABC i posebno trokut ABT_1. Na temelju sinusovog poučka za trokut ABT_1 imajući na umu da je

$$\alpha = 180^\circ - 2\beta \quad \text{i} \quad \sphericalangle AT_2B = \frac{3}{2}\beta$$

slijedi

$$c \cdot \sin 2\beta = s_\beta \cdot \sin \frac{3}{2}\beta.$$

Kako je $c \cdot \sin\beta = s_\alpha$, $s_\alpha = \frac{1}{2}$ i $s_\beta = 2$, imamo dalje

$$\frac{1}{2}\sin 2\beta = 2 \sin \frac{3}{2}\beta \sin\beta,$$

odatle je

$$\cos\beta = 2 \sin \frac{3}{2}\beta,$$

i napokon

$$1 - 2\sin^2\frac{\beta}{2} = 6 \sin\frac{\beta}{2} - 8\sin^3\frac{\beta}{2}.$$

Uvrstimo li ovdje $x = 4\sin\frac{\beta}{2}$, imamo

$$x^3 - x^2 - 12x + 8 = 0.$$

Kad bi $x = 4\sin\frac{\beta}{2}$ bio broj koji je konstruktibilan uz zadane simetrale $\frac{1}{2}$ i 2, tada bi ova jednadžba morala imati jedno rješenje koje je konstruktibilno. No, tada bi po Teoremu 18.3. [12] ta jednadžba imala najmanje jedno racionalno rješenje, koje bi dalje prema Teoremu 18.4. [12] moralo biti djelitelj broja 8. No, nijedan od brojeva $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ nije rješenje te jednadžbe, što nas dovodi do kontradikcije. Ova konstrukcija se, dakle, ne dade riješiti pomoću ravnala i šestara.

$\square$

Bibliografija

[1] *Temeljni pojmovi o trokutu*, http://www.math.uniri.hr/~ajurasic/trokut.pdf.

[2] B. Dakić, *Nadopuna lika*, MiŠ **14** (2002), http://mis.element.hr/fajli/217/14-03.pdf.

[3] D. Ilišević i M. Bombardelli, *Elementarna geometrija*, 2007, http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf.

[4] I. Ilišević, *Dokazi nekih planimetrijskih činjenica koordinatnom metodom*, Osječki matematički list **12** (2013), 83–103, http://hrcak.srce.hr/index.php?show=clanak&id_clanak_jezik=148122.

[5] Z. Kolar-Begović i A. Tonković, *Feuerbachov teorem*, Osječki matematički list **9** (2009), 21–30, http://hrcak.srce.hr/file/67180.

[6] V. Oxman, *On the existence of triangles with given lengths of one side and two adjacent angle bisectors*, Forum Geometricorum **4** (2004), 215–218.

[7] ———, *On the existence of triangles with given circumcircle, incircle, and one additional element*, Forum Geometricorum **5** (2005), 165–171.

[8] ———, *On the existence of triangles with given lengths of one side, the opposite and one adjacent angle bisectors*, Forum Geometricorum **5** (2005), 21–22.

[9] ———, *A purely geometric proof of the uniqueness of a triangle with prescribed angle bisectors*, Forum Geometricorum **8** (2008), 197–200.

[10] ———, *A purely geometric proof of the uniqueness of a triangle with given lengths of one side and two angle bisectors*, Annales Mathematicae et Informaticae **36** (2009), 175–180.

[11] D. Palman, *Geometrijske konstrukcije*, Element, Zagreb, 1996.

[12] B. Pavković i D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga - Zagreb, 1992.

[13] J. Švrček i J. Vanžura, *Geometrie trojuhelnika*, Polytechnicka knižnice, Praha, 1988.

Sažetak

U prvom poglavlju se progovara o simetrali kuta te simetralama kutova trokuta. Definirana je simetrala kuta, opisana je njezina konstrukcija za dani kut te je iskazan i dokazan Teorem o simetrali kuta. Nadalje, iskazani su i dokazani teoremi koji govore o svojstvima simetrala unutarnjih kutova trokuta. Najvažniji od njih, Teorem o simetrali unutarnjeg kuta trokuta, dokazan je na četiri načina, a također je iskazan i dokazan i njegov obrat. Proučeni su i analogoni tog teorema. Jedan od analogona govori o simetrali vanjskog kuta trokuta, a drugi o simetralnoj ravnini tetraedra (analogija simetrale kuta u prostoru). Zatim su izvedene formule za duljine simetrala unutarnjih kutova trokuta i duljine odsječaka koji nastaju presjekom simetrale unutarnjeg kuta i nasuprotne stranice trokuta. Na kraju poglavlja su iskazani još neki teoremi o simetralama kutova trokuta i središtu trokutu upisane kružnice.

Preostali dio rada je posvećen konstruktivnim problemima, tj. izvodljivosti konstrukcije trokuta ako je barem jedan od zadanih elemenata trokuta simetrala unutarnjeg kuta tog trokuta. U drugom su poglavlju dani dovoljni i nužni uvjeti o postojanju i jedinstvenosti trokuta kojem su zadane duljine jedne stranice i dvije simetrale kuta, opisana i upisana kružnica i duljina simetrale kuta, duljine simetrala unutarnjih kutova trokuta. Treće poglavlje je posvećeno konkretnim primjerima opisa konstrukcija trokuta. Na početku se poglavlja govori o tome što znači riječ konstruirati te su u tablici izdvojene sve one konstrukcije trokuta u kojima su zadane tri veličine, od kojih je barem jedna od zadanih veličina duljina simetrale unutarnjeg kuta. Neke od rješivih konstrukcija su opisane, a za dvije konstrukcije koje nisu rješive je dokazana nerješivost.

Summary

The first chapter summarizes facts about the angle bisector and the triangle angle bisectors. The angle bisector is defined, the construction of the given angle is described and the Angle bisector Theorem is expressed and proven. Furthermore, the theorems which define the performances of the interior angle bisectors of a triangle are expressed and proven. The most important theorem, the Angle bisector Theorem of triangles, is proven in four ways, as is its opposite. The analogues of this theorem are also studied. One of these analogues describes property of the exterior angle bisector of a triangle, while the other deals with the bisecting plane of a tetrahedron. As well, the formulae for the lengths of an interior angle bisector of a triangle and formulae of sections which are the result of an intersection of an interior angle bisector on the opposite side of the triangle are derived. At the end of the chapter other theorems related to an angle bisector of a triangle and an incircle of a triangle are presented.

The remainder of the thesis concerns constructive problems i.e feasibility of the triangle construction if at least one given element is an angle bisector of that triangle. In the second chapter the necessary and sufficient conditions of the existence and uniqueness of a triangle for which is given the following; the length of one side and two angle bisectors, the circumcircle, incircle and the length of the angle bisector, and the length of the interior angle bisectors of the triangle. The third chapter is related to concrete examples of the descriptions of the triangle's construction. Firstly, the word ”construction” is described. Secondly, in the table, the triangle constructions which have three given elements where at least one of these elements is the length of the angle bisector is extracted. Some of the solvable constructions are described while for two constructions that are unsolvable, the unsolvability is proven.

Životopis

Zovem se Martina Soldo. Imam 24 godine i živim s roditeljima te mlađom sestrom i bratom. Rođena sam 11. studenog 1989. godine u Zagrebu. Pohađala sam osnovnu školu ”Bukovac”. Zatim sam upisala III. opću gimnaziju u Zagrebu koju sam završila odličnim uspjehom 2008. godine. Iste godine sam upisala Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu. Godine 2012. sam završila preddiplomski studij matematike; smjer: nastavnički, te upisala na istom smjeru diplomski studij. Dobitnica sam stipendija Sveučilišta u Zagrebu i zaklade ”Hrvatska za djecu” te priznanja za izniman uspjeh na studiju od Prirodoslovno-matematičkog fakulteta akademske godine 2013./2014. U slobodno vrijeme pjevam u crkvenom zboru ”Advocata Croatiae” u Remetama.